

**Sandro Trindade Mordente Gonçalves**

# **Caracterização Unificada de Antenas nos Domínios do Tempo e Frequência**

**Tese de Doutorado**

**Orientador: Professor Cássio Gonçalves do Rego**

**Departamento de Engenharia Eletrônica  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Setembro de 2010**

Sandro Trindade Mordente Gonçalves

# Caracterização Unificada de Antenas nos Domínios do Tempo e Frequência

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia Eletrônica da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências em Engenharia Elétrica e Telecomunicações

**Orientador: Professor Cássio Gonçalves do Rego**

Departamento de Engenharia Eletrônica  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Belo Horizonte, 29 de Setembro de 2010

Àquele que me deu uma nova vida, um sentido  
para viver e a graça da vida eterna. À Ele  
toda a honra, glória e louvor: JESUS!

# Agradecimentos

Agradecimentos àqueles que caminharam comigo, me apoiaram, sustentaram e possibilitaram assim esta conquista.

- À minha querida Alessandra, esposa amada, companheira e fiel, que esteve ao meu lado incondicionalmente, se alegrou comigo, chorou ao meu lado, me deu forças para prosseguir sem desanimar.
- Ao meu orientador, Professor Cássio Gonçalves do Rego, que me incentivou, acreditou em mim, e conduziu o desenvolvimento deste trabalho.
- Aos professores e funcionários do PPGEE/UFMG e CEFET/Divinópolis pelo apoio, e contribuição para minha formação não somente como profissional, mas como pessoa.
- Aos meus pais, William e Margarete e aos meus irmãos Diego e Guilherme, que se suportaram comigo meus momentos de fraqueza e me ajudaram a levantar a cabeça.
- À minha família, avós, tios, primos, cunhados e sogros que sempre torceram por mim.

## Resumo

O estudo de sinais de comunicação no domínio do tempo tem sido realizado com maior interesse nos últimos anos devido à rápida evolução dos recursos computacionais e ao estudo de sinais com espectro de frequências amplo. No entanto, ainda que a demanda por sistemas banda larga tenha aumentado substancialmente nos últimos anos, existe um grande interesse por sistemas que trabalham em uma pequena faixa de frequências. Para estes sistemas, técnicas de análise no domínio espectral são mais apropriadas.

O objetivo deste trabalho é o estudo de parâmetros que caracterizem a radiação de campos elétricos e magnéticos por antenas diretamente nos domínios do tempo e frequência de uma forma unificada e direta através de uma formulação semi-analítica e a sua subsequente aplicação na análise de antenas excitadas por fontes de comportamento temporal arbitrário.

A formulação foi elaborada através da obtenção de um parâmetro para análise de antenas, a altura efetiva, que é um parâmetro estimado para antena na região de campo distante e independe do comportamento temporal da excitação. Para a obtenção da altura efetiva foi utilizado o Método da Expansão em Singularidades (SEM), que é capaz de modelar uma grandeza eletromagnética através das ressonâncias naturais presentes no objeto de análise. A expansão em singularidades permite a representação nos domínios temporal e espectral de uma forma simplificada.

Neste trabalho propõe-se que as singularidades sejam extraídas por meio do método do Matrix Pencil, sendo que as correntes são obtidas numericamente através do Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD) para antenas filamentosas e analiticamente através do método da Abertura para antenas refletoras e, uma vez obtidas as singularidades, a formulação da altura efetiva semi-analítica seja então encontrada.

A altura efetiva foi determinada para o dipolo, a log-periódica formada por matrix de dipolos e o refletor parabólico simétrico. Os resultados obtidos foram validados com soluções consolidadas na literatura. Os erros e limitações do método foram estudados e demonstrados através de representações gráficas e analíticas.

# Abstract

The study of signals in the time domain has been raised last years due to the fast evolution of the computational resources, factor that limited the application of time domain techniques developed last decades. The great advantage of the study of time domain techniques is the ability to work with the electromagnetic quantities without domain transforms. This allows a huge content of frequencies in a certain signal can be analyzed without any discrimination of frequency. Although the interest for broadband systems has increased substantially last years, there is a high demand for systems that works in a small strip of frequencies. So techniques in the spectral domain are more appropriate due to the great development these techniques reached.

The objective of this work is the study of parameters that characterize the radiation of electric and magnetic fields for antennas in the time and frequency domain on unified representation and directly through a semi-analytical formulation and its subsequent application on the analysis of excited antennas for a temporal behavior arbitrary source.

The Effective Height is a parameter for antenna analysis defined for quantities on far field region. The Singularity Expansion Method (SEM) can be used to obtain an unified formulation through the calculation of the current densities. The SEM is capable to model an electromagnetic quantity with the singularities extracted by the currents of the object of study. This work proposes that the singularities are extracted by the Matrix Pencil method applied on the currents obtained numerically through the Method of the Finite Differences in the Time Domain (FDTD) for wired antennas or analytically through Aperture method for reflector antennas and, once obtained the singularities, the formulation of the semi-analytical Effective Height equation is then found.

In this work, the analyzed antennas were the dipole, the log-periodic dipole array and the symmetric parabolic reflector. The results were evaluated and validated for consolidated solutions in the literature. The errors and limitations of the method were studied and demonstrated through graphical and analytical representations.

# Sumário

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xiv
Glossário	xv
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2 CARACTERIZAÇÃO DE ANTENAS - FORMULAÇÃO DA ALTURA EFETIVA</b>	<b>11</b>
2.1 Introdução . . . . .	11
2.2 Altura Efetiva no Domínio do Tempo . . . . .	19
2.2.1 Radiação de Fontes Impressas . . . . .	19
2.2.2 Altura Efetiva de uma Antena Transmissora . . . . .	23
2.2.3 Diagrama de Radiação . . . . .	24
2.2.4 Representação do Operador Altura Efetiva em Termos das Ressonâncias Naturais . . . . .	28
2.3 Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD) . . . . .	29
2.3.1 Introdução . . . . .	29
2.3.2 Dispersão Numérica e Estabilidade . . . . .	33
2.3.3 Modelagem da Fonte . . . . .	37
2.3.4 Condições de Fronteiras Absorventes . . . . .	42

2.4	Método da Abertura . . . . .	43
2.4.1	Formulação . . . . .	44
<b>3</b>	<b>MÉTODO DA EXPANSÃO EM SINGULARIDADES (SEM)</b>	<b>50</b>
3.1	Introdução . . . . .	50
3.2	Formulação do SEM . . . . .	52
3.2.1	Cálculo dos Coeficientes de Acoplamento e dos Modos Naturais: Desenvolvimento Numérico . . . . .	56
3.2.2	Seleção dos Pólos Naturais . . . . .	65
3.2.3	Deconvolução . . . . .	67
3.3	Altura Efetiva: Formulação Semi-Analítica . . . . .	70
<b>4</b>	<b>ESTUDO DE CASOS</b>	<b>76</b>
4.1	Antena Dipolo . . . . .	77
4.1.1	Representação do Dipolo através do FDTD . . . . .	77
4.1.2	Extração das Singularidades . . . . .	84
4.1.3	Cálculo da Altura Efetiva para o Dipolo . . . . .	90
4.1.4	Campo Radiado pelo Dipolo na Região de Campo Distante . . . . .	92
4.2	Conjunto de Dipolos Log-Periódicos . . . . .	107
4.2.1	Extração das Singularidades . . . . .	115
4.2.2	Cálculo da Altura Efetiva para a LPDA . . . . .	116
4.2.3	Diagrama de Radiação . . . . .	120
4.2.4	Excitação Derivada do Pulso Gaussiano . . . . .	133
4.3	Refletor Parabólico Simétrico . . . . .	147
4.3.1	Cálculo da Altura Efetiva para o Parabolóide através do Método da Abertura . . . . .	147
4.3.2	Diagrama de Radiação . . . . .	153
4.3.3	Sinal 4-PSK . . . . .	157
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE</b>	<b>162</b>



# Lista de Figuras

2.1	Antena dipolo com incidência de campo gerando uma tensão em seus terminais. . . . .	14
2.2	Antena dipolo com incidência de campo gerando uma tensão em seus terminais: representação através de Thévenin (esquerda) e Norton (direita). . . . .	15
2.3	Circuito de alimentação de uma antena radiando . . . . .	19
2.4	Convenção para a imposição dos índices (i,j,k) no espaço (x,y,z) e a localização das componentes de campo segundo esta notação. . . . .	31
2.5	Antena dipolo com <i>gap</i> central . . . . .	41
2.6	Antena Parabólica com excitação no foco e notação em coordenadas da fonte. . . . .	45
2.7	Antena Parabólica com excitação no foco e notação em coordenadas da fonte. . . . .	47
3.1	Integração da função $\tilde{F}(s)$ expandida em termos de suas singularidades. . . . .	54
3.2	Domínio $V$ definido pela curva de Jordan $\partial V$ com um ponto qualquer $z_0$ . . . . .	58
4.1	Pulso gaussiano estreito com $\Delta t = 2,45 \times 10^{-11}$ s. . . . .	80
4.2	Resposta em frequência do pulso Gaussiano estreito com $\Delta t = 2,45 \times 10^{-11}$ s. . . . .	80
4.3	Pulso gaussiano estreito com $\Delta t = 1,28 \times 10^{-11}$ s. . . . .	81
4.4	Resposta em frequência do pulso Gaussiano estreito com $\Delta t = 1,28 \times 10^{-11}$ s. . . . .	82
4.5	Derivada do pulso Gaussiano estreito com $\Delta t = 2,45 \times 10^{-11}$ s. . . . .	83
4.6	Derivada do pulso Gaussiano estreito com $\Delta t = 2,45 \times 10^{-11}$ s. . . . .	84
4.7	Pólos e resíduos relativos à corrente no centro do dipolo. . . . .	85
4.8	Corrente no centro do dipolo de 14 cm excitado pelo pulso Gaussiano estreito ( $M = 10$ ). . . . .	86

4.9	Resposta em frequência da corrente no centro do dipolo de 14 cm excitado pelo pulso Gaussiano estreito ( $M = 10$ ).	87
4.10	Corrente no centro do dipolo de 14 cm excitado pelo pulso Gaussiano estreito ( $M = 20$ ).	88
4.11	Resposta em frequência da corrente no centro do dipolo de 14 cm excitado pelo pulso Gaussiano estreito ( $M = 20$ ).	88
4.12	Corrente no centro do dipolo de 14 cm excitado pelo pulso Gaussiano estreito ( $M = 30$ ).	89
4.13	Resposta em frequência da corrente no centro do dipolo de 14 cm excitado pelo pulso Gaussiano estreito ( $M = 30$ ).	89
4.14	Campo elétrico distante radiado pelo dipolo com $h = 0,14$ m, $a = h/150$ m, dividida em 11 células, malha $50 \times 50 \times 50$ , sendo cada segmento modelado por $M = 30$ singularidades e observador no campo distante com $\phi = 0^\circ$ e $\theta = 90^\circ$ .	95
4.15	Campo elétrico distante radiado pelo dipolo com $h = 0,14$ m, $a = h/150$ m, dividida em 11 células, malha $50 \times 50 \times 50$ , sendo cada segmento modelado por $M = 30$ singularidades e observador no campo distante com $\phi = 0^\circ$ e $\theta = 45^\circ$ .	95
4.16	Campo elétrico distante radiado pelo dipolo com $h = 0,14$ m, $a = h/150$ m, dividida em 11 células, malha $50 \times 50 \times 50$ , sendo cada segmento modelado por $M = 10$ a $M = 60$ singularidades e observador no campo distante com $\phi = 0^\circ$ e $\theta = 45^\circ$ .	96
4.17	Diagrama de radiação para o dipolo com $h = 0,14$ m, $a = h/150$ m, dividida em 11 células, malha $50 \times 50 \times 50$ , sendo cada segmento modelado por $M = 30$ singularidades e pulso estreito como excitação.	97
4.18	Diagrama de radiação para o dipolo $h = \lambda/2$ com $h = 0,14$ m, $a = h/150$ m, dividida em 11 células, sendo cada segmento modelado por $M = 30$ singularidades e excitação senoidal e $MSE = 1,65 \times 10^{-3}$ .	99
4.19	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com $M = 30$ singularidades e pela resposta analítica, no plano $\phi = 0^\circ$ .	100
4.20	Diagrama de radiação para o dipolo $h = \lambda$ com $h = 0,14$ m, $a = h/150$ m, dividida em 31 células, sendo cada segmento modelado por $M = 30$ singularidades e excitação senoidal e $MSE = 21,80 \times 10^{-3}$ .	101

4.21	Diagrama de radiação para o dipolo $h = \lambda$ com $h = 0,14$ m, $a = h/150$ m, dividida em 21 células, sendo cada segmento modelado por $M = 30$ singularidades e excitação senoidal e $MSE = 21,61 \times 10^{-3}$ . . . . .	102
4.22	Diagrama de radiação para o dipolo $h = \lambda$ com $h = 0,14$ m, $a = h/150$ m, dividida em 21 células, sendo cada segmento modelado por $M = 30$ singularidades e excitação senoidal e $MSE = 6,40 \times 10^{-3}$ . . . . .	103
4.23	Diagrama de radiação para o dipolo $h = \lambda$ com $h = 0,14$ m, $a = h/150$ m, dividida em 21 células, sendo cada segmento modelado por $M = 21$ singularidades e excitação senoidal e $MSE = 3,40 \times 10^{-3}$ . . . . .	105
4.24	Diagrama de radiação para o dipolo $h = \lambda/2$ com $h = 0,14$ m, $a = h/150$ m, dividida em 11 células, sendo cada segmento modelado por $M = 30$ singularidades, excitação senoidal e $MSE = 1,98 \times 10^{-3}$ . . . . .	106
4.25	Diagrama de radiação para o dipolo com $h = 0,14$ m, $a = h/150$ m, sendo $h = \lambda$ , dividida em 11 células, sendo cada segmento modelado por $M = 2$ singularidades, excitação senoidal e $MSE = 7,82 \times 10^{-3}$ . . . . .	107
4.26	Antena Log-Periódica com ângulos dos elementos em função da distância. . . . .	108
4.27	Antena Log-Periódica com 5 dipolos e alimentação na extremidade. . . . .	108
4.28	Numeração dos elementos da antena Log-Periódica com 5 dipolos e alimentação na extremidade. . . . .	110
4.29	Pulso Gaussiano estreito com $\Delta t = 3,275 \times 10^{-10}$ s. . . . .	113
4.30	Resposta em frequência do pulso Gaussiano estreito com $\Delta t = 3,275 \times 10^{-10}$ s. . . . .	113
4.31	Derivada do pulso Gaussiano estreito com $\Delta t = 3,275 \times 10^{-10}$ s. . . . .	114
4.32	Resposta em frequência da derivada do pulso Gaussiano estreito com $\Delta t = 3,275 \times 10^{-10}$ s. . . . .	114
4.33	Campo elétrico distante $E_\theta$ para a LPDA com $\theta = 90^\circ$ . . . . .	118
4.34	Campo elétrico distante $E_\phi$ para a LPDA com $\theta = 90^\circ$ . . . . .	118
4.35	Campo elétrico distante $E_\theta$ para a LPDA com $\phi = 0^\circ$ . . . . .	119
4.36	Campo elétrico distante $E_\phi$ para a LPDA com $\phi = 0^\circ$ . . . . .	119

4.37	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com $M = 30$ singularidades e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz. . . . .	121
4.38	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz. . . . .	123
4.39	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com $M = 30$ singularidades e pelo MOM de 21,05 MHz a 28,05 MHz. . . . .	125
4.40	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com $M = 30$ singularidades e pelo MOM de 34,05 MHz a 40,05 MHz. . . . .	126
4.41	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com $M = 17$ singularidades e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz. . . . .	128
4.42	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz. . . . .	129
4.43	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com $M = 17$ singularidades e pelo MOM de 21,05 MHz a 28,05 MHz. . . . .	131
4.44	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com $M = 17$ singularidades e pelo MOM de 34,05 MHz a 40,05 MHz. . . . .	132
4.45	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva através da deconvolução com $M = 8$ singularidades e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz. . . . .	133
4.46	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com $M = 50$ singularidades e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz e $N_{seg} = 20$ . . . . .	135
4.47	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com $M = 50$ singularidades e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz e $N_{seg} = 30$ . . . . .	136
4.48	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz e $N_{seg} = 20$ . . . . .	138
4.49	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz e $N_{seg} = 30$ . . . . .	139
4.50	Comparação entre a resposta em frequência da derivada do pulso Gaussiano com $N_{seg} = 30$ .	140

4.51	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com $M = 50$ singularidades e pelo MOM para $N_{seg} = 30$ e $N_{exc} = 5$ . . . . .	142
4.52	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com $M = 50$ singularidades e pelo MOM para $N_{seg} = 30$ e $N_{exc} = 5$ . . . . .	143
4.53	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com $M = 28$ singularidades e pelo MOM para $N_{seg} = 30$ e $N_{exc} = 5$ . . . . .	145
4.54	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com $M = 28$ singularidades e pelo MOM para $N_{seg} = 30$ e $N_{exc} = 5$ . . . . .	146
4.55	Seção da abertura de um ângulo infinitesimal de integração $d\phi$ (acima) e elemento infinitesimal de área (abaixo). . . . .	151
4.56	Comparação entre as malhas não-uniforme ( $a$ ) e uniforme ( $b$ ) para integração do vetor resíduo na abertura. . . . .	152
4.57	Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva e método da Abertura com $M = 158$ singularidades utilizando a excitação cosseno elevado e diagrama obtido pela resposta analítica com $D=100\lambda$ , no plano $\phi = 0^\circ$ com $D = 7,5$ m e $F = 0,4D$ .	156
4.58	Campo radiado pelo parabóide para o sinal 4-PSK calculado à partir de $t = r/c = 16,678 \mu s$ através da altura efetiva e método da Abertura com $M = 158$ singularidades utilizando a excitação cosseno elevado e diagrama obtido pela resposta analítica utilizando 15 anéis de integração, $D=100\lambda$ , com $r = 5000$ m, $\phi = 0^\circ$ , $D = 7,5$ m e $F = 0,4D$ . . . . .	158
4.59	Campo radiado pelo parabóide para o sinal 4-PSK calculado à partir de $t_e = 16,768 \mu s$ através da altura efetiva e método da Abertura com $M = 158$ singularidades utilizando a excitação cosseno elevado e diagrama obtido pela resposta analítica utilizando 15 anéis de integração, $D=100\lambda$ , com $r = 5027$ m, $\phi = 0^\circ$ , $D = 7,5$ m e $F = 0,4D$ . . . . .	160

# Lista de Tabelas

- 3.1 Momentos da Deconvolução para o Pulso Gaussiano e Derivada do Pulso Gaussiano . . 69
- 4.1 Comprimento e raio dos segmentos da antena Log-Periódica utilizada para simulações . 109

# Glossário

<b>ABC</b>	Absorbing Boundary Conditions.
<b>DFT</b>	Discrete Fourier Transform.
<b>FDTD</b>	Finite-Difference Time-Domain.
<b>FEM</b>	Finite Element Method.
<b>IRA</b>	Impulse Radiating Antenna.
<b>LPDA</b>	Log-Periodic Dipole Array.
<b>MEM</b>	Moment Expansion Method.
<b>MOM</b>	Method of Moments.
<b>PML</b>	Perfectly Matched Layer.
<b>PO</b>	Physical Optics.
<b>SEM</b>	Singularity Expansion Method.
<b>SVD</b>	Singular Value Decomposition.
<b>TDPO</b>	Time-Domain Physical Optics.
<b>UTD</b>	Uniform Theory of Diffraction.
<b>UWB</b>	Ultra-Wide Band.

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

### Visão Geral

As técnicas de análise de problemas na área de eletromagnetismo computacional, na maioria dos casos, assumem que os campos e as grandezas associadas têm comportamento temporal harmônico, ou seja, são monocromáticos [1]. Este fato sugere que as soluções sejam encontradas no domínio da frequência, já que as aproximações das soluções neste domínio são mais tratáveis. Soluções temporais são, então, obtidas através da transformada inversa de Fourier [1].

Campos eletromagnéticos harmônicos são utilizados há décadas como forma de modelagem matemática em sistemas de comunicação sem fio. Projeto de antenas e fontes de excitação, vêm sendo desenvolvidos continuamente no domínio espectral com o intuito de se transmitir sinais de informação com maior eficiência. Para este desenvolvimento, técnicas de análise no domínio da frequência, mais apropriadas para sinais banda estreita com pequeno desvio de frequências em torno de uma frequência central, vêm sendo aprimoradas para abordar os mais diversos tipos de antenas em diferentes aplicações e equipamentos de transmissão e recepção de sinais. Em linhas gerais, estas antenas trabalham com uma portadora senoidal em uma dada frequência, a qual modula a informação que se deseja transmitir. Os modernos sistemas de modulação, introduzem componentes espectrais diferentes da portadora no sinal transmitido que pertencem a uma estreita faixa



utilizada para projetar a antena. Por exemplo, a variação abrupta da fase da portadora, avaliada no domínio espectral, é apresentada com componentes espectrais de frequências distintas da frequência da portadora. A banda é considerada estreita se a portadora tem sua frequência muito maior do que a faixa que contém as componentes espectrais inseridas pela modulação. Entretanto, ao analisar antenas no domínio da frequência, normalmente considera-se apenas a portadora monocromática na análise da transmissão, recepção e definição de parâmetros para a antena. Isso possibilita que o sinal seja analisado na frequência da portadora através de técnicas no domínio espectral, as quais podem ser numéricas ou analíticas. Normalmente, este pequeno conteúdo espectral faz com que tais técnicas tenham um baixo custo computacional, o que fomentou o uso e o desenvolvimento de sistemas de transmissão e recepção de informações utilizando campos eletromagnéticos harmônicos [2]. Se os sinais analisados têm sua banda com largo conteúdo espectral, as técnicas no domínio da frequência apresentam algumas dificuldades. A análise exige que a solução seja encontrada em cada frequência de interesse o que dificulta muito a análise devido ao grande conteúdo na faixa de operação. Entretanto, com o crescente aumento da capacidade de processamento e memória de computadores digitais, muitos problemas de eletromagnetismo podem ser trabalhados diretamente no domínio do tempo. Em alguns deles menos operações matemáticas são requeridas quando a solução é aproximada diretamente de técnicas temporais [1]. É também notável que modelos no domínio do tempo são mais apropriados para análise de sinais banda-larga [3]. Na análise temporal, os fatores limitantes seriam apenas a largura de faixa da excitação e a discretização espacial das grandezas eletromagnéticas, necessária em técnicas numéricas de análise no domínio do tempo.

## UWB

A Dissertação de Mestrado *Caracterização Temporal de Antenas Refletoras para Faixas de frequência Ultra-Largas* defendida no Departamento de Engenharia Eletrônica da Universidade Federal de Minas Gerais em setembro de 2005 [4], relata um estudo sobre

parâmetros que caracterizam a radiação de campos por antenas refletoras diretamente no domínio do tempo. Estes parâmetros não poderiam ser definidos no domínio da frequência uma vez que os sinais utilizados como excitação tinham faixas de frequências ultra-largas. Esta classe de sinais é usualmente chamada de UWB - *Ultra-Wide Band*.

Tecnologias de transmissão digital de dados sobre uma larga faixa de frequências vêm sendo desenvolvidas nas últimas décadas. A tecnologia UWB [5] consome pouca energia, operando em baixos níveis de potência. A transmissão da informação se dá através de pulsos de curta duração e grande faixa espectral utilizando uma grande porção do espectro de frequências. As aplicações mais recentes desta tecnologia são a coleta de dados através de sensores e rastreamento e localização com elevado grau de precisão [6]. A comunicação realizada utilizando tecnologia UWB, transmite a informação de forma que o sinal não interfere com sinais tradicionais de banda estreita com portadora, ainda que na mesma faixa de frequências.

A tecnologia UWB transmite dados em bandas de frequências acima de 500 MHz e é tradicionalmente empregada como rádio pulsado [7]. A FCC e a ITU-R recentemente definiram sistemas UWB em termos da transmissão de dados através de uma antena. A banda do sinal transmitido nestes sistemas, excedem 500 MHz ou até 20 % da frequência central. Assim, sistemas baseados em sinais pulsados, podem ser classificados como sistemas UWB caso cumpram estas definições. A taxa de repetição dos pulsos pode ser baixa ou muito alta. Radares baseados em pulsos e sistemas de imageamento - sistemas que pretendem recriar uma imagem do objeto a fim de caracteriza-lo através de seus campos espalhados - tendem a utilizar tipicamente em torno de 1 a 100 milhões de pulsos por segundo, taxas de repetição considerada baixa em relação aos sistemas de comunicação que utilizem UWB. Estes por sua vez, utilizam taxas bem mais altas, tipicamente na faixa de 1 a 2 bilhões de pulsos por segundo, sendo classificados usualmente como sistemas de comunicação de curta duração de pulsos, com taxas de transmissão de alguns gigabits-por-segundo [5]. Devido ao fato dos sinais UWB ocuparem uma faixa larga de frequências, estes sinais estão imunes à atenuação por multi-percurso, ao contrário de sinais baseados

em portadora monocromática [5].

Uma diferença significativa das transmissões em ondas de rádio convencionais, ou seja, por meio de portadora monocromática, e o UWB, é que sistemas tradicionais transmitem a informação variando o nível de potência, frequência e fase da portadora senoidal. O sinal UWB carrega a informação em instantes específicos, permitindo assim o uso das técnicas de modulação temporais (polaridade, amplitude e posição dos pulsos). Um dos mais valiosos aspectos da referida tecnologia é a sua capacidade de determinar o tempo e posição entre transmissor e receptor em várias frequências. Isso ajuda a minimizar o efeito da propagação multi-percurso. Além disso, os pulsos UWB são muito curtos para um determinado instante de tempo (menores do que 60 cm para um pulso de 500 MHz e menor do que 23 cm para um pulso de 1,3 GHz de banda) então a maioria das reflexões não se sobrepõem ao pulso original (motivo pelo qual a atenuação devido ao multi-percurso ocorre em escala muito baixa). Este reduzido nível de propagação multi-percurso pode ser minimizado através de técnicas de codificação de canais [5].

Os sistemas banda-estreita tem um espectro de frequências reduzido e por isso são aproximados como independentes da frequência. Desta forma, a análise destes sistemas através de suas características, parâmetros de antenas e sinais é realizada de forma mais eficiente no domínio da frequência. Entretanto, sistemas UWB são banda-larga e, portanto, devem ser tratados como sistemas dependentes da frequência. Desta forma, nos sistemas UWB, características adicionais devem ser introduzidas a fim de considerar a radiação transiente [8]. Comparado aos sistemas tradicionais, os sistemas UWB têm ainda muitos desafios, tais como projetos de antenas, estudo da interferência, modulação e métodos de codificação. Uma das maiores dificuldades se encontra no limite de potência estipulado pela FCC, que é de  $-41,3$  dBm/MHz dentro da faixa de frequências de  $3,1 - 10,6$  GHz [7]. Como o projeto do transmissor obedece limites espectrais e o receptor deve ser capaz de coletar eficientemente a energia, o estudo do comportamento dos transmissores e receptores UWB são de suma importância. O projeto de parâmetros clássicos de antenas e circuitos de rádio frequência (potência, ganho, coeficiente de reflexão, etc)

são fortemente dependentes da frequência o que complica a análise e projeto. Desta forma, técnicas temporais para análise e projeto parecem ser mais apropriadas. Uma aproximação usual é considerar a antena como um sistema linear invariante no tempo descrito pela sua função de transferência ou resposta ao impulso [9].

### Técnicas de Análise

Diversas técnicas vêm sendo desenvolvidas nos últimos anos com o intuito de analisar antenas e sinais UWB. A análise numérica no domínio temporal tem motivado o estudo de sinais UWB, obtendo resultados satisfatórios validados através de comparações com medições experimentais [10]. O modelamento de canais UWB também tem sido foco de pesquisa [11]– [12]. Há também um esforço recente no estudo de parâmetros que permitam o modelamento dos sistemas UWB através de diversas técnicas, tais como a expansão em singularidades [8] e a teoria geométrica da difração (GTD - *Geometrical Theory of Diffraction*) [13]. A definição de parâmetros diretamente no domínio do tempo também tem sido alvo de pesquisas [4], [14].

Soluções analíticas no domínio do tempo podem ser encontradas através do uso das técnicas assintóticas como a óptica física e o rastreamento de raios no domínio do tempo, tal como o método da Abertura, pois é possível obter uma boa aproximação para a resposta transiente do campo eletromagnético espalhado por objetos de forma complexa, os quais foram excitados por pulsos, da mesma forma que se faz no domínio da frequência. A simplicidade das correntes da Óptica Física sobre uma superfície suave e a versatilidade das técnicas de rastreamento de raios como no método da Abertura no domínio da frequência são mantidas no domínio do tempo para a análise de antenas de abertura [14].

Soluções numéricas no domínio do tempo podem ser propostas através de equações diferenciais ou integrais [1]. Nos dois casos, a descrição analítica no domínio do tempo, é reduzida a um domínio finito e discretizado através de uma descrição numérica. Na formulação de equações diferenciais, as incógnitas são os valores dos campos presentes numa grade que cobre toda a região de interesse. Para a formulação de equações integrais,

as incógnitas são confinadas a uma região delimitada por uma superfície que também pode ser discretizada. Em problemas de espalhamento, nos quais o espaço é usualmente ilimitado, as equações diferenciais requerem que a grade de discretização seja terminada em uma distância razoável do objeto espalhador.

O método largamente utilizado e difundido para resolver equações diferenciais no domínio do tempo, é o Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (*Finite Difference Time Domain* - FDTD), proposto inicialmente por Yee em 1966 [15]. Desde então, o método tem sido continuamente aperfeiçoado, principalmente, a partir do início da década de 90, quando começaram a surgir uma grande quantidade de publicações na área. Os códigos mais modernos que implementam o método FDTD possuem características que os tornam capazes de analisar, com grande precisão, uma infinidade de problemas que envolvam a propagação de ondas eletromagnéticas.

### **Altura Efetiva**

Tradicionalmente, parâmetros de antenas, tais como ganho e diretividade, são definidos apenas na abordagem de banda estreita [2]. Assim sendo, esta representação não é adequada para descrever a antena no domínio do tempo em sinais banda larga. A altura efetiva da antena, no entanto, é descrita a partir do conceito de sinais ao invés do conceito de potência, permitindo a definição de parâmetros, usualmente, utilizados no domínio da frequência, também no domínio do tempo [4], [14].

A altura efetiva de uma antena é em sua essência, uma função de transferência (resposta ao impulso) entre o sinal de entrada e o campo radiado. A função de transferência pode ser descrita através de formulação temporal ou espectral. Entretanto, é possível representá-la de forma unificada no tempo e frequência. O Método de Expansão em Singularidades (*Singularity Expansion Method* - SEM) pode ser combinado com a descrição da altura efetiva da antena, possibilitando que uma representação mínima unificada entre os domínios do tempo e frequência seja obtida para uma antena [16]. O SEM não é exatamente um método numérico ou formulação analítica, mas sim uma representação

em termos de singularidades no plano complexo,  $s \in \mathbb{C}$ , e tem um significado físico bem definido. Os mesmos grupos de parâmetros, singularidades no plano  $s$  que são os pólos e resíduos do sistema, podem representar as características da antena no domínio do tempo ou no domínio da frequência quando um dos modelos baseados na altura efetiva descrito através da representação do SEM é utilizado.

## SEM

O SEM surgiu da necessidade de se analisar campos espalhados por objetos diversos ou sinais radiados por antenas excitadas por pulsos estreitos. Na realidade, estudos sobre a interação de campos eletromagnéticos com estruturas localizadas no espaço livre ou em outro meio, e a forma como estes campos se espalham têm sido realizados há várias décadas a partir de diferentes abordagens. Entretanto, se excitarmos uma determinada geometria com um campo com conteúdo espectral amplo, tal como um pulso estreito, as grandezas eletromagnéticas como correntes, densidade de cargas e campos espalhados produzirão resultados com uma complexidade significativamente maior, no domínio espectral, do que se esta mesma geometria fosse excitada com um campo que tenha comportamento senoidal [16].

O SEM pode ser utilizado para desenvolver modelos em sistemas banda larga, não necessariamente pulsados. A resposta transitória em espalhamento de campos eletromagnéticos foi alvo de pesquisa nos últimos anos. O objetivo é modelar e analisar sinais e antenas em que transitórios tenham contribuição significativa. Em sistemas de comunicação digital de dados, as altas taxas de transmissão inserem na transmissão da informação uma significativa resposta transitória. Além disso, as aplicações utilizando pulsos estreitos tais como sensoriamento remoto e identificação de alvos, e mais recentemente, comunicação digital de dados através de pulsos, também tem sido alvo de pesquisa na análise da resposta transitória [5]. Na prática, os campos gerados por antenas em sistemas de comunicação com elevada taxa de transmissão de dados têm formas de onda pulsadas, moduladas em frequência, fase, amplitude ou combinações destas. Assim, a considera-

ção de fontes monocromáticas tem alcance limitado, posto que fenômenos transitórios tornam-se significativos. Estes transientes afetam as características dos campos radiados pelas antenas, podendo causar distorções significativas nos seus diagramas de radiação. Além disso, existe o interesse nos efeitos de pulsos eletromagnéticos em sistemas radiantes complexos como aviões e espaçonaves e a caracterização de canais móveis através da análise da resposta a excitações pulsadas.

O SEM tem origem nas observações experimentais em simulações com EMP (*Eletromagnetic Pulse*) [16] que mostram que a resposta, apesar de complexa, tem uma característica muito peculiar, que é a presença de uma ou mais senóides exponencialmente amortecidas. Em alguns casos, partes da resposta temporal podem ter o mesmo formato da onda incidente, ou talvez de sua integral ou sua derivada. Esta característica da resposta pode ser utilizada para modelar espalhamento de campos com conteúdo espectral amplo causados por uma excitação banda-larga arbitrária.

As características da resposta às excitações banda-larga, podem ser calculadas diretamente a partir da resposta eletromagnética de uma dada estrutura espalhadora. Algumas características são associadas com as características do objeto. Outras características são associadas com a forma de onda do campo incidente. E, ainda, existem características associadas à distribuição dos campos incidentes, tais como ângulo de incidência e polarização. Assim sendo, o problema pode ser decomposto em vários sub-problemas que dependem dos diferentes conjuntos de variáveis.

A extração de singularidades foi implementada em [10] através de dados experimentais, ao invés de utilizar o FDTD ou o método da Abertura. Trabalhos recentes têm explorado a potencialidade do SEM estimando diretamente correntes e campos radiados por antenas [17]. A desvantagem desta abordagem é que os parâmetros da antena não podem ser calculados (o que pode ser feito utilizando altura efetiva), além de que perde-se a flexibilidade ao se mudar a excitação da antena. A análise de campos no domínio do tempo para excitações em várias frequências, se divide na análise do *Early Time* que representa a reflexão direta do campo na antena e do *Late Time* que representa o campo

gerado pelas oscilações das singularidades após o *Early Time* finalizar. Dentre os métodos de análise do *Early Time* de antenas refletoras disponíveis na literatura, destacam-se o método da Óptica Física e o método da Abertura. O método da Abertura foi utilizado em [18] para encontrar os campos analíticos para o campo *Early Time* radiado por uma antena parabólica. Em [19], o campo também foi obtido através da Óptica Física no Domínio do Tempo (TDPO - *Time-Domain Physical Optics*) para uma antena parabólica. Em ambos os casos, a resposta para uma excitação em degrau foi obtida e, assim, os campos impulsivos radiados por estas antenas. Estes campos, são referentes à resposta *Early Time* da antena, não contemplando em sua formulação o *Late Time*.

## Objetivo

Neste trabalho propõe-se o uso do SEM para estimar de forma unificada a altura efetiva de antenas. O método para cálculo das singularidades, extraídas diretamente no domínio do tempo, utiliza os campos e correntes calculados através do FDTD para antenas de fios e o método da Abertura (traçado de raios) para antenas refletoras. Para antenas refletoras, no caso o parabolóide, este trabalho propõe expandir os casos estudados em [18] e [19] porém utilizando o SEM para encontrar suas singularidades, uma vez que a resposta impulsional, necessária à formulação do SEM, pode ser determinada através de técnicas numéricas ou analíticas. A resposta *Late Time* para antenas de fio e refletoras será calculada através da obtenção das singularidades da antena obtida por meio da resposta *Early Time*, ou seja, a resposta impulsional. Em antenas de fio, a resposta impulsional analítica pode ser obtida para casos simples. Porém, casos mais complexos exigem uma técnica numérica, sendo este o motivo da escolha do FDTD. Em antenas refletoras, embora o método da Óptica Física produza resultados mais precisos, sua formulação analítica é significativamente mais complexa que a formulação do método da Abertura. Desta maneira, a formulação discutida e analisada nesta contribuição baseia-se no método da Abertura. Em [18], o método da Abertura é aplicado utilizando uma fonte banda larga para radiação dos campos impulsivos. Esta fonte é chamada *fonte de Huygens* e é utilizada no projeto



de antenas IRA (*impulse radiating antenna*) e é aplicada majoritariamente em radares pulsados. A fonte, usualmente, utilizada em antenas refletoras de comunicação é a fonte *cosseno elevado*. Então, é necessário adaptar a resposta impulsional obtida em [18] para que os resultados sejam mais abrangentes, no sentido de caracterizar uma maior gama de antenas. A contribuição original deste trabalho se resume em extrair as singularidades de antenas refletoras e de fio e posteriormente utilizá-las, através do SEM, para construção da altura efetiva. Esta por sua vez é utilizada para encontrar campos distantes e definir parâmetros de antenas de tal maneira que a formulação seja intercambiável entre os domínios do tempo e frequência de forma simples.

### **Organização do Texto**

O Capítulo 2 aborda a caracterização de antenas utilizando a altura efetiva de uma antena transmissora. Lançando fundamentos sobre a altura efetiva no domínio da frequência e do tempo, é possível extrair características importantes da antena. Ainda neste capítulo um resumo sobre o FDTD e o método da Abertura são apresentados com o foco nos casos estudados, que tem como objetivo definir parâmetros que serão utilizados na formulação da altura efetiva. Em seguida, no Capítulo 3 é apresentada a expansão SEM que será utilizada para expressar parâmetros de forma unificada entre tempo e frequência. Ainda neste capítulo serão abordadas técnicas numéricas para extração das singularidades da antena, a partir dos campos e correntes impulsional fornecidos pelo FDTD e pelo método da Abertura. Tendo abordado estas bases fundamentais para este trabalho, o prosseguimento dado é descrito no Capítulo 4 que contém o desenvolvimento dos temas para produzir resultados simulados. A aplicação direta das técnicas em alguns casos permite maior conhecimento e entendimento da proposição do trabalho. Por fim, o Capítulo 5 resume algumas conclusões e propostas de continuidade.

## Capítulo 2

# CARACTERIZAÇÃO DE ANTENAS - FORMULAÇÃO DA ALTURA EFETIVA

### 2.1 Introdução

Um objeto irradiado por ondas eletromagnéticas pode ser utilizado para coletar tais ondas e extrair potência destas. Este objeto típico chamado antena, pode ser analisado através de grandezas usadas para descrever suas características de recepção.

Na análise de problemas de radiação, o procedimento usual é especificar as fontes e então calcular os campos radiados pelas fontes. O problema também pode ser definido através da especificação dos campos radiados, nos quais é requerido encontrar as fontes. É uma prática comum no procedimento de análise, introduzir funções auxiliares conhecidas como *potenciais vetores* que ajudam na solução dos problemas.

#### Equações de Maxwell

As equações de Maxwell expressas contém informações suficientes para analisar materiais lineares e isotrópicos e ter seu comportamento completamente especificado em um

dado espaço de tempo. Estas são a base para a formulação da altura efetiva. Em sua forma diferencial no domínio do tempo as equações de Maxwell podem ser escritas como [20]:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t), \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_e(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \rho_m(\mathbf{r}, t). \quad (2.4)$$

e as equações constitutivas no domínio do tempo são:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}, t) * \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r}, t) * \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (2.6)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sigma_e(\mathbf{r}, t) * \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.7)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \sigma_m(\mathbf{r}, t) * \mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \quad (2.8)$$

No domínio  $s$  as equações de Maxwell são:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, s) = -s\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, s) - \mathbf{M}(\mathbf{r}, s), \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, s) = s\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, s) + \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, s), \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, s) = \rho_e(\mathbf{r}, s), \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, s) = \rho_m(\mathbf{r}, s), \quad (2.12)$$

e as equações constitutivas:

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, s) = \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, s)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, s), \quad (2.13)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, s) = \tilde{\mu}(\mathbf{r}, s)\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, s), \quad (2.14)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, s) = \tilde{\sigma}_e(\mathbf{r}, s)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, s). \quad (2.15)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, s) = \tilde{\sigma}_m(\mathbf{r}, s)\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, s). \quad (2.16)$$

Se o sistema é linear e invariante no tempo, as convoluções temporais acima representadas pelo símbolo  $*$  se transformam em produtos quando

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon(\mathbf{r}), & \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, s) &= \varepsilon(\mathbf{r}); \\ \mu(\mathbf{r}, t) &= \mu(\mathbf{r}), & \tilde{\mu}(\mathbf{r}, s) &= \mu(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

As Equações (2.17) representam meios não dispersivos, ou seja, meios em que não há alteração da velocidade de fase das ondas de diferentes frequências em sua propagação (atraso de tempo é constante).

De acordo com a notação usual,  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico,  $\mathbf{H}$  é o campo magnético,  $\mathbf{D}$  é a densidade de fluxo elétrico,  $\mathbf{B}$  é a densidade de fluxo magnético,  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente elétrica,  $\mathbf{M}$  é a densidade de corrente magnética,  $\rho_e$  é a densidade de carga elétrica,  $\rho_m$  é a densidade de carga magnética,  $\sigma_e$  é a condutividade elétrica,  $\sigma_m$  é a condutividade magnética,  $\varepsilon$  é a permissividade elétrica e  $\mu$  é a permeabilidade magnética. A condutividade magnética e a densidade de carga magnética são obtidas através da dualidade nas equações de Maxwell e são utilizadas para considerar as perdas magnéticas. O sinal  $\sim$  reforça que a grandeza considerada está representada no domínio  $s$ .

### Altura Efetiva

A Figura 2.1 mostra um dipolo alinhado com o eixo  $\hat{\mathbf{z}}$  e a convenção adotada para os vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  que representam a coordenada do observador e a coordenada da fonte, respectivamente. Observando a figura, é possível inferir que existe algum tipo de relacionamento entre o campo incidente na antena e a tensão induzida em seus terminais. Na notação usual,  $\tilde{\mathbf{E}}_i$  é o campo elétrico incidente e  $V_{oc}$  é a tensão induzida pelo campo incidente quando os terminais estão em aberto.

De fato, a análise dimensional revela uma relação direta entre a tensão induzida (volts) e o campo elétrico incidente (volts por metro), o que indica que, necessariamente, alguma

grandeza em metros multiplicada pelo campo elétrico incidente, fornecerá a tensão induzida nos terminais abertos da antena. Esta grandeza é denominada *Vetor Altura Efetiva*, também chamado *Vetor Altura Equivalente* por relacionar a altura de uma antena dipolo com o campo incidente e a tensão induzida no mesmo.

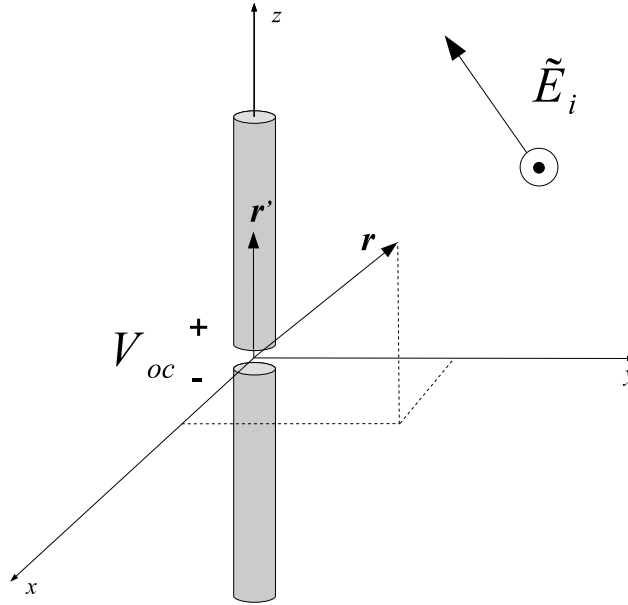


Figura 2.1: Antena dipolo com incidência de campo gerando uma tensão em seus terminais.

Denominando altura efetiva como  $\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r}, s)$  tem-se que [21]

$$\tilde{V}_{oc}(s) = \tilde{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}, s) \cdot \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r}, s), \quad (2.18)$$

em que em que o operador  $\cdot$  se refere ao produto escalar entre dois vetores. O resultado inferido pela Equação (2.18) pode ser obtido de maneira mais formal, e com maior embasamento matemático. Supondo uma carga  $\tilde{Z}_L(s)$  conectada aos terminais de uma antena com impedância de entrada  $\tilde{Z}_{in}(s)$ , é possível aplicar o teorema de Thévenin para equacionar a tensão sobre a carga. A impedância de Thévenin é a impedância vista nos

terminais da carga, após remover-la do circuito, quando as fontes estão desativadas (fontes de tensão curto-circuitadas e fontes de corrente em aberto). Portanto, a impedância de Thévenin será a impedância de entrada da antena  $\tilde{Z}_{in}(s)$ . A tensão de Thévenin é a tensão nos terminais da carga quando esta é retirada do circuito. Assim, a tensão de Thévenin é a tensão  $\tilde{V}_{oc}(s)$ , pois não haverá queda de tensão na impedância de entrada  $\tilde{Z}_{in}(s)$  já que a corrente será nula. Por dualidade, é possível encontrar o equivalente de Norton. A impedância de Norton é a impedância vista nos terminais da carga, quando esta é retirada do circuito. A corrente de Norton  $\tilde{I}_{sc}(s)$  é a corrente quando no lugar da carga é colocado um curto-circuito.  $\tilde{I}_{sc}(s)$  pode ser também encontrada através da divisão da tensão de Thévenin pela impedância de Thévenin (que é a mesma de Norton). A Figura 2.2 ilustra o circuito equivalente para Thévenin e Norton.

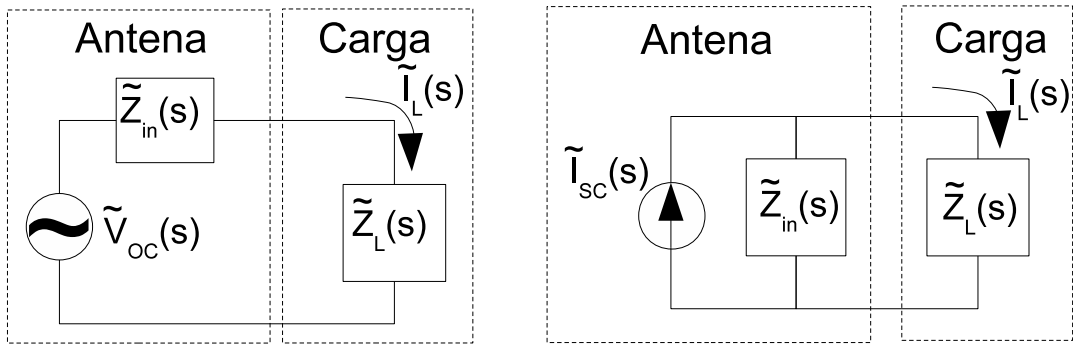


Figura 2.2: Antena dipolo com incidência de campo gerando uma tensão em seus terminais: representação através de Thévenin (esquerda) e Norton (direita).

As equações referentes aos circuitos na Figura 2.2 podem ser obtidas facilmente utilizando teoria de circuitos. A corrente  $\tilde{I}_L(s)$  no equivalente de Thévenin, pode ser obtida através da Lei de Ohm. A corrente  $\tilde{I}_L(s)$  no equivalente de Norton, pode ser obtida através da fórmula do divisor de corrente.

$$\tilde{I}_L(s) = \frac{\tilde{V}_{oc}(s)}{\tilde{Z}_{in}(s) + \tilde{Z}_L(s)} \quad (2.19)$$

$$\tilde{I}_L(s) = \frac{\tilde{Z}_{in}(s)}{\tilde{Z}_{in}(s) + \tilde{Z}_L(s)} \tilde{I}_{sc}(s) \quad (2.20)$$

Igualando o  $\tilde{I}_L(s)$  nas Equações (2.19) e (2.20), é possível concluir que:

$$\tilde{V}_{oc}(s) = \tilde{Z}_{in}(s) \tilde{I}_{sc}(s). \quad (2.21)$$

O teorema da reciprocidade diz que, em um sistema linear e isotrópico, se uma determinada fonte causa um certo efeito que pode ser medido em outra parte do sistema, e em um instante posterior esta fonte for trocada de posição com o instrumento de medição, as medidas nos dois casos serão idênticas [2]. Utilizando a formulação para campos distantes e campo incidente, e o teorema da reciprocidade, é possível provar que, como descrito em [22], após algumas manipulações matemáticas, a Equação (2.21) equivale à Equação (2.18), ou seja,

$$\tilde{Z}_{in}(s) \tilde{I}_{sc}(s) = \tilde{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}, s) \cdot \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r}, s). \quad (2.22)$$

Assim sendo, a tensão induzida  $\tilde{V}_{oc}(s)$  pode ser entendida como a tensão induzida em uma antena linear de tamanho  $l = h$  quando  $\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r}, s)$  e  $\tilde{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}, s)$  estão linearmente polarizados [23]. A altura efetiva é definida para campos distantes uma vez que o campo incidente é considerado uma onda plana. Desta maneira, é possível através do desenvolvimento expresso em (2.22), formular a altura efetiva através do campo incidente e tensão induzida.

A Equação (2.21) relaciona a tensão induzida com o campo incidente. Por reciprocidade, é possível relacionar uma tensão arbitrária de excitação na antena e o campo radiado por esta. Na realidade, a definição usual de altura efetiva, é a definição de Sinclair que é realizada para a antena transmissora [21]. Sua sistematização se dá observando o campo distante radiado, na qual flui em sua entrada uma corrente  $\tilde{I}_{in}(s)$  devido à tensão excitação.

O campo distante radiado por uma antena no espaço livre, considerando que os condutores são elétricos perfeitos, pode ser matematicamente representado através da *Equação*

*Integral do Campo Distante.* Esta equação é determinada a partir das equações de Maxwell e da solução da equação de onda [2]:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, s) \simeq -\frac{s\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-sr/c}}{r} \iiint_{V'} \left\{ [\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', s) - (\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', s) \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}] + \frac{1}{\eta_0} \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{r}', s) \times \hat{\mathbf{r}} \right\} e^{(s/c)\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} dV', \quad (2.23)$$

em que  $r = |\mathbf{r}|$  e  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ . A constante  $\eta_0$  é a *Impedância Intrínseca* do vácuo e é dada por  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  em que  $\mu_0$  e  $\epsilon_0$  são a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do vácuo, respectivamente. Define-se o vetor de radiação como

$$\tilde{\Psi}_{\perp}(\mathbf{r}, s) = \iiint_{V'} \left\{ [\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', s) - (\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', s) \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}] + \frac{1}{\eta_0} \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{r}', s) \times \hat{\mathbf{r}} \right\} e^{(s/c)\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} dV', \quad (2.24)$$

em que a dimensão física do vetor  $\tilde{\Psi}_{\perp}(\mathbf{r}, s)$  é ampère.metros (*A.m*). O símbolo  $\perp$  indica que as componentes em  $\hat{\mathbf{r}}$  não estão presentes, ou seja, só há componentes perpendiculares à direção de propagação. Tal afirmação pode ser confirmada observando o integrando da Equação (2.24) e considerando que o campo é distante. A definição de Sinclair para a altura efetiva é, então, dada por

$$\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r}, s) = -\frac{\tilde{\Psi}_{\perp}(\mathbf{r}, s)}{\tilde{I}_{in}(s)}, \quad (2.25)$$

em que a corrente de entrada na antena transmissora  $\tilde{I}_{in}(s)$  proporciona a dimensão de metros à altura efetiva. Usualmente, o sinal negativo na Equação (2.25) é omitido da definição [22].

A observação cautelosa da Equação (2.25) permite inferir que a altura efetiva é uma característica da antena quando considerado o conjunto da antena como espalhador e excitação (fonte). Uma vez determinada a altura efetiva de uma antena, a tensão em seus terminais pode ser facilmente encontrada através da Equação (2.25) quando um campo arbitrário incide sobre a mesma.

A definição de  $\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r}, s)$  é motivada devido ao caso de uma antena dipolo curto alinhada ao eixo  $z$  [22]. Este dipolo é definido como muito pequeno e muito fino, ou seja,  $l \ll \lambda$  e



$a \ll l$ , sendo  $l$  o comprimento do dipolo e  $a$  seu raio. A distribuição espacial da corrente neste dipolo pode ser considerada constante, ou seja,

$$\tilde{\mathbf{I}}(z', s) = I_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.26)$$

em que  $I_0$  é uma constante,  $z'$  é a coordenada da fonte e  $\hat{\mathbf{z}}$  é o vetor unitário nesta direção, definido através de coordenadas cartesianas.

O domínio de integração  $V'$ , no caso do dipolo, se reduz à integração em uma linha orientada na direção  $z$ . Desta forma, a densidade de corrente  $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', s)$  se reduz à corrente no dipolo orientada na direção  $z$ , ou seja,  $\tilde{\mathbf{I}}(z', s)$ . O campo distante radiado por este dipolo pode ser encontrado substituindo a Equação (2.26) na Equação (2.23). A única componente de campo elétrico será a componente  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , segundo coordenadas esféricas:

$$\tilde{E}_\theta(\mathbf{r}, s) \simeq \frac{s\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-sr/c}}{r} I_0 l \sin \theta. \quad (2.27)$$

A Equação (2.23) pode ser reescrita como

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, s) \simeq -\frac{s\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-sr/c}}{r} \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_\perp(\mathbf{r}, s), \quad (2.28)$$

que pode ser escrita em função da altura efetiva. Portanto, substitui-se a Equação (2.25) na Equação (2.23) e obtém-se

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, s) \simeq \frac{s\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-sr/c}}{r} \tilde{I}_{in}(s) \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r}, s). \quad (2.29)$$

A comparação direta entre as Equações (2.27) e (2.29) permite a determinação de  $\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r}, s)$ :

$$\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r}, s) = l \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.30)$$

em que  $\theta$  é uma coordenada da representação no sistema esférico. Este resultado pode ser obtido diretamente da Equação (2.25). Para o caso mais geral de uma antena dipolo orientada no eixo  $z$ , com uma corrente arbitrária  $\tilde{\mathbf{I}}(z', s)$ , através da Equação (2.25) obtém-se [22]

$$\tilde{\mathbf{h}}_{\theta}(\mathbf{r}, s) = \sin \theta \frac{1}{\tilde{I}_{in}(s)} \int_{-l/2}^{l/2} \tilde{\mathbf{I}}(z', s) e^{(s/c)z' \cos \theta} dz'. \quad (2.31)$$

## 2.2 Altura Efetiva no Domínio do Tempo

A formulação de altura efetiva pode ser estendida para o domínio do tempo. O campo distante pode ser encontrado através da distribuição de corrente no domínio do tempo e, por meio desta, a altura efetiva é obtida.

### 2.2.1 Radiação de Fontes Impressas

A Figura 2.1 mostra uma antena dipolo que pode ser operada transmitindo ou recebendo um determinado sinal. Partindo do princípio de que esta (ou qualquer outra antena, para esta sistematização) está transmitindo, é possível determinar os campos espalhados diretamente no domínio do tempo utilizando uma formulação matemática similar à qual aplicada no domínio da frequência.

Suponha que a corrente  $I^+(t)$  que incide nos terminais da antena seja um pulso de curta cuja duração é  $T$  segundos. A Figura 2.3 ilustra uma fonte geradora deste pulso estreito conectada à uma linha de transmissão que, por sua vez, está conectada à uma antena transmissora.

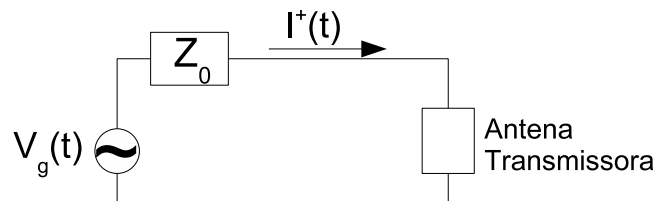


Figura 2.3: Circuito de alimentação de uma antena radiando

A corrente se propaga da fonte geradora até a antena. Neste caso, as correntes reversas

geradas pelas reflexões na antena são desconsideradas. É necessário abordar alguns pontos a fim de desprezar as reflexões na antena. A linha de transmissão entre fonte e antena é uniforme, com impedância característica  $Z_0$ , independente da frequência. A linha está perfeitamente casada com a fonte, o que faz com que a impedância da fonte seja puramente resistiva, e a resistência da fonte igual à impedância característica da linha ( $R_g = Z_0$ ). Através do circuito mostrado na Figura 2.3 e das considerações feitas, é possível determinar a corrente  $I^+(t)$  [14]:

$$I^+(t) = \frac{V_g(t - t_g)}{2Z_0}, \quad (2.32)$$

em que  $t_g$  é o atraso de tempo ao longo da linha de transmissão. A presença da linha de transmissão, implica que, se não houverem casamentos de impedâncias entre a fonte e a linha de transmissão, e entre a esta e a antena, haverá múltiplas reflexões do pulso. Se houver casamento das impedâncias, o circuito se comporta como uma fonte  $V_g(t)$  alimentando duas impedâncias,  $Z_0$ , iguais e em série. Entretanto, elementos casadores de impedâncias, são um fator limitante da análise devido às suas características de construção, o que limita a sua resposta em frequência. Com o objetivo de simplificar a análise, na Equação (2.32), as reflexões, bem como as radiações resultantes da mesma, serão desconsideradas. Tal fato deixa implícito que a antena está diretamente conectada à linha de transmissão. Ainda é possível maior simplificação se a fonte  $V_g(t)$  for diretamente conectada à antena, sem o uso de linhas de transmissão. Neste caso, o atraso  $t_g$  não ocorreria e a onda incidente na antena seria o próprio  $V_g(t)$ .

Sendo  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  as densidades de correntes impressas na superfície de uma antena arbitrária, radiando no espaço livre, então os potenciais vetores elétricos e magnéticos, no domínio do tempo, são dados por [14]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.33)$$

e

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \int_{V'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV', \quad (2.34)$$

em que  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  são as coordenadas do observador da fonte, respectivamente, e  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$  é a distância entre o ponto de observação e a fonte. O termo  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$  é a distância entre a fonte e o observador dividido pela velocidade de propagação no meio. Esta divisão tem unidade de tempo e como a velocidade de propagação é constante, este termo representa o atraso da propagação da onda (tempo que a onda leva para se propagar da fonte ao observador).

O foco do estudo é a análise na região de campo distante. Assim uma expansão apropriada deve ser realizada para maior simplificação das expressões em (2.33) e (2.34):

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \simeq r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r} [1 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')^2] + \dots, \quad (2.35)$$

em que  $r' = |\mathbf{r}'|$  e  $\hat{\mathbf{r}}' = \mathbf{r}'/r'$ .

A expansão obtida em (2.35) mostra que o atraso na propagação, referente ao termo  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$ , pode ser explicitado em vários termos individuais. O último termo da Equação (2.35), fornecerá o máximo atraso quando  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'$  for nulo, e a coordenada  $r'$  for máxima. Definindo  $L$  como o tamanho máximo da antena, o atraso máximo do último termo em (2.35) será  $L^2/2r$  dividido pela velocidade de propagação. O tempo decorrido entre o centro do pulso e sua borda, é de  $T/2$ . Se o atraso máximo do último termo em (2.35) for muito menor do que este tempo, então comparando estes termos tem-se:

$$\frac{L^2}{r} \ll cT, \quad (2.36)$$

em que  $cT$  pode ser entendido também como o largura do pulso. Se esta condição for satisfeita, então o atraso máximo do último termo em (2.35) será desprezível. As Equações (2.33) e (2.34) tornam-se então:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \mu_0 \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - [\frac{r}{c} - \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}])}{4\pi r} dV' \quad (2.37)$$

e

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \simeq \epsilon \int_{V'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}', t - [\frac{r}{c} - \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}])}{4\pi r} dV', \quad (2.38)$$

em que o termo  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$  é desprezado no denominador do integrando devido à pequena contribuição para a amplitude, porém é considerado no argumento das correntes, pois o atraso devido ao mesmo é significativo. Os potenciais vetores, no domínio do tempo, podem ser reescritos de forma apropriada:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r} \bar{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{r}}, \tau), \quad \tau = t - \frac{r}{c}, \quad (2.39)$$

e

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{\epsilon}{4\pi r} \bar{\mathbf{M}}(\hat{\mathbf{r}}, \tau), \quad \tau = t - \frac{r}{c}, \quad (2.40)$$

em que

$$\bar{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{r}}, \tau) = \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}) dV' \quad (2.41)$$

e

$$\bar{\mathbf{M}}(\hat{\mathbf{r}}, \tau) = \int_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}', \tau + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}) dV'. \quad (2.42)$$

A operação realizada em (2.41) e em (2.42) é denominada *Slant Stack Transform* (SST) [14]. O tempo  $\tau$  é usualmente definido como o atraso de propagação da onda. O termo  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'/c$  é de pequena dimensão, porém significativo na integração das correntes num determinado volume, já que esta parcela varia com a posição do observador e as coordenadas da fonte.

Uma aproximação semelhante se dá no domínio da frequência quando se expande  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Este termo tem pequena dimensão, mas ao aparecer no argumento de uma função exponencial, sua contribuição não pode ser desprezada. O termo  $r$ , para a análise no domínio da frequência, é significativo no cálculo da amplitude dos campos espalhados distantes e o termo  $\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}$  é significativo no cálculo da fase dos campos.

### 2.2.2 Altura Efetiva de uma Antena Transmissora

O campo elétrico distante radiado pode ser determinado através dos potenciais vetores, os quais são representados através das Equações (2.37) e (2.38) [20], ou seja,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \simeq -\frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}, t) - \eta_0 \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \}. \quad (2.43)$$

Consequentemente, pode-se escrever o campo elétrico distante na forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V'} \left[ \mathbf{J}_{\perp}(\mathbf{r}', \tau + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}) + \frac{1}{\eta_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}', \tau + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}) \times \hat{\mathbf{r}} \right] dV'. \quad (2.44)$$

Todo sistema linear e invariante no tempo pode ser caracterizado pela sua resposta impulsional, que é a resposta a uma excitação com comportamento temporal na forma de uma função delta de Dirac,  $\delta(t)$ . No caso de problemas de radiação no domínio do tempo, a resposta impulsional se deve a excitações na forma  $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{J}^{\delta}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\delta(t)$  e  $\mathbf{M}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{M}^{\delta}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{M}_0(\mathbf{r}')\delta(t)$ . Conhecendo-se a resposta impulsional em um problema de radiação eletromagnética, é determinada a resposta à uma excitação de comportamento temporal arbitrário. Se a resposta impulsional é representada pelo campo elétrico  $\mathbf{E}^{\delta}(\mathbf{r}, t)$ , a resposta à uma excitação com comportamento temporal arbitrário  $f(t)$ , com fontes  $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{J}_0(\mathbf{r}')f(t)$  e  $\mathbf{M}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{M}_0(\mathbf{r}')f(t)$ , é determinada pela integral de convolução

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^{\delta}(\mathbf{r}, t') f(t - t') dt', \quad (2.45)$$

a qual pode ser representada na forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{\delta}(\mathbf{r}, t) * f(t). \quad (2.46)$$

De maneira semelhante ao procedimento realizado no domínio da frequência para definir a altura efetiva, pode-se comparar as Equações (2.44) e (2.46), sabendo que a antena é excitada pela corrente  $I^+(t)$  [14]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r} [\mathbf{h}^t(\hat{\mathbf{r}}, \tau) * I^+(\tau)], \quad \tau = t - \frac{r}{c}, \quad (2.47)$$

ou de forma geral, para uma excitação arbitrária  $f(t)$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r} [\mathbf{h}^t(\hat{\mathbf{r}}, \tau) * f(\tau)], \quad \tau = t - \frac{r}{c}, \quad (2.48)$$

em que

$$\mathbf{h}^t(\hat{\mathbf{r}}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V'} \left[ \mathbf{J}_{\perp}^{\delta}(\mathbf{r}', \tau + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}) + \frac{1}{\eta_0} \mathbf{M}^{\delta}(\mathbf{r}', \tau + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}) \times \hat{\mathbf{r}} \right] dV' \quad (2.49)$$

em que o índice  $t$  em  $\mathbf{h}^t$  indica que a altura efetiva se refere à antena transmissora.

Um desenvolvimento similar pode ser realizado para calcular a altura efetiva de uma antena receptora. Supõe-se que uma antena operando como transmissora, radia um campo eletromagnético que é coletado por uma antena idêntica, porém operando como receptora. Para tal, considera-se uma carga perfeitamente casada com a impedância da linha e que o campo incidente seja impulsional. Tanto o meio, quanto as antenas são recíprocos e desta forma, a partir da aplicação do teorema da reciprocidade nas correntes e nos campos da antena receptora e transmissora como discutido em [14], é possível provar que

$$\frac{1}{2} \mathbf{h}^t(\hat{\mathbf{r}}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{h}^r(\hat{\mathbf{r}}, t), \quad (2.50)$$

em que  $\mathbf{h}^r(\hat{\mathbf{r}}, t)$  representa a altura efetiva de uma antena receptora. Desta maneira, tanto a altura efetiva da antena operando como transmissora ou como receptora, podem ser determinados pela formulação apresentada.

### 2.2.3 Diagrama de Radiação

Existem, atualmente, diversas formas de se caracterizar uma antena. Sendo a antena um dispositivo para transmissão ou recepção de sinais de comunicação, que usa a radiação de energia eletromagnética para realizar a transmissão da informação, uma proposição plausível para caracterizar essa antena seria analisar as suas características de radiação.

No desenvolvimento inicial das aplicações em antenas, a utilização de portadoras para transmissão e recepção dos sinais conduziu pesquisadores a desenvolver técnicas que fos-

sem capazes de estimar parâmetros que caracterizam a antena, baseando-se numa estreita faixa de frequências, tendo a portadora como frequência central. Desta maneira, os parâmetros foram definidos no domínio da frequência. No entanto, com surgimento de sinais pulsados, que possuem conteúdo espectral amplo, estes parâmetros não podem ser utilizados para caracterizar este tipo de sinal e, conseqüentemente, necessitam serem redefinidos [4].

Seguindo o mesmo desenvolvimento realizado no domínio da frequência para definir os parâmetros que caracterizavam a antena, podemos supor que a melhor forma de caracterizar uma determinada antena seria analisando o espalhamento de sua energia de acordo com o ponto de observação. Assim, por analogia, pode-se então definir parâmetros como o diagrama de radiação, no domínio do tempo, baseados na energia dos campos radiados e, portanto, se faz necessário utilizar alguma medida desta energia.

Uma forma de se quantificar a energia contida em um sinal determinístico é através de uma ferramenta matemática denominada *norma do sinal*, que no caso de sistemas dinâmicos, nos quais os sinais variam no tempo são também denominadas *Normas Temporais*. Estas podem ser definidas através da *2-norm*, que é uma norma definida a partir da energia contida em um determinado sinal, e da *∞-norm*, que é uma norma definida a partir do valor absoluto de pico do sinal. Como queremos quantificar a energia dos campos espalhados a fim de estimar parâmetros no domínio do tempo, a norma Euclidiana de energia ou a *2-norm* é mais apropriada para estas definições. Ela é definida como em [24], [25]:

$$\|f(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}, \quad (2.51)$$

sendo  $f(t) \in \mathbb{L}^2$  (espaço de Lebesgue). Sabendo que no domínio do tempo, a representação dos campos, excitações e fontes pertence ao domínio dos números reais, a Equação (2.51) pode ser reescrita convenientemente da seguinte forma:

$$\|f(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t - \xi)dt} \Big|_{\xi=0}. \quad (2.52)$$

em que a norma da função  $f(t)$  foi propositalmente escrita na forma da Equação (2.52)



com o objetivo de se escrever esta norma como a autocorrelação da função  $f(t)$ . Da definição da autocorrelação de um sinal, temos que [24], [26]:

$$\mathcal{R}_f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t - \xi)dt, \quad (2.53)$$

Então, observamos que a norma de energia do sinal poderá ser escrita em função da autocorrelação do mesmo, ou seja,

$$\|f(t)\|_2^2 = \mathcal{R}_f(\xi)|_{\xi=0} = \mathcal{R}_f(0). \quad (2.54)$$

Assim, podemos definir os parâmetros temporais da antena como função da autocorrelação de seu campo espalhado, visto que a autocorrelação de um sinal também é uma medida de energia do mesmo.

A forma como a antena espalha a energia pode ser analisada através do diagrama de radiação. A característica de radiação analisada pode ser a potência, densidade de potência, energia ou até mesmo os campos elétricos e magnéticos. Usualmente, o diagrama de radiação é na realidade a intensidade de radiação [2] normalizado pelo seu máximo [27].

O diagrama de radiação de uma antena é uma representação gráfica das características de radiação da antena como função de coordenadas espaciais, e é determinado na região de campo distante sendo representado como uma função das coordenadas direcionais, ou seja, independente da coordenada radial (analisa-se o sistema para a coordenada radial constante).

As formulações para o diagrama de radiação presentes na literatura, tal como a principal definição que é baseada na intensidade de radiação, são para análise de antenas no domínio da frequência. Ao tentar realizar a mesma definição no domínio do tempo, através de uma transformação inversa de Fourier da intensidade de radiação, um problema aparece. Os campos eletromagnéticos pulsados têm seu valor instantâneo determinado em função do tempo. O diagrama de radiação temporal pretende caracterizar a antena e, assim sendo, o mesmo tem que ser independente do tempo. Se utilizarmos então, os campos, ou a intensidade de radiação no domínio do tempo, não temos como assegurar

um diagrama de radiação independente do tempo. Entretanto, a energia total contida no sinal radiado, desconsiderando-se perdas na propagação, permanece constante à medida em que o sinal se propaga. Desta maneira a energia torna-se nossa escolha preferencial para a análise temporal do diagrama de radiação.

A autocorrelação do campo espalhado como medida de energia, ou seja, quando  $\xi = 0$ , pode ser definida em função das coordenadas esféricas  $\theta$  e  $\phi$ . Desta maneira, obtém-se

$$\mathcal{R}_E(0, \theta, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t, \theta, \phi)|^2 dt. \quad (2.55)$$

Como usualmente definido no domínio da frequência, o diagrama de radiação temporal de uma antena pode ser definido como sendo a própria autocorrelação do campo elétrico total espalhado, normalizado pela máxima autocorrelação obtida em todas as direções do campo elétrico total espalhado, ou seja,

$$F(\theta, \phi) = \frac{\mathcal{R}_E(0, \theta, \phi)}{\max_{\theta, \phi} [\mathcal{R}_E(0, \theta, \phi)]}. \quad (2.56)$$

A Equação (2.56) indica que o diagrama de radiação dependerá da excitação, não sendo assim uma característica exclusiva da antena. No entanto, a altura efetiva é um parâmetro da antena que independe da excitação. Se a excitação  $f(t)$  na Equação (2.48) for um pulso suficientemente estreito, aproximando de um impulso e sabendo que a convolução de uma função com a função impulso é a própria função, então o campo pode ser escrito como:

$$\mathbf{E}_\delta(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \mathbf{h}^t(\hat{\mathbf{r}}, \tau), \quad \tau = t - \frac{r}{c}. \quad (2.57)$$

em que  $\mathbf{E}_\delta(\mathbf{r}, t)$  é o campo elétrico impulsional obtido através da formulação da altura efetiva na Equação (2.48) quando  $f(t) = \delta(t)$ . Baseado na Equação (2.57), é possível definir o diagrama de radiação em função da altura efetiva:

$$F^{h^t}(\theta, \phi) = \frac{\mathcal{R}_{h^t}(0, \theta, \phi)}{\max_{\theta, \phi} [\mathcal{R}_{h^t}(0, \theta, \phi)]}, \quad (2.58)$$

em que a fração  $-\mu_0/4\pi r$  é cancelada na divisão. O índice  $h^t$  em  $\mathcal{R}_{h^t}(\xi)|_{\xi=0}$  indica que a autocorrelação é extraída da altura efetiva. Esta definição é útil para excitações pulsadas, tais como transmissão de sinais digitais ou UWB. Assim sendo, é possível visualizar o espalhamento da energia destes sinais através da altura efetiva.

## 2.2.4 Representação do Operador Altura Efetiva em Termos das Ressonâncias Naturais

A Equação (2.49) é definida para uma fonte impulsiva, portanto a altura efetiva é função apenas da antena, independente da excitação utilizada. Uma vez que as respostas impulsivas de uma antena tenham sido descritas, é possível determinar a altura efetiva no domínio do tempo que é uma característica apenas da antena. Desta forma, o campo distante radiado devido à uma excitação arbitrária pode ser encontrado facilmente através da Equação (2.47).

As densidades de corrente impulsivas, necessárias à determinação da altura efetiva na Equação (2.49), podem ser expressas em função de suas ressonâncias naturais que, por sua vez, têm uma representação matemática no qual estas são representadas com facilidade nos domínios temporal e espectral. O *Método da Expansão em Singularidades* (SEM) consiste em expandir uma determinada função impulsional, tal como a densidade de corrente impulsional, como um somatório das ressonâncias naturais do objeto analisado. Desta maneira, a altura efetiva descrita por meio do SEM, poderá ser definida no domínio do tempo e frequência de forma unificada.

A extração das ressonâncias naturais pode ser realizada através de técnicas numéricas ou analíticas. Geometrias complexas exigem a extração através de técnicas numéricas. Consequentemente, é necessário modelar diferentes geometrias de antenas excitadas por um impulso a fim de que as ressonâncias naturais sejam extraídas a partir das densidades de corrente impulsivas. Estas podem ser calculadas na superfície de uma antena após uma excitação por um pulso estreito, uma vez que o impulso não é fisicamente realizável e, portanto, não é implementável numericamente. Para antenas de fio, o Método das

Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD) produz bons resultados [3]. Porém, em antenas de grande comprimento elétrico, tal como antenas refletoras, o FDTD pode ser tornar demasiadamente lento, além do uso excessivo de memória, o que pode inviabilizar a análise. Para estes casos, o Método da Abertura pode ser utilizado uma vez que sua formulação é simples e produz bons resultados [2].

## 2.3 Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD)

### 2.3.1 Introdução

Atualmente, existem diversas abordagens para a solução computacional de problemas de eletromagnetismo. Destacam-se neste contexto, o Método dos Momentos (MOM), Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD), Elementos Finitos (FE), Teoria Uniforme da Difração (UTD) e Óptica Física (PO). Nesta seção, o FDTD é abordado de forma que a ênfase e o formalismo serão dados para a determinação do campo total radiado por um objeto espalhador, sendo que a excitação é introduzida analiticamente.

A aplicação do método FDTD exige a adaptação da geometria do objeto de análise ao modelo computacional. É preciso representar as especificidades de um determinado objeto. Ao representar, por exemplo, uma antena de fio como o dipolo, é preciso considerar como será realizada a excitação desta antena, como a espessura do dipolo é representada no ambiente computacional, qual sua orientação, entre outros. Com o objetivo de se extrair singularidades através das correntes impulsivas no objeto, também a excitação deve ser modelada uma vez que o impulso ideal (delta de Dirac) não é fisicamente realizável.

Uma característica importante do FDTD é a possibilidade de tratar transientes (como pulsos) diretamente no domínio do tempo. Além disso, o método é aplicável em regiões como a região de ressonância onde o comprimento de onda é comparável ao tamanho do objeto de interação [3]. O FDTD permite a representação de modelos arbitrários de geo-

metrias tridimensionais. Objetos volumétricos ou mesmo fios finos podem ser modelados e a interação com objeto de qualquer valor de condutividade, desde um condutor elétrico perfeito até um objeto sem condutividade, pode ser realizada. É possível ainda, com o FDTD, realizar o modelamento de materiais com parâmetros dependentes da frequência tais como dielétricos com perdas, materiais magnéticos e mesmo materiais não convencionais, incluindo plasmas anisotrópicos e ferrites magnetizados [3]. Qualquer tipo de resposta pode ser implementada através do método, entre estas, campos distantes, derivados dos campos próximos, campos espalhados, diagramas de antenas, seção de radar, correntes, densidade de potência, penetração e acoplamento. A utilização deste potencial é viável para uma variedade de problemas de eletromagnetismo cobrindo uma grande faixa de frequências. Até mesmo problemas de difícil modelamento como pulsos eletromagnéticos (EMP), microondas de alta potência (HPM), radares e lasers. Sistemas que respondem à estas excitações, quando modelados no FDTD, podem ser de natureza diversa: objetos grandes ou pequenos, orgânicos ou inorgânicos, simulações ao ar livre ou subterrâneas [1].

A base do método FDTD são as duas equações rotacionais de Maxwell na forma diferencial no domínio do tempo, uma vez que as fontes no ambiente de simulação, são expressas de forma analítica. Estas equações são expressas de uma forma discretizada através do método das diferenças finitas.

### Formulação do FDTD

As equações de Maxwell expressas em (2.1) a (2.16) são utilizadas para análise de campos eletromagnéticos. As Equações (2.3) e (2.4) são redundantes, já que estão contidas nas Equações (2.1) e (2.2). Esta consideração somente pode ser realizada se as fontes de campo não estão presentes no domínio de análise. Porém, no método FDTD, a excitação é introduzida definindo-se analiticamente de forma arbitrária, a excitação numa determinada região. Desta maneira, as Equações (2.1) e (2.2) não são necessárias à formulação do algoritmo FDTD.

### Diferenças Finitas

Basicamente, o método FDTD é a representação das equações de Maxwell, especificamente as Equações (2.1) e (2.2), através de diferenças finitas. Como as diferenças finitas serão aplicadas em campos que têm suas componentes com uma localização particular no espaço, os pontos de cálculo devem ser escolhidos estrategicamente, de forma a representar coerentemente as equações de Maxwell. As equações representadas por diferenças finitas obedecem a relação espacial entre os campos elétricos e magnéticos.

Conforme descrito por Yee [15], a localização dos campos no espaço tridimensional é indicada na Figura 2.4.

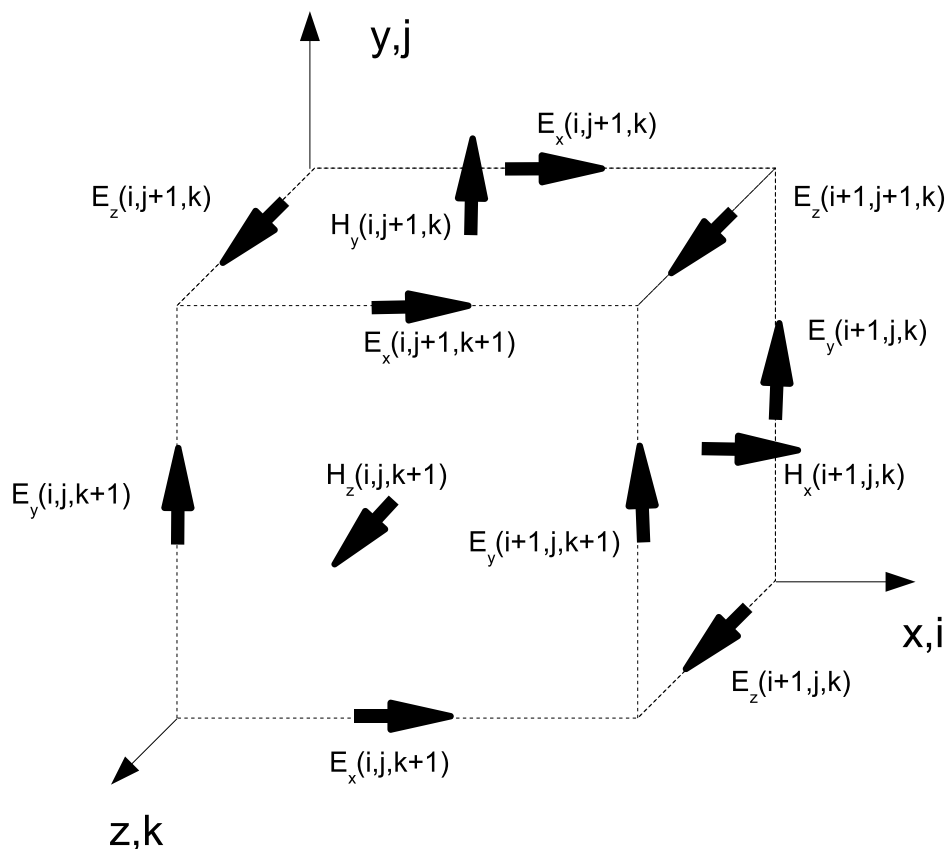


Figura 2.4: Convenção para a imposição dos índices  $(i, j, k)$  no espaço  $(x, y, z)$  e a localização das componentes de campo segundo esta notação.

Observa-se que as componentes do campo na Figura 2.4 estão localizadas de forma à obedecer o cálculo do rotacional das equações de Maxwell. Este cubo formado pela disposição das componentes de campo no espaço, é chamado de célula de Yee [15].

Um ponto no espaço numérico uniforme e retangular é representado por  $(i, j, k)$ , em que  $i, j$  e  $k$  são valores inteiros. Este ponto no espaço físico pode ser representado por  $(x, y, z, t) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)$ , em que  $\Delta x, \Delta y$  e  $\Delta z$  são as dimensões das células no espaço numérico tridimensional e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo usado na discretização da variável  $t$ . A variável  $n$ , também inteira, é o número de passos de tempo no qual os campos são calculados. Uma função  $H$  avaliada num ponto discreto do espaço e num instante discreto no tempo, pode ser representada como:

$$H(x, y, z, t) = H(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = H_{i,j,k}^n. \quad (2.59)$$

Se, no entanto, deseja-se escrever a derivada parcial de uma função com diferenças finitas, pode-se usar as seguintes aproximações:

$$\frac{\partial F}{\partial t} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F_{i,j,k}^{n+1} - F_{i,j,k}^n}{\Delta t} \approx \frac{F_{i,j,k}^{n+1} - F_{i,j,k}^n}{\Delta t} \quad (2.60)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_{i+1,j,k}^n - F_{i,j,k}^n}{\Delta x} \approx \frac{F_{i+1,j,k}^n - F_{i,j,k}^n}{\Delta x}. \quad (2.61)$$

### Equações de Maxwell Utilizando Diferenças Finitas

Em coordenadas retangulares, as Equações (2.1) e (2.2), através das equações constitutivas (2.5) e (2.6), são então escritas utilizando as diferenças finitas, como mostrada na Equação (2.62) para a componente  $H_x$  que representa a componente em  $\hat{x}$  do campo magnético.

$$\begin{aligned}
 H_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) = & H_x^{n-1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) + \\
 & \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z} [E_y^n(i, j + 1/2, k + 1) - E_y^n(i, j + 1/2, k)] - \\
 & \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta y} [E_z^n(i, j + 1, k + 1/2) - E_z^n(i, j, k + 1/2)]
 \end{aligned} \quad (2.62)$$

A implementação computacional da Equação (2.62) pode ser descrita através da Equação (2.63). As outras componentes para o campo magnético e elétrico são obtidas de modo semelhante conforme é apresentado em [3].

$$\begin{aligned}
 H_x(i, j, k) \Leftarrow & H_x(i, j, k) + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z} [E_y(i, j + 1, k) - E_y(i, j, k)] - \\
 & \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta y} [E_z(i, j, k + 1) - E_z(i, j, k)]
 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Os cálculos no FDTD são realizados utilizando as equações de Maxwell representadas por diferenças finitas de forma iterativa, ou seja, a cada instante, os campos são calculados tendo como condição inicial os campos no instante anterior. Os cálculos são realizados para todo os pontos do espaço computacional.

### 2.3.2 Dispersão Numérica e Estabilidade

Existe uma ligeira diferença entre o espaço numérico onde serão calculados os campos eletromagnéticos, ou seja, o domínio do FDTD, e o espaço físico, onde campos eletromagnéticos se propagam. Este espaço numérico foi chamado por Taflov e Hagness [1] de *éter numérico*, pois as características do mesmo provocam variações na velocidade de propagação da onda e, conseqüentemente, erros nos resultados obtidos.

#### Dispersão Física

A dispersão é uma medida do quanto varia a velocidade da onda ao se propagar em um meio. Usualmente, para avaliar a dispersão, utiliza-se a velocidade de fase no meio:

$$v_p = \frac{\omega}{k}, \quad (2.64)$$



em que  $\omega$  é a frequência angular da onda e  $k$  é o número de onda. Se considerarmos o caso de uma onda se propagando no espaço livre ou em um dielétrico com  $\varepsilon$  e  $\mu$  constantes, podemos concluir que o meio é não-dispersivo. No entanto, ao observar a velocidade de fase em um guia de ondas cuja seção é retangular é possível notar o efeito da dispersão definida por [20]:

$$v_g = \frac{v_p}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}, \quad (2.65)$$

em que  $v_g$  é a velocidade de fase da onda guiada,  $f_c$  é a frequência de corte do guia de onda. Como a velocidade de fase da onda guiada é dependente da frequência, podemos dizer que este guia de onda é uma estrutura dispersiva.

Para o caso tridimensional, a equação de onda para um meio homogêneo, sem perdas e sem fontes, pode ser escrita para cada componente de campo como [2]:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (2.66)$$

e uma solução para esta equação pode ser:

$$E_x(x, y, z, t) = E_{x0} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}, \quad (2.67)$$

sendo

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_p^2 = \left(\frac{\omega}{v_p}\right)^2. \quad (2.68)$$

em que  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_z$  são constantes que definem a direção de propagação da onda e  $k_p$  é o vetor de onda. A Equação (2.68) é, usualmente, chamada de *relação de dispersão para a onda tridimensional*.

### Dispersão Numérica

Algumas particularidades presentes no método FDTD fazem com que a velocidade de fase de uma onda varie durante sua propagação, mesmo quando os cálculos são feitos

considerando o espaço livre. Este fenômeno se dá devido à discretização do espaço e do tempo e, por isso, é um fenômeno não físico chamado dispersão numérica.

Com um significativo esforço algébrico é possível obter a relação de dispersão numérica para uma onda tridimensional [1]:

$$\left[ \frac{1}{c\Delta t} \operatorname{sen} \left( \frac{\omega\Delta t}{2} \right) \right]^2 = \left[ \frac{1}{\Delta x} \operatorname{sen} \left( \frac{\tilde{k}_x\Delta x}{2} \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{\Delta y} \operatorname{sen} \left( \frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2} \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{\Delta z} \operatorname{sen} \left( \frac{\tilde{k}_z\Delta z}{2} \right) \right]^2 \quad (2.69)$$

em que  $\tilde{k}_x$ ,  $\tilde{k}_y$  e  $\tilde{k}_z$  são constantes que definem o vetor de onda numérico, conhecido como vetor de propagação  $\tilde{k}$  e indica a direção de propagação da onda no ambiente computacional. Através da relação de dispersão numérica, nota-se a dependência do número de onda numérico com a frequência da onda, as dimensões das células, o passo de tempo e a direção de propagação. No limite no qual as dimensões das células e o passo de tempo tendem a zero, a equação da dispersão numérica para uma onda tridimensional tende à equação da dispersão física para uma onda tridimensional.

A dispersão numérica representada pela Equação (2.69), é função da direção de propagação e pode ser nula dependendo desta. A Equação (2.70) descreve o *fator de Courant* que é definido como um fator de estabilidade numérica que relaciona a dimensão de uma célula com a propagação dos campos através desta. Caso haja uma escolha apropriada do fator de estabilidade numérica, a dispersão pode ser reduzida a zero [1].

$$S = \frac{c\Delta t}{\Delta}, \quad (2.70)$$

em que  $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z$ . Caso a dimensão das células não sejam iguais em todas as direções, o fator de Courant é estabelecido para cada direção e a dispersão numérica será definida para cada uma delas.

Para o caso tridimensional, a dispersão é nula quando a propagação é diagonal às células e, neste caso,  $S = 1/\sqrt{3}$ . É importante notar que no caso tridimensional, uma frente de onda sofrerá o fenômeno de dispersão numérica inevitavelmente já que para cada direção de propagação dos campos, haverá uma velocidade de propagação diferente.

Ao fazer as dimensões das células e do passo de tempo tender a zero, espera-se que o espaço numérico se aproxime do espaço físico. De fato, a dispersão numérica se torna a dispersão física neste limite, portanto, é possível afirmar que a dispersão numérica será fortemente influenciada pela *resolução da malha*, definida por:

$$N_\lambda = \frac{\lambda_0}{\Delta}, \quad (2.71)$$

em que  $\lambda_0$  é o comprimento de onda para o espaço livre de uma onda com frequência angular  $\omega$ .

A resolução da malha pode ser aumentada, para um dado faixa de frequências, diminuindo as dimensões das células ( $\Delta$ ). Tal medida poderia então reduzir a dispersão, ou praticamente reduzi-la a zero, se as dimensões das células forem suficientemente pequenas. Há, porém, um limite para tal redução, pois células menores exigem aumento do número total de células e o conseqüente aumento da carga computacional.

É necessário desta maneira, uma adequação das células ao problema estudado. Uma maneira de implementar isso, é fazendo uma análise prévia dos campos presentes no ambiente de simulação. Através da frequência máxima ou do comprimento de onda mínimo é possível escolher uma resolução que fará com que este comprimento de onda tenha um erro de fase dentro de um limite especificado. Se a resolução da malha atender este critério de erro de fase  $\epsilon$ , conseqüentemente, da dispersão para a frequência máxima, esta resolução será suficiente para qualquer outra frequência. A máxima frequência presente no ambiente computacional, representada por  $f_{max}$  corresponde ao menor comprimento de onda neste, representado por  $\lambda_{min}$ , portanto,

$$\lambda_{min} = \frac{c}{f_{max}}. \quad (2.72)$$

Usualmente, pequenos erros de dispersão são obtidos com a resolução de malha  $N_\lambda = 10$  a  $N_\lambda = 20$ , deste modo é comum o uso de células com dimensões  $\Delta = \lambda_{min}/10$  ou  $\Delta = \lambda_{min}/20$ .

### Estabilidade Numérica

As características do espaço numérico podem ser definidas a partir das frequências presentes neste espaço. As dimensões das células são escolhidas de forma que um determinado critério de dispersão máxima seja atingido. É necessário também estabelecer algum critério para escolha do passo de tempo,  $\Delta t$ , para o andamento das interações computacionais.

Naturalmente, a fim de se aproximar da propagação física dos campos, a escolha do passo de tempo  $\Delta t$  deve ser a menor possível. A escolha de valores muito pequenos para o passo de tempo, aumenta consideravelmente o número de interações numéricas necessárias para se atingir um determinado instante no processo de simulação. Se, por outro lado, os passos de tempo forem demasiadamente grandes, ocorrerá instabilidade numérica e os campos aumentarão sem limites à medida que o número de interações aumenta [1]. Portanto, deve ser estabelecido um critério para escolha do passo de tempo. Para o caso tridimensional, a relação entre o passo de tempo e as dimensões da célula é dada por [1]:

$$\Delta t \leq \frac{1}{v_p \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}}, \quad (2.73)$$

a qual (2.73) é conhecida como *condição de estabilidade de Courant* para o caso tridimensional. Esta relação estabelece o máximo passo de tempo  $\Delta t$  antes que haja instabilidade.

### 2.3.3 Modelagem da Fonte

Existem diversas formas de introduzir os campos eletromagnéticos no espaço computacional. Os campos são modelados, matematicamente, através das soluções das equações de Maxwell e estas equações são estabelecidas em alguma região do ambiente de simulação. Após a introdução destes campos, o FDTD se encarregará de, interativamente, calcular os campos propagados e a interação destes com algum objeto.

A forma usual para introdução de energia eletromagnética no espaço computacional é através de fontes, nas quais o campo é especificado em algum ponto do espaço compu-

tacional. Este campo pode ser especificado em uma célula ou num conjunto de células e variar apenas com o tempo, independentemente das células adjacentes. A fonte que é especificada desta forma é chamada de fonte *Hard* [1]. Uma fonte de grande importância, a fonte senoidal, é ser descrita como:

$$v(n\Delta t) = V_0 \text{sen}(\omega n\Delta t) \quad (2.74)$$

Outra fonte de grande importância é o pulso Gaussiano, que tem uma faixa com frequências consideravelmente ampla, não tendo porém frequências muito altas, que violariam a resolução da malha. Além disso, sua implementação é fácil e sua resposta em frequência é uma curva suave. A resposta de frequência ampla é desejável devido ao grande conteúdo de informações presentes nos campos gerados pelo pulso. O pulso Gaussiano tem um valor não nulo no instante inicial  $n = 0$ . O efeito disso, é uma descontinuidade pois o valor do pulso que era nulo para  $n < 0$  passa a ter um valor não nulo em  $n = 0$ . Esta descontinuidade introduz altas frequências no espaço computacional. Para evitar este efeito, o tempo entre o início do pulso e seu pico deve ser suficientemente grande. Isto é obtido introduzindo um atraso no pulso, que pode ser descrito da seguinte forma:

$$v(n\Delta t) = V_0 e^{-\alpha(n\Delta t - \beta\Delta t)^2}, \quad (2.75)$$

em que  $\alpha$  é um fator de decaimento escolhido convenientemente para que a largura de banda não seja excessiva e, assim, produza dispersão numérica. A variável  $\beta \in \mathbb{Z}$  controla a largura do pulso. É importante que este valor não seja muito grande, pois, desta forma, a faixa de frequências deste pulso seria pequena. Se o valor for pequeno, pode haver dispersão. A escolha adequada depende do caso estudado. Por exemplo, em problemas, cujo objetivo seja a análise de antenas, a escolha de  $\beta = 32$  [3] é adequada se não há dielétrico. O fator de decaimento é definido como [3]:

$$\alpha = \left( \frac{4}{\beta\Delta t} \right)^2. \quad (2.76)$$

O pulso Gaussiano tem seu valor médio diferente de zero. Este valor médio acarreta em uma componente contínua na resposta em frequência do mesmo, ou seja, baixas frequências estarão associadas ao espectro deste sinal. Caso seja necessário evitar que isso aconteça, a derivada do pulso Gaussiano pode ser utilizado já que esta tem o valor médio nulo e pequeno conteúdo em baixas frequências, porém tendo ainda um largo conteúdo espectral que é característica do pulso Gaussiano. Considerando as grandezas representadas na Equação (2.75), a derivada do pulso Gaussiano em relação ao tempo pode ser escrita como [3]:

$$v(n\Delta t) = V_0\sqrt{2\alpha}(n\Delta t - \beta\Delta t)e^{-\alpha(n\Delta t - \beta\Delta t)^2}, \quad (2.77)$$

Existe um problema na formulação das fontes *hard*. Se a onda, após ser espalhada pelo objeto de estudo, retornar à fonte, sofrerá nova reflexão uma vez que o campo no ponto da fonte é independente das células adjacentes. Se este problema for relevante no estudo, uma alternativa é retirar a excitação após o pulso ter sido reduzido a um valor próximo de zero. Desta forma, a célula onde a fonte é colocada, após um certo tempo, estará livre para se comportar como uma célula qualquer do espaço computacional. Quando a fonte é modelada desta maneira, é chamada de fonte *soft* [1].

Além das excitações representadas pelas fontes *hard* e *soft*, é possível introduzir a energia eletromagnética no espaço computacional da especificação de fontes de corrente elétrica e magnética no espaço ( $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{M}$ ) e através da especificação de uma onda plana que incide sobre algum objeto de estudo [1]. Esta formulação é, particularmente, útil na análise de espalhamento e análise de antenas receptoras iluminadas pela onda plana que simula a transmissão de algum sinal.

### Excitação de Antenas

Existem três métodos usuais de excitar uma antena no método FDTD. A região na qual a fonte é definida é, usualmente, pequena. Desta maneira, é necessário reduzir muito a dimensão das células para modelar adequadamente a região da fonte. O efeito desta

abordagem é a necessidade de grandes recursos computacionais uma vez que a redução da dimensão da célula implica em aumento do número total de células. Outra abordagem é diminuir a dimensão das células somente na região da fonte. Contudo, isso faz com que reflexões ocorram na interface na qual o tamanho da célula é alterado pois uma vez que o  $\Delta t$  é mantido constante, o critério de Courant é alterado na interface o que implica em alteração da velocidade de propagação dos campos nas duas regiões definidas pelas diferentes dimensões das células. A terceira abordagem é a de modelar a fonte de forma apropriada no espaço computacional, ou seja, na região em que a excitação é inserida, as equações matemáticas dos campos são impostas à célula ou conjunto de células. Esta abordagem parece ser mais apropriada pois combina uma menor necessidade de recursos computacionais com a eliminação do problema das reflexões causadas por células de dimensões diferentes no mesmo espaço computacional. Esta abordagem,

Antenas são alimentadas através da conexão de seus terminais à uma linha de transmissão ou um guia de ondas no qual o sinal a ser transmitido é introduzido. Quando necessário, as características da linha de transmissão ou do guia de ondas e sua junção com a antena devem ser modelados matematicamente e incluídos no modelo do FDTD.

Os modelos de excitação para antenas filamentosas são os de implementação computacional mais simples. A descrição dos campos na região de excitação destas antenas, é definida através das equações de Maxwell aplicadas na formulação analítica dos campos na região. O modelamento de tais antenas é fácil, devido sua baixa complexidade geométrica e seu tamanho que é relativamente pequeno.

O *gap* de uma antena filamentar é o espaço existente entre dois fios, como mostra a Figura 2.5 sendo este utilizado para excitação da antena. A fonte *gap* é um modelo de excitação em que uma célula é utilizada para modelar o *gap*, sendo que os campos eletromagnéticos nessa célula, são especificados de forma arbitrária.

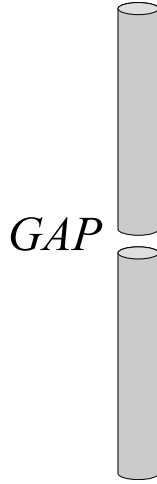


Figura 2.5: Antena dipolo com *gap* central

Se a excitação for um pulso, semelhante à Equação (2.75), o qual é aplicado em uma antena alinhada no eixo  $z$ , então o campo elétrico no *gap* será dado por [3]:

$$E_z^n(i, j, k) = -\frac{v(n\Delta t)}{\Delta z} \quad (2.78)$$

O *gap* definido desta maneira, terá a dimensão de uma célula. Esta aproximação produz bons resultados como descrito em [28]. Existem porém, outras aproximações para o *gap* caso maior precisão seja requerida, tal como o *gap infinitesimal* onde o *gap* é preenchido com metal no modelo do FDTD e as equações dos campos magnéticos são convenientemente modificadas para modelar o campo na região [3].

Quando o raio do dipolo é menor do que uma célula, a fonte *gap* pode ter um efeito de produzir um raio efetivo no dipolo, já que o campo no *gap* é especificado para célula do mesmo. A técnica proposta em [29] modifica as equações básicas do FDTD nas regiões próximas à antena para considerar este efeito. A idéia é considerar que, nas proximidades do fio, os campos decaem com o inverso da distância radial. Aplicando-se esta condição, o campo magnético nas proximidades do fio será dado por:



$$H_x(i, j, k) \Leftarrow H_x(i, j, k) + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z} [E_y(i, j, k + 1) - E_y(i, j, k)] - \frac{2}{\ln(\Delta y/a)} \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta y} [E_z(i, j + 1, k) + v(n\Delta t)/\Delta z], \quad (2.79)$$

em que  $a$  é o raio do fio. As outras componentes podem ser obtidas de forma similar.

### 2.3.4 Condições de Fronteiras Absorventes

As ondas eletromagnéticas são calculadas no FDTD, através do espaço computacional previamente definido. O espaço é dividido em células em que equações matemáticas, funções da variável temporal e das coordenadas espaciais, são impostas. O propósito das células é simular o comportamento dos campos eletromagnéticos em um dado ponto do espaço. Estas equações, são as equações de Maxwell representadas através das diferenças finitas. Desta forma, o tamanho do problema poderia ser delimitado pelo número de interações, ou seja, pelo tempo máximo de simulação. Se as ondas incidirem numa fronteira onde terminam as células, então o efeito resultante será o mesmo da incidência de uma onda sobre uma interface condutora, já que, após as fronteiras, todos os campos são iguais a zero. Haverá, portanto, uma reflexão indesejada que não faz parte do problema físico.

Caso uma simulação necessite de um grande intervalo de tempo para observação, o aumento do espaço computacional será demasiadamente custoso, exigindo muitas vezes recursos computacionais não disponíveis. Uma forma encontrada para possibilitar o aumento do número de passos de tempo, sem a necessidade de aumentar significativamente o número de células, é o uso de condições de fronteiras absorventes (*ABC - Absorbing Boundary Conditions*) [1]. Esta técnica permite modelar a fronteira do espaço computacional de forma que a mesma absorva as ondas eletromagnéticas com baixo percentual de reflexão, simulando um espaço infinito. Portanto, é possível realizar a simulação para grandes intervalos de tempo [1].

Em problemas de antenas é necessário observar os campos por um tempo relativamente longo. Desta forma, sem as fronteiras absorventes, o tempo máximo de simulação seria o

tempo que a frente de onda radiada pela antena leva para chegar até o espaço máximo de simulação definido (número de células da antena até a fronteira multiplicado pelo tamanho da célula). Caso seja necessário simular até um instante de tempo posterior, a fronteira teria que ser aumentada, o que acarretaria na elevação do número de células e, conseqüentemente, maior capacidade computacional tal como processamento e memória. Em problemas de antenas, a reflexão dos campos na fronteira faria com que o campo no ponto de análise se alterasse e, ainda, haveria a incidência deste campo refletido sobre a antena atrapalhando completamente a excitação e, conseqüentemente, a análise.

Os métodos mais utilizados para definição das ABC's são as condições de Mur e a PML (*Perfectly Matched Layer*). A PML apresenta menos reflexões que as condições de Mur [1]. Entretanto, apesar do nível de reflexão da PML ser menor do que Mur, a complexidade da implementação é muito maior. Neste caso, é importante analisar qual o nível de reflexão das ondas são necessários em cada problema para aplicar a ABC apropriada. Em geral, para problemas de antenas, as condições de Mur são suficientes para analisar uma grande variedade de problemas [28]. Desta forma, as condições de Mur são utilizadas neste trabalho.

## 2.4 Método da Abertura

Existem diversas maneiras de se analisar uma antena refletora, tanto numericamente quanto assintoticamente, tais como o MOM, PO ou UTD. No entanto, ainda que numerosos métodos existam e estejam continuamente sendo aperfeiçoados, existem procedimentos simples, porém, eficazes para a análise de antenas refletoras com geometria simples, tal como o refletor parabólico simétrico, ou parabolóide. O método de distribuição de correntes na abertura, ou método da Abertura é conhecido pela simplicidade da representação e pode fornecer bons resultados. No entanto, para obter resultados satisfatórios, baixas frequências não podem ser utilizadas. Além disso, a abertura deve estar próxima ao parabolóide e a frente de onda na abertura deve ser plana [27]. Caso estas condições não

sejam satisfeitas, a técnica apresenta dificuldades [2].

Para o método da Abertura, o campo espalhado pela superfície do parabolóide é encontrado no plano de abertura da antena, que é normal ao eixo da superfície refletora e, usualmente, definido sobre foco. Para encontrar esse campo na abertura, é usual utilizar a técnica da Óptica Geométrica (traçado de raios). Fontes equivalentes são então definidas sobre a abertura, utilizando o princípio da equivalência. Estas fontes equivalentes são então utilizadas para calcular os campos radiados pela antena refletora [2].

A resposta para o parabolóide poderá ser calculada através da obtenção das singularidades da antena utilizando o método da Abertura. A formulação do método da Abertura é apropriada, pois introduz pouca complexidade ao problema de extração de singularidades. A fonte usualmente utilizada para o parabolóide operando em comunicação de sinais, é a fonte *cos seno elevado* [2], pois esta fonte possui o diagrama circularmente simétrico e, desta maneira, o campo na abertura terá fase constante, o que garante que na abertura a frente de onda seja plana e proporciona maior ganho na transmissão.

### 2.4.1 Formulação

Os passos para se obter as densidades de correntes impulsivas através do método da Abertura, são os mesmos para obtenção das densidades de correntes elétricas e magnéticas na abertura, devido à uma excitação senoidal: especifica-se a fonte e, através da óptica geométrica, encontram-se os campos elétrico e magnético na abertura. A partir dos campos, as densidades de corrente elétricas e magnéticas equivalentes são obtidas. A Figura 2.6 ilustra uma antena parabólica alimentada pelo foco e a notação em coordenadas do alimentador e do observador. O alimentador está exatamente no foco do parabolóide, que é a origem dos sistemas de coordenadas do alimentador e observador. Na figura,  $F$  é a distância focal e  $|z|$  é a distância entre um ponto no parabolóide definido por  $r_F$  e a abertura da antena que se encontra no plano  $z_F = 0$ . As coordenadas do alimentador são  $r_F$ ,  $\theta_F$  e  $\phi_F$ .

O parabolóide se caracteriza por ter a distância do foco até a abertura constante de

acordo com a Equação (2.80).

$$r_F + |z| = 2F. \quad (2.80)$$

Esta característica particular do parabolóide garante que os campos radiados a partir de seu foco tenham fase constante na abertura se a fonte for tal que seu diagrama de radiação seja circularmente simétrico. Desta maneira, além de um maior ganho da antena, espera-se que não haja dispersão nos campos da abertura, pois o sinal não será monocromático, mas terá uma largura de faixa muito grande.

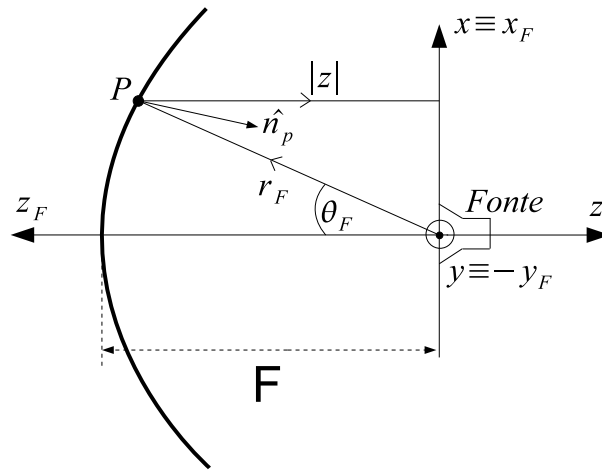


Figura 2.6: Antena Parabólica com excitação no foco e notação em coordenadas da fonte.

O modelo de excitação cosseno elevado com resposta impulsional pode ser descrito como uma composição de duas parcelas. A primeira parcela tem características espaciais que descrevem o comportamento dos campos radiados pela fonte no espaço, onde os campos são propagados. A segunda parcela descreve o comportamento temporal dos campos radiados e é, neste caso, o impulso. Este modelo é representado na Equação (2.81), ou seja,

$$\mathbf{E}^\delta(\mathbf{r}, t) = \frac{\cos^N \theta_F}{r_F} (\cos \phi_F \hat{\boldsymbol{\theta}}_F - \sin \phi_F \hat{\boldsymbol{\phi}}_F) \delta(t - t_d). \quad (2.81)$$

O expoente  $N$  ajusta o modelo em relação à sua diretividade. Quanto maior o valor de  $N$ , mais intenso será o campo na região central da abertura, o que não é desejável uma vez que o ideal é que o campo fosse uniforme na abertura. No entanto, este parâmetro não será considerado e será arbitrariamente escolhido como  $N = 1$ , como é utilizado em análises mais simples [2]. O atraso  $t_d$  representa o tempo que a frente de onda leva para alcançar o ponto de análise.

No ponto  $P$  na Figura 2.6, onde ocorre a reflexão da frente de onda,  $\hat{n}_P$  é o vetor normal ao ponto. Este vetor é definido como:

$$\hat{n}_P = -\cos\left(\frac{\theta_F}{2}\right)\hat{\mathbf{r}}_F + \sin\left(\frac{\theta_F}{2}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}_F. \quad (2.82)$$

O traçado de raios consiste em determinar o campo originado pelo alimentador no foco até à abertura. O campo se propaga do foco até a superfície do parabolóide, ponto  $P$ , onde ocorre uma reflexão. Imediatamente antes da reflexão, o campo é dado por:

$$\mathbf{E}_{P^-}^\delta(\mathbf{r}, t) = \frac{\cos\theta'_F}{r'_F}(\cos\phi'_F\hat{\boldsymbol{\theta}}_F - \sin\phi'_F\hat{\boldsymbol{\phi}}_F)\delta\left(t - \frac{r'_F}{c}\right), \quad (2.83)$$

em que  $\mathbf{E}_{P^-}^\delta(\mathbf{r}, t)$  indica que o campo é calculado exatamente no ponto  $P$  imediatamente antes da reflexão. Neste ponto, a frente de onda percorreu uma distância  $r'_F$  e, portanto, o atraso até este ponto é  $t_d = r'_F/c$ . A notação dos ângulos  $\theta'_F$  e  $\phi'_F$  e da distância  $r'_F$ , tem o objetivo de diferenciar a origem do campo na abertura. O campo que chega à abertura poderia ter origem diretamente na fonte mas também pela reflexão direta no parabolóide, como mostra a Figura 2.7. Para o modelo cosseno elevado, se  $\theta_F = \pi/2$ , o campo é nulo de acordo com a Equação (2.81). A abertura se localiza exatamente no plano  $\theta_F = \pi/2$ . Por isso, o campo refletido pelo parabolóide e que existe na abertura será função de  $\theta'_F$  ainda que  $\theta_F$  seja igual a  $\pi/2$  na abertura. O ponto  $A$  é o ponto na abertura correspondente ao ponto  $P$  que é o ponto de reflexão no parabolóide. A distância do foco ao ponto  $A$  é dada por  $\rho_F$ . Ainda segundo a Figura 2.7 é possível notar que  $\phi_F = \phi'_F$ .

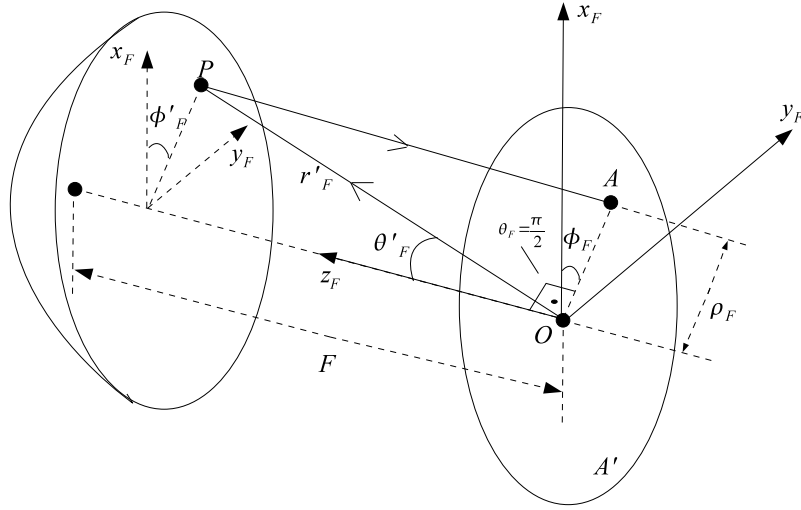


Figura 2.7: Antena Parabólica com excitação no foco e notação em coordenadas da fonte.

O campo  $\mathbf{E}_{p+}^{\delta}(\mathbf{r}, t)$  imediatamente após a reflexão pode ser calculado através da Equação (2.84).

$$\mathbf{E}_{p+}^{\delta}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{E}_{p-}^{\delta}(\mathbf{r}, t) + 2(\hat{n}_p \cdot \mathbf{E}_{p-}^{\delta}(\mathbf{r}, t))\hat{n}_p, \quad (2.84)$$

O campo  $\mathbf{E}_{p+}^{\delta}(\mathbf{r}, t)$  se propaga até a abertura com amplitude constante e o atraso total do foco à abertura é de  $2F/c$ . O campo na abertura  $\mathbf{E}_A^{\delta}(\mathbf{r}, t)$  é dado pelas Equações (2.85), (2.86) e (2.87) que são respectivamente as componentes  $\hat{\mathbf{r}}_F$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_F$  e  $\hat{\boldsymbol{\phi}}_F$  de  $\mathbf{E}_A^{\delta}(\mathbf{r}, t)$ .

$$\mathbf{E}_{Ar_F}^\delta(\mathbf{r}, t) = -\cos\theta'_F \cos\phi'_F \sin\theta_F \frac{\delta(t - \frac{2F}{c})}{r'_F} \quad (2.85)$$

$$\mathbf{E}_{A\theta_F}^\delta(\mathbf{r}, t) = -\cos\theta'_F \cos\phi'_F \cos\theta_F \frac{\delta(t - \frac{2F}{c})}{r'_F} \quad (2.86)$$

$$\mathbf{E}_{A\phi_F}^\delta(\mathbf{r}, t) = \cos\theta'_F \sin\phi'_F \frac{\delta(t - \frac{2F}{c})}{r'_F} \quad (2.87)$$

As Equações para transformação (2.85), (2.86) e (2.87) para coordenadas retangulares são dadas pelas Equações (2.88), (2.89) e (2.90).

$$\mathbf{E}_{Ax_F}^\delta(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{Ar_F}^\delta(\mathbf{r}, t) \sin\theta_F \cos\phi_F + \mathbf{E}_{A\theta_F}^\delta(\mathbf{r}, t) \cos\theta_F \cos\phi_F - \mathbf{E}_{A\phi_F}^\delta(\mathbf{r}, t) \sin\phi_F \quad (2.88)$$

$$\mathbf{E}_{Ay_F}^\delta(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{Ar_F}^\delta(\mathbf{r}, t) \sin\theta_F \sin\phi_F + \mathbf{E}_{A\theta_F}^\delta(\mathbf{r}, t) \cos\theta_F \sin\phi_F + \mathbf{E}_{A\phi_F}^\delta(\mathbf{r}, t) \cos\phi_F \quad (2.89)$$

$$\mathbf{E}_{Az_F}^\delta(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{Ar_F}^\delta(\mathbf{r}, t) \cos\theta_F - \mathbf{E}_{A\theta_F}^\delta(\mathbf{r}, t) \sin\theta_F \quad (2.90)$$

Substituindo-se as Equações (2.85), (2.86) e (2.87) nas Equações (2.88), (2.89) e (2.90) e, como na abertura  $\theta_F = \pi/2$  e  $\phi'_F = \phi_F$ , as componentes  $\mathbf{E}_{Ay_F}^\delta(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{E}_{Az_F}^\delta(\mathbf{r}, t)$  serão nulas. Sabendo que, de acordo com a Figura 2.6,  $\hat{\mathbf{x}}_F = \hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}_F = -\hat{\mathbf{y}}$  e  $\hat{\mathbf{z}}_F = -\hat{\mathbf{z}}$ , o campo na abertura  $\mathbf{E}_A^\delta(\mathbf{r}, t)$  será dado pela Equação (2.91):

$$\mathbf{E}_A^\delta(\mathbf{r}, t) = -\frac{\cos\theta'_F}{r'_F} \delta\left(t - \frac{2F}{c}\right) \hat{\mathbf{x}} \quad (2.91)$$

O ângulo  $\theta'_F$  é função da distância  $\rho_F$  entre o foco e o ponto  $A$  como mostra a Figura 2.7. A Equação (2.92) descreve esta relação e é útil na determinação do campo (2.91).

$$\cos\theta'_F = \frac{8F^2}{\rho_F^2 + 4F^2} - 1 \quad (2.92)$$

A distância  $r'_F$  entre o foco e o ponto  $P$  pode ser determinada em função de  $\theta'_F$  através da Equação (2.93).

$$r'_F = \frac{2F}{1 + \cos \theta'_F} \quad (2.93)$$

Finalmente, as densidades de corrente elétrica e magnética impulsionalis podem ser encontradas na abertura através do campo elétrico definido pela Equação (2.91) e do campo magnético definido pela Equação (2.94):

$$\mathbf{H}_A^\delta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_A^\delta(\mathbf{r}, t) \quad (2.94)$$

em que  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ . Utilizando o princípio da equivalência, as densidades de corrente elétrica e magnética são definidas pelas Equações (2.95) e (2.96) [2]:

$$\mathbf{J}_A^\delta(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_A^\delta(\mathbf{r}, t) = \frac{\cos \theta'_F}{\eta_0 r'_F} \delta\left(t - \frac{2F}{c}\right) \hat{\mathbf{x}} \quad (2.95)$$

$$\mathbf{M}_A^\delta(\mathbf{r}, t) = -\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_A^\delta(\mathbf{r}, t) = \frac{\cos \theta'_F}{r'_F} \delta\left(t - \frac{2F}{c}\right) \hat{\mathbf{y}} \quad (2.96)$$



## Capítulo 3

# MÉTODO DA EXPANSÃO EM SINGULARIDADES (SEM)

### 3.1 Introdução

Ao analisar o campo espalhado no domínio do tempo por um objeto iluminado por um campo produzido por uma excitação pulsada, observa-se que a resposta é composta de duas partes sucessivas. A primeira parte, com forma impulsiva, é chamada de *Early Time*, que representa os primeiros instantes da resposta. A origem do *Early Time* é a reflexão direta do pulso incidente. Para um condutor elétrico perfeito no espaço livre, pode-se dizer que este fenômeno ocorre no intervalo  $0 < t < 2D/c$ , no qual  $D$  é a maior dimensão do objeto espalhador. A segunda parte, chamada de *Late Time*, ocorre após o *Early Time* e é devida ao fenômeno de ressonância nas frequências naturais, o que gera um comportamento oscilatório e amortecido. As frequências naturais estão associadas à geometria e às propriedades físicas e elétricas do objeto. Entretanto, ainda que se possa determinar as frequências naturais através de diversas técnicas analíticas e numéricas, a partir de uma dada resposta à uma excitação arbitrária, não é conhecida ainda qualquer formulação analítica que seja capaz de relacionar a geometria e características físicas e elétricas às frequências naturais deste objeto [30].

Desprezando-se o *Early Time*, a representação matemática da resposta à excitação banda-larga pode ser então formulada tendo como base senóides exponencialmente amortecidas. Esta aproximação é razoável pois, na grande maioria dos problemas de espalhamento, o *Early Time* é de curta duração, uma vez que os objetos não tem grandes dimensões elétricas [16]. A Transformada de Laplace de uma senóide exponencialmente amortecida, corresponde à um par de pólos complexos conjugados (singularidades). Se a partir de uma resposta obtida de alguma forma particular (como equações integrais, ou qualquer outra forma de solução como expansão da resposta em autofunções), for possível extrair este par de pólos complexos conjugados, tanto a resposta no domínio da frequência ( $s = j\omega$ ) como no domínio do tempo serão conhecidas, já que a transformação para o domínio do tempo e vice-versa, neste caso, é simples.

Estes pólos, no plano complexo, são denominados *frequências naturais*, pois nestas frequências o objeto continua a produzir uma resposta, ainda que a excitação já não esteja mais presente. A excitação banda-larga, por conter um grande conteúdo espectral, excita estes pólos correspondentes às frequências naturais, ou seja, alguma energia é fornecida para todas as frequências, e, como o pulso tem duração finita, as frequências naturais produzirão oscilações senoidais exponencialmente amortecidas.

As singularidades podem ser utilizadas para descrever não apenas a resposta de um objeto. A onda incidente pode conter singularidades e no objeto também podem existir singularidades correspondentes a estas, ou seja, singularidades que somente são observadas na onda incidente. O tratamento adequado é a separação das singularidades devido à excitação e geometria do objeto.

A decomposição da resposta do objeto em vários termos, permite que a resposta do objeto seja calculada de forma precisa tanto no domínio do tempo quanto na frequência. Ao utilizar as singularidades necessárias, qualquer problema de espalhamento pode ser modelado, tendo como base as frequências naturais.

Algumas geometrias podem requerer além de pólos, ramos no plano complexo. Por exemplo, um cilindro condutor infinito, os ramos podem ser associados à funções cilíndricas

de Hankel [31].

O uso das singularidades para construir a resposta à uma excitação é chamado de *Método da Expansão em Singularidades* (SEM) [16]. Este método pode ser descrito de forma analítica ou numérica. Se as singularidades puderem ser extraídas numericamente, a resposta à uma dada excitação pode ser construída de forma semi-analítica pois foi obtida uma expressão analítica através de singularidades extraídas numericamente.

A caracterização através do SEM consiste em extrair as singularidades de um corpo espalhador e construir a resposta através destas singularidades. Estas singularidades, os pólos ou frequências naturais do objeto, podem ser considerados como uma assinatura única do objeto, a partir da qual este pode ser identificado ou suas características modeladas. O *Early Time* pode ser incluído na formulação do SEM, porém não é determinado à partir das ressonâncias naturais. Porém, em objetos constituídos de condutores elétricos perfeitos e de dimensões finitas, ele pode ser desprezado [30].

## 3.2 Formulação do SEM

A formulação matemática para o SEM é melhor compreendida quando desenvolvida para casos simples. Os casos com maior nível de complexidade, podem ser obtidos uma vez que o caso simples esteja bem compreendido. Escrevendo a variável complexa da Transformada de Laplace,  $s$ , em termos de sua parte real e imaginária tem-se:

$$s = \sigma + j\omega. \quad (3.1)$$

Cada pólo pode ser escrito como  $s_\alpha = \sigma_\alpha + j\omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, M$  é no número máximo de pólos extraídos da resposta. Sua parte imaginária  $\omega_\alpha$  é a frequência de oscilação do pólo e a parte real  $\sigma_\alpha$ , que é sempre negativa, corresponde ao amortecimento da oscilação do pólo. Para objetos condutores elétricos perfeitos, este amortecimento se dá devido a perdas por radiação. A grandeza  $|\sigma_\alpha|$  é denominada *fator de amortecimento*.

Uma função no tempo  $f(t)$  tem sua Transformada de Laplace bilateral definida por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \equiv \tilde{F}(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (3.2)$$

em que  $f(t)$  é tal que  $\tilde{F}(s)$  existe e é contínua em uma determinada faixa  $\sigma^- < \Re[s] < \sigma^+$ . A transformada inversa, na qual  $f(t)$  varia limitadamente nas proximidades de  $t$ , ou seja, não contém descontinuidades próximo de  $t$ , é escrita como:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{F}(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \tilde{F}(s)e^{st} ds, \quad (3.3)$$

em que os valores  $\pm j\infty$  podem ser interpretados através do valor principal de Cauchy e  $\sigma^- < \sigma_0 < \sigma^+$ .

A metodologia do SEM, consiste em determinar  $\tilde{F}(s)$  (que pode ser a densidade de corrente superficial, a densidade de carga, ou qualquer outra grandeza eletromagnética) em termos de suas singularidades. Sistemas físicos tem perdas de energia associadas à realização de trabalho. Um sistema sem perdas, teria suas singularidades presentes no eixo  $j\omega$  do plano complexo. Tal condição indicaria que as frequências naturais oscilariam indefinidamente, ainda que não houvesse excitação, o que violaria o princípio da conservação da energia. Desta forma, as singularidades de sistemas físicos estarão presentes no semiplano  $\Re[s] < 0$ .

A Figura 3.1 ilustra a função  $\tilde{F}(s)$  expandida em termos de duas singularidades, representada pelos pólos  $s_1$  e  $s_2$ . A integral na Equação (3.3) é uma integral complexa e os limites de integração  $\sigma_0 - j\infty$  e  $\sigma_0 + j\infty$  definem um contorno circular no domínio complexo  $\mathbb{C}$  como mostra a Figura 3.1 (a). A integração é realizada deformando-se o contorno na Equação (3.3) até o semiplano  $\Re[s] < 0$ , região onde se encontram as singularidades, e dividindo-se a integral em partes que estão associadas a cada singularidade, como é ilustrado nas Figuras 3.1 (b) e 3.1 (c).

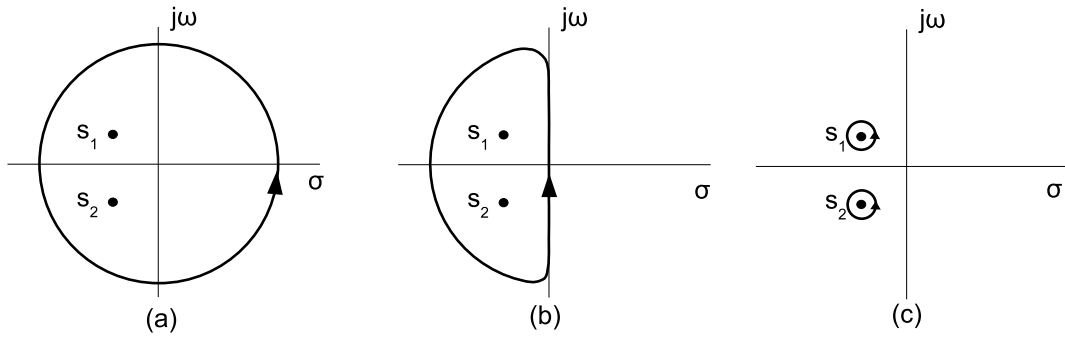


Figura 3.1: Integração da função  $\tilde{F}(s)$  expandida em termos de suas singularidades.

Visto que  $f(t) \in \mathbb{R}$ , a Equação (3.3) deve necessariamente ter alguma simetria que pode ser observada se a integral for separada em partes real e imaginária. Assim, usando uma barra para indicar o complexo conjugado de uma variável ou função, tem-se que:

$$\tilde{F}(\bar{s}) = \overline{\tilde{F}(s)}. \quad (3.4)$$

Assim, as singularidades estarão simetricamente alinhadas em relação ao eixo  $\sigma$ , obviamente com excessão das singularidades que estão sobre este eixo.

Para um objeto finito, a densidade de corrente, tanto superficial como volumétrica, tem sua resposta ao impulso correspondendo a singularidades no plano finito  $s$ , o qual é expresso em termos de pólos de ordem finita [30]. Assim sendo, é possível escrever a resposta em termos de uma série de pólos tais como  $(s - s_\alpha)^{-n_\alpha}$ , em que  $s_\alpha$  é um pólo determinado e  $n_\alpha$  indica a ordem do pólo. É possível provar analiticamente que, em objetos construídos com condutores elétricos perfeitos e que tem dimensões finitas,  $n_\alpha = 1$ , ou seja, os pólos são de primeira ordem [30]. Os pólos  $s_\alpha$  que estiverem sobre o eixo  $j\omega$  ( $\sigma = 0$ ) representam situações sem perda e são obtidos, por exemplo, através de modos no interior de cavidades. No domínio do tempo estes pólos correspondem a senóides sem amortecimento, os quais, quando excitados por uma onda incidente, deveriam continuar a radiar potência indefinidamente. Entretanto, tal situação violaria o princípio

da conservação da energia e, conseqüentemente, estes pólos não podem contribuir para a resposta. Cada pólo se associa à um resíduo na forma  $R_\alpha/(s - s_\alpha)$ , sendo  $R_\alpha$  o resíduo e, portanto, estes resíduos serão necessariamente nulos [16] o que anula o efeito destes pólos.

Se o objeto responde em  $s = s_\alpha$ , mesmo sem campo incidente nesta frequência, então esta frequência é a frequência natural. A oscilação do objeto na frequência natural é chamada de *modo natural*. Os modos naturais são dependentes apenas de suas frequências naturais associadas, e da geometria do objeto. Sejam  $\mathbf{G}$  e  $G$  grandezas eletromagnéticas vetoriais e escalares respectivamente. Estas grandezas podem ser, por exemplo, a densidade superficial de corrente, caso seja vetorial, ou a densidade carga em um objeto condutor, caso seja escalar. O modo natural é designado como  $\nu_\alpha^{(\mathbf{G})}(\mathbf{r}')$  se a grandeza representada é vetorial ou  $\nu_\alpha^{(G)}(\mathbf{r}')$  se a grandeza é escalar.

A resposta devido a uma determinada frequência natural, pode ser determinada através da combinação linear dos pólos e modos naturais. Desta maneira, a resposta será uma série composta pelos termos associados às frequências naturais:  $\nu_\alpha^{(\mathbf{G})}(\mathbf{r}')(s - s_\alpha)^{-n_\alpha}$ .

A resposta de um objeto à uma determinada excitação pode ser escrita como [30]:

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\mathbf{G})}(\mathbf{r}', s) = \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\tilde{\eta}_{0\alpha}^{(\mathbf{G})}(\mathbf{e}, s) \nu_\alpha^{(\mathbf{G})}(\mathbf{r}')}{(s - s_\alpha)^{n_\alpha}} \right\} + \tilde{\mathbf{W}}^{(\mathbf{G})}(\mathbf{e}, \mathbf{r}', s) \quad (3.5)$$

em que  $\tilde{\mathbf{U}}^{(\mathbf{G})}(\mathbf{r}', s)$  é a grandeza modelada pelo SEM. O somatório é realizado em  $\alpha$ , que enumera cada singularidade existente. O termo  $\tilde{\eta}_{0\alpha}^{(\mathbf{G})}(\mathbf{e}, s)$  é o coeficiente de acoplamento, que depende da frequência representada por  $s = \sigma + j\omega$  e do vetor  $\mathbf{e}$  que caracteriza uma determinada excitação tal como a polarização de uma onda plana incidente. O vetor  $\mathbf{e}$  é definido de tal forma que, os campos elétrico e magnético são mutuamente ortogonais, em relação à  $\mathbf{e}$ , em cada ponto do tempo e espaço [16]. O coeficiente de acoplamento  $\tilde{\eta}_{0\alpha}^{(\mathbf{G})}(\mathbf{e}, s)$ , é uma função completa em  $s$ , ou seja, não contém singularidades no plano complexo finito. Existem diversos critérios para escolha dos coeficientes. Por exemplo, pode-se requerer simplicidade na formulação, o comportamento assintótico para  $|s| \rightarrow \infty$  para evitar pólos no infinito ou outros critérios mais sofisticados [24].

Na Equação (3.5) foi incluído o termo  $\tilde{\mathbf{W}}^{(\mathbf{G})}(\mathbf{e}, \mathbf{r}', s)$  que é uma função completa de

$s$  e está associada ao *Early Time*. Esta função tem uma certa influência no formato do coeficiente de acoplamento  $\tilde{\eta}_0^{(\mathbf{G})}(\mathbf{e}, s)$ , uma vez que o coeficiente de acoplamento é função de  $\mathbf{e}$  e tem a mesma flexibilidade em seus critérios de escolha. Este termo é usualmente descartado quando se analisa objetos considerados construídos com condutores elétricos perfeitos de dimensões finitas, porque, neste caso, o *Early Time* é de pequena duração, e, conseqüentemente, a resposta é praticamente descrita pela formulação do *Late Time* [16].

### 3.2.1 Cálculo dos Coeficientes de Acoplamento e dos Modos Naturais: Desenvolvimento Numérico

Como modelado na Equação (3.5), a análise do SEM consiste no cálculo dos coeficientes de acoplamento, dos modos naturais, e das frequências naturais. Existem diversas formas de se obter os coeficientes e os modos. Uma forma de desenvolver as equações do SEM de forma analítica é através da equação integral para determinação da densidade de corrente [2] que pode ser realizado através do MOM [32]. Entretanto, o desenvolvimento analítico utilizado para calcular pólos, coeficientes e modos naturais, pode se tornar um limitador para a análise utilizando o SEM, já que as estruturas podem ter geometrias e características eletromagnéticas complexas e, assim sendo, as integrais são de difícil resolução o que impossibilita a extração direta dos pólos. A determinação dos pólos, coeficientes e modos naturais através do MOM, além de ter a implementação trabalhosa, tem um custo computacional elevado para o cálculo numérico das variáveis. O MOM, como todo método numérico, impõe uma limitação para altas frequências, devido a precisão da aproximação do método. Tal limitação é associada a razão entre o comprimento de onda e a dimensão dos domínios nas funções de base e teste. Ao aumentar o número de funções de base, altas frequências podem ser calculadas, pois um resultado mais preciso pode ser obtido. Entretanto, novamente nos deparamos com uma carga computacional elevada [33].

Uma forma de se minimizar este problema é extrair os pólos a partir de uma resposta temporal. Um método numérico para cálculo de campos é utilizado para determinar as

densidades de corrente impulsionais do objeto. Um método numérico para extração de pólos é então aplicado nas densidades de corrente impulsionais. Esta abordagem origina um desenvolvimento numérico do SEM que aumenta muito o potencial da técnica, já que, conhecendo as respostas temporais, os parâmetros relativos ao SEM podem ser determinados para qualquer estrutura analisada.

Observando com certa atenção a Equação (3.5), é possível perceber certa semelhança com a resposta ao impulso de circuitos lineares obtida através do conhecimento dos pólos e resíduos da função de transferência. A resposta ao impulso de um circuito linear pode ser obtida através da soma de todos os resíduos multiplicados pela exponencial dos pólos multiplicados pelo tempo. Por exemplo, se a corrente é o objeto de estudo, ela pode ser escrita como:

$$I(t) = \sum_{\alpha=1}^M R_{\alpha} e^{s_{\alpha} t} \quad (3.6)$$

em que  $M$  é o número de pólos e  $R_{\alpha}$  é o resíduo associado a cada pólo.

Aplicando a Transformada de Laplace na Equação (3.6), obtém-se:

$$\tilde{I}(s) = \sum_{\alpha=1}^M \frac{R_{\alpha}}{s - s_{\alpha}}. \quad (3.7)$$

Através de uma comparação direta da Equação (3.6) com a Equação (3.5) é possível inferir que, se a corrente têm este comportamento, a grandeza  $\mathbf{U}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{r}', s)$  também teria um comportamento semelhante. Desta forma define-se por comparação direta o vetor resíduo como:

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{r}', s) = \tilde{\eta}_{0\alpha}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{e}, s) \boldsymbol{\nu}_{\alpha}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{r}') \quad (3.8)$$

em que o termo  $\tilde{\mathbf{W}}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{e}, \mathbf{r}', s)$  na Equação (3.5) foi desconsiderado, o que é usualmente o caso. Observa-se que  $\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{r}', s)$  é um vetor, diferentemente de  $R_{\alpha}$ . As componentes deste vetor são as próprias componentes de  $\tilde{\mathbf{U}}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{r}', s)$ . Além da característica vetorial, nota-se uma dependência com as coordenadas do observador no vetor resíduo. Esta dependência



se explica quando a análise de  $\tilde{\mathbf{U}}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{r}', s)$  se dá em vários pontos do objeto espalhador. Em outras palavras, se  $\tilde{\mathbf{U}}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{r}', s)$  varia com a coordenada do observador, o vetor resíduo também se comportará de maneira semelhante.

Para análise do SEM no domínio do tempo, é necessário realizar a transformada inversa de Laplace na Equação (3.7). O Teorema ou Fórmula Integral de Cauchy diz que [34]:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\partial V} \frac{f(w)}{w - z_0} dw, \quad (3.9)$$

em que  $\partial V$  é uma curva de Jordan suave por partes (um contorno fechado e limitado de integração) orientada no sentido anti-horário e  $z_0$  é um ponto qualquer no interior do domínio  $V$ , como ilustrado na Figura 3.2.

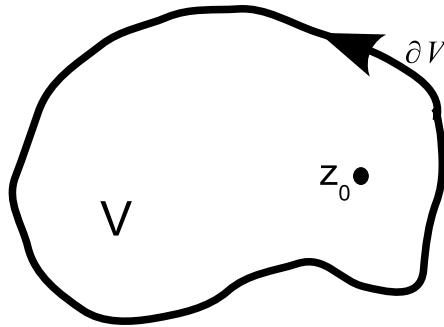


Figura 3.2: Domínio  $V$  definido pela curva de Jordan  $\partial V$  com um ponto qualquer  $z_0$ .

Se o vetor resíduo estiver associado ao respectivo pólo como  $\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{r}', s)/(s - s_{\alpha})$  então realizando a transformada inversa de Laplace, como na Equação (3.3), tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{r}', s)}{s - s_{\alpha}} \right] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \frac{\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{r}', s)}{s - s_{\alpha}} e^{st} ds. \quad (3.10)$$

Utilizando a Fórmula Integral de Cauchy, e sabendo que na Equação (3.10)  $f(w) = \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{r}', s)e^{st}$ , conclui-se que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{r}', s)}{s - s_{\alpha}}\right] = U(t)\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{r}', s_{\alpha})e^{s_{\alpha}t}. \quad (3.11)$$

ou seja, o vetor resíduo no domínio temporal não varia com o tempo. Isso mostra que a comparação feita na Equação (3.8) é bastante útil, já que o vetor resíduo pode ser determinado através das correntes no objeto espalhador. Neste caso, o vetor resíduo no domínio do tempo  $\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{r}', s_{\alpha})$  é nada mais do que o resíduo  $R_{\alpha}$ , que é determinado diretamente no domínio do tempo, com as componentes vetoriais das correntes que foram utilizadas para determinar este resíduo. A função  $U(t)$ , o degrau unitário (valor nulo para  $t < 0$  e valor unitário para  $t \geq 0$ ), é necessária uma vez o sistema é causal, o que equivale a utilizar a transformada unilateral de Laplace. Logo a análise se restringe portanto, em determinar os pólos e resíduos associados a um determinado objeto.

Existem alguns modelos que permitem a extração de pólos e resíduos diretamente da resposta temporal de um objeto. Cada técnica tem sua especificidade, mas têm em comum a capacidade de modelar funções através de senóides exponencialmente amortecidas. Alguns modelos para sinais determinísticos têm sido utilizados na análise de antenas e propagação de canais rádio com maior frequência. Este modelos são o método de Prony [35], o método do Matrix-Pencil [36], a técnica de ajuste das curvas complexas no domínio da frequência de E. C. Levy [37] e o equivalente no domínio da frequência de Prony [38].

Entre os métodos para extração dos pólos de um objeto, a partir de sua resposta temporal, os mais utilizados são os métodos de Prony e o Matrix Pencil, pois trabalham diretamente com amostras do sinal temporal. O método do Matrix-Pencil, além de ser mais eficiente, é mais robusto a ruídos do que o método de Prony. Para extração de pólos de respostas obtidas através de medições de campos, a robustez em relação à ruídos é fundamental. Porém, caso os pólos sejam extraídos de respostas numéricas, o Matrix Pencil é mais eficiente o que o torna uma escolha apropriada [10].

## Matrix Pencil

Considere uma função  $y(t)$  que representa, por exemplo, a corrente como função do tempo em um dado objeto tridimensional que espalha campos incidentes de acordo com sua geometria e suas características eletromagnéticas. Esta corrente é a resposta transitória a uma determinada excitação. Considerando somente o *Late Time*, é possível modelar a resposta como descrito pela Equação (3.6) se o objeto espalhador é linear e invariante no tempo (LTI). Sendo o objeto LTI, então ele pode ser modelado como uma soma ponderada de autofunções completas no espaço que, no caso, são representadas pelo termo  $e^{s_i t}$ , em que  $s_i$  são os pólos do sistema. O fato das autofunções serem completas implica que qualquer função pode ser modelada como uma soma ponderada destas autofunções.

A resposta temporal de um determinado objeto, é calculada por algum método numérico, ou é simplesmente a resposta analítica amostrada. A resposta temporal terá  $N$  amostras espaçadas por intervalos regulares de  $\Delta t$ . Desta forma, definindo-se a variável  $z_i = e^{s_i \Delta t}$ , a Equação (3.6) pode ser escrita como:

$$y_k = y(k\Delta t + T_0) = \sum_{i=1}^M R_i z_i^k \quad k = 0, \dots, N - 1, \quad (3.12)$$

em que  $T_0$  representa o tempo no qual o efeito do *Early Time* se reduziu a níveis relativamente desprezíveis (usualmente  $T_0 = 0$ ). A representação é completa quando  $M$ ,  $R_i$  e  $z_i$  são determinados. Segue-se a formulação do *Matrix Pencil* para encontrar estas grandezas.

Se duas matrizes  $\bar{\mathbf{A}}$  e  $\bar{\mathbf{B}}$  são relacionadas de forma que é possível escrever

$$L(\lambda) = \bar{\mathbf{A}} - \lambda \bar{\mathbf{B}} \quad (3.13)$$

com  $\lambda \in \mathbb{C}$ , então o grupo de todas as matrizes possíveis para  $L(\lambda) \in \mathbb{C}$  é chamado *Matrix Pencil* (algo como *Feixe de Matrizes*). Este caso mais simples é chamado *Matrix Pencil* linear. Uma maneira alternativa de representar o *Matrix Pencil* é através de um par de matrizes como  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$ . Um determinado *Matrix Pencil*  $L(\lambda)$  é chamado regular

se existe, ao menos, um valor para  $\lambda$  tal que  $\det(f(\lambda)) \neq 0$ . Este valor de  $\lambda$ , solução do determinante, é denominado *autovalor* do *Matrix Pencil*, ou seja,  $\lambda$  é autovalor de  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$ .

Para o caso geral, tem-se [39]

$$L(\lambda) = \sum_{i=0}^l \bar{\mathbf{A}}_i \lambda^i, \quad (3.14)$$

em que  $L(\lambda) \in \mathbb{C}$  é chamado *Matrix Pencil* de grau  $l$ . As matrizes  $\bar{\mathbf{A}}_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$  são tais que  $\bar{\mathbf{A}}_l \neq \mathbf{0}$ .

Considerando a Equação (3.12), define-se duas matrizes  $\bar{\mathbf{Y}}_1$  e  $\bar{\mathbf{Y}}_2$  como:

$$\bar{\mathbf{Y}}_1 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_L \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-L} & y_{N-L+1} & \cdots & y_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

e

$$\bar{\mathbf{Y}}_2 = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{L-1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-L-1} & y_{N-L} & \cdots & y_{N-2} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

em que a formulação apropriada foi desenvolvida em [36]. Estas matrizes podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Y}}_1 &= \bar{\mathbf{Z}}_1 \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{Z}}_0 \bar{\mathbf{Z}}_2, \\ \bar{\mathbf{Y}}_2 &= \bar{\mathbf{Z}}_1 \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{Z}}_2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

em que

$$\bar{\mathbf{Z}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-L-1} & z_2^{N-L-1} & \cdots & z_M^{N-L-1} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

$$\bar{\mathbf{Z}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{L-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{L-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_M & \cdots & z_M^{L-1} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

$$\bar{\mathbf{Z}}_0 = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_M \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

e

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_M \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Através das definições destas matrizes, é possível escrever o *Matrix Pencil* como:

$$\bar{\mathbf{Y}}_1 - \lambda \bar{\mathbf{Y}}_2 = \bar{\mathbf{Z}}_1 \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{Z}}_0 - \lambda \bar{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{Z}}_2. \quad (3.22)$$

Sabendo que  $M \leq L \leq N - M$ , a matriz  $\bar{\mathbf{Y}}_1 - \lambda \bar{\mathbf{Y}}_2$  tem *rank*  $M$  [40]. Entretanto, se  $\lambda = z_i$ , com  $i = 1, \dots, M$ , o *rank* é reduzido para  $M - 1$ . Desta forma, é possível concluir que  $z_i$ , com  $i = 1, \dots, M$ , são os autovalores generalizados do par  $(\bar{\mathbf{Y}}_1, \bar{\mathbf{Y}}_2)$ . Utilizando-se os autovetores generalizados  $r_i$  que são os vetores solução associados a cada autovalor  $z_i$  é possível escrever

$$\bar{\mathbf{Y}}_1 \bar{\mathbf{r}}_i = z_i \bar{\mathbf{Y}}_2 \bar{\mathbf{r}}_i \quad (3.23)$$

que pode ser escrito na forma equivalente

$$(\bar{\mathbf{Y}}_2^\dagger \bar{\mathbf{Y}}_1 - z_i \bar{\mathbf{I}}) \bar{\mathbf{r}}_i = \bar{\mathbf{0}}, \quad (3.24)$$

em que  $\bar{\mathbf{Y}}_2^\dagger$  é a pseudo-inversa de Moore-Penrose de  $\bar{\mathbf{Y}}_2$  [41]. Através de (3.24) é possível extrair os autovalores  $z_i$  de  $\bar{\mathbf{Y}}_2^\dagger \bar{\mathbf{Y}}_1$ .

Uma vez conhecido  $M$  e  $z_i$  para  $i = 1, \dots, M$ , as amplitudes dos pólos ou os resíduos são facilmente obtidos através de mínimos quadrados aplicado à expressão:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-2} & \cdots & z_M^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

O procedimento apresentado é eficiente e produz bons resultados na ausência de erros numéricos e ruídos aleatórios. Contudo, nas aplicações do *Matrix Pencil* em problemas reais, os dados obtidos são perturbados com erros numéricos ou ruídos. Neste caso, as perturbações corrompem os autovalores resultando em erros na escolha de  $M$  e na solução dos pólos  $z_i$  e dos resíduos  $R_i$ .

Um método alternativo e mais estável é o *Total Least-Squares Matrix Pencil* (TLSMP) [36], que pode ser entendido como *feixe de matrizes utilizando os mínimos quadrados totais*. O desenvolvimento do método se inicia definindo a matriz

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_L \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-L-1} & y_{N-L} & \cdots & y_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

A decomposição em valores singulares (*Singular Value Decomposition* - SVD) de  $\bar{\mathbf{Y}}$  é dada por

$$\bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{V}}_1^T, \quad (3.27)$$

em que  $\bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{(N-L) \times (N-L)}$  é a matriz unitária cujas colunas contém os autovetores de  $\bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{Y}}^T$ ,  $\bar{\mathbf{V}}_1 \in \mathbb{C}^{(L+1) \times (L+1)}$  é unitária em que as colunas são os autovetores de  $\bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{Y}}$  e

$\bar{\mathbf{D}} \in \mathbb{C}^{(N-L) \times (L+1)}$  é a matriz diagonal com valores singulares de  $\bar{\mathbf{Y}}$  (raiz quadrada dos autovalores de  $\bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{Y}}$ ) na diagonal principal em ordem decrescente.

Se as amostras  $y_n$  estiverem livres de ruídos,  $\bar{\mathbf{Y}}$  terá exatamente  $M$  valores singulares diferentes de zero. Contudo, devido aos ruídos, os valores singulares iguais a zero são perturbados, resultando em vários pequenos valores singulares diferentes de zero. Este erro devido ao ruído pode ser suprimido eliminando estes valores singulares espúrios de  $\bar{\mathbf{D}}$  e dos seus correspondentes vetores singulares à esquerda e à direita.

Primeiro define-se  $\bar{\mathbf{D}}' = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$  como a matriz diagonal em que  $M$  representa os maiores valores singulares de  $\bar{\mathbf{Y}}$ . Em seguida define-se  $\bar{\mathbf{U}}'$  e  $\bar{\mathbf{V}}'$  como submatrizes de  $\bar{\mathbf{U}}$  e  $\bar{\mathbf{V}}$  correspondendo a estes valores singulares de  $\bar{\mathbf{D}}' \in \mathbb{C}^{M \times M}$ .

$$\bar{\mathbf{U}}' = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,M} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & u_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N-L,1} & u_{N-L,2} & \cdots & u_{N-L,M} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

$$\bar{\mathbf{V}}' = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,M} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N-L,1} & v_{N-L,2} & \cdots & v_{N-L,M} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Desta forma, a matriz  $\bar{\mathbf{Y}}'$  é representada como:

$$\bar{\mathbf{Y}}' = \bar{\mathbf{U}}' \bar{\mathbf{D}}' \bar{\mathbf{V}}'^T. \quad (3.30)$$

Através de uma comparação direta entre a definição da matriz  $\bar{\mathbf{Y}}$  em (3.26) com  $\bar{\mathbf{Y}}_1$  e  $\bar{\mathbf{Y}}_2$  em (3.15) e (3.16) obtém-se

$$\bar{\mathbf{Y}} = [\bar{\mathbf{c}}_1, \bar{\mathbf{Y}}_1] = [\bar{\mathbf{Y}}_2, \bar{\mathbf{c}}_{L+1}], \quad (3.31)$$

em que  $\bar{\mathbf{c}}_i$  representa a  $i$ -ésima coluna de  $\bar{\mathbf{Y}}$  e os colchetes representam a concatenação entre esta coluna e a matriz  $\bar{\mathbf{Y}}_1$ , na sequência apresentada. Assim, usando  $\bar{\mathbf{Y}}'$  ao invés

de  $\bar{\mathbf{Y}}$  em (3.31) resulta na filtragem do ruído tanto em  $\bar{\mathbf{Y}}_1$  quanto em  $\bar{\mathbf{Y}}_2$ . Através da Equação (3.30) e (3.31) é possível escrever

$$\bar{\mathbf{Y}}_1 = \bar{\mathbf{U}}' \bar{\mathbf{D}}' \bar{\mathbf{V}}_2'^T \quad (3.32)$$

e

$$\bar{\mathbf{Y}}_2 = \bar{\mathbf{U}}' \bar{\mathbf{D}}' \bar{\mathbf{V}}_1'^T, \quad (3.33)$$

em que  $\bar{\mathbf{V}}_1'$  e  $\bar{\mathbf{V}}_2'$  são iguais a  $\bar{\mathbf{V}}'$  sem a última e a primeira linhas, respectivamente. Utilizando (3.32) e (3.33), os pólos do sinal (autovalores de  $\bar{\mathbf{Y}}_2^\dagger \bar{\mathbf{Y}}_1$ ) são dados pelos autovalores não nulos de

$$\{\bar{\mathbf{V}}_1'^T\}^\dagger \bar{\mathbf{V}}_2'^T, \quad (3.34)$$

os quais são os mesmos autovalores de

$$\bar{\mathbf{V}}_2'^T \{\bar{\mathbf{V}}_1'^T\}^\dagger. \quad (3.35)$$

Existem diversos critérios para escolha do número de modos, sendo estes ainda motivo de estudo. Entretanto, este fato não é um limitador da técnica já que superestimar o valor de  $M$ , produzirá modos sem expressão, com baixa amplitude considerados espúrios. Porém, subestimar o valor de  $M$  causará erros na representação. Contudo, a estimativa de  $M$  exige algum conhecimento prévio do problema para definir o limite inferior deste termo.

### 3.2.2 Seleção dos Pólos Naturais

A extração dos pólos à partir das densidades de corrente impulsional, permitiu o uso do SEM para construir a altura efetiva de uma antena. No entanto, os pólos extraídos foram totalmente utilizados, sem nenhum critério para escolha destes. De fato, é interessante caracterizar um objeto através de poucos parâmetros. Cada pólo contribui



para esta caracterização em maior ou menor grau, então é importante selecionar os pólos que contribuem mais e desprezar os que contribuem menos. É possível obter a resposta utilizando apenas um número reduzido de pólos convenientemente escolhidos através de critérios pré-definidos [42]. Dentre os  $M$  pólos extraídos, haverá um número inferior a  $M$  de pólos que correspondem aos pólos físicos (naturais) ou às frequências naturais do objeto [42]. Estes pólos são complexos e conjugados com parte real negativa. Na extração dos pólos não existirão apenas pólos naturais mas também pólos parasitas que não tem seu complexo conjugado ou parte real positiva. Estes pólos parasitas correspondem à efeitos do *Early Time* que não podem ser representados por exponenciais amortecidas [16]. Para garantir que todos os pólos naturais sejam extraídos, escolhe-se um alto número de pólos  $M$  na extração e procura-se separar os pólos parasitas dos pólos naturais, além de desprezar pólos de pouca contribuição na resposta.

### Formulação

A fim de caracterizar um objeto através de seus pólos naturais, é necessário estabelecer um critério para selecionar, entre os pólos extraídos, quais fornecerão uma contribuição significativa para a construção da resposta. Para contabilizar a força do pólo, o resíduo associado a este pólo poderia ser utilizado. Porém, o resíduo por si só não é suficiente para contabilizar a intensidade da contribuição do pólo. Por este motivo, alguns critérios foram definidos em [42] para separar pólos naturais de contribuição significativa.

O primeiro passo consiste em reescrever o conjunto de pólos em função de  $1/|\sigma_\alpha|$ . Quanto menor o fator de amortecimento  $|\sigma_\alpha|$ , mais tempo a senóide amortecida associada a este pólo natural durará. Desta maneira,  $|\sigma_\alpha|$  corresponde ao *tempo de vida* da ressonância descrita pelo pólo natural. Assim sendo, são definidos pesos que expressam a contribuição de cada pólo utilizando o fator de amortecimento e o resíduo, ou seja,

$$P_\alpha = \frac{|R_\alpha|}{|\sigma_\alpha|}. \quad (3.36)$$

O peso de maior amplitude, expresso por  $P_d = |R_d|/|\sigma_d|$ , é utilizado para normalizar os

pesos  $P_\alpha$ . Desta maneira, o primeiro critério para seleção de pólos pode ser estabelecido desprezando-se os pesos de baixa amplitude. Um valor de limiar  $Th$  pode ser utilizado e, desta maneira, obtém-se

$$\frac{P_\alpha}{P_d} < Th. \quad (3.37)$$

Pólos que atenderem ao critério estabelecido pela Equação (3.37) são eliminados.

O critério estabelecido pela Equação (3.37) não é suficiente para todos os casos. Em alguns objetos, tais como superfícies maiores de discos e esferas, pólos que contribuem pouco para a resposta não são eliminados pelo critério  $P_\alpha/P_d < Th$ . O que ocorre é que alguns pólos com fator de amortecimento  $|\sigma_\alpha|$  muito alto, amortecem a resposta mesmo antes do *Late Time* iniciar. Então para estes casos um critério adicional deve ser utilizado. Basicamente, um pólo e um resíduo definem uma ressonância que é uma senóide exponencialmente amortecida. Se este amortecimento se dá antes de  $T_L$  que é o instante inicial *Late Time*, este pólo pode ser desprezado. Devem ser desprezados pólos nos quais

$$|\sigma_\alpha| > |\sigma_{max}|, \quad (3.38)$$

em que  $e^{(-|\sigma_{max}|T_L)} \approx Th$ . O termo  $|\sigma_{max}|$  representa o coeficiente de decaimento da exponencial [42].

Baseado nos dois critérios definidos pelas Equações (3.37) e (3.38), e eliminando pólos com parte real positiva e sem correspondente complexo conjugado, tem-se um critério para reduzir o número de pólos que representam a resposta.

### 3.2.3 Deconvolução

Ao utilizar a técnica do SEM, as singularidades são obtidas a partir da resposta do objeto espalhador. É necessário então excitar o objeto com um grande conteúdo espectral, ou seja, a excitação deve cobrir a faixa em que se encontram as frequências naturais do objeto. O pulso Gaussiano e a derivada do pulso Gaussiano são formas de onda com grande faixa de frequências e esta faixa está diretamente relacionada com a largura do pulso.

Entretanto, pulsos demasiadamente estreitos podem causar problemas como a dispersão numérica que ocorre ao violar a malha no FDTD, impedindo que altas frequências sejam inseridas no ambiente computacional.

O impulso ideal é uma função que tem sua resposta em frequência infinita, ou seja, seu espectro de frequências contém todas as frequências com igual amplitude. Contudo em rotinas de cálculo numérico de campos no domínio do tempo, não é possível implementar este impulso uma vez que o mesmo não é fisicamente implementável.

Através da técnica denominada *deconvolução numérica* é possível extrair a resposta ao impulso, a partir do conhecimento prévio da resposta a um pulso Gaussiano ou sua derivada. Esta técnica é descrita em [43] e [44].

### Formulação

Considere que  $x(t)$  seja uma excitação banda-larga e  $y(t)$  seja a forma de onda da saída de um sistema. Por exemplo, a excitação pode ser a tensão no *gap* de uma antena dipolo e  $y(t)$  a corrente em um dado ponto deste dipolo. Se este sistema é causal, passivo e descrito por equações diferenciais lineares com coeficiente constantes, e que as condições iniciais são nulas, então este sistema pode ser descrito pela integral de convolução [44]:

$$y(t) = \int_0^t h(t - t_d)x(t_d)dt_d = h(t) * x(t), \quad (3.39)$$

em que  $*$  denota convolução e  $h(t)$  é a resposta ao impulso deste sistema. A função  $h(t)$  pode ser formalmente definida como

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \right], \quad (3.40)$$

em que  $\mathcal{F}^{-1}$  é a transformada inversa de Fourier,  $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$  e  $Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$ . Os dados são discretizados para serem utilizados em rotinas numéricas como por exemplo o FDTD. Assim sendo, sendo  $\Delta t$  o passo de tempo e, portanto, um instante de tempo discreto pode ser determinado por  $t = n\Delta t$ , no qual  $n \in \mathbb{Z}$ .

A resposta ao impulso pode ser obtida através da Equação (3.40). Para excitações pulso Gaussiano e derivada do pulso Gaussiano, a resposta ao impulso pode ser obtida com precisão por uma fórmula simples envolvendo apenas operações no domínio do tempo. Com este intuito, o Método de Expansão em Momentos (MEM) foi desenvolvido em [45] para aplicações em restauração de imagens. Posteriormente, em [44] o MEM foi aplicado em dispositivos de microondas. Considere as excitações pulso Gaussiano e derivada do pulso Gaussiano representadas nas Equações (3.41) e (3.42)

$$x_G(t) = e^{-\frac{(t-t_d)^2}{2T^2}}, \quad (3.41)$$

$$x_{DG}(t) = -\frac{t-t_d}{T} e^{-\frac{(t-t_d)^2}{2T^2}}, \quad (3.42)$$

em que  $T$  controla a largura do pulso e  $t_d$  é o atraso do pulso. As Equações (3.41) e (3.42) são equivalentes às equações discretizadas (2.75) e (2.77) em que  $t = n\Delta t$ ,  $t_d = \beta\Delta t$  e  $T = 4\sqrt{2}\Delta t$ . Define-se em [44] o parâmetro  $t_0 = jX^{(1)}(0)/X(0)$  para a derivada do pulso Gaussiano e  $t_0 = jX^{(2)}(0)/X^{(1)}(0)$  para o pulso Gaussiano em que  $X^{(n)}(0) = \partial^n X(\omega)/\partial\omega^n|_{\omega=0}$ . O tempo  $t_0$  é um deslocamento temporal que tem a função de ajustar o pulso de forma que o centro de gravidade deste fique em  $t = 0$ . Sua forma discretizada é  $n_0 = \text{INT}(t_0/\Delta t)$ , em que a função INT arredonda seu argumento para o próximo inteiro. A formulação da resposta impulsional para o pulso Gaussiano e para a derivada do pulso Gaussiano como descrita em [44] é dada pelas Equações (3.43) e (3.44) e os coeficientes  $a_0$ ,  $a_2$  e  $a_4$  que são chamados *Momentos da Deconvolução* são descritos na Tabela ??.

$a_n$	Pulso Gaussiano	Derivada do Pulso Gaussiano
$a_0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}T}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}Te^{1/2}}$
$a_2$	$-a_0T^2$	$-a_0T^2$
$a_4$	$3a_0T^4$	$6a_0T^4$

Tabela 3.1: Momentos da Deconvolução para o Pulso Gaussiano e Derivada do Pulso Gaussiano

$$\begin{aligned}
h(n) = & \frac{a_4}{24\Delta t^4} [y(n+2+n_0) + y(n-2+n_0)] + \\
& \left( \frac{a_2}{2\Delta t^2} - \frac{a_4}{6\Delta t^4} \right) [y(n+1+n_0) + y(n-1+n_0)] + \\
& \left( a_0 - \frac{a_2}{\Delta t^2} + \frac{a_4}{4\Delta t^4} \right) [y(n+n_0)]
\end{aligned} \tag{3.43}$$

e

$$\begin{aligned}
h(n) = & a_0 \Delta t \sum_{k=0}^{n+n_0} y(k+n_0) + \\
& \frac{a_4}{48\Delta t^3} [y(n+2+n_0) + y(n-2+n_0)] + \\
& \left( \frac{a_2}{4\Delta t} - \frac{a_4}{24\Delta t^3} \right) [y(n+1+n_0) - y(n-1+n_0)],
\end{aligned} \tag{3.44}$$

O procedimento para aplicação do método da deconvolução se inicia na definição de  $x(t)$  e  $y(t)$ . Através da excitação  $x(t)$  pulso Gaussiano ou derivada do pulso Gaussiano em um determinado sistema, obtém-se a resposta  $y(t)$ . Utilizando as Equações (3.43) e (3.44), obtém-se a resposta impulsional discretizada  $h(n)$ . Este procedimento pode ser aplicado para obter a resposta impulsional de antenas. Neste caso,  $x(t)$  será a tensão de excitação pulso Gaussiano ou derivada do pulso Gaussiano e  $y(t)$  a densidade de corrente em um determinado ponto da antena. A resposta ao impulso da antena será então dada por  $h(n)$ , obtido pela aplicação da tensão de excitação e da densidade de corrente nas Equações (3.43) e (3.44).

### 3.3 Altura Efetiva: Formulação Semi-Analítica

A Equação (2.49) expressa, de forma geral, a equação da altura efetiva no domínio do tempo. É preciso, então, encontrar as densidades de correntes impulsionalas perpendiculares (sem a componente  $\hat{r}$ ). Para o cálculo da altura efetiva, é necessário encontrar as densidades de corrente elétrica e magnética impulsionalas na superfície do objeto espalhador, ou seja, a densidade de corrente elétrica e magnética quando o objeto é excitado por

um pulso estreito. Estas densidades de corrente podem ser calculadas numericamente, mas para se obter uma forma analítica da altura efetiva, estas densidades de corrente impulsionalis podem ser determinadas através do SEM. É possível escrever:

$$\tilde{\mathbf{J}}^\delta(\mathbf{r}', s) = \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\tilde{\eta}_{0\alpha}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{e}, s) \boldsymbol{\nu}_{\alpha}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{r}')}{s - s_{\alpha}} \right\} \quad (3.45)$$

e

$$\tilde{\mathbf{M}}^\delta(\mathbf{r}', s) = \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\tilde{\eta}_{0\alpha}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{e}, s) \boldsymbol{\nu}_{\alpha}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{r}')}{s - s_{\alpha}} \right\}. \quad (3.46)$$

Os somatórios nas Equações (3.45) e (3.46) é realizado sobre todas as singularidades calculadas para o objeto em questão. Como as singularidades serão extraídas da resposta temporal fornecida pelo objeto espalhador, então as Equações (3.45) e (3.46) podem ser reescritas utilizando-se a Equação (3.8), ou seja,

$$\tilde{\mathbf{J}}^\delta(\mathbf{r}', s) = \sum_{\alpha} \frac{\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{r}', s)}{s - s_{\alpha}} \quad (3.47)$$

e

$$\tilde{\mathbf{M}}^\delta(\mathbf{r}', s) = \sum_{\alpha} \frac{\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{r}', s)}{s - s_{\alpha}}. \quad (3.48)$$

Realizando a transformada inversa de Laplace e aplicando a Fórmula Integral de Cauchy, como nas Equações (3.9), (3.10) e (3.11), as densidades de corrente elétrica e magnética impulsionalis podem ser representadas como

$$\mathbf{J}^\delta(\mathbf{r}', t) = \sum_{\alpha} U(t) \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) e^{s_{\alpha} t} \quad (3.49)$$

e

$$\mathbf{M}^\delta(\mathbf{r}', t) = \sum_{\alpha} U(t) \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) e^{s_{\alpha} t}. \quad (3.50)$$

A Equação (2.49) mostra que a densidade de corrente elétrica impulsional deve ser perpendicular. Para encontrar a densidade de corrente elétrica impulsional e perpendicular, basta extrair a componente radial da mesma:

$$\mathbf{J}_{\perp}^{\delta}(\hat{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{J}^{\delta}(\hat{\mathbf{r}}, t) - [\mathbf{J}^{\delta}(\hat{\mathbf{r}}, t) \cdot \hat{\mathbf{r}}]\hat{\mathbf{r}}. \quad (3.51)$$

Extrair a componente radial é equivalente a escrever apenas as componentes  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\phi}$ , e desprezar a componente  $\hat{\mathbf{r}}$ :

$$\mathbf{J}_{\theta}^{\delta}(\hat{\mathbf{r}}, t) = \cos \theta \cos \phi \mathbf{J}_x^{\delta}(\hat{\mathbf{r}}, t) + \cos \theta \sin \phi \mathbf{J}_y^{\delta}(\hat{\mathbf{r}}, t) - \sin \theta \mathbf{J}_z^{\delta}(\hat{\mathbf{r}}, t) \quad (3.52)$$

e

$$\mathbf{J}_{\phi}^{\delta}(\hat{\mathbf{r}}, t) = -\sin \phi \mathbf{J}_x^{\delta}(\hat{\mathbf{r}}, t) + \cos \phi \mathbf{J}_y^{\delta}(\hat{\mathbf{r}}, t). \quad (3.53)$$

As Equações (3.45) e (3.46) indicam que os vetores resíduos  $\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(J)}(\mathbf{r}', s_{\alpha})$  e  $\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(M)}(\mathbf{r}', s_{\alpha})$  têm as mesmas componentes vetoriais das densidades de corrente elétrica e magnética. Desta maneira, a obtenção das componentes perpendiculares pode ser realizada tanto a partir do vetor resíduo, quanto da densidade de corrente, ou seja, os passos mostrados nas Equações (3.51), (3.52) e (3.53), podem ser realizados diretamente, utilizando o vetor resíduo  $\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(J)}(\mathbf{r}', s_{\alpha})$ , ao invés da densidade de corrente  $\mathbf{J}^{\delta}(\mathbf{r}', t)$ .

Ao substituir as Equações (3.51) e (3.50) em (2.49), o argumento temporal das densidades de corrente é o atraso  $\tau + \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'/c$ , em que  $\tau = t - r/c$ . Expandindo o termo  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' &= (\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}) \cdot (x' \hat{\mathbf{x}} + y' \hat{\mathbf{y}} + z' \hat{\mathbf{z}}) \\ &= x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi + z' \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.54)$$

A definição da altura efetiva também exige uma diferenciação no tempo. Como o tempo  $t$  não é variável de integração na Equação (2.49), a diferenciação pode ser realizada diretamente no integrando, ou seja, nas densidades de corrente impulsional. A

diferenciação das Equações (3.49) e (3.50) tem uma pequena particularidade, que pode ser mostrada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[u(t-t_a)f(t-t_a)] &= \frac{\partial}{\partial t}[u(t-t_a)] \cdot f(t-t_a) + u(t-t_a) \cdot \frac{\partial}{\partial t}[f(t-t_a)] \\ &= \delta(t-t_a)f(t-t_a) + u(t-t_a)f'(t-t_a) \end{aligned} \quad (3.55)$$

em que  $t_a$  é uma constante. Se  $t \neq t_a$ , então o termo  $\delta(t-t_a)f(t-t_a)$  é nulo, pois a função impulso é definida como nula a não ser em  $t = t_a$ . Se, porém,  $t = t_a$ , haverá um valor tendendo ao infinito, caso  $f(0)$  seja diferente de zero. Tanto em sistemas físicos quanto em modelos numéricos, a duração deste instante depende do tempo de subida da função degrau  $u(t-t_a)$ . Supondo que este tempo seja desprezível e a função degrau se aproxime da função degrau ideal (com tempo de subida nulo), então o pulso terá duração muito curta. Pulsos desta natureza aplicados em sistemas físicos, não produzirão resposta mensurável, pois sistemas físicos têm alguma inércia associada que os impede de responder instantaneamente às suas entradas. Este é, na realidade, o conceito de impulso: um pulso com duração tão pequena a ponto de um determinado sistema físico não ter condições de responder a esta excitação devido à sua inércia ainda que este sistema não tenha perdas [46].

Desta forma, se considerarmos que a função degrau expressa nas Equações (3.49) e (3.50) têm seu tempo de subida desprezível, a diferenciação das densidades de corrente expressas nestas equações, em relação ao tempo, podem ser escritas como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathbf{J}_{\perp}^{\delta} \left( \hat{\mathbf{r}}, \tau + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) \right] = \sum_{\alpha} \left\{ s_{\alpha} U \left( t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha \perp}^{(J)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) e^{s_{\alpha} \left( t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right)} \right\} \quad (3.56)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathbf{M}^{\delta} \left( \hat{\mathbf{r}}, \tau + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) \right] = \sum_{\alpha} \left\{ s_{\alpha} U \left( t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(M)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) e^{s_{\alpha} \left( t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right)} \right\}. \quad (3.57)$$



A notação  $\perp$  no vetor resíduo  $\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\perp}^{(J)}(\mathbf{r}', s_\alpha)$  na Equação (3.56) indica que o vetor somente tem componentes perpendiculares. Como este vetor resíduo têm as mesmas componentes vetoriais da densidade de corrente elétrica, o procedimento descrito nas Equações (3.51), (3.52) e (3.53) é o mesmo.

O termo  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'/c$ , como foi dito no último parágrafo da Seção 2.2.1, é desprezível, a não ser que esteja no argumento de uma função exponencial, o que torna sua contribuição significativa. Assim sendo, ele pode ser omitido da função degrau  $U(t - r/c + \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'/c)$ . A altura efetiva  $\mathbf{h}^t(\hat{\mathbf{r}}, t)$  no domínio do tempo obtida a partir do SEM é expressa por

$$\mathbf{h}^t(\hat{\mathbf{r}}, t) = U\left(t - \frac{r}{c}\right) \sum_{\alpha} \left\{ s_{\alpha} e^{s_{\alpha}(t - \frac{r}{c})} \int_{V'} \left[ \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\perp}^{(J)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) + \frac{1}{\eta_0} \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(M)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) \times \hat{\mathbf{r}} \right] e^{s_{\alpha} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}} dV' \right\}. \quad (3.58)$$

De uma forma geral, a integral na Equação (3.58) estará operando sobre o vetor resíduo perpendicular associado à densidade de corrente elétrica e ao vetor resíduo associado à densidade de corrente magnética, (pois estes têm as mesmas componentes vetoriais das densidades de corrente impulsionalis), e a exponencial que contém o atraso de tempo  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'/c$  e depende das coordenadas da fonte. Desta maneira, é possível escrever a altura efetiva analítica no domínio do tempo como:

$$\mathbf{h}^t(\hat{\mathbf{r}}, t) = U\left(t - \frac{r}{c}\right) \sum_{\alpha} \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(h^t)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) e^{s_{\alpha}(t - \frac{r}{c})}, \quad (3.59)$$

em que o índice  $\mathbf{h}^t$  presente em  $\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(h^t)}(\mathbf{r}', s_{\alpha})$  se refere ao vetor que é a integração dos elementos de  $\mathbf{h}^t(\hat{\mathbf{r}}, t)$  que são dependentes das coordenadas da fonte  $V'$  e  $\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(h^t)}(\mathbf{r}', s_{\alpha})$  é dado por

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(h^t)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) = \int_{V'} s_{\alpha} \left[ \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\perp}^{(J)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) + \frac{1}{\eta_0} \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(M)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) \times \hat{\mathbf{r}} \right] e^{s_{\alpha} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}} dV'. \quad (3.60)$$

Este desenvolvimento mostra que a altura efetiva pode ser encontrada através das singularidades presentes no objeto de estudo de forma analítica e diretamente no domínio do tempo. Entretanto, através da transformada de Laplace, é possível definir a altura efetiva

no domínio da frequência ( $s = j\omega$ ). Com a utilização das Equações (3.2), (3.9) e (3.49) em (3.59) e (3.60), obtém-se

$$\mathbf{h}^t(\hat{\mathbf{r}}, s) = e^{-s\frac{r}{c}} \sum_{\alpha} \frac{\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{h}^t)}(\mathbf{r}', s)}{s - s_{\alpha}}, \quad (3.61)$$

em que

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{h}^t)}(\mathbf{r}', s) = \int_{V'} s \left[ \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\perp}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{r}', s) + \frac{1}{\eta_0} \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{r}', s) \times \hat{\mathbf{r}} \right] e^{s(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c})} dV'. \quad (3.62)$$

As Equações (3.59), (3.60), (3.61) e (3.62) definem de forma unificada e no domínio do tempo e frequência a altura efetiva. É uma ferramenta para análise de grandezas na região de campo distante e têm uma forma semi-analítica, já que as singularidades são determinadas numericamente. É possível no entanto, definir uma formulação completamente analítica se as singularidades forem extraídas analiticamente e não numericamente.

# Capítulo 4

## ESTUDO DE CASOS

Baseando-se no desenvolvimento dos capítulos anteriores, é possível combinar a representação da altura efetiva com a determinação das ressonâncias naturais para encontrar as soluções desejadas, ou seja, as características da antena em forma semi-analítica unificada entre tempo e frequência. Para tal, se faz necessário o desenvolvimento de rotinas computacionais que executem as tarefas numéricas e sejam capazes de testar as soluções, comparando as mesmas com resultados presentes na literatura científica.

O processo de determinação da altura efetiva, de forma semi-analítica, se inicia com o cálculo dos campos radiados pela antena quando esta é excitada por uma fonte impulsional. Estes campos podem ser calculados numericamente ou analiticamente e, através destes, é possível determinar as densidades de corrente na superfície condutora da antena ou na abertura de uma antena refletora para o caso do método da Abertura ser utilizado. As densidades de corrente são utilizadas para calcular as singularidades da antena, através da técnica do Matrix Pencil. E, por fim, utilizando as singularidades obtidas pelo Matrix Pencil, aplica-se o SEM para encontrar a expressão analítica da altura efetiva da antena.

Para realizar o cálculo dos campos radiados devido a uma excitação impulsional em antenas de fios foi utilizada a formulação de Kunz e Luebbers para o FDTD [3] implementada em *Fortran*. Os campos na abertura da antena refletora foram calculados analiticamente e as equações das densidades de correntes elétricas e magnéticas na abertura foram imple-

mentadas em *Fortran* para extração das singularidades. Os cálculos das singularidades, a partir da resposta temporal, também foram realizados em *Fortran*. Para testes de resultados, a altura efetiva é obtida a partir das singularidades e o campo radiado distante determinado através da altura efetiva é, então, comparado com o campo distante fornecido pelo FDTD e através do diagrama de radiação, obtido analiticamente e pelo MOM. A comparação dos campos e diagramas de radiação obtidos através da altura efetiva, com a solução de referência, é melhor realizada utilizando-se ambientes gráficos. O software *Matlab* foi utilizado devido à grande facilidade em trabalhar com gráficos originados de séries temporais.

## 4.1 Antena Dipolo

Com o intuito de averiguar a metodologia para análise de antenas através da altura efetiva, o estudo do dipolo, que é uma antena largamente estudada e com resultados amplamente conhecidos, foi inicialmente realizado. A fim de tomar como referência os resultados obtidos em [47] e [28], o dipolo escolhido tem o comprimento de  $h = 14\text{ cm}$  e raio  $a = h/150 = 0,933\text{ mm}$  e está alinhado ao eixo  $z$ . A frequência máxima de análise para estes resultados, é obtida tomando como base a frequência de operação do dipolo ou um múltiplo desta.

### 4.1.1 Representação do Dipolo através do FDTD

Como o objetivo de se utilizar o FDTD é extrair a resposta impulsional da antena, é necessário excitar a mesma com um pulso estreito já que o impulso (delta de Dirac) não é implementável (violaria a resolução mínima da malha devido às frequências muito altas). O pulso Gaussiano estreito e a derivada do pulso Gaussiano estreito podem ser utilizados neste caso, como descrito em (2.75) e (2.77) com  $\beta = 32$  [3], o que garantirá que, para um dado passo de tempo, a máxima frequência presente no pulso não irá provocar dispersão significativa.

Inicialmente a representação do dipolo de meia onda será realizada e a análise será posteriormente estendida para outras frequências de interesse a fim de verificar o comportamento da resposta através desta representação em diferentes casos.

### Definição de Parâmetros

Inicialmente é necessário dimensionar as células e o passo de tempo no FDTD. É importante realizar o dimensionamento corretamente, pois a precisão dos resultados é influenciada pela dispersão numérica, como visto na Seção 2.3.2. A frequência de operação do dipolo de meia onda é

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{2h} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{2 \times 0,14 \text{ m}} = 1,07 \text{ GHz.} \quad (4.1)$$

A frequência máxima de operação é escolhida em relação à frequência de operação do dipolo. A escolha da frequência máxima como  $f_{max} = 2f_0$  é a aproximação utilizada em [3] que produz bons resultados. Na realidade, frequências superiores a estas existem, porém a dispersão causada é usualmente desprezível se a antena é dividida em um número apropriado de segmentos. Sabendo que  $N_\lambda = \lambda_{min}/\Delta$  para que a dispersão seja minimizada e que  $f_{max}\lambda_{min} = c$ , então é possível escrever

$$N_\lambda = \frac{\lambda_{min}}{\Delta} \Rightarrow N_\lambda = \frac{c}{f_{max}\Delta} \Rightarrow \Delta = \frac{c}{N_\lambda f_{max}}. \quad (4.2)$$

Invertendo os termos e multiplicando ambos por  $h$  que é o tamanho do dipolo tem-se:

$$\frac{h}{\Delta} = \frac{hN_\lambda f_{max}}{c}. \quad (4.3)$$

O termo  $h/\Delta$  pode ser entendido como o número de segmentos no qual a antena é dividida,  $N_{seg} \in \mathbb{N}$ . Assim, o número de segmentos no qual a antena deve ser dividida pode ser determinado de acordo com a frequência máxima que é inserida no ambiente computacional do FDTD, ou seja,

$$N_{seg} = INT\left(\frac{hf_{max}}{c} N_\lambda\right). \quad (4.4)$$

Considerando então  $f_0 = 1,07 \text{ GHz}$  e  $f_{max} = 2f_0$ , então  $f_{max} = 2,14 \text{ GHz}$  e assim  $N_{seg} = N_\lambda$ . Como discutido na Seção 2.3.2, baixos níveis de dispersão podem ser obtidos utilizando  $N_\lambda$  na faixa entre 10 e 20. Desta forma, ao utilizar  $N_\lambda = 10$ , tem-se que  $N_{seg} = 10$ . Como o dipolo é excitado através de uma fonte colocada no *gap* que se encontra no centro do mesmo, e o dipolo é simétrico, então o número de segmentos ímpar é apropriado, uma vez que o segmento exatamente no centro, é onde o *gap* é definido. Desta forma, para a antena em questão, o uso de  $N_{seg} = 11$  é uma escolha apropriada.

Definindo as células do FDTD como cúbicas e o número dos segmentos que compõem a antena esteja definido, o tamanho da célula na malha FDTD pode ser diretamente determinado. Assim a célula cúbica de dimensão  $\Delta$  é determinada como

$$\Delta = \frac{h}{N_{seg}} = \frac{0,14 \text{ m}}{11} = 1,2727 \text{ cm}. \quad (4.5)$$

O passo de tempo é determinado através da condição de estabilidade de Courant, estabelecido na Seção 2.70, ou seja,

$$\Delta t = \frac{\Delta}{\sqrt{3}c} = \frac{0,012727}{\sqrt{3} \cdot 3 \times 10^8} = 2,45 \times 10^{-11} \text{ s}. \quad (4.6)$$

Após a definição destes parâmetros, resta ainda definir o tamanho do espaço computacional, ou seja, o número de células que cada coordenada espacial terá. O espaço cúbico foi definido como duas vezes o tamanho máximo da antena. Isso é suficiente já que o dipolo tem um mínimo de radiação na direção do eixo em que está alinhado. As condições de Mur são utilizadas como camada absorvente.

É importante salientar que, como o diâmetro da antena ( $2a = 0,18667 \text{ cm}$ ) é muito menor do que a célula ( $\Delta = 1,2727 \text{ cm}$ ), a técnica do fio fino é a melhor opção como descrito na Seção 2.3.3.

## Excitação

Com todos os parâmetros definidos, o pulso Gaussiano estreito pode ser representado de acordo com a Equação (2.75). As Figuras 4.1 e 4.2 são as representações gráficas

obtidas através do código escrito para implementação do FDTD.

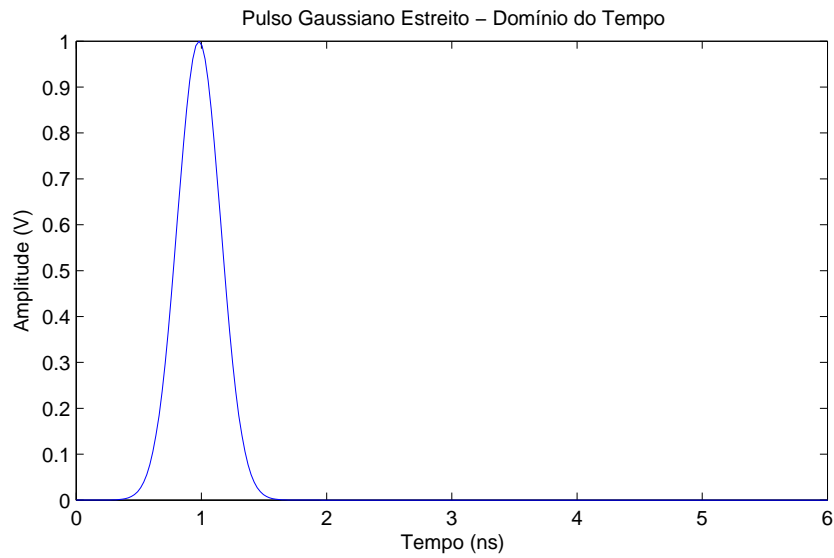


Figura 4.1: Pulso gaussiano estreito com  $\Delta t = 2,45 \times 10^{-11}$  s.

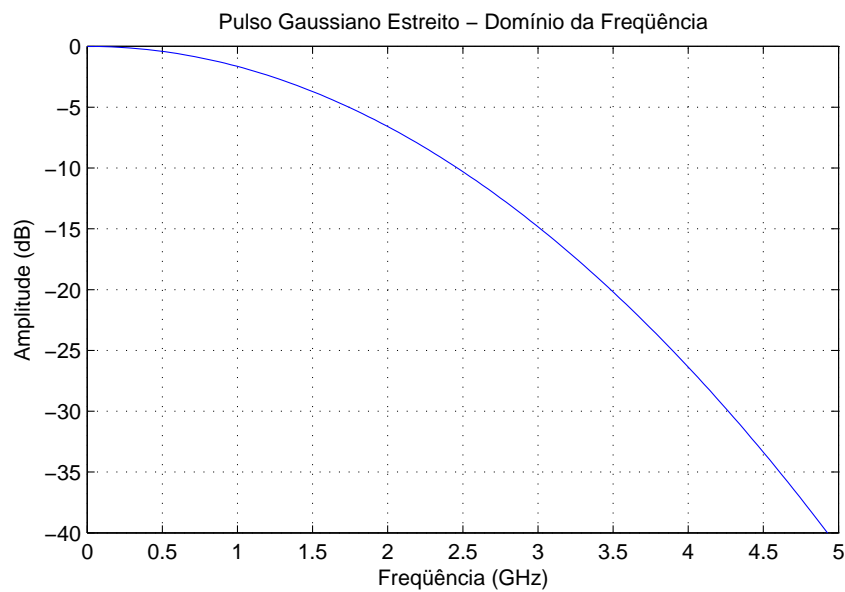


Figura 4.2: Resposta em freqüência do pulso Gaussiano estreito com  $\Delta t = 2,45 \times 10^{-11}$  s.

A Figura 4.2 mostra que na freqüência máxima  $f_{max} = 2,14$  GHz, a queda na amplitude

é de aproximadamente  $-10$  dB. As frequências maiores do que  $f_{max}$  introduzirão no ambiente de simulação um erro, que é a dispersão numérica. Tendo em vista que estas frequências, causadoras desta dispersão, têm amplitude pequena, usualmente elas são desprezadas sem que haja prejuízo nos resultados. Se esta dispersão não é suficientemente pequena para o problema, ou seja, se o nível de erro de dispersão requerido é menor, uma solução é aumentar a frequência máxima de análise. Por exemplo, se a frequência máxima requerida é dobrada em relação à anterior (para que algumas frequências que antes causavam dispersão indesejada não mais estejam fora da faixa garantida por  $N_\lambda$ ), então, de acordo com a Equação (4.4) e considerando um número ímpar de segmentos (ou células), tem-se que o número de segmentos em que a antena será dividida é aproximadamente o dobro do anterior, ou seja,  $N_{seg} = 21$ . Realizando esta simulação, obtemos as Figuras 4.3 e 4.4, nas quais é notório que o pulso ficou mais estreito já que a alteração de  $N_{seg}$  altera o tamanho das células  $\Delta$  de acordo com a Equação (4.5) e, conseqüentemente, o passo de tempo  $\Delta t$  de acordo com a Equação (4.6).

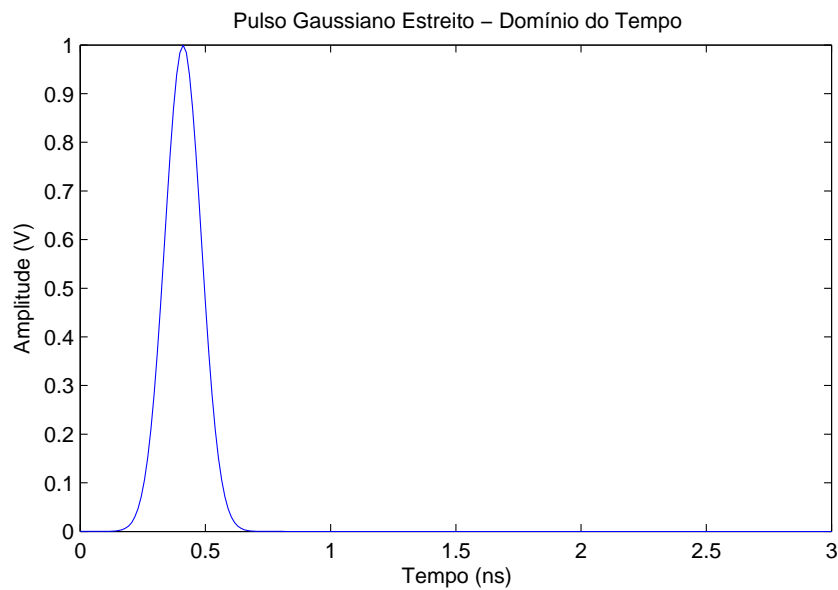


Figura 4.3: Pulso gaussiano estreito com  $\Delta t = 1,28 \times 10^{-11}$  s.



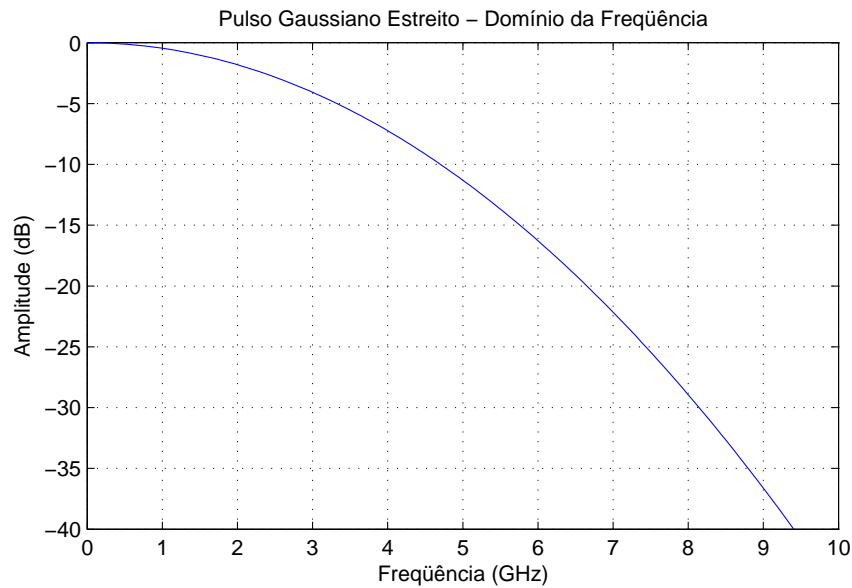


Figura 4.4: Resposta em frequência do pulso Gaussiano estreito com  $\Delta t = 1,28 \times 10^{-11}$  s.

A Figura 4.4 mostra que em  $f_{max} = 4,28$  GHz, a queda na amplitude é de aproximadamente  $-10$  dB. Assim, a presença de conteúdo espectral nas frequências elevadas no ambiente computacional, sem a presença de dispersão, requer, em contrapartida, maior número de células, o que acarreta um aumento do custo computacional e do tempo de simulação.

Há ainda uma alternativa, caso se queira menor dispersão para um dado número de segmentos. Para reduzir a dispersão sem aumentar o número de segmentos, é possível definir o pulso com uma duração arbitrária, mas mantendo o número de segmentos da antena. Desta forma, a duração do pulso seria independente da segmentação da antena. Se uma antena é modelada com um grande número de segmentos, de acordo com a Equação (2.75) este pulso será muito estreito e, conseqüentemente, terá altas frequências, o que acarretará em dispersão numérica. Portanto, impondo um pulso menos estreito mas com frequências com amplitude significativas na banda da antena, evita-se em certo nível, a dispersão. Tal abordagem porém se faz de forma manual e empírica.

Caso seja necessário que baixas frequências não sejam introduzidas no ambiente computacional, a derivada do pulso Gaussiano deve ser utilizada como excitação. A Figura 4.5 mostra a forma da derivada do pulso Gaussiano usando os parâmetros  $f_{max} = 2,14$  GHz,  $N_{seg} = 11$  e  $N_\lambda = 10$ . Observa-se que seu valor médio é nulo, o que indica que não há componente contínua no sinal.

A Figura 4.6 é a resposta em frequência da derivada do pulso Gaussiano. Observa-se que na frequência zero não há resposta o que indica que a componente contínua é nula. Além disso, é possível observar que as componentes em baixa frequência tem pequena amplitude dentro da faixa definida pela frequência máxima.

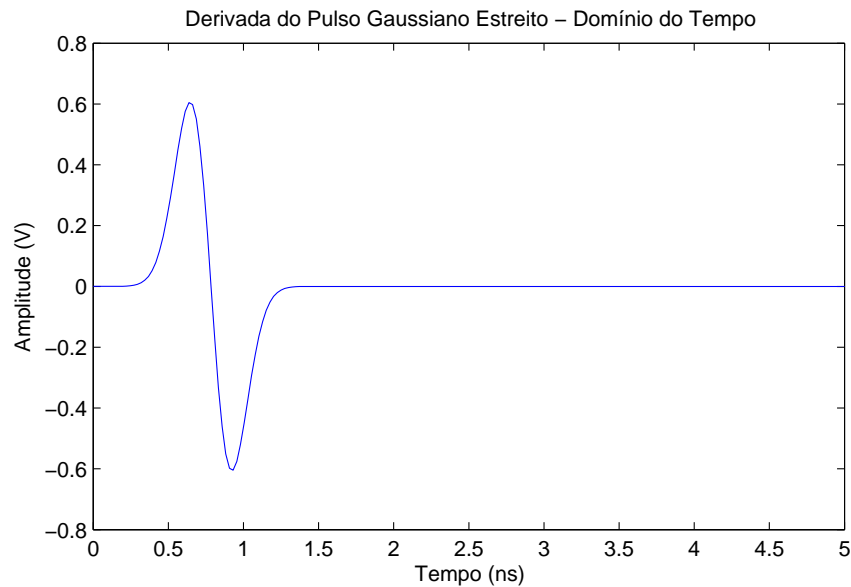


Figura 4.5: Derivada do pulso Gaussiano estreito com  $\Delta t = 2,45 \times 10^{-11}$  s.

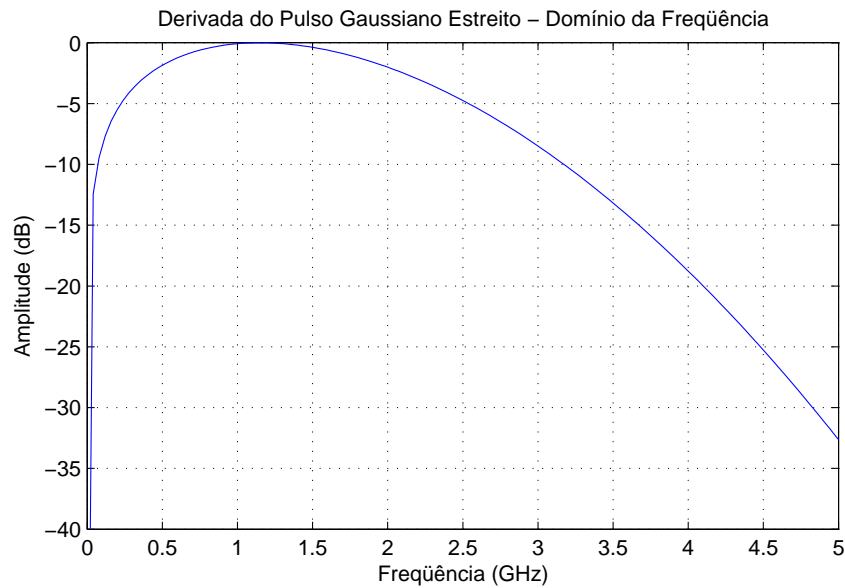


Figura 4.6: Derivada do pulso Gaussiano estreito com  $\Delta t = 2,45 \times 10^{-11}$  s.

### 4.1.2 Extração das Singularidades

Como visto na Seção 3.2.1, as singularidades podem ser extraídas a partir da corrente temporal na antena. Utilizando a implementação descrita na Equação (2.79), com as devidas adaptações, o FDTD está apto para fornecer a corrente em qualquer ponto do mesmo e em qualquer orientação ortogonal do dipolo, bastando poucas alterações nos campos e seus índices. Esta corrente fornecida pelo código é uma série temporal finita e, desta forma, é possível utilizar a técnica do Matrix Pencil para extrair as singularidades.

O número de singularidades deve então ser escolhido ainda sem um critério técnico, mas de forma subjetiva. A princípio, o número de singularidades foi definido como  $M = 10$ , ou seja, haverão 10 pólos e 10 resíduos para cada sinal temporal calculado. Este número foi definido porque, a partir de  $M = 10$ , há uma boa convergência das correntes reconstruídas através das singularidades e da corrente numérica, da qual as singularidades foram extraídas. A Figura 4.7 mostra as singularidades obtidas pela rotina do Matrix Pencil, utilizando como entrada a corrente temporal na entrada do dipolo, fornecida pelo

FDTD.

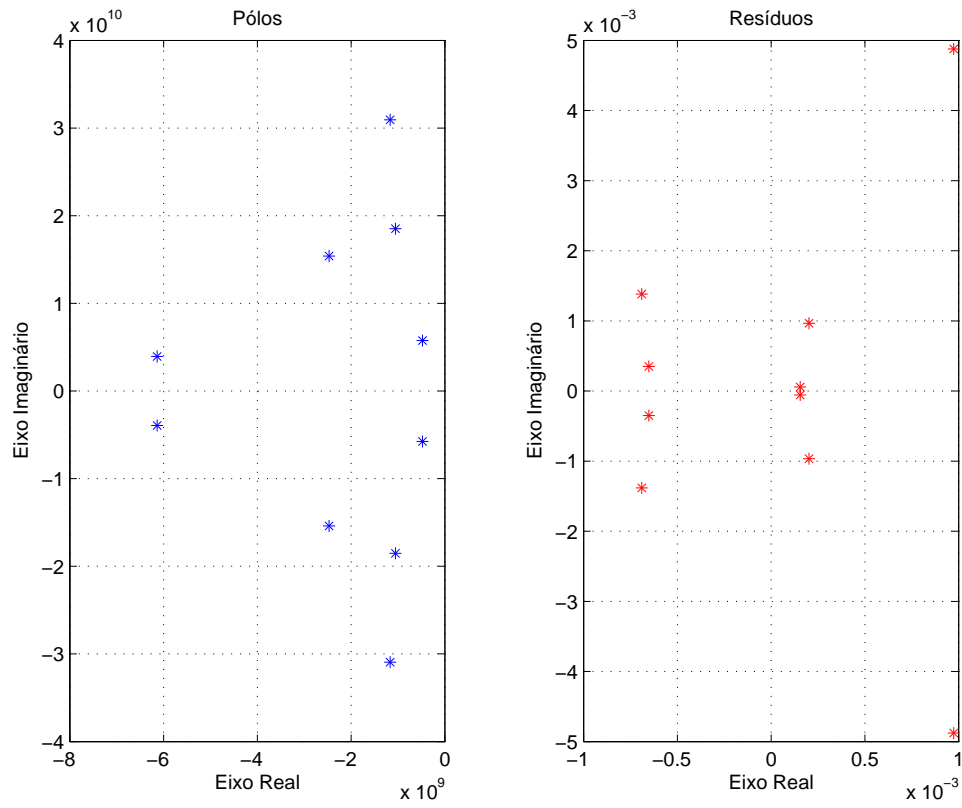


Figura 4.7: Pólos e resíduos relativos à corrente no centro do dipolo.

Observa-se que os pólos tem parte real negativa, como é esperado em sistemas físicos. É possível notar que alguns pólos e resíduos têm maior amplitude, o que sugere que algum critério pode ser utilizado para escolha do número de singularidades. Nota-se também que os pólos e resíduos são simétricos. Isso é razoável, já que há uma perfeita simetria em relação ao centro do dipolo uma vez que o número de segmentos em que o mesmo foi dividido é ímpar.

As Figuras 4.8 e 4.9 reproduzem a corrente no centro do dipolo, quando o mesmo é excitado pelo pulso Gaussiano estreito. A comparação é realizada entre a corrente gerada pelo FDTD e a corrente reconstruída a partir das singularidades, como exposto na Equação (3.6).

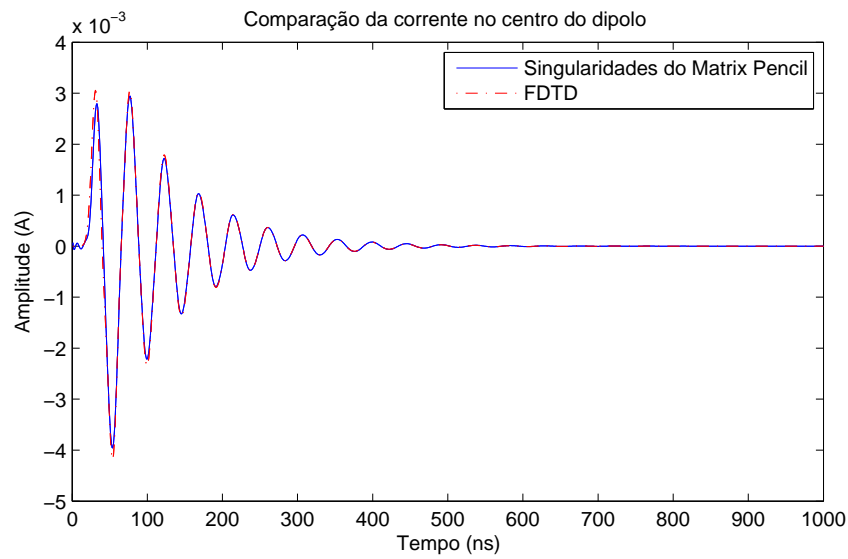


Figura 4.8: Corrente no centro do dipolo de 14 cm excitado pelo pulso Gaussiano estreito ( $M = 10$ ).

Observa-se que a diferença não é significativa no domínio do tempo como mostra a Figura 4.8, porém há uma diferença no domínio da frequência representado na Figura 4.9. No entanto, esta diferença só é significativa em frequências acima de 3 GHz, que está acima da frequência máxima  $f_{max} = 2,14$  GHz e, além disso, nestas frequências altas, a amplitude das mesmas são inferiores a  $-50$  dB. O efeito do aumento do número de singularidades pode não ser significativo na resposta temporal, porém na frequência é, como observamos nas Figuras 4.10 e 4.11.

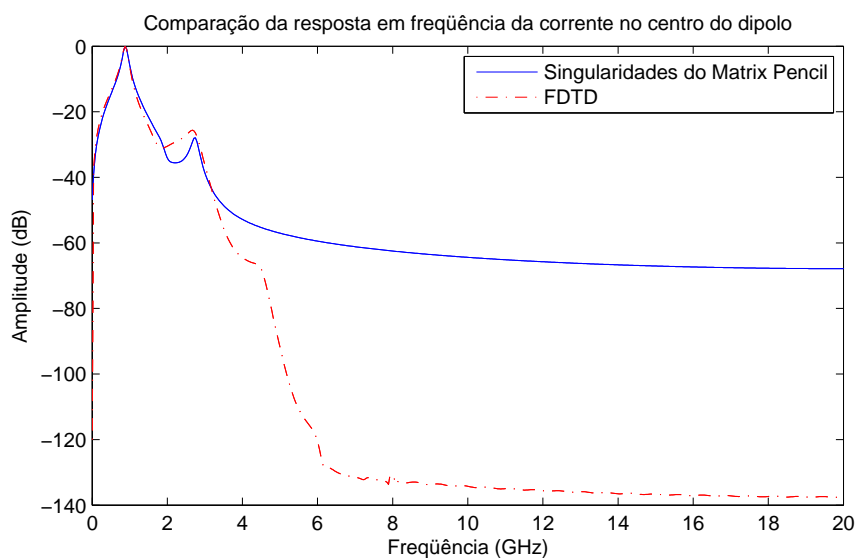


Figura 4.9: Resposta em frequência da corrente no centro do dipolo de 14 cm excitado pelo pulso Gaussiano estreito ( $M = 10$ ).

Se o número de singularidades é aumentado para  $M = 20$ , é possível observar uma melhora na resposta em frequência, como mostrado nas Figuras 4.10 e 4.11. Aumentando o número de singularidades para  $M = 30$ , é possível observar que a resposta em frequência coincide na comparação entre a resposta obtida pelo FDTD e a obtida pela reconstrução das correntes com as singularidades. As comparações para  $M = 30$  são mostradas nas Figuras 4.12 e 4.13. Há uma pequena diferença nas respostas em frequência que pode ser atribuída à imprecisão dos resultados das simulações e a resíduos numéricos. Um número maior de casas decimais aumentaria a precisão dos resultados, porém a um alto custo computacional.

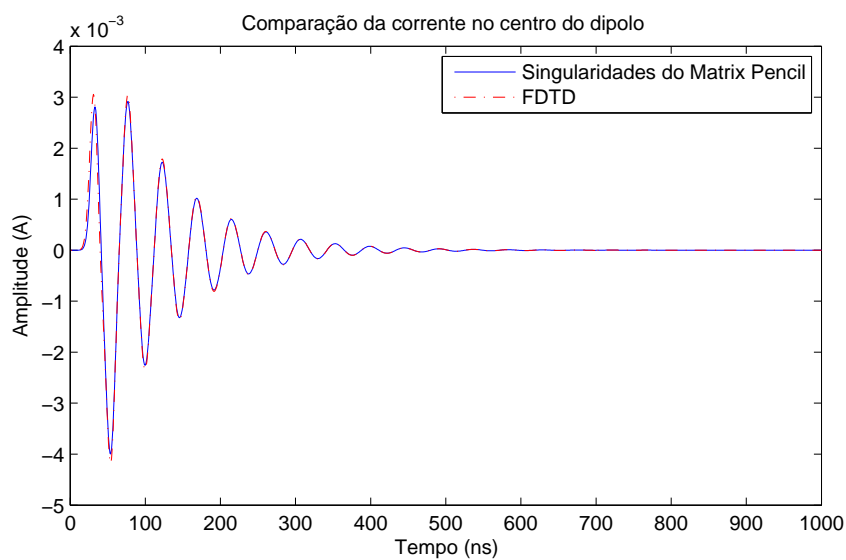


Figura 4.10: Corrente no centro do dipolo de 14 cm excitado pelo pulso Gaussiano estreito ( $M = 20$ ).

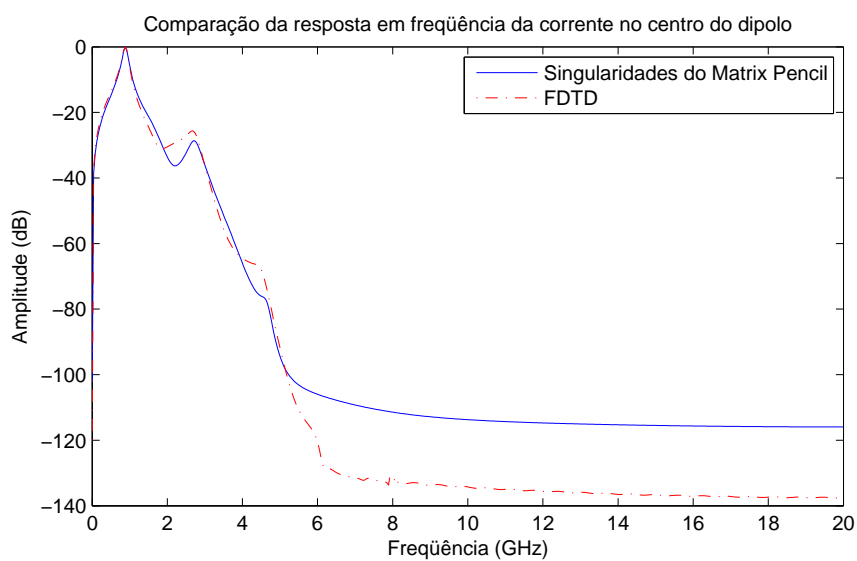


Figura 4.11: Resposta em frequência da corrente no centro do dipolo de 14 cm excitado pelo pulso Gaussiano estreito ( $M = 20$ ).

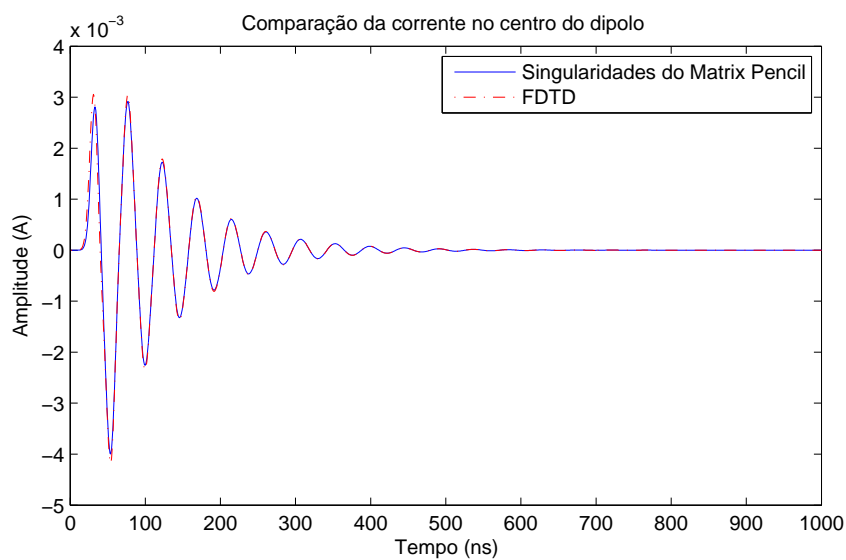


Figura 4.12: Corrente no centro do dipolo de 14 cm excitado pelo pulso Gaussiano estreito ( $M = 30$ ).

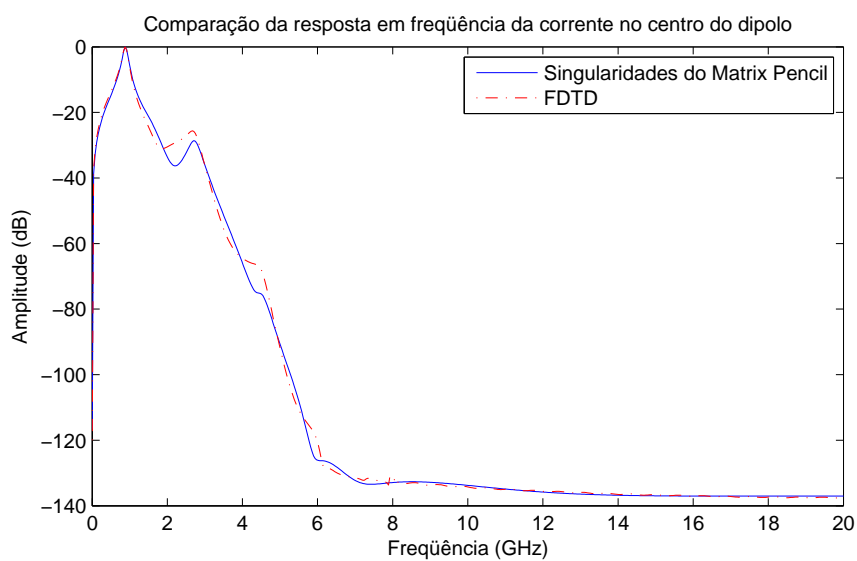


Figura 4.13: Resposta em frequência da corrente no centro do dipolo de 14 cm excitado pelo pulso Gaussiano estreito ( $M = 30$ ).

Uma vez que as singularidades da corrente no *gap* do dipolo foram determinadas, tal abordagem pode ser estendida para encontrar as singularidades em todos os segmentos do



dipolo. As singularidades presentes na expansão de uma dada grandeza através do SEM podem ser calculadas através da densidade de corrente no elemento espalhador. No caso do dipolo, esta densidade de corrente se reduziria à própria corrente no dipolo. Desta forma, as singularidades presentes na corrente do dipolo em cada ponto deste podem ser utilizadas para escrever a expansão em singularidades dos campos. Como as correntes são fornecidas pelo FDTD, os pólos então deverão ser extraídos em cada segmento (célula). Tal desenvolvimento sugere que o número de segmentos em que a antena será dividida, alterará o número de pólos e assim a precisão dos resultados. De fato, é importante observar se o número mínimo de segmentos assumido para descrever a antena é suficiente para se obter resultados satisfatórios.

### 4.1.3 Cálculo da Altura Efetiva para o Dipolo

O campo elétrico tangencial será nulo na superfície do dipolo já que este é um condutor elétrico perfeito. Assim não existirá densidade de corrente magnética  $\mathbf{M}(\mathbf{r}', t)$  sobre a superfície do mesmo. No entanto, a densidade de corrente elétrica deve ser calculada e, como visto nas Equações (3.45) a (3.53), ela deve ser perpendicular à direção de propagação dos campos, ou seja, sem as componentes radiais. No caso particular do dipolo alinhado em  $\hat{\mathbf{z}}$ , as componentes  $\mathbf{J}_x^\delta(\hat{\mathbf{r}}, t)$  e  $\mathbf{J}_y^\delta(\hat{\mathbf{r}}, t)$  são nulas. Assim as densidades de corrente elétricas impulsionais são

$$\mathbf{J}_\theta^\delta(\hat{\mathbf{r}}, t) = -\text{sen } \theta \mathbf{J}_z^\delta(\hat{\mathbf{r}}, t). \quad (4.7)$$

A partir da Equação (4.7) é possível então escrever para o dipolo alinhado com o eixo  $\hat{\mathbf{z}}$ :

$$\mathbf{J}_\perp^\delta(\hat{\mathbf{r}}, t) = -\text{sen } \theta \sum_{\alpha} U(t) \tilde{R}_\alpha^{(\mathbf{I})}(\mathbf{r}', s_\alpha) e^{s_\alpha t} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.8)$$

em que  $\tilde{R}_\alpha^{(\mathbf{I})}(\mathbf{r}', s_\alpha)$  é o módulo do vetor resíduo, que depende de  $\mathbf{r}'$ , já que sua componente vetorial foi explicitada ( $\hat{\mathbf{z}}$ ). O índice  $\mathbf{I}$  em  $\tilde{R}_\alpha^{(\mathbf{I})}(\mathbf{r}', s_\alpha)$  mostra que as singularidades e, conseqüentemente, o vetor resíduo foram extraídos a partir da corrente no dipolo.

O atraso de tempo  $\tau + \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'/c$  introduzido na densidade de corrente na Equação (2.49) pode ser calculado como mostrado na Equação (3.54). Para o caso do dipolo alinhado no eixo  $\hat{\mathbf{z}}$  não existem pontos nas coordenadas  $x'$  e  $y'$  e, assim, o atraso argumento  $\tau + \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'/c$  pode ser escrito como

$$\tau + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} = t - \frac{r}{c} + \frac{z' \cos \theta}{c}. \quad (4.9)$$

Substituindo a Equação (4.9) na Equação (4.8), obtém-se:

$$\mathbf{J}_{\perp}^{\delta} \left( \hat{\mathbf{r}}, \tau + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) = -\text{sen } \theta \sum_{\alpha} \left\{ U \left( t - \frac{r}{c} + \frac{z' \cos \theta}{c} \right) \tilde{R}_{\alpha}^{(\mathbf{I})}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) e^{s_{\alpha} \left( t - \frac{r}{c} + \frac{z' \cos \theta}{c} \right)} \right\} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (4.10)$$

Resta ainda realizar a diferenciação em relação ao tempo para a determinação da altura efetiva do dipolo. A diferenciação da densidade de corrente expressa na Equação (4.10) em relação ao tempo é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathbf{J}_{\perp}^{\delta} \left( \hat{\mathbf{r}}, \tau + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) \right] = \\ -\text{sen } \theta \sum_{\alpha} \left\{ s_{\alpha} U \left( t - \frac{r}{c} + \frac{z' \cos \theta}{c} \right) \tilde{R}_{\alpha}^{(\mathbf{I})}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) e^{s_{\alpha} \left( t - \frac{r}{c} + \frac{z' \cos \theta}{c} \right)} \right\} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

em que o termo  $z' \cos \theta/c$ , como foi dito no último parágrafo da Seção 2.2.1, é desprezível, a não ser que esteja no argumento de uma função exponencial, o que tornaria sua contribuição significativa. Desta maneira, ele pode ser omitido da função degrau  $U(t - r/c + z' \cos \theta/c)$ . A altura efetiva  $\mathbf{h}_{dip}^t(\hat{\mathbf{r}}, t)$ , no domínio do tempo, expressa através da expansão de singularidade para o dipolo alinhado em  $\hat{\mathbf{z}}$ , é dada por

$$\mathbf{h}_{dip}^t(\hat{\mathbf{r}}, t) = -\text{sen } \theta U \left( t - \frac{r}{c} \right) \sum_{\alpha} \left\{ s_{\alpha} e^{s_{\alpha} \left( t - \frac{r}{c} \right)} \int_{z'} \tilde{R}_{\alpha}^{(\mathbf{I})}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) e^{s_{\alpha} \frac{z' \cos \theta}{c}} dz' \right\} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.12)$$

em que o vetor resíduo para o caso do dipolo é  $\tilde{R}_{\alpha}^{(\mathbf{I})}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) \hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Como o dipolo está alinhado em  $\hat{\mathbf{z}}$  e é dividido em células, cada segmento do dipolo terá associado a ele um número de

resíduos. O índice  $\alpha$  revela a qual singularidade o resíduo está associado. No exemplo da Figura 4.7 existem 10 singularidades e assim os resíduos seriam classificados com  $\alpha = 1$  até  $\alpha = 10$ . O argumento do vetor resíduo é  $\mathbf{r}'$ , então este irá variar com a posição na qual os resíduos são calculados. Se o dipolo é dividido em 11 células, sendo a célula central o *gap*, então haverá 10 segmentos nos quais é possível calcular a corrente. Neste caso, se 10 singularidades forem utilizadas, existirão 100 pólos e 100 resíduos, 10 para cada célula do dipolo com  $\alpha = 1$  até  $\alpha = 100$ .

A integração pode ser realizada numericamente definindo o elemento infinitesimal de integração  $dz'$  como o tamanho da célula no FDTD que é  $\Delta z$  ou  $\Delta$ , uma vez que as células consideradas são cúbicas. Desta forma, sendo  $k_\alpha$  o número inteiro que define o passo espacial na direção  $\hat{\mathbf{z}}$ , a coordenada  $z'$  pode ser calculada como  $k_\alpha \Delta z$ . A função resíduo  $\tilde{R}_\alpha^{(\mathbf{I})}(\mathbf{r}', s_\alpha)$  pode ser representada no caso do dipolo alinhado em  $\hat{\mathbf{z}}$  como  $\tilde{R}_\alpha^{(\mathbf{I})}(k_\alpha \Delta z, s_\alpha)$ . Esta função, tem o valor do resíduo no ponto  $k_\alpha \Delta z$  para um determinado índice  $\alpha$ , e o valor nulo em outros pontos. Isso fará com que a integral se reduza ao valor do resíduo multiplicado pela exponencial avaliada no ponto em que o resíduo foi calculado. Como a integração é numérica, e estão disponíveis os valores dos resíduos já calculados ao invés da função analítica do mesmo, é possível então escrever

$$\mathbf{h}_{dip}^t(\theta, t) = -\text{sen } \theta U\left(t - \frac{r}{c}\right) \sum_{\alpha} \left\{ s_\alpha e^{s_\alpha(t - \frac{r}{c})} \tilde{R}_\alpha^{(\mathbf{I})}(k_\alpha \Delta z, s_\alpha) e^{s_\alpha \frac{k_\alpha \Delta z \cos \theta}{c}} \Delta z \right\} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (4.13)$$

em que  $k_\alpha$  varia com o índice  $\alpha$  do somatório de acordo com a célula do dipolo em que a singularidade foi calculada. O somatório por sua vez, faz a varredura para todas as singularidades do dipolo.

#### 4.1.4 Campo Radiado pelo Dipolo na Região de Campo Distante

A fim de validar o desenvolvimento realizado, é necessário comparar de alguma forma a altura efetiva obtida com resultados consolidados na literatura científica. O campo elétrico radiado na região de campo distante pode ser utilizado para tal fim. A Equação

(2.48) pode ser utilizada para calcular o campo na região de campo distante.

### Campo Distante para Excitação como Pulso Gaussiano

O campo calculado na região de campo distante pode ser obtido por meio da altura efetiva, através da Equação (2.48), e comparado com o campo obtido pela rotina do FDTD quando excitada por um pulso Gaussiano estreito. Neste caso, a solução obtida por meio do FDTD, é tomada como referência com o objetivo de validar a solução obtida por meio da altura efetiva.

A região de campo distante ou de Fraunhofer é definida para distâncias superiores a [2]

$$R = \frac{2D^2}{\lambda_{min}}, \quad (4.14)$$

em que  $D$  é o maior comprimento existente na antena. Qualquer comprimento de onda maior do que  $\lambda_{min}$  produzirá resultados menores para  $R$ . Desta forma, utilizando  $\lambda_{min}$  para calcular  $R$ , há segurança em afirmar que a região é distante para todas as frequências.

Para o cálculo do campo distante no domínio do tempo e através do FDTD, uma região de  $50 \times 50 \times 50$  células foi definida como espaço computacional, sendo que a antena se encontra no centro desta região. Esta quantidade de células faz com que o tempo de simulação seja elevado e utilize maior quantidade de memória. No entanto, o campo não precisa ser calculado muitas vezes já que será utilizado apenas para comparação com os resultados obtidos utilizando a altura efetiva. Para o dipolo utilizado na Seção 4.1, como a frequência máxima é  $f_{max} = 2,14$  GHz, e a altura do dipolo é  $h = 0,14$  m, então a região de campo distante será definida para distâncias superiores a  $R = 0,28$  m aproximadamente. Como para este dipolo dividido em 11 células, o tamanho das células é  $\Delta = 1,27$  cm aproximadamente, e o espaço de simulação cúbico têm 50 células em cada dimensão, sendo que o dipolo se encontra no centro deste espaço, então se o campo é avaliado na superfície deste espaço, ou seja,  $50/2 = 25$  células em relação ao centro, a distância do dipolo ao ponto de avaliação é  $25\Delta$  que é igual a 32 cm. Os campos avaliados a 25 células do dipolo estarão com segurança na região de campo distante.

Há, no entanto, um problema nesta análise que é a dispersão. Como foi visto na Seção 4.1, frequências acima da frequência máxima causam dispersão. Esta dispersão não é significativa, porém se acumula com a propagação dos campos. Assim sendo, na região de campo distante, haverá uma dispersão associada, já que as distâncias são relativamente maiores.

Há ainda o problema da resolução da antena. Sendo a antena dividida em poucos segmentos, haverá um erro no cálculo dos campos. Este erro é menor no caso do dipolo para  $\theta = 90^\circ$ , que é a direção de máximo de radiação. A variação de  $\theta$  para diferentes ângulos, à medida em que se afasta da direção de máxima radiação, resulta que a distância percorrida pelos campos radiados por cada célula do dipolo é diferente para as duas metades do dipolo, perdendo a simetria nos cálculos que há quando  $\theta = 90^\circ$ . Assim, se o número de células utilizadas para descrever o dipolo é pequena, o erro tenderá a ser maior à medida que  $\theta$  se afastar de  $90^\circ$ , pois o efeito da quantização da antena será mais expressivo.

Realizando os passos anteriores para o dipolo e comparando os resultados do campo distante fornecido pelo FDTD como campo distante calculado pela altura efetiva, obtém-se as Figuras 4.14. A Figura 4.15 revela um pequeno erro em aproximadamente  $t = 2$  ns. Este erro pode ser diminuído ou reduzido a zero, aumentando-se o número de singularidades, como mostra a Figura 4.16.

### Diagrama de Radiação

A Figura 4.17 mostra o diagrama de radiação para o dipolo com  $h = 0,14$  m,  $a = h/150$  m, dividida em 11 células, malha  $50 \times 50 \times 50$ , sendo cada segmento modelado por  $M = 30$  singularidades, nos planos de observação  $\phi = 0^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$  e  $\phi = 90^\circ$ , respectivamente, excitada por um pulso estreito. O uso de apenas 30 singularidades foi definido, pois praticamente não houve diferença do diagrama de radiação em relação ao diagrama obtido utilizando-se 60 singularidades. A excitação, é o pulso estreito representado pela Equação (2.75). Observa-se que o diagrama é simétrico e tem razoável semelhança com o dia-

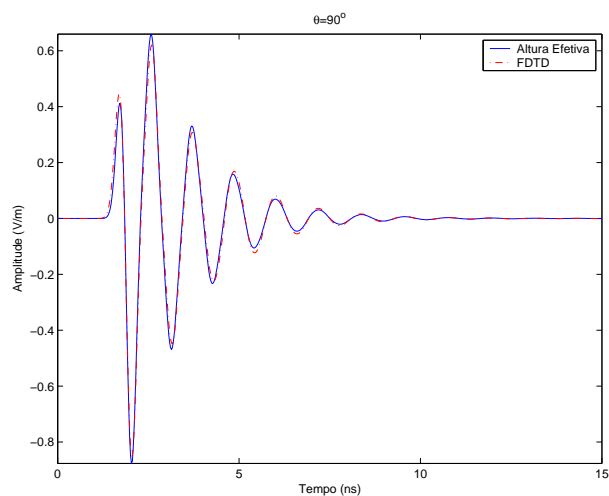


Figura 4.14: Campo elétrico distante radiado pelo dipolo com  $h = 0,14$  m,  $a = h/150$  m, dividida em 11 células, malha  $50 \times 50 \times 50$ , sendo cada segmento modelado por  $M = 30$  singularidades e observador no campo distante com  $\phi = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ .

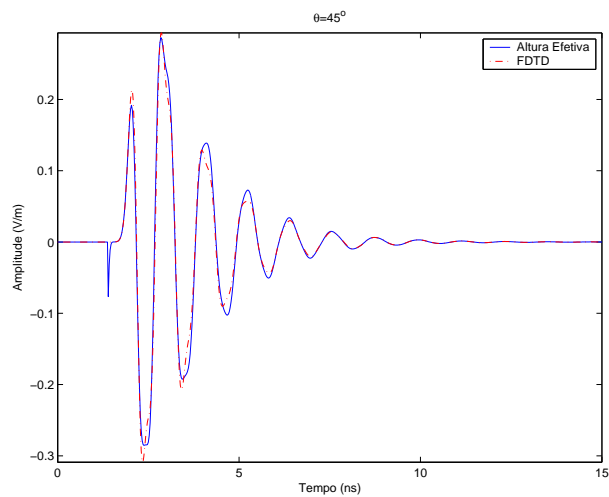


Figura 4.15: Campo elétrico distante radiado pelo dipolo com  $h = 0,14$  m,  $a = h/150$  m, dividida em 11 células, malha  $50 \times 50 \times 50$ , sendo cada segmento modelado por  $M = 30$  singularidades e observador no campo distante com  $\phi = 0^\circ$  e  $\theta = 45^\circ$ .

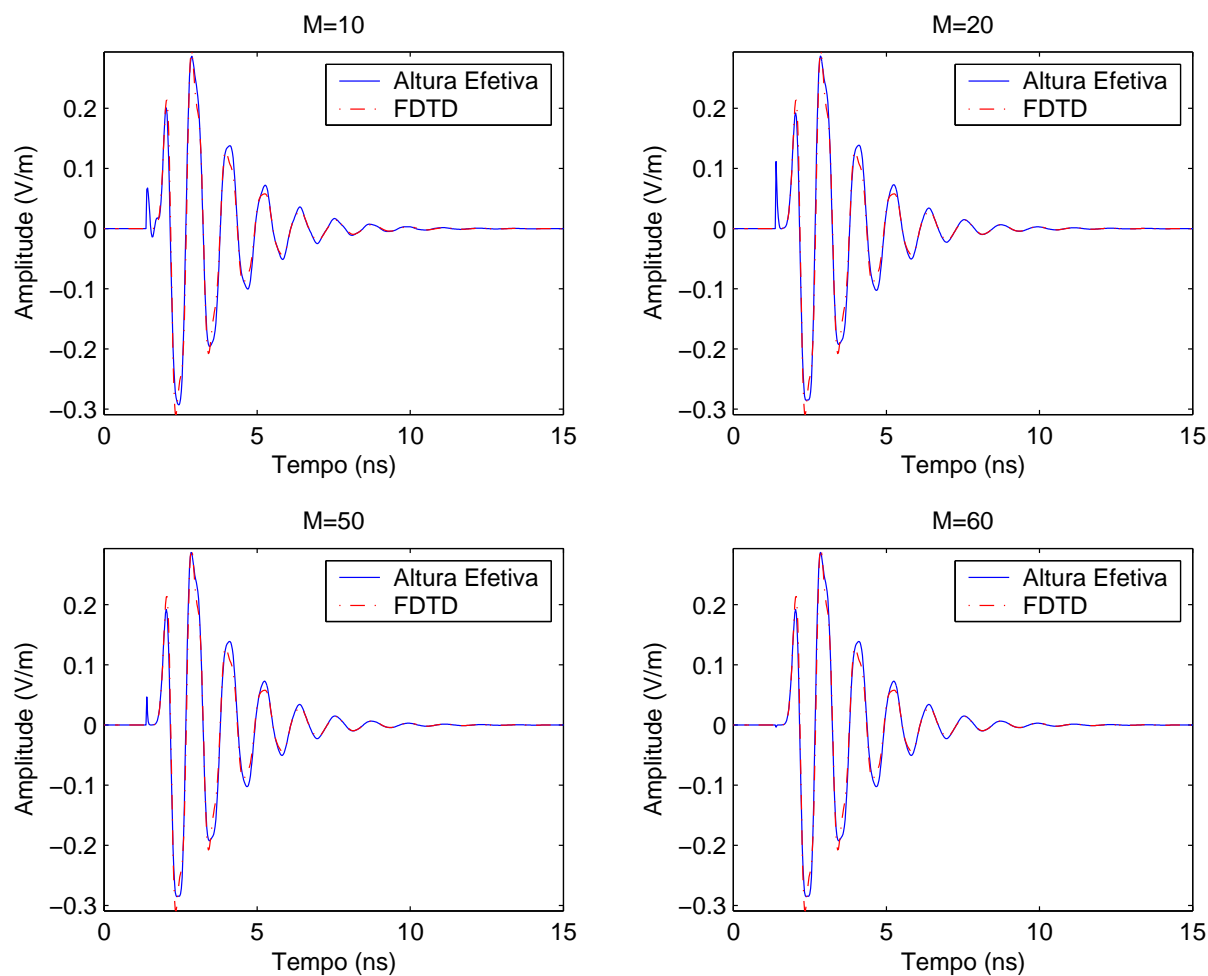


Figura 4.16: Campo elétrico distante radiado pelo dipolo com  $h = 0,14$  m,  $a = h/150$  m, dividida em 11 células, malha  $50 \times 50 \times 50$ , sendo cada segmento modelado por  $M = 10$  a  $M = 60$  singularidades e observador no campo distante com  $\phi = 0^\circ$  e  $\theta = 45^\circ$ .

grama de radiação do dipolo curto [2]. O que ocorre, é que para a frequência máxima  $f_{max} = 2,14$  GHz, o comprimento de onda é  $\lambda_{min} = 0,14$  m, ou seja, a dimensão do dipolo é igual ao comprimento de onda. No entanto, esta frequência tem baixa amplitude como mostra a Figura 4.2, que é aproximadamente um décimo das frequências de maior amplitude. frequências maiores, terão comprimento de ondas menores, porém com menor contribuição, pois estarão muito atenuadas. frequências menores, com maior amplitude e assim maior contribuição no diagrama de radiação, terão maiores comprimentos de onda, tendendo ao limite em que  $h \ll \lambda$ . Este limite é o caso do dipolo curto.

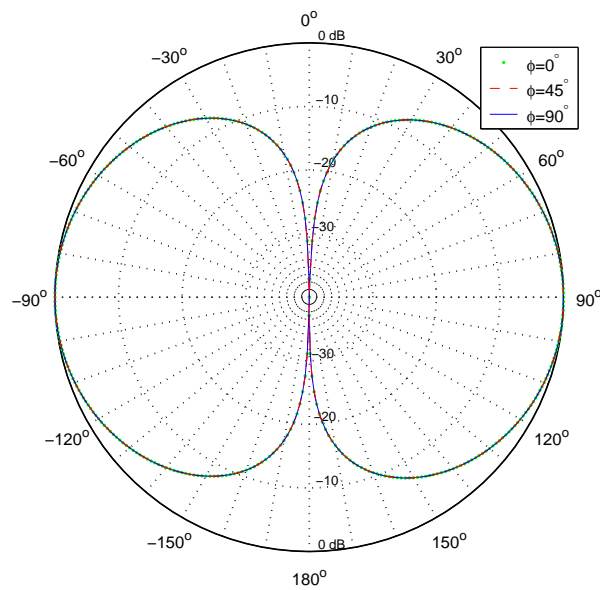


Figura 4.17: Diagrama de radiação para o dipolo com  $h = 0,14$  m,  $a = h/150$  m, dividida em 11 células, malha  $50 \times 50 \times 50$ , sendo cada segmento modelado por  $M = 30$  singularidades e pulso estreito como excitação.

Para validação da definição do diagrama de radiação expresso na Equação (2.56), é necessário comparar com resultados presentes na literatura científica. O diagrama de radiação da antena, para excitação senoidal, é largamente utilizado há décadas e pode ser utilizado como referência. No entanto, este diagrama é traçado tendo como base grandezas calculadas no domínio da frequência. Uma forma para determinação do diagrama de



radiação de uma antena, com excitação senoidal, no domínio da frequência, é semelhante àquela explicitada pela Equação (2.56). Uma determinada grandeza é calculada em todas as direções e normalizada pelo máximo.

O *Teorema de Parseval* implica que a energia contida em um determinado sinal temporal  $x(t) \in \mathbb{R}$ , é igual à energia contida neste mesmo sinal  $X(\omega)$  representado no domínio da frequência, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.15)$$

O diagrama de radiação no domínio da frequência, é calculado utilizando o quadrado do módulo da grandeza como por exemplo o campo elétrico, ou a intensidade de radiação. Assim, utilizando o Teorema de Parseval é possível concluir que o diagrama de radiação no domínio do tempo, como definido na Equação (2.56) e na frequência, como é classicamente definido, serão iguais para a senóide, já que eventuais constantes serão canceladas pela normalização das grandezas.

De fato, o campo elétrico distante de um dipolo alinhado em  $\hat{\mathbf{z}}$  é dado por [2]:

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}}, \omega) = j\eta_0 \frac{I_0 e^{-jkr}}{2\pi r} \left[ \frac{\cos(\frac{kh}{2} \cos \theta) - \cos(\frac{kh}{2})}{\sin \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.16)$$

em que  $I_0$  é a amplitude da excitação senoidal,  $k = 2\pi/\lambda$  o número de onda,  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  é a impedância de intrínseca e  $h$  o comprimento do dipolo. Entretanto, esta solução não é exata e foi obtida após serem realizadas aproximações para as correntes no dipolo. Uma solução mais precisa pode ser encontrada através do MOM que é um método poderoso e largamente utilizado para simulação de antenas. Desta forma, o software *4NEC2* [48], que é baseado no MOM, é apropriado já que fornece uma interface gráfica para desenho da antena e calcula campos, diagrama de radiação entre outros. O diagrama de radiação fornecido pelo *4NEC2* será, desta forma, a solução de referência.

A Equação (2.48) pode ser utilizada para calcular o campo, quando a excitação é senoidal, ou seja,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r} [\mathbf{h}^t(\hat{\mathbf{r}}, \tau) * I_0 \text{sen}(\omega t)] \quad \tau = t - \frac{r}{c}. \quad (4.17)$$

A fim de comparar a solução analítica com a solução numérica uma medida da diferença entre as duas soluções deve ser utilizada. A medida escolhida é a da diferença entre as soluções, normalizada pelo erro médio quadrático que pode ser expressa por

$$MSE = \frac{\sqrt{\sum_n |S_a(n\Delta t) - S_n(n\Delta t)|^2}}{\sum_n |S_a(n\Delta t)|} \quad (4.18)$$

em que  $S_a(n\Delta t)$  é a solução analítica e  $S_n(n\Delta t)$  a solução numérica.

A Figura 4.18 mostra a comparação realizada para o dipolo com  $h = 0,14$  m,  $a = h/150$  m, dividida em 11 células sendo cada segmento modelado por  $M = 30$  singularidades e excitação senoidal. A frequência foi escolhida de forma que o dipolo seja de meia onda, ou seja,  $h = \lambda/2$ .

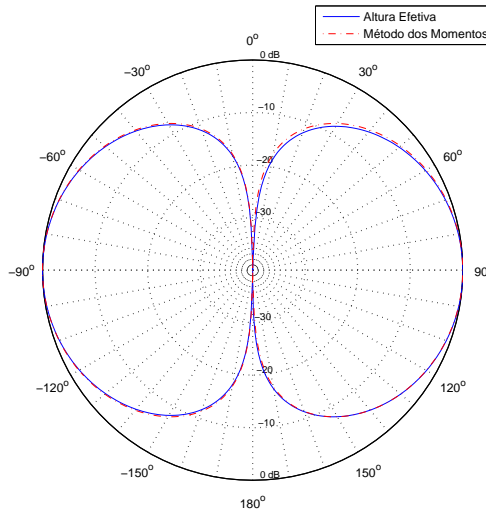


Figura 4.18: Diagrama de radiação para o dipolo  $h = \lambda/2$  com  $h = 0,14$  m,  $a = h/150$  m, dividida em 11 células, sendo cada segmento modelado por  $M = 30$  singularidades e excitação senoidal e

$$MSE = 1,65 \times 10^{-3}.$$

Finalmente, é importante verificar o comportamento da técnica em diferentes frequências. Para cada frequência de análise, é preciso calcular qual será a frequência máxima presente na malha FDTD e, conseqüentemente, o número de segmentos no qual o dipolo deve ser dividido utilizando a Equação (4.4). Realizando os mesmos passos para os dipolos com  $h \ll \lambda$ ,  $h = \lambda/4$ ,  $h = 3\lambda/4$  e  $h = \lambda$  os diagramas de radiação apresentados na Figura 4.19 são obtidos, em que  $N_{seg} = 3$ ,  $N_{seg} = 7$ ,  $N_{seg} = 17$  e  $N_{seg} = 21$  respectivamente.

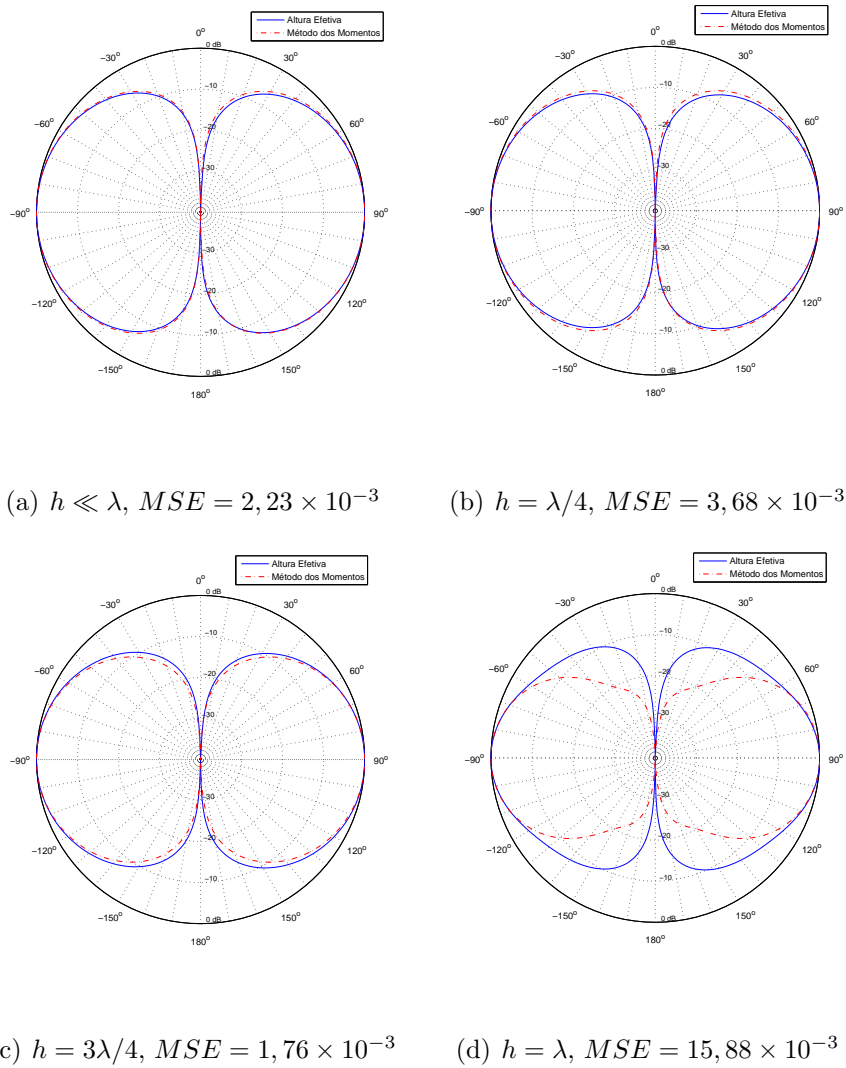


Figura 4.19: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com  $M = 30$  singularidades e pela resposta analítica, no plano  $\phi = 0^\circ$ .

Na Figura 4.19, podemos observar que há um pequeno erro entre os diagramas obtidos pela altura efetiva e analiticamente. No caso particular da Figura (d), o erro é grande para o observador fora das proximidades do máximo de radiação ( $\theta = 90^\circ$ ). Pode-se supor, inicialmente, que o erro tenha sido causado pela baixa precisão dos campos calculados devido ao pequeno número de segmentos, principalmente nos casos em que os atrasos referentes aos campos radiados por cada segmento sejam grandes, o que ocorre para pontos de observação distantes do eixo de simetria que é quando  $\theta = 90^\circ$  (a perda de simetria associada ao pequeno número de segmentos poderia ser a causa do erro). Para investigar se este é o caso, a solução seria aumentar o número de segmentos o que faria com que o erro diminuísse. Usando  $N_{seg} = 31$  obtém-se a Figura 4.20 que mostra que o erro não é devido ao pequeno número de segmentos.

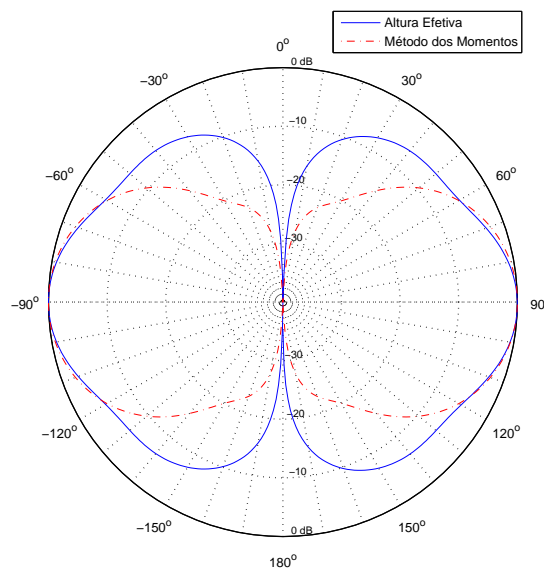


Figura 4.20: Diagrama de radiação para o dipolo  $h = \lambda$  com  $h = 0,14$  m,  $a = h/150$  m, dividida em 31 células, sendo cada segmento modelado por  $M = 30$  singularidades e excitação senoidal e

$$MSE = 21,80 \times 10^{-3}.$$

Uma segunda hipótese seria a de arbitrariamente definir um pulso menos estreito para

que o nível de dispersão numérica fosse reduzido sem que o número de segmentos fosse alterado. Para tal, basta definir a fonte como se os parâmetros fossem calculados a partir de  $N_{seg} = 11$ , uma vez que a antena está definida a partir de  $N_{seg} = 21$ . Desta maneira, haverá um menor nível de altas frequências, e, portanto, menor dispersão numérica. Esta hipótese, contudo, não mostrou resultados satisfatórios como mostra a Figura 4.21

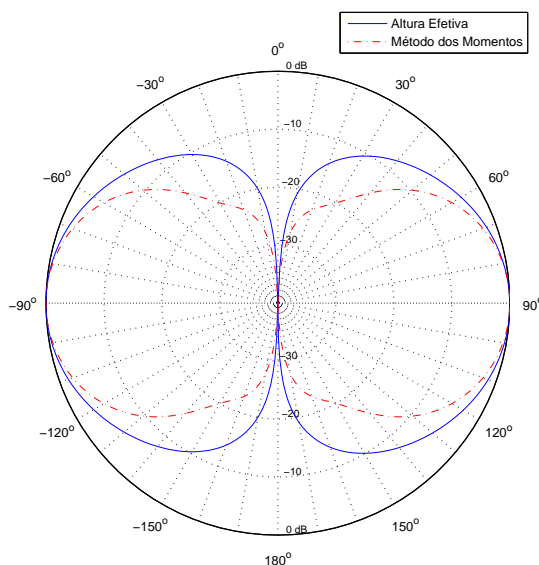


Figura 4.21: Diagrama de radiação para o dipolo  $h = \lambda$  com  $h = 0,14$  m,  $a = h/150$  m, dividida em 21 células, sendo cada segmento modelado por  $M = 30$  singularidades e excitação senoidal e

$$MSE = 21,61 \times 10^{-3}.$$

A terceira hipótese, seria a de que, como o erro é grande para o observador fora das proximidades do máximo de radiação ( $\theta = 90^\circ$ ), é possível que este erro seja maior nesta região devido ao comprimento elétrico da antena se tornar relativamente grande para  $h = \lambda$ . As componentes de campo radiado por cada segmento do dipolo se somam para formar o campo em um dado ponto do observador. Para  $\theta$  do observador fora das proximidades de  $90^\circ$ , os retardos dos campos radiados, devido a cada segmento do dipolo, produzem diferenças associadas à perda da simetria neste ponto de observação

(se o observador está em  $\theta = 90^\circ$ , há uma perfeita simetria em relação aos segmentos do dipolo). Aparentemente, o erro é maior devido ao maior comprimento elétrico da antena, uma vez que a diferença entre os retardos entre cada segmento da antena será maior. Neste caso, as baixas frequências presentes no sinal, e que têm maior comprimento de onda, estariam muito grandes em relação à antena e a diferença no retardo dos campos radiados por cada segmento aumentaria com o aumento da perda da simetria. A derivada do pulso Gaussiano não contém baixas frequências com amplitude significativa, como mostra a Figura 4.6. A princípio a resposta não mostrou melhora significativa em relação ao pulso Gaussiano. Entretanto quando a excitação foi definida arbitrariamente como se  $N_{seg} = 11$ , porém mantendo a antena dividida em 21 segmentos, ou seja, reduzindo a amplitude das altas frequências e, conseqüentemente, a dispersão, houve uma melhora significativa na resposta como mostra a Figura 4.22. A derivada do pulso Gaussiano torna-se então uma hipótese interessante para excitar o dipolo em que  $h = \lambda$ .

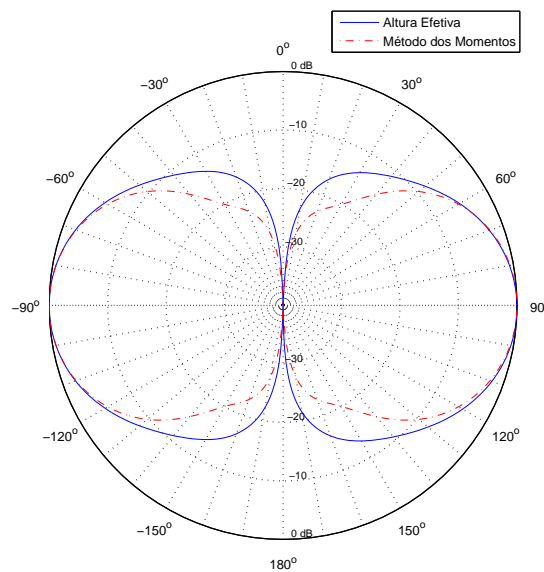


Figura 4.22: Diagrama de radiação para o dipolo  $h = \lambda$  com  $h = 0,14$  m,  $a = h/150$  m, dividida em 21 células, sendo cada segmento modelado por  $M = 30$  singularidades e excitação senoidal e

$$MSE = 6,40 \times 10^{-3}.$$

Observa-se que ainda é necessário aprimorar a técnica pois o erro permanece relativamente grande para  $h = \lambda$ . Vários testes foram realizados com o número de pólos, número de segmentos e largura do pulso, porém não houve melhora da resposta. Duas hipóteses precisam ser consideradas. A primeira é estabelecer um critério para escolha dos pólos que eliminará pólos parasitas ou desprezíveis na resposta e a segunda usar a técnica da deconvolução, que obterá a resposta ao impulso ideal a partir da resposta ao pulso Gaussiano.

### Critérios para Seleção de Pólos

Com o intuito de melhorar a resposta obtida para o dipolo, os critérios para seleção dos pólos que mais contribuem na resposta e a eliminação dos pólos parasitas devem ser utilizados como mostrado na Seção 3.2.2.

Considerando os dois critérios,  $P_\alpha/P_d < Th$  e  $|\sigma_\alpha| > |\sigma_{max}|$  em que  $e^{(-|\sigma_{max}|T_L)} \approx Th$  e  $Th = 10^{-2}$ , e eliminando pólos com parte real positiva e sem o correspondente complexo conjugado tem-se para o caso de  $h = \lambda$ , mostrado na Figura 4.23 uma significativa melhora da resposta. Observa-se que apenas 21 singularidades foram utilizadas após o critério para seleção dos pólos ser aplicado, o que mostra que a resposta havia sido degradada devido aos pólos espúrios e pólos de baixa contribuição na resposta.

### Deconvolução

É possível que o pulso utilizado não tenha frequências suficientes na faixa na qual os pólos da antena são excitados. Desta maneira, utilizando a deconvolução como descrito na Seção 3.2.3, alguns pólos naturais adicionais serão excitados e a resposta terá uma melhora significativa. Entretanto o uso da deconvolução não apresentou melhoras significativas nos resultados como mostra a Figura 4.24, na qual o pulso Gaussiano é utilizado como excitação, o que indica que o pulso utilizado é suficientemente estreito, contendo assim uma faixa de frequências suficiente para excitar todas as frequências naturais.

Apesar da deconvolução não resultar em aumento da exatidão dos resultados como

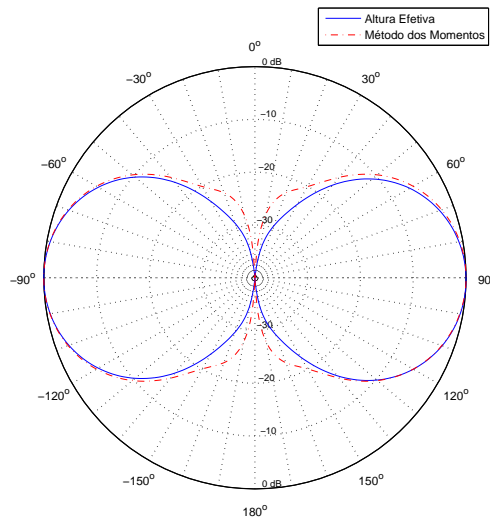


Figura 4.23: Diagrama de radiação para o dipolo  $h = \lambda$  com  $h = 0,14$  m,  $a = h/150$  m, dividida em 21 células, sendo cada segmento modelado por  $M = 21$  singularidades e excitação senoidal e

$$MSE = 3,40 \times 10^{-3}.$$

mostrado na Figura 4.24, ao aplicar o critério de pólos nas singularidades extraídas utilizando a deconvolução, apenas 5 pólos naturais foram obtidos. Isso demonstra que o critério dos pólos aplicado à deconvolução reduz de forma acentuada a quantidade de pólos necessários para a representação do objeto.

Entretanto, o resultado para a frequência  $h = \lambda$  se deteriorou, ainda que fossem utilizados a derivada do pulso Gaussiano e o critério para escolha de pólos, como mostra a Figura 4.25. Diversos testes foram realizados com vários parâmetros tais como: o número de segmentos, número de pólos, largura da excitação, etc, porém, para este caso, a resposta não teve nenhuma melhora. O que ocorre é que tanto para o pulso Gaussiano quanto para a derivada do pulso Gaussiano, ao extrair a resposta através da deconvolução, ou seja, a resposta impulsional, um certo nível de frequências de pequeno valor estarão inevitavelmente presentes. Como a transformada de Fourier de um impulso é  $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ , a transformada de Fourier da derivada do impulso será  $\mathcal{F}[(d/dt)\delta(t)] = j\omega$ . Ainda que



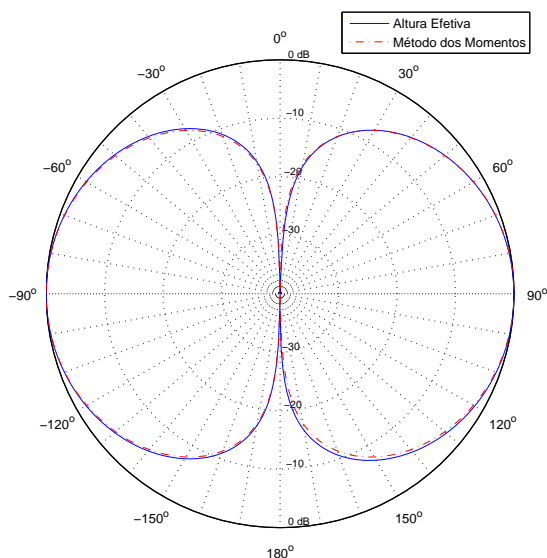


Figura 4.24: Diagrama de radiação para o dipolo  $h = \lambda/2$  com  $h = 0,14$  m,  $a = h/150$  m, dividida em 11 células, sendo cada segmento modelado por  $M = 30$  singularidades, excitação senoidal e  $MSE = 1,98 \times 10^{-3}$ .

na frequência  $\omega = 0$  não haja sinal, em baixas frequências haverá sinal com amplitude significativa tal que, com seu grande comprimento de onda relativo ao dipolo, causará diferença nos retardos causados pela radiação de cada segmento. A diferença será maior quando o observador estiver fora das proximidades de  $\theta = 90^\circ$  (perda da simetria do dipolo) e esta é a causa da deterioração do diagrama de radiação para  $h = \lambda$  quando a deconvolução é utilizada.

O uso da deconvolução não adicionou precisão aos resultados mas apenas reduziu a quantidade de pólos necessários à representação da antena. Desta forma, o método da deconvolução não é, à princípio, necessário à representação de uma antena através da altura efetiva expressa por meio de suas ressonâncias naturais.

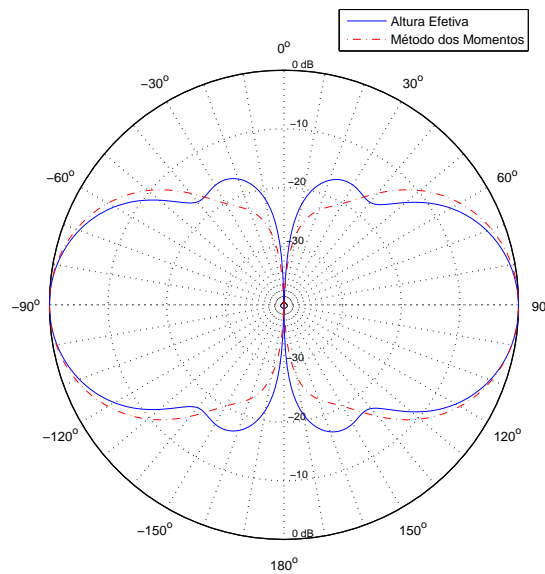


Figura 4.25: Diagrama de radiação para o dipolo com  $h = 0,14$  m,  $a = h/150$  m, sendo  $h = \lambda$ , dividida em 11 células, sendo cada segmento modelado por  $M = 2$  singularidades, excitação senoidal e  $MSE = 7,82 \times 10^{-3}$ .

## 4.2 Conjunto de Dipolos Log-Periódicos

Antenas tipo Log-Periódica fazem parte de uma família extensa de antenas conhecidas como *independentes da frequência* e por isso apresentam a característica de serem consideradas soluções banda-larga. A Log-Periódica em particular, tem sua resposta *quase independente da frequência* devido ao seu formato não poder ser completamente especificado por ângulos [2]. Nestas antenas, o formato da estrutura pode ser descrito através de um ângulo que varia com o logaritmo da distância entre o ponto e o centro da antena. Por exemplo, para descrever a estrutura de uma dada antena, o formato da mesma pode expresso por

$$\theta = \theta_0 \operatorname{sen} \left[ b \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) \right], \quad (4.19)$$

em que  $\theta_0$  e  $r_0$  são ângulos e distâncias do centro iniciais, e  $b$  é uma constante. A Figura 4.26 ilustra este tipo de antena.

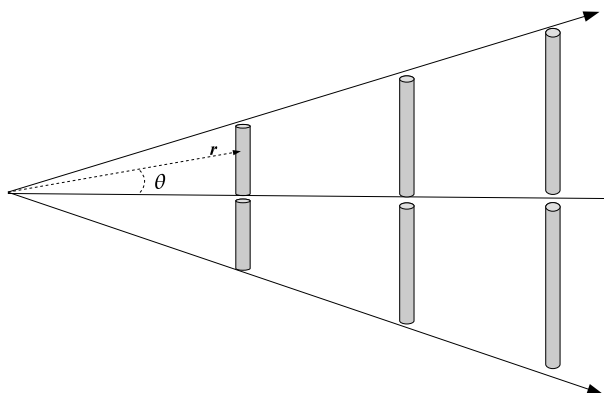


Figura 4.26: Antena Log-Periódica com ângulos dos elementos em função da distância.

É evidente que os valores de  $\theta$  na Equação (4.19), são repetidos com a variação de  $r$ , argumento da função seno, tornando a descrição da estrutura periódica. Sendo  $r$  uma função da frequência, podemos dizer que esta estruturação da antena é então periódica e será função do logaritmo da frequência, o que origina a nomenclatura Log-Periódica. A Figura 4.27 ilustra uma antena Log-Periódica formada pela associação de dipolos arranjados no espaço de forma a reproduzir o comportamento logarítmico-periódico exigido para este tipo de antena. Esta antena é chamada de LPDA - *Log-Periodic Dipole Array*, ou Matriz (Arranjo ou Conjunto) de Dipolos Log-Periódica.

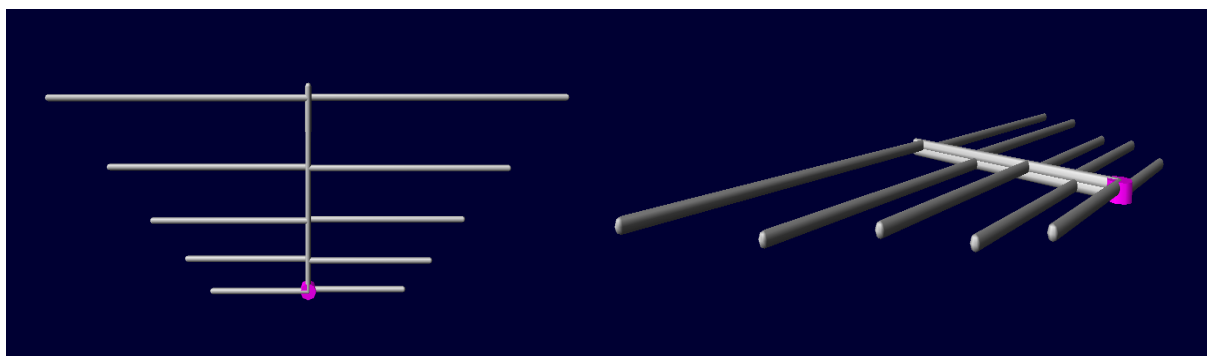


Figura 4.27: Antena Log-Periódica com 5 dipolos e alimentação na extremidade.

A solução de referência utilizada para comparação com os resultados obtidos através da formulação da altura efetiva, como realizado para o dipolo, é o MOM pois este método produz soluções extremamente precisas para antenas de fios de geometrias arbitrárias.

### Definição de Parâmetros

A antena Log-Periódica utilizada para simulação, é a representada na Figura 4.28 e tem as seguintes dimensões, de acordo com os números, representados na Tabela 4.1. As dimensões desta antena foram escolhidas para que tenha uma banda de frequências relativamente larga.

Segmento	1	2	3	4	5	6	7
Comprimento (m)	4,1518	4,1518	3,3214	3,3214	2,6572	2,6572	2,1257
Raio (mm)	15,875	15,875	12,7	12,7	9,525	9,525	7,9375
Segmento	8	9	10	11	12	13	14
Comprimento (m)	2,1257	1,7006	1,7006	0,061	0,1524	0,9964	0,7974
Raio (mm)	7,9375	6,35	6,35	0,5131	0,5131	0,5131	0,5131
Segmento	15	16	17	18	19	20	21
Comprimento (m)	0,6376	0,5102	0,1524	0,9964	0,7974	0,6376	0,5102
Raio (mm)	0,5131	0,5131	0,5131	0,5131	0,5131	0,5131	0,5131

Tabela 4.1: Comprimento e raio dos segmentos da antena Log-Periódica utilizada para simulações

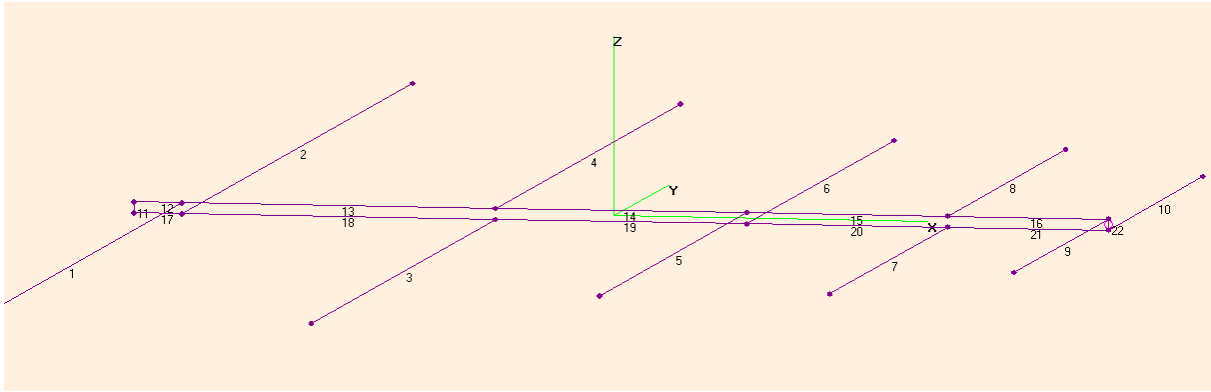


Figura 4.28: Numeração dos elementos da antena Log-Periódica com 5 dipolos e alimentação na extremidade.

As dimensões desta antena são relativamente grandes, já que a excitação é a mesma utilizada para excitar o dipolo na Seção 4.1. Isso fará com que o tamanho da malha seja maior, aumentando assim o tempo de simulação e impedindo que a resolução da antena (número de células que são utilizadas para descrever a antena) seja grande. Estas limitações fazem com que o erro de dispersão numérica seja mais significativo. Utilizando a Equação (4.4), é possível calcular qual seria a frequência máxima associada ao elemento de menor comprimento. No caso, os menores elementos são os indicados com os números 9 e 10 e têm 1,7006 m. A frequência de operação do conjunto formado pelos elementos 9 e 10 será a maior e é representada através da Equação (4.20), ou seja,

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{2h} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{2 \times 1,7006 \text{ m}} = 88,04 \text{ MHz.} \quad (4.20)$$

Quando a Log-Periódica é excitada com o pulso estreito descrito em (2.75), as várias frequências de operação dos diversos elementos da antena serão excitadas. Entretanto, a frequência calculada na Equação (4.20) será a máxima e, portanto, tomada como base para cálculo de  $f_{max}$ , como foi realizado para o dipolo na Seção 4.1. As frequências de ressonância dos outros elementos serão menores. Assim sendo, considerando que a frequência máxima seja o dobro da frequência de operação máxima, então  $f_{max} = 176,41 \text{ MHz}$ . Alguns erros nas proximidades desta frequência são naturalmente esperados, uma vez que

há a presença de elementos de ligação entre os elementos refletores. A Equação (4.4) fornece o número apropriado de segmentos para os elementos 9 e 10 consecutivos. Como é previsível que haverá frequências maiores devido à complexidade desta antena, pois a mesma contém quinas, elementos não alinhados e possui elementos nas três dimensões da malha, a resolução da malha foi então escolhida como  $N_\lambda = 20$ , que é o dobro da resolução utilizada no dipolo da Seção 4.1. A resolução foi aumentada na tentativa de diminuir erros de dispersão numérica, tendo em contrapartida, o aumento do custo computacional. Desta forma, temos que

$$N_{seg} = \frac{hf_{max}}{c} N_\lambda = \frac{1,7006 \text{ m} \cdot 176,41 \text{ MHz} \cdot 20}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \approx 20. \quad (4.21)$$

Para modelar a antena no ambiente computacional do FDTD, os mesmos passos realizados para o dipolo na Seção 4.1 foram realizados. A dimensão da célula cúbica pode ser definida utilizando o número de segmentos em que os elementos consecutivos utilizados na Equação (4.21) foram divididos, ou seja,

$$\Delta = \frac{h_{seg:9e10}}{N_{seg}} = \frac{2 \cdot 1,7006 \text{ m}}{20} = 0,1701 \text{ m}, \quad (4.22)$$

em que  $h_{seg:9e10}$  indica o comprimento conjunto dos segmentos 9 e 10. O modelamento da antena no ambiente computacional, considera então o tamanho  $\Delta$  das células. Cada elemento da antena pode ser determinado em função das células. O elemento  $n$  pode ser escrito como:

$$N_n = \text{INT}\left(\frac{h_{seg:n}}{\Delta}\right), \quad (4.23)$$

em que  $N_n$  é o número de células do elemento e  $h_{seg:n}$  é o comprimento do elemento expresso na Tabela 4.1.

Para modelamento final da malha, o passo de tempo é determinado através da condição de estabilidade de Courant:

$$\Delta t = \frac{\Delta}{\sqrt{3}c} = 3,275 \times 10^{-10} \text{ s}. \quad (4.24)$$

A Tabela 4.1 mostra também o raio de cada elemento que compõe a estrutura da antena. Observa-se que todos os raios são inferiores ao tamanho da célula, o que justifica o uso da técnica de fio fino ao analisar a antena através do FDTD.

Após a definição destes parâmetros, resta ainda definir o tamanho do espaço computacional, ou seja o número de células que cada coordenada espacial terá. No caso da antena Log-Periódica, o espaço cúbico formado por três vezes o tamanho máximo da antena é razoável, já que a camada absorvente será utilizada na fronteira. Neste caso, não foi utilizado duas vezes o tamanho máximo para garantir que a antena esteja suficientemente distante da fronteira. No caso do dipolo isso não era um problema, pois é conhecido que o dipolo apresenta um mínimo de radiação na direção do eixo em que está alinhado.

### Excitação

A excitação para esta antena é exatamente a mesma para o caso do dipolo representado na Seção 4.1. A Equação (2.75) representa o pulso Gaussiano que será introduzido no ambiente computacional do FDTD. As frequências presentes, no entanto, serão diferentes já que a Equação (2.75) irá produzir pulsos de diferentes larguras, de acordo com a variação de  $\Delta t$ . As Figuras 4.29 e 4.30 mostram o pulso e sua respectiva resposta em frequência. Observa-se que o pulso é mais largo do que para o dipolo, gerando menor conteúdo de frequências. Entretanto, a frequência máxima de análise para a Log-Periódica, como definido através da Equação (4.20), está dentro da faixa de frequências da excitação, o que mostra que o pulso é apropriado para a análise desta antena.

Como no caso do dipolo, sendo necessário que baixas frequências não estejam presentes na excitação, a derivada do pulso Gaussiano pode ser utilizada, como explicitado na Equação (2.77). As Figuras 4.31 e 4.32 mostram a derivada do pulso Gaussiano utilizado como excitação na antena Log-Periódica. Percebe-se que a faixa de frequências para análise da Log-Periódica é menor que a do pulso Gaussiano e as baixas frequências assim como a componente contínua são fortemente atenuadas.

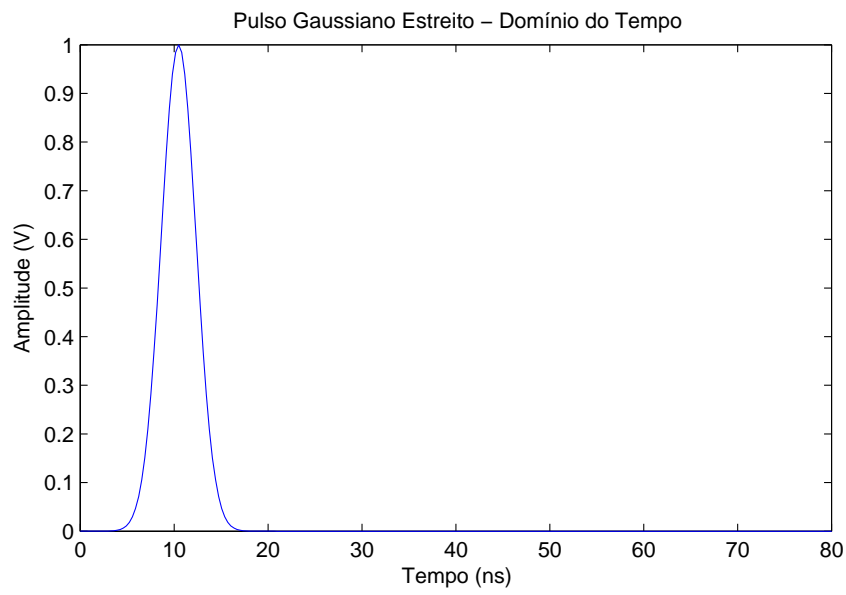


Figura 4.29: Pulso Gaussiano estreito com  $\Delta t = 3,275 \times 10^{-10}$  s.

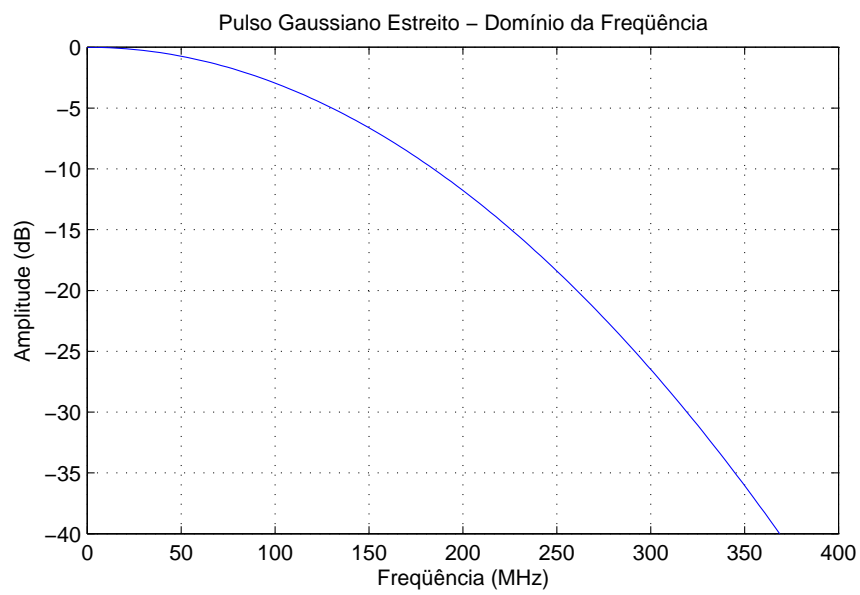


Figura 4.30: Resposta em frequência do pulso Gaussiano estreito com  $\Delta t = 3,275 \times 10^{-10}$  s.



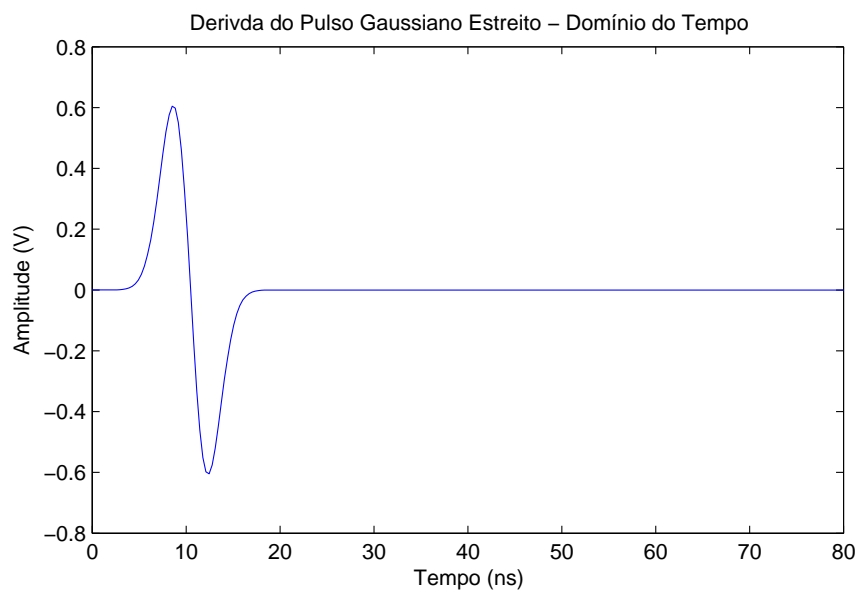


Figura 4.31: Derivada do pulso Gaussiano estreito com  $\Delta t = 3,275 \times 10^{-10}$  s.

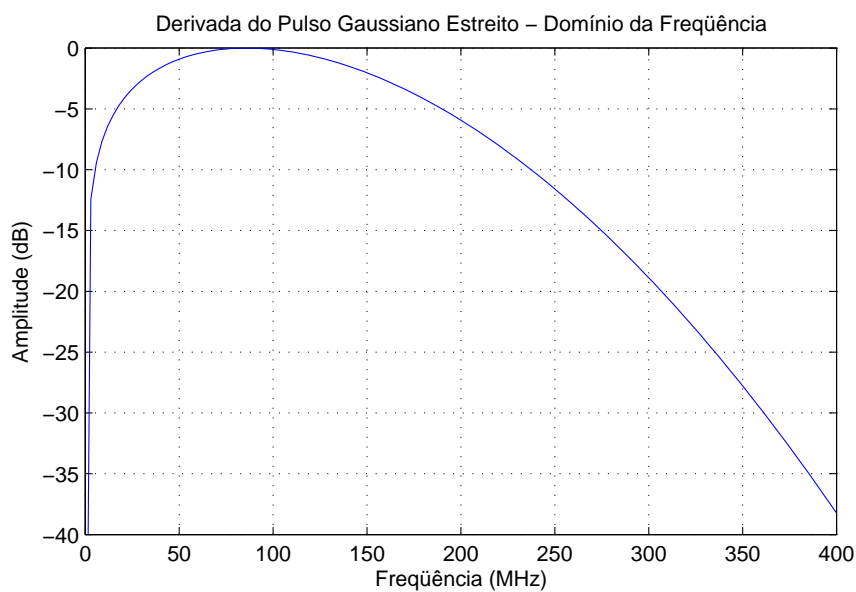


Figura 4.32: Resposta em frequência da derivada do pulso Gaussiano estreito com  $\Delta t = 3,275 \times 10^{-10}$  s.

Em relação ao dipolo, o ambiente computacional é praticamente o mesmo. A diferença

é que as células definidas como condutoras estão, agora, em maior quantidade e mais espaçadas. Isso, porém, não introduz nenhum novo paradigma no ambiente de simulação, uma vez que os campos são calculados iterativamente, segundo equações de Maxwell para todo o ambiente computacional. Entretanto, haverá a diferença do passo de tempo e tamanho das células, porém isso não afeta de forma alguma o código desenvolvido para análise do dipolo.

### 4.2.1 Extração das Singularidades

O código FDTD foi desenvolvido de forma que as correntes em todos os segmentos da Log-Periódica pudessem ser determinadas. As exceções foram os segmentos de quina e intercessão de segmentos, os quais foram desprezados devido à imprecisão que existe no cálculo da corrente nestes pontos (pois a malha varia de ponto a ponto ortogonalmente). As correntes podem ser extraídas utilizando a Equação (??). Considerando que os elementos na Log-Periódica estão alinhados nas três dimensões dentro da malha, então é preciso escrever a corrente para cada dipolo considerando sua orientação. Adotando a convenção dos eixos e posição da antena apresentados na Figura 2.4, é possível escrever, utilizando a Equação (??), as correntes para os elementos alinhados em  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  respectivamente:

$$i_{cx}(n\Delta t) = [H_z(i_a, j_a, k_a) - H_z(i_a, j_a - 1, k_a)]\Delta z + [H_y(i_a, j_a, k_a - 1) - H_y(i_a, j_a, k_a)]\Delta y, \quad (4.25)$$

$$i_{cy}(n\Delta t) = [H_x(i_a, j_a, k_a) - H_x(i_a, j_a, k_a - 1)]\Delta x + [H_z(i_a - 1, j_a, k_a) - H_z(i_a, j_a, k_a)]\Delta z, \quad (4.26)$$

$$i_{cz}(n\Delta t) = [-H_x(i_a, j_a, k_a) + H_x(i_a, j_a - 1, k_a)]\Delta x + [-H_y(i_a - 1, j_a, k_a) + H_y(i_a, j_a, k_a)]\Delta y. \quad (4.27)$$

Estas correntes são, então, utilizadas para calcular as singularidades de cada segmento da antena utilizando o Matrix Pencil.

### 4.2.2 Cálculo da Altura Efetiva para a LPDA

Uma vez que as singularidades tenham sido determinadas, é possível definir o vetor resíduo através de uma análise semelhante à realizada nas Equações (3.52), (3.53) e (3.54) para o dipolo. O vetor resíduo, terá componentes nas direções dos fios. Assim, podemos escrever que

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{x}', s_{\alpha}) = \tilde{R}_{\alpha}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{x}', s_{\alpha})\hat{\mathbf{x}},$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{y}', s_{\alpha}) = \tilde{R}_{\alpha}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{y}', s_{\alpha})\hat{\mathbf{y}},$$

e

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{z}', s_{\alpha}) = \tilde{R}_{\alpha}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{z}', s_{\alpha})\hat{\mathbf{z}}, \quad (4.28)$$

em que  $\tilde{R}_{\alpha}^{(\mathbf{J})}$  é o resíduo calculado no Matrix Pencil para um determinado segmento. Se por exemplo, o elemento da antena é um condutor alinhado em  $\hat{x}$ , então o resíduo é calculado para cada segmento deste condutor. O vetor resíduo para cada segmento, é o resíduo deste segmento na direção  $\hat{x}$ , sendo que nas outras direções o valor do resíduo é igual a zero. O vetor resíduo perpendicular pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha\theta}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) &= \cos\theta \cos\phi \tilde{R}_{\alpha}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{x}', s_{\alpha}) + \cos\theta \sin\phi \tilde{R}_{\alpha}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{y}', s_{\alpha}) - \sin\theta \tilde{R}_{\alpha}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{z}', s_{\alpha}), \\ \tilde{R}_{\alpha\phi}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) &= -\sin\phi \tilde{R}_{\alpha}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{x}', s_{\alpha}) + \cos\phi \tilde{R}_{\alpha}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{y}', s_{\alpha}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

O argumento da fase pode ser obtido sabendo que as coordenadas da antena são  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ :

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' = x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi + z' \cos\theta. \quad (4.30)$$

Utilizando as Equações (3.59) e (3.60) que definem a altura efetiva em função das singularidades do objeto, é possível então extrair a resposta semi-analítica:

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{h}^t)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) = \tilde{R}_{\alpha\theta}^{(\mathbf{h}^t)}(\mathbf{r}', s_{\alpha})\hat{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{R}_{\alpha\phi}^{(\mathbf{h}^t)}(\mathbf{r}', s_{\alpha})\hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad (4.31)$$

na qual as componentes da Equação (4.31) podem ser escritas como

$$\tilde{R}_{\alpha\theta}^{(\mathbf{h}^t)}(\mathbf{r}', s_\alpha) = \int_{V'} s_\alpha \tilde{R}_{\alpha\theta}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{r}', s_\alpha) e^{s_\alpha \left( \frac{x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi + z' \cos \theta}{c} \right)} dV', \quad (4.32)$$

e

$$\tilde{R}_{\alpha\phi}^{(\mathbf{h}^t)}(\mathbf{r}', s_\alpha) = \int_{V'} s_\alpha \tilde{R}_{\alpha\phi}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{r}', s_\alpha) e^{s_\alpha \left( \frac{x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi + z' \cos \theta}{c} \right)} dV', \quad (4.33)$$

sabendo que  $\tilde{R}_{\alpha\theta}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{r}', s_\alpha)$  e  $\tilde{R}_{\alpha\phi}^{(\mathbf{J})}(\mathbf{r}', s_\alpha)$  são determinados pela Equação (4.29).

Finalmente, a expressão da altura efetiva pode ser determinada:

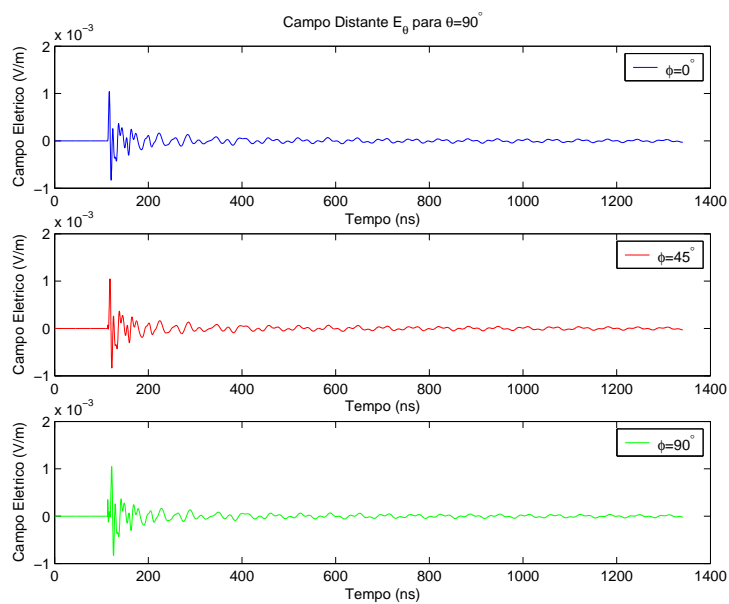
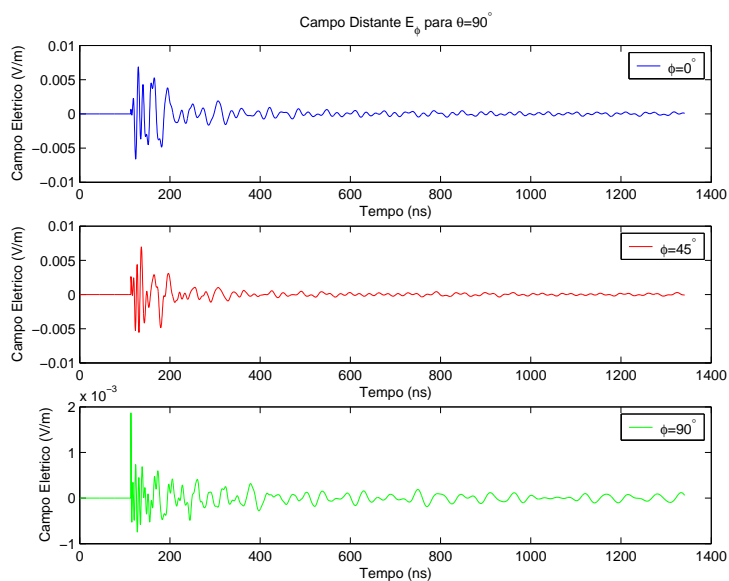
$$\mathbf{h}^t(\hat{\mathbf{r}}, t) = U \left( t - \frac{r}{c} \right) \sum_{\alpha} \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{h}^t)}(\mathbf{r}', s_\alpha) e^{s_\alpha \left( t - \frac{r}{c} \right)}, \quad (4.34)$$

em que  $\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{h}^t)}(\mathbf{r}', s_\alpha)$  é fornecida pela Equação (4.31).

A implementação numérica da altura efetiva para a antena Log-Periódica é semelhante à realizada para o dipolo na Equação (4.13), ou seja, basta discretizar as variáveis para realizar a integração numérica.

Os campos elétricos distantes determinados através da altura efetiva para a excitação impulsional, no domínio do tempo, são representados nas Figuras 4.33, 4.34, 4.35 e 4.36 para vários ângulos de observador.

Mesmo após um grande intervalo de tempo, o campo mostrado ainda não se anula. Isso é, à princípio, uma dificuldade, pois como o campo impulsional demora muito para se anular, um longo tempo de simulação é necessário, o que consome grande quantidade de recursos computacionais. Além disso, uma resposta tão longa no tempo, cria dificuldades para a rotina de extração de pólos que por este motivo se torna lenta. Para tentar minimizar este problema, trunca-se a resposta em um determinado instante de tempo no qual se considera que a resposta já se aproximou de zero. Um critério apropriado, é o de truncar a resposta quando esta atingiu menos de 1 % do valor máximo. Este truncamento obviamente ocasionará erros uma vez que os pólos extraídos pela resposta truncada, não representam de fato as densidades de corrente impulsional na Log-Periódica.

Figura 4.33: Campo elétrico distante  $E_\theta$  para a LPDA com  $\theta = 90^\circ$ .Figura 4.34: Campo elétrico distante  $E_\phi$  para a LPDA com  $\theta = 90^\circ$ .

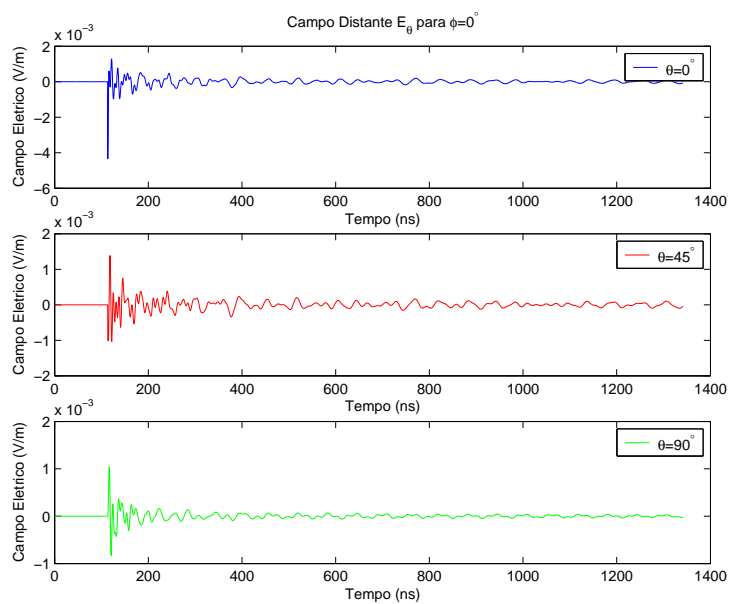


Figura 4.35: Campo elétrico distante  $E_\theta$  para a LPDA com  $\phi = 0^\circ$ .

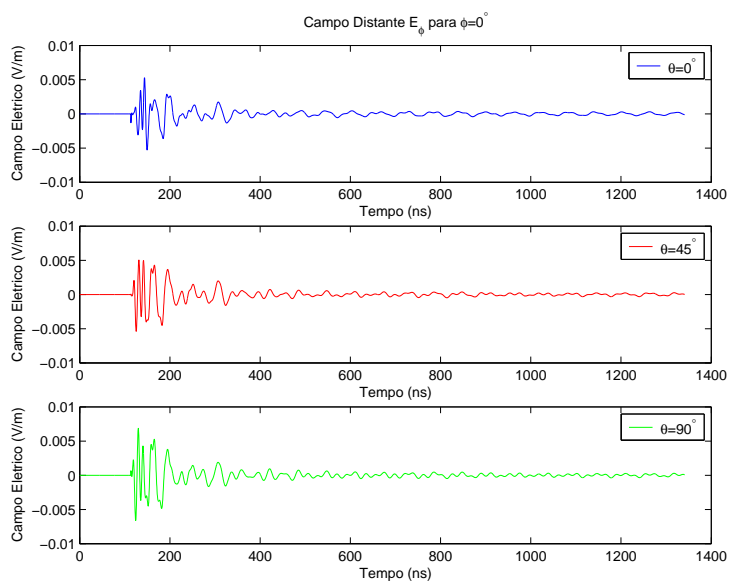


Figura 4.36: Campo elétrico distante  $E_\phi$  para a LPDA com  $\phi = 0^\circ$ .

### 4.2.3 Diagrama de Radiação

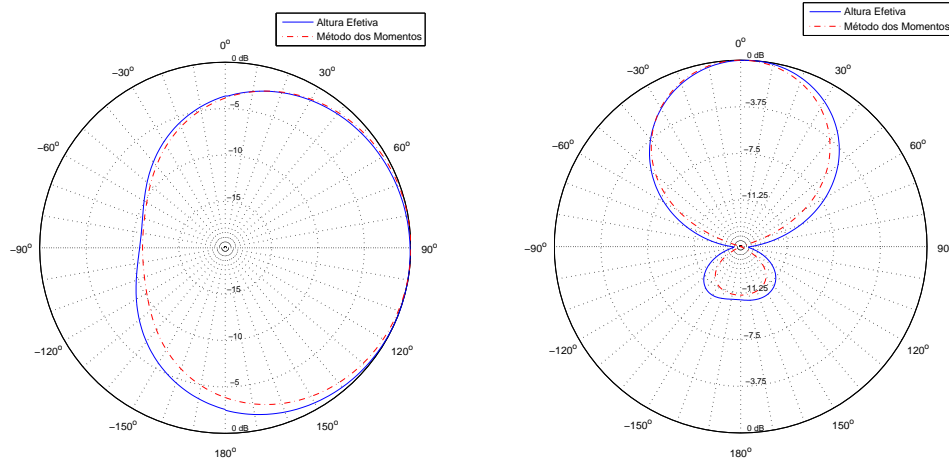
O diagrama de radiação é determinado através das Equações (4.17) e (2.58). Para comparação, o mesmo diagrama de radiação para a mesma antena Log-Periódica foi obtido através do MOM (4NEC2). É preciso destacar que há pequenas diferenças no desenho das duas antenas. A antena Log-Periódica no FDTD tem o espaço entre os dois condutores horizontais (o eixo da antena) um pouco maior do que a antena simulada no 4NEC2. Isso se deve ao erro na discretização do espaço no FDTD, já que este espaço entre os condutores é muito pequeno. No caso do FDTD, este espaço foi modelado como tendo apenas uma célula entre os condutores. Esta célula é de aproximadamente  $\Delta = 17$  cm, ou seja, pouco mais de 2 vezes o espaço da antena modelada na Figura 4.28. Este erro não deve provocar diferenças significativas no modelamento da antena, já que os campos são majoritariamente determinados pelos elementos refletores (os dipolos defasados).

As Figuras 4.37 a 4.40 comparam os resultados obtidos pela implementação da altura efetiva representada pela Equação (4.34) e pelo MOM através do 4NEC2. Como foi dito para o dipolo, através de Parseval é possível provar que os diagramas de radiação para a excitação senoidal e extraídos no tempo e frequência serão iguais se forem definidos na forma normalizada. É preciso, então, definir uma frequência para análise do diagrama de radiação. Como a frequência máxima para a Log-Periódica foi definida como  $f_{max} = 176,41$  MHz, utilizaremos uma frequência abaixo da máxima.

A faixa de passagem de uma antena Log-Periódica formada por conjunto de dipolos, pode ser aproximada pela soma das bandas de cada dipolo da antena [2]. Assim sendo, os limites desta banda podem ser calculados através das frequências de operação, dos dipolos extremos, sendo estes na Log-Periódica, o maior e o menor elemento da antena. Considera-se que estes sejam de meia onda [2]. Os dipolos extremos têm o comprimento total de 8,2836 m e 3,4012 m, respectivamente. Assim sendo, a frequência de operação  $f = c/\lambda = c/2h$  pode ser determinada para estes dois dipolos e são respectivamente 44,102 MHz e 18,064 MHz. Observa-se, que a antena pode ser independente da frequência ou banda-larga, apenas projetando-a de forma que as frequências de operação dos dipolos

extremos se adequem aos requisitos do projeto. A frequência central estará no centro desta faixa e será de 31,083 MHz. É previsível que perto dos limites da faixa, a resposta tenha um resultado com maior discrepância.

Escolhendo a frequência de  $f = 31,08$  MHz, tem-se para o Plano Vertical, ou seja,  $\phi = 0^\circ$  a Figura 4.37 (a) e para o Plano Horizontal a Figura 4.37 (b).



(a)  $\phi = 0^\circ$  e  $MSE = 7,70 \times 10^{-3}$

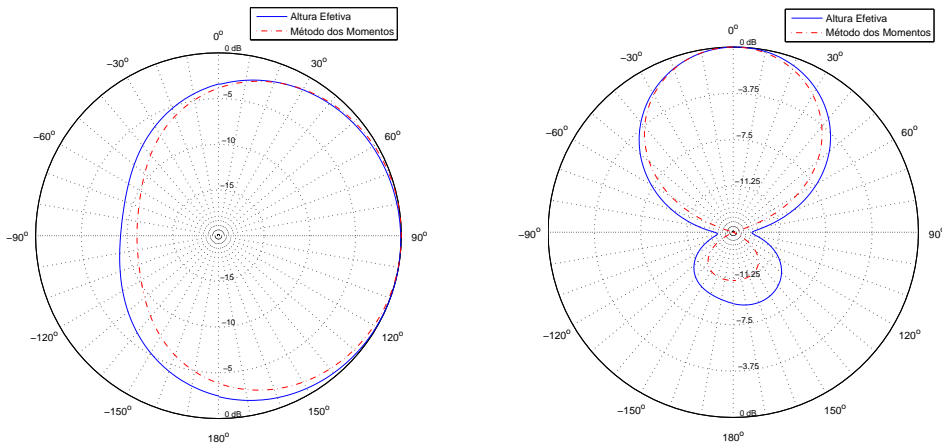
(b)  $\theta = 90^\circ$  e  $MSE = 8,48 \times 10^{-3}$

Figura 4.37: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com  $M = 30$  singularidades e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz.

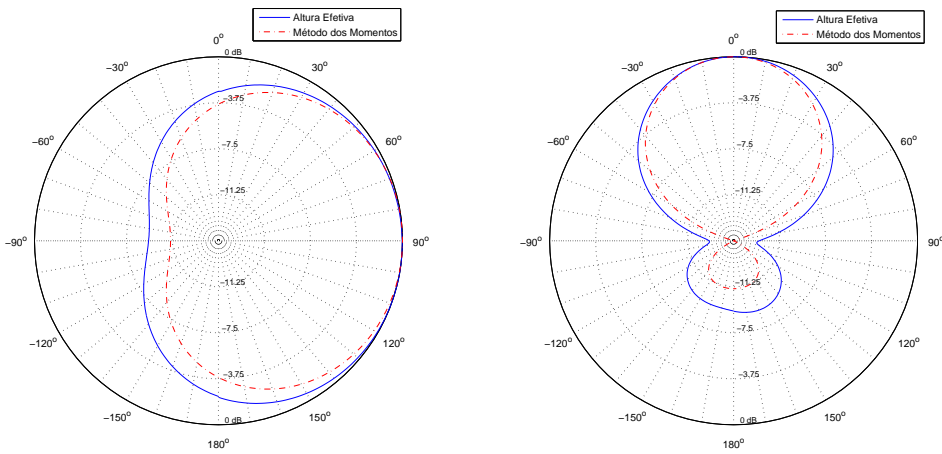
Com o intuito de comparar o efeito da variação do número de singularidades e o número de segmentos no qual a antena é dividida, várias simulações estão colocadas na Figura 4.38. As Figuras (a), (b) e (e), (f) tem o mesmo número de singularidades  $M = 20$  e diferem no número de células utilizado para descrever a antena  $N_{seg}$  que foi aumentado de 20 para 30. Os resultados foram piores com este aumento, havendo uma degradação da resposta. As Figuras (c), (d) e (e), (f) tem o mesmo número de células utilizado para descrever a antena  $N_{seg} = 30$  e diferem no número de singularidades  $M$  que foi aumentado de 20 para 30. À princípio não se pode afirmar que o aumento de  $N_{seg}$  ou  $M$  produzem resultados melhores. O ajuste e o estudo aprofundado destes parâmetros torna-se necessário para que a técnica seja robusta. O aumento de  $N_{seg}$  também aumenta



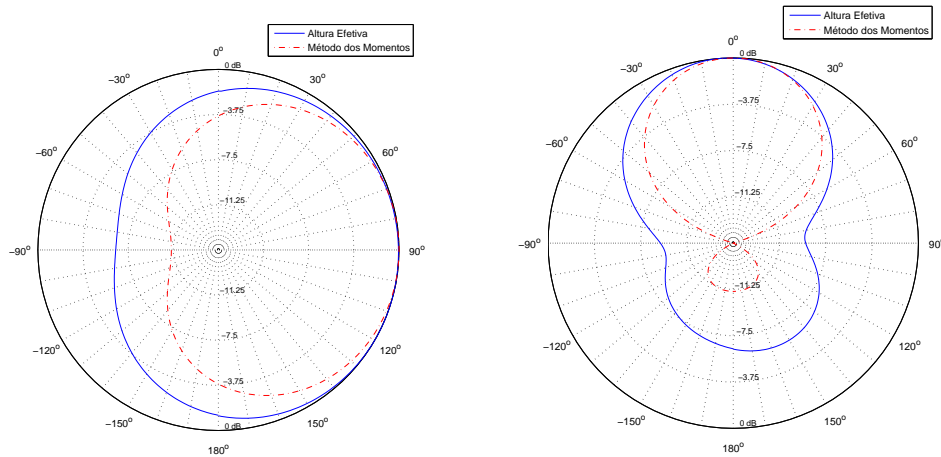
o número total de singularidades. Portanto, o aumento de  $N_{seg}$  tem um efeito semelhante ao aumento de  $M$ . Como ainda nenhum critério para seleção de pólos ou eliminação de pólos parasitas foi aplicado, é possível que este aumento do número de singularidades total seja o responsável pela degradação da resposta quando  $M$  ou  $N_{seg}$  aumentam.



(a)  $M = 20, N_{seg} = 20, \phi = 0^\circ, MSE = 8,91 \times 10^{-3}$       (b)  $M = 20, N_{seg} = 20, \theta = 90^\circ, MSE = 10,12 \times 10^{-3}$



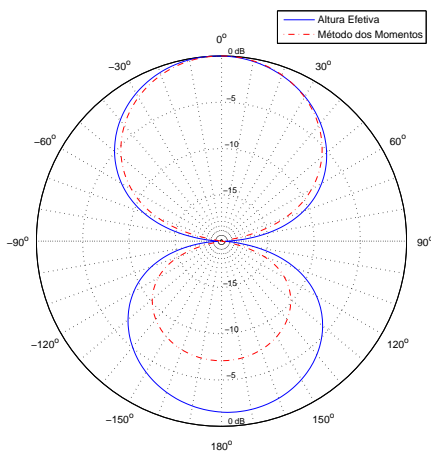
(c)  $M = 30, N_{seg} = 30, \phi = 0^\circ, MSE = 10,47 \times 10^{-3}$       (d)  $M = 30, N_{seg} = 30, \theta = 90^\circ, MSE = 12,37 \times 10^{-3}$



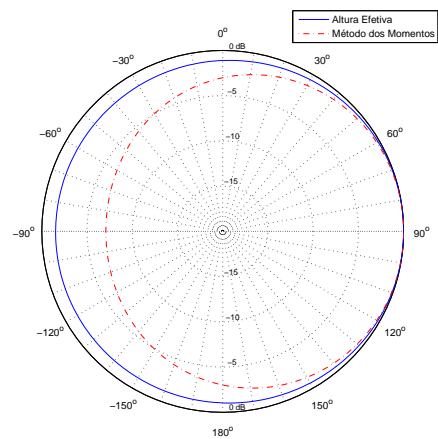
(e)  $M = 20, N_{seg} = 30, \phi = 0^\circ, MSE = 22,53 \times 10^{-3}$     (f)  $M = 20, N_{seg} = 30, \theta = 90^\circ, MSE = 29,11 \times 10^{-3}$

Figura 4.38: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz.

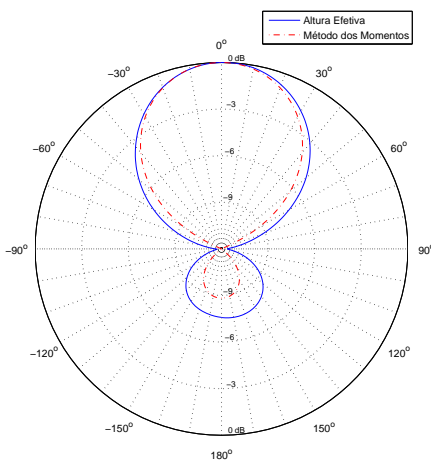
Com o intuito de observar o comportamento desta antena dentro da faixa e comparar os resultados obtidos pela altura efetiva, simulações para algumas frequências são mostradas nas Figuras 4.39 e 4.40. Observa-se que os resultados são bons, com boa concordância, com excessão da frequência mais baixa na faixa da antena, que é a de 21,05 MHz. Frequências mais baixas tem maiores comprimento de onda. Desta forma, alguns dos dipolos da Log-periódica podem se tornar eletricamente grandes. Como visto no caso do dipolo, quando o comprimento de onda se aproxima do comprimento do dipolo há degradação do sinal, sendo esta uma dificuldade para o método.



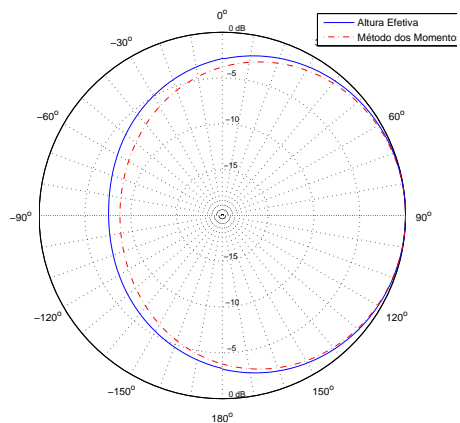
(a) 21,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 41,00 \times 10^{-3}$



(b) 21,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 31,12 \times 10^{-3}$



(c) 24,95 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 10,34 \times 10^{-3}$



(d) 24,95 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 5,99 \times 10^{-3}$

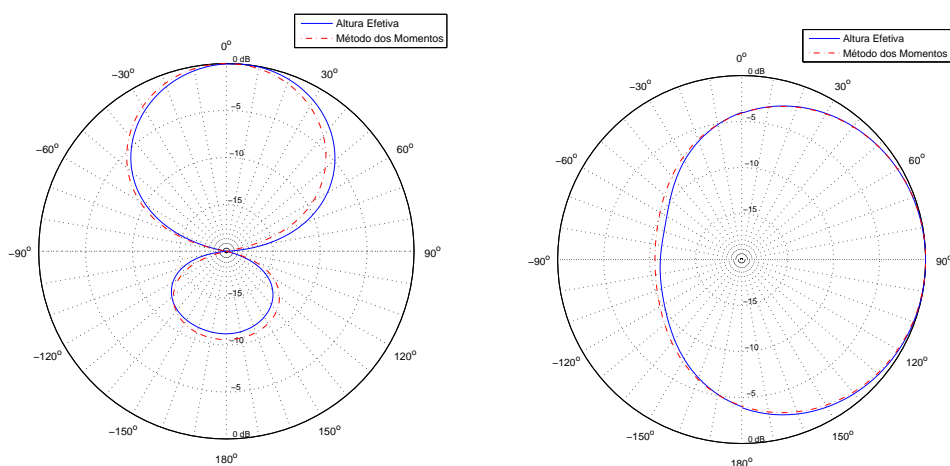
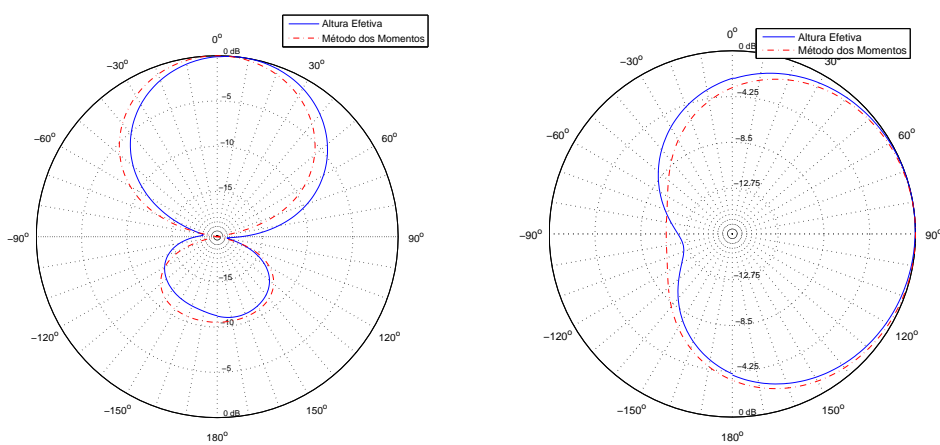
(e) 28,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 9,43 \times 10^{-3}$ (f) 28,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 1,81 \times 10^{-3}$ 

Figura 4.39: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com  $M = 30$  singularidades e pelo MOM de 21,05 MHz a 28,05 MHz.

(a) 34,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 13,13 \times 10^{-3}$ (b) 34,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 5,58 \times 10^{-3}$

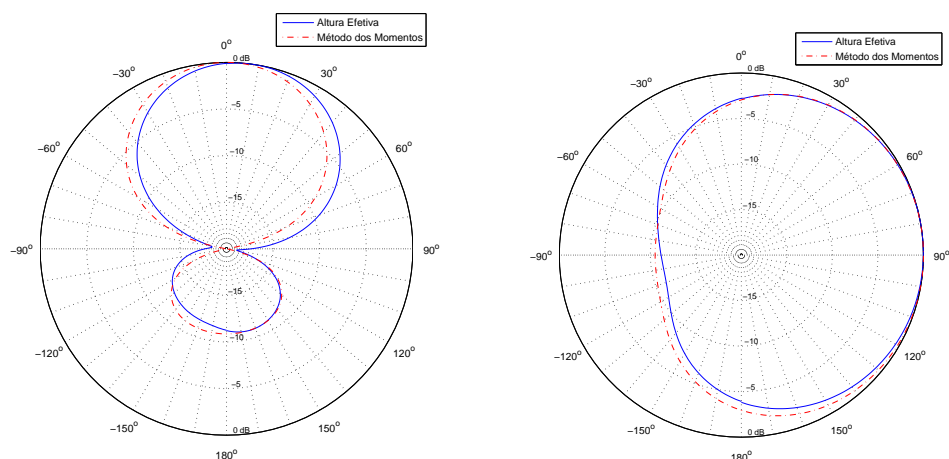
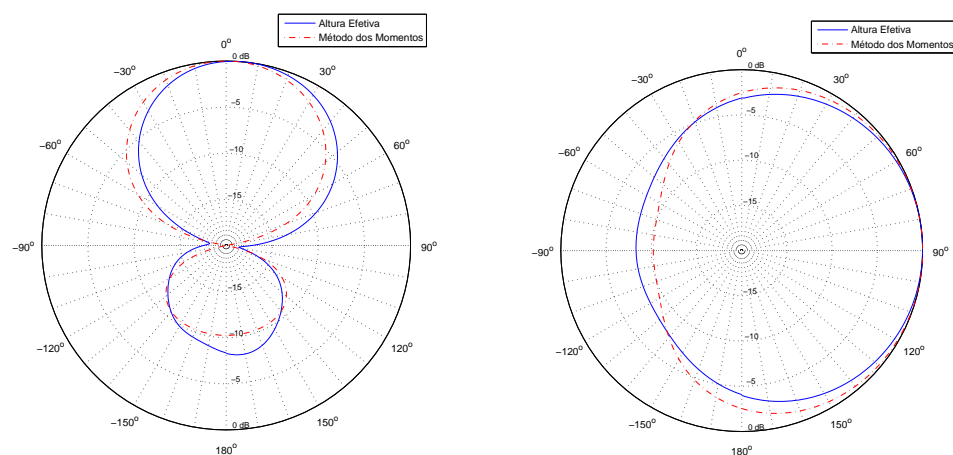
(c) 37,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 15,16 \times 10^{-3}$ (d) 37,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 4,93 \times 10^{-3}$ (e) 40,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 14,40 \times 10^{-3}$ (f) 40,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 8,44 \times 10^{-3}$ 

Figura 4.40: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com  $M = 30$  singularidades e pelo MOM de 34,05 MHz a 40,05 MHz.

### Crítérios para Seleção de Pólos e Deconvolução

Com o intuito de melhorar a resposta obtida para a Log-Periódica, os critérios para seleção dos pólos que mais contribuem na resposta e a eliminação dos pólos parasitas

devem ser utilizados, como mostrado na Seção 3.2.2. Os testes discutidos na Seção 4.2.3 são repetidos utilizando o critério de pólos e mostrados nas Figuras 4.41 a 4.44 em que  $Th = 10^{-2}$ .

Observa-se que o critério de pólos reduz significativamente a quantidade de pólos necessários para representar o diagrama de radiação da antena Log-Periódica. Entretanto, observa-se uma pequena degradação dos diagramas com um ligeiro aumento do  $MSE$ . No caso da Figura 4.42, comparando com a Figura 4.38, é possível notar que o critério dos pólos não só removeu pólos de pouca contribuição na resposta como também removeu pólos parasitas que degradavam significativamente a resposta. Isso ocorre principalmente quando se aumenta o número de segmentos utilizados para descrever a Log-Periódica. Na realidade, pólos parasitas sempre existirão, porém ao aumentar o número de segmentos, o número destes pólos parasitas aumenta e, conseqüentemente, há maior degradação do diagrama. Por este motivo, o critério dos pólos melhorou muito a resposta nestes casos.

A deconvolução, como observado para o dipolo, não produzirá resultados melhores uma vez que a excitação contém todas as frequências da banda da Log-Periódica, ou seja, com a deconvolução, nenhum pólo natural adicional será observado. Na realidade, espera-se que a resposta seja pior pelos mesmos motivos observados para o dipolo: a presença de baixas frequências, que, como visto na Figura 4.38, degrada os campos obtidos através da altura efetiva. Utilizando o critério de pólos para a resposta obtida através da deconvolução, obtém-se a Figura 4.45 que revela uma degradação da resposta em relação à resposta obtida sem a deconvolução, representada na Figura 4.37.

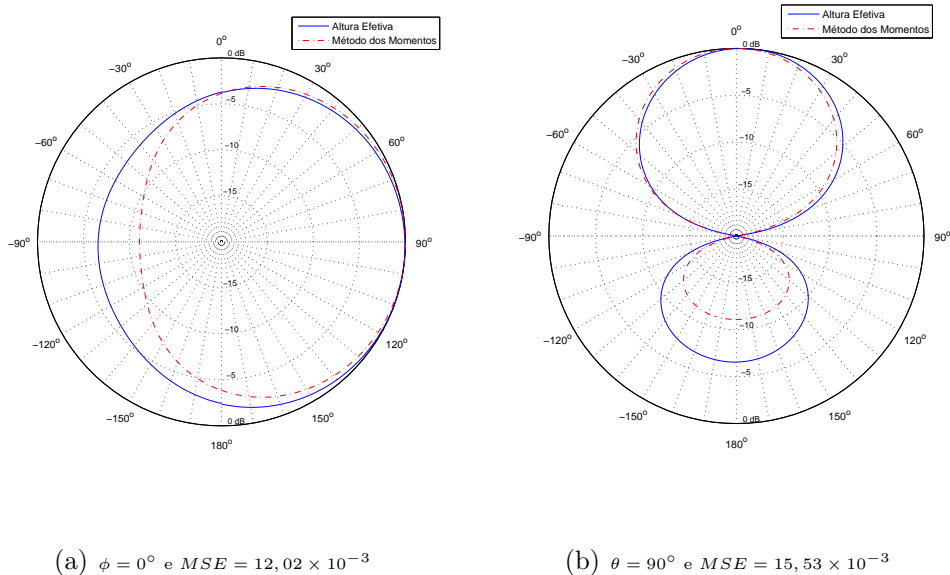
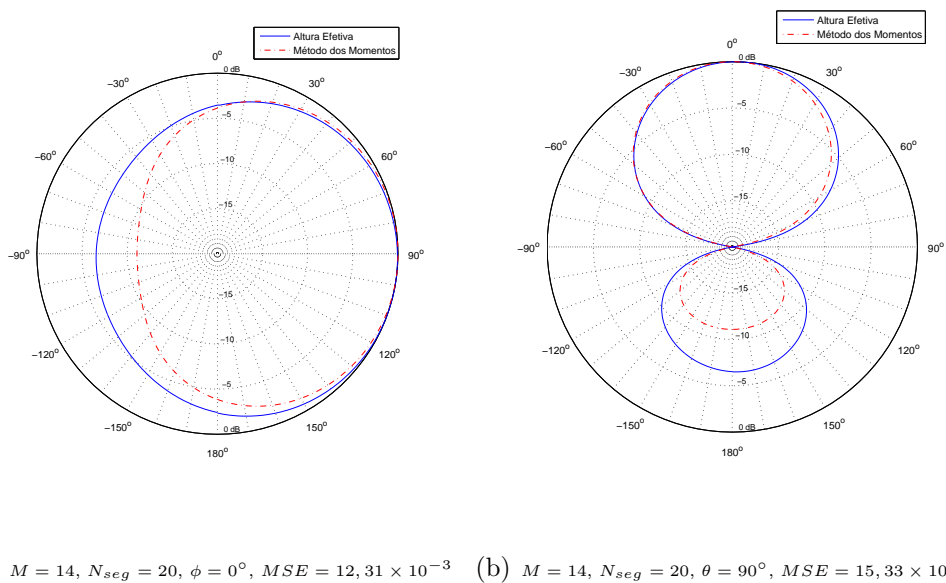
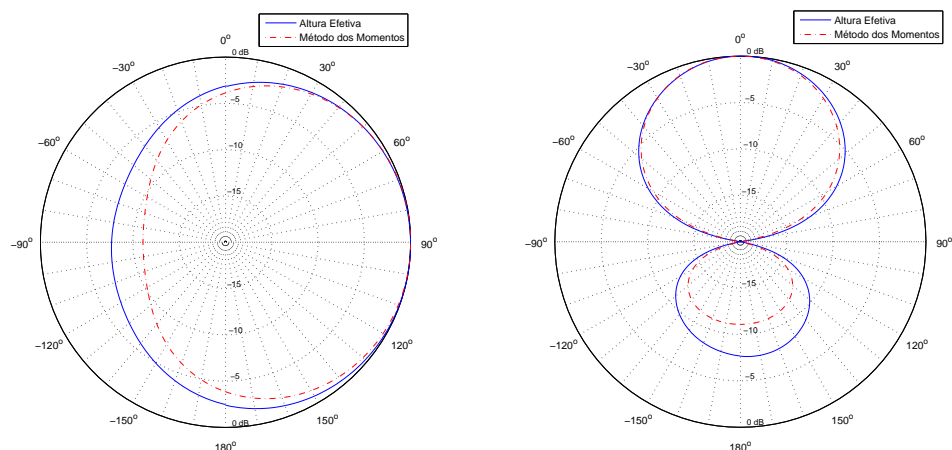
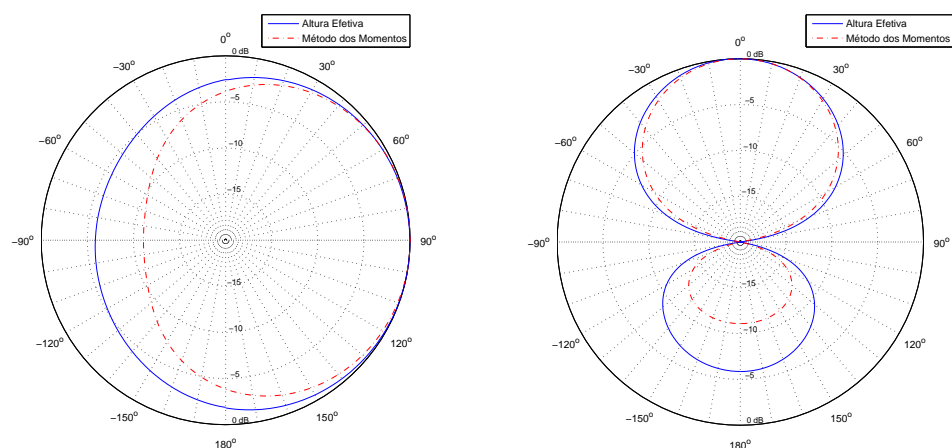


Figura 4.41: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com  $M = 17$  singularidades e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz.





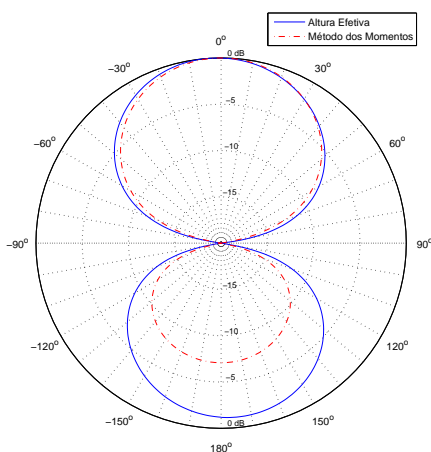
(c)  $M = 21, N_{seg} = 30, \phi = 0^\circ, MSE = 10,13 \times 10^{-3}$     (d)  $M = 21, N_{seg} = 30, \theta = 90^\circ, MSE = 10,01 \times 10^{-3}$



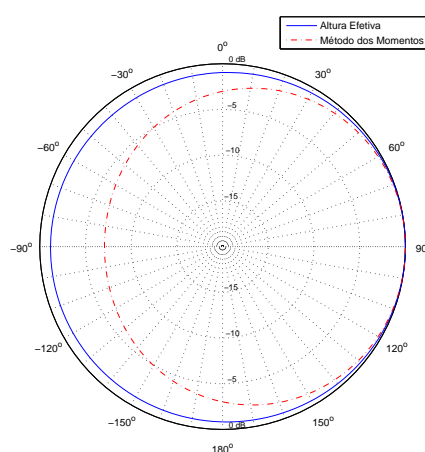
(e)  $M = 15, N_{seg} = 30, \phi = 0^\circ, MSE = 17,57 \times 10^{-3}$     (f)  $M = 15, N_{seg} = 30, \theta = 90^\circ, MSE = 18,70 \times 10^{-3}$

Figura 4.42: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz.

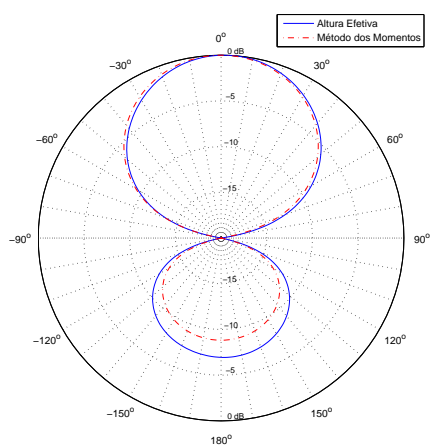




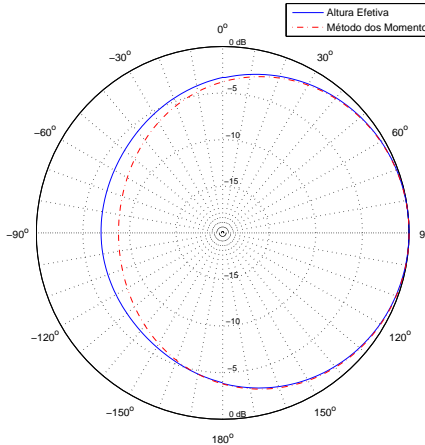
(a) 21,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 45,17 \times 10^{-3}$



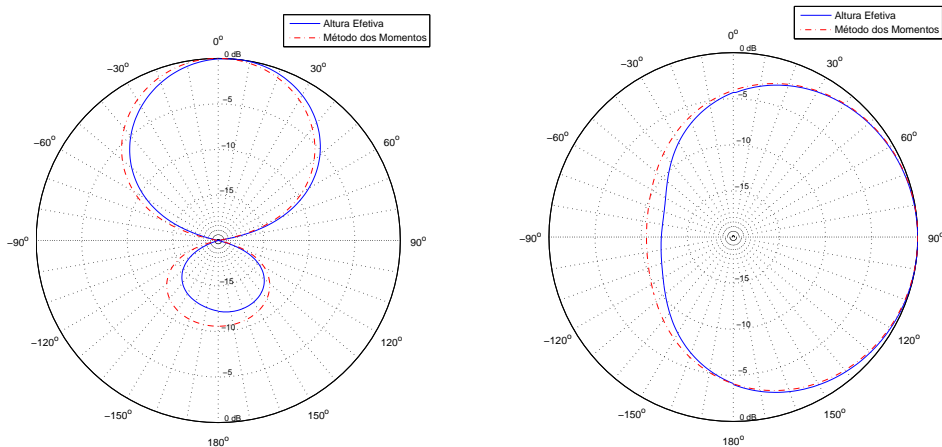
(b) 21,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 34,68 \times 10^{-3}$



(c) 24,95 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 7,75 \times 10^{-3}$

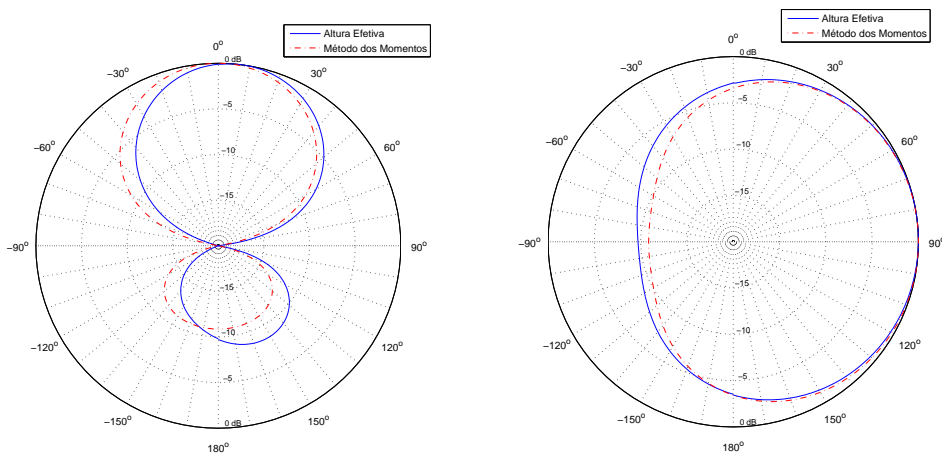


(d) 24,95 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 4,40 \times 10^{-3}$



(e) 28,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 10,38 \times 10^{-3}$       (f) 28,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 2,91 \times 10^{-3}$

Figura 4.43: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com  $M = 17$  singularidades e pelo MOM de 21,05 MHz a 28,05 MHz.



(a) 34,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 15,83 \times 10^{-3}$       (b) 34,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 4,10 \times 10^{-3}$

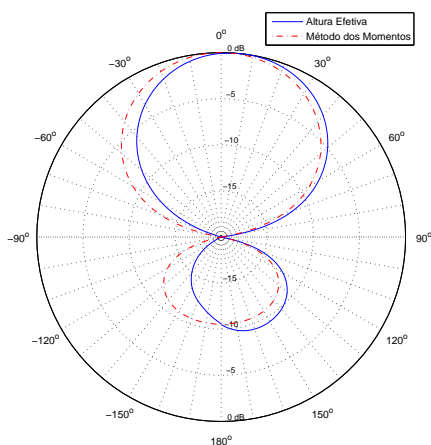
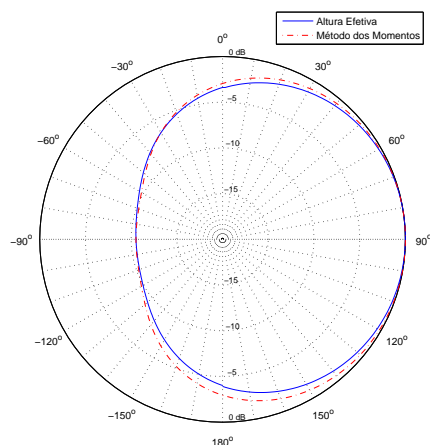
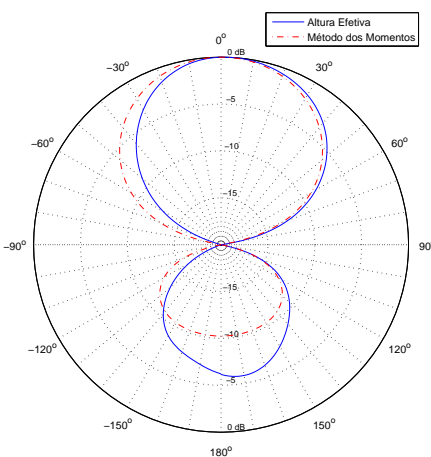
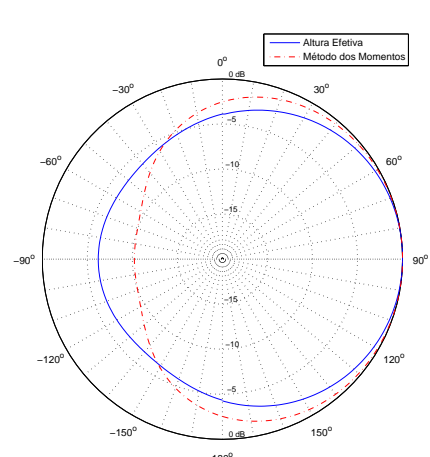
(c) 37,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 14,59 \times 10^{-3}$ (d) 37,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 5,86 \times 10^{-3}$ (e) 40,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 12,72 \times 10^{-3}$ (f) 40,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 16,65 \times 10^{-3}$ 

Figura 4.44: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com  $M = 17$  singularidades e pelo MOM de 34,05 MHz a 40,05 MHz.

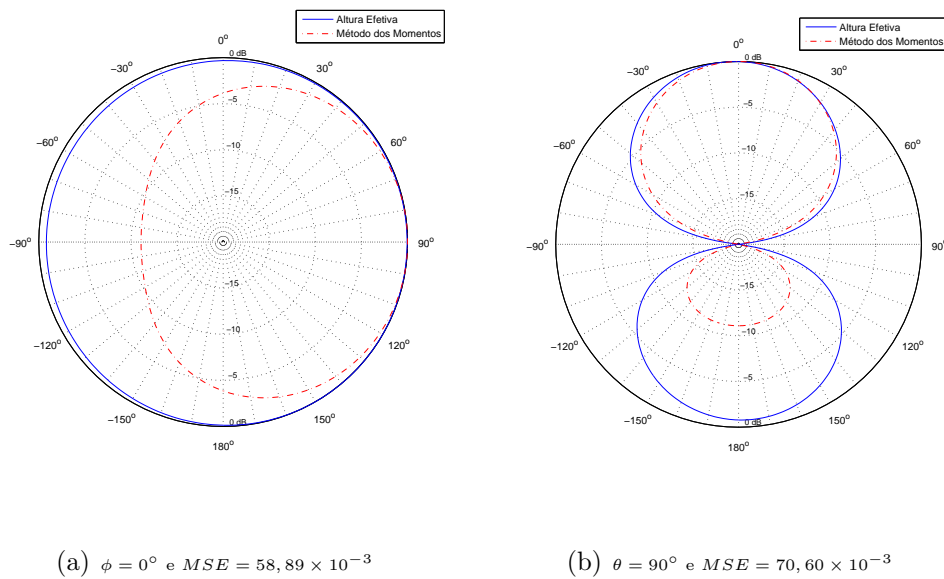
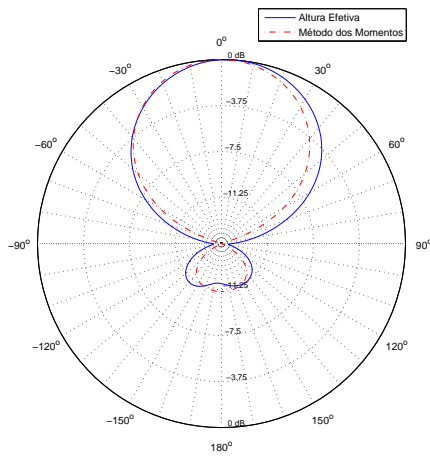


Figura 4.45: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva através da deconvolução com  $M = 8$  singularidades e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz.

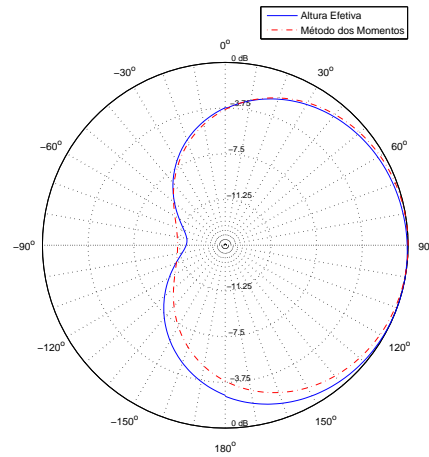
#### 4.2.4 Excitação Derivada do Pulso Gaussiano

A excitação usada até o momento foi o pulso Gaussiano. Para verificar a resposta devido à excitação derivada do pulso Gaussiano, os testes são repetidos e mostrados nas Figuras 4.46 e 4.47. A excitação depende dos passos de tempo e espacial como mostra a Equação (2.77). É possível no entanto definir a excitação arbitrariamente como se o número de segmentos fosse maior ou menor que o número de segmentos no qual a antena é dividida. Isso fará como que as frequências introduzidas no ambiente computacional variem em função da largura do pulso na excitação. Para tal, defini-se  $N_{exc}$  como o número de segmentos para definir a excitação arbitrariamente.

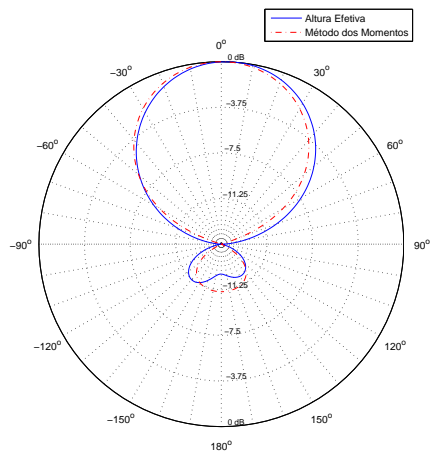
As Figuras 4.46 e 4.47 mostram que ao aumentar o número de segmentos para definir a Log-Periódica  $N_{seg}$  e diminuir o número de segmentos na definição da excitação  $N_{exc}$ , a resposta tem uma melhora. O que ocorre na realidade, é o aumento do número de segmentos o que aumenta a precisão dos resultados e a diminuição das altas frequências da excitação, o que diminui a dispersão numérica.



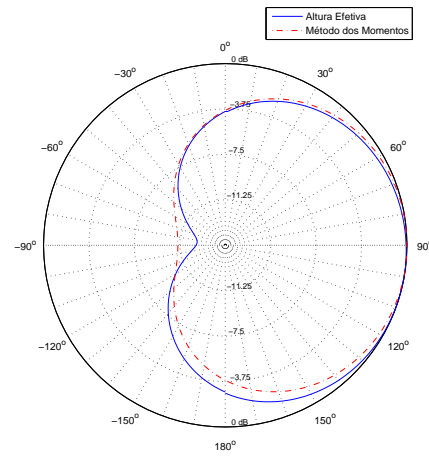
(a)  $N_{exc} = 20, \theta = 90^\circ, MSE = 6,98 \times 10^{-3}$



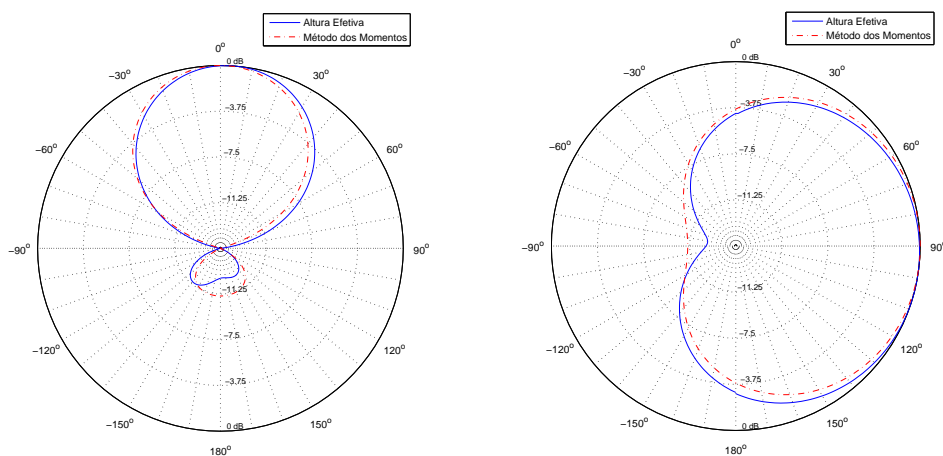
(b)  $N_{exc} = 20, \phi = 0^\circ, MSE = 10,15 \times 10^{-3}$



(c)  $N_{exc} = 10, \theta = 90^\circ, MSE = 7,19 \times 10^{-3}$



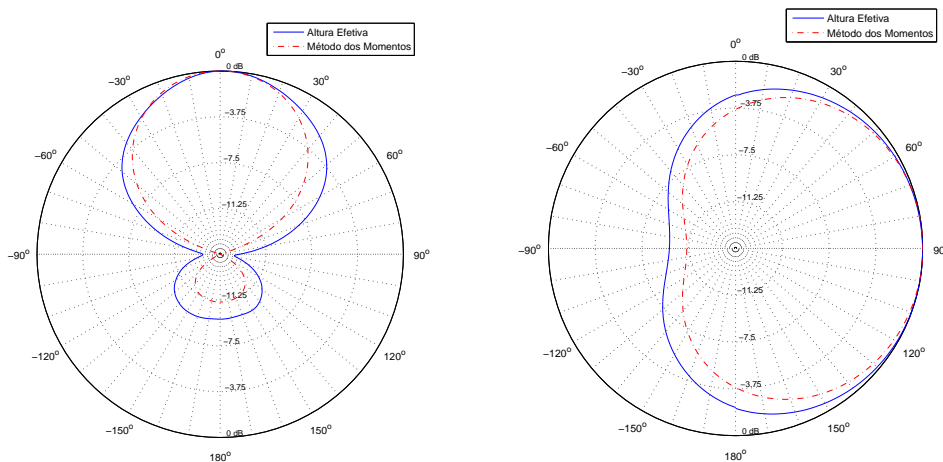
(d)  $N_{exc} = 10, \phi = 0^\circ, MSE = 6,18 \times 10^{-3}$



(e)  $N_{exc} = 5, \theta = 90^\circ, MSE = 7,06 \times 10^{-3}$

(f)  $N_{exc} = 5, \phi = 0^\circ, MSE = 5,65 \times 10^{-3}$

Figura 4.46: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com  $M = 50$  singularidades e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz e  $N_{seg} = 20$ .



(a)  $N_{exc} = 30, \theta = 90^\circ, MSE = 15,15 \times 10^{-3}$

(b)  $N_{exc} = 30, \phi = 0^\circ, MSE = 10,36 \times 10^{-3}$

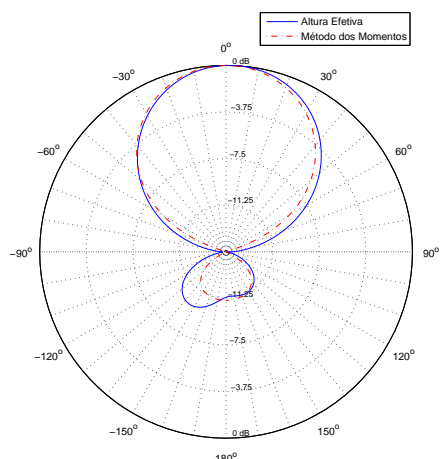
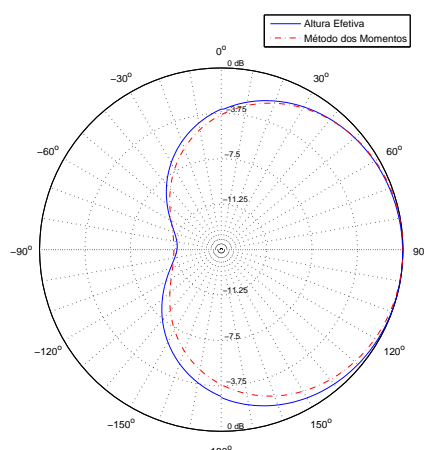
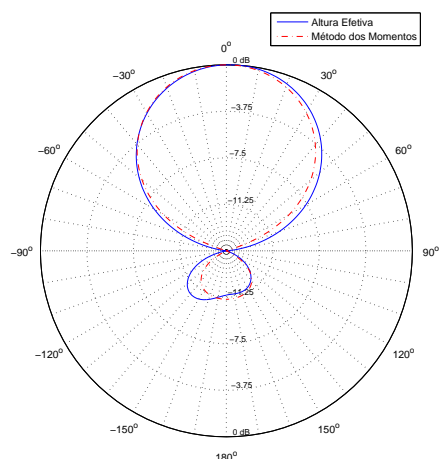
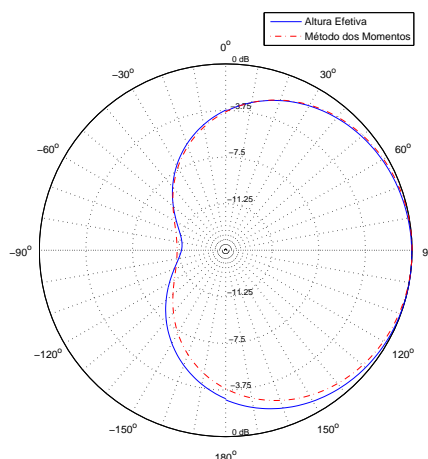
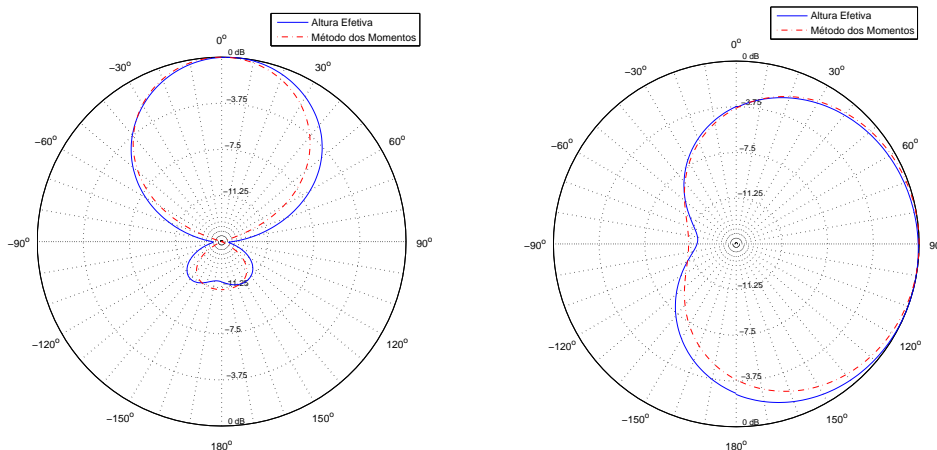
(c)  $N_{exc} = 10, \theta = 90^\circ, MSE = 6,48 \times 10^{-3}$ (d)  $N_{exc} = 10, \phi = 0^\circ, MSE = 5,82 \times 10^{-3}$ (e)  $N_{exc} = 5, \theta = 90^\circ, MSE = 5,86 \times 10^{-3}$ (f)  $N_{exc} = 5, \phi = 0^\circ, MSE = 4,70 \times 10^{-3}$ 

Figura 4.47: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com  $M = 50$  singularidades e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz e  $N_{seg} = 30$ .

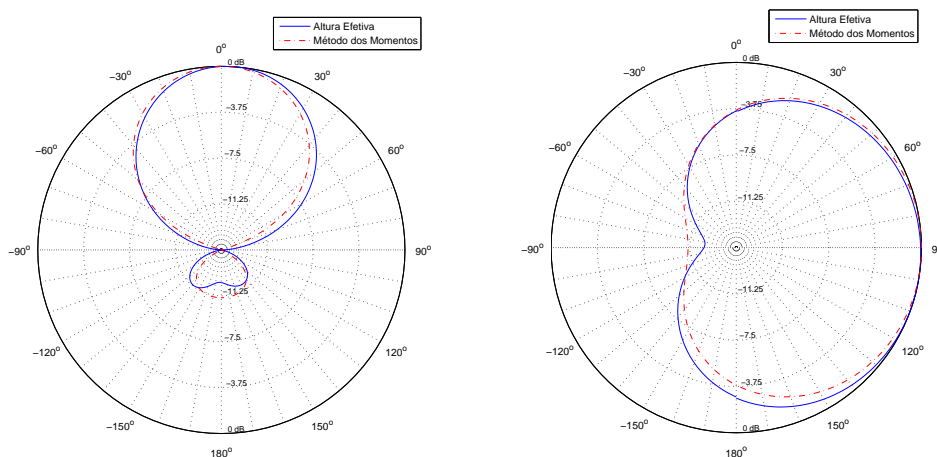
### Critérios para Seleção de Pólos

A fim de observar se há melhora na resposta obtida para a excitação derivada do pulso Gaussiano, os critérios para seleção dos pólos que mais contribuem na resposta e

a eliminação dos pólos parasistas devem ser utilizados como mostrado na Seção 3.2.2. As Figuras 4.48 e 4.49 ilustram os mesmos casos das Figuras 4.46 e 4.47, porém com os critérios para seleção de pólos aplicados.

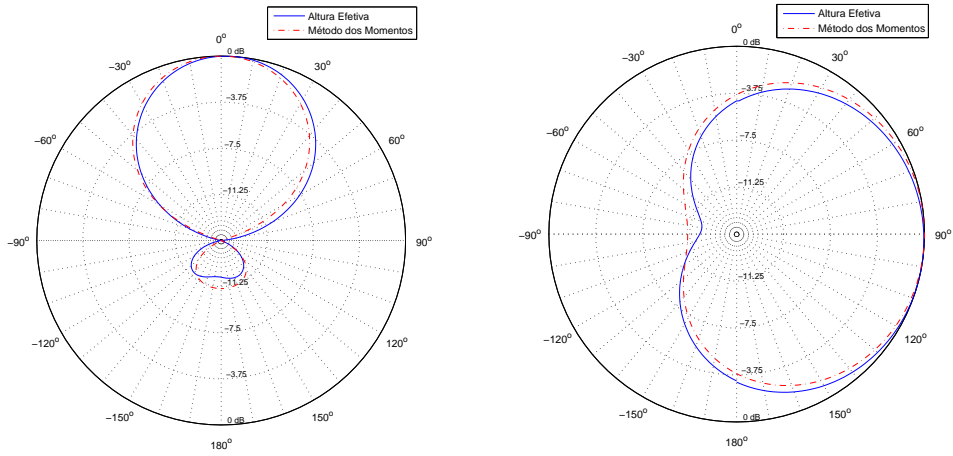


(a)  $M = 43, N_{exc} = 20, \theta = 90^\circ, MSE = 10,15 \times 10^{-3}$       (b)  $M = 43, N_{exc} = 20, \phi = 0^\circ, MSE = 6,77 \times 10^{-3}$



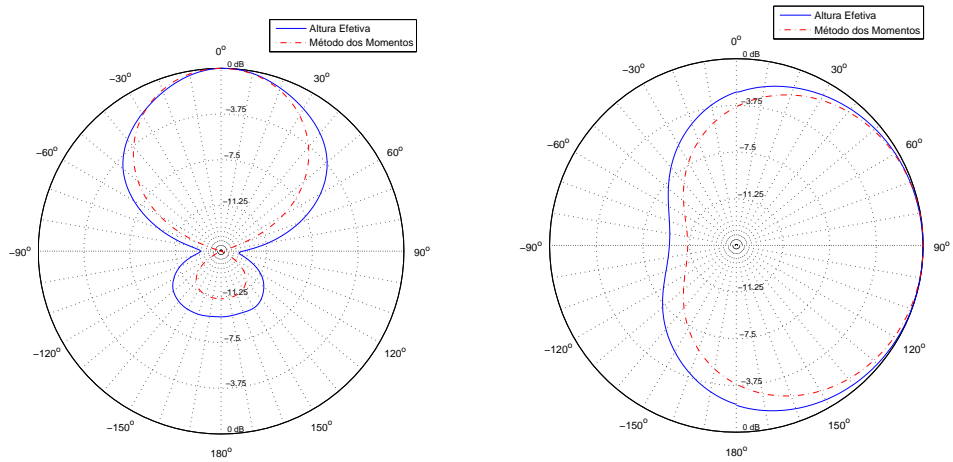
(c)  $M = 35, N_{exc} = 10, \theta = 90^\circ, MSE = 7,26 \times 10^{-3}$       (d)  $M = 35, N_{exc} = 10, \phi = 0^\circ, MSE = 6,09 \times 10^{-3}$



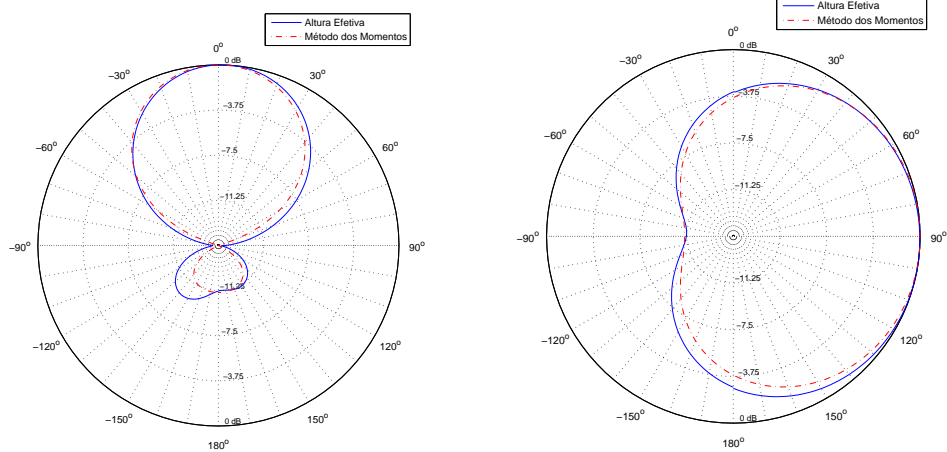


(e)  $M = 26, N_{exc} = 5, \theta = 90^\circ, MSE = 6,40 \times 10^{-3}$       (f)  $M = 26, N_{exc} = 5, \phi = 0^\circ, MSE = 5,28 \times 10^{-3}$

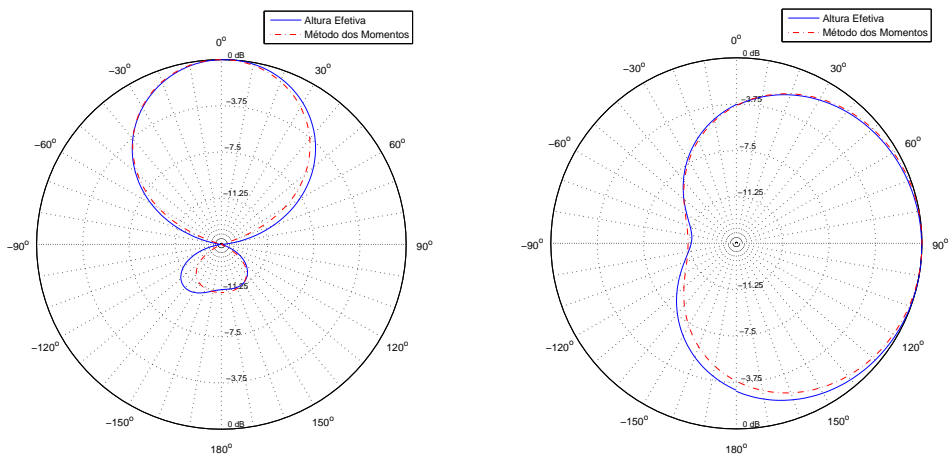
Figura 4.48: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz e  $N_{seg} = 20$ .



(a)  $M = 48, N_{exc} = 30, \theta = 90^\circ, MSE = 15,21 \times 10^{-3}$       (b)  $M = 48, N_{exc} = 30, \phi = 0^\circ, MSE = 10,59 \times 10^{-3}$



(c)  $M = 36, N_{exc} = 10, \theta = 90^\circ, MSE = 6,46 \times 10^{-3}$       (d)  $M = 36, N_{exc} = 10, \phi = 0^\circ, MSE = 5,76 \times 10^{-3}$



(e)  $M = 28, N_{exc} = 5, \theta = 90^\circ, MSE = 5,46 \times 10^{-3}$       (f)  $M = 28, N_{exc} = 5, \phi = 0^\circ, MSE = 4,34 \times 10^{-3}$

Figura 4.49: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva e pelo MOM para a frequência de 31,08 MHz e  $N_{seg} = 30$ .

Observa-se nas Figuras 4.46 a 4.49 que o melhor resultado se dá para maiores valores de  $N_{seg}$  e menores valores de  $N_{exc}$ . De fato, é esperado que maiores números de segmentos produzam melhores resultados. Entretanto, isso aumenta o custo computacional para os

cálculos das singularidades. A Figura 4.50 compara a resposta em frequência da derivada do pulso Gaussiano com  $N_{seg} = 30$  para  $N_{exc} = 30$  que é referente à derivada do pulso Gaussiano mais estreito e  $N_{exc} = 5$  que é referente à derivada do pulso Gaussiano um pouco mais largo. Observa-se que as diferenças entre as respostas em frequência são basicamente as altas frequências, causadoras de dispersão numérica. A banda de frequências desta Log-Periódica é 18,064 MHz e 44,102 MHz como calculado na Seção 4.2.3. Na Figura 4.50 é possível notar que, para  $N_{exc} = 30$ , há frequências com amplitude significativa acima da frequência máxima da banda, o que causa dispersão e, conseqüentemente, degrada os resultados.

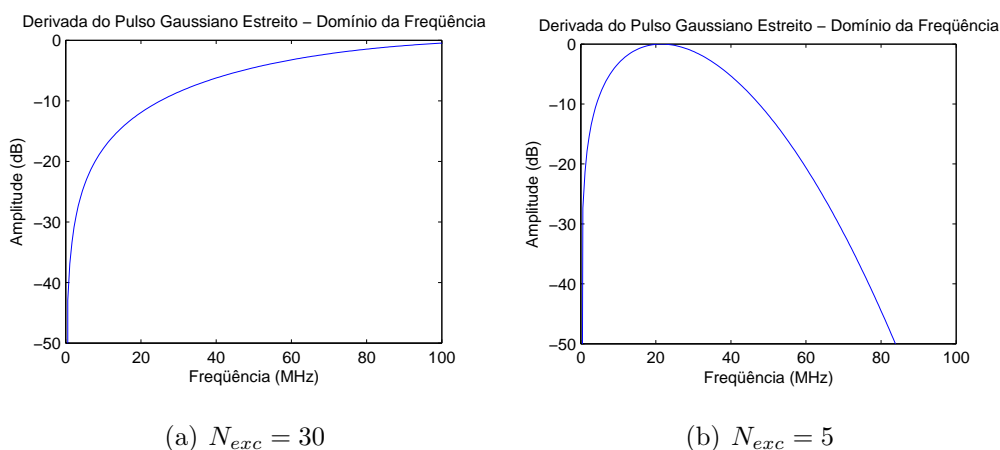
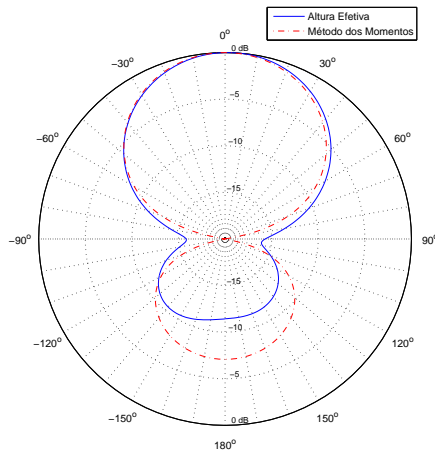


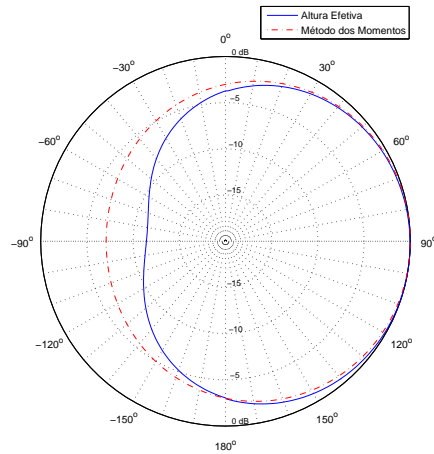
Figura 4.50: Comparação entre a resposta em frequência da derivada do pulso Gaussiano com  $N_{seg} = 30$ .

Para melhorar a resposta ainda mais,  $N_{seg}$  poderia ser aumentado e  $N_{exc}$  diminuído. Aumentar ainda mais o  $N_{seg}$  implica em maior custo computacional. Este fator, ainda que importante, não é crítico uma vez que as singularidades são extraídas apenas uma vez. Entretanto, se a antena for grande como esta Log-Periódica, pode haver problema de memória para armazenar os campos que são calculados iterativamente. A alteração do  $N_{exc}$  não afeta o custo computacional ou memória, mas afeta o conteúdo de frequências que é inserido no ambiente computacional. Reduzí-lo demasiadamente pode fazer com que as frequências naturais necessárias à representação da antena não sejam excitadas. Aumentá-

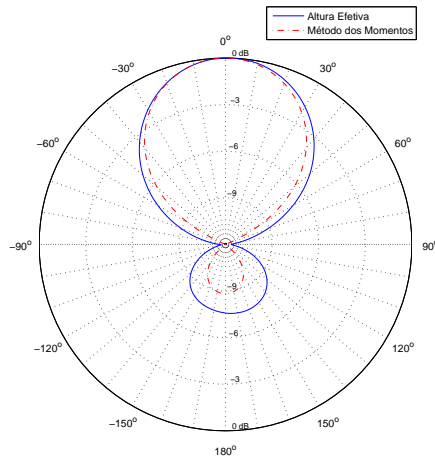
lo demais, faz com que altas frequências estejam presentes, o que provoca dispersão e degradação da resposta obtida através da altura efetiva. Os melhores resultados foram obtidos para  $N_{seg} = 30$  e  $N_{exc} = 5$  e para observar as outras frequências com estes parâmetros, as Figuras 4.51 e 4.52 são mostradas sem o critério de pólos e as Figuras 4.53 e 4.54 utilizando o critério de pólos.



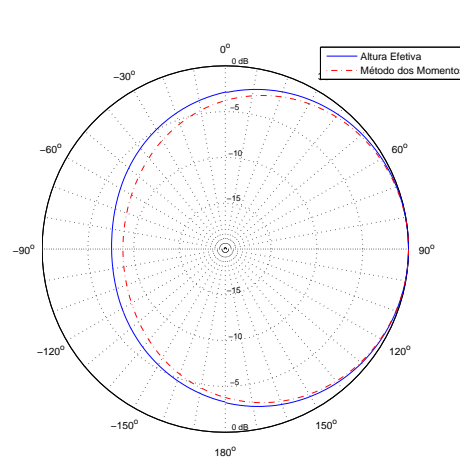
(a) 21,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 10,62 \times 10^{-3}$



(b) 21,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 8,10 \times 10^{-3}$



(c) 24,95 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 10,34 \times 10^{-3}$



(d) 24,95 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 5,99 \times 10^{-3}$

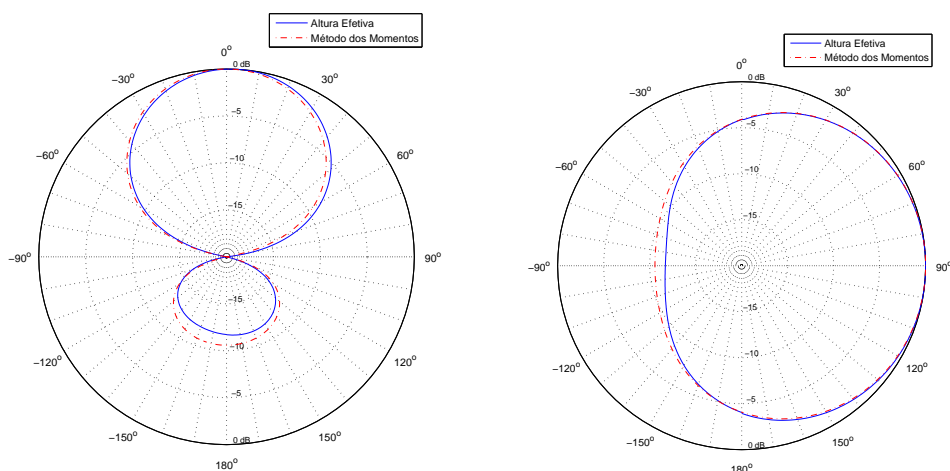
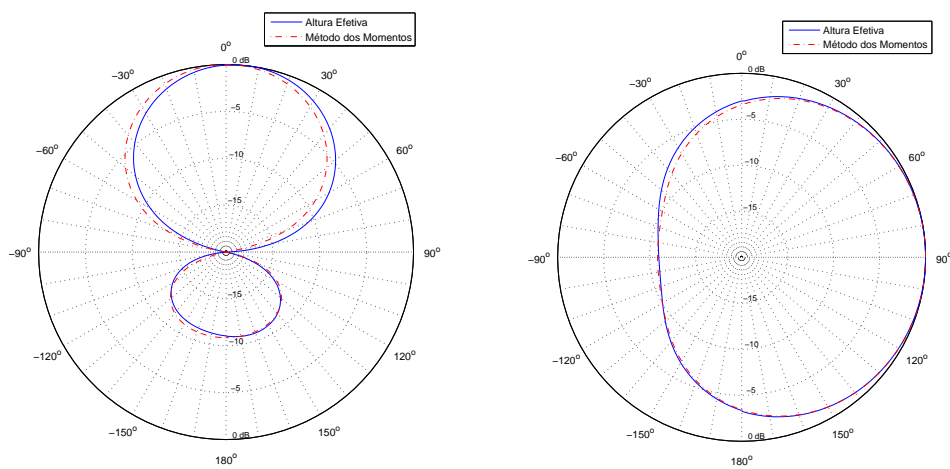
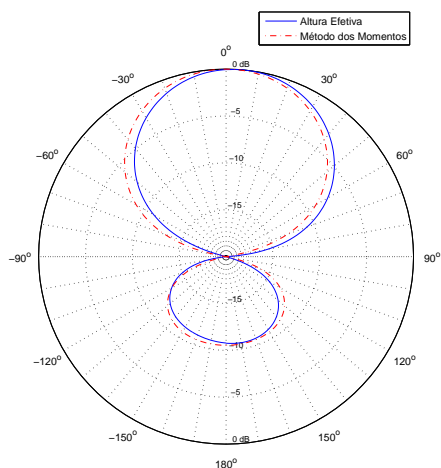
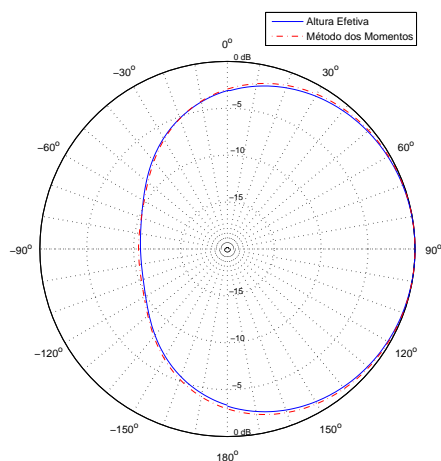
(e) 28,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 6,03 \times 10^{-3}$ (f) 28,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 1,63 \times 10^{-3}$ 

Figura 4.51: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com  $M = 50$  singularidades e pelo MOM para  $N_{seg} = 30$  e  $N_{exc} = 5$ .

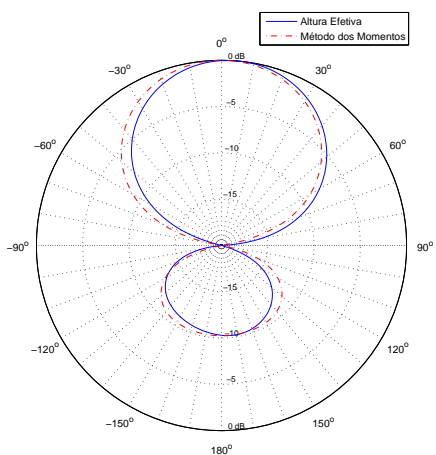
(a) 34,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 10,83 \times 10^{-3}$ (b) 34,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 1,87 \times 10^{-3}$



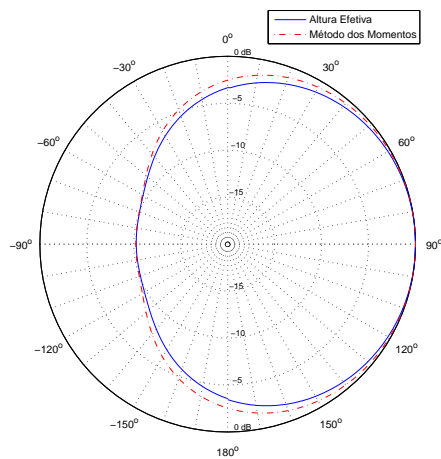
(c) 37,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 10,23 \times 10^{-3}$



(d) 37,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 2,38 \times 10^{-3}$

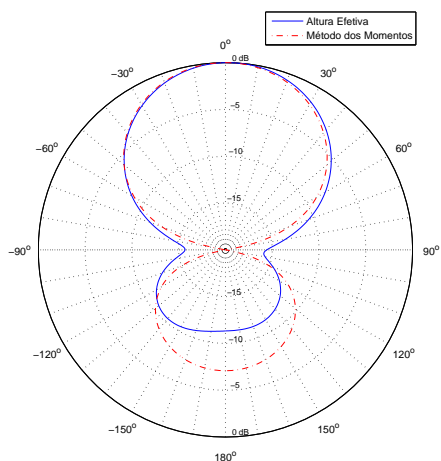


(e) 40,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 9,65 \times 10^{-3}$

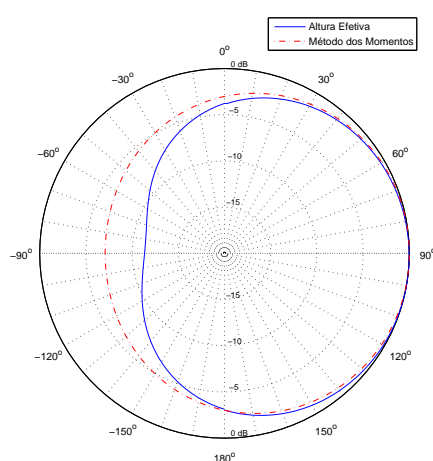


(f) 40,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 6,17 \times 10^{-3}$

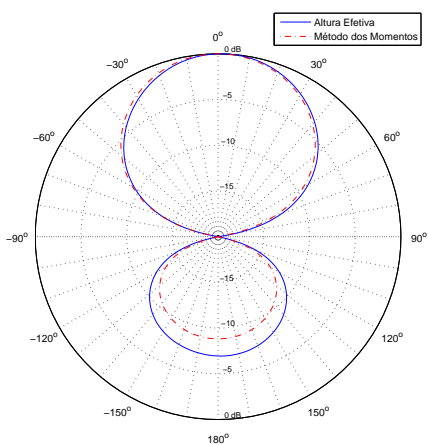
Figura 4.52: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com  $M = 50$  singularidades e pelo MOM para  $N_{seg} = 30$  e  $N_{exc} = 5$ .



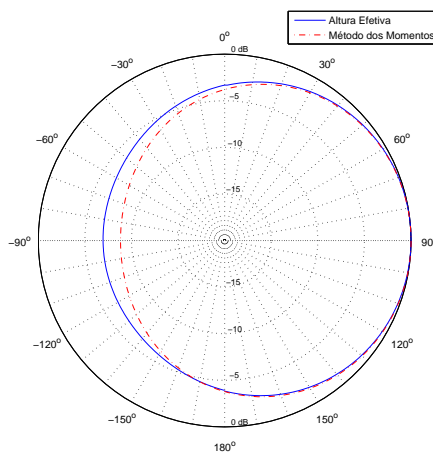
(a) 21,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 10,32 \times 10^{-3}$



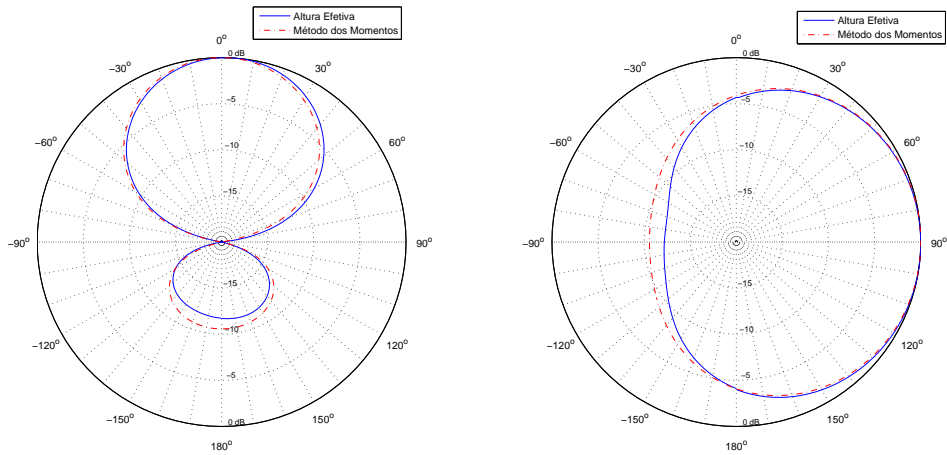
(b) 21,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 8,07 \times 10^{-3}$



(c) 24,95 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 7,75 \times 10^{-3}$



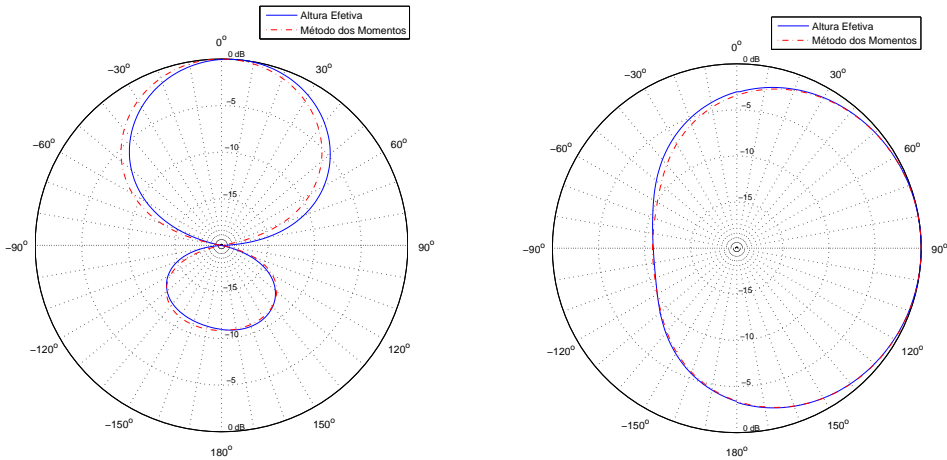
(d) 24,95 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 4,40 \times 10^{-3}$



(e) 28,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 5,66 \times 10^{-3}$

(f) 28,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 2,91 \times 10^{-3}$

Figura 4.53: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com  $M = 28$  singularidades e pelo MOM para  $N_{seg} = 30$  e  $N_{exc} = 5$ .



(a) 34,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 10,54 \times 10^{-3}$

(b) 34,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 1,73 \times 10^{-3}$



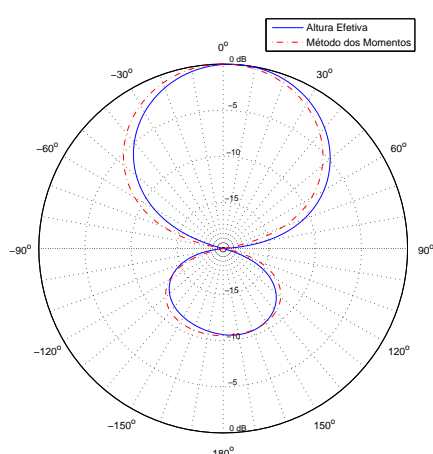
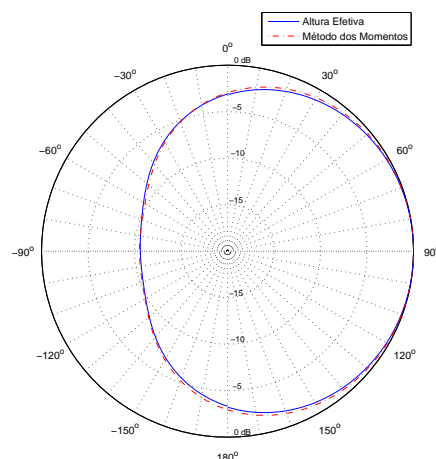
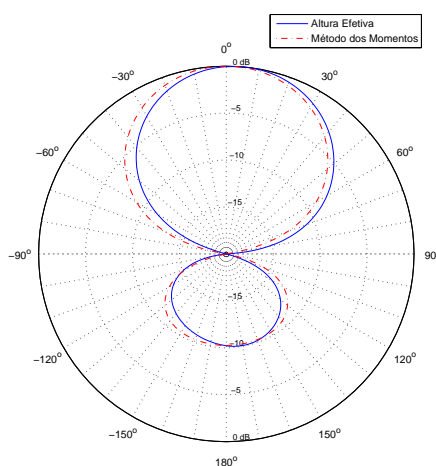
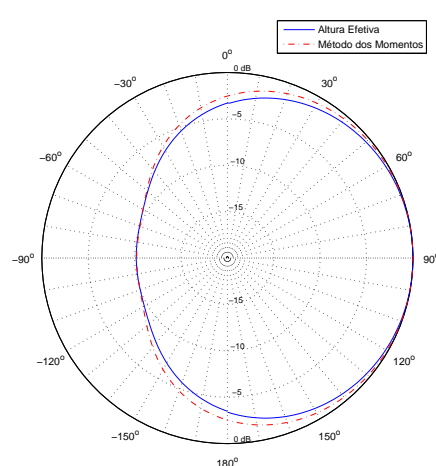
(c) 37,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 10,61 \times 10^{-3}$ (d) 37,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 2,38 \times 10^{-3}$ (e) 40,05 MHz,  $\theta = 90^\circ$ ,  $MSE = 10,75 \times 10^{-3}$ (f) 40,05 MHz,  $\phi = 0^\circ$ ,  $MSE = 5,84 \times 10^{-3}$ 

Figura 4.54: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva com  $M = 28$  singularidades e pelo MOM para  $N_{seg} = 30$  e  $N_{exc} = 5$ .

A comparação das Figuras 4.51 a 4.54 com as Figuras 4.39 a 4.44 mostra que o  $MSE$  reduziu significativamente o que indica a melhora da resposta. O critério de pólos também reduziu a quantidade de pólos necessários à representação, o que implica em menor custo

computacional ao cálculo da altura efetiva. Desta forma, a técnica pode ficar mais precisa ao aumentar o número de segmentos no qual se divide a antena e ao especificar a excitação tal que, não hajam altas frequências que causam dispersão e baixas frequências que causam erros de integração.

### 4.3 Refletor Parabólico Simétrico

As antenas refletoras são uma classe de antenas que introduzem um refletor para os campos radiados por uma fonte no espaço, concentrando a energia em uma determinada direção. As características de radiação de uma antena refletora estão diretamente relacionadas à estrutura geométrica da superfície refletora. O refletor parabólico, tem como principal atrativo a colimação da energia. Os campos radiados por uma fonte colocada no foco do refletor parabólico, ao serem refletidos serão colimados em uma frente de onda plana. Este refletor parabólico é conhecido como antena parabólica ou parabolóide.

#### 4.3.1 Cálculo da Altura Efetiva para o Parabolóide através do Método da Abertura

Utilizando o método da Abertura como descrito na Seção 2.4, os campos podem ser obtidos de forma analítica ou através da altura efetiva expressa por meio das singularidades da antena. A obtenção das singularidades necessita das correntes impulsionais na abertura. Tendo as singularidades sido calculadas através do Matrix Pencil, o vetor resíduo pode ser escrito como na Equação (3.60). Na abertura, tanto as densidades de corrente elétrica quanto magnética existirão e são expressas nas Equações (2.95) e (2.96). O vetor resíduo para o parabolóide, acordo com a Equação (3.60), é dado por

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(h^t)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) = \int_{A'} s_{\alpha} \left[ \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\perp}^{(J)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) + \frac{1}{\eta_0} \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(M)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) \times \hat{\mathbf{r}} \right] e^{s_{\alpha}(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c})} dA', \quad (4.35)$$

em que  $A'$  representa a área de integração da abertura como mostra a Figura 2.7. É possível também escrever

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\perp}^{(J)}(\mathbf{r}', s_\alpha) &= \tilde{\mathbf{R}}_\alpha^{(J)}(\mathbf{r}', s_\alpha) - [\tilde{\mathbf{R}}_\alpha^{(J)}(\mathbf{r}', s_\alpha) \cdot \hat{\mathbf{r}}] \hat{\mathbf{r}} \\ &= \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\theta}^{(J)}(\mathbf{r}', s_\alpha) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\phi}^{(J)}(\mathbf{r}', s_\alpha) \hat{\boldsymbol{\phi}},\end{aligned}\quad (4.36)$$

e

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{R}}_\alpha^{(M)}(\mathbf{r}', s_\alpha) \times \hat{\mathbf{r}} &= [\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha r}^{(M)}(\mathbf{r}', s_\alpha) \hat{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\theta}^{(M)}(\mathbf{r}', s_\alpha) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\phi}^{(M)}(\mathbf{r}', s_\alpha) \hat{\boldsymbol{\phi}}] \times \hat{\mathbf{r}} \\ &= \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\phi}^{(M)}(\mathbf{r}', s_\alpha) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\theta}^{(M)}(\mathbf{r}', s_\alpha) \hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned}\quad (4.37)$$

Desta maneira, o vetor resíduo não terá a componente  $\hat{\mathbf{r}}$ , ou seja,

$$\tilde{\mathbf{R}}_\alpha^{(h^t)}(\mathbf{r}', s_\alpha) = \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\theta}^{(h^t)}(\mathbf{r}', s_\alpha) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\phi}^{(h^t)}(\mathbf{r}', s_\alpha) \hat{\boldsymbol{\phi}},\quad (4.38)$$

e as componentes do vetor resíduo podem ser descritas através das Equações (4.39) e (4.40):

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\theta}^{(h^t)}(\mathbf{r}', s_\alpha) = \int_{A'} s_\alpha \left[ \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\theta}^{(J)}(\mathbf{r}', s_\alpha) + \frac{1}{\eta_0} \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\phi}^{(M)}(\mathbf{r}', s_\alpha) \right] e^{s_\alpha \left( \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right)} dA',\quad (4.39)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\phi}^{(h^t)}(\mathbf{r}', s_\alpha) = \int_{A'} s_\alpha \left[ \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\phi}^{(J)}(\mathbf{r}', s_\alpha) - \frac{1}{\eta_0} \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\theta}^{(M)}(\mathbf{r}', s_\alpha) \right] e^{s_\alpha \left( \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right)} dA'.$$
 (4.40)

em que o vetor  $\mathbf{r}'$  se refere às coordenadas da abertura, ou seja, a coordenada que mapeia o ponto  $A$  da Figura 2.7 sendo que  $\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}' = \hat{\mathbf{y}}$  e  $\hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{z}}$ .

O vetor resíduo, terá componentes nas direções das densidades de correntes elétricas e magnéticas. Assim como para o dipolo e para a Log-Periódica, eles são descritos pelas Equações (4.41) e (4.42):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{R}}_\alpha^{(J)}(\mathbf{x}', s_\alpha) &= \tilde{R}_\alpha^{(J)}(\mathbf{x}', s_\alpha) \hat{\mathbf{x}}, \\ \tilde{\mathbf{R}}_\alpha^{(J)}(\mathbf{y}', s_\alpha) &= \tilde{R}_\alpha^{(J)}(\mathbf{y}', s_\alpha) \hat{\mathbf{y}}, \\ \tilde{\mathbf{R}}_\alpha^{(J)}(\mathbf{z}', s_\alpha) &= \tilde{R}_\alpha^{(J)}(\mathbf{z}', s_\alpha) \hat{\mathbf{z}},\end{aligned}\quad (4.41)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(M)}(\mathbf{x}', s_{\alpha}) &= \tilde{R}_{\alpha}^{(M)}(\mathbf{x}', s_{\alpha})\hat{\mathbf{x}}, \\
\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(M)}(\mathbf{y}', s_{\alpha}) &= \tilde{R}_{\alpha}^{(M)}(\mathbf{y}', s_{\alpha})\hat{\mathbf{y}}, \\
\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(M)}(\mathbf{z}', s_{\alpha}) &= \tilde{R}_{\alpha}^{(M)}(\mathbf{z}', s_{\alpha})\hat{\mathbf{z}}.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

em que  $\tilde{R}_{\alpha}$  é o resíduo calculado no Matrix Pencil para um determinado ponto da abertura. As componentes  $\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\theta}^{(J)}(\mathbf{r}', s_{\alpha})$  e  $\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\phi}^{(J)}(\mathbf{r}', s_{\alpha})$  das Equações (4.39) e (4.40) são então calculadas a partir das Equações (4.43) a (4.44):

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\theta}^{(J)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) &= \cos\theta \cos\phi \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha x}^{(J)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) + \cos\theta \sin\phi \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha y}^{(J)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) - \sin\theta \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha z}^{(J)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}), \\
\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\phi}^{(J)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) &= -\sin\phi \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha x}^{(J)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) + \cos\phi \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha y}^{(J)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}).
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\theta}^{(M)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) &= \cos\theta \cos\phi \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha x}^{(M)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) + \cos\theta \sin\phi \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha y}^{(M)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) - \sin\theta \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha z}^{(M)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}), \\
\tilde{\mathbf{R}}_{\alpha\phi}^{(M)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) &= -\sin\phi \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha x}^{(M)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) + \cos\phi \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha y}^{(M)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}),
\end{aligned} \tag{4.44}$$

O argumento nas exponenciais das Equações (4.39) e (4.40) é definido através da Equação (4.45). Sabendo que na abertura,  $z' = 0$ , então,

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' = \rho' \sin\theta \cos(\phi - \phi'). \tag{4.45}$$

Finalmente, a altura efetiva para o parabolóide, utilizando o método da Abertura e a expansão através do SEM, pode ser escrita utilizando-se as Equações (4.35) a (4.45):

$$\mathbf{h}^t(\hat{\mathbf{r}}, t) = U\left(t - \frac{r}{c}\right) \sum_{\alpha} \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(h^t)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) e^{s_{\alpha}(t - \frac{r}{c})}, \tag{4.46}$$

### Definição de Parâmetros

A integração realizada nas Equações (4.35), (4.39) e (4.40) é melhor realizada em coordenadas cilíndricas, ou seja, usando como variáveis de integração  $\rho$  e  $\phi$ . De acordo com

a Figura 2.7,  $\rho = \rho_F$  e  $\phi = -\phi_F$  uma vez que  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_F$  e  $\hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{y}}_F$ . Entretanto, como as densidade correntes são determinadas nas coordenadas do observador, nenhuma transformação será necessária, sendo a altura efetiva determinada diretamente em coordenadas do observador.

A integração numérica em coordenadas cilíndricas implica em dividir a área de integração em anéis representados pelos valores arbitrários que  $\rho$  pode assumir. E usualmente, um número de pontos por anel é utilizado através da escolha arbitrária de valores de  $\phi$ . Entretanto, se o número de ângulos  $\phi$  for constante, os pontos não são distribuídos de forma uniforme na abertura uma vez que o perímetro dos anéis  $C = 2\pi\rho$  aumenta com o aumento de  $\rho$ . Tal situação não é desejável pois dessa forma mais pontos estariam concentrados na região central da abertura. Para que isso não ocorra, o número de ângulos  $\phi$  deve aumentar à medida que o  $\rho$  aumenta. A Figura superior em 4.55 mostra uma Seção da abertura onde um ângulo incremental  $d\phi$  é utilizado para representar o elemento de integração em  $\phi$ . O comprimento  $\rho_2 d\phi$  é maior do que  $\rho_1 d\phi$  o que mostra porque a malha não é uniforme. Para que a malha seja uniforme, é necessário que um determinado elemento de área como mostrado na Figura inferior em 4.55, seja tal que  $d\rho = \rho d\phi$ .

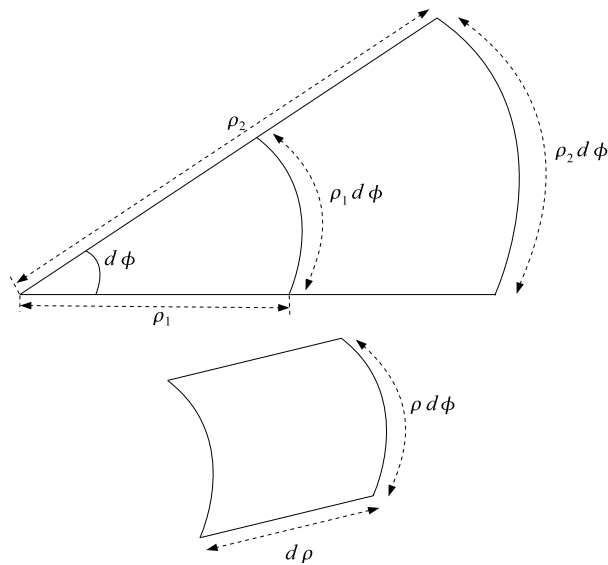


Figura 4.55: Seção da abertura de um ângulo infinitesimal de integração  $d\phi$  (acima) e elemento infinitesimal de área (abaixo).

Sendo  $N_\phi$  o número de ângulos em  $\phi$  e  $N_\rho$  o número de raios na abertura, é possível definir os elementos infinitesimais de integração como uma aproximação na qual  $\Delta\phi = 2\pi/N_\phi$  e  $\Delta\rho = (D/2)/N_\rho$  em que  $D$  é o diâmetro da abertura. Se o número de pontos em  $\rho$  e  $\phi$  tende ao infinito,  $\Delta\rho$  e  $\Delta\phi$  tendem à  $d\rho$  e  $d\phi$ . Desta maneira, impondo que  $\Delta\rho = \rho\Delta\phi$ , é possível escrever  $N_\phi$  em função de  $\rho$  de forma que a malha seja uniforme, como mostra a Equação (4.47):

$$N_\phi = \text{INT} \left( \frac{4\pi\rho N_\rho}{D} \right), \quad (4.47)$$

A Figura 4.56 mostra a comparação entre as malhas, não-uniforme (a) e uniforme (b). Observa-se que a malha não-uniforme concentra muitos pontos na região central e poucos na região de raios maiores o que não é desejável. A malha uniforme por sua vez, possibilita que o valor da densidade de corrente em cada ponto da abertura contribua sem pesos diferenciados no momento em que a integração numérica for realizada.

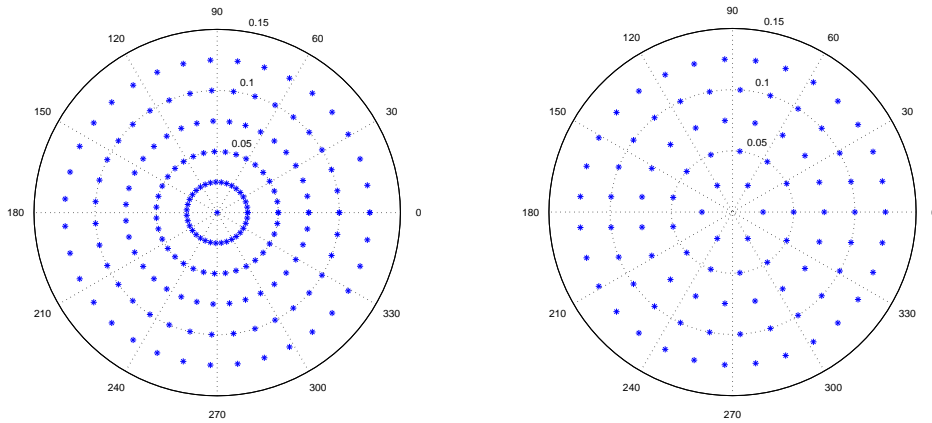
(a) Número constante para  $N_\phi$ (b) Número proporcional para  $N_\phi$ 

Figura 4.56: Comparação entre as malhas não-uniforme (a) e uniforme (b) para integração do vetor resíduo na abertura.

## Excitação

O método da Abertura utiliza a Óptica Geométrica para encontrar os campos elétrico e magnético na abertura da antena refletora. Entretanto este mecanismo de análise de traçado de raios somente é possível se o comprimento de onda é suficientemente pequeno em relação ao comprimento do objeto de reflexão dos campos [49]. A resposta em frequência do pulso Gaussiano contém baixas frequências e componente contínua como mostra a Figura 4.2 o que viola as condições para o uso da Óptica Geométrica. Para evitar as baixas frequências, a derivada do pulso Gaussiano que não tem componente contínua e frequências baixas como mostra a Figura 4.6 deve ser utilizada. A Equação (4.48) representa a derivada do pulso Gaussiano:

$$v(t) = -\frac{t - t_d}{T} e^{-\frac{(t-t_d)^2}{2T^2}}, \quad (4.48)$$

em que  $T$  controla a largura do pulso e  $t_d$  é o atraso do pulso. Este atraso se faz necessário para garantir que não haja uma descontinuidade no início do pulso o que introduziria altas

frequências no ambiente computacional. Para garantir que não haja esta descontinuidade e o pulso comece com valor nulo, usa-se  $t_d = 3T$  [3].

Os campos na abertura podem ser determinados através das Equações (2.91) e (2.94) sendo o impulso modelado pela Equação (4.48). Desta forma, as densidades de corrente na abertura podem ser determinadas através das Equações (2.95) e (2.96) o que resulta nas Equações (4.49) e (4.50):

$$\mathbf{J}_A^\delta(\mathbf{r}, t) = -\frac{\cos \theta'_F}{\eta_0 r'_F} \frac{(t - 3T - \frac{2F}{c})}{T} e^{-\frac{(t-3T-\frac{2F}{c})^2}{2T^2}} \hat{\mathbf{x}} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{M}_A^\delta(\mathbf{r}, t) = -\frac{\cos \theta'_F}{r'_F} \frac{(t - 3T - \frac{2F}{c})}{T} e^{-\frac{(t-3T-\frac{2F}{c})^2}{2T^2}} \hat{\mathbf{y}} \quad (4.50)$$

### 4.3.2 Diagrama de Radiação

O diagrama de radiação para o parabolóide é uma escolha adequada para teste da altura efetiva descrita através das singularidades obtidas pelo método da Abertura, uma vez que o diagrama de radiação é facilmente representado no domínio da frequência [2]. A Equação (4.51) mostra o campo elétrico determinado no domínio da frequência através do método da abertura utilizando o modelo de excitação do cosseno elevado.

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}}, \omega) = \frac{jk}{2} \frac{e^{-jkr}}{r} e^{-jk2F} (1 + \cos \theta) [\cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}] \int_0^{D/2} \frac{\cos^N \theta'_F}{r'_F} J_0(k\rho' \sin \theta) d\rho', \quad (4.51)$$

em que  $k = 2\pi/\lambda$  é o número de onda,  $D$  é o diâmetro da abertura, e conseqüentemente do do parabolóide,  $N$  ajusta o modelo do cosseno elevado em relação à sua diretividade, e  $J_0(k\rho' \sin \theta)$  é a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero. Utilizando então o Teorema de Parseval como na Equação (4.15) a partir da Equação (4.51) é possível obter uma comparação da resposta analítica com a resposta obtida através da altura efetiva descrita através dos pólos obtidos pelo método da Abertura.

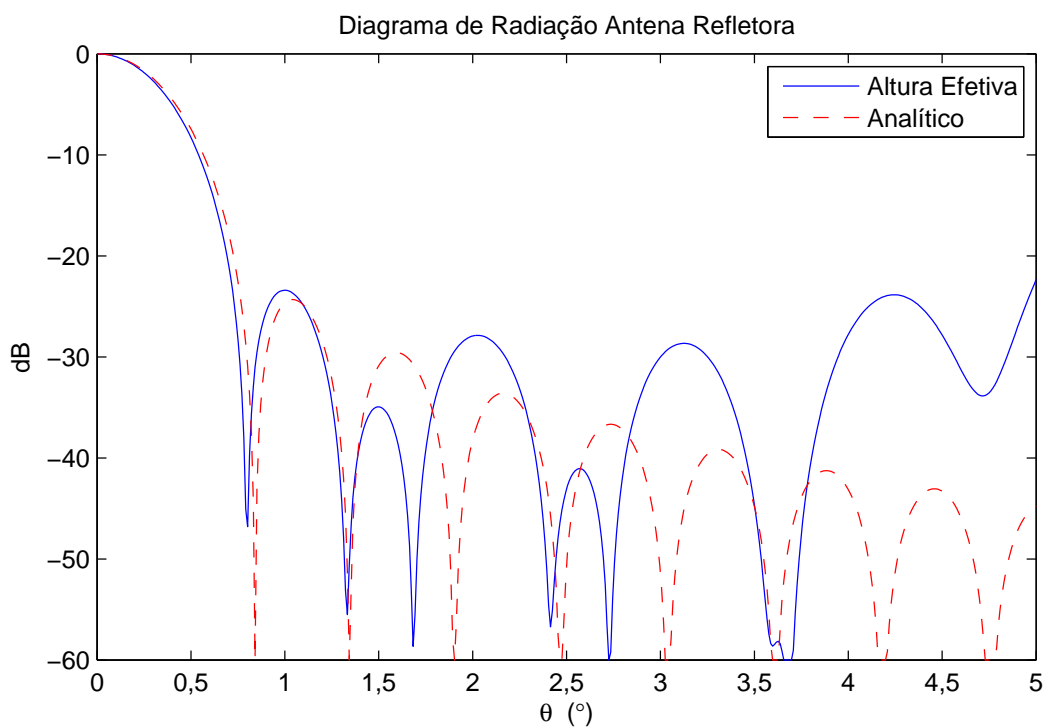


### Definição do Parabolóide

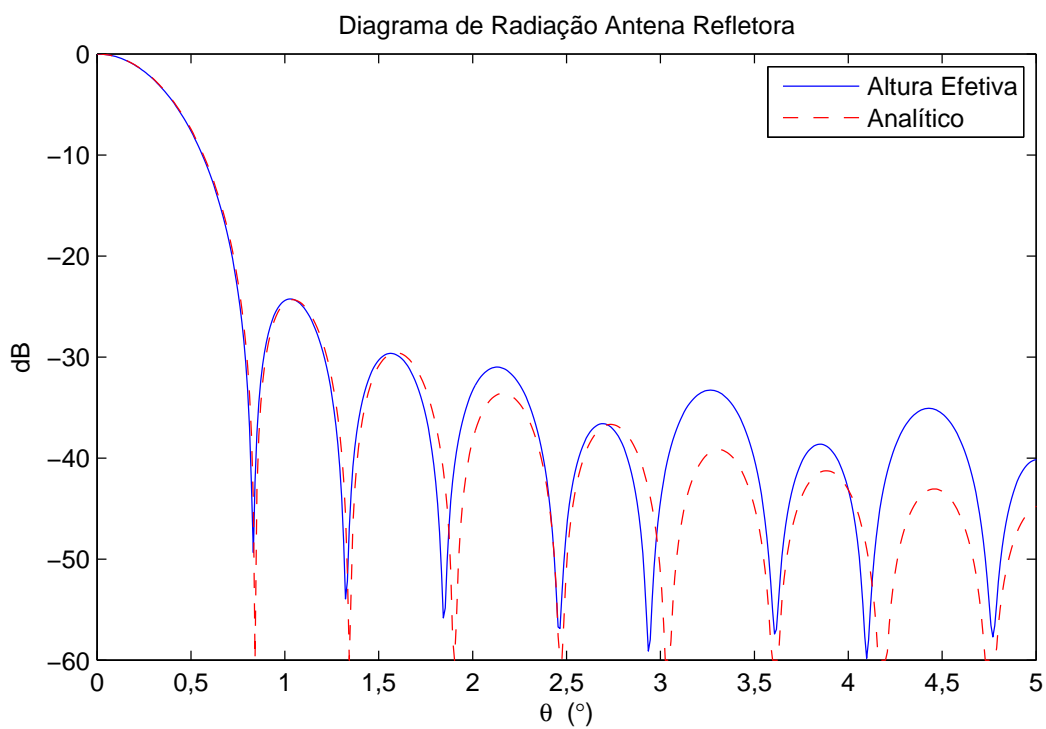
O parabolóide para testes foi escolhido de tal forma que  $D = 7,5$  m,  $F = 0,4D$  e para comparar o diagrama de radiação, a excitação senoidal foi utilizada de forma que  $D = 100\lambda$ . O critério de escolha para pólos, se mostrou muito eficiente na simulação do dipolo e da Log-Periódica, de forma que não é necessário avaliar se tais critérios são necessários sendo estes diretamente aplicados com  $Th = 10^{-2}$ . Para o modelo do cosseno elevado utilizado como na Equação (2.81), foi definido que  $N = 1$ . O número de pólos escolhidos foi relativamente alto:  $M = 300$ . O motivo é que o pulso de excitação para esta antena, deve ser extremamente fino, caso contrário não excitará as frequências naturais necessárias à representação dos campos na faixa de frequências tal que  $D = 100\lambda$ . O pulso representado na Equação (4.48) foi escolhido com  $T = 0,1$  ns e, por ser muito estreito, para reconstruir a densidade de corrente através das ressonâncias naturais, é preciso usar um número superior à 300 singularidades. Porém este número deverá ser reduzido ao aplicar o critério para escolha dos pólos.

Através da Equação (2.56) que descreve o diagrama de radiação, e os campos obtidos pela Equação (2.48) em que a excitação senoidal é descrita como na Equação (4.17), sendo a altura efetiva determinada pelas Equações (4.35) a (4.46), o diagrama de radiação do parabolóide pode ser obtido e comparado com o diagrama de radiação obtidos pela Equação (4.51) aplicando-se a Equação (4.15).

Uma vez que os pólos na abertura tenham sido extraídos através do Matrix Pencil das correntes (4.49) e (4.50), o critério de pólos definido pelas Equações (3.37) e (3.38) é aplicado. Posteriormente é preciso definir um número de anéis de integração na abertura para encontrar o vetor resíduo como descrito nas Equações (4.39) e (4.40). Neste ponto não se definiu um critério técnico para a escolha do número de anéis, ou seja, observou-se o efeito do aumento do número de anéis a partir de um certo número escolhido à princípio. A Figura 4.57 mostra a comparação para o parabolóide especificado para o plano  $\phi = 0^\circ$ .



(a)  $N_\rho = 5$ ,  $MSE = 5,88 \times 10^{-3}$



(b)  $N_\rho = 10$ ,  $MSE = 1,26 \times 10^{-3}$

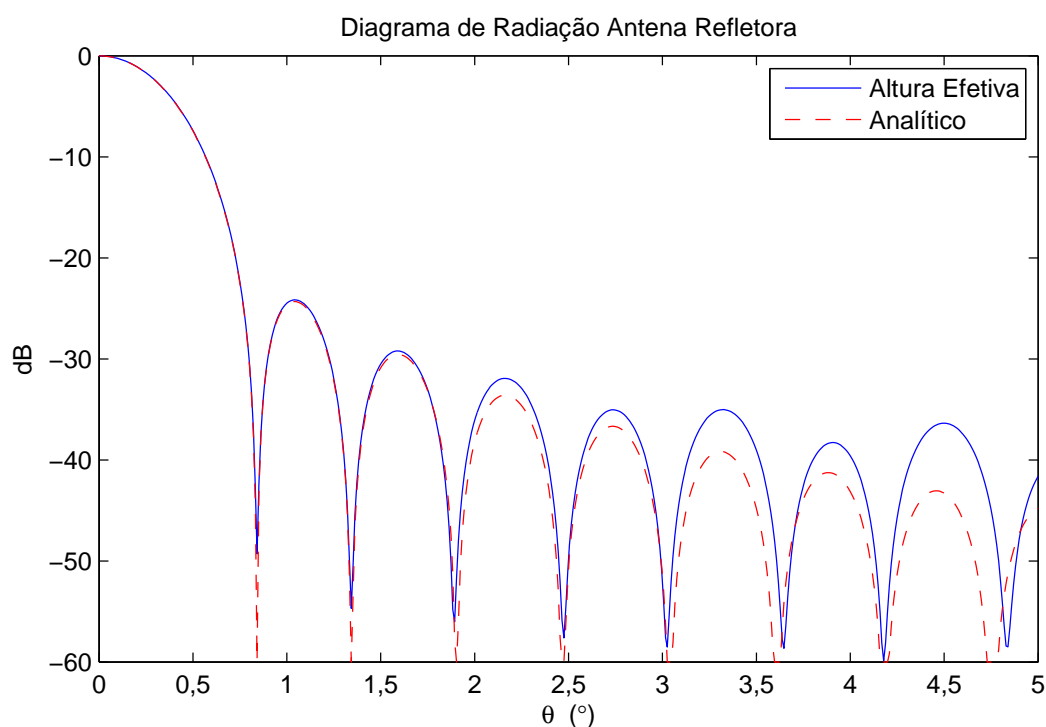
(c)  $N_\rho = 15$ ,  $MSE = 0,42 \times 10^{-3}$ 

Figura 4.57: Comparação entre os diagramas de radiação obtidos pela altura efetiva e método da Abertura com  $M = 158$  singularidades utilizando a excitação cosseno elevado e diagrama obtido pela resposta analítica com  $D=100\lambda$ , no plano  $\phi = 0^\circ$  com  $D = 7,5$  m e  $F = 0,4D$ .

Observa-se na Figura 4.57 (a) que há uma boa concordância no lóbulo principal e no primeiro lóbulo secundário. Porém a resposta se deteriora para  $\theta > 1,5^\circ$ . Para observar o efeito do número de pontos as Figuras 4.57 (b) e 4.57 (c) são colocadas para 10 e 15 anéis respectivamente.

O diagrama para 15 anéis de integração representado pela Figura 4.57 (c) teve um boa concordância. Aparentemente aumentar o número de anéis, aumenta a exatidão de uma forma proporcional. Porém após 15 anéis, não houve melhora nos resultados e o MSE fica praticamente constante. Desta forma, é possível inferir que é preciso ainda algum ajuste na técnica para melhor concordância em ângulos fora da direção de máximo de radiação da antena. Entretanto, isto não é crítico em antenas refletoras deste porte, majoritariamente

utilizadas para comunicação. Tais antenas são muito diretivas e um excelente alinhamento entre antena transmissora e receptora é requerido. Portanto a concordância maior se dá nos ângulos mais importantes neste tipo de aplicação.

### 4.3.3 Sinal 4-PSK

Existem atualmente diversas maneiras de se codificar um sinal digital para que este seja transmitido por uma antena. O *PSK - Phase Shift Keying* é a técnica de modulação de alta performance mais popular para codificação de dados digitais em aplicações em que há uma alta densidade de informações a serem transmitidas [50]. Este tipo de codificação se baseia na mudança de fase com amplitude constante para codificação do sinal de informação. Um método popular é o 4-PSK que utiliza um esquema de quatro fases diferentes para modular o sinal. A representação geral para o sinal 4-PSK é dada pela Equação (4.52).

$$f(t) = -\frac{A_c}{\omega} \sum_{n=0}^3 \cos \left[ \omega t - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right] U[t - nT_b] - U[t - (n+1)T_b], \quad (4.52)$$

em que  $A_c = \sqrt{3}/2$ ,  $\omega$  é a frequência da portadora do sinal,  $T_b = 5\lambda/c$  é a duração do bit.

Uma vez que a variação da fase do sinal se dá de maneira abrupta, várias frequências diferentes da portadora estarão presentes no sinal 4-PSK. frequências com amplitude significativas estarão presentes na faixa de zero à  $2/T_b$  [50]. Desta maneira, quanto menor for a duração do bit, ou seja, quanto maior for a taxa de transmissão de bits, mais altas serão as frequências presentes no sinal. Com o avanço tecnológico e a exigência de maiores taxas para comunicação sem fio, as técnicas no domínio da frequência pra uma banda estreita tornam-se trabalhosas e no futuro possivelmente impraticáveis à medida que a banda de frequências se torna ultra-larga. Tal fato justifica a aplicação da altura efetiva com as singularidades extraídas através do SEM.

Aplicando a Equação (4.52) na Equação (2.48), o campo distante obtido pela excitação 4-PSK pode ser determinado. A região de campo distante, determinada pela Equação (4.14), é definida a partir de  $r = 1500$  m para o parabolóide de  $D = 7,5$  m e  $D = 100\lambda$ . O ponto de observação é então escolhido como  $r = 5000$ ,  $\phi = 0^\circ$ . A Figura 4.58 mostra

o campo a partir do tempo  $r/c$  uma vez que, de acordo com a Equação (4.46), o campo será nulo para instantes anteriores à  $r/c$ .

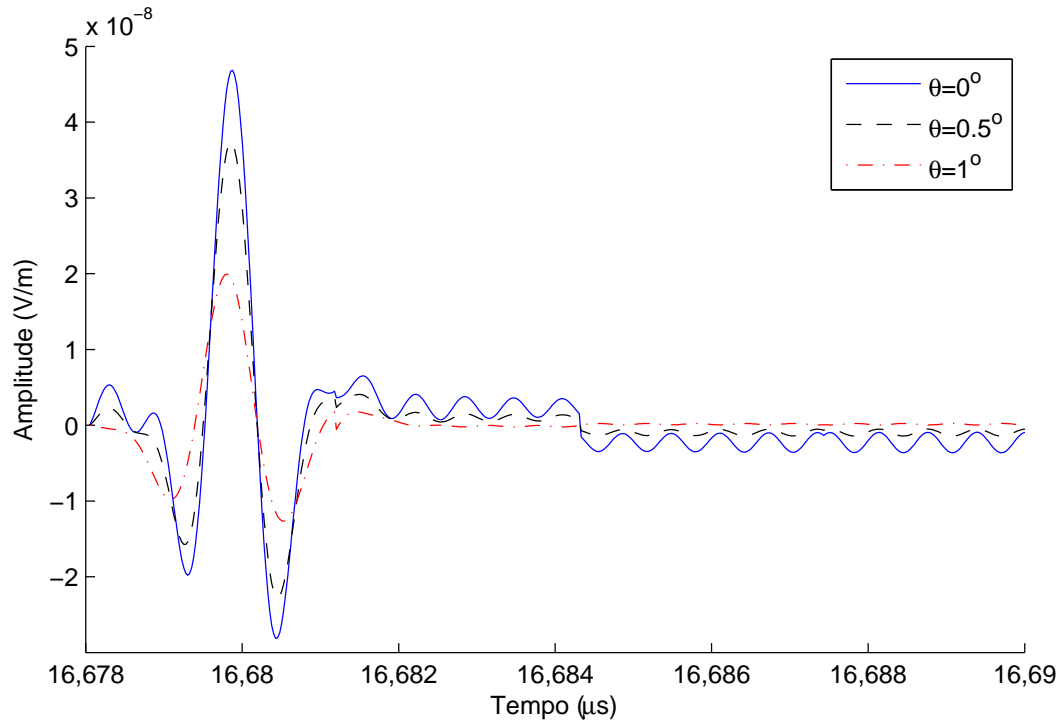


Figura 4.58: Campo radiado pelo parabóide para o sinal 4-PSK calculado à partir de  $t = r/c = 16,678 \mu s$  através da altura efetiva e método da Abertura com  $M = 158$  singularidades utilizando a excitação cosseno elevado e diagrama obtido pela resposta analítica utilizando 15 anéis de integração,  $D=100\lambda$ , com  $r = 5000$  m,  $\phi = 0^\circ$ ,  $D = 7,5$  m e  $F = 0,4D$ .

Observa-se que há um transitório devido a convolução da altura efetiva com o sinal 4-PSK realizada através da Equação (2.48). Após um certo período, percebe-se que o sinal oscilatório tem uma componente contínua. Isso pode ser observado se a convolução for realizada analiticamente como mostra a Equação (4.53):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_{\alpha} \tilde{\mathbf{R}}_{\alpha}^{(\mathbf{h}^t)}(\mathbf{r}', s_{\alpha}) \frac{1}{\omega(\omega^2 + s_{\alpha}^2)} \left\{ e^{s_{\alpha}(t-\frac{r}{c})} (s_{\alpha} \cos \beta - \omega \sin \beta) + \right. \\ \left. + \omega \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \beta \right] - s_{\alpha} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \beta \right] \right\}, \quad (4.53)$$

em que  $\beta$  representa a fase do sinal 4-PSK, ou seja,  $-\pi/4$ ,  $-3\pi/4$ ,  $-5\pi/4$  ou  $-7\pi/4$ . Observa-se que a resposta é composta de uma parte oscilatória e uma parte exponencial decrescente que é  $e^{s_{\alpha}(t-\frac{r}{c})} (s_{\alpha} \cos \beta - \omega \sin \beta)$ . A Equação (4.53) mostra que há um somatório para todos os pólos. Como os pólos naturais aparecem em pares complexos e conjugados, sendo a excessão os pólos parasitas que são eliminados pelo critério dos pólos, inevitavelmente haverão as seguintes composições:  $e^{s_{\alpha}(t-\frac{r}{c})} s_{\alpha} \cos \beta + e^{\bar{s}_{\alpha}(t-\frac{r}{c})} \bar{s}_{\alpha} \cos \beta$  e  $-e^{s_{\alpha}(t-\frac{r}{c})} \omega \sin \beta - e^{\bar{s}_{\alpha}(t-\frac{r}{c})} \omega \sin \beta$ . Sabendo que  $s_{\alpha} = \sigma_{\alpha} + j\omega_{\alpha}$  e  $\bar{s}_{\alpha} = \sigma_{\alpha} - j\omega_{\alpha}$ , é possível re-escrever as duas composições anteriores como:

$$e^{\sigma_{\alpha}(t-\frac{r}{c})} \left\{ 2\sigma_{\alpha} \cos \beta \cos \left[ \omega_{\alpha} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] - 2\omega_{\alpha} \cos \beta \sin \left[ \omega_{\alpha} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}, \quad (4.54)$$

$$e^{\sigma_{\alpha}(t-\frac{r}{c})} \left\{ 2\omega \sin \beta \cos \left[ \omega_{\alpha} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}. \quad (4.55)$$

Após um instante de tempo suficientemente grande, esta exponencial tende à zero pois  $\sigma_{\alpha} < 0$ , o que anulará completamente os termos representados em (4.54) e (4.55). Desta maneira, o termo  $e^{s_{\alpha}(t-\frac{r}{c})} (s_{\alpha} \cos \beta - \omega \sin \beta)$  será nulo na Equação (4.53) após um tempo suficientemente grande. Com o intuito de avaliar aproximadamente qual será o tempo no qual este termo se anula, analisa-se o pior caso possível, ou seja, o tempo no qual os maiores valores possíveis do termo que atinja um valor suficientemente próximo de zero. Os termos oscilatórios das Equações (4.54) e (4.55) tem seu maior valor igual à 1. Os termos  $\sin \beta$  e  $\cos \beta$  são iguais a  $\pm\sqrt{2}/2$ . Desta forma, definindo um valor próximo de zero como a tolerância  $TOL$ , é possível encontrar o tempo no qual o termo cai até este valor como mostra a Equação (4.56):

$$t_e = \frac{r}{c} - \frac{1}{|\sigma_\alpha|_{max}} \ln \left[ \frac{TOL}{\sqrt{2}(|\sigma_\alpha|_{max} + |\omega_\alpha|_{max} + \omega)} \right], \quad (4.56)$$

em que o subscrito  $max$  indica o maior valor possível para as partes reais  $\sigma_\alpha$  e as partes imaginárias  $\omega_\alpha$  de todos os pólos  $s_\alpha$ , garantindo assim que no instante  $t = t_e$  os termos representados pelas Equações (4.54) e (4.55) tenham decaído à zero ( $TOL$ ).

O campo radiado 4-PSK após este tempo  $t_e$  é mostrado na Figura 4.59 no qual uma tolerância  $TOL = 10^{-15}$  foi utilizada.

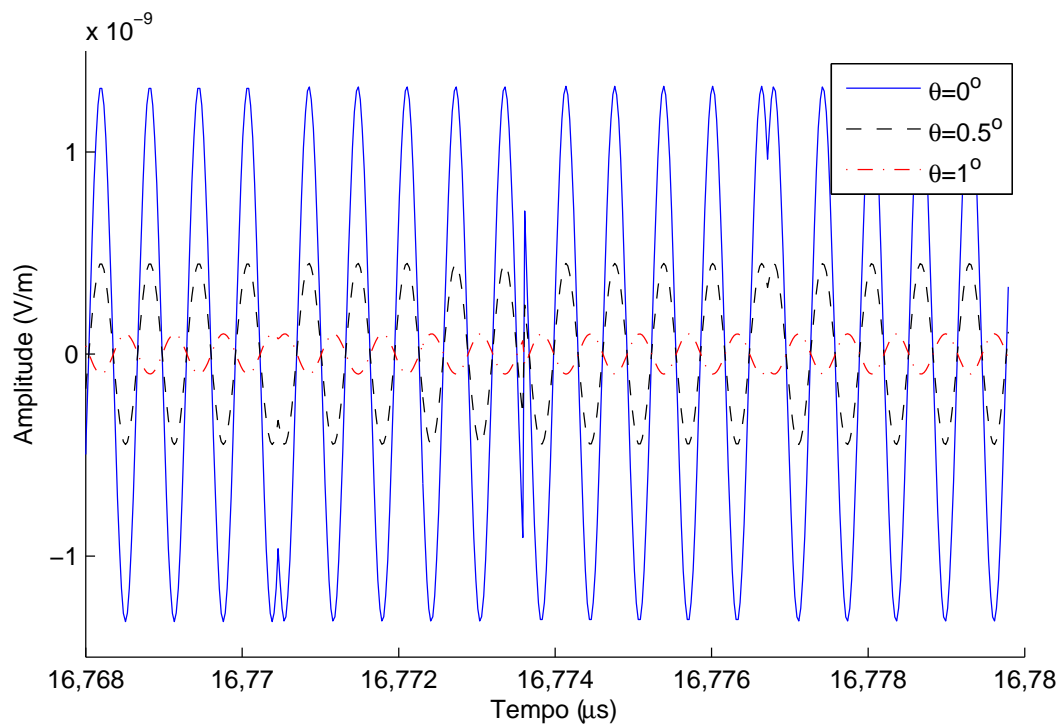


Figura 4.59: Campo radiado pelo parabóide para o sinal 4-PSK calculado à partir de  $t_e = 16,768 \mu s$  através da altura efetiva e método da Abertura com  $M = 158$  singularidades utilizando a excitação cosseno elevado e diagrama obtido pela resposta analítica utilizando 15 anéis de integração,  $D=100\lambda$ , com  $r = 5027$  m,  $\phi = 0^\circ$ ,  $D = 7,5$  m e  $F = 0,4D$ .

Observa-se na Figura 4.59 que o campo radiado não contém os transientes da convolução com a altura efetiva. À medida em que o ângulo  $\theta$  aumenta, os campos tem sua amplitude reduzida. Nota-se também um efeito dispersivo uma vez que a fase do sinal

para  $\theta = 1^\circ$  mudou. A altura efetiva descrita através dos pólos da antena se mostra extremamente útil na previsão dos campos devido à uma fonte arbitrária e até mesmo tão complexa como um sinal 4-PSK.



## Capítulo 5

# CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE

Este trabalho apresentou a formulação da altura efetiva de forma unificada entre tempo e frequência. A formulação da altura efetiva pretende caracterizar uma antena através do cálculo do campo radiado por esta ou pela definição de parâmetros que descrevem o comportamento da antena, tal como o diagrama de radiação. A altura efetiva é descrita por uma formulação analítica que permite a análise de regiões em campo distante, podendo ser definida tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo. Através deste parâmetro, é possível calcular o campo radiado distante e também obter diagramas de radiação da antena para uma dada excitação. A expressão analítica da altura efetiva possibilita que resultados sejam obtidos rapidamente para diferentes pontos de observação.

A altura efetiva é obtida através da análise das densidades de corrente elétrica e magnética impulsional. Em antenas de fio a densidade de corrente elétrica impulsional é determinada sobre a superfície da antena. Em antenas refletoras as densidades de corrente elétrica e magnética impulsional são definidas na abertura da antena, localizada sobre o foco do refletor parabólico. Com o intuito de se obter uma forma analítica e unificada entre tempo e frequência, as densidades de corrente impulsional foram calculadas através do SEM, que permite representar grandezas eletromagnéticas como a soma ponderada de

pólos e resíduos. Esta representação, tem a vantagem de ser facilmente escrita tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência, uma vez que o formato no domínio de Laplace de  $R_\alpha/(s - s_\alpha)$  têm seu correspondente temporal como  $U(t)R_\alpha e^{s_\alpha t}$ .

Encontrar as densidades de corrente impulsionalis, resume-se a encontrar as singularidades. Para tal, através de uma abordagem numérica, as singularidades podem ser determinadas mesmo em estruturas complexas. Esta técnica é o Matrix Pencil, descrita na Seção 3.2.1, que é capaz de encontrar as singularidades de estruturas através da resposta temporal da mesma. A resposta temporal foi obtida utilizando-se dois métodos: o FDTD, descrito na Seção 2.3, pois tal método tem a vantagem de analisar estruturas complexas fornecendo a resposta temporal através de cálculos numéricos iterativos e o método da Abertura, descrito na Seção 2.4, no qual as densidades de correntes foram obtidas de forma analítica a partir de uma excitação cosseno elevado que é um modelo muito utilizado em análise de antenas para comunicação.

A altura efetiva, como descrita na Seção 3.3, pode ser definida então como uma característica da antena que pode ser escrita em uma forma semi-analítica, uma vez que as singularidades são obtidas através de técnicas numéricas.

Estas formulações, após desenvolvidas, foram implementadas para três casos: i) o dipolo alinhando em  $\hat{z}$ , Seção 4.1, que serve como referência e validação da técnica já que é uma antena bastante estudada e de fácil solução; ii) a antena Log-Periódica, Seção 4.2, que têm maior complexidade e abordagem analítica muito complexa e praticamente inviável por técnicas tradicionais de análise de antenas; iii) o refletor parabólico simétrico, ou parabolóide, Seção 4.3. Os resultados obtidos para o dipolo mostraram que a técnica têm um alto grau de precisão comparado ao MOM, que foi utilizado para comparação. Os campos distantes radiados em diferentes ângulos e o diagrama de radiação tiveram boa concordância. No caso da antena Log-periódica, Seção 4.2, a concordância foi boa. Entretanto, a antena Log-Periódica simulada requer um grande esforço computacional devido a suas dimensões o que dificulta a extração das singularidades. Aumentar a quantidade de células para dividir a antena faz com que os resultados sejam significativamente melhores,

porém isso acarretou no uso demasiado da memória e processamento na extração dos pólos. Vale salientar porém, que este procedimento de extração dos pólos só é requerido apenas uma vez. Apesar destas limitações, pode-se concluir que os resultados obtidos são bons. A análise do parabolóide, 4.3, mostrou uma boa concordância da técnica. O esforço computacional também é grande em virtude das dimensões do parabolóide escolhido. O método da Abertura foi utilizado e o resultado comparado com a solução analítica demonstrou que o erro foi pequeno. Para testar outras fontes, o pulso 4-PSK foi simulado na Seção 4.3.3 e observou-se a forma de onda esperada para os campos elétricos distantes com a codificação em 4 fases diferentes.

Alguns pontos abordados promoveram o refinamento da técnica. Entre eles, podemos destacar a escolha apropriada do número de singularidades e escolha das singularidades em si, desprezando singularidades não significativas. Isso foi feito a partir do critério de seleção de pólos, como descrito na Seção 3.2.2, definido por [42]. A técnica da deconvolução, como apresentada por [44] na Seção 3.2.3, pode ser então utilizada para obter a altura efetiva com maior exatidão. Entretanto, neste trabalho não foi considerado ganho apreciável no uso desta técnica, uma vez que os pulsos para excitação adotados continham seu espectro de frequências largo o suficiente para excitar todas as frequências naturais da antena, como demonstrado para o caso do dipolo na Seção 4.1. Por fim, o critério adotado para medição de erro, o MSE, descrito na Seção 4.1, Equação (4.18), se mostrou útil na comparação de resultados obtidos na literatura e promoveu um caráter quantitativo à análise comparativa das respostas obtidas.

A formulação apresentada neste trabalho tomou como base a determinação dos campos espalhados por antenas filamentosas e refletoras. Para tal, utilizou-se o SEM, descrito na Seção 3.2, que representa apenas o *Late Time* da resposta. A função inteira  $\tilde{\mathbf{W}}^{(\mathbf{F})}(\mathbf{e}, \mathbf{r}', s)$ , que representa o *Early Time*, foi desprezada por ser de curtíssima duração, tendo desta maneira influência praticamente nula na determinação dos campos. O SEM é, essencialmente, um método para determinação do *Late Time* e, por isso, não pode ser utilizado para encontrar o *Early Time*. Entretanto, se este *Early Time* for conhecido, as singulari-

dades podem ser extraídas destas resposta possibilitando assim a construção da resposta completa.

O desenvolvimento deste trabalho abordou, além do estudo e análise de antenas de fios, a determinação da altura efetiva de antenas refletoras, no caso a parabólica, através do uso do SEM para encontrar suas singularidades uma vez que a resposta impulsional desta antena está disponível. Este desenvolvimento foi realizado na Seção 4.3. Desta forma, uma variedade maior de antenas pôde ser caracterizada de forma unificada no domínio do tempo e frequência. A resposta *Late Time* para antenas refletoras foi então calculada através da obtenção das singularidades da antena através da resposta *Early Time*. Esta resposta foi encontrada utilizando o método da Abertura, como descrito na Seção 2.4. Foi necessário também modelar a fonte, responsável pela excitação da antena. Para que os resultados fossem mais abrangentes, no sentido de caracterizar uma maior gama de antenas e sistemas, o modelo do *coseno elevado* foi utilizado pois este modelo é muito utilizado para estudo e projeto de sistemas de comunicação.

Uma vez obtida a formulação analítica para a resposta *Early Time* impulsional da antena parabólica utilizando o SEM, as singularidades da antena foram obtidas e assim o *Late Time* determinado, e conseqüentemente, a resposta completa. Desta forma, tanto antenas de fio quanto antenas refletoras foram caracterizadas, o que demonstra a abrangência do método.

A fim de testar esta técnica aprofundando a análise, é importante notar que existe uma gama enorme de antenas que podem ser utilizadas. Além disso, é preciso aperfeiçoar e entender suas limitações. À princípio é possível dizer que a técnica se restringe à uma faixa particular de frequências, não muito baixas e nem muito altas. De fato, o SEM é uma técnica para médias frequências [16]. Entretanto, foi possível notar que a limitação de frequências estava na excitação e no método de análise utilizado para extrair as correntes e não na técnica em si. Tal fato merece maior investigação com aplicação de outros métodos de análise para extração das densidades de correntes impulsiais e posterior verificação se o resultados obtidos seriam melhores do que apresentados nestes trabalho.

Métodos analíticos ou numéricos mais precisos poderiam ser utilizados para extração das singularidades em antenas de fios. O método da Óptica Física com ou sem as correntes de franja, poderiam ser utilizados para extrair as singularidades de forma mais precisa de antenas refletoras, por exemplo.

Existem diversas causas de erro na aplicação da técnica que foram inicialmente identificados. A dispersão causada por frequências altas no FDTD mostrou ser um problema que precisa ser controlado, caso contrário há uma forte degradação dos resultados. Também precisa ser considerado que os erros obtidos em todos os casos, pode ser devido ao modelamento das antenas. Modelos mais fiéis podem fazer com que as singularidades extraídas sejam mais próximas das reais frequências naturais das antenas estudadas. Por exemplo, as quinas presentes na antena Log-Periódica não foram incluídas no modelo para extração de pólos. A borda da antena refletora que tem característica peculiar de causar difração, também não foi modelada, o que pode ser a causa do erro aumentar em ângulos fora do eixo de máximo de radiação do parabolóide. O modelamento dos espaços entre os condutores da Log-Periódica também foi aproximado uma vez que em algumas regiões este espaço era menor do que uma célula. Enquanto as altas frequências causam problemas como na dispersão numérica, as baixas frequências causam problemas na extração das frequências naturais. Desta maneira, tanto frequências muito altas e muito baixas fora da banda de passagem da antena, que é onde se encontram as frequências naturais desta, causam divergências da resposta obtida e solução de referência. A dispersão é facilmente controlada através da largura do pulso de excitação e do número de segmentos no qual a antena é dividida. O limite para baixas frequências porém, neste trabalho, não foi definido de forma controlada pela formulação da excitação. Desta maneira, é possível que baixas frequências ainda presentes na formulação da derivada do pulso Gaussiano estejam causando erros. Todas as causas de erro citadas, devem ser cuidadosamente investigadas para que a técnica possa ser melhorada.

A técnica da altura efetiva descrita por meio das singularidades apresenta um grande potencial de expansão, seja em aplicações específicas, seja no aperfeiçoamento da técnica

em si. É preciso observar, porém, que a formulação matemática e a compreensão dos passos necessários não é trivial. A complexidade se encontra no entendimento da técnica em si e não em sua aplicação, o que a torna prática e versátil se um certo esforço for empregado na compreensão do método.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method*, 2nd ed. Artech House, Boston, 2000.
- [2] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons, Inc, New York, 1989.
- [3] K. S. Kunz and R. J. Luebbers, *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*. CRC Press, Boca Raton, 1993.
- [4] S. T. M. Gonçalves, “Caracterização temporal de antenas refletoras para faixas de frequência ultra-largas,” Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2005.
- [5] B. Allen, M. Dohler, E. E. Okon, A. K. B. W. Q. Malik, and D. J. Edwards, *Ultra-Wideband Antennas and Propagation for Communications, Radar and Imaging*. Wiley, London, United Kingdom, 2006.
- [6] R. J. Fontana, J. F. Larrick, J. E. Cade, and J. E. P. Rivers, “An ultra widebande synthetic vision sensor for airborne wire detection,” *SPIE proceedings series*, vol. 3364, pp. 2–10, Apr. 1998.
- [7] C. o. F. R. FCC, “Fcc (gpo) title 47, section 15 of the code of federal regulations subpart f: Ultra-wideband,” [http://www.access.gpo.gov/nara/cfr/waisidx\\_05/47cfr15\\_05.html](http://www.access.gpo.gov/nara/cfr/waisidx_05/47cfr15_05.html), último acesso em outubro de 2010.

- [8] Y. Duroc, A. Ghiotto, T.-P. Vuong, and S. Tedjini, "Parametric modeling of ultrawideband antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 11, pp. 3103–3105, Nov. 2007.
- [9] Y. Duroc, T.-P. Vuong, and S. Tedjini, "A time/frequency model of ultrawideband antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 8, pp. 2342–2350, Aug. 2007.
- [10] S. Licul, "Ultra-wideband antenna characterization and measurements," Tese de Doutorado, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute & State University, 2004.
- [11] R.-M. Cramer, R. A. Scholtz, and M. Z. Win, "Evaluation of an ultra-wide-band propagation channel," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 50, no. 5, pp. 561–570, May 2002.
- [12] J. Karedal, S. Wyne, P. Almers, F. Tufvesson, and A. F. Molisch, "Statistical analysis of the uwb channel in an industrial environment," *Vehicular Technology Conference, 2004. VTC2004-Fall. 2004 IEEE 60th*, vol. 1, pp. 81–85, Sep. 2004.
- [13] P. Górnjak and W. Bandurski, "Direct time domain analysis of an UWB pulse distortion by convex objects with the slope diffraction included," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, no. 9, pp. 3036–3044, Sep. 2008.
- [14] A. Shlivinski, E. Heyman, and R. Kastner, "Antenna characterization in the time domain," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 7, pp. 1140–1149, Jul. 1997.
- [15] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. AP-14, no. 3, pp. 302–307, 1966.
- [16] C. E. Baum, "The singularity expansion method," *Transient Electromagnetics Fields*, 1976, L. B. Felsen (editor), Berlin: Springer-Verlag.



- [17] G. Marrocco and M. Ciattaglia, "Ultrawide-band modeling of transient radiation from aperture antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, no. 9, pp. 2341–2347, Sep. 2004.
- [18] H.-T. Chou and P. H. Pathak, "Analytical solution for early-time transient radiation from pulse-excited parabolic reflector antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 5, pp. 829–836, May 1997.
- [19] R. de Oliveira and M. Hélier, "Closed-form expressions of the axial step and impulse responses of a parabolic reflector antenna," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 4, pp. 1030–1037, Apr. 2007.
- [20] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. McGraw-Hill, New York, 1961.
- [21] G. Sinclair, "The transmission and the reception of elliptically polarized waves," *Proc. IRE*, vol. 38, pp. 148–151, Feb. 1950.
- [22] S. J. Orfanidis, *Electromagnetic Waves and Antennas*. ECE Department, Rutgers University, 2004.
- [23] R. E. Collin, *Antennas and Radiowave Propagation*. McGraw-Hill Book co., New York, 1985.
- [24] C. E. Baum, "Relationships between time and frequency-domain norms of scalar functions," Mar. 2001, Mathematics notes, Air Force Weapons Laboratory.
- [25] M. C. de Oliveira, "Normas de sinais e sistemas," Departamento de Telemática, Universidade Estadual de Campinas, Tech. Rep., 1989.
- [26] A. Papoulis, *Probability, random variables, and stochastic process*. New York; St. Louis: McGraw-Hill, 1962.

- [27] S. Silver, *Microwave antenna theory and design*. Peter Peregrinus Ltd., on behalf of the Institution of Electrical Engineers, London, United Kingdom, 1984.
- [28] P. R. de Moura, “Análise de antenas de fios usando o método das diferenças finitas no domínio do tempo,” Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 2004.
- [29] K. R. Umashankar, A. Taflove, and B. Beker, “Calculation and experimental validation of induced currents on coupled wires in an arbitrary shaped cavity,” *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. AP-35, no. 11, pp. 1248–1257, Nov. 1987.
- [30] C. E. Baum, “Singularity expansion of electromagnetic fields and potentials radiated from antennas or scattered from objects in free space,” May 1973, Sensor and simulation notes, Air Force Weapons Laboratory.
- [31] K. Naishadham, “Computation of a branch-cut integral arising in transient electromagnetic scattering by a perfectly conducting cylinder,” *IEEE Proceedings on Microwaves, Antennas and Propagation*, vol. 136, pp. 367–370, Oct. 1989.
- [32] M. A. Morgan, “Singularity expansion representations of fields and currents in transient scattering,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 32, no. 5, pp. 466–473, May 1984.
- [33] C. E. Baum, “Emerging technology for transient and broad-band analysis and synthesis of antennas and scatterers,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 64, no. 11, pp. 1598–1616, Nov. 1976.
- [34] M. G. Soares, *Cálculo em uma Variável Complexa*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.
- [35] R. Prony, “Essai experimental et analytique sur les lois de la dilatabilité de fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l’alkool a différentes températures,” *Paris J. l’École Polytech.*, vol. 1, pp. 24–76, 1795.

- [36] R. S. Adve, T. K. Sarkar, O. M. C. Pereira-Filho, and S. M. Rao, "Extrapolation of time-domain responses from three-dimensional conducting objects utilizing the matrix pencil technique," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 1, pp. 147–156, Jan. 1997.
- [37] E. C. Levy, "Complex curve fitting," *IRE Transaction on Automatic Control*, vol. AC-4, no. 5, pp. 37–44, May 1959.
- [38] R. Kumaresan, "Identification of rational transfer function from frequency response samples," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 26, no. 6, pp. 925–934, Nov. 1990.
- [39] A. S. Markus, *Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils*, 1st ed. American Mathematical Society, Moscow, 2000.
- [40] F. Hu, "The band-pass matrix pencil method for parameter estimation of exponentially damped/undamped sinusoidal signals in noise," Tese de Doutorado, Syracuse University, 1990.
- [41] G. H. Golub and C. F. V. Loan, *Matrix Computations*. MD: Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989.
- [42] J. Chauveau, N. de Beaucoudrey, and J. Saillard, "Selection of contributing natural poles for the characterization of perfectly conducting targets in resonance region," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 9, pp. 2610–2617, Sep. 2007.
- [43] G. Marrocco and F. Bardati, "FDTD computation of a microwave device impulse response," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 42, pp. 859–862, Jun. 1994.

- [44] G. Marrocco and F. Bardatti, “Time-domain macromodel of planar microwave devices by FDTD and moment expansion,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 49, no. 7, pp. 1321–1328, Jul. 2001.
- [45] A. Papoulis, “Approximation of point spread for deconvolution,” *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 62, pp. 77–80, Jan. 1978.
- [46] A. V. Oppenheim and A. S. Willsky, *Signal and Systems*. Prentice Hall, Boston, 1997.
- [47] S. Watanabe and M. Taki, “An improved fdtd model for the feeding gap of a thin-wire antenna,” *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 8, no. 4, pp. 152–154, Apr. 1998.
- [48] A. Voors, “Nec based antenna modeler and optimizer,” <http://home.ict.nl/~arivoors/>, último acesso em outubro de 2010.
- [49] R. B. L. Richard P. Feynman and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, 2nd ed. Addison-Wesley, 2005.
- [50] J. C. Bellamy, *Digital Telephony*, 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000.