

**ANÁLISE DE SISTEMAS REATIVOS PARA CONTROLE DE RUÍDO  
EM DUTOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Alexander Mattioli Pasqual

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"ANÁLISE DE SISTEMAS REATIVOS PARA CONTROLE DE RUÍDO  
EM DUTOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS"**

Alexander Mattioli Pasqual

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

---

Prof. M.Sc. Marco Antônio de Mendonça Vecci  
DEES- UFMG - (Orientador)

---

Prof. Dr. Marcos Vinicius Bortolus  
DEMEC - UFMG

---

Prof. Dr. Maurílio Nunes Vieira  
Física - UFMG

---

Prof. Dr. José Roberto de França Arruda  
UNICAMP

Belo Horizonte, 30 de setembro de 2005

## **AGRADECIMENTOS**

Aos professores e demais funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, em especial ao Prof. Marco Antônio de Mendonça Vecci, os quais possibilitaram a realização deste trabalho; à Tamara Drumond Martins e ao Dr. Gustavo Luiz C. Manhães de Abreu, pelo auxílio nas atividades computacionais e de pesquisa bibliográfica, bem como pelos comentários cuja pertinência muito colaborou para a qualidade final deste texto.

## SUMÁRIO

1 Introdução.....	1
2 Fundamentos Teóricos.....	8
2.1 Propagação de Ondas Sonoras.....	8
2.1.1 Equação da Continuidade de Massa.....	10
2.1.2 Equação de Movimento.....	12
2.1.3 Equação de Estado.....	15
2.1.4 Irrotacionalidade e Funções Potenciais.....	20
2.1.5 Equação de Onda.....	21
2.1.6 Dutos de Seção Circular.....	25
2.1.7 Impedância Acústica.....	27
2.1.8 Potência Sonora de Ondas Planas em Escoamento Uniforme.....	29
2.2 Controle Reativo de Ruído.....	30
2.2.1 Parâmetros de Desempenho para Sistemas de Controle de Ruído.....	31
2.2.1.1 Perda por inserção.....	32
2.2.1.2 Perda por transmissão.....	33
2.2.1.3 Redução de ruído ou diferença de nível sonoro.....	35
2.2.1.4 Comparação entre os parâmetros de desempenho.....	35
2.2.2 Descontinuidades Geométricas.....	36
2.2.3 Perda por Transmissão em Câmaras de Expansão Simples.....	39
3 Método dos Elementos Finitos.....	43
3.1 Método dos Resíduos Ponderados.....	44
3.1.1 Definições Básicas.....	44
3.1.2 Método de Galerkin.....	46
3.2 Formulação Numérica pelo MEF.....	46
3.2.1 Escoamento Irrotacional.....	47
3.2.2 Propagação Sonora.....	51
3.2.3 Formulação Paramétrica.....	57

3.2.3.1 Elemento finito bidimensional retangular de quatro nós.....	57
3.2.3.2 Elemento finito bidimensional quadrilateral de oito nós.....	61
<b>4 Resultados e Discussões.....</b>	<b>69</b>
4.1 Considerações Preliminares.....	70
4.2 Câmara de Expansão Simples.....	74
4.2.1 Avaliação da Pressão Sonora.....	75
4.2.1.1 Meio estacionário.....	75
4.2.1.2 Meio não estacionário.....	81
4.2.2 Avaliação da Perda por Transmissão.....	82
4.3 Câmara de Expansão com Extremidades Estendidas.....	85
4.4 Câmara de Expansão Dupla.....	89
4.5 Câmara de Expansão Dupla com Extremidades Estendidas e Tubo Central...	92
4.6 Comparação entre as Configurações de Câmaras de Expansão Estudadas.....	95
<b>5 Conclusões.....</b>	<b>96</b>
<b>6 Referências Bibliográficas.....</b>	<b>101</b>
<b>Anexo A.....</b>	<b>108</b>

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 -	Sistemas típicos de atenuadores de ruído (EVANS, 2002): a) atenuador dissipativo; b) atenuador reativo com duas câmaras; c) atenuador reativo com três câmaras.....	3
FIGURA 1.2 -	Câmara de expansão simples.....	4
FIGURA 2.1 -	Volume de controle $dV = dx.dy.dz$ .....	10
FIGURA 2.2 -	Esquema de um sistema de dutos com terminação anecóica.....	33
FIGURA 2.3 -	Tubos com: a) Contração súbita; b) Expansão súbita.....	37
FIGURA 2.4 -	Esquema de uma câmara de expansão simples.....	40
FIGURA 3.1 -	Modelo geométrico de uma câmara de expansão com simetria axial.....	50
FIGURA 3.2 -	Elemento finito bidimensional retangular de quatro nós.....	58
FIGURA 3.3 -	Elemento finito bidimensional quadrilateral de oito nós.....	62
FIGURA 3.4 -	Exemplo de malha que utiliza elementos paramétricos quadrilaterais de oito nós.....	63
FIGURA 4.1 -	Configurações clássicas de câmaras de expansão.....	71
FIGURA 4.2 -	Malha constituída por 300 elementos quadrados de lado igual a 10 mm.....	71
FIGURA 4.3 -	Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão simples na ausência de escoamento; frequências correspondentes a baixos valores de $TL$ .....	77
FIGURA 4.4 -	Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão simples na ausência de escoamento; frequências correspondentes a altos valores de $TL$ .....	79
FIGURA 4.5 -	Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão simples na ausência de escoamento; frequências altas.....	80
FIGURA 4.6 -	Distribuição de $\phi^F$ em uma câmara de expansão simples na presença de um escoamento em que $M_e = 0,3$ .....	81
FIGURA 4.7 -	Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão simples na presença de um escoamento em que $M_e = 0,3$ .....	82

FIGURA 4.8 - Comparação entre os valores da $TL$ para uma câmara de expansão simples calculados por técnicas analíticas aplicadas a modelos unidimensionais.....	83
FIGURA 4.9 - Comparação entre os valores da $TL$ para uma câmara de expansão simples calculados pelo modelo unidimensional isoentrópico e pelo MEF.....	84
FIGURA 4.10 - Comparação entre os valores da $TL$ para uma câmara de expansão com extremidades estendidas calculados pelos modelos unidimensional e bidimensional.....	87
FIGURA 4.11 - Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão com extremidades estendidas na ausência de escoamento.....	88
FIGURA 4.12 - Distribuição de $\phi^F$ em uma câmara de expansão com extremidades estendidas na presença de um escoamento em que $M_e = 0,3$ .....	88
FIGURA 4.13 - Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão com extremidades estendidas na presença de um escoamento em que $M_e = 0,3$ ; $f = 2550$ Hz.....	89
FIGURA 4.14 - Comparação entre os valores da $TL$ obtidos pelo MEF para uma câmara de expansão dupla e uma câmara de expansão simples...	90
FIGURA 4.15 - Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão dupla na ausência de escoamento.....	91
FIGURA 4.16 - Distribuição de $\phi^F$ em uma câmara de dupla na presença de um escoamento em que $M_e = 0,3$ .....	91
FIGURA 4.17 - Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão dupla na presença de um escoamento em que $M_e = 0,3$ .....	92
FIGURA 4.18 - Comparação entre os valores da $TL$ obtidos pelo MEF para uma câmara de expansão dupla com extremidades estendidas e tubo central e uma câmara de expansão simples.....	93
FIGURA 4.19 - Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão dupla com extremidades estendidas e tubo central na ausência de escoamento.....	93

- FIGURA 4.20 - Distribuição de  $\phi^F$  em uma câmara de dupla com extremidades estendidas e tubo central na presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$ ..... 94
- FIGURA 4.21 - Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão dupla com extremidades estendidas e tubo central na presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$ ..... 94
- FIGURA 4.22 - Comparação entre os valores da  $TL$  obtidos pelo MEF para diversas configurações de câmaras de expansão na presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$ ..... 95



**LISTA DE TABELAS**

TABELA 3.1 - Funções de forma do elemento retangular de quatro nós e suas respectivas derivadas.....	61
TABELA 3.2 - Funções de forma do elemento quadrilateral de oito nós e suas respectivas derivadas.....	62
TABELA 3.3 - Coordenadas dos pontos de integração e seus respectivos pesos em função do número de pontos (DHATT e TOUZOT, 1984)....	67
TABELA 4.1 - Freqüências em que ocorrem os oito primeiros valores mínimos e máximos de perda por transmissão.....	76
TABELA 4.2 - Perda por transmissão e amplitude da pressão sonora no tubo de saída calculadas pelos modelos unidimensionais e bidimensionais.....	80
TABELA A.1 - Pontos de inflexão de $J_m$ (KINSLER et al., 1982).....	112

## LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

- $c_o$  – Velocidade de propagação do som;
- $C_p$  – Capacidade térmica a pressão constante;
- $C_V$  – Capacidade térmica a volume constante;
- CONAMA – Conselho Nacional do Meio Ambiente;
- $D$  – Diâmetro;
- $e$  – Energia interna específica;
- $E$  – Energia interna;
- $f$  – Frequência;
- $h$  – Entalpia específica;
- $I$  – Intensidade sonora;
- $IL$  – Perda por inserção;
- $j = \sqrt{-1}$  ;
- $\bar{J}$  - Matriz Jacobiana;
- $J_m$  - Função de Bessel de primeira espécie de ordem  $m$ ;
- $k$  – Número de onda;
- $L$  – Comprimento;
- $L_W$  – Nível de potência sonora;
- $LD$  – Diferença de nível sonoro;
- $m$  – massa;
- $M$  – Número de Mach;
- $M_c$  – Número de Mach médio no interior da câmara;
- $M_e$  – Número de Mach médio no tubo de entrada;
- M.C.I. – Motor de Combustão Interna;
- MEC – Método dos Elementos de Contorno;
- MEF – Método dos Elementos Finitos;
- $N$  – Função de forma;
- $N_m$  - Função de Bessel de segunda espécie de ordem  $m$ ;
- $NR$  – Redução de ruído;
- $p$  – Pressão total;
- $p^A$  – Pressão sonora;

$p^F$  – Pressão de equilíbrio;  
 $Q$  - Energia térmica;  
 $r$  – Coordenada radial;  
 $r_o$  – Raio interno;  
 $R$  – Constante do gás / Peso do ponto de integração de Gauss;  
 $Re$  – Número de Reynolds;  
 $s$  – Entropia específica;  
 $S$  – Área;  
 $t$  – Tempo;  
 $T$  – Temperatura / Período;  
 $TL$  – Perda por transmissão;  
 $\vec{u}^A$  - Vetor velocidade correspondente à excitação acústica;  
 $\vec{u}^F$  - Vetor velocidade média correspondente ao escoamento;  
 $V$  – Volume;  
 $w$  - Função peso;  
 $W$  – Potência sonora;  
 $z$  – Coordenada longitudinal;  
 $Z$  – Impedância acústica.

### **Letras Gregas:**

$\phi^A$  – Potencial acústico;  
 $\phi^F$  – Potencial relativo ao escoamento;  
 $\Phi^A$  – Amplitude complexa do potencial acústico;  
 $\Gamma$  - Linha de delimitação do domínio (contorno);  
 $\gamma$  - Razão entre os calores específicos a pressão constante e a volume constante;  
 $\eta$  - Coordenada natural;  
 $\lambda$  - Comprimento de onda;  
 $\nu$  - Viscosidade cinemática;  
 $\theta$  - Coordenada angular;

$\rho$  - Densidade do meio;

$\rho_0$  - Densidade do meio na ausência de perturbação acústica;

$\omega$  - Frequência angular;

$\Omega$  - Domínio;

$\xi$  - Coordenada natural.

## RESUMO

Os sistemas para exaustão de gases de motores de combustão interna são umas das principais fontes sonoras em ambientes urbanos. A fim de reduzir o ruído gerado por tais equipamentos, câmaras de expansão são geralmente utilizadas por serem atenuadores reativos de ruído.

Para a avaliação do desempenho acústico de câmaras de expansão, modelos matemáticos unidimensionais têm sido amplamente utilizados, mas estes não consideram os efeitos que a propagação de modos acústicos superiores e o escoamento de gases pelos dutos exercem sobre o comportamento acústico do sistema. Posto que os atenuadores reais geralmente apresentam dimensões transversais relativamente grandes, configurações geométricas complexas e são submetidos a escoamentos não uniformes em seu interior, sabe-se que tais efeitos provocam uma diferença significativa entre os resultados obtidos através de análises unidimensionais e os dados experimentais.

Neste trabalho, o método dos elementos finitos (MEF) foi utilizado para avaliar a perda por transmissão apresentada por diversas configurações de câmaras de expansão. Para o cálculo das variáveis referentes ao escoamento e à propagação sonora, foi desenvolvido um programa computacional baseado no MEF. As equações algébricas foram obtidas utilizando o método de Galerkin considerando simetria axial e escoamento irrotacional. Os valores da perda por transmissão em uma câmara de expansão simples com e sem escoamento foram comparados. Então, os efeitos devido à utilização de extremidades estendidas e à inserção de uma placa rígida no centro da câmara foram avaliados. Além disso, alguns resultados numéricos foram comparados com modelos unidimensionais.

Observou-se que o desempenho acústico pode ser drasticamente alterado pela existência de extremidades estendidas e/ou de uma placa no centro da câmara. A presença de escoamentos irrotacionais também afeta o desempenho acústico. Os resultados sugerem que configurações geométricas complexas tendem a ser mais sensíveis ao escoamento, enquanto que a perda por transmissão em câmaras geometricamente simples não é modificada pelo escoamento, o qual pode ser desprezado.

## ABSTRACT

Exhaust systems of internal combustion engines are one of the main noise sources in the urban environment. In order to reduce the sound levels generated by such equipment, expansion chambers are usually employed once they are a type of reactive mufflers.

For the prediction of expansion chambers acoustic performance, one-dimensional mathematical models have had wide acceptance, but they do not consider the effects of higher order modes propagation and mean flow through the ducts. Once practical mufflers generally have large cross-sectional dimensions, complicated geometry and are subjected to non-uniform mean flow, it is well known that such effects cause a noticeable difference between the results from one-dimensional analysis and experimental data.

In this work, the transmission loss for different circular expansion chambers configurations was computed by using the finite element method (FEM). In order to evaluate both the acoustic and mean flow variables, a FEM software was developed. The finite element equations were obtained by the Galerkin's method for the axisymmetric condition and irrotational mean flows. Predicted values of transmission loss of a simple expansion chamber without and with mean flow were compared. Then, the effects due to the presence of extended inlet/outlet tubes were computed, as well as the presence of a rigid baffle in the center of the chamber. In addition, some of these numerical results were compared with one-dimensional analytical solutions.

It is shown that acoustic attenuation performance can be drastically modified by adding extended inlet/outlet ducts and/or a centered baffle in the chamber. The presence of an irrotational mean flow can also affect the acoustic performance. It is suggested that a complicated geometry tends to be more sensitive to the mean flow, while the transmission loss for chambers with simple regular geometry is not affected by the mean flow, which can be neglected.

# 1

## INTRODUÇÃO

“Todos têm direito ao meio ambiente ecologicamente equilibrado, bem de uso comum do povo e essencial à sadia qualidade de vida, impondo-se ao Poder Público e à coletividade o dever de defendê-lo e preservá-lo para as presentes e futuras gerações” (Constituição da República Federativa do Brasil, art. 225, 1988). Raros serão aqueles a contestar a legitimidade desta afirmativa; no entanto, outros, em maior número, hão de atribuir à poluição sonora um *status* inferior, ou até mesmo insignificante, comparativamente às demais agressões praticadas contra o meio ambiente. Face à crescente urbanização – acompanhada pelo incremento dos níveis sonoros - e aos avanços no conhecimento científico a respeito dos efeitos negativos do ruído sobre o ser humano e a sociedade, tal opinião depreciativa tende a desaparecer. Essa conclusão emerge quando se observa a crescente preocupação por parte dos Estados no que se refere ao controle das emissões sonoras, a qual pode ser seguramente atribuída a uma genuína demanda social.

Uma vez admitida a importância de se controlar a poluição sonora, o ruído proveniente do tráfego de veículos automotivos surge como uma questão particularmente desafiadora. Segundo OUIS (2001), dentre os fatores poluentes relacionados à utilização

de tais meios de transporte, talvez o ruído seja o mais citado pela população; além disso, o número de veículos em circulação vem aumentando, enquanto que, simultaneamente, os períodos de silêncio durante a noite tendem a diminuir. Nota-se que a preocupação referente ao ruído de tráfego não é recente: em 1968, a partir de estudos desenvolvidos na Grã-Bretanha, GRIFFITHS e LANGDON propuseram um indicador sonoro específico para avaliar o incômodo causado pelo ruído de tráfego<sup>1</sup>; em seu trabalho, estes autores mencionam que o tráfego de veículos é justamente a fonte sonora mais freqüentemente associada ao incômodo em lares britânicos.

Basicamente, o ruído de tráfego pode ser reduzido isolando acusticamente o receptor da fonte sonora ou promovendo uma diminuição nos níveis sonoros emitidos pelos veículos; esta última opção mostra-se mais atrativa tanto no aspecto econômico quanto estético. No Brasil, algumas resoluções do Conselho Nacional do Meio Ambiente (CONAMA) foram estabelecidas com o objetivo de restringir as emissões sonoras de veículos automotores<sup>2</sup>. Entretanto, a questão ainda está longe de ser solucionada, demandando o dispêndio de muitos esforços por parte do Estado, população e indústrias automobilísticas.

O ruído gerado por um motor de combustão interna (M.C.I.) advém principalmente de vibrações estruturais e do sistema de exaustão de gases. Os níveis sonoros desenvolvidos nestes últimos, segundo MUNJAL (1998), são os principais colaboradores da poluição sonora em ambientes urbanos. MUNJAL (1987) afirma que a parcela referente às vibrações estruturais ocupa o segundo lugar em importância no ruído gerado por um motor diesel. Além do sistema de exaustão e das vibrações estruturais, o próprio contato dos pneus com a pista de rolamento e o fluxo turbulento de ar provocado pela movimentação do veículo são fontes sonoras potencialmente importantes; porém, estas podem ser desprezadas quando apenas o trânsito no interior das cidades é considerado, pois os automóveis trafegam em baixas velocidades (OUI, 2001).

---

<sup>1</sup> Trata-se do T.N.I. (*Traffic Noise Index*).

<sup>2</sup> Tratam-se das resoluções n<sup>os</sup> 6, 7 e 8 de 31/08/1993; n<sup>o</sup> 17 de 13/12/1995; n<sup>o</sup> 252 de 01/02/1999 e n<sup>o</sup> 272 de 14/09/2000.



Desta forma, os pesquisadores têm direcionado seus esforços aos sistemas de exaustão de motores, visando obter atenuadores de ruído que, instalados na tubulação para escapamento de gases do veículo, apresentem um desempenho satisfatório; o presente trabalho seguirá este mesmo caminho. Embora não esteja no escopo deste estudo, é importante observar que o projeto de um sistema de controle de ruído deve abranger, além dos aspectos estritamente relacionados à atenuação sonora, considerações a respeito do espaço disponível para a instalação do atenuador, bem como as restrições concernentes à perda de pressão proporcionada pelo mesmo, a qual reduz a potência do motor; a relevância destes fatores surge na medida em que sistemas que apresentam perda de pressão e dimensões maiores tendem a ser acusticamente mais eficazes.

A FIG.1.1 apresenta algumas configurações típicas de dispositivos utilizados para promover a atenuação sonora em tubulações tais quais as existentes em sistemas de exaustão de M.C.I. e em compressores.

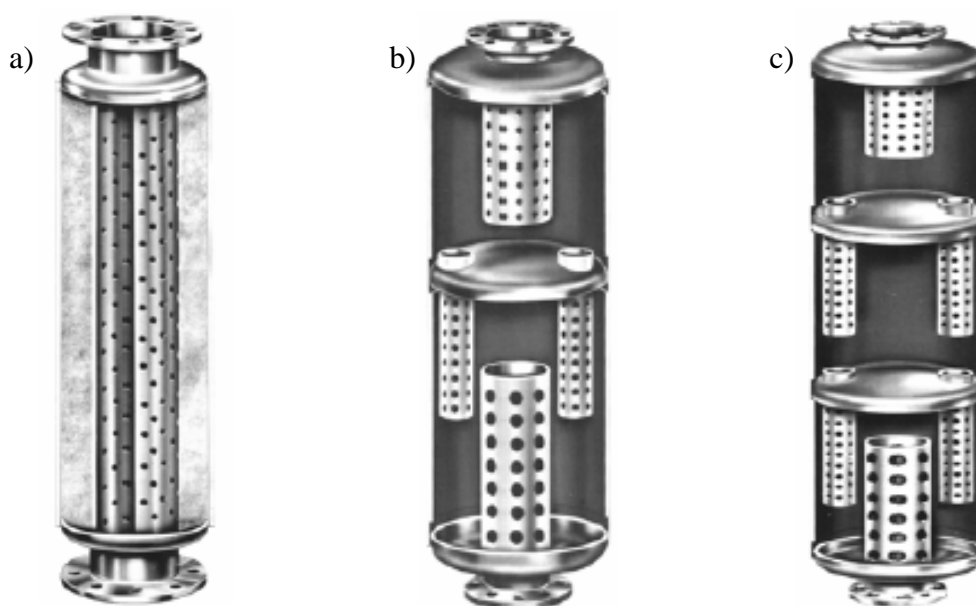


FIGURA 1.1 – Sistemas típicos de atenuadores de ruído (EVANS, 2002): a) atenuador dissipativo; b) atenuador reativo com duas câmaras; c) atenuador reativo com três câmaras.

Os atenuadores de ruído são usualmente classificados em duas categorias: dissipativos e reativos. Os dissipativos reduzem os níveis sonoros transformando a energia sonora em

térmica, o que é possível através da inserção de materiais fono-absorventes no interior do atenuador; o item a) da FIG.1.1 ilustra este tipo de sistema. Os atenuadores reativos, por outro lado, não apresentam materiais acústicos em seu interior e não causam dissipação de energia sonora; a grosso modo, estes sistemas promovem a redução do ruído através da reflexão sonora proporcionada pelas particularidades geométricas destes atenuadores; os itens b) e c) da FIG.1.1 ilustram tais sistemas.

Os atenuadores dissipativos são eficientes apenas em altas frequências, produzindo uma atenuação muito pequena em baixas frequências; por este motivo, os atenuadores reativos, vulgarmente conhecidos como “silenciosos”, são mais largamente empregados em sistemas de exaustão, embora existam sistemas híbridos, compostos por dispositivos dissipativos e reativos. O objetivo da utilização de sistemas híbridos é reduzir o ruído gerado pela turbulência provocada pelo próprio atenuador reativo, o qual é preponderante em altas frequências. Entretanto, tal efeito não será abordado no presente trabalho; assim sendo, este terá como objeto de estudo apenas os sistemas reativos.

Os atenuadores reativos representados na FIG.1.1 apresentam configurações geométricas relativamente complexas, possuindo tubos perfurados e múltiplas câmaras. No entanto, o fenômeno físico relacionado à atenuação sonora proporcionada por tais sistemas pode ser compreendido analisando-se configurações mais simples, como aquela mostrada na FIG.1.2, a qual ilustra o dispositivo denominado “câmara de expansão simples”; as setas existentes na figura indicam o sentido do fluxo de energia sonora.

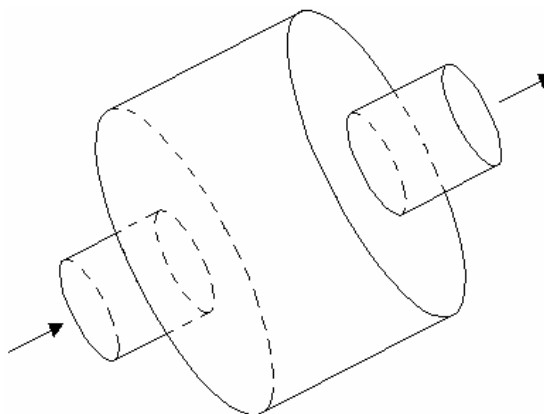


FIGURA 1.2 – Câmara de expansão simples.

Até meados da década de 1970, a análise teórica de sistemas reativos de controle de ruído em dutos era realizada utilizando-se técnicas analíticas aplicadas a modelos matemáticos unidimensionais, os quais são restritos a determinadas configurações geométricas de atenuadores, além de apresentarem uma eficácia progressivamente menor na medida em que a frequência de excitação torna-se maior e os efeitos tridimensionais passam a influenciar significativamente o comportamento acústico. Desta forma, conforme atestam ALFREDSON e DAVIES (1971) e YOUNG e CROCKER (1975), até a referida data, o projeto de atenuadores reativos fundamentava-se principalmente em conhecimentos empíricos.

Em 1975, objetivando estudar o desempenho acústico de atenuadores reativos, YOUNG e CROCKER apresentaram uma técnica numérica utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) aplicada a um modelo matemático tridimensional já consolidado<sup>3</sup>; esta abordagem, além de considerar os efeitos tridimensionais, não apresenta restrições quanto à geometria do sistema. Estes autores validaram esta técnica aplicando-a a uma câmara de expansão simples, pois a simetria axial desta possibilita considerá-la como um sistema bidimensional, o que reduz significativamente o número de equações algébricas do sistema numérico a ser solucionado. Entretanto, o modelo matemático empregado por YOUNG e CROCKER não é capaz de avaliar os efeitos que o escoamento de gases pelo sistema exercem sobre o comportamento acústico do mesmo.

Segundo ALFREDSON e DAVIES (1971), o desempenho acústico de um sistema reativo é superestimado caso os efeitos do escoamento sejam desconsiderados. Desta forma, em 1982, PEAT apresentou uma técnica baseada no MEF análoga à utilizada por YOUNG e CROCKER (1975), porém aplicada a um modelo matemático tridimensional que inclui a influência de escoamentos irrotacionais sobre o desempenho do atenuador. Assim como no trabalho de YOUNG e CROCKER, PEAT validou a técnica desenvolvida aplicando-a a sistemas axialmente simétricos, notadamente câmaras de expansão simples.

---

<sup>3</sup> Trata-se da equação de onda clássica, expressa por  $\nabla^2 p^A = \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 p^A}{\partial t^2}$ .

JI et al. (1995) atestam que, embora tenham sido desenvolvidas técnicas numéricas baseadas no MEF que permitam a análise tridimensional de atenuadores reativos, sua utilização resulta em um sistema de equações algébricas enorme e torna trabalhosa a preparação dos dados, principalmente em altas frequências, o que constitui um empecilho ao uso destas técnicas. Logo, os trabalhos subseqüentes ao de YOUNG e CROCKER (1975) que utilizaram o MEF restringiram-se em estudar configurações axialmente simétricas (bidimensionais) que não haviam ainda sido consideradas. Além disso, a maioria destes trabalhos não avaliou os efeitos do escoamento de gases sobre o comportamento acústico, mesmo após a publicação do já mencionado trabalho de PEAT (1982).

A partir do final da década de 1980, procurando superar as dificuldades relativas à aplicabilidade do MEF em análises tridimensionais, técnicas numéricas baseadas no método dos elementos de contorno (MEC) começaram a ser desenvolvidas. Entretanto, este método ainda não é adequado para simular determinadas configurações geométricas, tais quais câmaras de expansão cuja relação comprimento/diâmetro é elevada. Dentre os trabalhos que empregaram esta técnica, merece ser citado o de JI et al. (1995), no qual é apresentado um procedimento numérico utilizando o MEC aplicado ao mesmo modelo matemático empregado por PEAT (1982), o qual considera os efeitos de escoamentos irrotacionais; a validação desta técnica também foi realizada a partir da simulação de sistemas com simetria axial. Na realidade, poucos são os trabalhos que contemplam tanto análises tridimensionais quanto os efeitos do escoamento; os que o fazem, utilizam o MEC ou técnicas analíticas muito específicas e supõem que a velocidade do escoamento é constante e uniforme.

Paralelamente ao desenvolvimento de procedimentos numéricos, também houve progressos no campo das técnicas analíticas, podendo-se citar os trabalhos de EL-SHARKAWY e NAYFEH (1978), IH e LEE (1985), ÅBOM (1990), SELAMET et al. (1998) e SELAMET et al. (2003). Estes estudos conduziram ao estabelecimento de procedimentos analíticos para avaliações bidimensionais e tridimensionais de configurações geométricas específicas, tornando possível analisar alguns sistemas cujas

particularidades dificultam a aplicação de técnicas numéricas; posto que estas, conforme foi visto, geralmente restringem-se a atenuadores axialmente simétricos. No entanto, além destas técnicas analíticas contemplarem um número bastante reduzido de configurações geométricas, elas apresentam uma elevada complexidade matemática e ainda não são capazes de capturar os efeitos de escoamentos não uniformes sobre o desempenho acústico do sistema.

Face ao exposto nos parágrafos anteriores, observa-se que as análises teóricas referentes aos efeitos de escoamentos não uniformes sobre o desempenho acústico de atenuadores reativos ainda não estão consolidadas. Assim sendo, o presente trabalho tem como objetivo avaliar tais efeitos sobre determinadas configurações geométricas de câmaras de expansão com simetria axial, bem como comparar o desempenho de cada um dos sistemas estudados entre si. Para tal, foi desenvolvido um modelo matemático tridimensional para análises no domínio da frequência, o qual contempla os efeitos de escoamentos irrotacionais de gases; tal modelo apresenta uma abrangência ligeiramente superior ao utilizado por PEAT (1982). Como não se dispõe de técnicas analíticas de solução, um procedimento numérico para análises bidimensionais baseado no MEF foi utilizado, a partir do qual um programa computacional foi criado.

As avaliações realizadas neste trabalho se referem apenas ao comportamento acústico dos atenuadores de ruído, sendo desconsiderada a interação destes com os demais componentes dos sistemas de exaustão de M.C.I. Assim, os níveis sonoros gerados por tais equipamentos não são apresentados no presente estudo.

# 2

## FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 Propagação de Ondas Sonoras

O som é um fenômeno ondulatório. Estes se caracterizam por transportarem energia ao longo da direção de propagação da onda, não ocorrendo o transporte de massa.

Quando se tem a sensação de um som considerado desagradável e/ou indesejável, ele será denominado ruído. O incômodo causado pelo ruído dependerá de suas características tais como frequência, amplitude, duração e, também, de como a pessoa reage a ele.

Todo fenômeno ondulatório apresenta um ou mais parâmetros físicos que variam periodicamente no tempo. No caso de uma onda sonora, os deslocamentos das partículas fluidas constituem tal variação, os quais levam a oscilações de pressão. Como essas oscilações ocorrem na mesma direção de propagação da onda, diz-se que o som é uma onda longitudinal.

A principal grandeza física envolvida na propagação sonora é a pressão sonora ( $p^A$ ), a qual é definida como sendo a diferença entre a pressão total ( $p$ ) e a pressão de equilíbrio

do meio fluido ( $p^F$ ). Esta última corresponde à pressão existente na ausência de perturbação acústica.

A fim de avaliar a propagação sonora, o estabelecimento das seguintes equações é necessário:

- Equação da continuidade de massa;
- Equação de movimento;
- Equação de estado<sup>4</sup>.

Para o desenvolvimento destas equações, as seguintes hipóteses básicas serão adotadas:

- Meio fluido contínuo, homogêneo e perfeitamente elástico;
- Forças de campo desprezíveis;
- Inexistência de efeitos dissipativos devidos à viscosidade do fluido e à transferência de calor, implicando que o processo pode ser considerado como sendo isoentrópico<sup>5</sup>, ou seja, a entropia das partículas fluidas permanece constante (RIENSTRA e HIRSCHBERG, 2003).

Referindo-se à propagação sonora em tubos, RIENSTRA e HIRSCHBERG (2003) afirmam que desprezar os efeitos provenientes da viscosidade do fluido implica em impor ao modelo matemático um limite de aplicabilidade no que se refere à faixa de frequência em que este é válido. Tal restrição é expressa por

$$f \gg \frac{2\nu}{\pi D^2} \quad (2.1)$$

onde  $f$  é a frequência de excitação,  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido e  $D$  é o diâmetro do tubo.

---

<sup>4</sup> A utilização de uma equação de estado restringe a aplicabilidade do modelo matemático a processos quase-estáticos. Note que tais processos não são necessariamente reversíveis (HALLIDAY et al., 1996).

<sup>5</sup> Para que um processo termodinâmico seja isoentrópico, é necessário que este seja adiabático e reversível.

A Eq.(2.1) mostra que, para um determinado fluido, quanto maior o diâmetro do tubo, maior também a aplicabilidade do modelo.

Em fluidos cuja condutividade térmica é baixa tais como o ar<sup>6</sup>, a excitação acústica não provoca uma transferência relevante de energia térmica, podendo a mesma ser desprezada (KINSLER et al., 1982). Neste caso, o processo é dito adiabático.

### 2.1.1 Equação da Continuidade de Massa

Considere o volume de controle infinitesimal sujeito a um fluxo de massa conforme mostrado na FIG.2.1.

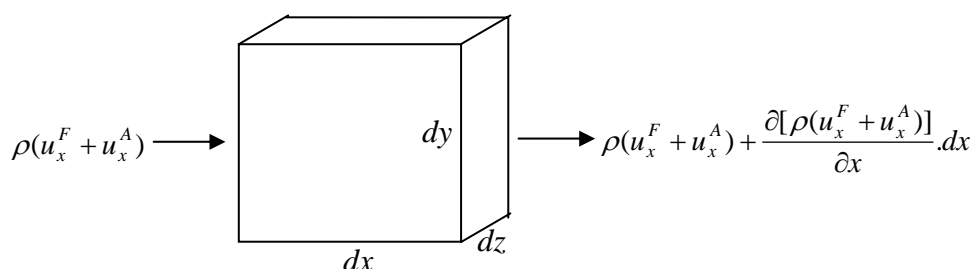


FIGURA 2.1 - Volume de controle  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ .

Na FIG.2.1,  $\rho$  é a densidade do meio,  $u_x^F$  é a parcela da velocidade das partículas fluidas devido ao escoamento na direção  $x$  e  $u_x^A$  é a parcela da velocidade das partículas fluidas devido à excitação acústica.

O leitor talvez estranhe o fato da velocidade,  $u_x$ , ter sido desmembrada em duas parcelas:  $u_x^F$  e  $u_x^A$ . Entretanto, no decorrer deste capítulo a intenção do autor em fazê-lo se tornará clara. Adianta-se que este procedimento foi adotado visando obter equações aplicáveis a problemas de propagação sonora em dutos considerando a existência de escoamento de fluidos nos mesmos.

<sup>6</sup> A uma temperatura de 27°C, a condutividade térmica do ar é 0,0263 W/m.K. A 77°C, este valor é 0,0300 W/m.K (INCROPERA et al., 1998).



Fazendo-se o balanço de massa através do volume de controle mostrado na FIG.2.1, obtém-se

$$\left\{ \rho(u_x^F + u_x^A) - \rho(u_x^F + u_x^A) - \frac{\partial[\rho(u_x^F + u_x^A)]}{\partial x} . dx \right\} dy . dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} . dx . dy . dz \quad (2.2a)$$

onde  $t$  é a variável independente tempo.

Simplificando a Eq.(2.2a), chega-se a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial[\rho(u_x^F + u_x^A)]}{\partial x} = 0 \quad (2.2b)$$

De forma análoga, pode-se obter equações de continuidade de massa nas direções  $y$  e  $z$ . Agrupando as três equações correspondentes às direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ; chega-se à equação geral da continuidade em três dimensões, a qual está representada a seguir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\rho(\vec{u}^F + \vec{u}^A)] = 0 \quad (2.3a)$$

ou, expandindo a Eq.(2.3a),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^A) + (\vec{\nabla} \rho) \cdot \vec{u}^A + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^F) + (\vec{\nabla} \rho) \cdot \vec{u}^F = 0 \quad (2.3b)$$

onde  $\vec{u}^F$  é o vetor velocidade média correspondente ao escoamento e  $\vec{u}^A$  é o vetor velocidade correspondente à excitação acústica.

Assumindo que as variações na densidade do meio sejam muito pequenas, pode-se desprezar o terceiro termo da Eq.(2.3b) e concluir que  $\rho \approx \rho_o$ , sendo  $\rho_o$  a densidade do meio na ausência de perturbação acústica. Para que esta hipótese seja válida, é necessário que duas condições sejam cumpridas: as ondas sonoras devem ser de baixa amplitude, bem como a velocidade do escoamento ser suficientemente pequena de

maneira a situá-lo dentro da faixa de incompressibilidade. Segundo FOX e McDONALD (1998), para que esta última condição seja atendida, o número de Mach<sup>7</sup> deve ser inferior ao valor aproximado de 0,3. Atendidas estas exigências, a Eq.(2.3) simplifica-se para

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_o (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^A) + \rho_o (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^F) + (\vec{\nabla} \rho) \cdot \vec{u}^F = 0 \quad (2.4)$$

A Eq.(2.4) é a equação de continuidade de massa para pequenas variações de densidade.

Supondo ainda que o escoamento seja permanente, ou seja, que o vetor  $\vec{u}^F$  independe da variável tempo, pode-se dividir a Eq.(2.4) em duas equações utilizando uma separação de variáveis. Desta forma, obtém-se

$$\rho_o (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^F) = 0 \quad (2.5)$$

e

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_o (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^A) + (\vec{\nabla} \rho) \cdot \vec{u}^F = 0 \quad (2.6)$$

As Eqs.(2.5) e (2.6) concernem, respectivamente, ao escoamento do fluido e à propagação sonora, expressando a condição de continuidade de massa.

### 2.1.2 Equação de Movimento

Na ausência de forças de campo e desprezando a viscosidade do meio fluido, a aplicação das condições de equilíbrio dinâmico leva à conclusão de que a força  $d\vec{f}$  experimentada por um elemento fluido de volume  $dV = dx.dy.dz$  é (KINSLER et al., 1982)

---

<sup>7</sup> O número de Mach é definido como sendo a razão entre a velocidade do fluido e a velocidade de propagação sonora no meio.

$$d\vec{f} = -(\vec{\nabla}p).dV \quad (2.7)$$

onde  $p = p^A + p^F$  é a pressão total,  $p^A$  é a pressão sonora e  $p^F$  é a pressão do meio fluido na ausência de perturbação acústica.

Aplicando a 2ª lei de Newton, obtém-se

$$d\vec{f} = \vec{a}.\rho.dV \quad (2.8)$$

onde  $\vec{a}$  é a aceleração da partícula fluida.

Como é usual em problemas de mecânica dos fluidos devido às facilidades no tratamento matemático, serão utilizadas coordenadas espaciais (Eulerianas) ao invés de coordenadas materiais. Assim, a aceleração de uma partícula fluida é dada por (FOX e McDONALD, 1998)

$$\vec{a} = \frac{D(\vec{u}^F + \vec{u}^A)}{Dt} \quad (2.9)$$

onde  $\frac{D(\ )}{Dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + [(\vec{u}^F + \vec{u}^A) \cdot \vec{\nabla}](\ )$  é o operador derivada material.

Combinando as Eqs.(2.7), (2.8) e (2.9), chega-se a

$$\vec{\nabla}(p^A + p^F) + \left\{ \frac{\partial(\vec{u}^F + \vec{u}^A)}{\partial t} + [(\vec{u}^F + \vec{u}^A) \cdot \vec{\nabla}](\vec{u}^F + \vec{u}^A) \right\} \cdot \rho = 0 \quad (2.10)$$

A Eq.(2.10) é a equação de movimento para fluidos não viscosos em que não atuam forças de campo.

Adotando a hipótese de escoamento permanente, tem-se que  $\frac{\partial \vec{u}^F}{\partial t} = 0$ . Assumindo também pequenas variações na densidade do meio, a Eq.(2.10) simplifica-se para

$$\vec{\nabla}(p^A + p^F) + \left\{ \frac{\partial \vec{u}^A}{\partial t} + [(\vec{u}^F + \vec{u}^A) \cdot \vec{\nabla}](\vec{u}^F + \vec{u}^A) \right\} \cdot \rho_o = 0 \quad (2.11a)$$

Expandindo a Eq.(2.11a)<sup>8</sup>,

$$\vec{\nabla}(p^A + p^F) + \rho_o \left\{ \frac{\partial \vec{u}^A}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{u}^A \cdot \vec{u}^A + 2\vec{u}^A \cdot \vec{u}^F + \vec{u}^F \cdot \vec{u}^F) - \right. \\ \left. + (\vec{u}^F + \vec{u}^A) \times [\vec{\nabla} \times (\vec{u}^F + \vec{u}^A)] \right\} = 0 \quad (2.11b)$$

Note que a Eq.(2.11) é bastante complexa. A fim de simplificá-la, será adotada a hipótese de que o campo de velocidade  $\vec{u}^F + \vec{u}^A$  é irrotacional; isto implica em afirmar que  $\vec{\nabla} \times (\vec{u}^F + \vec{u}^A) = 0$ . Com o mesmo intuito, o termo  $\vec{u}^A \cdot \vec{u}^A$  será desprezado, pois este é de segunda ordem, sendo pequeno comparado aos demais. Desta forma, a Eq.(2.11) simplifica-se para

$$\vec{\nabla}(p^A + p^F) + \rho_o \left[ \frac{\partial \vec{u}^A}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{u}^A \cdot \vec{u}^F) + \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{u}^F \cdot \vec{u}^F) \right] = 0 \quad (2.12)$$

A Eq.(2.12) é a equação de movimento para fluidos não-viscosos na ausência de forças de campo. Esta expressão ainda carrega consigo as seguintes hipóteses: pequenas variações na densidade do meio, escoamento permanente e campo de velocidade irrotacional.

---

<sup>8</sup> Sendo  $\vec{A}$  um vetor, a seguinte relação é válida (SHAMES, 1962):

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{A}) - \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}).$$

Como admite-se a hipótese de escoamento permanente, tanto o vetor  $\vec{u}^F$  quanto o escalar  $p^F$  independem da variável tempo. Assim, pode-se dividir a Eq.(2.12) em duas equações utilizando uma separação de variáveis. Desta forma, obtém-se

$$\vec{\nabla} p^F + \rho_o \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{u}^F \cdot \vec{u}^F) = 0 \quad (2.13)$$

e

$$\vec{\nabla} p^A + \rho_o \left[ \frac{\partial \vec{u}^A}{\partial t} + \vec{\nabla} (\vec{u}^A \cdot \vec{u}^F) \right] = 0 \quad (2.14)$$

As Eqs.(2.13) e (2.14) concernem, respectivamente, ao escoamento do fluido e à propagação sonora, expressando a condição de equilíbrio dinâmico.

Note que, integrando-se a Eq.(2.13), obtém-se:

$$p^F + \rho_o \frac{1}{2} |\vec{u}^F|^2 = \text{constante}$$

Esta é a conhecida equação de Bernoulli.

### 2.1.3 Equação de Estado

Uma das hipóteses básicas apresentadas no início deste capítulo consiste em assumir o processo termodinâmico em estudo como sendo isoentrópico; portanto, este é necessariamente adiabático e reversível. A hipótese de reversibilidade do processo permite a utilização de uma equação de estado, pois este pode ser considerado como sendo uma sucessão de estados de equilíbrio termodinâmico. O fato de o processo também ser considerado adiabático implica, como será demonstrado a seguir, que a pressão sonora é uma função apenas da densidade e da velocidade de propagação sonora no meio.

Este trabalho abrange meios fluidos cujas características permitam que os mesmos sejam tratados como sendo gases perfeitos<sup>9</sup>, portanto, a equação de estado a ser desenvolvida nesta seção contém esta restrição.

A Eq.(2.15) expressa a 1ª lei da termodinâmica:

$$\Delta E = Q - p.\Delta V \quad (2.15)$$

onde  $\Delta E$  é a variação da energia interna do sistema,  $Q$  é a energia térmica adicionada ao sistema,  $p.\Delta V$  é o trabalho mecânico realizado pelo sistema,  $\Delta V$  é a variação do volume e  $p$  é a pressão.

A capacidade térmica ( $C$ ) é definida como

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \quad (2.16)$$

onde  $\Delta T$  é a variação da temperatura do sistema ocorrida devido à transferência de uma energia térmica  $Q$ .

Dependendo do tipo do processo termodinâmico, têm-se valores distintos para a capacidade térmica. Para um processo a volume constante, tem-se a capacidade térmica a volume constante ( $C_V$ ); e para um processo a pressão constante, tem-se a capacidade térmica a pressão constante ( $C_P$ ). Tanto o  $C_V$  quanto o  $C_P$  são dependentes da temperatura.

Para um processo a volume constante, inexistente trabalho mecânico, pois  $\Delta V = 0$ . Logo, combinando as Eqs.(2.15) e (2.16), chega-se a

$$\Delta E = C_V.\Delta T \quad (2.17a)$$

---

<sup>9</sup> Segundo VAN WYLEN et al. (1998), gases cuja densidade é baixa podem ser considerados gases perfeitos. A referida obra apresenta maiores detalhes a este respeito.

Tomando-se o limite na equação anterior,

$$C_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \quad (2.17b)$$

onde o índice  $V$  denota processo a volume constante.

Para um processo a pressão constante, combinando as Eqs.(2.15) e (2.16), obtém-se

$$\Delta E = C_p \Delta T - p \Delta V \quad (2.18a)$$

ou, tomando-se o limite,

$$C_p = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_p + p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (2.18b)$$

onde o índice  $p$  denota processo a pressão constante.

Observando a Eq.(2.18) pode-se concluir que, para um processo a pressão constante, a variação da energia interna é função do volume e da temperatura. Logo, pode-se escrever

$$\Delta E = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \Delta T + \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T \Delta V$$

ou, tomando-se o limite,

$$\left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V + \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (2.19)$$

Combinado as Eqs.(2.17b), (2.18b) e (2.19), obtém-se

$$C_p - C_V = p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (2.20)$$

Para gases perfeitos, a energia interna é função apenas da temperatura (VAN WYLEN et al., 1998), portanto

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0$$

Desta forma, para um gás perfeito, a Eq.(2.20) simplifica-se para

$$C_p - C_v = p \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (2.21)$$

A relação entre pressão, volume e temperatura para um gás perfeito é dada pela lei dos gases, a qual está expressa a seguir:

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T \quad (2.22)$$

onde  $R$  é uma constante dependente da massa molar do gás e  $m$  é a massa do sistema.

Para um processo isobárico (pressão constante), a seguinte relação pode ser obtida a partir da Eq.(2.22):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = m \cdot \frac{R}{p} \quad (2.23)$$

Combinando as Eqs.(2.21) e (2.23), obtém-se

$$C_p - C_v = m \cdot R \quad (2.24)$$

Devido à hipótese de processo adiabático, tem-se que  $Q = 0$ . Assim, a Eq.(2.15) simplifica-se para

$$\Delta E = -p \cdot \Delta V \quad (2.25)$$

Utilizando as Eqs.(2.17a), (2.22), (2.24) e (2.25), obtém-se



$$\frac{p}{p_i} = \left( \frac{\rho}{\rho_i} \right)^\gamma \quad (2.26)$$

onde  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  e  $i$  corresponde a um determinado estado termodinâmico do gás.

A Eq.(2.26) é a equação de estado para um gás perfeito em um processo adiabático. Derivando a pressão  $p$  em relação a  $\rho$ , fazendo  $i = 0$  e assumindo pequenas variações de densidade, chega-se à seguinte equação:

$$\left( \frac{\partial p^A}{\partial \rho} \right)_s = \gamma \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \quad (2.27a)$$

ou

$$\left( \frac{\partial p^A}{\partial \rho} \right)_s = c_0^2 \quad (2.27b)$$

onde  $p^A = p - p_0$  é a pressão sonora,  $p_0 = p^F$  é a pressão de equilíbrio,  $\rho_0$  é a densidade de equilíbrio,  $s$  é a entropia específica e  $c_0$  é a velocidade de propagação sonora. Nas Eqs.(2.27), optou-se por utilizar derivadas parciais juntamente com o índice  $s$  para enfatizar que tal relação é válida apenas para processos isoentrópicos.

Note que, para um processo isoentrópico, a velocidade de propagação sonora em um gás perfeito que apresenta calores específicos constantes é dada por (VAN WYLEN et al., 1998)

$$c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_0} \quad (2.28)$$

Integrando a Eq.(2.27b), obtém-se

$$p^A = c_0^2 \cdot \rho + A$$

onde  $A$  é uma constante.

Se  $p^A = 0$ , tem-se  $\rho = \rho_0$ . Logo,  $A = -c_0^2 \cdot \rho_0$ . Assim, a equação anterior reduz-se a

$$p^A = c_0^2 \cdot (\rho - \rho_0) \quad (2.29)$$

A Eq.(2.29) é a equação de estado, sendo válida para gases perfeitos, processos isoentrópicos e pequenas variações de densidade.

### 2.1.4 Irrotacionalidade e Funções Potenciais

Para a obtenção das equações de movimentos, Eqs.(2.13) e (2.14), supôs-se irrotacional o campo de velocidade  $\vec{u}^F + \vec{u}^A$ . Assim, este pode ser considerado como sendo o gradiente de uma função escalar  $\phi$ , a qual é denominada função potencial; ou seja:

$$\vec{u}^F + \vec{u}^A = -\vec{\nabla} \phi \quad (2.30)$$

O sinal negativo utilizado na Eq.(2.30) foi arbitrado a fim de indicar que o fluxo de massa ocorre no sentido do potencial decrescente.

Nas seções anteriores deste trabalho, adotou-se a hipótese de escoamento permanente; logo, contrariamente à  $\vec{u}^A$ ,  $\vec{u}^F$  independe da variável tempo. Desta forma, pode-se desmembrar a função  $\phi$  em duas parcelas: uma independente do tempo, correspondendo ao escoamento; e outra dependente do tempo, referente à propagação sonora. Logo,

$$\vec{u}^F = -\vec{\nabla} \phi^F \quad (2.31)$$

e

$$\vec{u}^A = -\vec{\nabla} \phi^A \quad (2.32)$$

Substituindo a Eq.(2.31) na Eq.(2.5), obtém-se

$$\nabla^2 \phi^F = 0 \quad (2.33)$$

onde  $\nabla^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial z^2}$  é o operador Laplaciano em coordenadas retangulares e  $\nabla^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\ )}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2(\ )}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial z^2}$  é o operador Laplaciano em coordenadas cilíndricas.

A Eq.(2.33) rege o comportamento de escoamentos irrotacionais e incompressíveis. Note que a hipótese de escoamento permanente implicou no desacoplamento entre os fenômenos acústicos e o escoamento.

Conforme será tratado mais adiante, para a solução da equação que rege a propagação sonora, é necessário que a Eq.(2.33) já tenha sido resolvida.

### 2.1.5 Equação de Onda

A equação de onda é aquela que rege a propagação sonora. Combinando-se a equação da continuidade com as de movimento e de estado - Eqs.(2.6), (2.14) e (2.29), respectivamente - obtém-se

$$\nabla^2 p^A - \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 p^A}{\partial t^2} - \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial(\vec{u}^F \cdot \vec{\nabla} p^A)}{\partial t} + \rho_0 \cdot \nabla^2(\vec{u}^F \cdot \vec{u}^A) = 0 \quad (2.34)$$

A Eq.(2.34) rege a propagação sonora. Conforme pode ser observado, seu último termo contém o vetor correspondente à flutuação de velocidade  $\vec{u}^A$ . Portanto, tem-se uma equação e duas variáveis acústicas:  $\vec{u}^A$  e  $p^A$ . Note que  $\vec{u}^F$  deve ser conhecido *a priori*, sendo o mesmo obtido solucionando a Eq.(2.33); uma vez que esta equação está expressa em termo de  $\phi^F$ , é conveniente utilizar esta grandeza também na equação de onda.

Para solucionar a Eq.(2.34), é necessário expressá-la em termos de apenas uma variável acústica. Isto é feito utilizando o potencial acústico de velocidade,  $\phi^A$ , em vez da

pressão sonora ou da velocidade acústica. Logo, faz-se necessário relacionar  $\vec{u}^A$  e  $p^A$  com  $\phi^A$ : a relação entre  $\vec{u}^A$  e  $\phi^A$  é dada pela Eq.(2.32), a relação entre  $p^A$  e  $\phi^A$  será desenvolvida a seguir.

Substituindo as Eqs.(2.31) e (2.32) na Eq.(2.14), obtém-se

$$\vec{\nabla} p^A + \rho_o \cdot \vec{\nabla} \left( -\frac{\partial \phi^A}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi^A \cdot \vec{\nabla} \phi^F \right) = 0$$

Integrando a equação acima, chega-se a

$$p^A + \rho_o \left( -\frac{\partial \phi^A}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi^A \cdot \vec{\nabla} \phi^F \right) = A$$

onde  $A$  é uma constante.

Na ausência de excitação acústica, tem-se  $p^A = \phi^A = 0 \Rightarrow A = 0$ . Portanto, a relação entre a pressão sonora e o potencial acústico de velocidade é dada por

$$p^A = \rho_o \left( \frac{\partial \phi^A}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi^A \cdot \vec{\nabla} \phi^F \right) \quad (2.35)$$

Substituindo as Eqs.(2.31), (2.32) e (2.35) na Eq.(2.34) e realizando uma integração em relação à variável tempo, obtém-se a equação que rege a propagação sonora em termos das funções potenciais, a qual está mostrada a seguir:

$$\nabla^2 \phi^A - \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial t^2} + \frac{2}{c_0^2} \cdot \frac{\partial (\vec{\nabla} \phi^F \cdot \vec{\nabla} \phi^A)}{\partial t} - \frac{1}{c_0^2} \vec{\nabla} \phi^F \cdot [\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \phi^F \cdot \vec{\nabla} \phi^A)] = 0 \quad (2.36)$$

Neste trabalho, serão realizadas análises apenas no domínio da frequência. Desta forma,  $\phi^A$  será uma função harmônica, assumindo a seguinte forma:

$$\phi^A = \Phi^A \cdot e^{j\omega t} \quad (2.37)$$

onde  $|\Phi^A|$  é a amplitude do potencial acústico<sup>10</sup>, sendo independente da variável tempo;  $j = \sqrt{-1}$  e  $\omega$  é a frequência angular da excitação acústica.

Substituindo a Eq.(2.37) na (2.36), chega-se a

$$\nabla^2 \Phi^A + k^2 \cdot \Phi^A + \frac{2 \cdot j \cdot k}{c_0} \cdot (\vec{\nabla} \phi^F \cdot \vec{\nabla} \Phi^A) - \frac{1}{c_0^2} \vec{\nabla} \phi^F \cdot [\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \phi^F \cdot \vec{\nabla} \Phi^A)] = 0 \quad (2.38)$$

onde  $k = \frac{\omega}{c_0}$  é o número de onda.

A Eq.(2.38) é a equação de onda aplicável a análises no domínio da frequência e expressa em termos das funções potenciais. A solução desta equação fornece os valores de  $\Phi^A$  em cada ponto do domínio. Entretanto, antes de solucionar a Eq.(2.38), é necessário resolver a Eq.(2.33), a qual fornecerá  $\phi^F$  a fim de ser utilizado na equação de onda.

Em trabalhos publicados sobre propagação sonora em dutos na presença de escoamento irrotacional, o último termo da Eq.(2.38) é geralmente desprezado; ver, por exemplo, PEAT (1982) e JI et al. (1995). Este último autor afirma que se o número de Mach for inferior a 0,15, desprezar tal termo implica em um erro inferior a 2,25%. Entretanto, conforme foi dito na seção 2.1.1 deste trabalho, o modelo matemático aqui desenvolvido é válido para valores do número de Mach inferiores a 0,3; portanto, ignorar o referido termo reduziria a aplicabilidade do modelo. Assim sendo, o autor do presente trabalho optou por manter tal termo; o que, conforme será visto no próximo capítulo, resulta em uma formulação numérica significativamente mais complexa.

---

<sup>10</sup> Note que  $\Phi^A$  é um número complexo. Logo, a amplitude do potencial acústico é dada pelo seu módulo.

Após a obtenção de  $\Phi^A$ , é necessário determinar as variáveis acústicas que são realmente de interesse, ou seja, a pressão sonora e a velocidade acústica. Esta última pode ser obtida através da seguinte equação, a qual é uma combinação das Eqs.(2.32) e (2.37):

$$\vec{u}^A = -(\vec{\nabla}\Phi^A).e^{j\omega t} \quad (2.39)$$

A pressão sonora, por sua vez, pode ser obtida combinando as Eqs.(2.35) e (2.37):

$$p^A = \rho_o \left( j.\omega.\Phi^A - \vec{\nabla}\Phi^A \cdot \vec{\nabla}\phi^F \right) e^{j\omega t} \quad (2.40)$$

Agora, é considerado um caso particular da Eq.(2.34): a velocidade do escoamento é nula ( $\vec{u}^F = 0$ ). Quando esta condição é satisfeita, diz-se que o meio é estacionário<sup>11</sup> e a referida equação reduz-se a

$$\nabla^2 p^A - \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 p^A}{\partial t^2} = 0 \quad (2.41)$$

Note que, para meios estacionários, a equação de onda pode ser desenvolvida sem a utilização do potencial de velocidade. A Eq.(2.41) carrega consigo as seguintes simplificações:

- Termos de segunda ordem desprezados;
- Pequenas variações de densidade;
- Fluido não viscoso;
- Inexistência de forças de campo;
- Meio estacionário;
- Gás perfeito;
- Processo isoentrópico.

---

<sup>11</sup> Observe que, neste trabalho, o sentido atribuído ao termo “estacionário” é bem diferente daquele geralmente utilizado em textos básicos de acústica, os quais empregam este termo para designar um padrão oscilatório resultante da superposição de ondas; ver, por exemplo, HALLIDAY et al. (1996).

No t3pico seguinte, ser3o feitas algumas considera33es a respeito da Eq.(2.41) aplicada a dutos retos de se33o transversal circular.

### 2.1.6 Dutos de Se33o Circular

Para uma excita33o ac33stica harm33nica em um tubo reto na aus33ncia de escoamento, a solu33o da Eq.(2.41) 33 dada por (ver Anexo A)

$$p^A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{mn}^A \quad (2.42)$$

onde

$$p_{mn}^A = J_m(k_{r,mn} \cdot r) \cdot (C_{1,mn} \cdot e^{-jk_{z,mn}z} + C_{2,mn} \cdot e^{jk_{z,mn}z}) (C_{3,mn} \cdot e^{-jm\theta} + e^{jm\theta}) e^{j\omega t} \quad (2.43)$$

$J_m$  33 a fun33o de Bessel de primeira esp33cie de ordem  $m$ ;  $C_{1,mn}$ ,  $C_{2,mn}$  e  $C_{3,mn}$  s33o constantes dependentes de  $m$  e de  $n$ , as quais s33o determinadas pelas condi33es de contorno do problema.  $k_{r,mn}$  e  $k_{z,mn}$  s33o constantes relativas 33 propaga33o sonora nas dire33es radial e longitudinal, respectivamente, tais constantes est33o relacionadas conforme mostra a Eq.(2.44); para maiores detalhes, consultar o anexo A deste trabalho.

$$k_r^2 = k^2 - k_z^2 \quad (2.44)$$

A Eq.(2.42) expressa a press33o sonora em fun33o da posi33o e do tempo. Cada par de valores  $m$  e  $n$  corresponde a um modo de oscila33o, sendo que  $m$  indica o modo como a press33o sonora varia com o 33ngulo  $\theta$ , e  $n$  indica o modo como a press33o sonora varia na dire33o radial  $r$ . Dependendo da freq33u33ncia de excita33o, cada um destes modos expressos por  $(m,n)$  poder33 ou n33o ser propagado. A seguir ser33 feita uma an33lise objetivando estabelecer uma rela33o entre a freq33u33ncia de excita33o e o estabelecimento ou n33o de cada um destes modos de oscila33o.

Se, para um determinado modo,  $k_z$  for um n33mero imagin33rio, o valor da press33o sonora correspondente a este modo ( $p_{mn}^A$ ) apresentar33 um decrescimento exponencial na

variável  $z$ , conforme pode ser constatado pela Eq.(2.43). Portanto, tem-se um modo evanescente não propagativo e conclui-se que apenas modos cujos valores de  $k_z$  forem reais serão propagados. Assim, pela Eq.(2.44), um dado modo  $(m,n)$  se propagará sem atenuação se

$$k > k_{r,mn} \quad (2.45a)$$

ou

$$\omega > c_0 \cdot k_{r,mn} \quad (2.45b)$$

Para cada modo  $(m, n)$ , define-se a frequência de corte  $f_{mn}$  como sendo o valor mínimo de frequência que a excitação acústica deve apresentar para que o referido modo possa propagar-se. Assim,

$$f_{mn} = \frac{c_0 \cdot k_{r,mn}}{2\pi} \quad (2.46)$$

Os valores de  $k_{r,mn}$  podem ser obtidos utilizando a TAB.A.1 do anexo A.

Quando a frequência de excitação for suficientemente baixa ou o diâmetro do tubo for suficientemente pequeno, haverá a propagação apenas do modo  $m = n = 0$ . Neste caso, tem-se uma onda sonora plana, ou seja, as grandezas acústicas apresentam valores constantes em toda a seção transversal do duto. Assim, a propagação sonora é unidimensional, sendo que a Eq.(2.42) simplifica-se para

$$p^A = (C_1 \cdot e^{-jkz} + C_2 \cdot e^{jkz}) e^{j\omega t} \quad (2.47)$$

Quando a propagação sonora ocorre em um meio não estacionário, as frequências de corte não mais podem ser calculadas pela Eq.(2.46). Para um escoamento uniforme<sup>12</sup> ao longo do tubo, as frequências de corte são determinadas por (adaptado de MUNJAL, 1987)

---

<sup>12</sup> Por “escoamento uniforme”, entende-se que o vetor  $\vec{u}^F$  é constante em todo o domínio.



$$f_{mn} = \frac{c_0 \cdot k_{r,mm}}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{1 - M^2} \quad (2.48)$$

onde  $M = \frac{|\vec{u}^F|}{c_0}$  é o número de Mach do escoamento.

Considerando a Eq.(2.48), para haver somente a propagação de ondas sonoras planas, deve-se tomar o menor valor não nulo de  $k_{r,mm}$ , o qual corresponde a  $m = 1$  e  $n = 0$  (ver TAB.A.1 do anexo A).

$$k_{r,1,0} = \frac{1,84}{r_0} \quad (2.49)$$

onde  $r_0$  é o raio do tubo.

Desta forma, apenas ondas planas serão propagadas caso a seguinte condição seja satisfeita:

$$k \cdot r_0 < 1,84 \cdot \sqrt{1 - M^2} \quad (2.50a)$$

ou

$$\lambda > \frac{2 \cdot \pi \cdot r_0}{1,84 \cdot \sqrt{1 - M^2}} \quad (2.50b)$$

ou

$$f < \frac{1,84 \cdot c_0}{2 \cdot \pi \cdot r_0} \cdot \sqrt{1 - M^2} \quad (2.50c)$$

As Eqs.(2.50) apresentam a condição suficiente para que apenas ondas planas sejam propagadas.

### 2.1.7 Impedância Acústica

Considere a propagação sonora unidimensional em um duto na presença de escoamento uniforme. Neste caso, o campo de pressão sonora é dado por (MUNJAL, 1987)

$$p^A = \left[ A.e^{-jkz/(1+M)} + B.e^{jkz/(1-M)} \right] e^{j\omega t} \quad (2.51)$$

A velocidade acústica é dada pela seguinte expressão (MUNJAL, 1987):

$$u^A = \frac{1}{\rho_0 \cdot c_0} \left[ A.e^{-jkz/(1+M)} - B.e^{jkz/(1-M)} \right] e^{j\omega t} \quad (2.52)$$

Note que os termos  $e^{-jkz}.e^{j\omega t}$  e  $e^{jkz}.e^{j\omega t}$  são equivalentes à  $e^{jk(c_0t-z)}$  e  $e^{jk(c_0t+z)}$ , respectivamente, os quais representam a propagação de duas ondas em sentidos opostos:  $e^{jk(c_0t-z)}$  no sentido positivo de  $z$ , e  $e^{jk(c_0t+z)}$  no sentido negativo de  $z$  (KINSLER et al., 1982).

Neste trabalho, define-se a impedância acústica ( $Z$ ) como sendo a razão entre a pressão sonora e a velocidade acústica. Assim, pelas Eqs.(2.51) e (2.52), chega-se a:

$$Z(z) = \rho_0 \cdot c_0 \left[ \frac{A.e^{-jkz/(1+M)} + B.e^{jkz/(1-M)}}{A.e^{-jkz/(1+M)} - B.e^{jkz/(1-M)}} \right] \quad (2.53)$$

Para o caso de uma onda plana progressiva na direção positiva de  $z$ , tem-se que  $B = 0$ ; utilizando a Eq.(2.53), obtém-se:

$$Z_0 = \rho_0 \cdot c_0 \quad (2.54)$$

$Z_0$  é a impedância característica do meio fluido, a qual é definida como sendo a razão entre a pressão sonora e a velocidade acústica de uma onda plana progressiva. Na prática, não existem ondas planas progressivas isoladamente, visto que qualquer sistema de dutos apresenta reflexão sonora. Para que houvesse apenas ondas progressivas em uma direção, seria necessário que o duto apresentasse comprimento infinito ou terminação anecóica.

Conforme mostra a Eq.(2.54), o valor de  $Z_0$  é uma constante real previamente conhecida. Por outro lado, o valor de  $Z(z)$  varia no espaço e é um número complexo, visto que pode haver diferença de fase entre a pressão e a velocidade. A parte real da impedância é denominada resistência acústica ( $R$ ), e a parte imaginária é denominada reatância acústica ( $X$ ).

### 2.1.8 Potência Sonora de Ondas Planas em Escoamento Uniforme

Um conceito amplamente utilizado em acústica é o de potência sonora ( $W$ ), a qual é definida como sendo o fluxo médio de energia sonora no tempo, ou, matematicamente:

$$W = \iint \left( \frac{1}{T} \int_0^T I \cdot dt \right) dS \quad (2.55)$$

onde  $S$  é a área da seção transversal do duto,  $T$  é o período da excitação sonora e  $I$  é a intensidade sonora.

Note que, neste trabalho, a intensidade sonora é definida como sendo o fluxo instantâneo de energia sonora. Alguns autores definem a intensidade sonora como sendo uma média temporal do fluxo de energia.

Quando a propagação sonora é unidimensional na presença de escoamento uniforme, a intensidade sonora é dada por (adaptado de RIENSTRA e HIRSCHBERG, 2003)

$$I = (1 + M^2) \cdot p_r^A u_r^A + \frac{M}{\rho_0 \cdot c_0} \cdot (p_r^A)^2 + \rho_0 \cdot c_0 \cdot M \cdot (u_r^A)^2 \quad (2.56)$$

onde o subscrito  $r$  indica que apenas a parcela real da variável complexa deve ser considerada.

Utilizando as Eqs.(2.51) e (2.52), obtêm-se as componentes reais da pressão sonora e da velocidade acústica para ondas planas na presença de escoamento uniforme, as quais são dadas por

$$p_r^A = |A|. \cos\left(\omega.t - \frac{k.z}{1+M} + \alpha\right) + |B|. \cos\left(\omega.t + \frac{k.z}{1-M} + \beta\right) \quad (2.57)$$

e

$$u_r^A = \frac{|A|}{\rho_0.c_0} . \cos\left(\omega.t - \frac{k.z}{1+M} + \alpha\right) - \frac{|B|}{\rho_0.c_0} . \cos\left(\omega.t + \frac{k.z}{1-M} + \beta\right) \quad (2.58)$$

onde  $|A|$  é o módulo do número complexo  $A$ ,  $\alpha$  é o ângulo de  $A$  no plano complexo,  $|B|$  é o módulo do número complexo  $B$  e  $\beta$  é o ângulo de  $B$  no plano complexo.

Levando as Eqs.(2.56), (2.57) e (2.58) na Eq.(2.55), chega-se a

$$W = \frac{S}{2.\rho_0.c_0} \left[ (1+M)^2 . |A|^2 - (1-M)^2 . |B|^2 \right] \quad (2.59)$$

A Eq.(2.59) é apresentada por MUNJAL (1987) e permite calcular a potência sonora em dutos onde a propagação sonora é unidimensional e o escoamento é uniforme. A potência sonora é dada pela diferença entre a potência de uma onda progressiva propagando-se na direção positiva de  $z$  e a potência de uma onda progressiva na direção negativa de  $z$ .

Deve-se salientar que, embora  $p^A$  e  $u^A$  dependam da posição, a potência sonora é constante para dutos onde não há dissipação de energia.

## 2.2 Controle Reativo de Ruído

No item 2.1, foi estudado o fenômeno da propagação sonora com ênfase em dutos retos de seção transversal constante. Uma vez constatado que um determinado sistema de

duto gera níveis inaceitáveis de ruído, deve-se buscar alguma forma de reduzir tais níveis sonoros. Atualmente, o controle passivo é o mais utilizado em redes de dutos; são largamente empregados tanto os atenuadores dissipativos quanto os reativos. Neste trabalho, apenas estes últimos serão abordados.

Os atenuadores reativos caracterizam-se por não provocarem perda de energia sonora; a redução dos níveis de ruído ocorre devido à reflexão sonora, sendo esta propiciada por mudanças na geometria dos dutos. Tais dispositivos são encontrados em praticamente todos os sistemas de exaustão de motores de combustão interna atualmente existentes, sendo vulgarmente conhecidos como “silenciosos”.

Tradicionalmente, a análise dos sistemas reativos é realizada utilizando modelos matemáticos unidimensionais; ver, por exemplo, ALFREDSON e DAVIES (1971) e MUNJAL (1987). Devido a esta aproximação, a pressão sonora e a velocidade acústica podem ser expressas pelas Eqs.(2.51) e (2.52), respectivamente. Para dutos retos de seção circular (tubos), garante-se propagação sonora unidimensional desde que a desigualdade expressa pelas Eqs.(2.50) seja satisfeita, ou seja, a aplicabilidade deste modelo é restrita às baixas frequências e/ou dutos cujas dimensões transversais sejam suficientemente pequenas.

Nesta seção, são abordados alguns aspectos do modelo unidimensional aplicado a sistemas reativos de controle de ruído; também são apresentadas técnicas analíticas que permitem avaliar o desempenho acústico de tais sistemas.

### **2.2.1 Parâmetros de Desempenho para Sistemas de Controle de Ruído**

Neste trabalho, busca-se avaliar a atenuação sonora propiciada pela instalação de um atenuador reativo na rede de dutos. Para tal, deve ser utilizado algum parâmetro de desempenho. Os parâmetros mais utilizados são:

- Perda por inserção (*IL*);
- Perda por transmissão (*TL*);

- Redução de ruído (*NR*) ou diferença de nível sonoro (*LD*).

Cada um destes parâmetros apresenta vantagens e desvantagens, conforme será visto mais adiante.

Antes de prosseguir, algumas regras devem ser estabelecidas. Primeiramente, o sistema de dutos a ser analisado será dividido em  $n+1$  elementos, sendo que o elemento de número  $n+1$  será a fonte sonora e o elemento de número 0 (zero) será o ambiente para o qual o ruído é irradiado. Cada elemento corresponde a uma parcela do circuito cujo comportamento acústico é conhecido *a priori*, assim, por exemplo, um trecho reto de duto é considerado um elemento do circuito. Desta forma, a análise consistirá em determinar o comportamento do sistema a partir do comportamento de cada componente (elemento) do mesmo.

Tendo estabelecido estas regras, pode-se proceder à análise dos parâmetros de desempenho citados.

#### 2.2.1.1 Perda por inserção

A perda por inserção (*IL*) é definida como sendo a diferença entre o nível de potência sonora sem o atenuador ( $L_{w1}$ ) e o nível de potência sonora com o atenuador ( $L_{w2}$ ). Assim, *IL* descreve o desempenho do sistema de dutos como um todo, e não apenas o desempenho do atenuador isoladamente. Matematicamente, *IL* é definido da seguinte forma:

$$IL = L_{w1} - L_{w2} \quad (2.60a)$$

onde  $L_w = 10 \cdot \log\left(\frac{W}{W_{ref}}\right)$  e  $W_{ref} = 10^{-12}$  W é a potência sonora de referência.

ou, equivalentemente,

$$IL = 10 \cdot \log \left( \frac{W^1}{W^2} \right) \quad (2.60b)$$

Os sobrescritos 1 e 2 indicam sistemas sem atenuador e com atenuador, respectivamente.

Segundo MUNJAL (1987), a ação real dos atenuadores de ruído consiste na redução da resistência acústica percebida pela fonte sonora.

### 2.2.1.2 Perda por transmissão

A perda por transmissão ( $TL$ ), ao contrário da perda por inserção, não depende das características da fonte sonora e assume que o duto situado posteriormente ao atenuador apresenta terminação anecóica, ou seja, este duto não apresenta ondas sonoras propagando-se na direção negativa do eixo  $z$ .

Considere a figura a seguir:

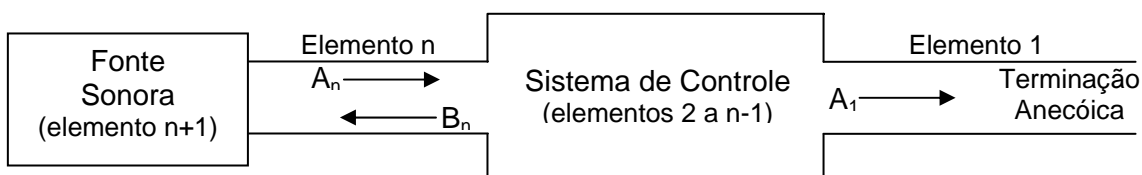


FIGURA 2.2 - Esquema de um sistema de dutos com terminação anecóica.

A  $TL$  é definida como sendo a diferença entre o nível de potência sonora da onda incidente ( $L_{Wi}$ ) no elemento  $n-1$  do sistema (onda  $A_n$ ) e o nível de potência sonora da onda transmitida ( $L_{Wt}$ ) para um duto com terminação anecóica (onda  $A_1$ ). Desta forma, a  $TL$  descreve o desempenho apenas do sistema de controle (atenuador).

$$TL = L_{Wi} - L_{Wt} \quad (2.61a)$$

ou

$$TL = 10. \log \left( \frac{W_i}{W_t} \right) \quad (2.61b)$$

Como  $W = \frac{S}{2 \cdot \rho_0 \cdot c_0} \cdot (1 + M)^2 \cdot |A|^2$  para uma onda progressiva propagando-se na direção positiva de  $z$ , supondo que a densidade e a velocidade de propagação sonora nos elementos  $n$  e  $1$  são iguais, a Eq.(2.61b) torna-se

$$TL = 10. \log \left[ \frac{|A_n|^2 \cdot S_n \cdot (1 + M_n)^2}{|A_1|^2 \cdot S_1 \cdot (1 + M_1)^2} \right] \quad (2.61c)$$

Lembrando que, para escoamento uniforme e propagação sonora unidimensional,

$$u^A = \frac{1}{\rho_0 \cdot c_0} \cdot [A \cdot e^{-jkz/(1+M)} - B \cdot e^{jkz/(1-M)}] e^{j\omega t}; \text{ e que } B_1 = 0 \text{ (terminação anecóica), pode-se concluir que}$$

se concluir que

$$|A_1| = \rho_0 \cdot c_0 \cdot |u_1^A| \quad (2.62)$$

Para a obtenção de  $|A_n|$ , o seguinte sistema de equações será utilizado:

$$\begin{cases} p_n^A = [A_n \cdot e^{-jkz/(1+M)} + B_n \cdot e^{jkz/(1-M)}] e^{j\omega t} \\ \rho_0 \cdot c_0 \cdot u_n^A = [A_n \cdot e^{-jkz/(1+M)} - B_n \cdot e^{jkz/(1-M)}] e^{j\omega t} \end{cases}$$

A partir deste sistema, obtém-se

$$|A_n| = \left| \frac{p_n^A + \rho_0 \cdot c_0 \cdot u_n^A}{2} \right| \quad (2.63)$$

Utilizando as Eqs.(2.62) e (2.63), a Eq.(2.61c) torna-se

$$TL = 20. \log \left[ \frac{p_n^A + \rho_0 \cdot c_0 \cdot u_n^A}{2 \cdot \rho_0 \cdot c_0 \cdot u_1^A} \cdot \sqrt{\frac{S_n}{S_1} \cdot \frac{(1 + M_n)}{(1 + M_1)}} \right] \quad (2.64)$$



Como a amplitude de uma onda progressiva não se altera durante sua propagação por um duto reto,  $A_n$  e  $A_l$  podem ser medidos em qualquer posição dos respectivos dutos. A Eq.(2.64) é válida para propagação sonora unidimensional em regime de escoamento permanente e uniforme.

### 2.2.1.3 Redução de ruído ou diferença de nível sonoro

A redução de ruído ( $NR$ ) ou diferença de nível sonoro ( $LD$ ) é definida como sendo a diferença entre os níveis de pressão sonora de dois pontos arbitrariamente selecionados, estando um localizado antes do atenuador e o outro após este. Assim,

$$LD = 20 \cdot \log \left( \frac{p_n^A}{p_l^A} \right) \quad (2.65)$$

onde  $p_n^A$  é a pressão sonora em um ponto de medição situado no elemento  $n$  e  $p_l^A$  é a pressão sonora em um ponto de medição situado no elemento  $l$ .

A diferença de nível sonoro ( $LD$ ), ao contrário da perda por transmissão ( $TL$ ), não requer terminação anecóica.

### 2.2.1.4 Comparação entre os parâmetros de desempenho

A perda por inserção ( $IL$ ) é o único parâmetro apresentado que realmente representa o desempenho do atenuador de ruído, uma vez que ela indica a redução do nível de potência sonora irradiado para o ambiente propiciada pela inserção do atenuador entre o receptor e a fonte. Entretanto, para a determinação de  $IL$ , é necessário conhecer previamente as características acústicas de todos os componentes do sistema.

A perda por transmissão ( $TL$ ) requer apenas o conhecimento das características do atenuador, pois ela representa a diferença entre o nível de potência sonora incidente no mesmo e o nível de potência sonora transmitido para um duto com terminação anecóica.

Desta forma, a  $TL$  é uma propriedade do atenuador de ruído; por este motivo, a mesma é o parâmetro de desempenho adotado neste trabalho. Porém, a medição da potência sonora da onda incidente requer o uso de técnicas sofisticadas, o que constitui um ponto desfavorável para a  $TL$ .

A diferença de nível sonoro ( $LD$ ) é a diferença entre os níveis de pressão sonora apresentados em dois pontos distintos: um localizado anteriormente ao atenuador e outro após este. Assim como a  $TL$ , a  $LD$  não exige o conhecimento prévio da impedância interna da fonte sonora e da impedância de radiação; e, bem como a  $IL$ , a  $LD$  não necessita de uma terminação anecóica. Desta forma, a  $LD$  é o parâmetro mais simples tanto em termos de cálculo quanto em técnicas de medição.

### 2.2.2 Descontinuidades Geométricas

Os desenvolvimentos realizados nesta seção são baseados no trabalho de ALFREDSON e DAVIES (1971), o qual utiliza modelos unidimensionais para prever o comportamento acústico de atenuadores de ruído em sistemas de exaustão de motores.

Antes de prosseguir, algumas relações devem ser apresentadas. Aplicando a primeira lei da termodinâmica a um processo adiabático, chega-se a (VAN WYLEN et al., 1998)

$$dh + u \cdot du = 0 \quad (2.66)$$

onde  $h$  é a entalpia específica e  $u = u^F + u^A$ . A notação vetorial foi omitida uma vez que esta seção trata apenas de problemas unidimensionais.

Combinando a primeira e a segunda lei da termodinâmica, obtém-se as seguintes expressões, as quais são conhecidas como equações de Gibbs (VAN WYLEN et al., 1998):

$$T \cdot ds = de + p \cdot d\rho^{-1} \quad (2.67)$$

e,

$$T.ds = dh - \frac{1}{\rho}.dp \quad (2.68)$$

onde  $e$  é a energia interna específica.

Levando a Eq.(2.68) na (2.66), obtém-se

$$\frac{1}{\rho}.dp + u.du = -T.ds \quad (2.69)$$

Agora, considere os dois tipos simples de descontinuidades de área mostrados a seguir, representativos de tubos com uma contração súbita e expansão súbita, onde tanto o escoamento quanto o campo sonoro são unidimensionais.

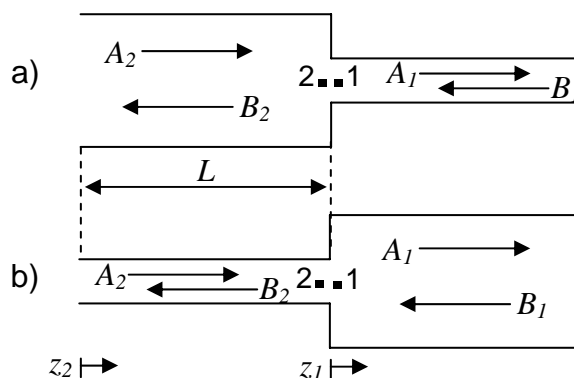


FIGURA 2.3 - Tubos com: a) Contração súbita; b) Expansão súbita.

Seguindo ALFREDSON e DAVIES (1971), assume-se que, nas proximidades da descontinuidade, a variação espacial das grandezas físicas é preponderante sobre a variação temporal destas; utilizando a nomenclatura apresentada por RIENSTRA e HIRSCHBERG (2003), esta hipótese implica em admitir a descontinuidade como sendo uma região “compacta”. Tanto o escoamento quanto o campo sonoro apresentam padrões tridimensionais na região onde ocorre uma mudança súbita na seção transversal dos tubos, a validade da hipótese de região “compacta” está condicionada ao fato da porção do tubo onde ocorrem efeitos tridimensionais ser pequena comparada ao comprimento de onda da excitação sonora. Tais efeitos não são considerados aqui, mas

sim em um momento posterior deste trabalho quando a utilização do método dos elementos finitos permitirá realizar esta avaliação.

Assumindo que a contração/expansão é um processo isoentrópico (adiabático e reversível), desprezando os termos de segunda ordem e separando as variáveis dependentes do tempo; a integração da Eq.(2.69) ao longo das descontinuidades apresentadas na FIG.2.3 resulta em

$$\int_{1-2} \frac{1}{\rho} .dp^A + \int_{1-2} u^F .du^A = 0 \quad (2.70)$$

Supondo que  $\rho_2 = \rho_1$  e levando as Eqs.(2.51) e (2.52) na (2.70), chega-se a

$$(1 + M_2).A_2.e^{-jkL/(1+M_2)} + (1 - M_2).B_2.e^{jkL/(1-M_2)} = (1 + M_1).A_1 + (1 - M_1).B_1 \quad (2.71)$$

A Eq.(2.71) expressa a condição de conservação de energia nas descontinuidades mostradas na FIG.2.3 para processos isoentrópicos.

Para processos isoentrópicos, a equação unidimensional de continuidade de massa é dada por (adaptado de ALFREDSON e DAVIES, 1971)

$$S \cdot \left( \rho .du + u .\frac{dp}{c_0^2} \right) = 0 \quad (2.72)$$

onde  $S$  é a área da seção transversal do tubo.

Desprezando os termos de segunda ordem e separando as variáveis dependentes do tempo; a integração da Eq.(2.72) ao longo das descontinuidades apresentadas na FIG.2.3 resulta em

$$\int_{1-2} \rho .S .du^A + \frac{1}{c_0^2} \int_{1-2} S .u^F .dp^A = 0 \quad (2.73)$$

Levando as Eqs.(2.51) e (2.52) na (2.73), chega-se a

$$S_2 \left[ (1 + M_2) A_2 . e^{-jkL/(1+M_2)} - (1 - M_2) B_2 . e^{jkL/(1-M_2)} \right] = S_1 \left[ (1 + M_1) A_1 - (1 - M_1) B_1 \right] \quad (2.74)$$

A Eq.(2.74) expressa a condição de continuidade de massa nas descontinuidades mostradas na FIG.2.3 para processos isoentrópicos.

Na análise de uma descontinuidade, existem quatro incógnitas a serem determinadas:  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$  e  $B_2$ . Logo, são necessárias quatro equações a fim de analisar o sistema em sua totalidade. Até aqui foram desenvolvidas duas equações, Eqs.(2.71) e (2.74), as relações restantes são fornecidas pelas condições de contorno na entrada e na saída do sistema.

As Eqs.(2.71) e (2.74) foram obtidas a partir da hipótese que o fluxo através de uma descontinuidade é um processo isoentrópico. Segundo ALFREDSON e DAVIES (1971), tal pressuposto fornece bons resultados no tratamento de contrações súbitas de área (ver FIG.2.3-a), porém o mesmo não pode ser dito quando expansões súbitas (ver FIG.2.3-b) são consideradas. No que se refere a estas últimas, uma aproximação simples que apresenta bons resultados consiste em utilizar a equação de continuidade de massa para o caso isoentrópico em conjunto com uma equação de continuidade de pressão, ou seja, a Eq.(2.74) pode ser empregada juntamente com a seguinte relação:

$$A_2 . e^{-jkL/(1+M_2)} + B_2 . e^{jkL/(1-M_2)} = A_1 + B_1 \quad (2.75)$$

A seguir, será desenvolvida uma expressão para o cálculo da perda por transmissão em câmaras de expansão simples.

### 2.2.3 Perda por Transmissão em Câmaras de Expansão Simples

Uma câmara de expansão simples composta por dutos de seção circular (tubos) de paredes rígidas é mostrada na FIG.2.4, onde os diâmetros dos tubos de entrada e de

saída são iguais. Objetiva-se obter uma expressão para a perda por transmissão ( $TL$ ) em tal sistema.

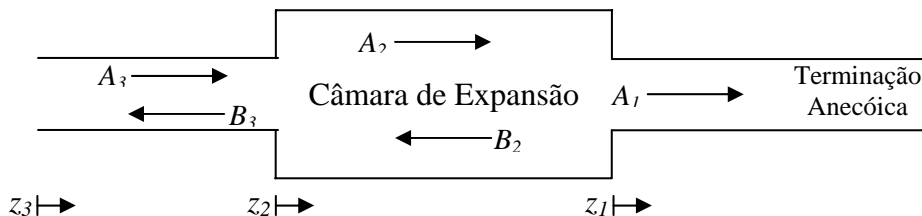


FIGURA 2.4 - Esquema de uma câmara de expansão simples.

Assumindo que o escoamento e a propagação sonora são unidimensionais, as Eqs.(2.51) e (2.52) são válidas, logo

$$p_3^A = [A_3 \cdot e^{-jkz_3/(1+M_3)} + B_3 \cdot e^{jkz_3/(1-M_3)}] e^{j\omega t} \quad (2.76)$$

$$u_3^A = \frac{1}{\rho_0 \cdot c_0} \cdot [A_3 \cdot e^{-jkz_3/(1+M_3)} - B_3 \cdot e^{jkz_3/(1-M_3)}] e^{j\omega t} \quad (2.77)$$

$$p_2^A = [A_2 \cdot e^{-jkz_2/(1+M_2)} + B_2 \cdot e^{jkz_2/(1-M_2)}] e^{j\omega t} \quad (2.78)$$

$$u_2^A = \frac{1}{\rho_0 \cdot c_0} \cdot [A_2 \cdot e^{-jkz_2/(1+M_2)} - B_2 \cdot e^{jkz_2/(1-M_2)}] e^{j\omega t} \quad (2.79)$$

$$p_1^A = A_1 \cdot e^{-jkz_1/(1+M_1)} \cdot e^{j\omega t} \quad (2.80)$$

$$u_1^A = \frac{1}{\rho_0 \cdot c_0} \cdot [A_1 \cdot e^{-jkz_1/(1+M_1)}] e^{j\omega t} \quad (2.81)$$

Como os diâmetros das tubulações de entrada e saída são iguais, tem-se que  $M_1 = M_3$ . Tratando as discontinuidades como processos isoentrópicos, as relações apresentadas na seção anterior podem ser utilizadas a fim de se estudar o comportamento acústico do sistema. Desta forma, aplicando as Eqs.(2.71) e (2.74) na expansão e na contração, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+M_3).A_3.e^{-jkL_1/(1+M_3)} + (1-M_3).B_3.e^{jkL_1/(1-M_3)} - (1+M_2)A_2 - (1-M_2)B_2 = 0 \\ (1+M_2).A_2.e^{-jkL_2/(1+M_2)} + (1-M_2).B_2.e^{jkL_2/(1-M_2)} - (1+M_3)A_1 = 0 \\ (1+M_3).A_3.e^{-jkL_1/(1+M_3)} - (1-M_3).B_3.e^{jkL_1/(1-M_3)} - m[(1+M_2).A_2 - (1-M_2).B_2] = 0 \\ (1+M_2).A_2.e^{-jkL_2/(1+M_2)} - (1-M_2).B_2.e^{jkL_2/(1-M_2)} - \frac{1}{m}.(1+M_3).A_1 = 0 \end{array} \right.$$

onde  $L_1$  é o comprimento do tubo de entrada,  $L_2$  é o comprimento da câmara de expansão,  $D_1$  é o diâmetro dos tubos de entrada e saída,  $D_2$  é o diâmetro da câmara de expansão e  $m = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$ .

Note que o sistema obtido apresenta quatro equações e cinco incógnitas:  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  e  $A_1$ . Portanto, para determinar todas as cinco incógnitas é necessária uma equação adicional, a qual corresponde à condição de contorno na posição  $z_3 = 0$ . Entretanto, como objetiva-se deduzir uma expressão para a  $TL$ , tal condição de contorno é prescindível, uma vez que a  $TL$  depende apenas da geometria da câmara, da velocidade do escoamento e do número de onda ( $k$ ), conforme será demonstrado a seguir.

Utilizando a Eq.(2.61c) e o sistema de equações obtido, é possível obter a seguinte relação:

$$TL = 20.\log \left\{ \frac{1}{4} \left[ \left( m + \frac{1}{m} \right)^2 \cdot \cos\left(\frac{k.L_2}{1+M_2}\right) - \left( m - \frac{1}{m} \right)^2 \cdot \cos\left(\frac{k.L_2}{1-M_2}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + j \left[ \left( m + \frac{1}{m} \right)^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{k.L_2}{1+M_2}\right) + \left( m - \frac{1}{m} \right)^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{k.L_2}{1-M_2}\right) \right] \right] \right\} \quad (2.82)$$

A Eq.(2.82) fornece a perda por transmissão em câmaras de expansão tais qual a mostrada na FIG.2.4. Para o caso particular em que  $M_2 = 0$ , a Eq.(2.82) simplifica-se para

$$TL = 10.\log \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( m - \frac{1}{m} \right)^2 \cdot \text{sen}^2(k.L_2) \right] \quad (2.83)$$

Esta expressão pode ser encontrada em diversos trabalhos; ver, por exemplo, YOUNG e CROCKER (1975) e SELAMET e RADAVIDICH (1997). Analisando-a, constata-se que a  $TL$  apresenta um valor mínimo igual a zero quando  $k.L_2 = q.\pi$ , e um valor máximo quando  $k.L_2 = (2q - 1).\frac{\pi}{2}$ , onde  $q = 1, 2, \dots, \infty$ .



# 3

## MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

No capítulo anterior foi apresentado um modelo matemático tridimensional para a propagação de ondas sonoras na presença de escoamento irrotacional de gases, o qual resultou nas Eqs.(2.33) e (2.38).

Ainda no capítulo 2 deste trabalho, aplicando uma técnica analítica a um modelo unidimensional, deduziu-se uma expressão para o cálculo da perda por transmissão ( $TL$ ) em câmaras de expansão simples.

Neste trabalho, objetiva-se calcular a  $TL$  em câmaras de expansão considerando o efeito do escoamento irrotacional de gases e da propagação sonora bidimensional. Portanto, modelos matemáticos unidimensionais não fornecem subsídios para tal análise, devendo as Eqs.(2.33) e (2.38) serem solucionadas. Como, para estes sistemas, não se dispõe de técnicas analíticas de solução, a aplicação de um método numérico faz-se necessária. Optou-se pela utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF), o qual permite a análise de câmaras de expansão e não apresenta nenhuma restrição quanto à geometria destas.

A aplicação do MEF exige que o domínio do problema seja dividido em subdomínios, os quais também são denominados “elementos finitos”, sendo o domínio dividido chamado de “malha”; a este processo de subdivisão dá-se o nome de discretização, sendo que, quanto maior o número de elementos finitos empregados, melhores serão os resultados finais obtidos. Além disso, cada elemento é definido a partir de determinados pontos, os quais são chamados “nós” do elemento.

Quando utilizado na análise de propagação sonora, o MEF gera um sistema de equações algébricas com um número relativamente elevado de incógnitas; tal situação agrava-se na medida em que a frequência de interesse torna-se mais alta. Por este motivo, as análises de câmaras de expansão pelo MEF são geralmente restritas a sistemas com simetria axial, o que permite a utilização de elementos finitos bidimensionais.

Neste trabalho, uma técnica numérica baseada no MEF será utilizada para analisar o comportamento acústico de câmaras de expansão com simetria axial na presença de escoamento irrotacional de gases. Para tal, foi desenvolvido um programa computacional escrito em linguagem C.

### **3.1 Método dos Resíduos Ponderados**

O MEF é um caso particular do método dos resíduos ponderados. Portanto, antes de apresentar a formulação do problema de propagação sonora, é pertinente fazer algumas considerações sobre este método.

#### **3.1.1 Definições Básicas**

Considere que se deseja solucionar a seguinte equação:

$$\mathfrak{L}(u_0) = 0 \tag{3.1}$$

onde  $\mathfrak{I}()$  é um operador diferencial qualquer e  $u_0$  é a função que representa a solução exata da equação.

Suponha que não seja possível obter a solução exata da Eq.(3.1). Neste caso, a função  $u_0$  será aproximada por uma série de funções  $\varphi_i(x)$ , ou seja,

$$u_0 \cong u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \varphi_i \quad (3.2)$$

onde  $\alpha_i$  são parâmetros a serem determinados,  $\varphi_i = \varphi_i(x)$  são funções linearmente independentes,  $x$  representa as coordenadas espaciais e  $u$  é a aproximação para a função  $u_0$  que satisfaz todas as condições de contorno do problema.

Levando  $u$  na Eq.(3.1), obtém-se

$$R = \mathfrak{I}(u) \quad (3.3)$$

onde  $R$  é a função residual ou resíduo.

O propósito do método dos resíduos ponderados é distribuir os erros resultantes do fato de ter-se assumido a função  $u$  como solução da Eq.(3.1) de forma tal que eles sejam nulos num sentido médio. Assim, pode-se escrever

$$\int_{\Omega} R \cdot w_i \cdot d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

onde  $\Omega$  é o domínio do problema e  $w_i$  é a  $i$ -ésima função peso.

A Eq.(3.4) mostra que o resíduo  $R$  é distribuído de acordo com a função peso  $w_i$ . Substituindo a Eq.(3.2) na (3.3) e levando o resultado na Eq.(3.4), obtém-se os valores de  $\alpha_i$  de acordo com as funções peso escolhidas. Note que é necessário escolher várias funções peso, sendo uma para cada incógnita  $\alpha_i$ .

O tipo de função peso escolhido determina a técnica de aproximação utilizada. Uma delas é o método de Galerkin, o qual leva à obtenção das equações em elementos finitos.

### 3.1.2 Método de Galerkin

O método de Galerkin é um caso particular do método dos resíduos ponderados, para o qual a função peso é do mesmo tipo que a função de aproximação; ou seja, se

$u_0 \cong u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \varphi_i$ , tem-se que

$$w_i = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \varphi_j \quad (3.5)$$

onde  $\beta_j$  são coeficientes arbitrários.

Geralmente, os coeficientes  $\beta_j$  são escolhidos de tal forma que

$$\beta_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i \\ 0, & \text{se } j \neq i \end{cases}$$

Substituindo a equação acima na Eq.(3.5), obtém-se

$$w_i = \varphi_i \quad (3.6)$$

## 3.2 Formulação Numérica pelo MEF

Para o cálculo da  $TL$  em câmaras de expansão, é necessário que as seguintes equações sejam solucionadas conforme mencionado no capítulo 2:

$$\nabla^2 \phi^F = 0 \quad (3.7)$$

e

$$\nabla^2 \Phi^A + k^2 \cdot \Phi^A + \frac{2 \cdot j \cdot k}{c_0} \cdot (\vec{\nabla} \phi^F \cdot \vec{\nabla} \Phi^A) - \frac{1}{c_0^2} \vec{\nabla} \phi^F \cdot \left[ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \phi^F \cdot \vec{\nabla} \Phi^A) \right] = 0 \quad (3.8)$$

A Eq.(3.7) rege o comportamento do escoamento irrotacional, enquanto que a Eq.(3.8) refere-se à propagação sonora. Note que o potencial referente ao escoamento ( $\phi^F$ ) também aparece na Eq.(3.8); sendo, portanto, necessário solucionar primeiro a Eq.(3.7) para só então resolver a equação da propagação sonora.

A formulação de Galerkin será aplicada a cada uma destas expressões a fim de se obter as equações em elementos finitos.

### 3.2.1 Escoamento Irrotacional

Considere a Eq.(3.7); substituindo-a na Eq.(3.4), tem-se que

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \phi^F \cdot w_i \cdot d\Omega = 0 \quad (3.9)$$

Assumindo que há simetria axial,  $\frac{\partial(\phi^F)}{\partial\theta} = 0$ , e a seguinte expressão torna-se válida:

$$\nabla^2 \phi^F \cdot w_i = \nabla \cdot (\nabla \phi^F \cdot w_i) - \frac{\partial \phi^F}{\partial r} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial r} - \frac{\partial \phi^F}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial z} \quad (3.10)$$

A restrição de simetria axial permite escrever

$$d\Omega = r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \quad (3.11)$$

Levando as Eqs.(3.10) e (3.11) na (3.9), obtém-se

$$\int_{\Omega} \left[ \nabla \cdot (\nabla \phi^F \cdot w_i) - \frac{\partial \phi^F}{\partial r} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial r} - \frac{\partial \phi^F}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial z} \right] r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz = 0 \quad (3.12)$$

Utilizando o teorema da divergência e integrando em relação a  $\theta$ , chega-se a

$$\int \left( \frac{\partial \phi^F}{\partial r} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial r} + \frac{\partial \phi^F}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial z} \right) r \cdot dr \cdot dz = \int w_i \cdot \frac{\partial \phi^F}{\partial n} \cdot r \cdot d\Gamma \quad (3.13)$$

onde  $\Gamma$  é o contorno do problema e  $\vec{n}$  é o vetor normal à linha de contorno do problema. Note que, devido à simetria axial, a geometria a ser discretizada torna-se bidimensional.

Agora, faz-se necessário definir uma aproximação para a função  $\phi^F$ . Utilizando elementos finitos com número de nós igual a  $n$ , pode-se escrever

$$\phi^F = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n] \begin{bmatrix} \phi_1^F \\ \phi_2^F \\ \vdots \\ \phi_n^F \end{bmatrix} \quad (3.14a)$$

onde  $\phi_i^F$  é o valor de  $\phi^F$  no  $i$ -ésimo nó do elemento e  $N_i = N_i(r, z) = \begin{cases} 1, \text{no nó } i \\ 0, \text{nos demais nós} \end{cases}$

é a  $i$ -ésima função de forma.

A Eq.(3.14a) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\phi^F = \bar{N}^T \cdot \bar{\phi}^F \quad (3.14b)$$

onde  $\bar{\phi}^F$  é o vetor de incógnitas do elemento e  $\bar{N}^T$  é o vetor que contém as funções de forma.

Note que optou-se por utilizar apenas 1 (um) grau de liberdade para cada nó do elemento, sendo ele o próprio valor da variável que está sendo aproximada, ou seja, de  $\phi^F$ . Tais elementos são ditos de classe de continuidade  $C^0$  (C zero), pois as derivadas de  $\phi^F$  não são colocadas no vetor de incógnitas  $\bar{\phi}^F$ . Desta forma, o número de graus de liberdade de cada elemento é igual a  $n$ , ou seja, ao próprio número de nós do elemento.

A partir da Eq.(3.14b), chega-se a

$$\frac{\partial \phi^F}{\partial r} = \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} \cdot \bar{\phi}^F \quad (3.15)$$

e

$$\frac{\partial \phi^F}{\partial z} = \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \cdot \bar{\phi}^F \quad (3.16)$$

Agora, faz-se necessário escolher as funções peso. Como a formulação de Galerkin está sendo utilizada, empregando as Eqs.(3.6) e (3.14a), conclui-se que

$$N_i = w_i \quad (3.17a)$$

ou seja,

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (3.17b)$$

Levando as Eqs.(3.14b), (3.15), (3.16) e (3.17b) na Eq.(3.13), obtém-se o seguinte sistema de equações de ordem  $n$ :

$$\int \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \right) \cdot \bar{\phi}^F \cdot r \cdot dr \cdot dz = \int \bar{N} \cdot \frac{\partial \phi^F}{\partial n} \cdot r \cdot d\Gamma$$

ou

$$\bar{M}^F \cdot \bar{\phi}^F = \int \bar{N} \cdot \frac{\partial \phi^F}{\partial n} \cdot r \cdot d\Gamma \quad (3.18)$$

$$\text{onde } \overline{M}^F = \int \left( \frac{\partial \overline{N}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \overline{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \overline{N}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \overline{N}^T}{\partial z} \right) r \cdot dr \cdot dz \quad (3.19)$$

Note que o lado direito da Eq.(3.18) contém as condições de contorno do problema. A seguir, faz-se uma análise das condições de contorno existentes em câmaras de expansão.

A FIG.3.1 representa o modelo geométrico com simetria axial de uma câmara de expansão tubular; as setas indicam a direção do escoamento de gás. Note que a geometria real da câmara é obtida realizando uma revolução do modelo em torno do eixo  $\overline{AB}$  da câmara.

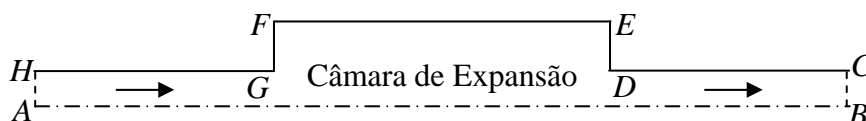


FIGURA 3.1 - Modelo geométrico de uma câmara de expansão com simetria axial.

Supondo que as paredes dos tubos sejam perfeitamente rígidas, pode-se dizer que a componente do vetor velocidade normal às paredes é nula, ou seja, nos segmentos  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DE}$ ,  $\overline{EF}$ ,  $\overline{FG}$  e  $\overline{GH}$ , a seguinte condição de contorno é válida:

$$\frac{\partial \phi^F}{\partial n} = 0 \quad (3.20)$$

Devido à simetria axial, a componente do vetor velocidade normal ao eixo de simetria é nula. Assim sendo, a condição de contorno expressa pela Eq.(3.20) também é válida para o segmento de reta  $\overline{AB}$  da FIG.3.1.

Resta estabelecer as condições de contorno nos segmentos  $\overline{BC}$  e  $\overline{AH}$ . Neste trabalho, será adotada a hipótese de que a velocidade do escoamento é constante tanto na entrada quanto na saída do sistema, o que permite escrever



$$\frac{\partial \phi^F}{\partial n} = u_e^F \quad (3.21)$$

e

$$\frac{\partial \phi^F}{\partial n} = -u_s^F \quad (3.22)$$

onde  $u_e^F$  é a velocidade do escoamento na entrada do sistema (segmento  $\overline{AH}$ ) e  $u_s^F$  é a velocidade do escoamento na saída do sistema (segmento  $\overline{BC}$ ).

Note que, se os diâmetros dos tubos de entrada e saída forem iguais, necessariamente tem-se  $u_e^F = u_s^F$ .

Observe ainda que, a partir do conhecimento da velocidade de entrada, pode-se obter a velocidade de saída; portanto, fisicamente, a Eq.(3.22) é redundante. De fato, para a solução do sistema de equações obtido pelo MEF, pode-se dispensar a Eq.(3.22), bastando para isso trabalhar com a matriz  $\overline{M}^F$  em sua forma reduzida, ou seja, restringindo os graus de liberdade do problema situados sobre o segmento  $\overline{BC}$ . Neste trabalho, isso será feito arbitrando que o valor de  $\phi^F$  na saída do sistema é nulo.

Assim sendo, para a utilização do programa computacional de elementos finitos desenvolvido neste trabalho, a única condição de contorno referente ao escoamento a ser informada pelo usuário é a velocidade do fluxo de gás na entrada do sistema.

### 3.2.2 Propagação Sonora

Considere a Eq.(3.8); substituindo-a na Eq.(3.4), tem-se que

$$\int_{\Omega} \left\{ \nabla^2 \Phi^A + k^2 \cdot \Phi^A + \frac{2 \cdot j \cdot k}{c_0} \cdot (\vec{\nabla} \phi^F \cdot \vec{\nabla} \Phi^A) - \frac{1}{c_0^2} \vec{\nabla} \phi^F \cdot \left[ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \phi^F \cdot \vec{\nabla} \Phi^A) \right] \right\} \cdot w_i \cdot d\Omega = 0 \quad (3.23)$$

Assumindo que há simetria axial,  $\frac{\partial(\Phi^A)}{\partial \theta} = 0$ , e a seguinte expressão torna-se válida:

$$\nabla^2 \Phi^A . w_i = \nabla \cdot (\nabla \Phi^A . w_i) - \frac{\partial \Phi^A}{\partial r} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial r} - \frac{\partial \Phi^A}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial z} \quad (3.24)$$

Levando as Eqs.(3.11) e (3.24) na (3.23), obtém-se

$$\int \left\{ \nabla \cdot (\nabla \Phi^A . w_i) - \frac{\partial \Phi^A}{\partial r} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial r} - \frac{\partial \Phi^A}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial z} + k^2 \cdot \Phi^A . w_i + \frac{2 \cdot j \cdot k}{c_0} (\bar{\nabla} \phi^F \cdot \bar{\nabla} \Phi^A) . w_i - \right. \\ \left. + \frac{1}{c_0^2} \bar{\nabla} \phi^F \cdot [\bar{\nabla} (\bar{\nabla} \phi^F \cdot \bar{\nabla} \Phi^A)] w_i \right\} r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz = 0 \quad (3.25)$$

Utilizando o teorema da divergência e integrando em relação a  $\theta$ , chega-se a

$$\int \left\{ \frac{\partial \Phi^A}{\partial r} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial r} + \frac{\partial \Phi^A}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial z} - k^2 \cdot \Phi^A . w_i - \frac{2 \cdot j \cdot k}{c_0} (\bar{\nabla} \phi^F \cdot \bar{\nabla} \Phi^A) . w_i + \right. \\ \left. + \frac{1}{c_0^2} \bar{\nabla} \phi^F \cdot [\bar{\nabla} (\bar{\nabla} \phi^F \cdot \bar{\nabla} \Phi^A)] w_i \right\} r \cdot dr \cdot dz = \int w_i \cdot \frac{\partial \Phi^A}{\partial n} \cdot r \cdot d\Gamma \quad (3.26)$$

onde

$$\bar{\nabla} \phi^F \cdot [\bar{\nabla} (\bar{\nabla} \phi^F \cdot \bar{\nabla} \Phi^A)] = \frac{\partial \phi^F}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \phi^F}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial \Phi^A}{\partial z} + \frac{\partial \phi^F}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \Phi^A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi^F}{\partial r \partial z} \cdot \frac{\partial \Phi^A}{\partial r} + \frac{\partial \phi^F}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 \Phi^A}{\partial r \partial z} \right) + \\ + \frac{\partial \phi^F}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 \phi^F}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial \Phi^A}{\partial r} + \frac{\partial \phi^F}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 \Phi^A}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi^F}{\partial r \partial z} \cdot \frac{\partial \Phi^A}{\partial z} + \frac{\partial \phi^F}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \Phi^A}{\partial r \partial z} \right) \quad (3.27)$$

Conforme já foi dito na seção 2.1.5, o termo  $\frac{1}{c_0^2} \bar{\nabla} \phi^F \cdot [\bar{\nabla} (\bar{\nabla} \phi^F \cdot \bar{\nabla} \Phi^A)]$  é geralmente

desprezado. Entretanto, neste trabalho optou-se por manter tal termo na formulação a fim de ampliar a aplicabilidade do modelo desenvolvido. Note que, conforme mostra a Eq.(3.27), esta escolha implica no surgimento de derivadas segundas na equação, o que torna o modelo significativamente mais complexo.

Agora, faz-se necessário definir uma aproximação para a função  $\Phi^A$ . Assim como feito para o escoamento, serão utilizados elementos de classe de continuidade  $C^0$  com

número de graus de liberdade por elemento igual ao número de nós do elemento ( $n$ ). Portanto, pode-se escrever

$$\Phi^A = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n] \begin{bmatrix} \Phi_1^A \\ \Phi_2^A \\ \vdots \\ \Phi_n^A \end{bmatrix} \quad (3.28a)$$

onde  $\Phi_i^A$  é o valor de  $\Phi^A$  no  $i$ -ésimo nó do elemento.

A Eq.(3.28a) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\Phi^A = \bar{N}^T \cdot \bar{\Phi}^A \quad (3.28b)$$

onde  $\bar{\Phi}^A$  é o vetor de incógnitas do elemento.

A partir da Eq.(3.28b), chega-se a

$$\frac{\partial \Phi^A}{\partial r} = \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} \cdot \bar{\Phi}^A \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \Phi^A}{\partial z} = \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \cdot \bar{\Phi}^A \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^A}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r^2} \cdot \bar{\Phi}^A \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^A}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial z^2} \cdot \bar{\Phi}^A \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^A}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r \partial z} \cdot \bar{\Phi}^A \quad (3.33)$$

Pela Eq.(3.14b), chega-se a

$$\frac{\partial^2 \phi^F}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r^2} \cdot \bar{\phi}^F \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial^2 \phi^F}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial z^2} \cdot \bar{\phi}^F \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial^2 \phi^F}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r \partial z} \cdot \bar{\phi}^F \quad (3.36)$$

As funções peso serão escolhidas da mesma forma que na seção anterior; assim, as Eqs.(3.17a) e (3.17b) também são válidas aqui.

Levando as Eqs.(3.28b) a (3.36) e as Eqs.(3.15), (3.16) e (3.17b) na Eq.(3.26), obtém-se o seguinte sistema de equações de ordem  $n$ :

$$\left( \bar{M}^A - k^2 \cdot \bar{K}^A - \frac{2 \cdot j \cdot k}{c_0} \cdot \bar{V}^A + \frac{1}{c_0^2} \cdot \bar{S}^A \right) \cdot \Phi^A = \int \bar{N} \cdot \frac{\partial \Phi^A}{\partial n} \cdot r \cdot d\Gamma \quad (3.37)$$

onde

$$\bar{M}^A = \int \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \right) \cdot r \cdot dr \cdot dz;$$

$$\bar{K}^A = \int \bar{N} \cdot \bar{N}^T \cdot r \cdot dr \cdot dz;$$

$$\bar{V}^A = \int \bar{N} \cdot \left( \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \right) \cdot r \cdot dr \cdot dz;$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^A = \int \bar{N} \cdot \left[ \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \cdot \bar{\phi}^F \left( \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial z^2} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r \partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r \partial z} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} \cdot \bar{\phi}^F \left( \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r^2} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r \partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r \partial z} \right) \right] \cdot r \cdot dr \cdot dz \end{aligned}$$

Note que o lado direito da Eq.(3.37) contém as condições de contorno do problema. A seguir, faz-se uma análise das condições de contorno existentes em câmaras de expansão.

Considere novamente a FIG.3.1. Supondo que as paredes dos tubos sejam perfeitamente rígidas, pode-se dizer que a componente do vetor velocidade acústica normal às paredes é nula, ou seja, nos segmentos  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DE}$ ,  $\overline{EF}$ ,  $\overline{FG}$  e  $\overline{GH}$ , a seguinte condição de contorno é válida:

$$\frac{\partial \Phi^A}{\partial n} = 0 \quad (3.38)$$

Devido à simetria axial, a componente do vetor velocidade acústica normal ao eixo de simetria é nula. Assim sendo, a condição de contorno expressa pela Eq.(3.38) também é válida para o segmento de reta  $\overline{AB}$  da FIG.3.1.

Resta estabelecer as condições de contorno nos segmentos  $\overline{BC}$  e  $\overline{AH}$ . Neste trabalho, será adotada a hipótese de que a amplitude da velocidade acústica é constante tanto na entrada quanto na saída do sistema, o que permite escrever

$$\frac{\partial \Phi^A}{\partial n} = u_e^A \quad (3.39)$$

e

$$\frac{\partial \Phi^A}{\partial n} = -u_s^A \quad (3.40)$$

onde  $u_e^A$  é a amplitude da velocidade acústica na entrada do sistema (segmento  $\overline{AH}$ ) e  $u_s^A$  é a amplitude da velocidade acústica na saída do sistema (segmento  $\overline{BC}$ ).

Neste trabalho, deseja-se calcular a perda por transmissão em câmaras de expansão; portanto, a condição de contorno conhecida na saída do sistema é a impedância acústica, e não a velocidade acústica. Desta forma, a Eq.(3.40) não pode ser diretamente aplicada, sendo necessárias algumas manipulações matemáticas a fim de expressar  $\frac{\partial \Phi^A}{\partial n}$  em função da impedância, o que será feito a seguir.

Assumindo que a propagação sonora no tubo de saída é unidimensional na direção  $z$ , a pressão sonora e a velocidade acústica no mesmo podem ser expressos por [ver Eqs.(2.39) e (2.40)]

$$u^A = -\frac{\partial \Phi^A}{\partial z} . e^{j\omega t} \quad (3.41)$$

$$p^A = \rho_o \left( j \cdot \omega \cdot \Phi^A - \frac{\partial \Phi^A}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi^F}{\partial z} \right) \cdot e^{j\omega t} \quad (3.42)$$

Como a impedância acústica ( $Z$ ) é a razão entre a pressão sonora e a velocidade acústica, combinando as Eqs.(3.41) e (3.42), chega-se a

$$\frac{\partial \Phi^A}{\partial z} = \frac{\rho_o j \cdot \omega \cdot \Phi^A}{\rho_o \cdot \frac{\partial \phi^F}{\partial z} - Z} \quad (3.43)$$

A Eq.(3.43) é válida para tubos onde a propagação sonora é unidimensional.

Para o contorno  $\overline{BC}$  da FIG.3.1,  $\frac{\partial \Phi^A}{\partial n} = \frac{\partial \Phi^A}{\partial z}$ ; levando esta expressão na Eq.(3.43) e utilizando as Eqs.(3.28b) e (3.16), chega-se a

$$\frac{\partial \Phi^A}{\partial n} = \left( \frac{\rho_o j \cdot \omega \cdot \overline{N}^T}{\rho_o \cdot \frac{\partial \overline{N}^T}{\partial z} \cdot \overline{\phi}^F - Z_s} \right) \cdot \overline{\Phi}^A \quad (3.44)$$

onde  $Z_s$  é impedância na saída do sistema.

Portanto, no contorno  $\overline{BC}$  tem-se que

$$\int_{\overline{BC}} \overline{N} \cdot \frac{\partial \Phi^A}{\partial n} \cdot r \cdot d\Gamma = \rho_o j \cdot \omega \cdot \left[ \int_{\overline{BC}} \left( \frac{\overline{N} \cdot \overline{N}^T \cdot r}{\rho_o \cdot \frac{\partial \overline{N}^T}{\partial z} \cdot \overline{\phi}^F - Z_s} \right) d\Gamma \right] \cdot \overline{\Phi}^A \quad (3.45a)$$

ou

$$\int_{\overline{BC}} \overline{N} \cdot \frac{\partial \Phi^A}{\partial n} \cdot r \cdot d\Gamma = \rho_o j \cdot \omega \cdot \overline{J}^A \cdot \overline{\Phi}^A \quad (3.45b)$$

$$\text{onde } \bar{J}^A = \int_{BC} \left( \frac{\bar{N} \cdot \bar{N}^T \cdot r}{\rho_0 \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \bar{\phi}^F - Z_s} \right) d\Gamma.$$

Substituindo a Eq.(3.45b) na Eq.(3.37), obtém-se

$$\left( \bar{M}^A - k^2 \cdot \bar{K}^A - \frac{2 \cdot j \cdot k}{c_0} \cdot \bar{V}^A + \frac{1}{c_0^2} \cdot \bar{S}^A - \rho_0 \cdot j \cdot \omega \cdot \bar{J}^A \right) \cdot \bar{\Phi}^A = \int_{AH} \bar{N} \cdot \frac{\partial \Phi^A}{\partial n} \cdot r \cdot d\Gamma \quad (3.46)$$

Note que o lado direito da Eq.(3.46) contém a condição de contorno apenas na entrada do sistema, uma vez que a componente do vetor velocidade normal às paredes dos tubos e ao eixo de simetria é nula e a condição de contorno na saída do sistema está contida na matriz  $\bar{J}^A$ .

Assim sendo, durante a utilização do *software* de elementos finitos desenvolvido neste trabalho, as únicas condições de contorno referentes à propagação sonora a serem informadas pelo usuário é a amplitude da velocidade acústica na entrada e a impedância acústica na saída do sistema. Observe que, para o cálculo da perda por transmissão, a impedância acústica é dada pela Eq.(2.81), pois o tubo de saída deve apresentar terminação anecóica.

### 3.2.3 Formulação Paramétrica

#### 3.2.3.1 Elemento finito bidimensional retangular de quatro nós

A fim de calcular as matrizes  $\bar{M}^F$ ,  $\bar{M}^A$ ,  $\bar{K}^A$ ,  $\bar{S}^A$ ,  $\bar{V}^A$  e  $\bar{J}^A$ , as quais foram apresentadas na seções anteriores, faz-se necessário estabelecer as funções de forma, ou seja, definir o vetor  $\bar{N}(r, z)$ . Este é função da geometria e do número de nós do elemento finito a ser utilizado. A FIG.3.2 mostra um elemento bidimensional retangular de quatro nós, para o qual serão obtidas as funções de forma correspondentes.

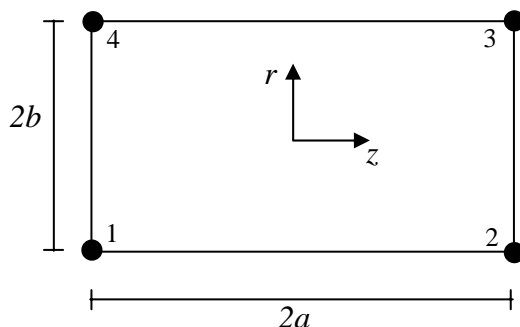


FIGURA 3.2 - Elemento finito bidimensional retangular de quatro nós.

O sistema de coordenadas global  $(z, r)$  pode ser transformado em um sistema de coordenadas adimensional  $(\xi, \eta)$  através das seguintes relações:

$$\xi = \frac{z}{a} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{r}{b} \quad (3.47)$$

Note que, no sistema adimensional ou natural, o elemento finito parametrizado é um quadrado de lado igual a dois.

A partir da Eq.(3.47), chega-se às seguintes expressões:

$$dz = a.d\xi \quad \text{e} \quad dr = b.d\eta \quad (3.48)$$

Deseja-se expressar o valor do potencial<sup>13</sup> ( $\phi$ ) em qualquer ponto do elemento a partir dos valores nodais  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  e  $\phi_4$ . Observando a FIG.3.2, conclui-se que as seguintes relações são válidas:

$$\begin{cases} \phi(-1, -1) = \phi_1 \\ \phi(1, -1) = \phi_2 \\ \phi(1, 1) = \phi_3 \\ \phi(-1, 1) = \phi_4 \end{cases} \quad (3.49)$$

<sup>13</sup> O símbolo  $\phi$  neste contexto pode ser considerado como sendo tanto o potencial referente ao escoamento quanto o acústico.



Logo, como o valor do potencial é “conhecido” em quatro pontos do elemento finito, pode-se escrever

$$\phi(\xi, \eta) = c_1 + c_2 \cdot \xi + c_3 \cdot \eta + c_4 \cdot \xi \cdot \eta \quad (3.50)$$

onde  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são constantes a serem determinadas.

Utilizando as Eqs.(3.49) e (3.50), chega-se a (adaptado de WEAVER e JOHNSTON, 1984)

$$\phi(\xi, \eta) = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) & \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) & \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) & \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{array} \right\} \quad (3.51)$$

Comparando a Eq.(3.51) com as Eqs.(3.14) e (3.28), nota-se que as funções de forma do elemento representado na FIG.3.2, em coordenadas naturais, são

$$\bar{N}^T(\xi, \eta) = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) & \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) & \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) & \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \end{array} \right] \quad (3.52)$$

Entretanto, para o cálculo das matrizes  $\bar{M}^F$ ,  $\bar{M}^A$ ,  $\bar{K}^A$ ,  $\bar{S}^A$ ,  $\bar{V}^A$  e  $\bar{J}^A$ , é necessário obter as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas globais ( $z$ ,  $r$ ). Além disso, a variável  $r$  deve ser expressa em termos de  $\xi$  e de  $\eta$ , o que será feito assumindo que a geometria do elemento é definida pelas mesmas funções de forma utilizadas para a obtenção do potencial, ou seja,

$$r(\xi, \eta) = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) & \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) & \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) & \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \right\} \quad (3.53)$$

onde  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  são as coordenadas  $r$  dos nós, as quais são conhecidas *a priori*. Note que estas coordenadas podem ser expressas em termos de  $a$  e  $b$ ; entretanto, optou-se por manter sua generalidade por motivos que se evidenciarão na seção seguinte deste trabalho.

Quando, como neste caso, a geometria do elemento e a variável de interesse são interpoladas da mesma forma, diz-se que o elemento é isoparamétrico. Neste trabalho, apenas serão utilizados tais elementos.

Utilizando a regra da cadeia em conjunto com a Eq.(3.47), pode-se escrever

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} = \frac{\partial \left( \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \left( \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial r^2} = \frac{\partial \left( \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \left( \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial z \partial r} = \frac{\partial \left( \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \left( \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{a \cdot b} \cdot \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi \partial \eta} \end{array} \right. \quad (3.54)$$

Combinando as Eqs.(3.52) e (3.54), chega-se à TAB.3.1. Nesta e nas Eqs.(3.48) e (3.53) estão contidas todas as informações necessárias para o cálculo das matrizes  $\bar{M}^F$ ,  $\bar{M}^A$ ,  $\bar{K}^A$ ,  $\bar{S}^A$ ,  $\bar{V}^A$  e  $\bar{J}^A$ . A matriz  $\bar{M}^F$ , por exemplo, pode ser rescrita da seguinte forma – ver Eq.(3.19):

$$\bar{M}^F = a \cdot b \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \right) \cdot r(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (3.55)$$

A integral acima, bem como as referentes às demais matrizes podem ser resolvidas analiticamente.

TABELA 3.1 – Funções de forma do elemento retangular de quatro nós e suas respectivas derivadas.

$i$	$N_i$	$\frac{\partial N_i}{\partial z}$	$\frac{\partial N_i}{\partial r}$	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2}$	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial r^2}$	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial z \partial r}$
1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$\frac{1}{4a}(\eta-1)$	$\frac{1}{4b}(\xi-1)$	0	0	$\frac{1}{4ab}$
2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$\frac{1}{4a}(1-\eta)$	$\frac{1}{4b}(-\xi-1)$	0	0	$-\frac{1}{4ab}$
3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$	$\frac{1}{4a}(\eta+1)$	$\frac{1}{4b}(\xi+1)$	0	0	$\frac{1}{4ab}$
4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$	$\frac{1}{4a}(-\eta-1)$	$\frac{1}{4b}(1-\xi)$	0	0	$-\frac{1}{4ab}$

Talvez, e com razão, o leitor tenha se incomodado com o fato das derivadas segundas das funções de forma em relação a  $z$  e a  $r$  serem nulas, conforme mostrado na TAB.3.1. Observando as Eqs.(3.37), (3.45b) e (3.55), constata-se que as derivadas segundas são necessárias apenas para o cálculo da matriz  $\bar{S}^A$ ; a qual, conforme já foi dito, tem sido desprezada pelos pesquisadores. Portanto, conclui-se que elementos finitos retangulares de quatro nós são inadequados para a avaliação da referida matriz; assim sendo, estes não serão utilizados nas análises numéricas realizadas neste trabalho, mas sim elementos quadrilaterais de oito nós, os quais serão abordados em seguida. Embora não sejam aplicáveis ao problema em estudo, optou-se por apresentar o elemento retangular de quatro nós devido à sua simplicidade, visando atingir a compreensão do leitor.

### 3.2.3.2 Elemento finito bidimensional quadrilateral de oito nós

Uma leitura ligeiramente cuidadosa da seção anterior leva a concluir que a utilização de coordenadas naturais no desenvolvimento lá apresentado é desnecessário, uma vez que a geometria do elemento é definida no sistema global de coordenadas. De fato, conforme será visto neste tópico, a formulação paramétrica apresenta uma enorme flexibilidade com relação à geometria dos elementos da malha.

A FIG.3.3 apresenta um elemento finito quadrilateral de oito nós no domínio natural, o qual será utilizado para ilustrar a flexibilidade da formulação paramétrica. As funções de forma em coordenadas naturais desse elemento são apresentadas por WEAVER e JOHNSTON (1984) e estão mostradas na TAB.3.2, juntamente com suas derivadas em relação a  $\xi$  e  $\eta$ .

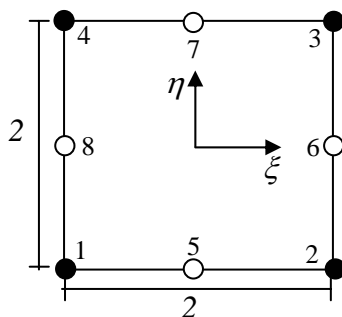


FIGURA 3.3 - Elemento finito bidimensional quadrilateral de oito nós.

TABELA 3.2 – Funções de forma do elemento quadrilateral de oito nós e suas respectivas derivadas.

$i$	$N_i$	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi \partial \eta}$
1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi+\eta)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta+\xi)$	$\frac{1}{2}(1-\eta)$	$\frac{1}{2}(1-\xi)$	$\frac{1}{4}(1-2\xi-2\eta)$
2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi-\eta)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta-\xi)$	$\frac{1}{2}(1-\eta)$	$\frac{1}{2}(1+\xi)$	$\frac{1}{4}(2\eta-2\xi-1)$
3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi+\eta)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta+\xi)$	$\frac{1}{2}(1+\eta)$	$\frac{1}{2}(1+\xi)$	$\frac{1}{4}(1+2\xi+2\eta)$
4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi-\eta)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta-\xi)$	$\frac{1}{2}(1+\eta)$	$\frac{1}{2}(1-\xi)$	$\frac{1}{4}(2\xi-2\eta-1)$
5	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$	$-\xi(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}(1-\xi^2)$	$\eta-1$	0	$\xi$
6	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$	$\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-\eta(1+\xi)$	0	$-1-\xi$	$-\eta$
7	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$	$-\xi(1+\eta)$	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)$	$-\eta-1$	0	$-\xi$
8	$\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$	$-\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-\eta(1-\xi)$	0	$\xi-1$	$\eta$

Na FIG.3.3, os nós que encontram-se preenchidos na cor preta são denominados nós de vértice e os nós sem preenchimento são chamados nós de meio de lado.

Na seção anterior, a geometria do elemento (retangular) foi definida no sistema global de coordenadas, o que implica que as matrizes obtidas são válidas apenas para elementos com geometria retangular. Aqui, contrariamente, o elemento é definido no sistema de coordenadas naturais e, a partir deste, sua geometria “real” no sistema global será obtida através do mapeamento de um sistema de coordenadas para o outro. Procedendo-se desta forma, é possível obter elementos quadrilaterais com formas diversas no sistema global de coordenadas a partir de um único tipo de elemento definido no sistema natural. Assim, pode-se obter uma malha de elementos finitos tal como a mostrada na FIG.3.4 apenas utilizando o elemento representado na FIG.3.3.

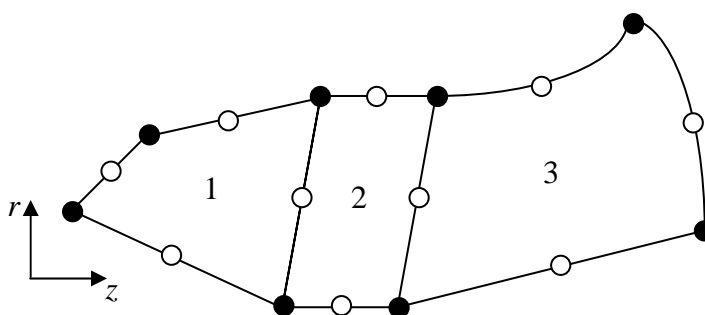


FIGURA 3.4 – Exemplo de malha que utiliza elementos paramétricos quadrilaterais de oito nós.

Todos os três elementos da malha mostrada na FIG.3.4 apresentam as mesmas funções de forma no domínio natural, as quais são mostradas na TAB.3.2. No entanto, as derivadas com relação a  $z$  e a  $r$  desses elementos são distintas, as quais podem ser obtidas a partir da utilização de matrizes de transformação adequadas. A metodologia para a realização do mapeamento do sistema de coordenadas natural para o global será descrita a seguir.

Utilizando a regra da cadeia, pode-se escrever

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{cases} \quad (3.56a)$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \bar{J} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{Bmatrix} \quad (3.56b)$$

onde  $\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{bmatrix}$  é a matriz Jacobiana. (3.57)

Como estão sendo empregados elementos isoparamétricos, a Eq.(3.53) pode ser aplicada utilizando as funções de forma apresentadas na TAB.3.2. Estendendo-a à variável independente  $z$ , obtém-se

$$r(\xi, \eta) = [N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad \cdots \quad N_8(\xi, \eta)] \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_8 \end{Bmatrix} \quad (3.58a)$$

e

$$z(\xi, \eta) = [N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad \cdots \quad N_8(\xi, \eta)] \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_8 \end{Bmatrix} \quad (3.58b)$$

Portanto, a matriz Jacobiana pode ser obtida a partir das Eqs.(3.58a) e (3.58b).

Pré-multiplicando ambos os lados da Eq.(3.56b) pela inversa da matriz Jacobiana, chega-se a

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{Bmatrix} = \bar{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

A TAB.3.2 e as Eqs.(3.57), (3.58a), (3.58b) e (3.59) permitem calcular as derivadas primeiras das funções de forma em relação a  $z$  e a  $r$ , as quais são necessárias para a determinação das matrizes  $\bar{M}^F$ ,  $\bar{M}^A$ ,  $\bar{S}^A$ ,  $\bar{V}^A$  e  $\bar{J}^A$ . Note que para o cálculo da matriz  $\bar{S}^A$  é necessário conhecer também as derivadas segundas em relação a  $z$  e a  $r$ ; conforme DHATT e TOUZOT (1984), estas podem ser obtidas pela seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial z \partial r} \end{Bmatrix} = \bar{T}_1 \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} + \bar{T}_2 \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

As matrizes  $\bar{T}_1$  e  $\bar{T}_2$  são dadas por:

$$\bar{T}_2 = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & 2 \cdot j_{11} \cdot j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & 2 \cdot j_{21} \cdot j_{22} \\ j_{11} \cdot j_{21} & j_{12} \cdot j_{22} & j_{11} \cdot j_{22} + j_{12} \cdot j_{21} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

e

$$\bar{T}_1 = -\bar{T}_2 \cdot \bar{C} \cdot \bar{J}^{-1} \quad (3.62)$$

onde  $j_{mn}$  é o termo da  $m$ -ésima linha e  $n$ -ésima coluna da matriz  $\bar{J}^{-1}$ ,  $J_{mn}$  é o termo da  $m$ -ésima linha e  $n$ -ésima coluna da matriz  $\bar{J}$  e

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{11}}{\partial \xi} & \frac{\partial J_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial J_{21}}{\partial \eta} & \frac{\partial J_{22}}{\partial \eta} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial J_{11}}{\partial \eta} + \frac{\partial J_{21}}{\partial \xi} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial J_{12}}{\partial \eta} + \frac{\partial J_{22}}{\partial \xi} \right) \end{bmatrix}.$$

Observe que as derivadas dos termos da matriz Jacobiana em relação a  $\xi$  e a  $\eta$  podem ser obtidas a partir das Eqs.(3.57), (3.58a) e (3.58b).

A TAB.3.2 e as Eqs.(3.60), (3.61) e (3.62) permitem calcular as derivadas segundas das funções de forma em relação a  $z$  e a  $r$ , as quais são necessárias para a determinação da matriz  $\bar{S}^A$ .

Como  $dz.dr = |\bar{J}|d\xi.d\eta$  (WEAVER e JOHNSTON, 1984), onde  $|\bar{J}|$  é o determinante da matriz Jacobiana, pode-se escrever

$$\bar{M}^F = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \right) .r.|\bar{J}|.d\xi.d\eta \quad (3.63)$$

$$\bar{M}^A = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \right) .r.|\bar{J}|.d\xi.d\eta \quad (3.64)$$

$$\bar{K}^A = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{N} \cdot \bar{N}^T .r.|\bar{J}|.d\xi.d\eta \quad (3.65)$$

$$\bar{V}^A = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{N} \cdot \left( \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \right) .r.|\bar{J}|.d\xi.d\eta \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^A = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{N} \cdot \left[ \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \cdot \bar{\phi}^F \left( \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial z^2} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r \partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r \partial z} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} \cdot \bar{\phi}^F \left( \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r^2} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r \partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r \partial z} \right) \right] .r.|\bar{J}|.d\xi.d\eta \end{aligned} \quad (3.67)$$

No programa computacional desenvolvido, as integrais duplas das equações acima são calculadas numericamente utilizando a quadratura de Gauss-Legendre<sup>14</sup>, assim, essas integrais são transformadas em somatórios, os quais estão mostrados a seguir:

$$\bar{M}^F = \sum_{i=1}^{n\xi} \sum_{j=1}^{n\eta} R_i \cdot R_j \cdot \left[ \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \right) .r.|\bar{J}| \right]_{\xi_i, \eta_j} \quad (3.68)$$

$$\bar{M}^A = \sum_{i=1}^{n\xi} \sum_{j=1}^{n\eta} R_i \cdot R_j \cdot \left[ \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \right) .r.|\bar{J}| \right]_{\xi_i, \eta_j} \quad (3.69)$$

<sup>14</sup> A quadratura de Gauss-Legendre é o método de integração numérica mais utilizado atualmente. Informações detalhadas a respeito deste método podem ser encontradas na maioria dos textos de cálculo numérico; ver, por exemplo, DHATT e TOUZOT (1984).



$$\bar{K}^A = \sum_{i=1}^{n\xi} \sum_{j=1}^{n\eta} R_i \cdot R_j \cdot \left[ \bar{N} \cdot \bar{N}^T \cdot r \cdot |J| \right]_{\xi_i, \eta_j} \quad (3.70)$$

$$\bar{V}^A = \sum_{i=1}^{n\xi} \sum_{j=1}^{n\eta} R_i \cdot R_j \cdot \left[ \bar{N} \cdot \left( \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \right) \cdot r \cdot |J| \right]_{\xi_i, \eta_j} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^A = \sum_{i=1}^{n\xi} \sum_{j=1}^{n\eta} R_i \cdot R_j \cdot \left\{ \bar{N} \cdot \left[ \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \left( \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial z^2} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial z^2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r \partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r \partial z} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \left( \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r^2} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial r} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r^2} + \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r \partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} + \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial z} \cdot \bar{\phi}^F \cdot \frac{\partial^2 \bar{N}^T}{\partial r \partial z} \right) \right] \cdot r \cdot |J| \right\}_{\xi_i, \eta_j} \quad (3.72) \end{aligned}$$

onde  $n\xi$  é o número de pontos de Gauss na direção  $\xi$ ,  $n\eta$  é o número de pontos de Gauss na direção  $\eta$ ,  $(\xi_i, \eta_j)$  são as coordenadas do ponto de integração  $(i, j)$ ,  $R_i$  e  $R_j$  são os pesos do ponto  $(i, j)$ .

Os valores de  $\xi_i$ ,  $\eta_j$ ,  $R_i$ , e  $R_j$  são determinados pelo número de pontos de integração escolhido. Estes valores estão apresentados na TAB.3.3.

TABELA 3.3 - Coordenadas dos pontos de integração e seus respectivos pesos em função do número de pontos (DHATT e TOUZOT, 1984).

$n\xi$ ou $n\eta$	Coordenadas $\xi_i$ ou $\eta_j$ dos pontos	Pesos $R_i$ ou $R_j$ dos pontos
1	0	2
2	$\pm 0,57735 \ 02691 \ 89626$	1
3	0 $\pm 0,77459 \ 66692 \ 41438$	0,88888 88888 88889 0,55555 55555 55556
4	$\pm 0,33998 \ 10435 \ 84856$ $\pm 0,86113 \ 63115 \ 94053$	0,65214 51548 62546 0,34785 48451 37454
5	0 $\pm 0,53846 \ 93101 \ 05683$ $\pm 0,90617 \ 98459 \ 38664$	0,56888 88888 88889 0,47862 86704 99366 0,23692 68850 56189
6	$\pm 0,23861 \ 91860 \ 83197$ $\pm 0,66120 \ 93864 \ 66265$ $\pm 0,93246 \ 95142 \ 03152$	0,46791 39345 72691 0,36076 15730 48139 0,17132 44923 79170
7	0 $\pm 0,40584 \ 51513 \ 77397$ $\pm 0,74153 \ 11855 \ 99394$ $\pm 0,94910 \ 79123 \ 42759$	0,41795 91836 73469 0,38183 00505 05119 0,27970 53914 89277 0,12948 49661 68870

A escolha do número de pontos de integração deve ser feita considerando a função a ser integrada. Se esta for polinomial de ordem  $m$ , então, a utilização da quadratura de Gauss-Legendre resultará na solução exata da integral desde que o número de pontos  $n$  obedeça a seguinte relação:

$$n \geq \frac{m+1}{2} \quad (3.73)$$

Deve-se observar que, embora as funções de forma sejam polinomiais, as soluções numéricas das integrais presentes nas Eqs.(3.63), (3.64), (3.66) e (3.67) poderão diferir das soluções exatas, independentemente do número de pontos de integração utilizados.

Para melhor entender este fato, a Eq.(3.59) será rescrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.74a)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\bar{J}|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.74b)$$

Pelas Eqs.(3.57), (3.58a) e (3.58b), conclui-se que os termos  $J_{mn}$  da matriz Jacobiana são polinomiais. Analisando a Eq.(3.74b), nota-se que a presença de  $|\bar{J}|$  no denominador pode fazer com que as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas globais não sejam funções polinomiais, o que impossibilita a obtenção de uma solução exata das integrais duplas. Entretanto, caso o elemento finito considerado apresente geometria retangular no domínio global, pode-se mostrar que os termos da matriz Jacobiana serão independentes de  $\xi$  e de  $\eta$ , o que permite a avaliação exata das integrais. Portanto, durante a geração da malha de elementos finitos, deve-se evitar a utilização de elementos que apresentem distorções geométricas significativas.

# 4

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir da formulação numérica apresentada no capítulo anterior, foi desenvolvido um *software* para a análise do desempenho acústico de sistemas reativos de controle de ruído em dutos pelo método dos elementos finitos. Sua aplicabilidade é restrita à sistemas com simetria axial e escoamentos irrotacionais de gases.

Neste capítulo, algumas configurações geométricas clássicas de câmaras de expansão são simuladas numericamente e os resultados obtidos pelo programa computacional desenvolvido apresentados. Para alguns sistemas, também são apresentados resultados obtidos pela aplicação de técnicas analíticas a modelos matemáticos unidimensionais. A validação da técnica numérica é feita de duas formas:

- 1) Comparando os resultados numéricos com os analíticos na faixa de frequência em que a hipótese de propagação sonora unidimensional é válida;
- 2) Avaliando se o comportamento acústico do sistema revelado pelas simulações numéricas é coerente com as informações disponíveis na literatura.

## 4.1 Considerações Preliminares

O parâmetro utilizado neste trabalho para estudar o desempenho acústico de cada atenuador de ruído é a perda por transmissão (ver seção 2.2.1.2). Esta é uma propriedade daquele, sendo independente da amplitude da excitação acústica e das características dos demais elementos existentes no sistema, tais como as impedâncias de radiação e da fonte sonora.

Contrariamente à  $TL$ , os valores da pressão sonora e da velocidade acústica dependem da amplitude da excitação acústica; em todas as simulações é adotado o valor  $u_e^A = 1$  m/s para a amplitude da velocidade acústica na entrada do sistema.

Com relação às propriedades do meio fluido, os seguintes valores são adotados para a densidade de equilíbrio e para a velocidade de propagação sonora, respectivamente,  $\rho_o = 1,2$  kg/m<sup>3</sup> e  $c_o = 340$  m/s (TSUJI et al., 2002).

Para o cálculo da  $TL$ , faz-se necessário que o tubo de saída do sistema possua terminação anecóica. Esta condição é simulada estipulando que a impedância acústica na saída do sistema é aquela dada pela Eq.(2.54), ou seja,  $Z_s = \rho_o \cdot c_o = 408$  kg.m<sup>-2</sup>.s<sup>-1</sup>.

São simuladas quatro configurações de câmaras de expansão, as quais estão representadas na FIG.4.1, onde  $D_e$  é o diâmetro do tubo de entrada do sistema,  $D_c$  é o diâmetro da câmara de expansão,  $D_s$  é o diâmetro do tubo de saída do sistema,  $L_e$  é o comprimento do tubo de entrada do sistema,  $L_c$  é o comprimento da câmara de expansão,  $L_s$  é o comprimento do tubo de saída do sistema,  $L_{ee}$  é o comprimento da extensão do tubo de entrada,  $L_{se}$  é o comprimento da extensão do tubo de saída,  $D_f$  é o diâmetro do furo da placa central e  $L_{ce}$  é o comprimento do tubo central.

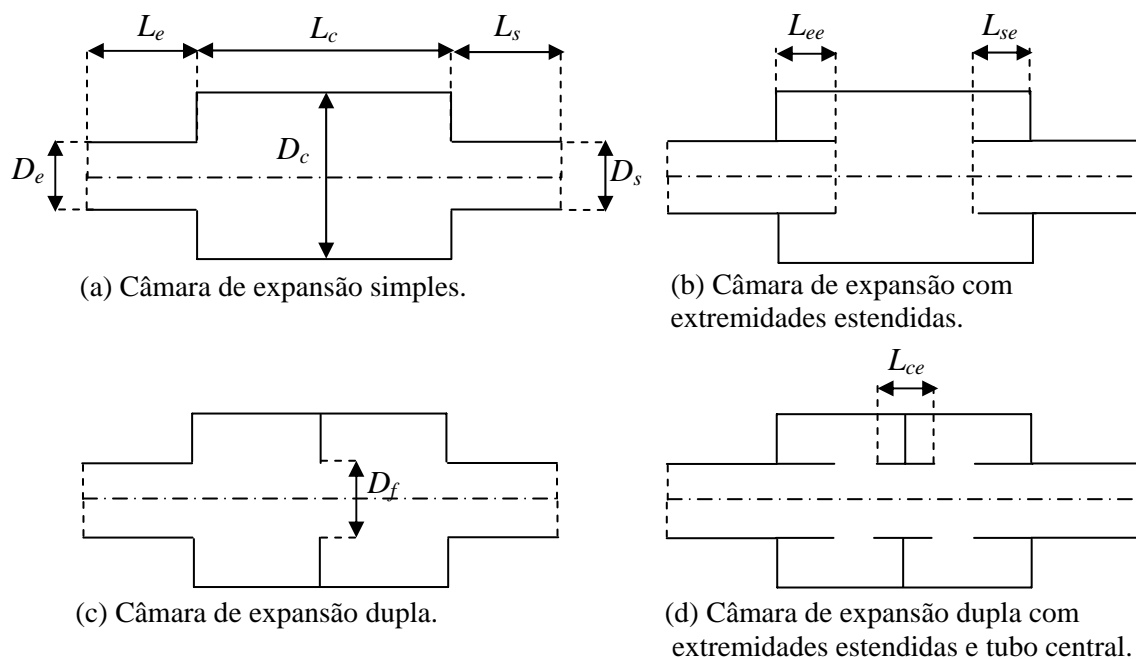


FIGURA 4.1 – Configurações clássicas de câmaras de expansão.

Todos os sistemas modelados neste trabalho apresentam as seguintes dimensões em comum:  $D_e = D_s = 40$  mm,  $D_c = 120$  mm,  $L_e = L_s = 150$  mm e  $L_c = 400$  mm. A FIG.4.2 mostra a malha de elementos finitos utilizada para a simulação numérica do escoamento e da propagação sonora.

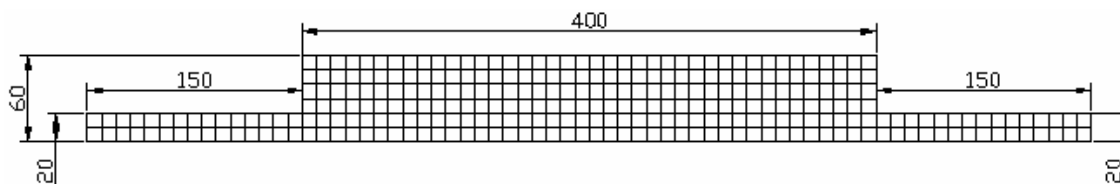


FIGURA 4.2 – Malha constituída por 300 elementos quadrados de lado igual a 10 mm.

Todos os elementos finitos utilizados são quadrados de lado igual a 10 mm, isoparamétricos e de oito nós. Este tipo de elemento foi apresentado na seção 3.2.3.2 deste trabalho.

As espessuras das extremidades estendidas, bem como as da placa e do tubo central são desprezadas. Esta simplificação permite que todas as configurações de câmaras de

expansão mostradas na FIG.4.1 sejam simuladas pela malha representada na FIG.4.2, bastando para isso utilizar nós duplos e triplos a fim de modelar as discontinuidades existentes devido à introdução de elementos no interior da câmara.

ROSS (1981)<sup>15</sup> apud MUNJAL (1987) utilizou elementos isoparamétricos de oito nós cuja dimensão máxima correspondia a um terço do comprimento de onda na frequência de 2000 Hz; esta malha gerou bons resultados para frequências inferiores a 1300 Hz. A partir desta informação, MUNJAL (1987) observou que o trabalho de ROSS parece sugerir que, para obter bons resultados, o valor da maior dimensão de um elemento finito deve obedecer à seguinte relação:

$$\text{Maior dimensão de um elemento finito} \leq 0,2 \cdot \lambda_{min} \quad (4.1)$$

onde  $\lambda_{min}$  é o comprimento de onda mínimo, o qual ocorre quando a frequência é máxima.

Neste trabalho, o comportamento acústico dos sistemas é avaliado para frequências de excitação de até 4000 Hz. Como foi adotado  $c_o = 340$  m/s, tem-se que  $\lambda_{min} = 85$  mm. Portanto, a maior dimensão admissível para cada elemento finito é 17 mm. Uma vez que os elementos utilizados são quadrados de lado igual a 10 mm, a Eq.(4.1) é satisfeita.

No início do capítulo segundo do presente trabalho, afirmou-se que desprezar os efeitos provenientes da viscosidade do fluido implica em impor ao modelo matemático um limite de aplicabilidade no que se refere à faixa de frequência em que este é válido. Tal restrição é expressa pela Eq.(2.1), a qual está reproduzida a seguir:

$$f \gg \frac{2 \cdot \nu}{\pi \cdot D_e^2}$$

---

<sup>15</sup> ROSS, D. R. A finite element analysis of perforated component acoustic systems. *Journal of Sound and Vibration*, v.79, n.1, p. 133-143, 1981.

A viscosidade cinemática do ar em condições ambientes é  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  (INCROPERA e DeWITT, 1998). Substituindo os valores numéricos na Eq.(2.1) chega-se a  $f \gg 5,97 \cdot 10^3 \text{ Hz}$ . Logo, quando o meio considerado é o ar, desprezar sua viscosidade não restringe a aplicabilidade do modelo para o sistema representado na FIG.4.2, pois o ouvido humano é capaz de identificar sons cuja frequência seja superior a 20Hz aproximadamente.

A fim de avaliar o efeito do escoamento sobre o desempenho acústico de um determinado sistema, são realizadas simulações na ausência de escoamento ( $M = 0$ ) e na presença de um escoamento irrotacional de alta velocidade, visto que quanto maior a velocidade do escoamento, maior também é sua influência sobre o comportamento acústico do sistema. Como o limite de aplicabilidade do modelo utilizado neste trabalho é dado por  $M < 0,3$  (ver seção 2.1.1), aproximadamente; optou-se por utilizar o valor  $M_e = 0,3$  para as simulações de sistemas na presença de escoamento, sendo que  $M_e$  é o número de Mach nas extremidades do sistema. A seguir, o número de Reynolds é avaliado com o intuito de determinar o regime de escoamento nos tubos.

O número de Reynolds (Re) é um parâmetro adimensional dado por (adaptado de FOX e McDONALD, 1998)

$$\text{Re} = \frac{u^F \cdot D}{\nu} \quad (4.2)$$

No duto de entrada da câmara, para um escoamento em que  $M_e = 0,3$ , tem-se que  $\text{Re} = 272000$ . Segundo FOX e McDONALD (1998), para  $\text{Re} > 2300$  aproximadamente, o regime de escoamento num tubo é turbulento. Portanto, o próprio escoamento de gases pelo sistema é uma fonte sonora em potencial, a qual não é considerada pelo modelo matemático apresentado neste trabalho.

Na seção 2.1.6, foi dito que em um tubo reto a propagação sonora será unidimensional desde que  $f < \frac{1,84 \cdot c_0}{2 \cdot \pi \cdot r_0} \cdot \sqrt{1 - M^2}$ . Para problemas com simetria axial, os modos

circunferenciais não são propagados; logo, utilizando a TAB.A.1 do anexo A, esta expressão torna-se

$$f < \frac{3,83 \cdot c_0}{2 \cdot \pi \cdot r_0} \cdot \sqrt{1 - M^2} \quad (4.3)$$

Aplicando a Eq.(4.3) às câmaras em estudo, obtém-se  $f < 3454\text{Hz}$  para  $M_c = 0$  e  $f < 3452\text{Hz}$  para  $M_c = 0,033333$ , onde  $M_c$  é o número de Mach médio no interior da câmara. Observe que  $M_c = 0,033333$  corresponde a  $M_e = 0,3$ . Estes valores correspondem às menores frequências de corte do sistema, sendo que, para valores de frequência superiores a estes, resultados obtidos por modelos unidimensionais não são confiáveis, pois a hipótese de propagação sonora unidimensional torna-se inválida. Além disso, sabe-se que, mesmo para frequências inferiores à menor frequência de corte, a existência de descontinuidades de área provocam comportamentos tridimensionais localizados que podem afetar o desempenho acústico do sistema, principalmente em altas frequências; tais efeitos locais são avaliados neste trabalho através do método dos elementos finitos.

## 4.2 Câmara de Expansão Simples

O principal objetivo deste trabalho é estudar a  $TL$  em câmaras de expansão. Entretanto, a pressão sonora também é avaliada, pois a análise desta auxilia no entendimento do comportamento do sistema. Além disso, o programa computacional desenvolvido calcula os valores da pressão sonora nos pontos de integração de Gauss, os quais podem ser comparados com os resultados obtidos pelos modelos unidimensionais de tal forma a identificar as regiões do domínio em que os efeitos bidimensionais são mais pronunciados.

Deve-se salientar que os valores absolutos da pressão sonora apresentados neste trabalho foram obtidos considerando que a amplitude da excitação acústica é  $u_e^A = 1 \text{ m/s}$  para todas as frequências; além disso, supôs-se a excitação atuante em um



tubo imediatamente anterior ao atenuador, o qual, por sua vez, está conectado a um tubo de saída com terminação anecóica. Desta forma, os valores da pressão sonora assim calculados não são representativos de sistemas de exaustão de motores; para tanto, seria necessário considerar o sistema de exaustão desde os pistões até o tubo de saída de gases para a atmosfera, o que não está no escopo deste trabalho. Portanto, para os objetivos atuais, apenas a distribuição da pressão sonora ao longo da câmara de expansão e a relação entre os valores calculados para diferentes situações são de interesse.

Neste trabalho, optou-se por avaliar em detalhes a pressão sonora apenas neste tópico, posto que o princípio básico de funcionamento dos atenuadores reativos pode ser compreendido analisando as câmaras de expansão simples. Assim sendo, as demais configurações de câmaras estudadas não são submetidas a análises rigorosas da pressão sonora, sendo enfatizada apenas a perda por transmissão.

#### 4.2.1 Avaliação da Pressão Sonora

##### 4.2.1.1 Meio estacionário

A FIG.4.1-a representa uma câmara de expansão simples. No capítulo dois, a utilização de um modelo unidimensional que desconsidera o escoamento resultou na Eq.(2.83), a qual está reproduzida a seguir:

$$TL = 10 \cdot \log \left[ 1 + \frac{1}{4} \cdot \left( m - \frac{1}{m} \right)^2 \cdot \text{sen}^2(k \cdot L_c) \right] \quad (4.4)$$

onde  $m = \left( \frac{D_c}{D_e} \right)^2$  e  $D_e = D_s$ .

Analisando a Eq.(4.4), constata-se que a  $TL$  apresenta um valor mínimo igual a zero quando  $k \cdot L_c = q \cdot \pi$ , e um valor máximo quando  $k \cdot L_c = (2q - 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ , onde  $q = 1, 2, \dots, \infty$ .

Aplicando essas relações à câmara em estudo, cujo comprimento é  $L_c = 400$  mm, obtêm-se os resultados exibidos na TAB.4.1. Note que todos os valores apresentados na referida tabela são inferiores ao da menor frequência de corte, o qual é 3454 Hz.

As frequências apresentadas na segunda coluna da TAB.4.1 correspondem aos oito menores valores em que  $TL = 0$ , de acordo com o modelo unidimensional na ausência de escoamento. Nesta condição, a potência sonora da onda incidente na câmara iguala-se à da onda transmitida para a terminação anecóica, ou seja, a onda incidente não é refletida; portanto, reportando-se à FIG.2.4, conclui-se que  $B_3 = 0$  e  $A_3 = A_I = A$ . Como a amplitude da velocidade acústica na entrada do sistema é  $u_e^A = 1$  m/s, utilizando a Eq.(2.77) tem-se que  $A = 408$  Pa. Levando este resultado nas Eqs.(2.76) e (2.80), obtém-se  $|p_3^A| = |p_1^A| = 408$  Pa; logo, a amplitude da pressão sonora é constante nos tubos de entrada e saída da câmara.

TABELA 4.1 – Frequências em que ocorrem os oito primeiros valores mínimos e máximos de perda por transmissão.

$q$	Frequência [Hz] – $TL$ mínimo	Frequência [Hz] – $TL$ máximo
1	425	212,5
2	850	637,5
3	1275	1062,5
4	1700	1487,5
5	2125	1912,5
6	2550	2337,5
7	2975	2762,5
8	3400	3187,5

Os resultados obtidos analiticamente pelo modelo unidimensional e numericamente (MEF) pelo modelo bidimensional são apresentados na FIG.4.3 para as frequências de 425 Hz, 850 Hz e 1275 Hz; o efeito do escoamento não é considerado. Os “envelopes” mostram a variação da amplitude da pressão sonora com a posição, sendo estes valores calculados a partir do modelo unidimensional. Os gráficos tipo “arco-íris”

correspondem aos valores da amplitude da pressão sonora obtidos pelo MEF, os quais crescem na medida em que se afastam da cor violeta em direção à vermelha.

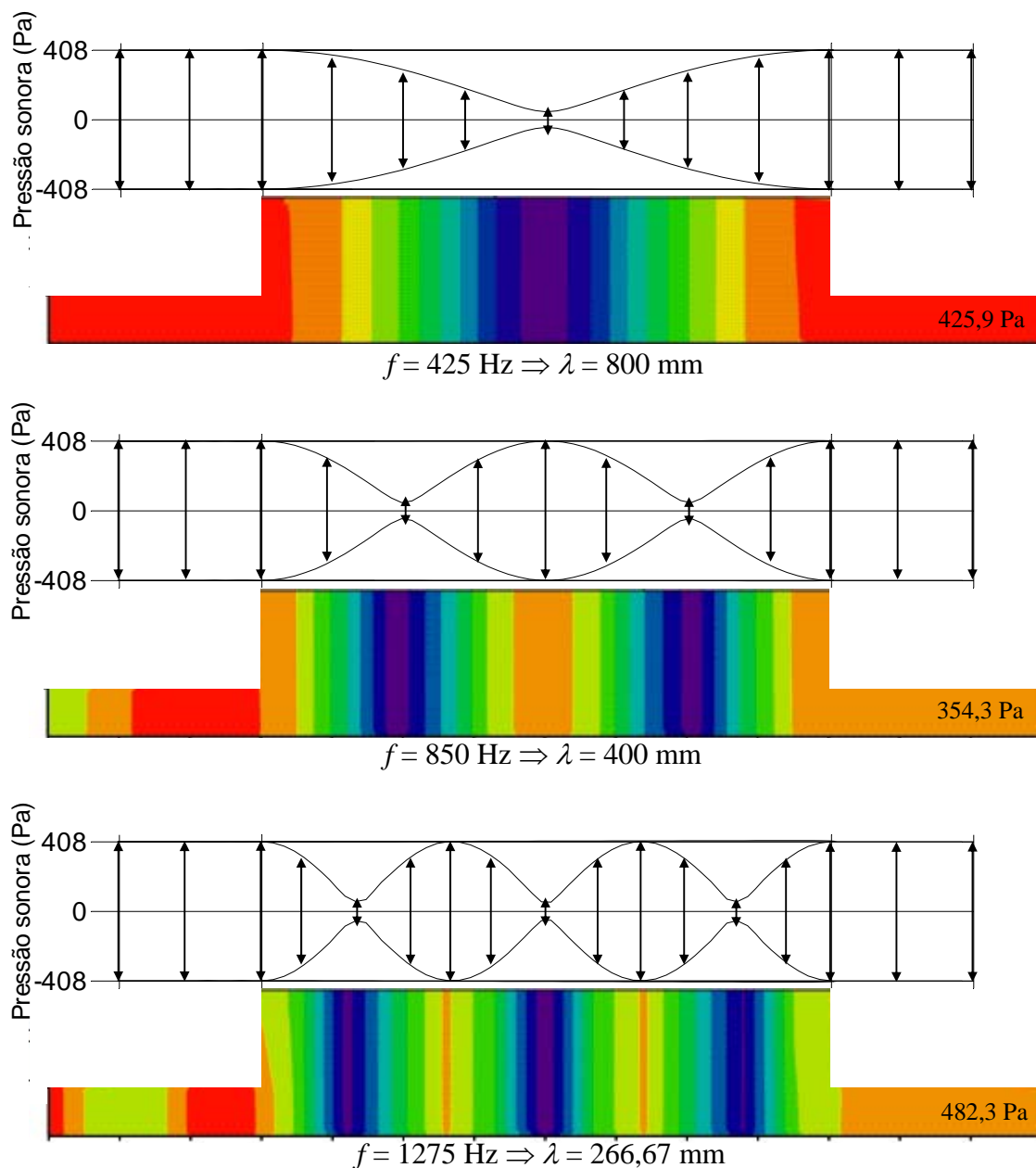


FIGURA 4.3 – Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão simples na ausência de escoamento; frequências correspondentes a baixos valores de  $TL$ .

Analisando a FIG.4.3, podem ser notadas algumas semelhanças e diferenças entre os resultados unidimensionais e bidimensionais. A preponderância de faixas verticais paralelas e a evidente correlação entre suas cores e os “envelopes” na região da câmara indicam uma convergência entre os resultados obtidos pelos dois métodos. No entanto,

a amplitude da pressão sonora nas terminações calculada pelo MEF - a qual está indicada nas mesmas - difere da obtida pelo modelo unidimensional (408 Pa); além disso, há um pequeno desvio na verticalidade das faixas próximas às discontinuidades de seção e, exceto para  $f = 425$  Hz, é nítido que a amplitude nos tubos de entrada calculada pelo modelo bidimensional não é constante. Estas diferenças entre os resultados obtidos pelos modelos bidimensional e unidimensional tornam-se maiores na medida em que a frequência de excitação aumenta.

Face ao acima exposto, conclui-se que os efeitos bidimensionais proporcionados pelas discontinuidades de seção fazem com que a onda incidente na câmara sofra reflexão e que se tenha  $TL \neq 0$ , contrariamente ao previsto pelo modelo unidimensional. De fato, os valores de  $TL$  calculados pelo MEF para as frequências de 425 Hz, 850 Hz e 1275 Hz são, respectivamente: 0,02 dB; 0,08 dB e 0,18 dB.

As frequências apresentadas na terceira coluna da TAB.4.1 correspondem aos oito menores valores em que a  $TL$  é máxima e igual a 13,17 dB, de acordo com o modelo unidimensional na ausência de escoamento. Os resultados obtidos analiticamente pelo modelo unidimensional e numericamente (MEF) pelo modelo bidimensional são apresentados na FIG.4.4 para as frequências de 637,5 Hz e 1062,5 Hz. Note que os gráficos tipo “arco-íris” não consideram os valores da amplitude da pressão sonora nos tubos de entrada da câmara. Estes foram omitidos por serem muito maiores que aqueles existentes no interior e no tubo de saída da câmara; logo, sua apresentação prejudicaria a clareza do gráfico, o qual tem como principal objetivo mostrar a coerência entre os resultados analíticos e numéricos no interior da câmara.

Assim como a FIG.4.3, a FIG.4.4 indica uma convergência entre os resultados obtidos pelos dois métodos devido à preponderância de faixas verticais paralelas e a evidente correlação entre suas cores e os “envelopes” na região da câmara. Entretanto, a amplitude da pressão sonora nas terminações calculada pelo MEF difere da obtida pelo modelo unidimensional, sendo esta diferença mais pronunciada na frequência mais baixa (637,5 Hz); também há um desvio significativo na verticalidade das faixas

próximas à entrada da câmara, o qual é nitidamente maior que aquele mostrado na FIG.4.3.

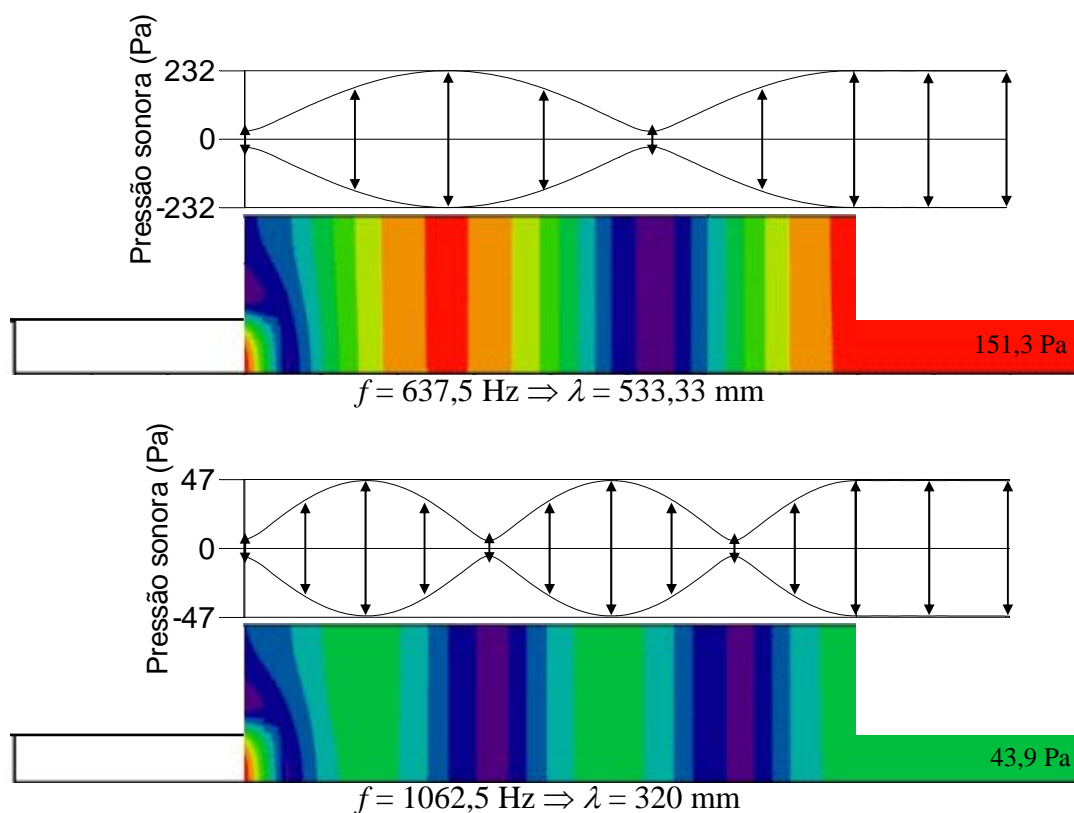


FIGURA 4.4 – Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão simples na ausência de escoamento; frequências correspondentes a altos valores de  $TL$ .

Com relação às câmaras mostradas na FIG.4.4, os efeitos bidimensionais proporcionados pelas discontinuidades de seção fazem com que se tenha  $TL \neq 13,17 \text{ dB}$ , contrariamente ao previsto pelo modelo unidimensional. De fato, os valores de  $TL$  calculados pelo MEF para as frequências de 637,5 Hz e 1062,5 Hz são, respectivamente: 13,26 dB e 13,44 dB.

Note que os efeitos bidimensionais introduzem uma variação desprezível nos valores da  $TL$  para as câmaras apresentadas nas FIGs.4.3 e 4.4, embora a pressão sonora nos tubos de saída seja significativamente afetada.

A FIG.4.5 ilustra a distribuição da amplitude da pressão sonora para alguns valores altos de frequência, ou seja, próximos à menor frequência de corte da câmara, a qual é igual a 3454 Hz (ver item 4.1).

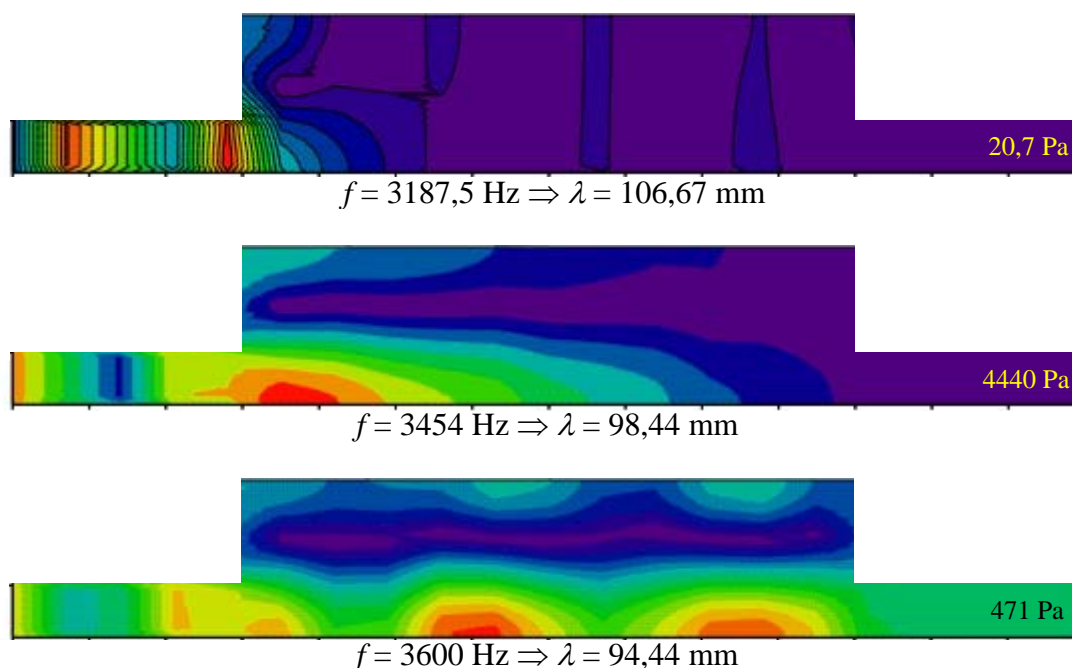


FIGURA 4.5 – Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão simples na ausência de escoamento; frequências altas.

Para a frequência de 3187,5 Hz, optou-se por representar as curvas de pressão constante no gráfico a fim de evidenciar os efeitos bidimensionais atuantes na entrada da câmara. Em 3454 Hz, ocorre a propagação do primeiro modo radial e o modelo unidimensional torna-se totalmente inadequado. A TAB.4.2 apresenta os valores da  $TL$  e da amplitude da pressão sonora no tubo de saída obtidos pelos modelos unidimensionais e bidimensionais.

TABELA 4.2 – Perda por transmissão e amplitude da pressão sonora no tubo de saída calculadas pelos modelos unidimensionais e bidimensionais.

Frequência (Hz)	Perda por transmissão (dB)		Amplitude da pressão sonora (Pa)	
	1-D	2-D	1-D	2-D
3187,5	13,17	20,16	54,52	20,7
3454,0	6,00	16,28	110,03	4440
3600,0	13,14	0,94	53,21	471

Os resultados mostrados na TAB.4.2 comprovam a ineficácia do modelo unidimensional quando a frequência está próxima ao valor da mínima frequência de corte.

#### 4.2.1.2 Meio não estacionário

Agora, é considerada a existência de um escoamento cuja velocidade no tubo de entrada da câmara é 102 m/s ( $M_e = 0,3$ ). A FIG.4.6 mostra a distribuição do potencial  $\phi^F$  no sistema calculada pelo MEF.

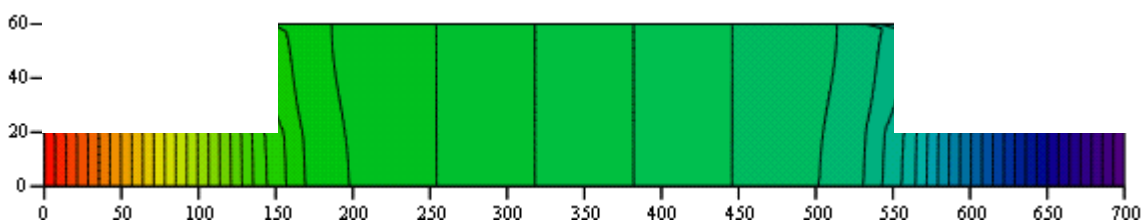


FIGURA 4.6 – Distribuição de  $\phi^F$  em uma câmara de expansão simples na presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$ .

Conforme pode ser observado na FIG.4.6, as linhas de potencial constante são preponderantemente verticais e paralelas, indicando que a hipótese de escoamento unidimensional é plausível. Note que há um desvio neste comportamento apenas nas proximidades das discontinuidades de seção.

No que se refere à amplitude da pressão sonora, os resultados obtidos numericamente pelo modelo bidimensional são apresentados na FIG.4.7 para as frequências de 3600 Hz e 850 Hz. Para esta última, também são apresentados os resultados obtidos analiticamente pelo modelo unidimensional isoentrópico.

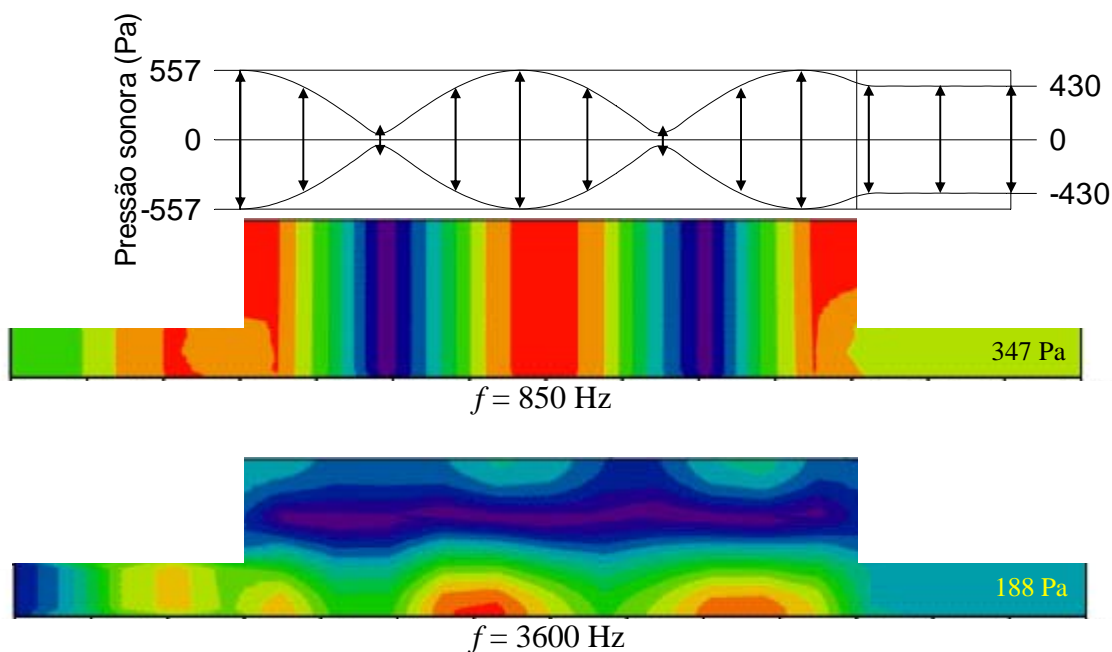


FIGURA 4.7 - Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão simples na presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$ .

Para  $f = 850$  Hz, a FIG.4.7 mostra que os valores da amplitude da pressão sonora obtidos pelos modelos unidimensional e bidimensional são significativamente distintos.

Comparando as FIGs.4.3 e 4.7 na frequência de 850 Hz, observa-se que a presença de escoamento potencializa os efeitos bidimensionais existentes nas discontinuidades de seção. Para  $f = 3600$  Hz, as FIGs.4.5 e 4.7 mostram que o escoamento altera drasticamente o valor da amplitude da pressão sonora no tubo de saída.

#### 4.2.2 Avaliação da Perda por Transmissão

Considerando o escoamento e a propagação sonora como sendo unidimensionais, existem expressões analíticas que permitem calcular a perda por transmissão na câmara (ver seção 2.2.3). Dois modelos analíticos são utilizados neste trabalho, os quais diferem com relação ao tratamento das discontinuidades de seção, porém se igualam quando não há escoamento no sistema, ou seja, quando  $M_e = 0$ :



1. Expansão e contração isentrópicas;
2. Expansão irreversível e contração isentrópica.

Assumindo que a expansão e a contração são processos isentrópicos, a  $TL$  pode ser calculada pela Eq.(2.82). Este modelo foi utilizado para a obtenção da curva apresentada em vermelho na FIG.4.8.

Entretanto, uma expansão súbita não é adequadamente representada como sendo um processo reversível. A irreversibilidade associada a uma expansão súbita foi abordada por ALFREDSON e DAVIES (1971), os quais se valeram de alternativas simples para contornar o problema; uma delas consiste em utilizar a equação de continuidade de massa para o caso isentrópico em conjunto com uma equação de continuidade de pressão para a modelagem de expansões súbitas (ver seção 2.2.2). Utilizando este método, chegou-se à curva tracejada apresentada na FIG.4.8.

A FIG.4.8 mostra os resultados obtidos para  $M_c = 0$  e  $M_c = 0,033333$ .

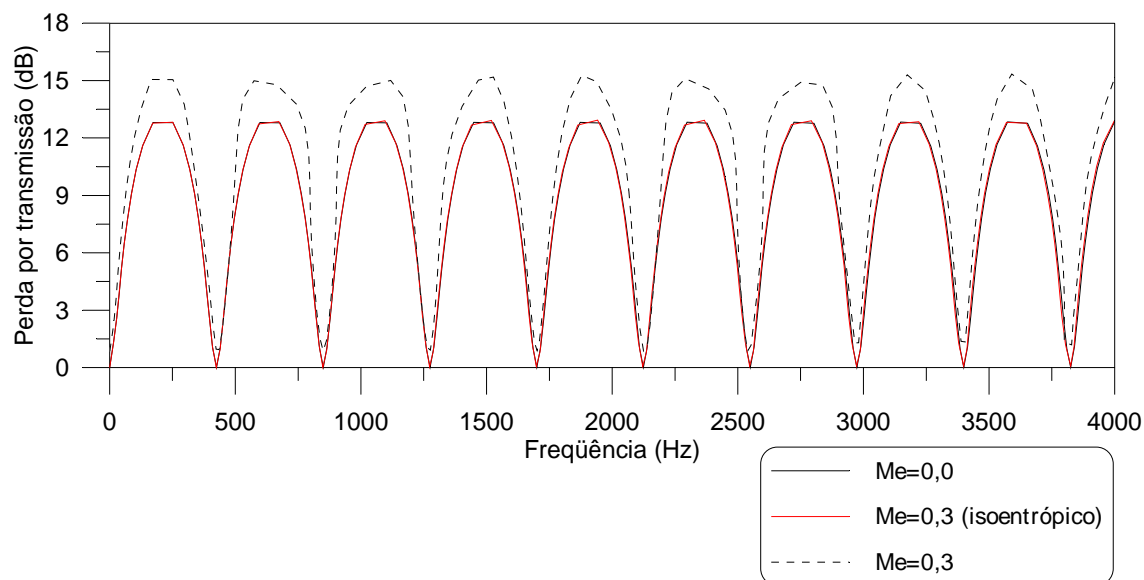


FIGURA 4.8 – Comparação entre os valores da  $TL$  para uma câmara de expansão simples calculados por técnicas analíticas aplicadas a modelos unidimensionais.

A FIG.4.8 mostra que a presença de escoamento na câmara não afeta a perda por transmissão quando se assume que a expansão é isoentrópica; porém, se a irreversibilidade do processo de expansão é considerada, a  $TL$  é sensivelmente aumentada.

Para a obtenção dos resultados mostrados na FIG.4.8, um importante fator não foi considerado, a saber, a existência de padrões sonoros tridimensionais. Estes serão avaliados através do método dos elementos finitos.

Uma vez que a formulação numérica pelo MEF foi realizada considerando processos adiabáticos e reversíveis (isoentrópicos), os resultados obtidos pelo MEF são comparados com aqueles oriundos da formulação unidimensional isoentrópica, conforme mostra a FIG.4.9; ou seja, o incremento nos valores da  $TL$  proporcionado pela irreversibilidade do processo de expansão não é capturado pelo modelo numérico desenvolvido neste trabalho.

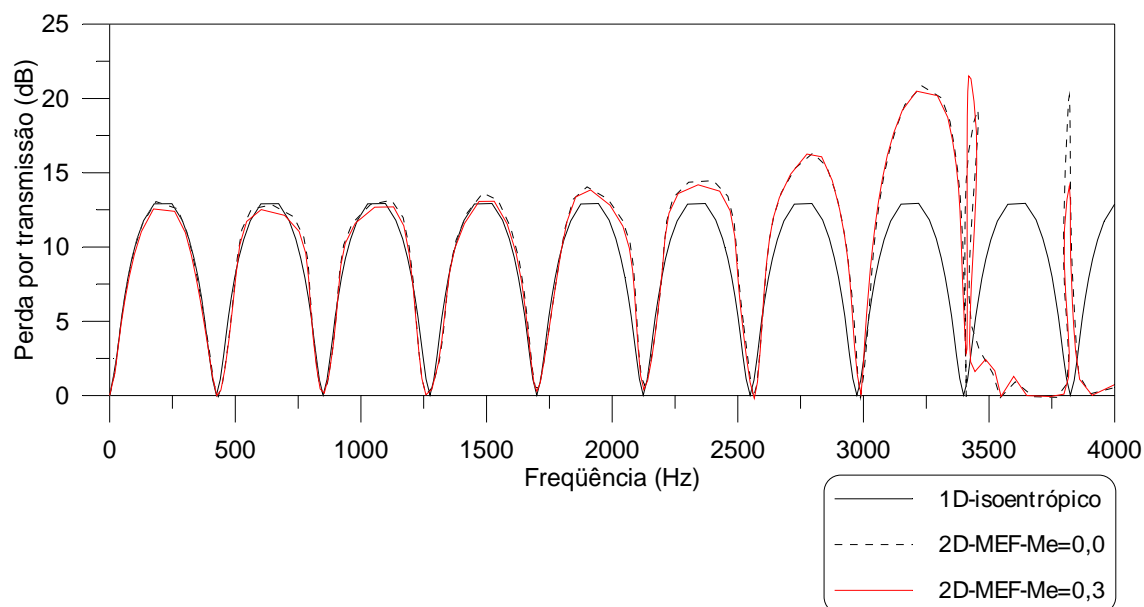


FIGURA 4.9 – Comparação entre os valores da  $TL$  para uma câmara de expansão simples calculados pelo modelo unidimensional isoentrópico e pelo MEF.

Conforme o esperado, a diferença entre os resultados obtidos pelo modelo numérico bidimensional e pelo modelo analítico unidimensional tornam-se maiores na medida em

que a frequência de excitação aumenta; sendo que, quando a frequência ultrapassa a menor frequência de corte do sistema [aproximadamente 3450Hz, ver Eq.(4.3)], há uma quebra nos padrões de domos repetitivos e uma redução brusca no desempenho acústico do sistema devido à propagação de modos radiais.

Para frequências inferiores à de corte, a existência de padrões bidimensionais localizados nas proximidades das discontinuidades atuam positivamente no que se refere ao desempenho acústico da câmara, conforme pode ser observado na FIG.4.9. Entretanto, comparando a curva em vermelho com a tracejada, nota-se que a  $TL$  não é afetada pela presença de escoamento.

O número de domos existentes para frequências inferiores à de corte é dado pela seguinte relação (SELAMET e RADAVIDICH, 1997):

$$\text{número de domos} < 2,440 \cdot \frac{L_c}{D_c} \quad (4.5)$$

Aplicando a Eq.(4.5) ao problema em estudo, obtém-se que o número de domos é inferior a 8,133. Observando a FIG.4.9, constata-se que o número de domos completos existentes antes da ruptura do padrão é oito; portanto, os resultados mais uma vez mostram-se consistentes com as informações disponíveis na literatura.

### 4.3 Câmara de Expansão com Extremidades Estendidas

A FIG.4.1-b representa uma câmara de expansão com extremidades estendidas. Assumindo que a propagação sonora é unidimensional e considerando que não há escoamento pelo sistema, a perda por transmissão na câmara é dada pela seguinte equação (SELAMET e JI, 1999):

$$TL = 20 \log \left\{ \frac{1}{4m} \left[ [(m+1) + j(m-1)\tan(kL_{ee})][(m+1) + j(m-1)\tan(kL_{se})] e^{jk(L_c - L_{ee} - L_{se})} - \right. \right. \\ \left. \left. + (m-1)^2 [1 - j \tan(kL_{ee})][1 - j \tan(kL_{se})] e^{-jk(L_c - L_{ee} - L_{se})} \right] \right\} \quad (4.6)$$

onde  $m = \left( \frac{D_c}{D_e} \right)^2$  e  $D_e = D_s$ .

O sistema analisado nesta seção apresenta  $L_{ee} = L_{se} = 60\text{mm}$ , sendo as demais dimensões iguais às utilizadas no tópico anterior. Entretanto, SELAMET e JI (1999) mostraram que, ao se lidar com modelos unidimensionais, a aplicação de correções nos valores de  $L_{ee}$  e  $L_{se}$  conduzem a melhores resultados. Estes autores utilizaram a correção  $\Delta L$  proposta por MUNJAL (1987) para tubos cuja extremidade aberta está inserida em um grande volume, a qual está representada a seguir:

$$\Delta L = 0,6.r_0 \quad (4.7)$$

Como, para o sistema em estudo, o diâmetro das extremidades é  $D_e = D_s = 40\text{mm}$ , aplicando a correção expressa na Eq.(4.7) obtém-se o seguinte valor para o comprimento corrigido das extremidades estendidas:  $L'_{ee} = L'_{se} = 72\text{mm}$ .

A FIG.4.10 apresenta os valores da  $TL$  obtidos pela Eq.(4.6) com e sem correção das extremidade estendidas, bem como os resultados apresentados pelo MEF para  $M_e = 0,0$  e  $M_e = 0,3$ .

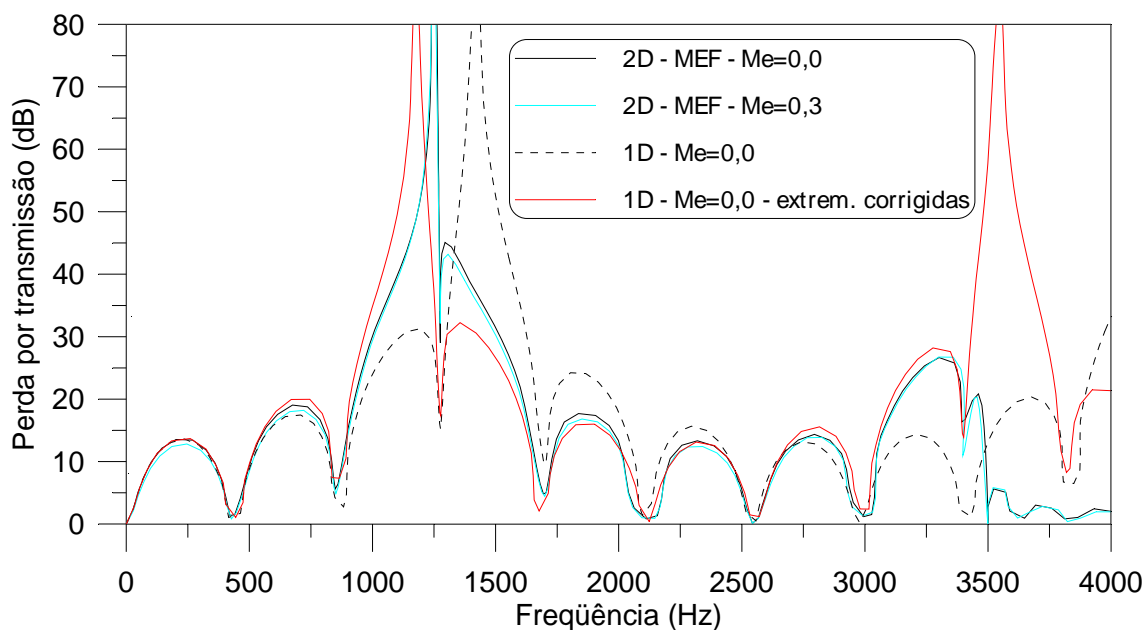


FIGURA 4.10 – Comparação entre os valores da  $TL$  para uma câmara de expansão com extremidades estendidas calculados pelos modelos unidimensional e bidimensional.

A  $TL$  em câmaras de expansão com extremidades estendidas exibe um comportamento resultante da superposição de domos e picos de atenuação sonora. Para frequências inferiores à de corte (aproximadamente 3450Hz), o número de domos é igual ao apresentado por câmaras de expansão simples. Os picos de atenuação são devidos às extremidades estendidas.

Examinando a FIG.4.10, observa-se que há uma discrepância entre os resultados numéricos bidimensionais e aqueles obtidos pelo modelo analítico unidimensional sem correções. Entretanto, a aplicação de correções nos comprimentos das extremidades estendidas promove uma aproximação considerável entre os resultados analíticos e os numéricos na faixa de frequência em que a hipótese de propagação sonora unidimensional é válida. Assim como nas câmaras simples, os resultados bidimensionais demonstram que há uma quebra nos padrões de domos repetitivos quando a propagação de modos radiais tem início, ou seja, quando a frequência é maior que a frequência de corte. Note ainda que a presença de escoamento não afeta o desempenho acústico do sistema considerado.

A FIG.4.11 ilustra a distribuição da amplitude da pressão sonora na ausência de escoamento em algumas frequências.

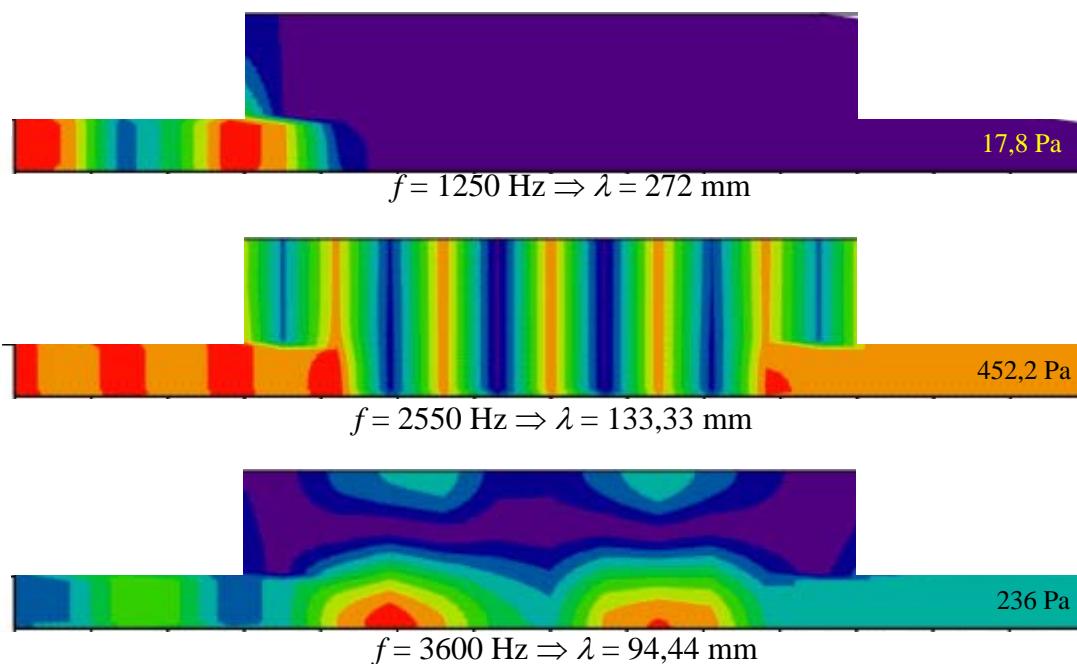


FIGURA 4.11 – Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão com extremidades estendidas na ausência de escoamento.

A FIG.4.12 mostra a distribuição do potencial  $\phi^F$  no sistema calculada pelo MEF para um escoamento cuja velocidade no tubo de entrada é 102 m/s, a qual corresponde a  $M_e = 0,3$ .

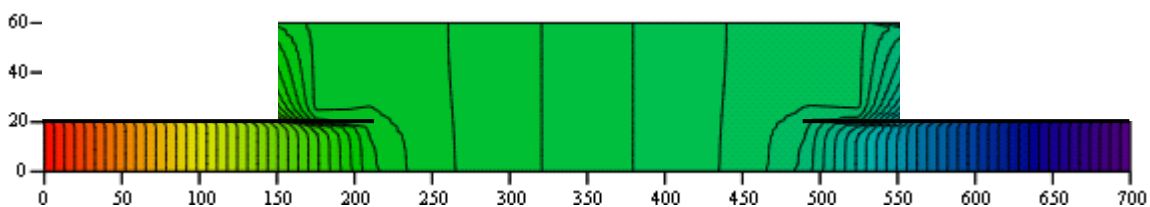


FIGURA 4.12 – Distribuição de  $\phi^F$  em uma câmara de expansão com extremidades estendidas na presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$ .

A FIG.4.13 ilustra a amplitude da pressão sonora para  $f = 2550 \text{ Hz}$  e  $M_e = 0,3$ .

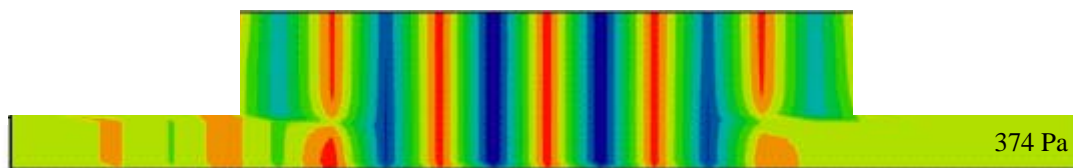


FIGURA 4.13 – Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão com extremidades estendidas na presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$ ;  $f = 2550$  Hz.

Comparando as FIGs.4.11 e 4.13, nota-se que, embora o escoamento não influa na  $TL$ , a amplitude da pressão sonora no tubo de saída pode ser significativamente afetada.

#### 4.4 Câmara de Expansão Dupla

A FIG.4.1-c representa uma câmara de expansão dupla. MUNJAL (1987), utilizando modelos unidimensionais, concluiu que tal sistema apresenta um desempenho acústico superior ao das câmaras simples, o qual foi tratado na seção 4.2. Este fato é constatado a seguir.

O sistema analisado nesta seção apresenta  $D_f = 40$ mm, sendo as demais dimensões iguais às utilizadas na seção 4.2. A FIG.4.14 apresenta os valores da  $TL$  obtidos pelo MEF para  $M_e = 0,0$  e  $M_e = 0,3$ . Para fins comparativos, o gráfico ainda mostra os resultados para uma câmara de expansão simples.

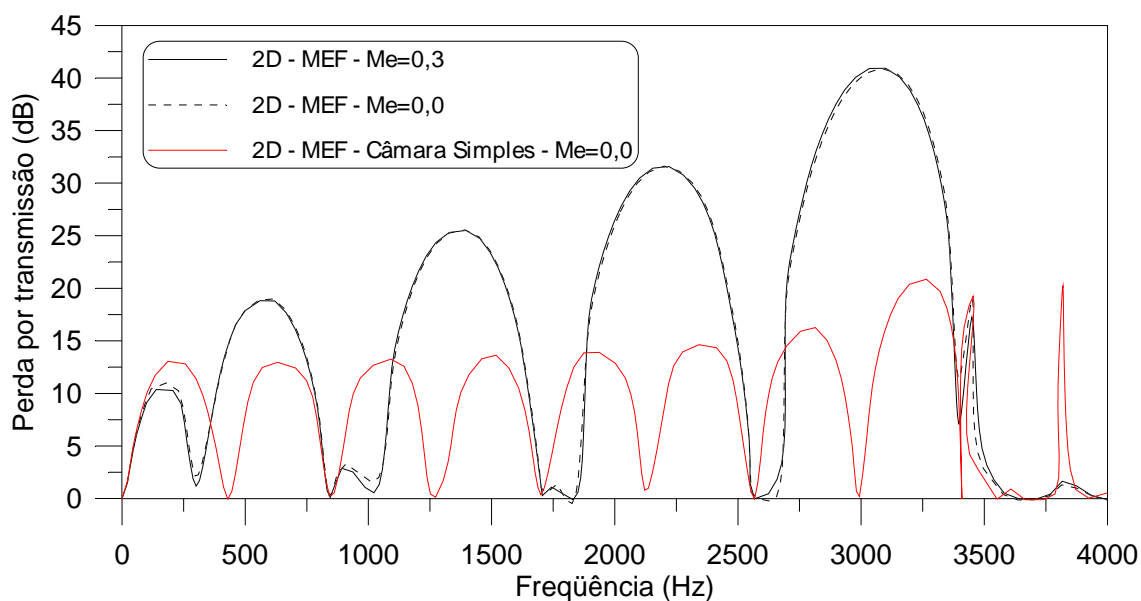


FIGURA 4.14 – Comparação entre os valores da  $TL$  obtidos pelo MEF para uma câmara de expansão dupla e uma câmara de expansão simples.

Assim como em câmaras de expansão simples, a  $TL$  em câmaras duplas exibe um comportamento de domos repetitivos, conforme pode ser observado na FIG.4.14. Entretanto, os pares de domos aproximadamente iguais das câmaras simples são aqui substituídos por pares desiguais, sendo o primeiro domo de cada par menor em amplitude e em faixa de frequência que o segundo domo. Na medida em que a frequência aumenta, o primeiro domo de cada par tende a desaparecer, enquanto que a amplitude e a faixa de frequência do segundo tornam-se maiores, proporcionando um desempenho acústico superior ao das câmaras simples. Este comportamento foi descrito por SELAMET et al. (2003), os quais utilizaram técnicas analíticas e numéricas em seus estudos, porém o efeito do escoamento não foi considerado; de qualquer forma, a FIG.4.14 mostra que tal efeito não influencia a  $TL$ .

Para frequências inferiores à de corte (aproximadamente 3450Hz), o número de domos é igual ao apresentado por câmaras de expansão simples. Igualmente, os resultados demonstram que há uma quebra nos padrões de domos repetitivos quando a propagação de modos radiais tem início, ou seja, quando a frequência é maior que a frequência de corte.



A FIG.4.15 ilustra a distribuição da amplitude da pressão sonora na ausência de escoamento em algumas frequências.

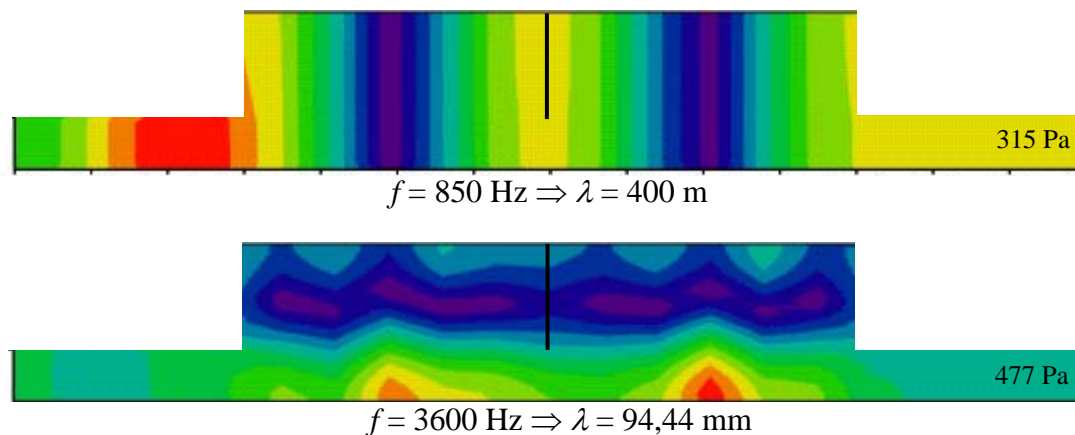


FIGURA 4.15 – Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão dupla na ausência de escoamento.

A FIG.4.16 mostra a distribuição do potencial  $\phi^F$  no sistema calculada pelo MEF para um escoamento cuja velocidade no tubo de entrada é 102 m/s, a qual corresponde a  $M_e = 0,3$ .

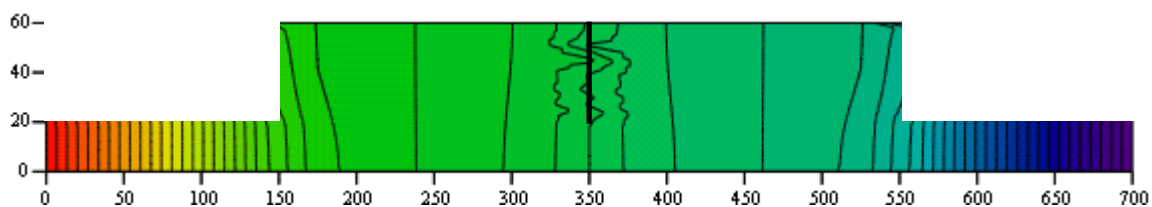


FIGURA 4.16 – Distribuição de  $\phi^F$  em uma câmara de dupla na presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$ .

A FIG.4.17 ilustra a distribuição da amplitude da pressão sonora na presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$ .

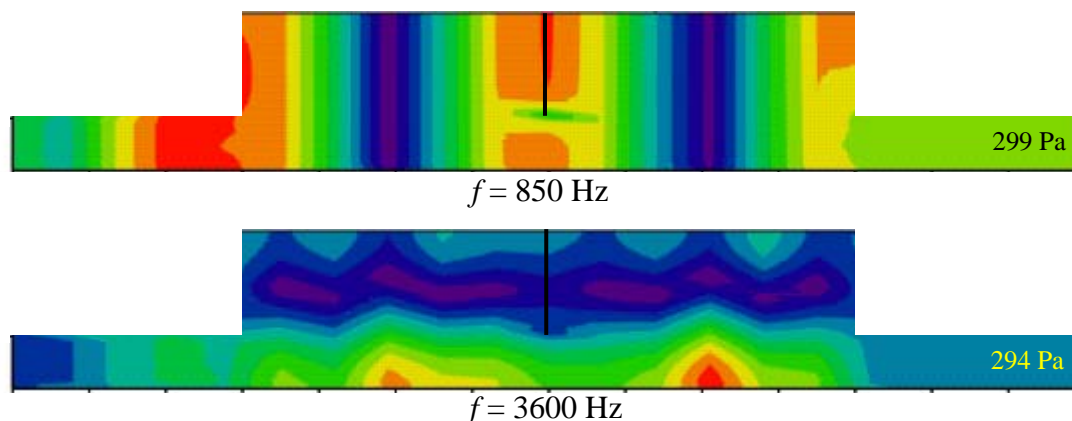


FIGURA 4.17 – Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão dupla na presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$ .

Comparando as FIGs.4.15 e 4.17, nota-se que, embora o escoamento não influa na  $TL$ , a amplitude da pressão sonora no tubo de saída pode ser significativamente afetada.

#### 4.5 Câmara de Expansão Dupla com Extremidades Estendidas e Tubo Central

A FIG.4.1-d representa uma câmara de expansão dupla com extremidades estendidas e tubo central. SELAMET et al. (2003) estudaram detalhadamente tal configuração utilizando uma técnica analítica bidimensional, o MEF e análises experimentais; porém, o efeito do escoamento não foi considerado.

O sistema analisado nesta seção apresenta  $L_{ce} = 80\text{mm}$ , sendo as demais dimensões iguais às utilizadas nas seções 4.2, 4.3 e 4.4. A FIG.4.18 apresenta os valores da  $TL$  obtidos pelo MEF para  $M_e = 0,0$  e  $M_e = 0,3$ . Para fins comparativos, o gráfico ainda mostra os resultados para uma câmara de expansão simples.

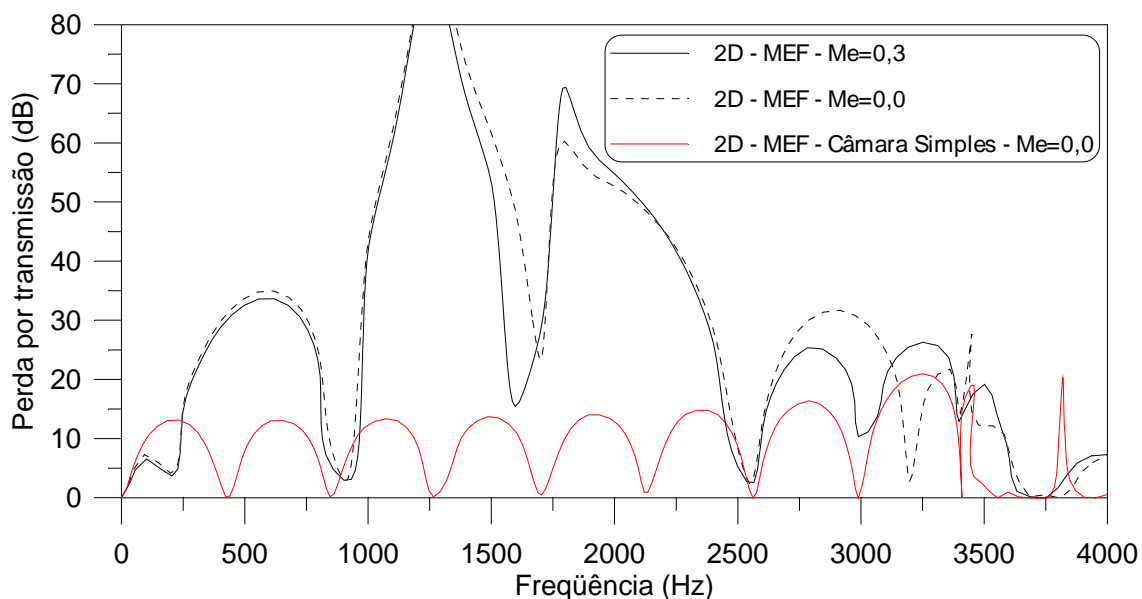


FIGURA 4.18 – Comparação entre os valores da  $TL$  obtidos pelo MEF para uma câmara de expansão dupla com extremidades estendidas e tubo central e uma câmara de expansão simples.

A FIG.4.18 mostra que um escoamento em que  $M_e = 0,3$  altera a perda por transmissão do sistema em determinadas faixas de frequência. Também pode-se observar que a inserção de tubos e chapas no interior da câmara eleva significativamente os valores da  $TL$  em praticamente todas as frequências consideradas.

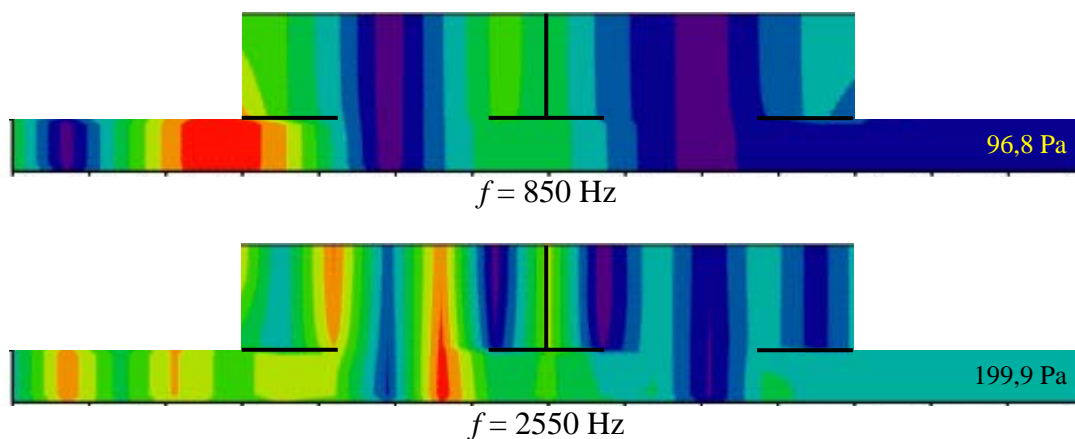


FIGURA 4.19 – Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão dupla com extremidades estendidas e tubo central na ausência de escoamento.

A FIG.4.19 ilustra a distribuição da amplitude da pressão sonora na ausência de escoamento em algumas frequências.

A FIG.4.20 mostra a distribuição do potencial  $\phi^F$  no sistema calculada pelo MEF para um escoamento cuja velocidade no tubo de entrada é 102 m/s, a qual corresponde a  $M_e = 0,3$ .

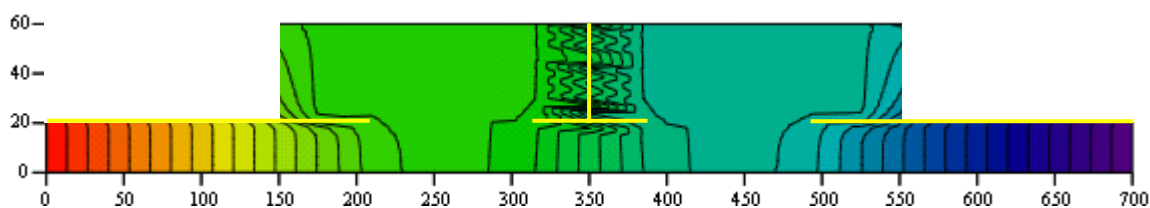


FIGURA 4.20 – Distribuição de  $\phi^F$  em uma câmara de dupla com extremidades estendidas e tubo central na presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$ .

A FIG.4.21 ilustra a distribuição da amplitude da pressão sonora na presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$ .

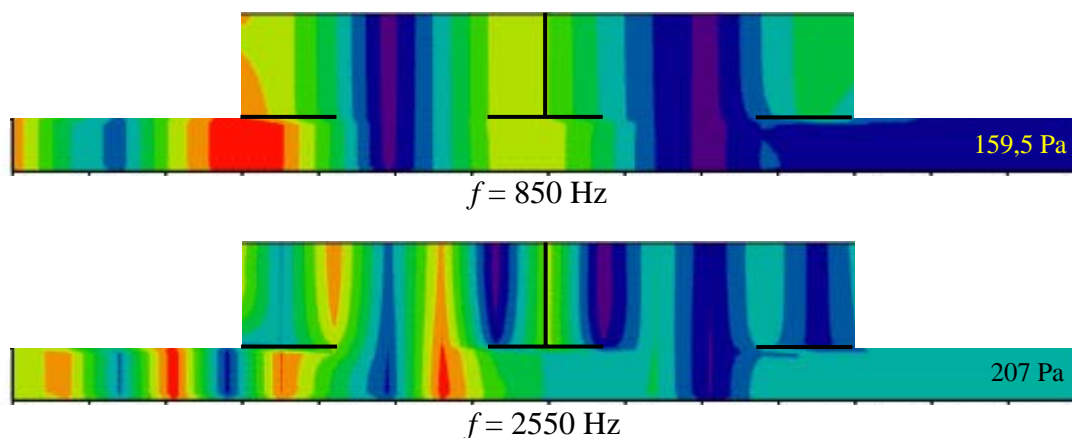


FIGURA 4.21 – Distribuição da pressão sonora em uma câmara de expansão dupla com extremidades estendidas e tubo central na presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$ .

Comparando as FIGs.4.19 e 4.21, nota-se que, embora para as frequências consideradas o escoamento não influa na  $TL$ , a amplitude da pressão sonora no tubo de saída pode ser significativamente afetada.

## 4.6 Comparação entre as Configurações de Câmaras de Expansão Estudadas

A FIG.4.22 apresenta uma comparação entre os valores da  $TL$  calculados pelo MEF para as diferentes configurações de câmaras de expansão estudadas. Estes resultados correspondem a uma situação em que a velocidade do escoamento é tal que  $M_e = 0,3$ .

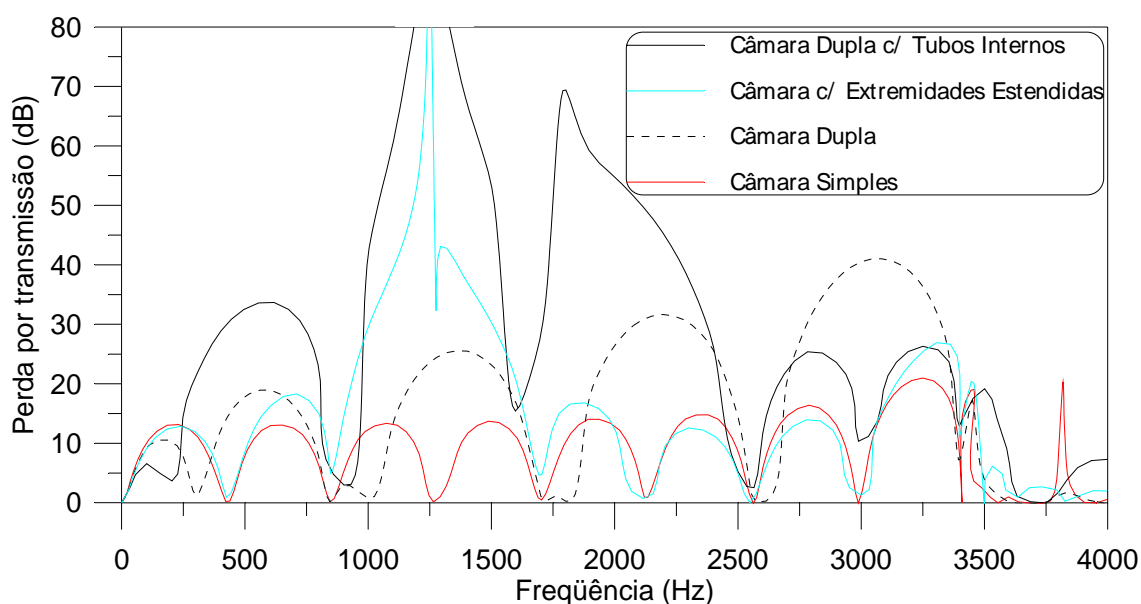


FIGURA 4.22 – Comparação entre os valores da  $TL$  obtidos pelo MEF para diversas configurações de câmaras de expansão na presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$ .

A FIG.4.22 mostra que a câmara de expansão simples é a que apresenta o pior desempenho acústico dentre as configurações consideradas. Pode-se observar que a inserção de extremidades estendidas faz com que a  $TL$  aumente significativamente nas frequências compreendidas entre 800 Hz e 1700 Hz aproximadamente. A câmara dupla, por sua vez, apresenta um desempenho superior ao da câmara simples em uma gama maior de frequências; comparando-a com a câmara com extremidades estendidas, nota-se que determinar qual delas é mais adequada depende da frequência de interesse.

Para baixas e médias frequências, os valores da  $TL$  apresentados pela câmara dupla com tubos internos são maiores que os obtidos para as demais configurações. Entretanto, para altas frequências, o desempenho da câmara dupla sem tubos internos é superior.

# 5

## CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi apresentado um modelo matemático tridimensional para a análise da propagação sonora no domínio da frequência considerando a presença de escoamentos irrotacionais de gases. Devido à não disponibilidade de técnicas analíticas de solução, utilizou-se uma técnica numérica baseada no método dos elementos finitos (MEF), sendo a mesma válida para problemas com simetria axial, os quais permitem a utilização de elementos finitos bidimensionais. Para a realização dos cálculos, foi desenvolvido um programa computacional em linguagem C.

A fim de estudar o comportamento acústico de sistemas reativos de controle de ruído, os valores da perda por transmissão ( $TL$ ) nas seguintes configurações geométricas de câmaras de expansão foram avaliados:

1. Câmara de expansão simples;
2. Câmara de expansão com extremidades estendidas;
3. Câmara de expansão dupla;
4. Câmara de expansão dupla com tubos internos.

Todas as configurações acima citadas foram simuladas numericamente em duas situações:  $M_e = 0,0$  e  $M_e = 0,3$ . Para as câmaras simples e com extremidades estendidas, também foram apresentados resultados obtidos pela aplicação de técnicas analíticas a modelos matemáticos unidimensionais. Estes últimos são válidos apenas para valores de frequência inferiores à menor frequência de corte da câmara, pois, acima deste valor, ocorre a propagação de modos acústicos radiais, o que torna os resultados unidimensionais e bidimensionais discrepantes.

Para a análise unidimensional da câmara de expansão simples, dois modelos matemáticos distintos foram utilizados, os quais diferem com relação ao tratamento das descontinuidades de seção existentes na entrada (expansão) e na saída (contração) da câmara. Porém, estes modelos se igualam quando não há escoamento no sistema, ou seja, quando  $M_e = 0$ ; são eles:

3. Expansão e contração isoentrópicas;
4. Expansão irreversível e contração isoentrópica.

A avaliação da câmara simples através do modelo unidimensional com expansão isoentrópica demonstrou que a presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$  não afeta os valores da  $TL$  apresentados pelo sistema. Entretanto, sabe-se que o fluxo através de uma expansão súbita não é adequadamente representado como sendo um processo reversível (ALFREDSON e DAVIES, 1971). Assim, utilizando o modelo que considera a irreversibilidade do processo de expansão, a  $TL$  é ligeiramente aumentada pela presença de um escoamento em que  $M_e = 0,3$ .

Ainda com relação à câmara de expansão simples, a diferença entre os valores da  $TL$  obtidos pelo modelo numérico bidimensional e pelo modelo analítico unidimensional isoentrópico tornam-se maiores na medida em que a frequência de excitação aumenta; sendo que, quando a frequência ultrapassa a menor frequência de corte do sistema, há uma redução brusca no desempenho acústico da câmara. Para frequências inferiores à de corte, a existência de padrões bidimensionais localizados nas proximidades das

descontinuidades é a responsável pela diferença entre os resultados analíticos e numéricos.

Para  $M_e = 0,0$ , a  $TL$  em câmaras de expansão com extremidades estendidas exhibe um comportamento resultante da superposição de domos e picos de atenuação sonora. Para frequências inferiores à de corte, o número de domos é igual ao apresentado por câmaras de expansão simples, sendo os picos de atenuação devidos às extremidades estendidas. Há uma discrepância entre os resultados numéricos bidimensionais e aqueles obtidos pelo modelo analítico unidimensional. Entretanto, a aplicação das correções propostas por MUNJAL (1987) nos comprimentos das extremidades estendidas promove uma aproximação considerável entre os resultados analíticos e numéricos na faixa de frequência em que a hipótese de propagação sonora unidimensional é válida. Assim como nas câmaras simples, os resultados bidimensionais demonstram que há uma redução brusca no desempenho acústico quando a propagação de modos radiais tem início, ou seja, quando a frequência é maior que a frequência de corte.

A comparação entre os resultados obtidos a partir dos modelos unidimensional e bidimensional na ausência de escoamento leva a concluir que, mesmo para frequências inferiores à de corte, existem padrões sonoros bidimensionais localizados nas proximidades das descontinuidades geométricas, os quais podem causar diferenças significativas entre os valores da  $TL$  calculados pelos referidos modelos; tais padrões bidimensionais são evidenciados quando se observa a distribuição da pressão sonora na câmara. No entanto, este fato não invalida as análises unidimensionais, apenas alerta quanto às restrições inerentes a tais modelos.

No que se refere aos efeitos do escoamento sobre o comportamento acústico, dentre as configurações de câmaras de expansão analisadas, apenas na câmara dupla com tubos internos a presença de escoamento provocou alterações significativas nos valores da  $TL$  calculados numericamente, sugerindo que configurações geométricas mais complicadas tendem a ser mais sensíveis ao escoamento. Entretanto, deve-se salientar que o modelo matemático tridimensional utilizado para a formulação numérica é válido apenas para



processos isoentrópicos; logo, os efeitos da irreversibilidade do processo de expansão sobre a  $TL$  não foram capturados pelas análises numéricas realizadas neste trabalho.

Embora a presença de escoamentos irrotacionais não tenha se mostrado determinante para o cálculo da  $TL$ , a pressão sonora na saída de todas as câmaras estudadas neste trabalho é significativamente alterada pelo escoamento, o que, conseqüentemente, modifica a potência sonora. Entretanto, as avaliações realizadas se referiram apenas ao comportamento acústico dos atenuadores de ruído, sendo desconsiderada a interação destes com os demais componentes dos sistemas de exaustão de motores. Assim, os valores da pressão sonora apresentados no presente estudo não correspondem aos existentes em sistemas reais de exaustão.

Comparando os valores da  $TL$  obtidos pelo MEF, observa-se que a câmara de expansão simples é a que apresenta o pior desempenho acústico dentre as configurações consideradas, podendo este ser melhorado através da inserção de placas e tubos no interior da câmara. Entretanto, ao se projetar um atenuador de ruído para o sistema de exaustão de um motor, deve-se considerar a perda de pressão que este acessório introduzirá no sistema, a qual influi diretamente na potência do motor e tende a aumentar na medida em que geometria do atenuador torna-se mais complexa. Posto que quanto maior a perda de pressão, menor a potência do motor, o projeto do sistema de controle de ruído deve buscar o equilíbrio entre atenuação sonora e perda de pressão.

Como orientação para trabalhos futuros, sugere-se que os sistemas de exaustão sejam avaliados considerando a perda de pressão e a interação entre seus diversos componentes, de forma a possibilitar o cálculo da potência sonora e da perda por inserção, posto ser esta última o parâmetro que realmente descreve o desempenho acústico de um atenuador de ruído em um determinado sistema. Além disso, devem ser pesquisadas novas técnicas de solução que viabilizem análises tridimensionais e sejam capazes de avaliar processos termodinâmicos irreversíveis e escoamentos turbulentos, visando determinar sua participação na geração de ruído em sistemas para exaustão de gases de motores. Neste sentido, os trabalhos de DAVIES e HOLLAND (2001), SKORDOS (1995) e OLDHAM e WADDINGTON (2001) podem ser utilizados como

referência. Por fim, recomenda-se a realização de ensaios com o intuito de validar experimentalmente os modelos teóricos, podendo ser consultados os trabalhos de HOLLAND e DAVIES (2000) e MUNJAL e DOIGE (1990).

# 6

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ÅBOM, M. Derivation of four-pole parameters including higher order mode effects for expansion chamber mufflers with extended inlet and outlet. *Journal of Sound and Vibration*, v. 137, n. 3, p. 403-418, 1990.
- [2] ALFREDSON, R. J.; DAVIES, P. O. A. L. Performance of exhaust silencer components. *Journal of Sound and Vibration*, v. 15, n. 2, p. 175-196, 1971.
- [3] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 6. ed. Rio de Janeiro : LTC, 1998.
- [4] BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. Berlin : Springer-Verlag, 1984.
- [5] CONSELHO NACIONAL DO MEIO AMBIENTE. Resolução nº 6 de 31 de agosto de 1993. Estabelece prazo para os fabricantes e empresas de importação de veículos automotores disporem de procedimentos e infra-estrutura para a divulgação sistemática, ao público em geral, das recomendações e especificações de

calibração, regulagem e manutenção do motor, dos sistemas de alimentação de combustível, de ignição, de carga elétrica, de partida, de arrefecimento, de escapamento e, sempre que aplicável, dos componentes de sistemas de controle de emissão de gases, partículas e ruído. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil*, Brasília, 01 out. 1993.

- [6] CONSELHO NACIONAL DO MEIO AMBIENTE. Resolução nº 7 de 31 de agosto de 1993. Define as diretrizes básicas e padrões de emissão para o estabelecimento de Programas de Inspeção e Manutenção de Veículos em Uso - I/M. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil*, Brasília, 31 dez. 1993.
- [7] CONSELHO NACIONAL DO MEIO AMBIENTE. Resolução nº 8 de 31 de agosto de 1993. Complementa a Resolução nº 018/86, que institui, em caráter nacional, o Programa de Controle da Poluição do Ar por Veículos Automotores - PROCONVE, estabelecendo limites máximos de emissão de poluentes para os motores destinados a veículos pesados novos, nacionais e importados. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil*, Brasília, 31 dez. 1993.
- [8] CONSELHO NACIONAL DO MEIO AMBIENTE. Resolução nº 17 de 13 de dezembro de 1995. Ratifica os limites máximos de emissão de ruído por veículos automotores e o cronograma para seu atendimento previsto na Resolução CONAMA nº 008/93 (art. 20), que complementa a Resolução nº 018/86, que institui, em caráter nacional, o Programa de Controle da Poluição do Ar por Veículos Automotores - PROCONVE, estabelecendo limites máximos de emissão de poluentes para os motores destinados a veículos pesados novos, nacionais e importados. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil*, Brasília, 29 dez. 1995.
- [9] CONSELHO NACIONAL DO MEIO AMBIENTE. Resolução nº 252 de 01 de fevereiro de 1999. Estabelece, para os veículos rodoviários automotores, inclusive veículos encarroçados, complementados e modificados, nacionais ou importados, limites máximos de ruído nas proximidades do escapamento, para fins de inspeção

obrigatória e fiscalização de veículos em uso. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil*, Brasília, 01 fev. 1999.

- [10] CONSELHO NACIONAL DO MEIO AMBIENTE. Resolução nº 272 de 14 de setembro de 2000. Define novos limites máximos de emissão de ruídos por veículos automotores. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil*, Brasília, 10 jan. 2001.
- [11] CRAGGS, A. A finite element method for damped acoustic systems: an application to evaluate the performance of reactive mufflers. *Journal of Sound and Vibration*, v. 48, n. 3, p. 377-392, 1976.
- [12] DAVIES, P. O. A. L.; HOLLAND, K. R. The observed aeroacoustic behaviour of some flow-excited expansion chambers. *Journal of Sound and Vibration*, v. 239, n. 4, p. 695-708, 2001.
- [13] DHATT, G.; TOUZOT, G. *The finite element method displayed*. Chichester : John Wiley & Sons, 1984.
- [14] EL-SHARKAWY, A. I.; NAYFEH, A. H. Effect of an expansion chamber on the propagation of sound in circular ducts. *Journal of Acoustical Society of America*, v. 63, n. 3, p. 667-674, 1978.
- [15] EVANS, J. B. Engine test cell noise emission design with performance validation results. In: 10<sup>TH</sup> INTERNATIONAL MEETING LOW FREQUENCY NOISE AND VIBRATION AND ITS CONTROL. York, England: 11-13 September 2002; p. 243-250.
- [16] FOX, R. W.; McDONALD, A. T. *Introdução à mecânica dos fluidos*. 4. ed. Rio de Janeiro : LTC, 1998.
- [17] GRIFFITHS, I. D.; LANGDON, F. J. Subjective response to road traffic noise. *Journal of Sound and Vibration*, v. 8, n. 1, p. 16-32, 1968.

- [18] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S. *Física 2*. 4. ed. Rio de Janeiro : LTC, 1996.
- [19] HOLLAND, K. R.; DAVIES, P. O. A. L. The measurement of sound power flux in flow ducts. *Journal of Sound and Vibration*, v. 230, n. 4, p. 915-932, 2000.
- [20] HUEBNER, K. H.; THORNTON, E. A. *The finite element method for engineers*. New York : John Wiley & Sons, 1975.
- [21] IH, J. G.; LEE, B. H. Analysis of higher-order mode effects in the circular expansion chamber with mean flow. *Journal of Acoustical Society of America*, v. 77, n. 4, p. 1377-1388, 1985.
- [22] INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. *Fundamentos de transferência de calor e de massa*. 4. ed. Rio de Janeiro : LTC, 1998.
- [23] JI, Z.; MA, Q.; ZHANG, Z. Application of the boundary element method to predicting acoustic performance of expansion chamber mufflers with mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, v. 173, n. 1, p. 57-71, 1994.
- [24] JI, Z. L.; MA, Q.; ZHANG, Z. H. A boundary element scheme for evaluation of four-pole parameters of ducts and mufflers with low mach number non-uniform flow. *Journal of Sound and Vibration*, v. 185, n. 1, p. 107-117, 1995.
- [25] KINSLER, L. E.; FREY, A. R.; COPPENS, A. B.; SANDERS, J. V.. *Fundamentals of acoustics*. 3. ed. New York : John Wiley & Sons, 1982.
- [26] LEBEDEV, N. N. *Special functions and their applications*. London : Prentice-Hall, 1965.
- [27] MUNJAL, M. L. *Acoustics of ducts and mufflers – with application to exhaust and ventilation system design*. New York : John Wiley & Sons, 1987.

- [28] MUNJAL, M. L. Analysis and design of mufflers – an overview of research at the indian institute of science. *Journal of Sound and Vibration*, v. 211, n. 3, p. 425-433, 1998.
- [29] MUNJAL, M. L.; DOIGE, A. G. The two-microphone method incorporating the effects of mean flow and acoustic damping. *Journal of Sound and Vibration*, v. 137, n. 1, p. 135-138, 1990.
- [30] OLDHAM, D. J.; WADDINGTON, D. C. The prediction of airflow-generated noise in ducts from considerations of similarity. *Journal of Sound and Vibration*, v. 248, n. 4, p. 780-787, 2001.
- [31] OUIS, D. Annoyance from road traffic noise: a review. *Journal of Environmental Psychology*, v. 21, p. 101-120, 2001.
- [32] PEAT, K. S. Evaluation of four-pole parameters for ducts with flow by the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 84, n. 3, p. 389-395, 1982.
- [33] RIENSTRA, S. W.; HIRSCHBERG, A. *An introduction to acoustics*. Eindhoven University of Technology, 2003.
- [34] SELAMET, A.; DENIA, F. D.; BESA, A. J. Acoustic behavior of circular dual-chamber mufflers. *Journal of Sound and Vibration*, v. 265, p. 967-985, 2003.
- [35] SELAMET, A.; JI, Z. L. Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with extended inlet/outlet. *Journal of Sound and Vibration*, v. 223, n. 2, p. 197-212, 1999.
- [36] SELAMET, A.; JI, Z. L. Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with offset inlet/outlet: I. Analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, v. 213, n. 4, p. 601-617, 1998.

- [37] SELAMET, A.; JI, Z. L.; RADAVIDICH, P. M. Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with offset inlet/outlet: II. Comparison with experimental and computational studies. *Journal of Sound and Vibration*, v. 213, n. 4, p. 619-641, 1998.
- [38] SELAMET, A.; JI, Z. L. Acoustic attenuation performance of circular flow-reversing chambers. *Journal of Acoustical Society of America*, v. 104, n. 5, p. 2867-2877, 1998.
- [39] SELAMET, A.; RADAVIDICH, P. M. The effect of length on the acoustic attenuation performance of concentric expansion chambers: an analytical, computational and experimental investigation. *Journal of Sound and Vibration*, v. 201, n. 4, p. 407-426, 1997.
- [40] SHAMES, I. H. *Mechanics of fluids*. 1. ed. New York : McGraw-Hill, 1962.
- [41] SIGMAN, R. K.; MAJJIGI, R. K.; ZINN, B. T. Determination of turbofan inlet acoustics using finite elements. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, v. 16, n. 11, p. 1139-1145, 1978.
- [42] SKORDOS, P. A. *Modeling flue pipes: subsonic flow, lattice boltzmann, and parallel distributed computers*. 1995. Thesis (Ph.D.) – Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology.
- [43] TSUJI, T.; TSUCHIYA, T.; KAGAWA, Y. Finite element and boundary element modelling for the acoustic wave transmission in mean flow medium. *Journal of Sound and Vibration*, v. 255, n. 5, p. 849-866, 2002.
- [44] VAN WYLEN, G. J.; SONNTAG, R. E.; BORGNAKKE, C. *Fundamentos da termodinâmica*. 5. ed. São Paulo : Edgard Blücher, 1998.



- [45] WEAVER, W.; JOHNSTON P. R. *Finite elements for structural analysis*. New Jersey : Prentice-Hall, 1984.
- [46] YOUNG, C. J.; CROCKER, M. J. Prediction of transmission loss in mufflers by the finite-element method. *Journal of Acoustical Society of America*, v. 57, n. 1, p. 144-148, 1975.

## ANEXO A

### Propagação de Ondas Sonoras em Dutos de Seção Circular na Ausência de Escoamento

Quando a velocidade do escoamento é nula ( $\bar{u}^F = 0$ ), a equação de onda é dada pela Eq.(2.41), a qual está reproduzida a seguir:

$$\nabla^2 p^A - \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 p^A}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Neste anexo, é desenvolvida uma solução analítica da Eq.(A.1) para dutos retos de seção transversal circular constante. Esta solução é obtida para uma excitação acústica harmônica, ou seja, a variação temporal da pressão sonora é senoidal. Como a Eq.(A.1) é linear e grande parte das funções periódicas de interesse podem ser representadas por um somatório de funções seno e co-seno (série de Fourier<sup>16</sup>), a excitação pode ser decomposta em parcelas harmônicas, cuja solução será desenvolvida nesta seção, e os resultados para cada frequência somados, o que resultará na solução analítica referente à excitação original. Desta forma, o desenvolvimento de uma solução para excitações harmônicas é justificado.

Para solucionar a Eq.(A.1), será utilizado o método da separação de variáveis. Assim, assume-se que

$$p^A = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z) \cdot e^{j\omega t} \quad (\text{A.2})$$

onde  $R(r)$  é uma função na variável  $r$ ,  $\Theta(\theta)$  é uma função na variável  $\theta$  e  $Z(z)$  é uma função na variável  $z$ .

---

<sup>16</sup> Para maiores detalhes a respeito das limitações da representação de uma função periódica por uma série de Fourier, ver, por exemplo, BOYCE e DiPRIMA (1998).

Substituindo a Eq.(A.2) na Eq.(A.1), chega-se a

$$\frac{1}{R(r)} \cdot \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{R(r)r} \cdot \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{\Theta(\theta)r^2} \cdot \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \frac{1}{Z(z)} \cdot \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (\text{A.3})$$

Para que a soma das parcelas da Eq.(A.3) seja nula, é necessário que o termo na variável  $z$  desta equação seja uma constante. Portanto,

$$\frac{1}{Z(z)} \cdot \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -k_z^2 \quad (\text{A.4})$$

Resolvendo a Eq.(A.4), obtém-se

$$Z(z) = A_1 \cdot e^{jk_z z} + A_2 \cdot e^{-jk_z z} \quad (\text{A.5})$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são constantes.

Levando a Eq.(A.4) na (A.3), esta pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\frac{r^2}{R(r)} \cdot \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{r}{R(r)} \cdot \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{\Theta(\theta)} \cdot \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} - r^2 \cdot k_z^2 + r^2 \cdot k^2 = 0 \quad (\text{A.6})$$

Da Eq.(A.6), pode-se concluir que

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \cdot \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = -m^2 \quad (\text{A.7})$$

A solução da Eq.(A.7) é dada por

$$\Theta(\theta) = A_3 \cdot e^{jm\theta} + A_4 \cdot e^{-jm\theta} \quad (\text{A.8})$$

onde  $A_3$  e  $A_4$  são constantes.

Considerando que  $e^{j(m\theta)} = \cos(m\theta) + j.\text{sen}(m\theta)$  e  $\Theta(m\theta) = \Theta(m\theta + m2\pi i)$ , sendo que  $i$  é um número inteiro, conclui-se que  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Isto posto, a Eq.(A.6) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR(r)}{dr} + R(r) \cdot \left( k_r^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) = 0 \quad (\text{A.9})$$

onde,

$$k_r^2 = k^2 - k_z^2 \quad (\text{A.10})$$

Fazendo  $s = k_r \cdot r$ , a Eq.(A.9) torna-se

$$\frac{d^2 R(s)}{ds^2} + \frac{1}{s} \cdot \frac{dR(s)}{ds} + R(s) \cdot \left( 1 - \frac{m^2}{s^2} \right) = 0 \quad (\text{A.11})$$

A Eq.(A.11) é uma equação de Bessel de ordem  $m$ , cuja solução geral é dada por (LEBEDEV, 1965)

$$R(s) = C_1 \cdot J_m(s) + C_2 \cdot N_m(s) \quad (\text{A.12a})$$

ou

$$R(r) = C_1 \cdot J_m(k_r \cdot r) + C_2 \cdot N_m(k_r \cdot r) \quad (\text{A.12b})$$

onde  $J_m$  é a função de Bessel de primeira espécie de ordem  $m$ ,  $N_m$  é a função de Bessel de segunda espécie de ordem  $m$ ,  $C_1$  e  $C_2$  são constantes.

As funções de Bessel são dadas por (LEBEDEV, 1965)

$$J_m(k_r \cdot r) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k! \cdot (m+k)!} \cdot \left( \frac{k_r \cdot r}{2} \right)^{m+2k} \right] \quad (\text{A.13})$$

e

$$\begin{aligned}
N_m(k_r.r) = & \frac{2}{\pi} \cdot J_m(k_r.r) \cdot \ln\left(\frac{k_r.r}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left[ \frac{(m-k-1)!}{k!} \cdot \left(\frac{k_r.r}{2}\right)^{2k-m} \right] - \\
& + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k}{k! \cdot (m+k)!} \cdot \left(\frac{k_r.r}{2}\right)^{2k+m} \cdot [\psi(k+1) + \psi(k+m+1)] \right\}
\end{aligned} \tag{A.14}$$

onde  $\psi(n+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ ,  $\psi(1) = -\gamma$  e  $\gamma = 0,5772156$  é a constante de Euler.

Pela Eq.(A.14), pode-se observar que na posição  $r = 0$  (centro do tubo),  $N_m = -\infty$ . Como a pressão sonora deve apresentar valores finitos, conclui-se que a constante  $C_2$  contida nas Eqs.(A.12) é nula.

Assumindo que as paredes do tubo são perfeitamente rígidas, tem-se que a componente radial do vetor velocidade na superfície interna do tubo deve ser nula. Conseqüentemente, a variação da pressão em uma direção normal à parede do tubo é nula. Portanto, a seguinte condição de contorno deve ser satisfeita:

$$\frac{\partial p^A}{\partial r} = 0, \text{ em } r = r_0 \tag{A.15}$$

onde  $r_0$  é o raio interno do tubo.

Levando a condição de contorno expressa pela Eq.(A.15) nas Eqs.(A.2) e (A.12b), chega-se à seguinte conclusão:

$$\frac{dJ_m(k_r.r_0)}{dr} = 0 \tag{A.16}$$

Assim,  $k_r$  assume apenas valores discretos que satisfazem esta equação.

Denotando o valor de  $k_r$  correspondente à  $(n+1)$ -ésima raiz da Eq.(A.16) como  $k_{r,mn}$ , e levando as Eqs.(A.5), (A.8) e (A.12b) na Eq.(A.2), chega-se à seguinte expressão:

$$p^A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{mn}^A \quad (\text{A.17})$$

onde,

$$p_{mn}^A = J_m(k_{r,mn} \cdot r) \cdot (C_{1,mn} \cdot e^{-jk_{z,mn}z} + C_{2,mn} \cdot e^{jk_{z,mn}z}) (C_{3,mn} \cdot e^{-jm\theta} + e^{jm\theta}) \cdot e^{j\omega t} \quad (\text{A.18})$$

$C_{1,mn}$ ,  $C_{2,mn}$  e  $C_{3,mn}$  são constantes dependentes de  $m$  e de  $n$ , as quais são determinadas pelas condições de contorno do problema.

Os valores de  $k_{r,mn} \cdot r_0$  que satisfazem a Eq.(A.16) são dados na TAB.A.1.

TABELA A.1 - Pontos de inflexão de  $J_m$  (KINSLER et al., 1982).

m \ n	0	1	2	3	4
0	0	3,83	7,02	10,17	13,32
1	1,84	5,33	8,54	11,71	14,86
2	3,05	6,71	9,97	13,17	16,35
3	4,20	8,02	11,35	14,59	17,79
4	5,32	9,28	12,68	15,96	19,20
5	6,41	10,52	13,99	17,31	20,58

A Eq.(A.17) expressa a pressão sonora em função da posição e do tempo. Cada par de valores  $m$  e  $n$  corresponde a um modo de oscilação, sendo que  $m$  indica o modo como a pressão sonora varia com o ângulo  $\theta$ , e  $n$  indica o modo como a pressão sonora varia na direção radial  $r$ . Dependendo da frequência de excitação, cada um destes modos expressos por  $(m,n)$  poderá ou não ser propagado.