



**Universidade
Federal de
Minas Gerais**

Banco de Filtros Wavelets com Fator de Escala Maior que Dois

Leonardo Carneiro de Araújo

Orientador: Hani Camille Yehia

Dissertação de mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais,
como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em
Engenharia Elétrica.

Março de 2007

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais

Àquelas pessoas que fizeram-se presentes e me ajudaram a colocar os pingos nos 'i's no percurso de minha vida e àquelas que ainda colocarão muitos mais. :-)

Agradecimentos

Se aqui fosse citar todos os nomes, a lista ameaçaria se estender demais e seria sem dúvida demasiadamente distinta. Portanto a farei sucinta e resumi-la-ei da seguinte forma: agradeço à família e amigos pelo apoio e incentivo, e aos amigos do CEFALA e GOPAC pelo constante suporte técnico, pela participação nos meus devaneios e por estarem sempre postos a instigar todo e qualquer trabalho. E finalmente, ao professor Paulo Cupertino de Lima pelas suas lições em wavelets.

Resumo

A análise wavelet tradicional consiste em um processo equivalente a um banco de dois filtros, um passa-altas e outro passa-baixas, no qual a resolução em frequência sofre uma mudança de escala de uma oitava entre dois estágios subsequentes. Em algumas aplicações, sobretudo naquela que inspirou este trabalho, i.e. a modelagem da audição humana periférica, a resolução em frequência de uma oitava é demasiadamente pobre (na audição humana a resolução em frequência é de aproximadamente $1/3$ de oitava) para que se tenha uma boa representação do fenômeno. Adotou-se neste trabalho o particionamento dos subespaços utilizando-se um fator de escala maior que dois e mais de uma wavelet, sendo assim possível obter uma melhor resolução em algumas faixas de frequências. Esta mudança no fator de escala acarreta a necessidade de projetar-se novamente wavelets adequadas ao fator de escala em questão. Desenvolve-se então uma generalização da construção das wavelets de Daubechies, adaptando-as ao caso em que há um fator de escala inteiro maior do que dois. Os resultados obtidos mostram a construção da função escala e a determinação de uma propriedade que os coeficientes do banco devem satisfazer. Mostra-se, analítica e numericamente, que alguns resultados obtidos são, de fato, soluções. Porém, resta determinar uma maneira de projetar as funções wavelets satisfazendo a restrição imposta e conhecendo-se a função escala desejada.

Abstract

The traditional wavelet analysis is equivalent to a filter bank, formed by a low-pass and a high-pass filter, in which the frequency resolution changes by one octave between two subsequent stages. In some applications, mainly in the one that inspired this work, i.e. modeling of the peripheral human auditory system, the frequency resolution of one octave is fairly poor (in human audition the frequency resolution is approximately of $1/3$ of an octave) to attain a good representation of auditory phenomena. In the present work, it was chosen to particionate the subspaces using a scale factor greater then two and more than one wavelet, so that it is possible to achieve a better frequency resolution for certain bands. This change in the scale factor leads to the need to design new wavelets suited to the scale factor in use. In order to achieve this objective, a generalization of the wavelet construction proposed by Ingrid Daubechies, adapted to the situation in which the scale factor is not two anymore, is carried out. The results achieved show how to design the scale function and determine a property that the filter bank coefficients must satisfy in order to obtain a perfect reconstruction analysis filter bank. It is shown analytically and numerically that certain results achieved are indeed solutions. Nevertheless, it is still necessary to determine how to design the wavelet functions satisfying the imposed restriction and using the scale function desired.

Sumário

1	Preâmbulo	11
1.1	Crítica da representação pura	11
1.2	Janela para o mundo	13
1.3	As incertezas transcendentais das coisas	15
2	Introdução e estrutura do texto	17
2.1	Introdução	17
2.2	Perspectiva histórica	18
2.3	Estrutura da dissertação	21
3	Representação de sinais	22
3.1	Bases ortogonais	23
3.2	Espaço completo	26
3.3	Escolha da base	31
3.4	Frames	33
4	Filtros digitais	36
4.1	Sinais e Filtros	38
4.2	Filtros de resposta ao impulso finita (FIR)	39
4.3	Filtro passa-baixas - média móvel	40
4.3.1	Resposta em frequência	41
4.4	Filtro passa-altas - diferença móvel	44
4.4.1	Resposta em Frequência	45
4.4.2	Invertibilidade	46
4.5	Bancos de filtros	47
4.6	Representação de um sinal discreto através da transformada de Fourier	49
5	Fundamentos de wavelets	51
5.1	Introdução	51

5.2	Definição	53
5.3	Medida tempo-freqüência	55
5.4	Bases ortonormais de wavelets: a wavelet de Haar e análise em resoluções múltiplas	62
5.5	Análise em resoluções múltiplas	67
5.6	Algoritmos rápidos de decomposição e reconstrução	70
5.7	Algumas wavelets e propriedades	75
5.8	Transformada wavelet contínua	77
5.9	Transformada wavelet discreta	80
6	Wavelets e bancos de filtros	83
6.1	Wavelets e bancos de filtros	83
6.2	Wavelets no domínio da freqüência	97
6.3	Funções no domínio da freqüência	105
7	Fator de escala maior do que dois	110
7.1	Construção das wavelets de Daubechies	110
7.2	Transformada wavelet discreta com fator de escala qualquer	113
7.3	Particionamento do subespaço com mais de uma wavelet	117
7.4	Generalização para um fator de escala inteiro maior que dois	121
7.5	Generalização da construção das wavelets de Daubechies	127
7.6	Fatores de escala não-inteiros	136
8	Conclusões e perspectivas	141
A	Fórmulas de Parseval e Plancherel	144
B	Incerteza de Heisenberg	146
C	Átomos de Gabor	149
D	Algumas propriedades dos espaços vetoriais munidos de produto interno	152
D.1	Base de Riesz	154
E	Teorema de Bezout	156
F	Códigos fonte	159
F.1	Rotina para cálculo de $L(\omega)$	159
F.2	Obteção dos coeficientes de filtro	161
F.3	Banco de filtros	162

F.4 Exemplo 165
F.5 Rotinas auxiliares 165

Lista de Figuras

3.1	Projeção de um vetor em um espaço não-completo.	28
3.2	Caixas de Heisenberg.	32
4.1	Módulo e fase da resposta em frequência de um filtro de média móvel. . . .	43
4.2	Módulo e fase da resposta em frequência de um filtro de diferença móvel. .	46
4.3	Representação esquemática da análise realizada por um banco de filtros de dois canais.	48
4.4	Representação esquemática da síntese realizada por um banco de filtros de dois canais.	49
5.1	Caixas Tempo-Frequência.	57
5.2	Caixas de Heisenberg para a transformada Fourier com janela.	59
5.3	Caixas de Heisenberg para a transformada wavelet.	59
5.4	Estimulação em uma cóclea estirada.	60
5.5	Wavelet de Haar.	63
5.6	Gráfico de $\psi(x - 1)$	63
5.7	Gráfico de $\psi(x/2)$	64
5.8	Função f^0 decomposta como $f^1 + \delta^1$	66
5.9	Seqüência de subespaços encaixantes.	70
5.10	Algoritmo rápido de decomposição.	73
5.11	Algoritmo rápido de reconstrução.	75
5.12	Daubechies 4.	78
5.13	Coiflet 6.	78
5.14	Symlet 2.	78
5.15	Biorthogonal 1.3.	78
6.1	Banco de Filtros.	85
6.2	Decimação sem aliasing.	86
6.3	Decimação com aliasing.	87

6.4	Banco de Filtros de Síntese.	87
6.5	Upsampling.	89
6.6	Banco de Filtros (decomposição e síntese).	91
6.7	Filtros Espelhados em Quadratura.	92
6.8	$m = 1$	103
6.9	$m = 4$	104
6.10	$m = 16$	104
7.1	Banco de Filtros com fator de escala 4.	118
7.2	Resposta em Frequência do Filtro \tilde{m}_0	120
7.3	Resposta em Frequência do Filtro \tilde{m}_1	120
7.4	Resposta em Frequência do Filtro \tilde{m}_2	120
7.5	Resposta em Frequência do Filtro \tilde{m}_3	120
7.6	$Q(\omega)$ com $N = 2$	128
7.7	$Q(\omega)$ com $N = 4$	128
7.8	$Q(\omega)$ com $N = 6$	128
7.9	$Q(\omega)$ com $N = 8$	128
7.10	$L(\omega)$ com $N = 2$ e $M = 2$	131
7.11	$L(\omega)$ com $N = 4$ e $M = 2$	131
7.12	$L(\omega)$ com $N = 6$ e $M = 2$	131
7.13	$L(\omega)$ com $N = 8$ e $M = 2$	131
7.14	Banco de Filtros com Decimação Racional.	138
7.15	Banco de Filtros Iterativo com Decimação Racional.	138
7.16	Banco de Filtros com fatores $2/3$ e $1/3$	139
7.17	Análise espectral do sinal ao longo do Banco de Filtros.	140

...exaggerated turns of speech conceal mediocre affections: as if the fulness of the soul might not sometimes overflow in the emptiest of metaphors, since no one, ever, can give the exact measurements of his needs, nor of his conceptions, nor of his sufferings, and the human word is like a cracked cauldron upon which we beat out melodies fit for making bears dance when we are trying to move the stars to pity.

Gustave Flaubert, *Madame Bovary*

1

Preâmbulo

1.1 Crítica da representação pura

Verdades ou ilusões, não estão nos objetos, estímulos, em si, enquanto intuito, mas sim em seu juízo enquanto pensado (Kant, 1787). Os sentidos não erram, não por ‘medirem’, julgarem, incorretamente a realidade que traduzem, mas pelo simples fato de não julgarem. Com efeito, a verdade ou a ilusão podem se encontrar apenas na relação do objeto (estímulo) com o nosso entendimento. É a razão quem julga, e não a percepção, por conseguinte, a verdade ou ilusão só podem ser encontradas naquela, não nesta.

Kant (1787), em sua *Crítica da Razão Pura* (*Kritik der reinen Vernunft*), distingue entre dois tipos distintos de ilusão: a ilusão empírica e a ilusão transcendental. A primeira se encontra no uso empírico das regras do entendimento que sofrem um desvio causado pela imaginação. A ilusão transcendental influi sobre os princípios que jamais se apoiam na experiência. Os princípios imanentes se encontram dentro dos limites de uma experiência possível, enquanto os transcendentais sobrepõem esses limites. A ilusão transcendental é aquela cujos efeitos se verificam sobre os princípios transcendentais.

A ilusão transcendental não cessa, mesmo que tenha sido descoberta a sua nulidade através do uso da crítica da razão, ela perdura. Racionalidade é uma faculdade subjetiva da cognição humana e, portanto, a razão não visa o ótimo universal, mas um ótimo local, dentro das possibilidades do agente racional em questão, o homem. Em nossa razão

encontram-se regras fundamentais e máximas de seu uso. Tomada por uma necessidade objetiva de determinação das coisas, surge, subjetivamente, uma ânsia por conectar nossos conceitos em benefício do entendimento. É nessa tentativa que nascem as ilusões transcendentais, ilusões que não podem ser evitadas, mesmo que se oponham à razão. Não podemos evitar que a lua, quando se encontra na linha do horizonte, pareça maior, mesmo que não nos enganemos com esta ilusão. Assim também, dois sons puros de mesma intensidade e frequências distintas nos soam com volumes diferentes mesmo que tenhamos a consciência de que ambos apresentam igual amplitude.

O que estamos tratando é a dialética da percepção, em que temos por tese a verdade nos fatos e por anti-tese as ilusões criadas sobre os mesmos. E por síntese derivamos o discernimento. “Todo nosso conhecimento é oriundo dos sentidos, vai daí ao entendimento e termina na razão, acima da qual não é encontrado em nós nada mais alto para elaborar a matéria da intuição e levá-la à suprema unidade do pensamento” (Kant, 1787). Os sentidos nada mais são que janelas de comunicação entre realidades que díspares ou não jamais são iguais. E por meio de representações uma realidade se transfigura em outra. Se, por representação tomais a imagem que se vislumbra da realidade ao invés da realidade em si, não se esqueçais que a mente não é apenas um espelho, mas pode se transformar em um, quando colorida pelas cores dos objetos que reflete. Em seus trabalhos, Poussin (1964) estabelece uma distância entre ‘deux manières de voir les objects’¹. Para tanto ele faz uso dos aspectos de um lado e prospectos de outro. Segundo Poussin existem “duas maneiras de ver os objetos: simplesmente ver e olhar atentamente para eles. Simplesmente ver é deixar que o olho absorva naturalmente a forma e a aparência da coisa viva. Mas contemplar um objeto significa que se procura diligentemente os significados pelos quais se pode conhecer bem esse objeto para além da recepção simples e natural de sua forma no olho. Pode-se dizer que o mero aspecto é uma operação natural, e que o que chamo de Prospecto é um exercício de razão que depende de três coisas: o olho que discrimina, o raio visual e a distância do olho ao objeto”.

Se através dos sentidos criamos imagens para a realidade que queremos representar e, se tais representações são, por natureza, infidedignas, não deveríamos, pois, esperar que o conhecimento seja veraz em sua plenitude. “Porém, se todo o conhecimento se principia com a experiência, isso não prova que todo ele derive da experiência”. O que estamos insinuando é a possibilidade de haver um conhecimento tal, independente da experiência e de todas as impressões dos sentidos. E indo além, seria possível um conhecimento que fosse, não apenas, independente da experiência, mas que também seja capaz de corrigir conhecimentos errôneos criados como um reverbero do mundo através de nossas janelas imperfeitas?

¹duas maneiras de se ver os objetos

1.2 Janela para o mundo

“Two men look out a window. One sees mud, the other sees the stars”. (Oscar Wilde)

“Reality doesn’t bite, rather your perception of reality bites.” (Anthony J D’Angelo)

Toda visão, todo processo de análise, é em primeira instância um processo subversivo, um processo de dissociação entre formas, a partir do qual é possível haver racionalização. Esta natureza subversiva advém da janela que distorce o mundo sob observação, esta distorção não apenas é intrínseca à ferramenta de observação, mas também ao conhecimento e crenças do observador. Na idade média, quando acreditava-se na existência física do inferno, o símbolo do fogo deveria representar algo diferente do que representa hoje. A idéia de inferno era em grande parte devida à imagem do fogo consumindo e sobrando apenas cinzas. Fatos não são apenas fatos, mas também reflexos e distorções. “Obviamente os fatos não apenas chegam a você, mas são incorporados por uma imaginação que os transforma através das experiências prévias. Memórias do passado não são memórias de fatos, mas memórias de imagens de fatos” (Roth, 1988) ².

A apreensão do mundo vem antes de sua racionalização e não há como o ser de maneira adversa. Por conseguinte, um estímulo jamais será apenas um estímulo, um estímulo estará sempre sujeito à janela que o enquadra, e portanto um estímulo é estímulo e janela ao mesmo tempo, não há como dissociar o objeto do sujeito que o vê. Para cada observador um estímulo é único e assim também a sua racionalização. Apenas vemos aquilo para o qual olhamos. O olhar torna-se uma questão de escolha, e a verdade subjacente uma interpretação subjetiva e imanente. Como resultado de tal escolha, o que vemos é posto ao nosso alcance, o que vemos torna-se parte integrante de nós e nos modifica. O processo de observação é inerentemente um processo de comparação entre o que observamos e o que existe dentro de nós, é portanto um processo intrinsecamente ativo, continuamente se modificando e construindo a essência do que somos e do mundo que percebemos.

A experiência vivida (Erlebnis), particular e privada, já não tem nada a ver com a grande experiência coletiva (Erfahrung). Mas o caráter desesperadamente único da ‘Erlebnis’ transforma-se dialeticamente em uma busca universal: o aprofundamento abissal na lembrança despoja-o de seu caráter contingente e limitado que, em um primeiro momento, tornara-o possível. “Pois um acontecimento vivido é finito, ou pelo menos encerrado na esfera do vivido, ao passo que o acontecimento lembrado é sem limites, porque é apenas uma chave para tudo o que veio antes e depois” (Benjamin, 2005). A grandeza das lembranças

²Obviously the facts are never just coming at you but are incorporated by an imagination that is formed by your previous experience. Memories of the past are not memories of facts but memories of your imaginings of the facts. (Philip Roth, The Facts, opening letter to Zuckerman, 1988)

proustianas não vem de seu conteúdo. O golpe do gênio de Proust está em não ter escrito “memórias”, mas, justamente, uma “busca”, uma busca por analogias e pelas semelhanças entre o passado no presente e o presente que já está lá, prefigurado no passado, ou seja, uma semelhança profunda, mais forte do que o tempo que passa e que se esvai sem que possamos segurá-lo. A tarefa do observador não é, portanto, simplesmente relembrar os acontecimentos, mas “subtraí-los às contingências do tempo em uma metáfora” (Proust, 1927) ³.

A exposição transcendental do conceito de observação, entenda-se aqui exposição transcendental por “explicação de um conceito considerado como um princípio, a partir do qual se pode entender a possibilidade de outros conhecimentos sintéticos a priori” (Kant, 1787), visa expor o caráter próprio e reflexivo do processo de observação donde advém a memória como agente modificador de estímulos. “Devido a isso é que esta condição subjetiva de todos os fenômenos externos não pode ser comparada a nenhuma outra. O sabor agradável de um vinho não pertence às propriedades objetivas desse vinho, portanto de um objeto, mesmo considerando como fenômeno, mas à natureza própria do sentido do sujeito que o degusta. As cores não são propriedades dos corpos, à intuição dos quais se reportam, mas simplesmente modificações de sentido da vista que é afetado pela luz de certa forma. O espaço, antes entendido na condição de objetos exteriores, pertence necessariamente ao fenômeno ou à intuição do fenômeno. O saber e as cores não são, de forma alguma, condições necessárias pelas quais unicamente as coisas podem ser para nós objetos dos sentidos. Estão ligados ao fenômeno apenas como efeito da nossa organização particular que acidentalmente se juntam. Por isso, também não são representações a priori, mas baseiam-se na sensação e o gosto agradável mesmo num sentimento - de prazer e de desprazer - como efeito de sensação. Tampouco pode alguém ter a priori a representação de uma cor ou de um sabor qualquer ” (Kant, 1787).

Se a janela através da qual observamos o mundo exterior é em grande parte responsável pelas nossas impressões sobre este, então em um processo de análise e racionalização, o conhecimento das características imanentes desta janela é imprescindível para o conhecimento da verdade subjacente às impressões mas, mesmo que se tenha tal consciência, o discernimento jamais será feito através dos sentidos que percebem os estímulos. E se com base em tal conhecimento tentarmos perscrutar os fatos observáveis, mesmo assim, a verdade, sob a lente opaca de nossa janela, poderá os seus mais finos detalhes jamais revelar. E como todo observador é sujeito a uma janela de observação, jamais poderemos, com base apenas na observação, almejar à verdade alcançar.

Observando mais atentamente o processo de observação, podemos concluir que a janela do observador trata-se na verdade de um espelho. Um espelho que interioriza e modifica a

³Texto adaptado de “Walter Benjamin ou a história aberta”, de Jeanne Marie Gagnebin

verdade exterior. E, nesse processo de espelho, a auto-consciência do observador torna-se um resultado de um processo de identificação absoluta com a imagem que o exterior lhe impingiu. Seria como se tivéssemos a existência de duas almas, como supunha Heráclito⁴, e a realidade exterior fosse, por conseguinte, parte imagética dessa alma exterior.

1.3 As incertezas transcendentais das coisas

“There is no such uncertainty as a sure thing.”
(Robert Burns)

Toda representação não passa de uma projeção estando acessível ao observador apenas uma silhueta única. Não podemos jamais inferir o todo tomando como base a parte. Mas se a parte o faz todo, sendo parte, seria lícito que se diga, que é parte, sendo todo? ⁵ Até que ponto é possível fazer afirmações factíveis a cerca de uma verdade, se o que dispomos são apenas reminiscências desta? De alguma forma é possível acessar a verdade por de trás do fato dos factos? Se a resposta for sempre afirmativa, então não haveria sentido em se fazer tal discernimento entre verdades e factos, pois não haveria mais fato entre elas. Por outrora, se considerarmos as duas partes como partes que se sobrepõem, então teríamos que em todo facto há verdade embora nem sempre por completa. Um facto isolado não poderia constituir em si uma verdade, a menos que não existisse o fato, mas resta ainda a possibilidade de ser possível atingir a verdade através de facetas disponíveis através de mais de um facto. Se isso for realmente possível criar-se-á então um novo problema: como remontar a verdade através apenas de suas silhuetas.

Para tentar responder à última pergunta faremos uma primeira distinção entre um conjunto de silhuetas concisas e o outro não, o que, em tal caso, não passaria de um aglomerado de proposições (silhuetas) que não subsomem a nenhuma série ⁶. É evidente que a concisão é uma característica no mínimo desejável a tal conjunto de proposições. No entanto, há de se ressaltar que concisão não implica em segregação de informação, ou seja, nem todo conjunto conciso é tal que a verdade seja dele factível através de uma simples adição das partes. Se por outrora, este for o caso, já temos de antemão o caminho para a verdade a partir de suas partes, agora chamadas projeções.

⁴“Cada criatura humana traz duas almas consigo: uma que olha de dentro para fora, outra que olha de fora para dentro (...) A alma exterior pode ser um espírito, um fluido, um homem, muitos homens, um objeto, uma operação. Há casos, por exemplo, em que um simples botão de camisa é a alma exterior de uma pessoa; e assim também a polca, o voltarete, um livro, uma máquina, um par de botas, uma cavatina, um tambor, etc. Está claro que o ofício dessa segunda alma é transmitir a vida, como a primeira; as duas completam o homem, que é, metafisicamente falando, uma laranja” (Tudo Flui, Panta rhei, Heráclito).

⁵Vale lembrar o poema de Gregório de Matos, intitulado “Ao braço do mesmo Menino Jesus quando apareceu”, o qual constrói um paradoxo entre a parte e o todo.

⁶A famosa classificação de Borges que tanto fascinou Foucault.

Todos os sentidos humanos são janelas para o mundo e assim toda ferramenta de representação. Modelos criados para a um fenômeno representar não podem senão tentar explicar apenas a silhueta que se faz visível. Qualquer janela torna-se um espelho e apenas a verdade interiorizada poderá ser por algum modelo explicada. E por fim, toda tentativa de explicar é nadar num mar de incertezas.

2

Introdução e estrutura do texto

2.1 Introdução

Os primeiros trabalhos sobre a teoria de wavelets e sua utilização surgiram nas décadas de 70 e tiveram grande desenvolvimento também nas décadas de 80 e 90, mas não se restringe apenas a essas três décadas, assim como abrange uma vasta área científica, incluindo matemática, computação e engenharia. Os desenvolvimentos da teoria de wavelets foram principalmente impulsionados pelas pesquisas em análise funcional e processamento de sinais.

Este trabalho surgiu tendo como motivação a aplicação da análise wavelet para sinais de áudio de forma a assemelhar-se à análise realizada pela cóclea passiva. Após estabelecido um banco de filtros de wavelets, desejava-se utilizá-lo na adaptação de um modelo auditivo. Com este propósito foram estudados os trabalhos de [von Békésy \(1960\)](#) sobre a audição periférica humana e os trabalhos sobre modelos auditivos de [Lyon e Mead \(1988\)](#), [Flanagan \(1972, 1960\)](#), [Hewitt e Meddis \(1995, 1994\)](#) e [Slaney \(1994, 1988, 1998\)](#), dentre outros.

Como mostrado por Ingrid Daubechies em seu livro “Ten Lectures on Wavelets” ([Daubechies, 1992](#)) e neste trabalho na Seção 5.3, a análise realizada pela cóclea passiva assemelha-se à análise wavelet. Este fato sugeriu a aplicação da análise wavelet a sinais acústicos para aplicação em modelos auditivos computacionais. Uma primeira tentativa foi

feita, mas constatou-se que seria necessário uma melhor resolução em frequência, de forma que os filtros tivessem uma largura de banda próxima à da banda crítica, assemelhando-se mais assim à resposta da cóclea passiva.

Para melhorar a resolução em frequência do banco de filtros de wavelet, é necessário mudar o fator de escala associado, uma vez que este determina a resolução em frequência. Kovacevic e Vetterli (1993a); Herley, Kovacevic, Ramchandran, e Vetterli (1993); Blu (1998) desenvolveram trabalhos em que utiliza-se um fator de escala fracionário, menor que dois, para atingir a melhor resolução em frequência desejada.

Neste trabalho, optou-se por um particionamento dos subespaços utilizando-se um fator de escala maior que dois e mais de uma wavelet. Com esta abordagem é possível obter uma melhor resolução em algumas faixas de frequência, o que dependerá da escolha das wavelets. Esta mudança no fator de escala acarreta a necessidade de projetar-se novamente filtros wavelets adequados para o fator de escala em questão. Como ver-se-á adiante, neste trabalho optou-se por se adotar uma generalização da construção das wavelets de Daubechies para um fator de escala inteiro maior do que dois. O sistema de equações a ser resolvido para o projeto do filtro torna-se mais complicado quanto maior o fator de escala e , portanto, optou-se por resolvê-lo numericamente. Inicialmente mostra-se como obter-se os filtros passa-baixas, as funções escala no domínio da frequência. A seguir, mostra-se que o conjunto de filtros do banco deve satisfazer certas condições para que seja um banco de filtros com reconstrução perfeita, mas fica ainda em aberto a questão de como determinar os demais filtros do banco. Ao se resolver este último problema, será então possível realizar uma análise wavelet com um fator de escala inteiro maior do que dois, podendo assim obter uma melhor resolução em frequência na representação.

2.2 Perspectiva histórica

A origem dos estudos sobre wavelet é bastante difusa e se confunde com diversos outros estudos correlatos. Meyer diz ter encontrado 15 raízes distintas para a teoria de wavelets, sendo as mais antigas delas da década de 30. David Marr, por exemplo, trabalhando em visão artificial e robótica no MIT teve idéias similares a wavelets. A comunidade de físicos foi apresentada às wavelets com o trabalho de renormalização de Kenneth Wilson, ganhador do Nobel em 1971. Os matemáticos Littlewood e Paley desenvolveram técnicas semelhantes às wavelets que foram aplicadas ao estudo de séries trigonométricas. Na área de processamento de sinais, os trabalhos de três pesquisadores franceses em 1976, A. Croisier, D. Esteban e C. Galand, introduziram um banco de filtros que poderia ser utilizado para decompor, subamostrar e reconstruir um sinal, sendo mais tarde relacionado à teoria de wavelets. Outros pesquisadores desenvolveram funções wavelets, similares à

função de Gabor, para modelar o sistema visual humano.

O termo “wavelet” foi introduzido por Jean Morlet em seus trabalhos em geofísica, onde aplicou, pela primeira vez, a transformada wavelet aplicada à análise de dados sísmicos (Morlet, Arens, Fourgeau, e Giard, 1982). A maneira padrão para se localizar óleo no subsolo foi introduzida nos anos 60 e consiste em enviar vibrações ou pulsos para o subsolo e analisar os seus ecos. Este tipo de análise fornece a profundidade, a espessura e a constituição das várias camadas do solo. De maneira simples podemos dizer que a frequência dos ecos está ligada à espessura das camadas, sendo as altas frequências associadas às camadas mais finas. Morlet sabia que os pulsos modulados que eram enviados para o subsolo possuíam uma duração muito longa em altas frequências para serem capazes de separar precisamente camadas muito próximas. A idéia de Morlet foi, ao invés de emitir pulsos de mesma duração, usar formas de ondas mais curtas em frequências mais altas. Tais formas de onda foram obtidas por uma simples mudança de escala de uma única função chamada “wavelet”. Esta não foi a primeira das técnicas baseadas em translação e dilatação: podemos citar exemplos anteriores da utilização delas, como o trabalho desenvolvido por Calderón (1964, 1974).

Embora Alex Grossmann estudasse física teórica, a abordagem de Morlet trouxe algumas idéias que de certa forma se aproximavam ao seu trabalho em estados coerentes quânticos. Os resultados de Morlet instigaram Grossmann a fazer um estudo mais detalhado da transformada wavelet. Grossman e Morlet mostraram que, quando wavelets eram utilizadas para representar um sinal, não havia variação na energia deste, condição crucial para se fazer a reconstrução do sinal. Apenas 40 anos depois a transformada wavelet seria formalizada através de um trabalho de colaboração entre a física teórica e processamento de sinais, envolvendo Grossmann e Morlet (1984).

Em 1986, Stéphane Mallat, então, um estudante de vinte e três anos, encontra-se com Yves Meyer e juntos mostram que os diversos trabalhos sobre wavelets, algoritmos piramidais utilizados em processamento de imagens, codificação de sub-banda em processamento de sinais e filtros espelhados em quadratura utilizados em processamento de sinais de voz estão todos fundamentados sobre uma mesma teoria (Mallat, 1989b). Criaram assim a teoria da análise em resoluções múltiplas, tendo como um dos resultados a transformada rápida wavelet. Um outro resultado foi a teoria matemática para as wavelets ortogonais. O algoritmo proposto por Mallat utilizava inicialmente versões de wavelets de Guy Battle e Pierre Gilles Lemarié que se estendiam de menos infinito a mais infinito e, portanto, tinham que ser necessariamente truncadas.

Inspirado nos trabalhos de Mallat, Y. Meyer construiu as primeiras wavelets não triviais. Em contraposição às wavelets de Haar, as de Meyer são continuamente diferenciáveis, sem possuir, no entanto, suporte compacto. As wavelets de suporte compacto surgem,

poucos anos depois, com os trabalhos de Ingrid Daubechies e servem ao propósito de evitar o erro cometido com o truncamento. Essas wavelets não podem ser construídas de forma analítica, apenas numericamente. Mais tarde, outros pesquisadores mostraram que seria possível criar wavelets ortogonais com suporte compacto e com função explícita, mas, para tanto, seria necessário utilizar mais do que uma função escala.

Foi mostrado que conseguir concomitantemente a simetria e a reconstrução perfeita em um banco de filtros é impraticável se os mesmos filtros FIR forem utilizados na decomposição e reconstrução. Cohen, Daubechies, e Feauveau (1992); Vetterli e Herley (1992) desenvolveram a teoria das wavelets biortogonais, criando assim duas bases de wavelets duais, de maneira tal que seja possível atingir as duas características desejadas concomitantemente.

Havendo a necessidade de projetar-se wavelets que melhor adaptam-se a certas situações surgiu o chamado “lifting scheme” (esquema de melhoramento) que é uma técnica para construção de wavelets e também uma técnica para realizar a transformada wavelet discreta. Na verdade é mais vantajoso unir esses dois passos e projetar os filtros de wavelet enquanto se processa a transformada wavelet. É possível então construir wavelets adaptadas a situações específicas em que não é possível se ter translação e dilatação como em espaços não-Euclidianos. Esta é a chamada transformada wavelet de segunda geração. Esta técnica foi desenvolvida por Sweldens (1997). As wavelets de primeira geração são todas translações e dilatações de uma ou algumas formas básicas e, portanto, a transformada de Fourier é uma ferramenta crucial para a construção das wavelets. A construção utilizando o “lifting” é completamente espacial e, por conseguinte, ideal para construir as wavelets de segunda geração quando as técnicas de Fourier não estão mais disponíveis. Quando nos restringimos ao caso de invariância por translação e dilatação, ou seja, à primeira geração, o “lifting” torna-se a já conhecida estrutura do tipo “ladder” e o algoritmo é nada mais que o algoritmo de fatoração também conhecido.

Na transformada wavelet tradicional a relação de escala é dada por um fator de dois, o que determina a relação de uma oitava na resolução em frequência da análise. Para se obter uma melhor resolução em frequência algumas alternativas foram propostas. Uma primeira seria usar um fator de escala menor que dois e maior que um, o que levaria a uma resolução mais fina que uma banda de oitava, este trabalho foi pioneiramente desenvolvido por Kovacevic e Vetterli (1991, 1993b); Blu (1998). Uma segunda opção, a qual é o foco deste trabalho, proposta por Cohen e Daubechies (1993), consiste em usar um fator de escala maior do que dois, mas concomitantemente usar mais do que uma wavelet, de forma que seja possível, dependendo do projeto das wavelets, escolher faixas de frequências mais estreitas que uma oitava. Uma terceira opção, desenvolvida por Wickerhauser (1991), são os chamados pacotes de wavelets. Os pacotes wavelets são formas de ondas moduladas

cujo quadrado é integrável e que são bem localizadas em ambos tempo e frequência.

2.3 Estrutura da dissertação

Esta dissertação está organizada em 8 capítulos. Os capítulos 3, 4 e 5 são capítulos que fornecem as bases teóricas para o assunto desta dissertação, podendo então, o leitor familiarizado com o contexto, saltar diretamente para o Capítulo 6 ou mesmo para o Capítulo 7.

O Capítulo 3 trata dos conceitos matemáticos relativos à representação de sinais: o conceito de bases, ortogonalidade, produto interno, espaços vetoriais, frames, etc. O Capítulo 4 trata de filtros digitais, representação matricial dos filtros, resposta em frequência, invertibilidade dos filtros, bancos de filtros e representação de sinais através da transformada de Fourier. O Capítulo 5 fornece as informações básicas da teoria de wavelets: definição, informação tempo-frequência, um exemplo simples de wavelet, a wavelet de Haar, análise em resoluções múltiplas, algoritmos rápidos para decomposição e reconstrução, transformadas contínua e discreta e a descrição de algumas wavelets e de suas propriedades. O Capítulo 6 trata da representação de wavelet no domínio da frequência e bancos de filtros utilizando wavelets. O Capítulo 7 é o cerne deste trabalho, no qual se mostra a construção de wavelets proposta por Ingrid Daubechies, a transformada wavelet para um fator de escala diferente de dois; faz-se uma generalização da construção de Daubechies para o caso em que o fator de escala seja um número inteiro maior que dois; e apresentam-se duas outras maneiras de se obter um melhor resolução em frequência, diferentes das apresentadas neste trabalho. O último capítulo apresenta uma discussão dos resultados obtidos e aponta caminhos a serem seguidos em trabalhos futuros.

“Às vezes é dito que a grande descoberta do século XIX foi que as equações da natureza são lineares, e a grande descoberta do século XX é que não são.”

T.W. Körner, Fourier Analysis (Körner, 1988)

‘... nossas experiências diárias – especialmente as sensações auditivas – existem em uma descrição em termos de ambos tempo e frequência’

D. Gabor, Theory of Communication (Gabor, 1946)

3

Representação de sinais

“... a análise matemática é tão extensa quando a natureza em si; define todas as relações perceptíveis, mede o tempo, espaço, forças, temperaturas; essa difícil ciência é formada aos poucos, mas preserva cada princípio que uma vez adquiriu...”

Seu atributo principal é a clareza; não possui o objetivo de confundir. Ela traz consigo os mais diversos fenômenos e descobre as analogias recônditas que os unem. Se a matéria nos escapa, como o ar e luz, pela sua tenuidade extrema, se os corpos estão dispostos longe de nós, na imensidão do espaço, se o homem deseja saber os aspectos dos céus em épocas sucessivas separadas por vários séculos, se a ação da gravidade e do calor são estendidas ao interior da terra a profundezas que serão sempre inacessíveis, a análise matemática pode ainda sim utilizar-se das leis desses fenômenos. Isto os faz presentes e mensuráveis, e parece ser uma faculdade da mente humana destinada a completar a curta duração da vida e as imperfeições dos sentidos; e o que é ainda mais marcante, ela segue o mesmo curso no estudo de todos os fenômenos; representa-os através da mesma linguagem, como para atestar a unidade e simplicidade do plano do universo...” (Fourier, 1822)

A análise de Fourier funciona bem para problemas lineares. Problemas não-lineares tendem a ser bem mais complicados, e o comportamento de sistemas não-lineares é muito

menos previsível, uma pequena mudança na entrada pode causar uma grande mudança na saída.

3.1 Bases ortogonais

Ao se tratar de bases ortogonais uma primeira preocupação é saber o que significam esses conceitos. Se procurarmos em um dicionário o significado de ortogonalidade acharemos a definição em termos de perpendicularidade, ângulo reto. Mas, o conceito de ortogonalidade é mais amplo, perpendicularidade é apenas um caso particular de ortogonalidade quando estamos tratando dos espaços vetoriais em \mathbb{R}^n . Qual é então a relação entre perpendicularidade e ortogonalidade em se tratando de funções? Qual a importância em criarmos uma base ortogonal para representar funções?

Responder a estas perguntas é importante para justificar toda a preocupação e trabalho para se obter uma base ortogonal. Concisão é uma das importâncias em se utilizar uma base ortogonal, mas algumas bases não ortogonais são também concisas. Uma das vantagens da ortogonalidade é que os coeficientes das transformadas tornam-se fáceis de serem calculados, pois isso pode ser feito através de uma simples operação de produto interno, sendo a computação de cada coeficiente independente dos demais. A propriedade mais importante é que as bases ortogonais permitem-nos reconstruir um sinal com o conhecimento apenas dos coeficientes dados pelo produto interno do sinal com as funções da base.

Para a representação de vetores em um espaço vetorial é conveniente estabelecer uma base, um conjunto de vetores capaz de gerar qualquer vetor neste espaço. Dada uma base de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ é possível representar qualquer vetor x neste espaço como uma soma ponderada dos elementos da base:

$$x = \sum_{i=1}^N w_i v_i. \quad (3.1)$$

Dada a base, um vetor qualquer no espaço gerado por esta base é completamente caracterizado pelos coeficientes w_i , de forma que o vetor original possa ser reconstruído sem erro utilizando para tanto os coeficientes e os vetores da base, como mostra a Equação (3.1).

Para introduzir uma métrica em um espaço vetorial deve-se primeiramente definir o produto interno neste espaço. Mostrar-se-á aqui a importância do produto interno na representação de um vetor em um determinado subespaço, através da projeção deste vetor no subespaço, e mais ainda, quando mostra-se que espaços de Hilbert (definido logo abaixo) munidos de produto interno são espaços completos, sem buracos.

Definição 1. *Dado um espaço vetorial V , um produto interno (ou produto escalar) é uma*

aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) tal que

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \text{ e } \langle x, x \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } x = 0, \quad (3.2)$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad (3.3)$$

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \text{ para todo número real ou complexo } \alpha, \quad (3.4)$$

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \quad (3.5)$$

para todo x, y, x_1 e x_2 em V e α em \mathbb{R} (ou \mathbb{C}).

No espaço L^2 , espaço de funções de quadrado integrável (funções com energia finita), o produto interno de f e g é definido como:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx, \quad (3.6)$$

em que \bar{g} o complexo conjugado de g .

Neste espaço vetorial define-se a norma de f

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}. \quad (3.7)$$

A energia de um sinal $f \in L^2(\mathbb{R})$ é definida por:

$$E(f) = \|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx. \quad (3.8)$$

Um espaço vetorial assim definido é chamado espaço de Hilbert, o qual é um espaço métrico completo.

Definição 2. Um espaço vetorial H com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um espaço de Hilbert se ele for completo em relação à norma:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (3.9)$$

Os espaços de Hilbert são também espaços de Banach¹, mas o inverso nem sempre é válido.

Definição 3. Diz-se que um conjunto de vetores $\{v_i\}_{i=1}^N$ em um espaço com produto interno V é ortonormal se

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.10)$$

¹Espaços de Banach são espaços normados completos em relação à métrica $d(x, y) = \|x - y\|$.

em que

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Seja $\{v_i\}_{i=1}^N$ uma base ortonormal para V , então, dado $x \in V$, tem-se

$$x = \sum_{i=1}^N w_i v_i. \quad (3.12)$$

Usando a linearidade do produto interno, tem-se

$$\begin{aligned} \langle x, v_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^N w_i v_i, v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N w_i \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N w_i \delta_{i,j} \\ &= w_j, \end{aligned} \quad (3.13)$$

logo, $w_j = \langle x, v_j \rangle$.

Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$ e dada a definição de energia em (3.8), sendo $\{g_j\}$ uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, então

$$f = \sum_j b_j g_j, \quad (3.14)$$

e a energia de f é dada por

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_j b_j g_j(x) \right|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j,j'} b_j \bar{b}_{j'} g_j(x) \overline{g_{j'}(x)} dx \\ &= \sum_{j,j'} b_j \bar{b}_{j'} \int_{-\infty}^{+\infty} g_j(x) \overline{g_{j'}(x)} dx \\ &= \sum_{j,j'} b_j \bar{b}_{j'} \delta_{j,j'} \\ &= \sum_j |b_j|^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Assim, para calcular a energia do sinal, basta somar o quadrado dos coeficientes de sua expansão em uma base ortonormal.

Com a criação de espaços ortonormais tem-se por objetivo definir formas que sejam eficientes para se representar um sinal e que sejam úteis ao serem utilizadas no processamento desses sinais e na extração de informação dos mesmos. Quando representa-se um sinal em uma base o que está se fazendo é a projeção deste em um subespaço. Supõe-se inicialmente um sinal f em L^2 e representa-se este sinal no subespaço V_N gerado pelos vetores $\{v_1, \dots, v_N\}$:

$$P_{V_N} f = f^N = \sum_{n=1}^N \langle f, v_n \rangle v_n, \quad (3.16)$$

no qual $P_{V_N} f$ é a projeção de f no subespaço V_N . Note que, ao criar essa representação comete-se um erro dado por $f - f^N$. O quão mais próxima a base estiver de gerar todo o espaço L^2 , menor será o erro da nossa representação. Após feita a projeção, toda a informação relativa ao sinal f será expressa pelos coeficientes $b_n = \langle v_n, f \rangle$. Apenas estes são necessários para se fazer qualquer processamento do sinal e para posteriormente reconstruí-lo.

3.2 Espaço completo

A propriedade de um espaço vetorial munido de produto interno ser completo ou não é importante para garantir que certas propriedades sejam satisfeitas. Intuitivamente, um espaço é completo se este não possui “buracos”. Como contra-exemplo tem-se o conjunto dos números racionais que não é completo, pois números irracionais, tais como $\sqrt{2}$, não estão presentes e ainda é possível construir seqüências de Cauchy que convergem para estes números.

Definição 4. *Seja V um espaço vetorial munido de produto interno e $S : \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de vetores em V , dizemos que a seqüência S é uma seqüência de Cauchy se dado um $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{R}$ tal que*

$$m, n > N \Rightarrow \|v_m - v_n\| < \epsilon. \quad (3.17)$$

Dizemos que S é convergente e possui como limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v' \quad (3.18)$$

se $v' \in V$ e para $\epsilon > 0$ corresponde um N tal que

$$n > N \Rightarrow \|v_n - v'\| < \epsilon. \quad (3.19)$$

Como $\|v_m - v_n\|$ é a distância entre v_n e v_m , uma seqüência de Cauchy é tal que é

possível tomar a distância entre v_n e v_m tão pequena quanto se desejar.

Dada uma seqüência convergente qualquer $S : \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ com limite v' tem-se

$$\|(v_i - v')\| < \epsilon \quad (3.20)$$

onde $\epsilon > 0$ é qualquer. Tomando dois termos quaisquer da seqüência e usando a desigualdade triangular,

$$\|v_m - v_n\| = \|(v_m - v') - (v_n - v')\| < \|(v_m - v')\| + \|(v_n - v')\| \quad (3.21)$$

como a seqüência é convergente, obtém-se ainda

$$\|v_m - v_n\| < \|(v_m - v')\| + \|(v_n - v')\| < 2\epsilon \quad (3.22)$$

e, portanto, toda seqüência convergente é uma seqüência de Cauchy.

Definição 5. *Um espaço vetorial V é dito completo, se para toda seqüência de Cauchy $\{v_n\}$ em V existe v' tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v' \quad (3.23)$$

Como já dito anteriormente, um espaço vetorial munido de produto interno é chamado espaço de Hilbert.

Uma das importâncias de um espaço ser completo é termos a garantia de que ao se fazer a projeção de um vetor nesse subespaço estaremos projetando em um elemento que pertence ao espaço, e não em um buraco (como acontece no exemplo da Figura 3.1). Esta propriedade será útil adiante na análise de múltiplas resoluções fornecida pelas wavelets, na qual obtem-se uma função inicialmente representada em um subespaço de mais alta resolução e deseja-se obter sucessivamente versões mais grosseiras (baixa resolução) e os detalhes, informações perdidas ao se baixar a resolução da sua representação.

Deseja-se não apenas que a projeção de um vetor em um subespaço exista, como também que esta projeção seja única.

Teorema 3.2.1. *(Teorema da Projeção) Seja V um subespaço fechado² de um espaço de Hilbert H e f um elemento de H que não pertence a V , então existem elementos g e h*

² $V \subset H$ é fechado se para toda seqüência $\{f_n\}$ em V , tal que $f_n \rightarrow f$, então, $f \in V$.

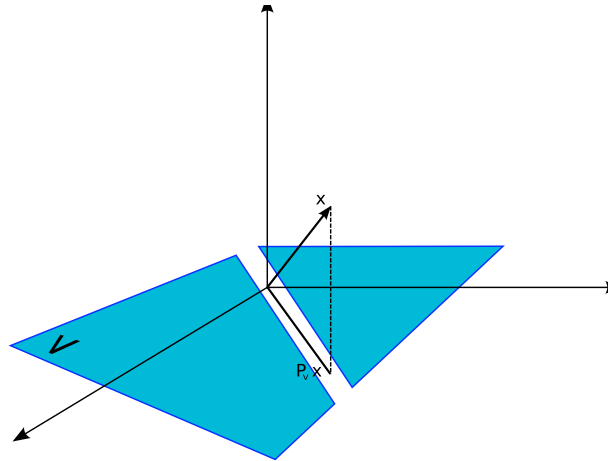


Figura 3.1: Projeção de um vetor em um espaço não-completo.

únicos em H tais que

$$f = g + h \tag{3.24}$$

$$g \in V \tag{3.25}$$

$$\langle h, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V \tag{3.26}$$

$$\tag{3.27}$$

Com base nesse teorema, defini-se um mapeamento $P_V : f \rightarrow P(f) = g$, a projeção de f , pertencente a H , em V . É possível também utilizar o teorema anterior e o fato da ortogonalidade entre dois vetores se darem quando o produto interno entre eles for nulo para deduzir o seguinte corolário:

Corolário 3.2.2. *Para cada subespaço fechado V de um espaço de Hilbert H define-se o complemento ortogonal como:*

$$V^\perp = \{u \in H : \langle u, v \rangle = 0, \quad v \in V\} \tag{3.28}$$

Isto significa que $H = V \oplus V^\perp$, isto é, cada f em H pode ser escrito de forma unívoca

$$f = g + h \quad (g \in V, h \in V^\perp) \tag{3.29}$$

com $\|f\| = \|g\| + \|h\|$.

Este corolário será importante na construção de uma análise de resoluções múltiplas (ARM) que será criada ao aplicar uma decomposição em relação a uma base de wavelets. Os subespaços associados às wavelets de diferentes níveis de resolução serão subespaços ortogonais entre si e serão também complementares aos subespaços gerados pelas funções

escala. Esses tópicos serão abordados posteriormente no texto.

Demonstração. (A demonstração pode ser também encontrada em (Reed e Simon, 1980))
Para demonstrar o teorema acima vamos definir g como um elemento qualquer de V , e define-se também o seguinte conjunto

$$C_n = \{v \in V : \|f - v\|_H \leq d + \frac{1}{n}\} \quad (3.30)$$

d acima é definido como a distância de f a V

$$d = \inf\{\|f - g\|_H : g \in V\}. \quad (3.31)$$

³ Cada C_n então não é vazio e $C_n \supseteq C_{n+1}$. Deseja-se mostrar que $\bigcap_n C_n$ contém apenas um elemento, e este é g .

Para quaisquer u e v em H tem-se:

$$\|u - v\|^2 = \|(u - f) + (f - v)\|^2, \quad (3.32)$$

e, pela lei do paralelogramo, obtem-se: ⁴

$$\|(u - f) + (f - v)\|^2 + \|(u - f) - (f - v)\|^2 = 2\|u - f\|^2 + 2\|v - f\|^2, \quad (3.33)$$

substituindo agora (3.33) em (3.32):

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= 2(\|u - f\|^2 + \|v - f\|^2) - \|(u - f) - (f - v)\|^2 \\ &= 2(\|u - f\|^2 + \|v - f\|^2) - \|(u + v) - 2f\|^2 \\ &= 2(\|u - f\|^2 + \|v - f\|^2) - 4\|\frac{1}{2}(u + v) - f\|^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Como u e v pertencem a C_n obtem-se, pela Equação (3.30), que:

$$\|u - f\|^2 + \|v - f\|^2 \leq 2(d + \frac{1}{n})^2 \quad u, v \in C_n. \quad (3.35)$$

Pela definição de d e pelo fato de $\frac{1}{2}(u + v)$ ser um elemento de V :

$$\|f - \frac{1}{2}(u + v)\| \geq d. \quad (3.36)$$

³inf = ínfimo

⁴lei do paralelogramo: $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$

Usando agora os resultados de (3.35) e (3.36) em (3.34),

$$\|u - v\|^2 \leq 4d^2 + 8\frac{d}{n} + \frac{4}{n^2} - 4d^2 = 8\frac{d}{n} + \frac{4}{n^2}, \quad (3.37)$$

ou seja, quanto maior n , menor a distância entre dois elementos quaisquer em C_n , ou ainda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diametro}(C_n) = 0. \quad (3.38)$$

Considerando agora $g_n \in C_n$, como $C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \dots$ e pela Equação (3.38), tem-se que $\{g_n\}$ é uma seqüência de Cauchy que deve convergir para um g em V . Se por outro lado toma-se uma outra seqüência $\{g_{n'}\}$, a propriedade (3.38) garante que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g_{n'}\| = 0, \quad (3.39)$$

isso garante que no limite ambas convergem para o mesmo g . Conclui-se então que $\bigcap_n C_n = \{g\}$.

Fazendo agora $f = g + h$. Sabe-se que $\|f - g\| \geq d$ pela definição de d e por $g \in V$. Por outro lado tem-se também

$$\|f - g\| \leq \|f - g_n\| + \|g_n - g\| \leq d + \frac{1}{n} + \|g_n - g\| \rightarrow d. \quad (3.40)$$

Conclui-se assim que $\|h\| = d$. Ficam então demonstradas as propriedades (3.24), (3.25) e (3.27). Para provar (3.26) é necessário mostrar que

$$\langle h, v \rangle = 0 \quad v \in V, \quad \|v\| = 1. \quad (3.41)$$

Tem-se que $\|f - (g + \langle h, v \rangle v)\| \geq d$, e também

$$\|f - (g + \langle h, v \rangle v)\| \leq \|h\| - |\langle h, v \rangle| = d - |\langle h, v \rangle|. \quad (3.42)$$

Pelos mesmos argumentos utilizados anteriormente, é possível concluir que $\langle h, v \rangle = 0$.

Para completar a prova é necessário ainda mostrar que g e h são únicos. Se existir outra decomposição $f = g' + h'$ que satisfaça as mesmas condições obtém-se $g' \in \bigcap_n C_n$, e portanto $g' = g$. Por conseguinte $h' = h$, o que completa a prova. \square

Definição Uma família infinita $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ em um espaço de Hilbert (separável) H é dita uma família ortonormal completa se para cada f em H

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{m=1}^n \langle f, \phi_m \rangle \phi_m \right\| = 0 \quad (3.43)$$

Neste caso, a série ortonormal $\sum_{m=1}^n \langle f, \phi_m \rangle \phi_m$ é dita convergente em média, convergindo para f .

De posse de uma família completa, é possível usufruir de algumas de suas propriedades. Será certamente útil se os membros desta família de alguma forma forem capazes de capturar as principais propriedades dos modelos sob estudo e observação, afinal, esses elementos são as unidades básicas para construção de sinais, no espaço por eles gerado. Um conjunto completo garante ainda que a energia de um sinal qualquer f será completamente determinado pelos coeficientes $\{\langle f, \phi_n \rangle\}_n$. Utilizando esses coeficientes, é possível localizar mudanças abruptas e picos, através da localização dos maiores coeficientes ou pode-se trabalhar com uma representação do sinal f através de um menor número de coeficientes, descartando aqueles com menor energia, promovendo assim uma compressão dos dados e mantendo ainda sim uma boa representação do sinal.

3.3 Escolha da base

“Um erro muito comum ao usar-se qualquer tipo de transformada é esquecer-se da presença da função de análise no domínio da transformada, o que pode levar a graves interpretações errôneas, a estrutura da função de análise sendo interpretada como do fenômeno em observação.” (Farge, 1992)

Segundo Farge (1992), uma contribuição das wavelets é que elas “forçaram as pessoas a pensarem o que a transformada de Fourier é, forçaram a pensar que quando escolhem um tipo de análise estão na verdade misturando o sinal e a função utilizada para a análise. Geralmente, quando as pessoas utilizam a mesma técnica ao longo de várias gerações de cientistas, elas ficam cegas com relação a esta escolha. Uma nova técnica como wavelets força-nos a reconsiderar o problema a partir do princípio.”

“Temos uma enorme literatura matemática para ajudar-nos a interpretar os coeficientes wavelet,” diz Meyer (1992). “Agora que entendemos que a transformada wavelet repete um determinado capítulo da matemática, temos, pelo menos, uma ciência por trás. Os pacotes de wavelet são tão novos que nem sabemos ainda como interpretar os coeficientes.”

A escolha da base implica numa relação de compromisso entre tempo e frequência. Esta escolha pode ser representada graficamente pelas caixas de Heisenberg cuja altura e largura representam, respectivamente, intervalos de frequências e tempo. Dado um sinal, a melhor escolha para uma base ortogonal é aquela que minimiza a área necessária para a representação do sinal, sendo essa área a soma das áreas das caixas de Heisenberg necessárias para representar o sinal. Cada uma das caixas em questão estará associada a um coeficiente desta representação.

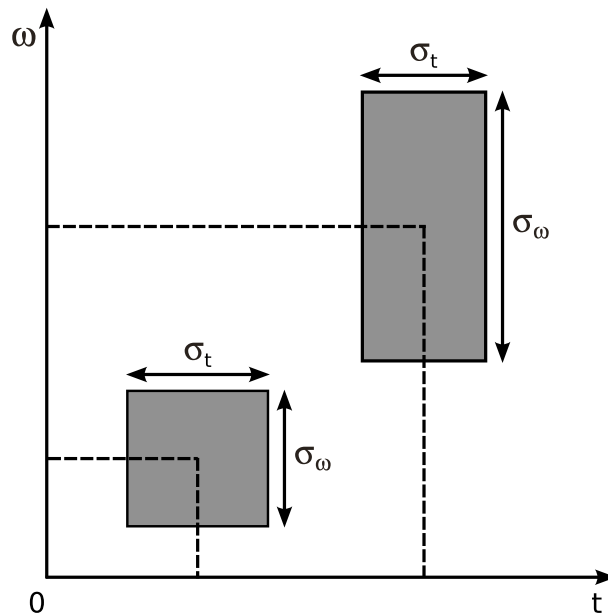


Figura 3.2: Caixas de Heisenberg.

Cada pedaço da informação do sinal f , associado a cada coeficiente $\langle f, \phi_\gamma \rangle$, onde ϕ_γ é um vetor de uma base ortonormal, é representado, no plano tempo-frequência (t, ω) por uma região cuja localização e extensão dependem do espalhamento no plano tempo-frequência da função ϕ_γ . Como

$$\|\phi_\gamma\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_\gamma(t)|^2 dt = 1 \quad (3.44)$$

é possível interpretar $|\phi_\gamma(t)|^2$ como uma função de densidade de probabilidade centrada em

$$u_\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} t |\phi_\gamma(t)|^2 dt \quad (3.45)$$

O espalhamento em torno de u_γ pode ser medido pela variância:

$$\sigma_t^2(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - u_\gamma)^2 |\phi_\gamma(t)|^2 dt. \quad (3.46)$$

Utilizando a fórmula de Plancharel (A.2) (veja o apêndice A), prova-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \|\phi_\gamma\|^2 \quad (3.47)$$

A frequência central de $\hat{\phi}_\gamma$ é portanto definida como

$$\xi_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega \quad (3.48)$$

e o espalhamento em torno de ξ_γ é

$$\sigma_\omega^2(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \xi_\gamma)^2 |\hat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.49)$$

A relação entre a resolução em frequência e tempo da função de base ϕ_γ é representada no plano tempo-frequência pela caixa de Heisenberg centrada em (u_γ, ξ_γ) e com largura $\sigma_t(\gamma)$ e altura $\sigma_\omega(\gamma)$. O princípio da incerteza de Heisenberg (veja Apêndice B) afirma que a área do retângulo é pelo menos $1/2$

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} \quad (3.50)$$

Esta relação impõe um limite à resolução tempo e frequência concomitantemente. Se desejar uma maior resolução temporal, haverá um ponto em que será necessário começar a sacrificar a resolução em frequência, para que assim a relação em (3.50) continue a ser satisfeita. O dual acontece se desejar-se aumentar a resolução em frequência. Existe então uma relação de compromisso entre as duas resoluções. A relação ótima será quando a área da caixa de Heisenberg for igual a $1/2$, o que acontecerá quando as funções da base forem átomos de Gabor (veja Apêndice C).

3.4 Frames

As teorias de frames (i.e. quadros) e bases têm sido amplamente estudada na última década. Como principais trabalhos a cerca deste assunto podemos citar os desenvolvidos por Daubechies (1990, 1992) e um *survey* escrito por Heil e Walnut (1989).

Dados $f \in L^2(\mathbb{R})$ e uma base $\{f_n\}$ para $L^2(\mathbb{R})$, tem-se que

$$f = \sum_n c_n f_n \quad (3.51)$$

onde o conjunto de coeficientes $\{c_n\}$ é único. A Equação (3.51) é vista como a decomposição de f , um sinal “complicado”, em termo das funções da base, sinais “simples”. Dado um operador linear T em $L^2(\mathbb{R})$, sabendo-se o efeito deste sobre cada elemento constituinte da base, saber-se-á então, de forma fácil, determinar o efeito de T sobre o sinal f , $Tf = \sum_n c_n T f_n$.

Definição 6. *Uma família $\{\phi_j\}_{j \in J}$ em um espaço de Hilbert H é dito um frame se existirem constantes $A, B > 0$ tais que a desigualdade se verifica*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (3.52)$$

para todo $f \in H$. As constantes A e B são chamadas limites do frame. Se $A = B$ o frame é dito justo. Se $\|\phi_j\| = 1$ o frame é dito normalizado.

O conceito de frame é mais relaxado. Se $\{\phi_n\}$ for um frame ao invés de uma base, é possível ainda sim representar f através dos elementos desse conjunto:

$$f = \sum_n c_n \phi_n, \quad (3.53)$$

mas, agora, o conjunto de coeficientes que satisfaz (3.53) não é necessariamente único. Não sendo único, é possível escolher dentre as opções a mais conveniente. Além disso, como as condições sobre um frame são mais fracas que as condições impostas sobre uma base, é mais fácil encontrar um frame com propriedades interessantes do que uma base.

Supondo que tenha-se fixado uma família $\{\phi_j\}_{j \in J}$ em um espaço de Hilbert H . Será que os coeficientes da forma $\{\langle f, \phi_j \rangle\}_{j \in J}$ caracterizam de forma completa qualquer função f em H ? Será possível reconstruir f numericamente de maneira estável a partir dos coeficientes $\{\langle f, \phi_j \rangle\}_{j \in J}$? A teoria de frames analisa a completude, estabilidade e redundância na representação linear e discreta de sinais. A transformada discreta de Fourier em janelas e a transformada discreta de wavelets são estudadas sobre o formalismo de frames.

Toda família ortonormal completa é um frame justo, mas nem todo frame justo é necessariamente uma família ortonormal completa. Para um frame justo, a seguinte relação será válida

$$\sum_{j \in J} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 = A \|f\|^2. \quad (3.54)$$

Através da identidade de polarização (D.3) e da relação (3.54) é possível mostrar que f pode ser reconstruído, a partir dos coeficientes, da seguinte forma

$$f = A^{-1} \sum_j \langle f, \phi_j \rangle \phi_j. \quad (3.55)$$

Para demonstrar, basta tomar (D.3) e aplicar (3.54).

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{4} [\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + j\|f + jg\|^2 - j\|f - jg\|^2] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{A} \sum_{j \in J} |\langle f + g, \phi_j \rangle|^2 - \frac{1}{A} \sum_{j \in J} |\langle f - g, \phi_j \rangle|^2 \right. \\ &\quad \left. + j \frac{1}{A} \sum_{j \in J} |\langle f + jg, \phi_j \rangle|^2 - j \frac{1}{A} \sum_{j \in J} |\langle f - jg, \phi_j \rangle|^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{A} \left[\sum_{j \in J} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 + 2 \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \overline{\langle g, \phi_j \rangle} + \sum_{j \in J} |\langle g, \phi_j \rangle|^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{A} \left[\sum_{j \in J} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 - 2 \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \overline{\langle g, \phi_j \rangle} + \sum_{j \in J} |\langle g, \phi_j \rangle|^2 \right] \\
& + \frac{j}{A} \left[\sum_{j \in J} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 - 2j \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \overline{\langle g, \phi_j \rangle} - \sum_{j \in J} |\langle g, \phi_j \rangle|^2 \right] \\
& - \frac{j}{A} \left[\sum_{j \in J} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 + 2j \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \overline{\langle g, \phi_j \rangle} + \sum_{j \in J} |\langle g, \phi_j \rangle|^2 \right] \\
& = \frac{1}{A} \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \overline{\langle g, \phi_j \rangle} \\
& = \frac{1}{A} \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \langle \phi_j, g \rangle \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Note que o resultado acima pode ser visto na forma apresentada em (3.55).

Teorema 3.4.1. *Um frame justo e normalizado $\{\phi_j\}_{j \in J}$ em um espaço de Hilbert H é uma família ortonormal completa se, e somente se, os limites do frame forem tais que $A = B = 1$.*

Demonstração. Se a família $\{\phi_j\}_{j \in J}$ é uma família ortonormal completa em um espaço de Hilbert H , então f é representado explicitamente pelos elementos da família da seguinte forma:

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j, \tag{3.57}$$

e de maneira unívoca. Sendo os coeficientes $\langle f, \phi_j \rangle$ únicos, teremos apenas a igualdade na Equação (3.52). Concluí-se assim que $A = B$, o frame deve ser justo.

Pelo teorema de Plancherel (veja Apêndice A), o operador de análise $S : f \rightarrow \{\langle f, \phi_j \rangle\}_{j \in J}$ é um mapeamento de H em $l^2(J)$ que preserva energia e, portanto,

$$\|f\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle f, \phi_j \rangle|^2, \tag{3.58}$$

e assim concluí-se que $A = B = 1$.

É fácil fazer a demonstração no sentido oposto para completar a demonstração do teorema, ficando a cargo do leitor.

□

The attitude adopted in this book is that while we expect to get numbers out of the machine, we also expect to take action based on them, and, therefore we need to understand thoroughly what numbers may, or may not, mean. To cite the author's favorite motto, 'The purpose of computing is insight, not numbers,' although some people claim, 'The purpose of computing numbers is not yet in sight.' There is an innate risk in computing because 'to compute is to sample, and one then enters the domain of statistics with all its uncertainties.

Richard W. Hamming, Introduction to applied numerical analysis ([Hamming, 1989](#))

4

Filtros digitais

É usual a medição de grandezas que variam continuamente no tempo, como por exemplo, a pressão arterial, fluxo de fluido por um duto, variação de temperatura em uma superfície, sinal acústico da voz, brilho de uma estrela, etc. Todas essas grandezas são ditas funções do tempo, uma vez que variam com este, e são matematicamente representadas por $x(t)$ para denotar a sua relação intrínseca com a variável t , que representa o tempo. Todas essas variáveis exemplificadas anteriormente podem ser ditas contínuas em relação ao tempo. Por razões técnicas, ao invés do sinal $x(t)$ usualmente armazena-se as amostras x_n desse sinal, igualmente espaçadas no tempo. Às vezes também representa-se tais amostras por $x[n]$, remetendo ao fato que cada amostra possui o valor da função (ou sinal) no instante nT , ou seja, $x[n] = x(nT)$. O sinal amostrado será uma boa representação se satisfizer às condições do teorema da amostragem ¹, não criando assim um falseamento do sinal (*aliasing*). E ainda mais, quando essas amostras são tomadas, elas não são armazenadas com precisão infinita, mas são arredondas de forma a serem representadas por alguns dígitos. Este processo é chamado quantização. A ferramenta básica utilizada para processar essa seqüência de amostras que representam o sinal são os filtros digitais.

A palavra filtro advém da Engenharia Elétrica, onde filtros são utilizados para transformar sinais elétricos, especialmente eliminando (filtrando) várias frequências do sinal.

¹O teorema da amostragem foi provado pelo matemático J. Whittaker em 1935 e posteriormente aplicado na teoria das comunicações em 1949 por Claude Shannon.

Dados os sinais, em geral, deseja-se realizar sobre eles diversas operações, como diferenciar, integrar, suavizar, extrapolar, analisar a periodicidade, remover ruído; todas essas operações, dentre outras mais, são operações lineares. Quando o sinal encontra-se na forma digital, essas operações são realizadas pelos filtros digitais.

O tipo mais simples de filtro digital é o filtro não-recursivo; estes são definidos pela seguinte equação linear

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k} \quad (4.1)$$

Os coeficientes h_k são as constantes do filtro, x_{n-k} as amostras da função $x(t)$ que são a entrada do filtro e y_n a saída do filtro. Esse processo realizado pelo filtro digital é chamado convolução. O filtro digital realiza apenas a convolução do sinal de entrada com os coeficientes de filtro.

Na prática, o número de coeficientes de filtro diferentes de zero é um número finito, em geral pequeno, comparado com o número de amostras do sinal. Desta forma, o número de produtos realizados na operação de convolução é também um número finito, e assim factível de implementação computacional. Desta forma a Equação (4.1) pode ser reduzida a

$$y_n = \sum_{k=-N}^N h_k x_{n-k} \quad (4.2)$$

Filtros não-recursivos são comuns em diversas áreas e por conseguinte adquiriram diferentes nomes, dentre eles podemos citar: Filtros de Resposta ao Impulso Finita - Filtros FIR (Finite Impulse Response), Filtros Transversais, Filtros de Linha de Atraso em Cascata, Filtros de Média Móvel.

A operação de convolução realizada pelos filtros pode ser vista como uma multiplicação ao se obter a representação da mesma no domínio da frequência. Para tanto é necessário obter a transformada de Fourier do sinal e do filtro. Como trata-se aqui os sinais no domínio discreto, é necessário utilizar a transformada discreta de Fourier:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}. \quad (4.3)$$

Esta notação permite uma transformação direta da transformada de Fourier para a transformada Z, para tanto basta substituir $e^{j\omega}$ por z :

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (4.4)$$

A operação de filtragem é representada no domínio da frequência por

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}). \quad (4.5)$$

Torna-se então uma multiplicação.

A resposta ao impulso de um filtro é obtida quando o sinal de entrada é tal que $x[0] = 1$ e todas as demais amostras são nulas. Para esse sinal de entrada, a saída será $y[n] = h[n]$. A resposta em frequência é a transformada da resposta ao impulso. A transformada de Fourier do impulso é $X(e^{j\omega}) \equiv 1$, obtém-se então, pela Equação (4.5), que a saída é $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})$.

4.1 Sinais e Filtros

Sinais são feitos de combinações de impulsos atrasados no tempo e filtros são operadores que realizam uma ponderação e uma combinação de atrasos sobre as amostras do sinal de entrada. Tratando-se de sinais discretos, é possível representar sinais e filtros por vetores e matrizes. O sinal é representado por:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \vdots \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

O atraso unitário pode ser representado pela matriz

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

O operador de atraso aplicado a um sinal de entrada x pode ser representado pela

multiplicação matricial

$$\mathbf{S}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ x(-2) \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Um atraso de n-ésima ordem pode ser representado pela multiplicação de n matrizes S acima. Como resultado obtém-se uma matriz S^n com a n-ésima diagonal abaixo da diagonal principal não nula.

$$S^n = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Um filtro digital poderá ser representado pela combinação de atrasos:

$$H = \sum h[n]S^n. \quad (4.10)$$

Os filtros são operadores lineares invariantes no tempo. Isto leva a seguinte propriedade

$$H(Sx) = S(Hx) \quad (4.11)$$

portanto, um atraso na entrada produz um atraso na saída.

4.2 Filtros de resposta ao impulso finita (FIR)

Os filtros FIR podem ser vistos como uma combinação linear de diferentes atrasos do sinal de entrada. A operação básica utilizada na filtragem por filtros FIR é o atraso. Dado um sinal $\mathbf{x} = (\dots, x[-1], x[0], x[1], \dots)$ representa-se por $\mathbf{S}\mathbf{x}$ a operação de atraso unitário realizada sobre o vetor \mathbf{x} . Um atraso de segunda ordem (dois instantes de tempo) poderá ser representado por $\mathbf{S}(\mathbf{S}\mathbf{x})$ ou, equivalentemente, $\mathbf{S}^2\mathbf{x}$. Um atraso de n-ésima ordem será

sendo representado pela combinação de dois operadores: identidade (atraso de ordem zero) e atraso unitário (atraso de primeira ordem)

$$\text{filtro média móvel} = \frac{1}{2}(\text{identidade}) + \frac{1}{2}(\text{atraso unitário}) \quad (4.15)$$

Em termos de matrizes, a equação $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$ pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ y[-1] \\ y[0] \\ y[1] \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ x[-1] \\ x[0] \\ x[1] \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

A diagonal principal corresponde ao termo de atraso nulo, já a sub-diagonal, logo abaixo, corresponde ao termo de atraso unitário. Note que o valor dos termos nas diagonais correspondem ao valor dos coeficientes do filtro. Obter a resposta ao impulso é uma tarefa simples, basta fazer o vetor \mathbf{x} igual ao impulso, ou seja, $x(0) = 1$ e as demais amostras nulas. A multiplicação matricial dará \mathbf{y} , que no caso será a resposta ao impulso do filtro de média móvel.

O coeficiente $h[0]$ que aparece na diagonal principal representa a parcela da saída correspondente a $h[0]x[n]$. O coeficiente $h[1]$ aparece na subdiagonal abaixo da diagonal principal e representa a outra parcela da resposta, correspondente a $h[1]x[n-1]$. A saída do filtro média móvel em um instante n qualquer será dada pela soma dessas duas parcelas $y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1]$. Se o filtro fosse de mais alta ordem, existiriam outras parcelas correspondentes aos coeficientes $h[2], h[3], \dots, h[N]$. Nesse caso a resposta do filtro, no instante n , seria dada por:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N h[k]x[n-k]. \quad (4.17)$$

Note que os termos em que k assume valores negativos foram excluídos, pois estamos aqui tratando de um filtro de resposta finita, um filtro causal, ou seja, a saída não pode vir antes da entrada.

4.3.1 Resposta em frequência

Para obter a resposta em frequência de um filtro deve-se ter como entrada apenas uma frequência, diferentemente de quando desejava-se obter a resposta ao impulso, em que a entrada era um sinal com todas as frequências. Escolhe-se então a entrada \mathbf{x} da seguinte

forma:

$$x[n] = e^{jn\omega}. \quad (4.18)$$

A princípio, esse vetor de entrada estende-se em todo o intervalo $-\infty < n < \infty$. A resposta do filtro a uma entrada da forma especificada na Equação (4.18) é dada por:

$$\begin{aligned} y[n] &= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots + h[N]x[n-N] \\ &= h[0]e^{jn\omega} + h[1]e^{j(n-1)\omega} + \dots + h[N]e^{j(n-N)\omega} \\ &= (h[0] + h[1]e^{-j\omega} + \dots + h[N]e^{-jN\omega})e^{jn\omega} \\ &= \lambda(\omega)e^{jn\omega}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Verificou-se que as exponenciais complexas são os autovetores dos filtros FIR e a resposta a uma frequência pura é também um sinal de frequência pura, já que os filtros são operadores lineares invariantes no tempo. Os autovalores associados $\lambda(\omega)$ dão a resposta em frequência $H(\omega)$ do filtro, $H(\omega) = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + \dots + h[N]e^{-jN\omega}$. A resposta em frequência do filtro pode ser vista como um somatório na seguinte forma:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-jn\omega}. \quad (4.20)$$

Verifica-se facilmente que $H(\omega + 2\pi) = H(\omega)$, adicionar 2π a H implica em adicionar um múltiplo inteiro de 2π a cada termo que o constitui. As funções seno, cosseno e a exponencial complexa são funções periódicas com período igual a 2π , portanto, a resposta em frequências dos filtros será também periódica, com período igual a 2π .

Para o exemplo do filtro de média móvel, tem-se apenas dois coeficientes, então, a Equação 4.19 pode ser resumida aos dois primeiros termos:

$$\begin{aligned} y[n] &= (h[0] + h[1]e^{-j\omega})e^{jn\omega} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)e^{jn\omega}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

A resposta em frequência do filtro é $H(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}$. Veja os valores que ela assume para algumas frequências. Para $\omega = 0$, $H = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Em $\omega = \pi$, $H = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos(\pi) - j\sin(\pi)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Frequências baixas, próximas de $\omega = 0$ terão respostas próximas de 1, para frequências altas, perto de $\omega = \pi$, a resposta será aproximadamente nula. São esses alguns indícios de que o filtro em questão é um filtro passa-baixas.

Para um melhor entendimento da resposta em frequência dos filtros separa-se a res-

posta em frequência destes em módulo $|H(\omega)|$ e fase $\phi(\omega)$.

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\phi(\omega)} \quad (4.22)$$

O filtro de média móvel tem resposta em frequência $H(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}$. Colocando-se em evidência o termo $e^{-j\omega/2}$ obtém-se:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2}(e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2})e^{-j\omega/2} \\ &= \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\omega/2}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

o que fornece a magnitude e a fase da resposta em frequência $H(\omega)$:

$$|H(\omega)| = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{e} \quad \phi(\omega) = -\frac{\omega}{2}. \quad (4.24)$$

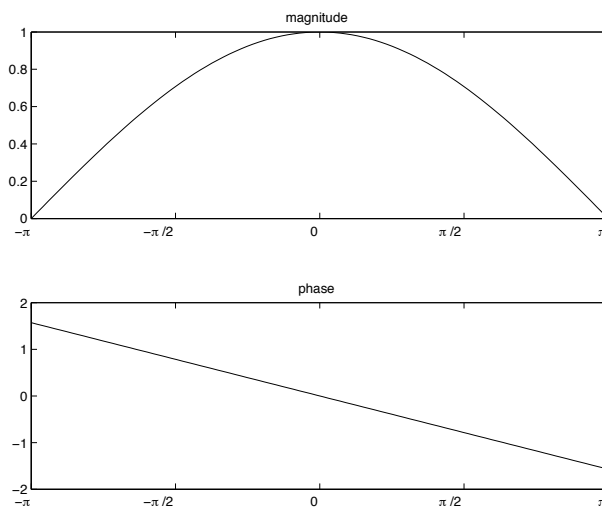


Figura 4.1: Módulo e fase da resposta em frequência de um filtro de média móvel.

Considere uma entrada senoidal de frequência $\omega = \pi$, $x[n] = e^{j\pi n} = (-1)^n$. Para esse sinal, o vetor será $\mathbf{x} = (\dots, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ e sua média móvel será zero em todos os instantes. Isto confirma o valor da resposta em frequência em $\omega = \pi$, $H(\pi) = 0$. De forma semelhante, é possível verificar que para uma entrada em que $\omega = 0$, $\mathbf{x} = (\dots, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ e o resultado da média móvel será constantemente igual a 1, confirmando a resposta em frequência $H(0) = 1$. O comportamento verificado do filtro de média móvel é equivalente a um filtro passa-baixas.

A fase do filtro em questão é linear, como é possível verificar na Equação (4.24), uma propriedade importante que alguns filtros possuem. Essa propriedade reflete o fato de que os coeficientes de filtros são simétricos em torno de um ponto diferente do zero. Se

os coeficientes de filtro forem simétricos em torno do zero, isto é, se $h[-n] = h[n]$, $\forall n$, então a resposta em frequência será real:

$$H(\omega) = h[0] + h[1](e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + \dots = h[0] + h[1](2\cos\omega) + \dots \quad (4.25)$$

Neste caso a fase do filtro será nula, $\phi = 0$. De forma similar, se os coeficientes forem anti-simétricos em torno do zero, $h[-n] = -h[n]$, $\forall n$, obtém-se um filtro cuja resposta será puramente imaginária e, neste caso, a fase será $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$

$$H(\omega) = h[0] + h[1](-e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + \dots = h[0] - 2jh[1](\sin\omega) + \dots \quad (4.26)$$

Para um filtro causal, os coeficientes podem ser simétricos ou antisimétricos, mas não em torno de $n = 0$, pois é necessário que os coeficientes para $n < 0$ sejam nulos. Filtros causais possuirão fase nula por terem seus coeficientes simétricos ou antisimétricos em relação a um ponto N

$$h[N - k] = h[N + k] \text{ (simétrico)} \quad (4.27)$$

$$h[N - k] = -h[N + k] \text{ (antisimétrico)} \quad (4.28)$$

4.4 Filtro passa-altas - diferença móvel

O filtro de diferença móvel é o filtro complementar ao filtro de média móvel (com coeficientes de mesmo sinal). No caso, diferença móvel remete a um média móvel em que os coeficientes possuem sinais diferentes. Enquanto o média móvel faz uma suavização do sinal, o diferença móvel ressalta as mudanças. Chama-se aqui de $H_{mm}(\omega)$ a resposta em frequência do filtro de média móvel e $H_{dm}(\omega)$ a resposta em frequência do filtro de diferença móvel, obtém-se então a seguinte relação entre eles:

$$|H_{mm}(\omega)|^2 + |H_{dm}(\omega)|^2 = 1. \quad (4.29)$$

Esta relação mostra que os dois filtros possuem resposta em frequência complementares. Além disso, $H_{dm}(\omega) = H_{mm}(\omega + \pi)$. Com esta relação, torna-se simples calcular os coeficientes do filtro de diferença móvel (h_{dm}) com base nos coeficientes do filtro de média móvel (h_{mm}):

$$h_{dm}[k] = h_{mm}[k]e^{jk\pi} = (-1)^k h_{mm}[k]. \quad (4.30)$$

Dados os coeficientes do filtro de média móvel $h[0] = h[1] = \frac{1}{2}$, calcula-se facilmente os coeficientes do filtro de diferença móvel utilizando a Equação (4.30). Obter-se-á assim

$h[0] = \frac{1}{2}$ e $h[1] = -\frac{1}{2}$. A saída do filtro obtido será dada por:

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]. \quad (4.31)$$

A Equação (4.31) acima nada mais é do que a convolução do sinal de entrada \mathbf{x} com a resposta ao impulso do filtro $\mathbf{h} = (\dots, 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \dots)$.

A convolução realizada pelo filtro pode ser representada na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ y[-1] \\ y[0] \\ y[1] \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & & & & \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ x[-1] \\ x[0] \\ x[1] \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Pode-se ver o filtro de diferença móvel como um operador linear invariante no tempo, sendo representado pela combinação dos operadores identidade e atraso unitário

$$\text{filtro diferença móvel} = \frac{1}{2}(\text{identidade}) - \frac{1}{2}(\text{atraso unitário}) = \frac{1}{2} \mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{S} \quad (4.33)$$

4.4.1 Resposta em Frequência

Dado o vetor de entrada $x[n] = e^{jn\omega}$, a saída o filtro será dada por:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}e^{jn\omega} - \frac{1}{2}e^{j(n-1)\omega} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-j\omega} \right) e^{jn\omega} \\ &= H(\omega)e^{jn\omega} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$H(\omega) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-j\omega}$ é a resposta em frequência do filtro. Colocando o fator $e^{-j\omega/2}$ em evidência, obtém-se

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})e^{-j\omega/2} \\ &= j \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\omega/2} \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j(\frac{\pi}{2}+\omega/2)} \\ &= |H(\omega)|e^{j\phi(\omega)} \end{aligned} \quad (4.35)$$

A resposta em frequência do filtro passa-altas em questão pode ser visualizada na Figura 4.2.

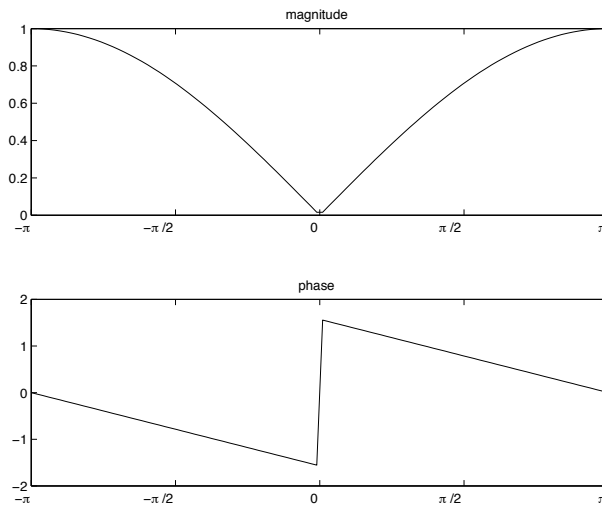


Figura 4.2: Módulo e fase da resposta em frequência de um filtro de diferença móvel.

4.4.2 Invertibilidade

Será possível recuperar o sinal original a partir de um sinal filtrado? Se for possível obter um filtro cuja função de transferência seja exatamente o inverso da função de transferência do primeiro, $H^{-1}(\omega) = 1/H(\omega)$, então será possível recuperar o sinal original. Note que, a inversa só existirá se $H(\omega) \neq 0$ para todas as frequências. Analisando as respostas em frequências dos filtros de média móvel e diferença móvel verifica-se que estes não satisfazem esse requisito em $\omega = \pi$ e $\omega = 0$, respectivamente. Tomando-se um sinal $x[n] = e^{j\omega n}$ e escolhendo $\omega = \pi$ obtém-se $\mathbf{x} = (\dots, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$. Este será totalmente apagado pelo filtro de média móvel e, assim, não poderá ser recuperado. Se agora $\omega = 0$ então $\mathbf{x} = (\dots, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$. De forma semelhante será também apagado pelo filtro de diferença móvel e não será possível recuperá-lo.

Apesar de ter sido mostrado que os filtros de média móvel e diferença móvel são não invertíveis, devido aos pontos em que a resposta em frequência é nula, é possível obter uma expressão para a inversa. Tomando como exemplo o filtro de média móvel $H(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}$, a inversa será dada por:

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = 2(1 - e^{j\omega} + e^{-2j\omega} - e^{-3j\omega} + \dots). \quad (4.36)$$

Os coeficientes $2, -2, 2, -2, \dots$ aparecerão nas subseqüentes diagonais inferiores da

matriz que representa o filtro:

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cdot & & & & \\ -2 & 2 & & & \\ 2 & -2 & 2 & & \\ -2 & 2 & -2 & 2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & & & & \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ & & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \mathbf{I}. \quad (4.37)$$

Note que a série dada na Equação (4.36) não converge para $\omega = \pi$, quando

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\pi}} = 2(1 + 1 + 1 + 1 + \dots) \quad (4.38)$$

O problema da inversa do filtro de média móvel está apenas em $\omega = \pi$. Se o sinal em questão não possuir componente neste ponto, não haverá problema algum em utilizar a inversa e assim reconstruir o sinal original.

Em geral as inversas dos filtros não são filtros de resposta ao impulso finita (FIR), pois $1/H(\omega)$ não é um polinômio. Para que a inversa de um filtro de tamanho finito seja também um outro filtro de tamanho finito, será necessário construir um banco de filtros, o que será tratado adiante.

4.5 Bancos de filtros

Bancos de filtros são construídos através de combinações de filtros complementares. Tratar-se-á aqui de bancos de filtros construídos a partir de filtro passa-baixas e filtros passa-altas. Cada estágio de um banco de filtros será constituído de um par de filtros complementares H_0 (filtro passa-baixas) e H_1 (filtro passa-altas). Desta forma, cada estágio é capaz de separar um sinal em bandas de freqüências. Em H_0x predominam as baixas freqüências e em H_1x as altas.

Note que o tamanho do sinal dobrou. Antes existia apenas x , mas agora H_0x e H_1x . A solução é efetuar uma reamostragem, reduzindo por um fator de 2 o número de amostras, de forma a manter o espaço necessário para alocação constante, sem perder informação. Para realizar a reamostragem, mantém-se apenas os termos de índice par:

$$(\downarrow 2)y = (\dots, y[-4], y[-2], y[0], y[2], y[4], \dots). \quad (4.39)$$

A reamostragem pode ser efetua pela multiplicação por uma matriz R , $y = Rx$ no

qual R é dado da seguinte forma

$$R = \begin{bmatrix} \cdot & & & & \\ 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & \cdot \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Após realizada a reamostragem ter-se-á metade dos componentes que tínhamos originalmente, para compensar a perda de energia que assim teríamos, multiplicamos então por $\sqrt{2}$.

$$\text{passa-baixas: } H_0(\omega) \text{ muda para } C(\omega) = \sqrt{2}H_0(\omega) \quad (4.41)$$

$$\text{passa-altas: } H_1(\omega) \text{ muda para } D(\omega) = \sqrt{2}H_1(\omega) \quad (4.42)$$

A operação realizada por um estágio do banco de filtros pode ser representada pela multiplicação

$$\begin{bmatrix} L \\ B \end{bmatrix} x, \quad (4.43)$$

onde $L = RC$ e $B = RD$. A matriz resultante é inversível, sendo a inversa dada pela transposta

$$\begin{bmatrix} L \\ B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} L^T & B^T \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

O processo de síntese pode ser feito utilizando-se a inversa, a transposta da matriz de análise.

A representação esquemática do análise e da síntese são ilustradas nas figuras 4.3 e 4.4, nas quais os operadores de *upsampling* e *downsampling* por um fator de 2 são denotados por $\uparrow 2$ e $\downarrow 2$, respectivamente.

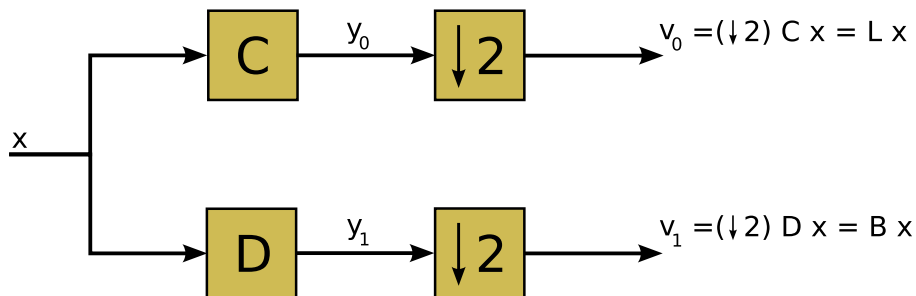


Figura 4.3: Representação esquemática da análise realizada por um banco de filtros de dois canais.

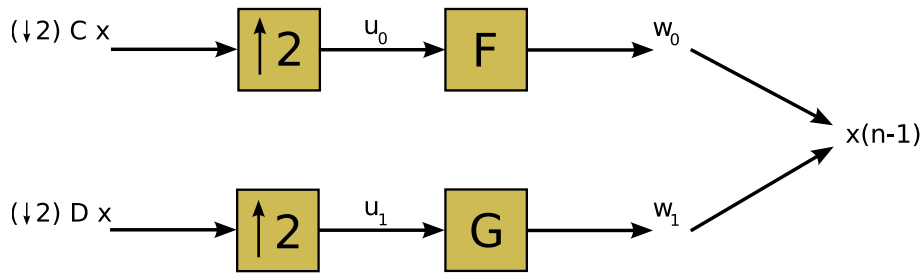


Figura 4.4: Representação esquemática da síntese realizada por um banco de filtros de dois canais.

4.6 Representação de um sinal discreto através da transformada de Fourier

A representação em frequência de um sinal discreto é por diversas vezes vantajosa. Uma seqüência pode ser representada pela integral de Fourier da seguinte forma

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.45)$$

na qual

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}. \quad (4.46)$$

A Equação (4.45) diz que a seqüência $x[n]$ é uma sobreposição de infinitas exponenciais complexas infinitesimais da seguinte forma

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.47)$$

onde ω varia dentro de um intervalo de tamanho 2π e $X(e^{j\omega})$ determina a quantidade relativa em que cada exponencial complexa está presente em $x[n]$. Note que os limites estabelecidos pela integral na Equação (4.45) não têm que ser necessariamente esses. Os limites de integração em (4.45) podem ser quaisquer, desde que o comprimento do intervalo de integração seja igual a 2π .

A Equação (4.46) assume a forma de uma série de Fourier para representar uma função contínua $X(e^{j\omega})$. Já a Equação (4.45) expressa os valores de $x(n)$ em termos de funções periódicas $X(e^{j\omega})$, da mesma forma que se faz para obter os coeficientes de uma série de Fourier. Devido às diversas propriedades da transformada de Fourier é interessante ver a equivalência entre a representação por uma série de Fourier de funções contínuas e periódicas (Equação (4.46)) e a representação através da transformada de Fourier de sinais discretos (Equação (4.45)).

Deve-se primeiramente mostrar a equivalência entre as equações (4.45) e (4.46). Para

demonstrar que a Equação (4.45) é a inversa da Equação (4.46), deve-se encontrar $X(e^{j\omega})$ utilizando (4.46) e então substituir o resultado em (4.45):

$$\begin{aligned}\hat{x}[n] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega \right).\end{aligned}\quad (4.48)$$

A expressão entre parênteses é

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \begin{cases} 1, & m = n \\ \frac{\text{sen}\pi[n-m]}{\pi[n-m]} = 0, & m \neq n \end{cases}\quad (4.49)$$

e então

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \sqrt{2\pi} \delta[n-m] = \sqrt{2\pi} x[n].\quad (4.50)$$

Determinar quais sinais podem ser representados da forma da Equação (4.45) é equivalente a determinar as condições de convergência da série na Equação (4.46), ou seja, é necessário determinar as condições sobre os termos da série de tal forma que $|X(e^{j\omega})| < \infty$ para todo ω . Para determinar as condições necessárias para a convergência, faz-se

$$\begin{aligned}|X(e^{j\omega})| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{j\omega n} \right| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |e^{j\omega n}| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty.\end{aligned}\quad (4.51)$$

Então, a condição suficiente é que $x[n]$ seja absolutamente somável para que $X(e^{j\omega})$ exista.

*To see a world in a grain of sand
and heaven in a wild flower
Hold infinity in the palm of your hand
and eternity in an hour*

William Blake, To See a World...

5

Fundamentos de wavelets

5.1 Introdução

“Nos últimos anos, alguns matemáticos acostumados à abstração da pesquisa pura têm sujado suas mãos – com entusiasmo – em uma surpreendente gama de projetos práticos. O que essas tarefas díspares possuem em comum é uma nova linguagem matemática, o seu alfabeto consistindo-se de ondulações chamadas wavelets, apropriadamente estiradas, comprimidas ou deslocadas.

Uma variedade de informações – sua voz, sua impressão digital, uma fotografia, uma raio-x pedido pelo médico, sinais de rádio do espaço sideral, ondas sísmicas – podem ser traduzidas nesta nova linguagem, que emergiu independentemente em diversas áreas; na verdade, apenas recentemente foram entendidas como uma mesma linguagem. Em vários casos, essa transformação em wavelets torna-o mais fácil de ser transmitido, comprimido e analisado ou de se extrair informações apesar do ‘ruído’ envolvente – e até mesmo a fazer cálculos mais rápidos.” (Hubbard, 1998)

As wavelets surgem como uma nova forma de ver o mundo, onde as representações são feitas em diferentes escalas e é possível escolher a relação de compromisso desejada entre a resolução temporal e em frequência. Com a transformada wavelet torna-se possível arbitrar dentre diversas formas de representação no domínio tempo-frequência. Os

diferentes níveis de detalhes em cada representação constituem informações contidas em diferentes bandas de frequências, de forma que a análise em resoluções múltiplas é uma forma de seccionar o espaço em diversas faixas de frequências não sobrepostas. É possível assim segregar informações de diferentes faixas espectrais. Todas essas propriedades da análise wavelet nascem naturalmente decorrente da relação de escala que satisfazem as funções de base.

Uma contribuição das wavelets, como disse Farge, é que elas “forçam as pessoas a pensarem sobre o que realmente é a transformada de Fourier, forçam-nos a pensar que quando escolhemos um tipo de análise estamos na verdade misturando o sinal e as funções utilizadas na análise. Geralmente, quando se usa a mesma técnica por várias gerações científicas, tornamo-nos cegos a elas. Uma nova ferramenta como as wavelets forçam-nos a reconsiderar o problema desde o seu princípio.”

As wavelets são um produto da colaboração de várias áreas, desde a matemática e física puras, até engenharia e processamento de sinais. Várias pesquisas independentes nessas áreas buscavam objetivos semelhantes, apesar de utilizarem abordagens diferentes, buscavam novas formas de representar sinais no domínio tempo-frequência. As diversas linhas de pesquisa convergiram para um ponto no final da década de 80, sendo então formalizada a teoria de wavelets. A unificação de todos os pensamentos tornou-se um fator primordial para a subsequente popularidade das wavelets, impulsionando assim novas pesquisas na área.

A teoria é muito extensa, não sendo possível em um único texto fornecer todas as informações. Diversos livros existem sobre wavelets e suas aplicações (Daubechies, 1992; Meyer, 1992; Mallat, 1999; Vetterli e Kovacevic, 1995; Strang e Nguyen, 1996; Gomes e Velho, 1999), e muito mais ainda textos de conferências e jornais. Infelizmente são poucos os textos originalmente escritos ou traduzidos para o português, dois destes são (Gomes, Velho, e Goldenstein, 1997; de Lima, 2006). A maioria dos textos é dedicada a um público que já possua algum conhecimento sobre o assunto e mesmo os textos introdutórios assumem uma maturidade e dedicação do leitor.

Wavelets são úteis em várias aplicações, como análise e reconstrução de sons (Kronland-Martinet, Morlet, e Grossmann, 1988), tendo também levado ao desenvolvimento de um novo algoritmo, com várias características atrativas, de decomposição da informação do sinal visual (Mallat, 1989a). Análise de sinais sísmicos, sinais biomédicos, modelagem geométrica, reconhecimento e síntese de fala, redução de ruído e compressão, são apenas algumas das aplicações para as wavelets.

5.2 Definição

As wavelets são funções $\psi_{s,u} \in L^2(\mathbb{R})$ geradas a partir de dilatações s e translações u de uma função ψ , chamada wavelet mãe, tais que a família $\{\psi_{s,u}\}_{s,u \in \mathbb{R}}$ constitui uma base para o $L^2(\mathbb{R})$. Além disso, as funções wavelets devem possuir momento de ordem zero nulo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (5.1)$$

Note que o fator de normalização $|s|^{\frac{1}{2}}$ é escolhido de forma que $\|\psi_{s,u}\| = \|\psi\|$ para todo s e u . Assume-se então $\|\psi\| = 1$. A função ψ é chamada “wavelet mãe”, pois é a partir dela que é gerada uma família de wavelets, através da transformação dada na Equação (??).

As funções wavelets mais importantes possuem suporte compacto¹ ou decaem exponencialmente a zero quando $t \rightarrow \pm\infty$. Isto significa que as wavelets são funções que possuem uma boa localização no tempo, contribuem localmente na análise de funções, ao contrário do que ocorre nas funções de base da análise de Fourier (seno e cosseno), que são não nulas em todo intervalo de definição e, portanto, contribuem globalmente.

Deseja-se que a família de funções $\{\psi_{s,u}\}$ forme um sistema ortonormal completo para o subespaço $L^2(\mathbb{R})$, isto significa que uma função qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser representada em termos das funções $\psi_{s,u}$. Dependendo da aplicação, é possível escolher diferentes famílias de wavelets. Por exemplo, escolhe-se parâmetros s e u que variem continuamente em $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A TWC de f pode ser representada por:

$$W_c f(s, u) = \langle \psi_{s,u}, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \quad (5.2)$$

correlacionando f com o átomo wavelet $W_c f$.

Se ψ satisfizer a seguinte condição

$$\int |\omega|^{-1} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty, \quad (5.3)$$

onde $\widehat{\psi}$ é a transformada de Fourier de ψ ,

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(t) e^{j\omega t} dt, \quad (5.4)$$

W_c é então uma isometria² de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$. O mapeamento W_c é chamado

¹O suporte da função, intervalo em que esta assume valores diferentes de zero, é um conjunto compacto. Um subconjunto S de um espaço topológico X será compacto quando qualquer recobrimento aberto de S admite um subrecobrimento finito de S . Um suporte compacto nos interessa apenas quando o domínio for limitado.

²Isometria é um mapeamento bijetivo entre dois espaços métricos que preserva as distâncias. Seja

“transformada contínua de wavelet” (Grossmann e Morlet, 1984; Grossmann, Morlet, e Paul, 1985, 1986). Nesta formulação, a transformada contínua de wavelet é semelhante à “representação de estado coerente afim” da mecânica quântica (Aslaksen e Klauder, 1968; Paul, 1984). A Equação (5.3) é chamada condição de admissibilidade. Uma primeira vista sobre esta revela que ψ deve ser tal que $\widehat{\psi}(0) = 0$, ou, equivalentemente, $\int \psi(t)dt = 0$ (ψ possui momento de ordem zero nulo). Por razões práticas, considera-se que ψ decai suficientemente, portanto, a condição (5.3) torna-se equivalente a escolher ψ com momento de ordem zero nulo (5.1).

Para outras aplicações, incluindo análise de sinais, deseja-se restringir os valores dos parâmetros s e u em (??) a um subconjunto discreto. Fixa-se então o passo de dilatação $s_0 > 1$ e o passo de translação $u_0 \neq 0$. A família de wavelets fica então, para $j, k \in \mathbb{Z}$,

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j}t - ku_0), \quad (5.5)$$

o que corresponde a escolher $s = s_0^j$ e $u = ku_0 s_0^j$, o que mostra que o parâmetro de translação u depende do parâmetro de dilatação s . Para valores grandes de j , o fator de dilatação é grande e conseqüentemente a função $\psi_{j,\cdot}$ torna-se bastante espalhada e o passo de translação torna-se subseqüentemente menor ($u_0 s_0^j$), adaptando-se ao novo tamanho da função dilatada. Para valores de j negativos ocorre o oposto, a função $\psi_{j,\cdot}$ fica bem concentrada e o passo de translação torna-se menor.

A transformada de wavelet discreta (W_d) está associada a wavelet discreta em (5.5). Ela mapeia uma função f em uma seqüência indexada em \mathbb{Z}^2 ,

$$(W_d f)_{j,k} = \langle \psi_{j,k}, f \rangle = s_0^{-j/2} \int f(t) \psi^*(s_0^{-j}t - ku_0) dt \quad (5.6)$$

Se ψ for admissível (satisfizer uma condição semelhante à condição (5.3), já que trata-se agora do caso discreto) e ψ possuir um decaimento suficiente, então, W_d é um mapeamento de $L^2(\mathbb{R})$ em $l^2(\mathbb{Z})$. Em geral, W_d não possui uma inversa limitada em todo domínio, mas se tiver, isto é, se para algum $A > 0$, $B < \infty$,

$$A \|f\|^2 < \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_{j,k}, f \rangle|^2 < B \|f\|^2, \quad (5.7)$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$, então o conjunto $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ é chamado *frame*. Nesta situação é possível construir algoritmos numéricos estáveis para reconstruir f a partir de seus

T o mapeamento e $d(\cdot, \cdot)$ a função de distância, então $d(T(f), T(g)) = d(f, g)$. Isometrias são as vezes chamadas de Transformações Congruentes.

coeficientes wavelet $\langle \psi_{j,k}, f \rangle$. Em particular,

$$f = \frac{2}{A+B} \sum_{j,k} \langle \psi_{j,k}, f \rangle \psi_{j,k} + R \quad (5.8)$$

onde o resto R é tal que

$$\|R\| \leq O\left(\frac{B}{A} - 1\right) \|f\|. \quad (5.9)$$

Para frames em que $A = B$, chamados frames estreitos, teremos um resto $R = 0$. Para valores de A e B tais que B/A está próximo de 1, o termo de erro poderá ser omitido, este é o caso de decomposição e reconstrução de sinais musicais e outros sons, como feito por [Kronland-Martinet et al. \(1988\)](#).

Se os $\psi_{j,k}$ são normalizados ($\|\psi_{j,k}\| = 1$), a redundância é medida pelos limites do frame A e B . Quando os vetores do frame forem linearmente independentes teremos $A \leq 1 \leq B$. Neste caso o erro só será nulo quando a igualdade for válida, ou seja, quando os vetores do frame forem ortonormais.

5.3 Medida tempo-freqüência

Dado um sinal $f(t)$ (considerando-se t uma variável contínua), em várias aplicações, ter-se-á um maior interesse no seu conteúdo em freqüência e, ainda mais, na sua localização no tempo. Isso é similar a uma representação musical, em que as notas definem freqüências diferentes, estão localizadas em instantes de tempos diferentes e possuem durações diferentes. A transformada padrão, a de Fourier,

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (5.10)$$

dá uma representação em freqüência de f , mas a informação contendo a localização no tempo não pode ser vista nesta forma. Pode-se obter uma localização temporal tomando janelas do sinal f , de forma a obter apenas uma fatia bem localizada do sinal f e, posteriormente, aplicando a transformada de Fourier:

$$(T^{win} f)(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t - \tau) e^{-j\omega t} dt. \quad (5.11)$$

Esta é a transformada de Fourier em janelas, a forma mais tradicional de análise tempo-freqüência. A forma mais usual deste tipo de análise é versão discreta desta, aquela na qual os parâmetros τ e ω são regularmente espaçados da forma: $\tau = n\tau_0$ e $\omega = m\omega_0$, onde

m e n pertencem a \mathbb{Z} e, $\omega_0, \tau_0 > 0$ são fixos. A Equação (5.11) fica então na forma

$$(T_{m,n}^{win} f)(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t - n\tau_0)e^{-jm\omega_0 t} dt. \quad (5.12)$$

Para valores de n fixos, $T_{m,n}^{win}(f)$ corresponde aos coeficientes de Fourier de $f(\cdot)g(\cdot - n\tau_0)$. Se g possuir suporte compacto, então, uma escolha apropriada de ω_0 garante que os coeficientes de Fourier $T_{m,n}^{win}(f)$ são suficientes para caracterizar e, se necessário, reconstruir $f(\cdot)g(\cdot - n\tau_0)$. Mudanças em n acarretam deslocamentos de τ_0 na fatia de f que se está considerando, é possível então reconstruir todo o sinal f a partir de $T_{m,n}^{win}(f)$.

As transformadas wavelet descritas nas equações (5.2) e (5.6) (contínua e discreta) fornecem uma representação tempo-freqüência similar àquela fornecida pelas equações (5.11) e (5.12), respectivamente. Note que, em ambos os casos, representados nas equações (5.2) e (5.11), toma-se o produto interno entre f e uma família de funções, $\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi(\frac{t-u}{s})$ na Equação (5.2) e $g_{\omega,\tau}(t) = g(t - \tau)e^{j\omega t}$ na Equação (5.11).

A transformada de Fourier, como definida na equação (5.4), correlaciona f com $\psi_{s,u}$. Utilizando o teorema de Parseval (veja Apêndice A) pode-se escrever a integral no tempo como uma integral na freqüência:

$$W_c f(s, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_{s,u}^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\hat{\psi}_{s,u}^*(\omega)d\omega. \quad (5.13)$$

Assim como a transformada de Fourier com janelas, a transformada wavelet é capaz de medir as variações no domínio do tempo-freqüência dos componentes espectrais de um sinal, mas a resolução tempo-freqüência é diferente.

Os coeficientes wavelet $W_c f(s, u)$ dependem não apenas de f e $\hat{f}(\omega)$, mas da região tempo-freqüência em que a energia da função $\psi_{s,u}$ e $\hat{\psi}_{s,u}$ está concentrada. As wavelets em que u estiver próximo de t terão uma maior contribuição em t .

A diferença entre a transformada wavelet e a transformada de Fourier com janela reside na forma das funções de análise $g_{\omega,\tau}$ e $\psi_{s,u}$. As funções $g_{\omega,\tau}$ consistem em envelopes deslocados no tempo de τ e “preenchidos” por oscilações de altas freqüências. Todos os envelopes descritos por $g_{\omega,\tau}$ possuem a mesma largura. Em contraposição, as wavelets $\psi_{s,u}$ possuem uma largura adaptável às freqüências constituintes. Quando é constituída por altas freqüências, a wavelet é bem estreita, já para baixas freqüências a wavelet será larga. Desta forma, a transformada wavelet é superior à transformada de Fourier com janelas quando estamos interessados em analisar fenômenos de curta duração, tais como sinais transientes ou singularidades em funções.

A transformada de Fourier de $\psi_{s,u}$, que no tempo está deslocada de u e dilatada de s ,

pode ser expressa em função da transformada de ψ :

$$\widehat{\psi}_{s,u}(\omega) = e^{-j\omega u} \sqrt{s} \widehat{\psi}(s\omega) \quad (5.14)$$

Verifica-se pela equação acima, que uma translação no tempo de uma wavelet implica apenas na mudança de sua fase. Já uma compressão ou dilatação no domínio do tempo, implica em uma dilatação ou compressão (respectivamente), pelo fator inverso, no domínio da freqüência.

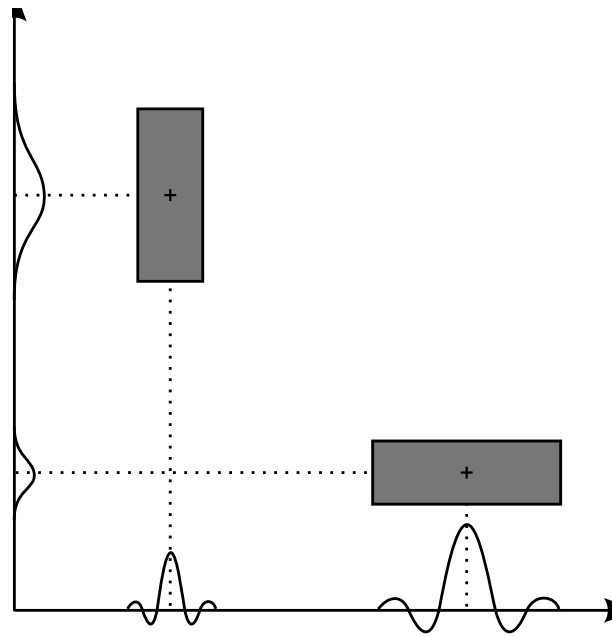


Figura 5.1: Caixas Tempo-Freqüência.

O princípio da incerteza de Heisenberg estabelece que um par de variáveis observáveis não pode ser determinado com qualquer precisão desejada para ambas as variáveis. Existe um limite para o qual aumentar a precisão em uma variável implica em diminuir a precisão na outra. Este limite é estabelecido pela seguinte relação entre as variâncias das variáveis

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4}. \quad (5.15)$$

Esta relação está diretamente ligada à proporcionalidade inversa entre dilatações no tempo e na freqüência. As variâncias no tempo e freqüência definem caixas no plano tempo-freqüência, chamadas caixas de Heisenberg (veja Figura 5.1). É possível mostrar que o limite de $1/4$ será obtido para as funções gaussianas, ou seja, a melhor relação de precisão entre o par de variáveis se dá quando escolhe-se uma função gaussiana (veja o apêndice B para mais informações sobre o princípio de incerteza de Heisenberg).

Desejando-se analisar como a informação de uma função qualquer f está representada

no plano tempo-freqüência (t, ω) quando representada através de um átomo ϕ_γ , ao se tomar $\langle f, \phi_\gamma \rangle$ deve-se olhar para as caixas de Heisenberg, sendo que a localização e o tamanho de tais caixas dependem exclusivamente do espalhamento e disposição do átomo ϕ_γ no plano tempo-freqüência. Como

$$\|\phi_\gamma\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_\gamma(t)|^2 dt = 1, \quad (5.16)$$

é possível interpretar $|\phi_\gamma(t)|^2$ como uma densidade de probabilidade centrada em

$$u_\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} t |\phi_\gamma(t)|^2 dt. \quad (5.17)$$

O espalhamento de ϕ_γ em torno de u_γ é medida pela variância

$$\sigma_t^2(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - u_\gamma)^2 |\phi_\gamma(t)|^2 dt. \quad (5.18)$$

Pela identidade de Plancherel, Equação (??) (veja Apêndice ??) conclui-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \|\phi_\gamma\|^2$. Desta forma, a freqüência central de $\widehat{\phi}_\gamma$ é definida por

$$\xi_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\widehat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega, \quad (5.19)$$

e o espalhamento em torno de ξ_γ é dado por

$$\sigma_\omega^2(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \xi_\gamma)^2 |\widehat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega. \quad (5.20)$$

A caixa de Heisenberg centrada em (u_γ, ξ_γ) e com largura de $\sigma_t^2(\gamma)$ ao longo do eixo do tempo e $\sigma_\omega^2(\gamma)$ ao longo do eixo das freqüências representa a resolução tempo-freqüência do átomo ϕ_γ .

Considerando a transformada de Fourier, o átomo de Gabor é da seguinte forma

$$\phi_\gamma(t) = g_{\xi, u}(t) = e^{j\xi t} g(t - u), \quad (5.21)$$

uma função g transladada de u e modulada pela freqüência ξ (translação na freqüência). Verifica-se que o espalhamento em torno de u e ξ são ambos independentes de u e ξ , e, portanto, o tamanho da caixa de Heisenberg para o átomo de Gabor independe de sua localização no plano tempo-freqüência.

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - u) |g_{u, \xi}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |g(t)|^2 dt. \quad (5.22)$$

A transformada de Fourier de $g_{u,\xi}$ é dada por

$$\widehat{g}_{u,\xi}(\omega) = \widehat{g}(\omega - \xi)e^{-ju(\omega - \xi)}. \quad (5.23)$$

Esta é também uma função simétrica e real. A função $\widehat{g}_{u,\xi}$ está transladada em frequência de ξ . O espalhamento em torno de ξ é

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \xi)^2 |\widehat{g}_{u,\xi}(\omega)| d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\widehat{g}(\omega)| d\omega. \quad (5.24)$$

Mostra-se assim que tanto σ_t^2 , quanto σ_ω^2 são independentes de u e ξ . Desta forma, para qualquer u e ξ , $g_{u,\xi}$ corresponde a uma caixa de Heisenberg de área $\sigma_t \sigma_\omega$ e centrada em (u, ξ) . O tamanho da caixa é independente de (u, ξ) , o que significa que a transformada de Fourier em janelas (5.11), possui a mesma resolução no plano tempo-freqüência, as caixas de Heisenberg possuem tamanho constante, uma vez que o tamanho da largura da janela é fixo. Isso implica em uma precisão pré-determinada para o par tempo-freqüência, ditada pelo tamanho da janela escolhido. Além disso a precisão será a mesma em todos os instantes de tempo e em todas as freqüências.

Já as funções wavelets, devido às dilatações, geram-se caixas de Heisenberg de tamanhos variáveis. Diferentes escalas possuirão diferentes relações de precisão entre tempo e freqüência. Veja as figuras 5.2 e 5.3.

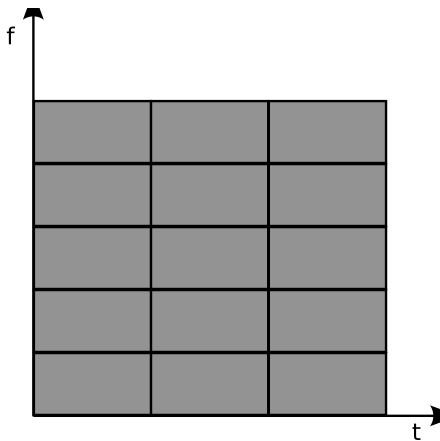


Figura 5.2: Caixas de Heisenberg para a transformada Fourier com janela.

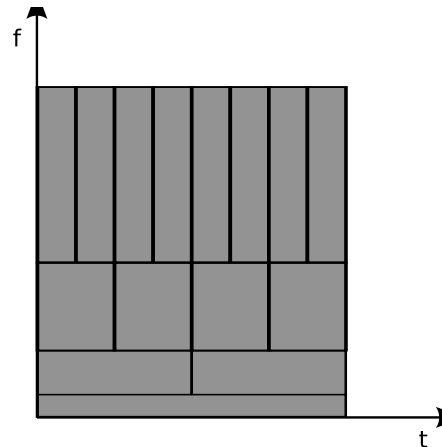


Figura 5.3: Caixas de Heisenberg para a transformada wavelet.

Experimentos em psicofísica mostram que existe uma relação entre a resolução temporal e em freqüência para a percepção de estímulos auditivos. A resolução em freqüência para estímulos de alta freqüência é menor do que a resolução em baixas freqüências. Verifica-se isso de forma simples apenas analisando a percepção auditiva aplicada a escalas musicas. Na escala temperada, a percepção da variação de um tom é equivalente, quer

em baixas ou em altas frequências, no entanto o espaçamento de um tom é muito maior nas altas frequências. Para analisar a resolução temporal, podemos verificar que é muito mais fácil distinguir a altura de um som breve de alta frequência, do que a altura de um som de baixa frequência. (Winckel, 1967)

Mostra-se que a cóclea humana realiza uma análise bem semelhante à análise wavelet. Os sons incidentes são transmitidos do ouvido externo, através do meato acústico, passando pelo tímpano e em seguida pela cadeia de ossículos, que constituem o ouvido médio. A vibração mecânica é transmitida para o interior da cóclea através do contato do estribo com a janela oval. As ondas de pressão propagam-se agora no meio líquido, o interior da cóclea. Imerso nesse meio encontra-se a membrana basilar, esta possui uma rigidez e largura que variam ao longo do comprimento da cóclea, sendo mais rígida e mais estreita na base, próximo à janela oval e menos rígida e mais larga no ápice, extremidade oposta à janela oval. Imaginando a cóclea estirada, introduz-se uma coordenada y ao longo de seu seguimento, ou seja, y será uma coordenada que fornecerá a distância de um certo ponto na membrana basilar até a janela oval (veja Figura 5.4). Experimentos e simulações numéricas mostram que a resposta na membrana basilar a uma excitação, que seja uma onda de pressão de uma única frequência, $f_\omega(t) = e^{j\omega t}$, possui a mesma frequência no tempo, mas também um envelope em y , $F_\omega(t, y) = e^{j\omega t} \phi_\omega(y)$. Sabe-se que para frequências ω acima de 500Hz pode-se dizer que a frequência varia logaritmicamente em relação à distância da janela oval, ou seja, a dependência de $\phi_\omega(y)$ em relação a ω corresponde a deslocamentos por fatores do tipo $\log \omega$. Isso quer dizer que $\phi_\omega(y)$ é bem próximo de $\phi(y - \log \omega)$. Para uma excitação qualquer f , $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$, que pode ser vista como uma sobreposição das respostas elementares, onde os vetores de entrada são funções senoidais, $e^{j\omega t}$, e a ponderação para cada frequência é dada por $\hat{f}(\omega)$. Segue então que a resposta a esta excitação qualquer, $F(t, y)$, será dada pela sobreposição das respostas elementares, ou seja, os vetores de entrada agora serão $F_\omega(t, y)$ e cada

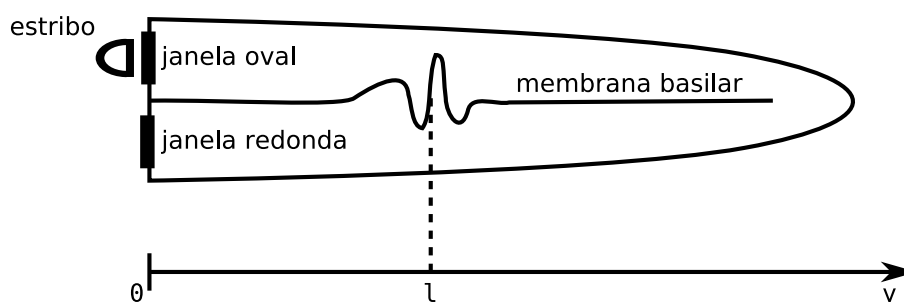


Figura 5.4: Estimulação em uma cóclea estirada.

frequência será ponderada por $\widehat{f}(\omega)$,

$$\begin{aligned} F(t, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widehat{f}(\omega) F_\omega(t, y) d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{j\omega t} \phi_\omega(y) \widehat{f}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{j\omega t} \phi(y - \log \omega) \widehat{f}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (5.25)$$

Fazendo a seguinte substituição $\widehat{\psi}(e^{-x}) = \sqrt{2\pi} \sqrt{|a|} \phi(x)$,

$$F(t, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{|a|}} \int e^{j\omega t} \widehat{\psi}(e^{-y+\log \omega}) \widehat{f}(\omega) d\omega \quad (5.26)$$

e posteriormente, $y = \log a$, obtém-se

$$\begin{aligned} F(t, \log a) &= \frac{1}{2\pi \sqrt{|a|}} \int e^{j\omega t} \widehat{\psi}(e^{-\log a + \log \omega}) \widehat{f}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{|a|}} \int e^{j\omega t} \widehat{\psi}\left(\frac{\omega}{a}\right) \widehat{f}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (5.27)$$

Utilizando as seguintes propriedades da transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{f(ct)\} = \frac{1}{|c|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right) \quad (5.28)$$

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \widehat{f}(\omega) e^{j\omega t_0} \quad (5.29)$$

juntamente com o teorema de Parseval, Equação (??), obtém-se:

$$F(t, \log a) = \sqrt{|a|} \int f(t') \psi(a(t' + t)) dt' \quad (5.30)$$

Substituindo agora $F(t, \log a)$ por $G(a, t)$,

$$G(a, t) = \sqrt{|a|} \int f(t') \psi(a(t' + t)) dt' \quad (5.31)$$

Escolhendo $a = 1/s$, $t = -u$ e como é necessário que $a > 0$,

$$G(s, u) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int f(t) \psi\left(\frac{t - u}{s}\right) dt \quad (5.32)$$

o que é exatamente a transformada wavelet conforme definido em (5.2). Note que o parâmetro de dilatação surge como consequência do deslocamento logarítmico em frequência

de ϕ_ω , que surge naturalmente na representação tonotópica na cóclea. A semelhança entre a análise realizada pela cóclea e a transformada wavelet sugere que tal método seja capaz de representar com maior fidelidade o processo auditivo e, assim, seria possível extrair informações do sinal acústico o mais próximas possível das que são extraídas pelo aparelho auditivo.

5.4 Bases ortonormais de wavelets: a wavelet de Haar e análise em resoluções múltiplas

Fazendo aqui a seguinte restrição: $s_0 = 2$ e $u_0 = 1$ na Equação 5.5, fica ela então na seguinte forma

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - k) \quad (5.33)$$

Existe assim ψ com boa localização tempo-freqüência, tal que a família de funções $\{\psi_{j,k}\}$ constitui uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$. O exemplo mais antigo (1910) para a função ψ é a função de Haar,

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.34)$$

Embora a wavelet de Haar não possua uma boa localização tempo-freqüência (pois a transformada de Fourier $\widehat{\psi}(\omega)$ decai da forma $|\omega|^{-1}$ quando $\omega \rightarrow \infty$) utilizar-se-á ela como ilustração por possuir uma forma fechada simples e, desta forma, é possível construir demonstrações de forma simples.

Inicialmente ilustra-se o efeito da translação e dilatação na função de Haar (veja as figuras 5.5, 5.6 e 5.7). O suporte de $\psi_{j,k}$ é $[2^j k, 2^j(k+1))$, segue então, que wavelets de Haar na mesma escala não se sobrepõem, quando $k \neq k'$, desta forma, $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle = \delta_{k,k'}$. Fixada a escala j e tomando $k \neq k'$, as wavelets de Haar serão ortogonais, pois seus suportes não são coincidentes. Para escalas diferentes, é possível obter wavelets com suportes que se sobrepõem. É fácil mostrar que para $j < j'$, o suporte de $\psi_{j,k}$ está completamente dentro de uma região onde $\psi_{j',k}$ é constante (veja as figuras 5.5 e 5.7). Neste caso, o produto interno entre as duas wavelets será proporcional à integral de ψ , que é zero. Desta forma mostra-se que wavelets em escalas diferentes são ortogonais, mesmo nos casos em que os suportes das funções se sobrepõem.

Considerá-se agora como uma função arbitrária pode ser representada em termos das wavelets de Haar. Uma primeira observação é que detalhes que sejam menores que metade do suporte da função de Haar não podem ser “enxergados” por essas funções. Detalhes com tamanho muito menor que 2^{-j} praticamente não são “enxergados” por uma wavelet

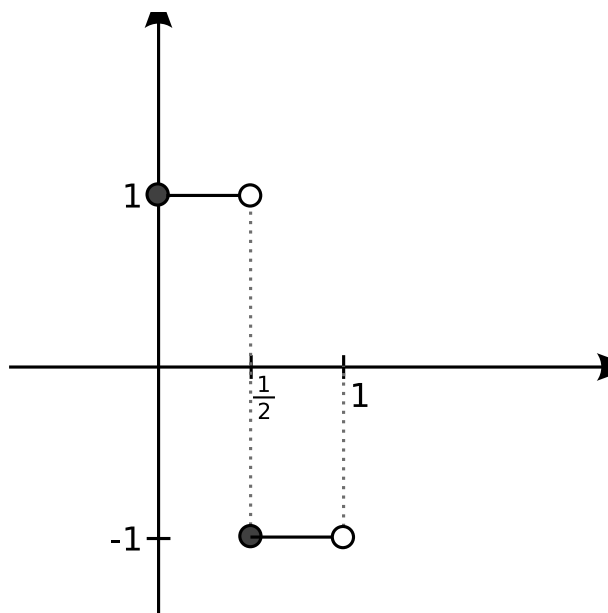


Figura 5.5: Wavelet de Haar.

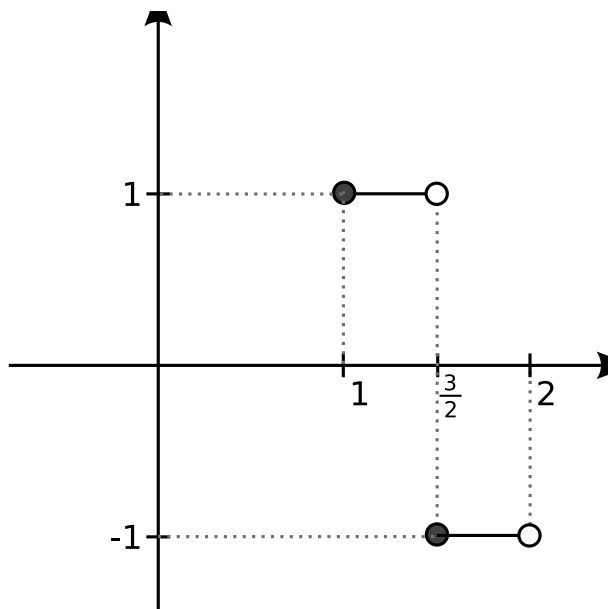
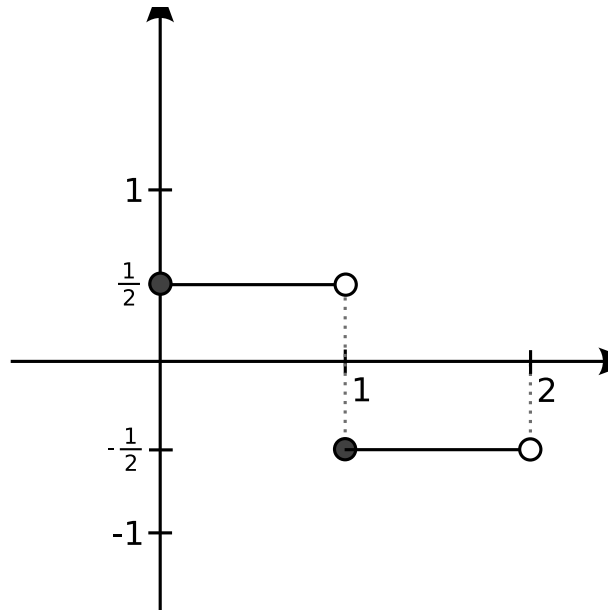


Figura 5.6: Gráfico de $\psi(x - 1)$.


 Figura 5.7: Gráfico de $\psi(x/2)$.

de Haar numa escala inferior a $j - 1$, da mesma forma, detalhes muito maiores que 2^{-j} também não serão “enxergados” por wavelets de Haar de escala superior a $j + 1$. As informações passíveis de serem representadas por wavelets em uma dada escala constituem uma faixa, de forma que podemos imaginar escalas subseqüentes como faixas adjacentes, compreendendo detalhes de diferentes tamanhos.

Tomando-se uma função f em $L^2(\mathbb{R})$, é possível representá-la com a precisão desejada por uma função constante por partes em intervalos da forma $[l2^{-j}, (l + 1)2^{-j}]$, bastando para tanto tomar j tão grande quanto se queira. Restringe-se então a função f de forma que esta tenha seu suporte no intervalo $[-2^{J_1}, 2^{J_1}]$ e seja constante por partes em intervalos $[l2^{-J_0}, (l + 1)2^{-J_0}]$. Chama-se então a função f , como definida anteriormente, de f^0 e o seu valor em cada intervalo em que ela é constante de f_l^0 . É possível agora decompor f^0 em duas partes $f^0 = f^1 + \delta^1$, no qual f^1 é uma aproximação de f^0 constante por partes em intervalos duas vezes maiores que o anterior, $[k2^{-J_0+1}, (k + 1)2^{-J_0+1}]$. Os valores constantes de f^1 , no intervalo citado anteriormente, são dados por f_k^1 . O valor de f_k^1 é dado pela média dos valores correspondentes em f^0 , $f_k^1 = \frac{1}{2}(f_{2k}^0 + f_{2k+1}^0)$. A função δ^1 é constante por partes em intervalos de mesmo tamanho que os de f^0 e os valores assumidos são dados por:

$$\delta_l^1 = f_l^0 - f_k^1 \quad (5.35)$$

$$\delta_{l+1}^1 = f_{l+1}^0 - f_k^1. \quad (5.36)$$

Como $l = 2k$,

$$\delta_{2k}^1 = f_{2k}^0 - f_k^1 \quad (5.37)$$

$$\delta_{2k+1}^1 = f_{2k+1}^0 - f_k^1. \quad (5.38)$$

Usando agora que $f_k^1 = \frac{1}{2}(f_l^0 + f_{l+1}^0)$,

$$\delta_{2k}^1 = f_{2k}^0 - f_k^1 = \frac{1}{2}(f_{2k}^0 - f_{2k+1}^0) \quad (5.39)$$

$$\delta_{2k+1}^1 = f_{2k+1}^0 - f_k^1 = \frac{1}{2}(f_{2k+1}^0 - f_{2k}^0) = -\delta_{2k}^1 \quad (5.40)$$

A função δ^1 é uma combinação linear de funções de Haar transladadas

$$\delta^1 = \sum_{l=-2^{J_1+J_0-1}+1}^{2^{J_1+J_0-1}} \delta_{2l}^1 \psi_{2l}^1(2^{J_0-1}x - l). \quad (5.41)$$

É possível então escrever f na seguinte forma:

$$f = f^0 = f^1 + \delta^1 = f^1 + \sum_l c_{-J_0+1,l} \psi_{-J_0+1,l}. \quad (5.42)$$

O processo de decomposição apresentado acima pode ser aplicado sucessivamente, de forma que f^1 poderá ser escrito como $f^1 = f^2 + \delta^2$, onde f^2 ainda possui suporte em $[-2^{J_1}, 2^{J_1}]$, e é constantes por partes em intervalos da forma $[k2^{-J_0+2}, (k+1)2^{-J_0+2})$.

$$f^1 = f^2 + \delta^2 = f^2 + \sum_l c_{-J_0+2,l} \psi_{-J_0+2,l} \quad (5.43)$$

Continuando o processo, até que por fim obtém-se

$$f = f^{J_0+M} + \sum_{m=-J_0+1}^M \sum_l c_{m,l} \psi_{m,l} \quad (5.44)$$

onde f^{J_0+M} é constante por partes em intervalos $[k2^{-J_0+M}, (k+1)2^{-J_0+M})$. Para mostrar que a aproximação de f converge para f no limite é necessário que o processo de decomposição continue expandindo os horizontes para fora do intervalo $[-2^{J_1}, 2^{J_1}]$.

$$f = f^{J_0+J_1+K} + \sum_{m=-J_0+1}^{J_1+K} \sum_l c_{m,l} \psi_{m,l} \quad (5.45)$$

onde o suporte de $f^{J_0+J_1+K}$ é $[-2^{J_1+K}, 2^{J_1+K}]$ e a função assume dois diferentes valores

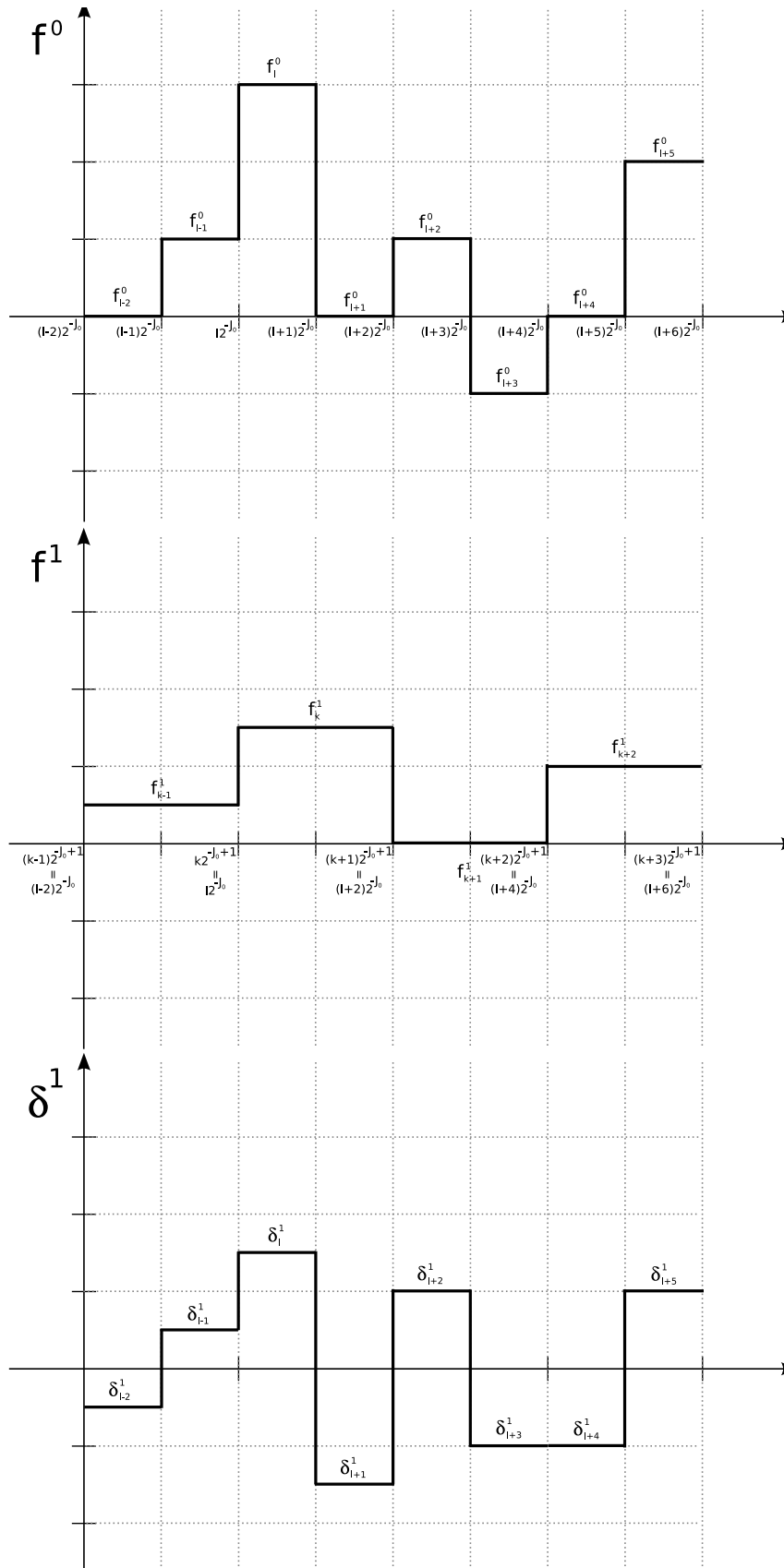


Figura 5.8: Função f^0 decomposta como $f^1 + \delta^1$.

$2^{-K} f_0^{J_0+J_1}$ e $2^{-K} f_{-1}^{J_0+J_1}$ nos intervalos $[0, 2^{J_1+K})$ e $[-2^{J_1+K}, 0)$, respectivamente.

$$f^{J_0+J_1+K}|_{[0, 2^{J_1+K})} = 2^{-K} f_0^{J_0+J_1} \quad \text{e} \quad f^{J_0+J_1+K}|_{[-2^{J_1+K}, 0)} = 2^{-K} f_{-1}^{J_0+J_1} \quad (5.46)$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{m=-J_0+1}^{J_1+K} \sum_l c_{m,l} \psi_{m,l}\|_{L^2}^2 &= \|f^{J_0+J_1+K} \dots\|_{L^2}^2 \\ &= 2^{K/2} 2^{J_1/2} (|f_0^{J_0+J_1}|^2 + |f_{-1}^{J_0+J_1}|^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (5.47)$$

pode ser feito arbitrariamente pequeno, bastando para tanto escolher K grande o suficiente. Mostrou-se então que f pode ser aproximado, com a precisão desejada, por uma combinação de wavelets de Haar.

O processo de decomposição mostrado acima pode ser visto como uma forma de se obter representações cada vez mais grosseiras (f_1, f_2, f_3, \dots) da função original f , sendo as informações (detalhes) perdidos a cada passo armazenadas em forma de wavelets ($\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$). O que construiu-se aqui, de forma intuitiva, foi uma análise em resoluções múltiplas, em que cada passo da decomposição é, na verdade, uma projeção feita sobre um subespaço de menor resolução, de forma que a seqüência de subespaços formada será uma seqüência encaixante. Além disso, as funções de base de um subespaço podem ser obtidas através de uma mudança de escala sobre as funções de base de outro subespaço. Mais sobre a análise em resoluções múltiplas será visto na Seção 5.5.

5.5 Análise em resoluções múltiplas

Um sinal pode ser visto como uma componente suave acrescido de flutuações, detalhes. A distinção entre o que é suave e o que são detalhes é feita de acordo com o nível de resolução empregado, isto é, uma escala a partir das quais os detalhes não podem mais ser distinguidos. Uma análise em resoluções múltiplas (ARM) é uma forma de representar uma função em diferentes resoluções. Tais representações são feitas na forma de projeções ortogonais sobre subespaços aproximantes $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$ de resoluções 2^{-j} . A projeção ortogonal de uma função f é a função $f^j \in V_j$ que minimiza $\|f - f^j\|$. Para uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$, as diferenças entre as aproximações f^j e f^{j+1} , nas resoluções 2^{-j} e $2^{-(j+1)}$, respectivamente, é dada pela soma parcial das wavelets $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$, como visto anteriormente (seção 5.4), o que nada mais é do que a projeção de f sobre o subespaço $W_j = \{f = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}, \sum_k d_{j,k} < \infty\}$. Os subespaços V_j formam uma seqüência encaixante tal que $V_{j+1} \subset V_j$ e ainda $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$, onde os subespaços W_{j+1} contêm a informação perdida ao se passar de um subespaço V_j para um subespaço

V_{j+1} (ao se diminuir a resolução por um fator de 2). Chama-se de funções wavelets as funções de base para os subespaços W_j e, de funções escala, aquelas que formam a base para os subespaços V_j .

Diz-se que há uma ARM quando as seguintes propriedades são satisfeitas para uma seqüência de subespaços $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ fechados de $L^2(\mathbb{R})$

$$\forall j \in \mathbf{Z}, V_{j+1} \subset V_j, \quad (5.48)$$

$$\forall (j, k) \in \mathbf{Z}^2, f \in V_j \Leftrightarrow f(\cdot - 2^j k) \in V_j, \quad (5.49)$$

$$\forall j \in \mathbf{Z}, f \in V_j \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0, \quad (5.50)$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \quad (5.51)$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \quad (5.52)$$

$$\exists \phi \in V_0 \text{ tal que } \phi_{0,k}(t) = \phi(t - k) \text{ constitui uma base ortonormal para } V_0. \quad (5.53)$$

A Equação (5.48) é a propriedade de causalidade na ARM, ela implica que toda a informação em um nível de resolução 2^{-j-1} está contida na resolução 2^{-j} e, portanto, apenas a versão de mais alta resolução é necessária para se obter uma representação mais grosseira do sinal original. A Equação (5.49) garante que os subespaços V_j sejam invariantes por translações múltiplas de 2^j . A propriedade (5.50) garante que mudanças de escala por fator de 2^j são capazes de mudar a resolução por um fator de 2^{-j} . Quando a resolução de representação tende a zero ($\lim_{j \rightarrow +\infty} 2^{-j} = 0$), todos os detalhes de f são perdidos e portanto para qualquer f obtém-se

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|P_{V_j} f\| = 0 \quad (5.54)$$

(propriedade (5.51)). Por outro lado, quando a resolução tende a infinito, ($\lim_{j \rightarrow -\infty} 2^{-j} = \infty$), a propriedade (5.52) garante que a aproximação da função f converge para a função f original

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|f - P_{V_j} f\| = 0. \quad (5.55)$$

Ou seja, o operador P_j tende à identidade quando $j \rightarrow -\infty$ e tende ao operador nulo quando $j \rightarrow +\infty$.

A propriedade (5.53) é, na verdade, um pouco mais forte que o necessário. Na verdade $\{\phi_{0,k}(t) = \phi(t - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ deve constituir uma base de Riesz (veja o apêndice D.1 para a definição). Isto garante a equivalência de energia, de tal forma que a expansão na base de Riesz seja numericamente estável. Existem $A, B > 0$ tais que qualquer $f \in V_0$ pode

ser decomposto univocamente da seguinte forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \phi(t - k) \quad (5.56)$$

sendo que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (5.57)$$

É possível mostrar que as famílias obtidas a partir de dilatações da base de Riesz de V_0 constituem também bases de Riesz para os subespaços V_j com os mesmos limites A e B em todas as escalas 2^j .

A seqüência de subespaços encaixantes é graficamente representada na Figura 5.9. Visualmente verifica-se a propriedade (5.48), assim como a $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$ e também a ortogonalidade entre os subespaços W_j ($W_j \perp W_{j'}$ quando $j \neq j'$) e entre W_j e $V_{j'}$ onde $j' \geq j$. Por indução, tem-se:

$$V_j = V_{j+1+J} \oplus \bigoplus_{n=j+1}^{j+1+J} W_n, \quad (5.58)$$

ou seja, um subespaço V_j qualquer pode ser decomposto em um subespaço de mais baixa resolução V_{j+1+J} mais uma seqüência de J subespaços W_n , com n variando de $j+1$ a $j+1+J$. Uma função f^j inicialmente representada em V^j pode ser decomposta como uma versão de baixa resolução f^{j+1+J} somada aos detalhes d^n correspondentes a cada subespaço W_n :

$$f^j = f^{j+1+J} + \sum_{n=j+1}^{j+1+J} d^n. \quad (5.59)$$

Retomando o exemplo da wavelet de Haar, visto na Seção 5.4, verifica-se facilmente que a coleção de espaços $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, sendo os espaços V_j gerados por funções constantes por partes em intervalos da forma $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$, onde $k \in \mathbb{Z}$, satisfaz as condições citadas nas equações (5.48) a (5.53), constituindo assim uma ARM para o espaço $L^2(\mathbb{R})$. A primeira condição (5.48) pode ser verificada apenas argumentando que funções constantes por partes em intervalos da forma $[k2^{j+1}, (k+1)2^{j+1}]$ são também constantes por partes em intervalos da forma $[k2^j, (k+1)2^j]$, ou seja, funções no espaço V_{j+1} podem ser escritas como uma combinação de funções do espaço V_j e, portanto, $V_{j+1} \subset V_j$. A condição de invariância por translação (5.49) é verificada pelo simples fato de que se uma função está em um subespaço V_j , de funções constantes por partes em intervalos $[k2^j, (k+1)2^j]$, então, translações desta função por fatores múltiplos de 2^j levarão a funções ainda constantes por partes em intervalos da mesma forma. Para verificar a Equação (5.50), basta notar que

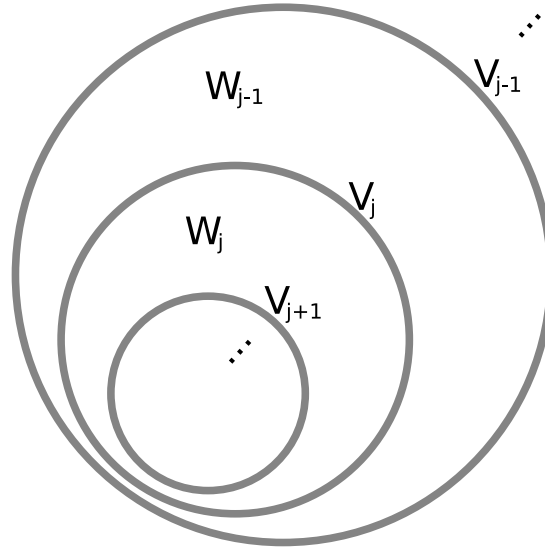


Figura 5.9: Seqüência de subespaços encaixantes.

se uma função é constante por partes em intervalos da forma $[k2^j, (k+1)2^j)$, então, uma compressão desta por um fator 2^j , levará a uma função constante por partes em intervalos da forma $[k, k+1)$, ou seja, a função estará agora em V_0 . Para demonstrar (5.51), basta notar que no limite $j \rightarrow +\infty$, V_j será um subespaço de funções constantes por partes em intervalos de tamanho tendendo ao infinito. Como a energia não pode ser infinita, a amplitude tende a zero e, portanto, apenas a função identicamente nula está no subespaço limite. É fácil também verificar que apenas a função identicamente nula está em todos os subespaços V_j . Tomando o limite na direção oposta, $j \rightarrow -\infty$, o subespaço obtido será de funções constantes por partes em intervalos infinitesimais, ou seja, qualquer função em $L^2(\mathbb{R})$ poderá ser representada. Fica assim demonstrado (5.52). Para demonstrar o último item (5.53), basta tomar a função ϕ tal que $\phi(t) = 1$ no intervalo $[0, 1)$ e $\phi(t) = 0$ fora deste intervalo. É fácil verificar que com esta escolha é possível construir uma base para V_0 , o espaço de funções constantes por partes em intervalos da forma $[k, k+1)$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

5.6 Algoritmos rápidos de decomposição e reconstrução

Pela ARM sabe-se que $V_j \subset V_{j-1}$ e, portanto, uma função em V_j pode ser escrita em termos de um conjunto de funções $\{\phi(2 \cdot -n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ que constitui uma base para V_{j-1} . Em particular, para $j = 0$,

$$\phi(t) = \sum_n h_n \phi_{-1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2t - n) \quad (5.60)$$

onde $h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle$.

De forma semelhante, como $W_j \subset V_{j-1}$, obtém-se, para o caso $j = 0$,

$$\psi(t) = \sum_n g_n \phi_{-1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_n g_n \phi(2t - n), \quad (5.61)$$

onde $g_n = \langle \psi, \phi_{-1,n} \rangle$.

Os coeficientes h_n e g_n são, respectivamente, os coeficientes de filtro relacionados à função escala e à função wavelet. Mostra-se adiante que esses coeficientes determinam completamente essas funções, ou seja, tudo o que é necessário para uma análise wavelet são os coeficientes de filtro. Apenas conhecê-los é suficiente para determinar o valor da função em qualquer ponto, com a precisão desejada, através de um algoritmo recursivo que pode ser visto, por exemplo, em (de Lima, 2006). Sabe-se ainda que os coeficientes g_n podem ser determinados a partir de h_n e vice-versa. Além disso, eles não podem assumir quaisquer valores, uma primeira restrição pode ser obtida, bastando para tanto integrar ambos os lados das equações (5.60) e (5.61) lembrando ainda que busca-se uma base ortonormal e, portanto, a norma L^2 das funções de base é unitária.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2t - n) \right|^2 dt \\ 1 &= \sum_n h_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\sqrt{2} \phi(2t - n)|^2 dt \\ 1 &= \sum_n h_n^2 \end{aligned} \quad (5.62)$$

Da mesma forma, para a Equação (5.61) obtém-se

$$1 = \sum_n g_n^2 \quad (5.63)$$

As funções escala e wavelet devem satisfazer as seguintes relações de escala

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k), \quad (5.64)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k). \quad (5.65)$$

Utilizando agora o resultado obtido em (5.60) e (5.61),

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2^{-j}2t - 2k - n)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^{-(j-1)/2} \sum_n h_n \phi(2^{-(j-1)}t - (2k + n)) \\
 &= \sum_n h_n \phi_{j-1, 2k+n}(t)
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

e de forma análoga

$$\psi_{j,k} = \sum_n g_n \phi_{j-1, 2k+n} \cdot \tag{5.67}$$

Isso mostra como uma função de base na escala j pode ser obtida a partir de funções de base na escala anterior $j - 1$. É possível também mostrar como é possível obter a representação de uma função na escala j utilizando, para tanto, a representação em $j - 1$. Suponha que uma função qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$ possa ser escrita na base V_j , então

$$P_{V_j} f = f^j = \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k}, \tag{5.68}$$

onde os coeficientes são dados por $a_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$. Utilizando a relação (5.66), reescreve-se os coeficiente $a_{j,k}$ na forma

$$\begin{aligned}
 a_{j,k} &= \langle f, \sum_n h_n \phi_{j-1, 2k+n} \rangle \\
 &= \sum_n \bar{h}_n \langle f, \phi_{j-1, 2k+n} \rangle \\
 &= \sum_n \bar{h}_n a_{j-1, 2k+n}
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

Todos os coeficientes da projeção de f em V_j podem ser obtidos a partir da convolução em (5.69) dos coeficientes da representação de f em V_{j-1} com os coeficientes de filtro h_k .

De maneira análoga, tomando-se $f^{j-1} = f^j + \delta^j$ onde f^j é a projeção sobre o subespaço V_j e δ^j a projeção sobre W_j ($V_{j-1} = V_j \oplus W_j$), é possível obter os coeficientes da representação de δ^j ($d_{j,k}$) em termos dos coeficientes $a_{j-1,k}$:

$$\delta^j = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k} \tag{5.70}$$

onde $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$. Utilizando (5.67), obtém-se

$$\begin{aligned}
 d_{j,k} &= \langle f, \sum_n g_n \phi_{j-1, 2k+n} \rangle \\
 &= \sum_n \bar{g}_n \langle f, \phi_{j-1, 2k+n} \rangle \\
 &= \sum_n \bar{g}_n a_{j-1, 2k+n}.
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

Constrói-se desta maneira um algoritmo rápido para passar de uma escala para outra subsequente. Para tanto é necessário apenas conhecermos os coeficientes $a_{j,n}$ que representam a função f numa dada escala j e também os coeficientes de filtro h_k da função escala associada à análise. De forma semelhante obtemos uma maneira simples de obter os detalhes que seriam perdidos ao se passar de uma escala de maior para uma de menor resolução, sendo agora necessários os coeficientes de filtro g_k da wavelet associada.

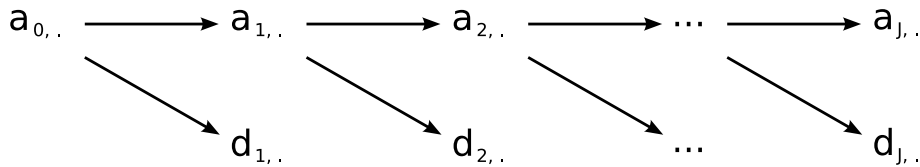


Figura 5.10: Algoritmo rápido de decomposição.

Seja f uma função qualquer em $L^2(\mathbb{R})$, é possível escolher um subespaço V_{j_0} de forma que o erro cometido na representação de f nesse subespaço, $\|f - f^{j_0}\|$, seja tão pequeno quanto se queira (onde $f^{j_0} = P_{V_{j_0}} f$, a projeção de f em V_{j_0}). Sem perda alguma de generalidade, escolhe-se $j_0 = 0$. Seja a família $\{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ uma base ortonormal para V_0 , escreve-se f^0 em termos das funções da base:

$$f^0 = \sum_k a_{0,k} \phi_{0,k} \tag{5.72}$$

em que os coeficientes $a_{0,k}$ são dados por $a_{0,k} = \langle f, \phi_{0,k} \rangle$.

Talvez seja interessante obter uma versão de baixa resolução de f^0 . Se quiser uma perda de resolução por um fator de 2, basta tomar agora a projeção de f no subespaço V_1 . A projeção de f em V_1 é dada

$$f^1 = P_{V_1} f = \sum_k a_{1,k} \phi_{1,k} \tag{5.73}$$

Da mesma forma que anteriormente, os coeficientes $a_{1,k}$ são dados por $a_{1,k} = \langle f, \phi_{1,k} \rangle$.

Como $V_1 \subset V_0$, escreve-se $\phi_{1,k}$ em termos das funções $\phi_{0,2n+k}$, como visto em (5.66).

$$\phi_{1,k} = \sum_k h_k \phi_{0,2n+k} \tag{5.74}$$

Desta forma, os coeficientes $a_{1,k}$ podem ser dados em função dos $a_{0,2n+k}$, como demonstrado na Equação (5.69)

$$a_{1,n} = \sum_k \bar{h}_k a_{0,2n+k} \tag{5.75}$$

De forma semelhante será possível obter os detalhes que seriam perdidos ao se passar

de uma representação de alta para uma de baixa resolução. Seja $f^0 = f^1 + \delta^1$, onde δ^1 representa os detalhes perdidos ao se passar de V_0 para V_1 ,

$$\delta^1 = \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k} \quad (5.76)$$

onde $d_{1,k} = \langle f, \psi_{1,k} \rangle$.

As funções $\psi_{1,k}$ podem ser escritas como uma combinação dos vetores da base V_0 , então

$$\psi_{1,n} = \sum_k g_k \phi_{0,2n+k} \quad e \quad (5.77)$$

$$d_{1,n} = \sum_k \bar{g}_k a_{0,2n+k} \quad (5.78)$$

Mostrou-se acima uma forma de obter os coeficientes de escala e wavelet para a decomposição, passando de uma escala mais fina, para uma mais grosseira. Deseja-se ser capaz de reconstruir o sinal original, utilizando para tanto a versão de baixa resolução e os detalhes perdidos. Ver-se-á então como é possível obter o algoritmo de reconstrução. Tomando a projeção do sinal f sobre o subespaço V_{j-1} . Como $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ pode-se escrever a projeção da seguinte forma

$$\begin{aligned} P_{V_{j-1}} f &= P_{V_j} f + P_{W_j} f \\ \sum_n a_{j-1,n} \phi_{j-1,n} &= \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k} + \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k} \end{aligned} \quad (5.79)$$

Os coeficientes $a_{j-1,n}$ são obtidos por

$$\begin{aligned} a_{j-1,n} &= \langle P_{V_{j-1}} f, \phi_{j-1,n} \rangle \\ &= \langle (P_{V_j} f + P_{W_j} f), \phi_{j-1,n} \rangle \\ &= \left\langle \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \right\rangle + \left\langle \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \right\rangle \\ &= \sum_k a_{j,k} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle + \sum_k d_{j,k} \langle \psi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle \\ &= \sum_k a_{j,k} h_{n-2k} + \sum_k d_{j,k} g_{n-2k} \\ &= \sum_k h_{n-2k} a_{j,k} + \sum_k g_{n-2k} d_{j,k} \end{aligned} \quad (5.80)$$

O algoritmo construído acima (5.80) é uma forma de se obter os coeficientes que representam a função numa escala mais fina, a partir de uma versão de baixa resolução e os detalhes. Este é gráficamente ilustrado na Figura 5.11.

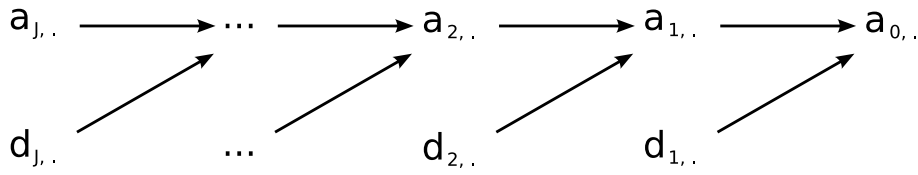


Figura 5.11: Algoritmo rápido de reconstrução.

5.7 Algumas wavelets e propriedades

Uma característica importante da representação através de funções wavelets é a não redundância. A ortogonalidade entre os subespaços W_j e $W_{j'}$, $j \neq j'$, assim como a ortogonalidade entre um subespaço V_J e os subespaços W_j , com $j \leq J$, acarreta na não redundância da representação de uma função qualquer f nos subespaços $V_J, W_{j_0}, W_{j_0+1}, \dots, W_J$. Esta ausência de redundância é fundamental quando se trata de compressão de dados.

Outra propriedade importante é possuir momentos de diferentes ordem iguais a zero. Diz-se que uma wavelet ψ possui momento de ordem k igual a zero, quando

$$\int x^k \psi(x) dx = 0. \quad (5.81)$$

Se os momentos de ordem 0 a M forem iguais a zero, isto significa que os coeficientes de wavelets para polinômios de ordem até M são todos nulos. A informação de detalhe gerada no processo de decomposição será toda nula, ou seja, a informação de polinômios de ordem até M pode ser suprimida. Suponha que um sinal $s(t)$ possa ser decomposto como $s(t) = p(t) + n(t)$, uma parte polinomial de ordem M , $p(t)$ e, outra não polinomial, $n(t)$. Neste caso, todos os coeficientes de detalhe serão gerados pela informação exclusiva da parte não polinomial, $d_{j,k} = \langle s(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \langle p(t) + n(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \langle n(t), \psi_{j,k}(t) \rangle$. Os coeficientes wavelets representam então apenas a parte não polinomial do sinal.

Todas as wavelets possuem momento de ordem zero nulo, ou seja, média nula. Desta forma, funções constantes não são “vistas” pelas wavelets. É possível obter wavelets com diferentes momentos nulos. As wavelets de suportes compactos propostas por Ingrid Daubechies possuem momentos até uma certa ordem $N - 1$ nulos, onde $N \geq 2$.

O exemplo de wavelet mais antigo é a função de Haar, proposta por Alfred Haar em 1909, embora na época o termo wavelet ainda não tinha sido cunhado. Ele estudava bases incondicionais para classificação de espaços de funções, tal como o espaço de Lebesgue. A sua construção resultou na criação de um sistema completo. A wavelet de Haar é a wavelet mais simples e pode ser vista como uma spline³ de ordem zero ou como uma wavelet de Daubechies com apenas o momento de ordem zero nulo. A função de Haar, ao

³As splines são funções definidas por polinômios por partes.

contrário de várias outras wavelets, possui fórmula explícita, definida na Equação (5.34). Não apenas a função de Haar, mas todas as demais splines possuem também fórmula explícita, o que facilita muito a sua manipulação. As wavelets de Haar têm sido utilizadas recentemente para explorar a possibilidade de construir-se wavelets em domínios gerais, tais como esferas. Isto porque elas podem ser manipuladas para satisfazer certas condições geométricas. Desta forma, foram construídas wavelets de Haar em espaços com medidas que não são invariantes à translação (como as medidas de Lebesgue).

Ingrid Daubechies foi precursora na construção de uma família de wavelets ortogonais com suporte compacto e um número específico de momentos nulos. Tais wavelets não possuem fórmula explícita e devem ser calculadas numericamente. A construção destas começa com o cálculo dos coeficientes de filtro, de forma que a transformada de Fourier, a função de resposta em frequência, satisfaça as condições de ortogonalidade e momento. Daubechies tabelou os coeficientes dos filtros para os filtros até ordem 10 em seu trabalho (Daubechies, 1988). As wavelets de Daubechies possuem o número máximo de momentos nulos (N) para um dado tamanho de suporte ($2N$). Existem várias maneiras de escolher as raízes, implicando em diferentes características de fase do filtro. Dentre as 2^{N-1} possibilidades, escolhe-se aquela em que todas as raízes encontram-se no interior do círculo unitário, os filtros assim obtidos são chamados filtros de fase mínima.

Em algumas aplicações pode ser também desejado que a função escala de suporte compacto possua também momentos nulos. Coifman sugeriu a Daubechies em 1989 a construção de bases ortonormais de wavelets onde essa característica fosse incorporada. Tais wavelets, chamadas de coiflets, são mais simétricas que as wavelets de Daubechies. Enquanto as de Daubechies possuem $N/2 - 1$ momentos nulos, as funções escala das coiflets possuem $N/3 - 1$ momentos nulos e as wavelets $N/3$. A desvantagem das coiflets é o fato destas possuírem um maior suporte que as wavelets de Daubechies, para um mesmo número de momentos nulos, N , ela apresenta suporte de tamanho $3N - 1$, enquanto o suporte das wavelets de Daubechies eram de tamanho $2N$.

Outro tipo de wavelet são as wavelets splines, funções que são polinômios por partes. Desta forma elas podem ser localmente bem simples e, ao mesmo tempo, bem flexíveis e suaves. As splines são portanto muito utilizadas para se modelar funções arbitrárias. Quando tratando-se de problemas de interpolação, as splines são preferíveis, em detrimento da interpolação polinomial, pois é possível obter resultados semelhantes utilizando polinômios de ordem inferior, e também são importantes para evitar o fenômeno de Runge.⁴

⁴O fenômeno de Runge é um problema que ocorre quando se faz interpolação com polinômios de alta ordem. Foi descoberto por Carle David Tolmé Runge quando investigando o comportamento do erro ao se utilizar uma interpolação polinomial para se aproximar funções. Quando uma função é interpolada em pontos equidistantes entre duas extremidades, uma oscilação resultante é gerada em direção às extremidades. Tal oscilação pode ser minimizada escolhendo-se para tanto os nós de Chebyshev ao invés de nós equidistantes. Polinômios de maior grau acabam sendo inapropriados para se realizar a interpolação.

As wavelets splines podem ser divididas nos seguintes grupos: ortogonal, semi-ortogonal, deslocamento ortogonal e biortogonal. O exemplo mais conhecido de wavelets do primeiro tipo são as wavelets de Battle (1987); Lemarie (1993). As wavelets de Battle-Lemarié são tidas como as precursoras da análise em resoluções múltiplas, em que as escalas estão associadas aos espaços funcional das splines, em cada qual toma-se uma B-spline com nós nos inteiros como função escala original. Se a função escala escolhida for a função porta, então resultaremos numa base de Haar. As wavelets semi-ortogonais mantêm a ortogonalidade entre escalas, mas não mais é garantida a ortogonalidade entre funções de base em uma mesma escala (resolução). As B-splines de suporte compacto constituem um exemplo, proposto por Chui e Z.Wang (1992); Unser, Aldroubi, e Eden (1992). Nas wavelets de deslocamento ortogonal, apenas a ortogonalidade devido à translação em uma mesma escala é mantida, não havendo mais ortogonalidade entre escalas. Para gerar uma base para um subespaço a ortogonalidade entre as funções de base não é necessária, é possível então relaxar as condições de ortogonalidade e obter as wavelets biortogonais. O único exemplo conhecido de wavelet que é ao mesmo tempo de suporte compacto, ortogonal e simétrica é a wavelet e Haar. Em muitas aplicações pode ser necessário construir wavelets simétricas de suporte compacto. Para tanto relaxa-se a condição de ortogonalidade.

5.8 Transformada wavelet contínua

Analisar-se-á aqui alguns aspectos da transformada wavelet contínua já anteriormente introduzida em (5.2). Iremos sempre supor que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, e além disso, a wavelet deve satisfazer a condição de admissibilidade também mencionada anteriormente em (5.3)

$$C_\psi = 2\pi \int |\omega|^{-1} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty. \quad (5.82)$$

Essa condição assegura que $\widehat{\psi}(0) = 0$ ou, equivalentemente, $\int \psi(t) dt = 0$ deve ser satisfeito. Além disso, mostra-se posteriormente que esta condição assegura a convergência da representação de uma função qualquer em termos de sua transformada wavelet.

Uma família de funções $\{\psi_{s,u}\}$ é gerada por dilatações e translações

$$\psi_{s,u}(t) = |s|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right), \quad (5.83)$$

onde $s, u \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$ (note que não estamos aqui restringindo s como negativo ou positivo).

O problema pode ser evitado utilizando-se splines. Ao se tentar diminuir o erro de interpolação, pode-se optar por aumentar o número de pedaços polinomiais que constituem a spline, ao invés de se aumentar o grau dos polinômios utilizados.

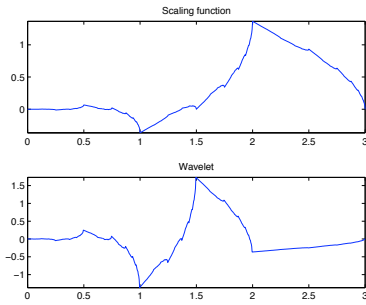


Figura 5.12: Daubechies 4.

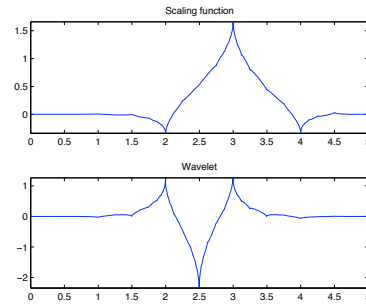


Figura 5.13: Coiflet 6.

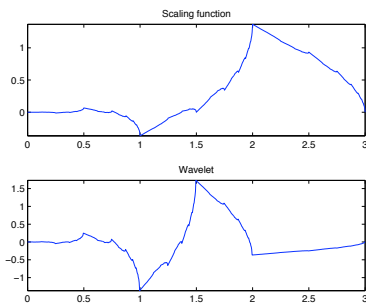


Figura 5.14: Symlet 2.

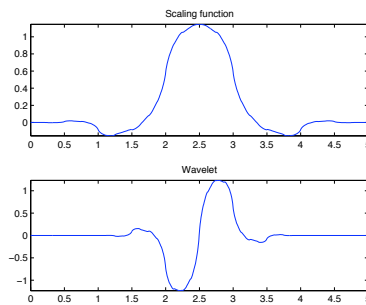


Figura 5.15: Biorthogonal 1.3.

Considera-se também $\|\psi\| = 1$. A transformada contínua wavelet, com relação à família dada acima é definida

$$\begin{aligned}
 W_c f(s, u) = (W_c f)(s, u) &= \langle f, \psi_{s,u} \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi_{s,u}(t)} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) |s|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt .
 \end{aligned} \tag{5.84}$$

Note que $|W_c f(s, u)| \leq \|f\|$.

A função f pode ser recuperada através da seguinte fórmula:

$$f = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} (W_c f)(s, u) \psi_{s,u} ds du , \tag{5.85}$$

que iremos demonstrar a seguir. Para tanto, considera-se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, para as quais teremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} (W_c f)(s, u) \overline{(W_c g)(s, u)} ds du =$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) |s|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt \right\} \\
 & \quad \overline{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t') |s|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t'-u}{s}\right) dt' \right\}} ds du = \\
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(\omega) |s|^{\frac{1}{2}} \overline{\widehat{\psi}(s\omega)} e^{-j\omega u} d\omega \right\} \\
 & \quad \left\{ \frac{1}{2\pi} \int \overline{\widehat{g}(\omega')} |s|^{\frac{1}{2}} \widehat{\psi}(s\omega') e^{j\omega' u} d\omega' \right\} ds du, \tag{5.86}
 \end{aligned}$$

onde utiliza-se a identidade de Parseval (veja Apêndice ??). Definindo agora $F_s(\omega) = |s|^{\frac{1}{2}} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(s\omega)}$ e $G_s(\omega) = |s|^{\frac{1}{2}} \widehat{g}(\omega) \widehat{\psi}(s\omega)$, obtém-se

$$(5.86) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int F_s(\omega) e^{-j\omega u} d\omega \right\} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int G_s(\omega') e^{j\omega' u} d\omega' \right\} ds du \tag{5.87}$$

Os termos entre chaves podem ser vistos como $(2\pi)^{-1/2}$ vezes a transformada de Fourier de $F_s(\omega)$ e $G_s(\omega)$.

$$(5.87) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{F}_s(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\widehat{G}_s(u)} du ds \tag{5.88}$$

Aplicando mais uma vez o teorema de Parseval,

$$(5.88) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} F_s(u) \overline{\widehat{G}_s(u)} du ds. \tag{5.89}$$

Substituindo agora F_s e G_s

$$\begin{aligned}
 (5.89) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} |s|^{\frac{1}{2}} \widehat{f}(u) \overline{\widehat{\psi}(su)} |s|^{\frac{1}{2}} \overline{\widehat{g}(u)} \widehat{\psi}(su) du ds \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} |s| \widehat{f}(u) \overline{\widehat{g}(u)} |\widehat{\psi}(su)|^2 du ds. \tag{5.90}
 \end{aligned}$$

Pelo teorema de Fubini, a ordem de integração pode ser invertida, então

$$\begin{aligned}
 (5.90) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(u) \overline{\widehat{g}(u)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|s|} |\widehat{\psi}(su)|^2 ds \right) du \\
 &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^{-1} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \right) dt \\
 &= C_\psi \langle f, g \rangle. \tag{5.91}
 \end{aligned}$$

Concluí-se então que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} (W_c f)(s, u) \overline{(W_c g)(s, u)} ds du = C_\psi \langle f, g \rangle . \quad (5.92)$$

É possível ler a fórmula (5.92) da seguinte maneira

$$C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} (W_c f)(s, u) \overline{\langle g, \psi_{s,u} \rangle} ds du = \langle f, g \rangle \quad (5.93)$$

$$f = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} (W_c f)(s, u) \psi_{s,u} ds du . \quad (5.94)$$

Fica aqui evidente a importância da condição de admissibilidade imposta em (5.82). Esta condição deve ser satisfeita para que seja possível ter (5.94).

5.9 Transformada wavelet discreta

Para se obter a transformada wavelet discreta, deve-se restringir os valores de s e u em (5.83) a um conjunto discreto de valores. Por conveniência, na discretização, restringe-se s , de forma a assumir apenas valores positivos. Com tal restrição, a condição de admissibilidade em (5.82) tomará agora a seguinte forma

$$C_\psi = \int_0^\infty \omega^{-1} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^0 |\omega|^{-1} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega . \quad (5.95)$$

Vamos restringir s e u da seguinte maneira: $s = s_0^j$ e $u = ku_0 s_0^j$, onde $j, k \in \mathbb{Z}$. s_0 e u_0 são fixos, escolhendo $s_0 \neq 1$ e $u_0 > 0$. A constante b_0 deve ser escolhida de forma que as funções $\psi(t - ku_0)$ “cubram” todo o tempo. Para valores diferentes de j a “largura” da função $s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j} t)$ é s_0^j vezes a largura de $\psi(t)$ (usando a medida $largura(f) = [\int t^2 |f(t)|^2 dt]^{1/2}$, onde assume-se que $\int t |f(t)|^2 dt = 0$), deve-se então escolher $u = ku_0 s_0^j$ e, assim, garantir que as wavelets discretas na resolução j “cobrirão” o eixo do tempo da mesma forma que $\psi(t - ku_0)$. As wavelets discretas terão então a seguinte forma

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \psi \left(\frac{t - ku_0 s_0^j}{s_0^j} \right) = s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j} t - ku_0) . \quad (5.96)$$

Deseja-se representar uma função qualquer f em termos das funções wavelets discretas, através dos coeficientes $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$. Esta representação deve ser tal que esses coeficientes caracterizem completamente a função f e, ainda mais, a reconstrução de f a partir desses deve ser numericamente estável. Mostra-se que a escolha de ψ admissível e s_0 e u_0 apropriados garante a existência de $\tilde{\psi}_{j,k}$ de forma que a reconstrução de f se dê da seguinte

forma:

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}. \quad (5.97)$$

Para que os coeficientes caracterizem bem uma função f qualquer em $L^2(\mathbb{R})$, é necessário que estes determinem univocamente a função, ou seja, se temos $\langle f_1, \psi_{j,k} \rangle = \langle f_2, \psi_{j,k} \rangle$ para todo $j, k \in \mathbb{Z}$, então $f_1 \equiv f_2$, ou, de forma equivalente, se $\langle f, \psi_{j,k} \rangle = 0$ para todos $j, k \in \mathbb{Z}$, então $f = 0$. Sendo isso satisfeito, obtém-se uma boa caracterização das funções em $L^2(\mathbb{R})$ em termos dos coeficientes $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$. No entanto, deseja-se ir além, deseja-se que a representação de f em termo dos coeficientes seja tal que exista um algoritmo numericamente estável para reconstruir f a partir dos coeficientes $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$. É possível ver esse processo de representação em termo dos coeficientes como um mapeamento de $L^2(\mathbb{R})$ em $l^2(\mathbb{Z})$ ⁵. Deseja-se também que o espaço das seqüências possua uma estrutura, de forma que seja possível garantir que se existam duas seqüências $(\langle f_1, \psi_{j,k} \rangle)_{j,k \in \mathbb{Z}}$ e $(\langle f_2, \psi_{j,k} \rangle)_{j,k \in \mathbb{Z}}$ e se estas estão “próximas”, então f_1 e f_2 também estão “próximos”. O espaço $L^2(\mathbb{R})$ já possui uma topologia, por se tratar de um espaço de Hilbert. Escolhe-se então para $l^2(\mathbb{Z})$ uma topologia similar, de forma que a distância entre duas seqüências, $c^1 = (c_{j,k}^1)_{j,k \in \mathbb{Z}}$ e $c^2 = (c_{j,k}^2)_{j,k \in \mathbb{Z}}$, seja definida por

$$\|c^1 - c^2\|^2 = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |c_{j,k}^1 - c_{j,k}^2|^2. \quad (5.98)$$

Mostra-se que uma escolha adequada de ψ (uma função ψ que possua um decaimento considerável em tempo e frequência e possua média nula) e valores para as constantes de dilatação e translação tais que $s_0 > 1$ e $u_0 > 0$ garantem que

$$\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \quad (5.99)$$

Esta inequação garante que se uma dada função f for tal que seu módulo $\|f\|^2$ for pequeno, então, sua representação em termos dos coeficientes de wavelets será tal que $\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2$ também será pequeno.

Para que se tenha estabilidade, será necessário que dado $\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2$ pequeno, obtenha-se $\|f\|^2$ também pequeno. Em particular, deve existir $\alpha < \infty$ tal que $\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 < 1$ implique em $\|f\|^2 \leq \alpha$. Tomando um $f \in L^2(\mathbb{R})$ arbitrário, é possível definir $\tilde{f} = [\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2]^{-1/2} f$. Para \tilde{f} definido desta forma, $\sum_{j,k} |\langle \tilde{f}, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq 1$ e, então $\|\tilde{f}\|^2 \leq \alpha$. Mas isto significa que

$$[\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2]^{-1} \|f\|^2 \leq \alpha \quad (5.100)$$

⁵ $l^2(\mathbb{Z})$ é o espaço das seqüências em que, dada uma seqüência $\{c_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, obtém-se $\sum_i |c_i|^2 < \infty$.

ou, equivalentemente,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \quad (5.101)$$

onde $A = \alpha^{-1} > 0$. Se esta condição (5.101) for satisfeita para todo f , o critério de estabilidade será satisfeito.

Combinando as equações (5.99) e (5.101), obtém-se

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (5.102)$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$. Em outras palavras, o conjunto $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ constitui um frame.

All this time the Guard was looking at her, first through a telescope, then through a microscope, and then through an opera-glass

Lewis Carroll, Through the Looking Glass

6

Wavelets e bancos de filtros

6.1 Wavelets e bancos de filtros

A análise em resoluções múltiplas pode ser vista como um processo de filtragem por um banco de filtros espelhados em quadratura. Analisa-se aqui então o processo de decomposição utilizando wavelets sob esse diferente ponto de vista.

No algoritmo rápido visto acima para decomposição faz-se

$$\langle f, \phi_{j,k} \rangle = \sum_n \overline{h_{n-2k}} \langle f, \phi_{j-1,n} \rangle \quad (6.1)$$

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \sum_n \overline{g_{n-2k}} \langle f, \psi_{j-1,n} \rangle \quad (6.2)$$

mas isso é equivalente a fazer

$$\langle f, \phi_{j,k} \rangle = (\downarrow 2)[(\langle f, \phi_{j-1,n} \rangle) * \overline{h_{-n}}] \quad (6.3)$$

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = (\downarrow 2)[(\langle f, \psi_{j-1,n} \rangle) * \overline{g_{-n}}] . \quad (6.4)$$

Ambas equações acima podem ser reescritas na forma matricial. A convolução do sinal com o filtro é representada por uma multiplicação matricial, onde chama-se de H e

G as matrizes dos filtros h e g , respectivamente. A decimação (reamostragem) também será representada por uma multiplicação matricial, onde a matriz D será a matriz de decimação. Para o caso da wavelet de Haar tem-se:

$$H = \begin{bmatrix} \cdot & & & & & \\ h_0 & h_1 & & & & \\ & h_0 & h_1 & & & \\ & & h_0 & h_1 & & \\ & & & h_0 & h_1 & \\ & & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$D = \begin{bmatrix} \cdot & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$DH = \begin{bmatrix} \cdot & & & & & \\ h_0 & h_1 & & & & \\ & h_0 & h_1 & & & \\ & & h_0 & h_1 & & \\ & & & h_0 & h_1 & \\ & & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$a_j = \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{j,-1} \\ a_{j,0} \\ a_{j,1} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \quad (6.8)$$

As operações escritas em (6.3) e (6.4) podem ser representadas então por:

$$a_j = DHa_{j-1}, \quad (6.9)$$

$$d_j = DGa_{j-1}. \quad (6.10)$$

A decimação no domínio do tempo é bem simples e consiste apenas em descartar metade das amostras do sinal, alternadamente,

$$v = (\downarrow 2)x, \text{ ou seja, } v(k) = x(2k) \quad (6.11)$$

Para obter a representação no domínio de Fourier, basta

$$V(\omega) = \sum_k v(k)e^{-j\omega k} = \sum_k x(2k)e^{-j\omega k} = \sum_{n=2k} x(n)e^{-j\omega n/2} \quad (6.12)$$

Portanto a afirmativa $V(\omega) = X(\frac{\omega}{2})$ é falsa. Considerando agora

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sum_{n=2k} b(n)e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} \sum_k b(k)e^{-j\omega k} + \frac{1}{2} \sum_k b(k)e^{-j(\omega+\pi)k} \\ &= \frac{1}{2}[B(\omega) + B(\omega + \pi)] \end{aligned} \quad (6.13)$$

que pode ser facilmente verificado, lembrando para tanto que x é periódico de período 2π , é possível obter

$$V(\omega) = \frac{1}{2} \left[X\left(\frac{\omega}{2}\right) + X\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right] \quad (6.14)$$

bastando para tanto tomar os dois últimos resultados.

As operações acima podem ser descritas pelo banco de filtro da Figura 6.1. O sinal de entrada é processado por dois filtros L e H , para obter as componentes de baixas ($yl(n)$) e altas frequências ($yh(n)$), respectivamente. Neste ponto as sinais filtrados constituem uma representação do sinal original $x(n)$, mas juntos, teremos o dobro do número de amostras. Para manter o mesmo número de amostras é feita então uma decimação por um fator de dois. A saída do banco de filtros ($S(x(n))$) é uma representação do sinal $x(n)$ em termos de suas componentes de altas e baixas frequências, com o mesmo tamanho que o sinal original. Resta então a pergunta: é possível reconstruir o sinal $x(n)$ a partir da representação $S(x(n))$?

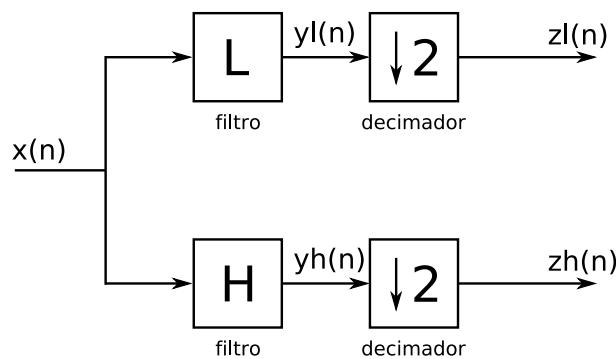


Figura 6.1: Banco de Filtros.

A resposta a esta pergunta não é óbvia, principalmente devido à decimação feita no processo. Nas figuras 6.2 e 6.3 é ilustrado o processo de decimação. A primeira ilustra o caso em que o sinal $x(n)$ possui um espectro restrito à faixa $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, neste caso não haverá falseamento (aliasing) gerado no processo de decimação. O segundo caso (Figura

6.3) ilustra a situação em que o espectro do sinal não mais está restrito ao intervalo $|\omega| \leq \frac{\pi}{2}$, neste caso haverá aliasing, ilustrado pela região hachurada na figura 6.3. No caso geral deve-se assumir que haverá aliasing e, portanto, só será possível reconstruir o sinal original $x(x)$ se, de alguma forma, for possível cancelar esse falseamento de forma perfeita.

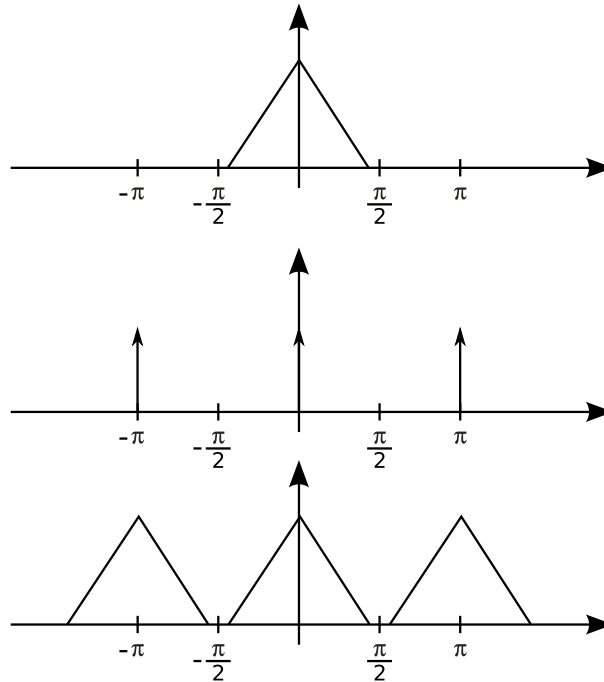


Figura 6.2: Decimação sem aliasing.

Uma tentativa de reconstruir o sinal original é usar o banco de filtros de síntese da Figura 6.4, que consistiria em fazer um processo inverso ao que foi feito no banco de análise. Primeiro uma etapa de upsampling e posteriormente uma filtragem, mas o par de filtros agora utilizado (\tilde{L} e \tilde{H}) será diferente. Deseja-se especificar as condições que esses filtros devem satisfazer para que seja possível efetuarmos a reconstrução perfeita do sinal ($\tilde{x}(n) = \tilde{S}S(x(n)) = x(n)$). Geralmente é possível obter a reconstrução perfeita, mas haverá um atraso do sinal, o que não é um problema, pois podemos compensar incluindo um avanço no sinal no sistema.

Pelo problema que foi descrito acima, é possível concluir que a questão da possibilidade de se obter a reconstrução perfeita recai no problema da matriz S ser inversível ou não. Se a inversa existir, e fazendo $\tilde{S} = S^{-1}$, então será possível obter a reconstrução do sinal sem erro. Um caso particular importante ocorre quando a matriz S for ortogonal, neste caso a matriz S será uma matriz ortogonal, sendo portanto sua inversa determinada pela transposta da matriz de análise, $S^{-1} = S^T$.

Deve-se analisar quais as implicações na frequência do processo de upsampling que

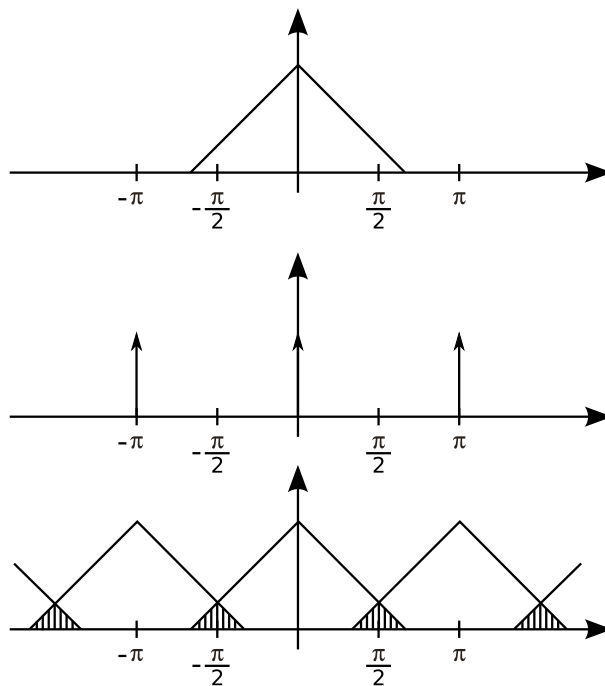


Figura 6.3: Decimação com aliasing.

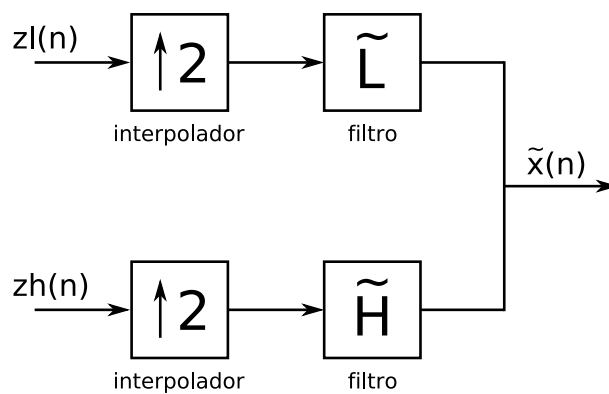


Figura 6.4: Banco de Filtros de Síntese.

será utilizado como a primeira etapa da reconstrução do sinal. Suponha ter inicialmente $v(n)$ e através do upsampling obter o sinal $u(n)$. Esta operação pode ser representada matricialmente, da seguinte forma:

$$u = Uv \tag{6.15}$$

onde $u = (\dots, u(-1), u(0), u(1), \dots)^T$, $v = (\dots, v(-1), v(0), v(1), \dots)^T$ e

$$U = \begin{bmatrix} \cdot & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & \cdot \end{bmatrix} . \tag{6.16}$$

Para representá-la no domínio do tempo é necessário separar as amostras pares das amostras ímpares, $n = 2k$ e $n = 2k + 1$, de forma que

$$u = (\uparrow 2)v = \begin{cases} u(k) = v(k/2), & \text{para } k \text{ par} \\ u(k) = 0, & \text{para } k \text{ ímpar} \end{cases} . \tag{6.17}$$

No domínio da frequência, os zeros acrescentados nada contribuem para $U(\omega)$ e, em oposição ao downsampling, quando um termo no domínio do tempo dava origem a dois no domínio da frequência, obtém-se dois termos no domínio do tempo dando origem a apenas um termo no domínio da frequência. Mostra-se que a representação em frequência de $u(n)$ é dada por $U(\omega) = V(2\omega)$:

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \sum_n u(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_n u(2n)e^{-j\omega 2n} \\ &= \sum_n v(n)e^{-j(2\omega)n} \\ &= V(2\omega) , \end{aligned} \tag{6.18}$$

onde despreza-se os termos ímpares $(2k + 1)$, pois são eles todos nulos. Se $V(\omega)$ possui período 2π , $U(\omega)$ terá então período π e, haverá assim uma compressão em frequência por uma fator de 2, de forma tal que todo o conteúdo espectral de U estará agora restrito a $|\omega| \leq \frac{\pi}{2}$. Como U terá período π , imagens dessa versão comprimida (em frequência) aparecerão adjacentes a ela (veja a Figura 6.5). Enquanto o downsampling cria o aliasing,

o upsampling cria o dual, chamado imageamento (imaging).

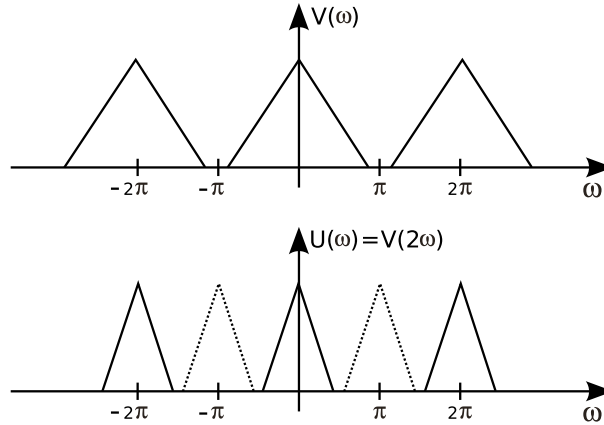


Figura 6.5: Upsampling.

Considerando o processo de decomposição seguido do processo de reconstrução, veremos que o processo de downsampling é seguido pelo processo de upsampling. Se chama-se de x o sinal de entrada e u o de saída, ter-se-á $u = (\uparrow 2)(\downarrow 2)x$. Combinando os resultados das equações (6.14) e (6.18) obtém-se

$$U(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) + X(\omega + \pi)]. \quad (6.19)$$

A análise em resoluções múltiplas discutida anteriormente é vista como uma representação de uma função, inicialmente em um subespaço de $L^2(\mathbb{R})$, em subespaços desse subespaço inicial. Cada uma das projeções feita em subespaços com níveis de resolução subsequentes podem ser vistas como uma filtragem por um banco de filtros, conforme descrito acima. A representação em termos de funções escala está associada à filtragem passa-baixas, enquanto a representação em termos das funções wavelets está associada ao filtro passa-banda. A análise em resoluções múltiplas definirá um banco de filtros como exposto acima de forma que a reconstrução do sinal seja possível, com erro nulo, pois como visto, é possível, a partir de uma versão de baixa resolução e dos detalhes associados, obter a versão um nível acima, ou seja, é possível reconstruir a função sem cometer erros. Já que isso acontece no caso da análise em múltiplas resoluções deve-se então derivar as condições sobre os filtros de análise e síntese que fazem com que isso seja verdade.

No banco de filtros de decomposição obtém-se uma seqüência de filtragem e decimação. No caso específico da análise em resoluções múltiplas, o filtro a ser utilizado em todas as etapas possui os mesmos coeficientes h_k , mas o sinal é decimado ao longo do processo, alterando assim a escala em frequência. Aplicar um filtro após o sinal ter sido decimado por um fator de 2 equivale a aplicar previamente um filtro comprimido por 2 na frequência e em seguida fazer a decimação. Fazer $y = h \star v$ onde $v = (\downarrow 2)v'$, ou seja, $y = h \star ((\downarrow 2)v')$

equivale a fazer $y = (\downarrow 2)(h_2 * v')$, onde h_2 é tal que $H_2(\omega) = H(\frac{\omega}{2})$. Podemos demonstrar isso no domínio da frequência, basta para tanto fazer

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) &= H(\omega)V(\omega) \\
 &= H(\omega)\frac{1}{2}\left[V'\left(\frac{\omega}{2}\right) + V'\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\right] \\
 &= \frac{1}{2}\left[H(\omega)V'\left(\frac{\omega}{2}\right) + H(\omega)V'\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\right] \\
 &= \frac{1}{2}\left[H(\omega)V'\left(\frac{\omega}{2}\right) + H(\omega + 2\pi)V'\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\right] \\
 &= (\downarrow 2)(H(2\omega)V'(\omega)).
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Um outra propriedade interessante pode ser facilmente demonstrada. Suponha o caso em que se tenha $(\downarrow 2)h * v$. Mostra-se que isto é equivalente a ter $h * (\uparrow 2)v$. No domínio da frequência a convolução será escrita como um produto. Utilizando a relação (6.14) obtém-se

$$\begin{aligned}
 ((\downarrow 2)H(\omega))V(\omega) &= \left[\frac{1}{2}H\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{1}{2}H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\right]V(\omega) \\
 &= \frac{1}{2}H\left(\frac{\omega}{2}\right)V(\omega) + \frac{1}{2}H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)V(\omega) \\
 &= \frac{1}{2}H(\omega)V(2\omega) + \frac{1}{2}H(2\omega + 2\pi)V(2\omega) \\
 &= H(\omega)V(2\omega) \\
 &= H(\omega)((\uparrow 2)V(\omega))
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

e, portanto, fica demonstrada o que foi proposto. A equivalência entre $h * (\downarrow 2)v$ e $(\uparrow 2)h * v$ segue de forma análoga.

Analisa-se agora o efeito de um banco de filtros conforme esquematizado na Figura 6.6. Este é chamado Banco de Filtros Espelhados em Quadratura de dois canais (Two-Channel Quadrature Mirror Filter Bank). É uma estrutura muito comum e muito utilizada. O banco de análise é composto por um filtro passa-baixas ($H(\omega)$) e um filtro passa-altas ($G(\omega)$), dividindo o sinal de entrada em duas bandas complementares. Os sinais resultantes de cada um dos filtros é então decimado por um fator de dois. Para a síntese do sinal original, a primeira etapa é a interpolação. A decimação e a interpolação causam aliasing e imaging. Os filtros de síntese ($\tilde{H}(\omega)$ e $\tilde{G}(\omega)$) possuem como propósito eliminar as imagens espectrais. $\tilde{H}(\omega)$ será um filtro passa-baixas para eliminar as imagens de altas frequências criadas na interpolação do sinal de baixas frequências. De maneira análoga, $\tilde{G}(\omega)$ será um filtro passa-altas para eliminar as imagens de baixa frequência criadas na interpolação do sinal de altas frequências. Como resultado, y_1 e y_2 são boas aproximações para x'_1 e x'_2 . O sinal reconstruído será portanto bem semelhante ao original. Note

que o nome ‘filtros espelhados em quadratura’ deriva do fato da resposta de $H(\omega)$ ser uma imagem espelhada de $G(\omega)$ em relação à frequência $\pi/2$ (um quarto da frequência amostragem).

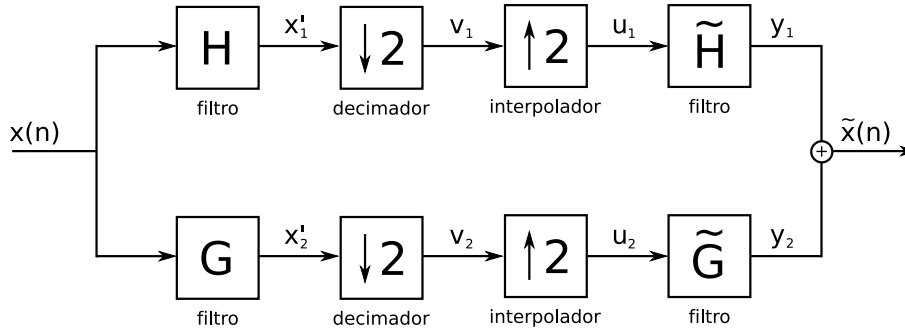


Figura 6.6: Banco de Filtros (decomposição e síntese).

Para que não haja aliasing é necessário que as respostas dos filtros não se sobreponham, assim como ilustrado no primeiro gráfico da Figura 6.7. No entanto, para que toda a informação do sinal de entrada esteja presente na saída do banco de análise é necessário que os filtros se sobreponham, ou que os filtros sejam ideais, tenham uma transição abrupta em $\pi/2$. Mas sabemos que filtros ideais são impossíveis de serem obtidos, e filtros próximos do ideal precisam ser filtros de alta ordem, sendo sensíveis à quantização e geralmente sofrem de problemas de instabilidade (se forem IIR).

A filosofia por trás dos filtros espelhados em quadratura e assim também dos filtros wavelets é permitir o aliasing na saída do decimador mas, os filtros devem ser projetados de tal forma que as imagens produzidas no interpolador cancele o aliasing, perfeitamente no caso dos filtros wavelets, levando a um problema mais estrito.

Para o banco de filtros em questão teremos $\tilde{x} = y_1 + y_2$. Deve-se então achar y_1 e y_2 no domínio da frequência.

$$\begin{aligned}
 Y_1(\omega) &= \tilde{H}(\omega)U(\omega) \\
 &= \tilde{H}(\omega) \left(\frac{1}{2}[X'(\omega) + X'(\omega + \pi)] \right) \\
 &= \frac{1}{2}\tilde{H}(\omega)[H(\omega)X(\omega) + H(\omega + \pi)X(\omega + \pi)] \\
 &= \frac{1}{2}[\tilde{H}(\omega)H(\omega)X(\omega) + \tilde{H}(\omega)H(\omega + \pi)X(\omega + \pi)] \quad (6.22)
 \end{aligned}$$

De maneira análoga é possível obter

$$Y_2(\omega) = \frac{1}{2}[\tilde{G}(\omega)G(\omega)X(\omega) + \tilde{G}(\omega)G(\omega + \pi)X(\omega + \pi)] . \quad (6.23)$$

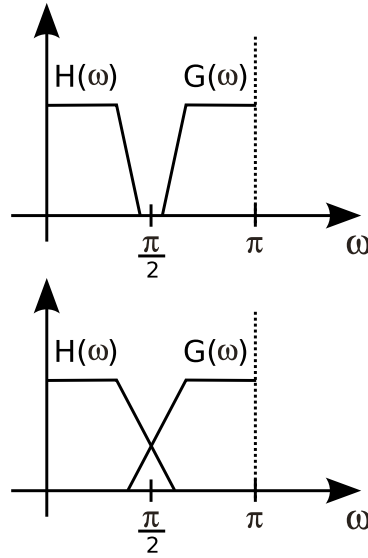


Figura 6.7: Filtros Espelhados em Quadratura.

E juntado os resultados expressa-se \tilde{X} em termo das entradas

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}(\omega) &= Y_1(\omega) + Y_2(\omega) \\
 &= X(\omega) \frac{1}{2} [\tilde{H}(\omega)H(\omega) + \tilde{G}(\omega)G(\omega)] \\
 &\quad + X(\omega + \pi) \frac{1}{2} [\tilde{H}(\omega)H(\omega + \pi) + \tilde{G}(\omega)G(\omega + \pi)] \quad (6.24)
 \end{aligned}$$

Para que a reconstrução realizada pelo filtro seja perfeita, requerer-se $\tilde{X}(\omega) = X(\omega)$ e, portanto, será necessário que as duas opções seguintes seja satisfeitas

$$H(\omega)\tilde{H}(\omega) + G(\omega)\tilde{G}(\omega) = 2 \quad (6.25)$$

$$H(\omega + \pi)\tilde{H}(\omega) + G(\omega + \pi)\tilde{G}(\omega) = 0 \quad (6.26)$$

ou seja, deseja-se cancelar o termo em $X(\omega + \pi)$, o termo de aliasing e imaging. Para tanto basta tomar os filtros de síntese da seguinte forma

$$\tilde{H}(\omega) = G(\omega + \pi) \quad (6.27)$$

$$\tilde{G}(\omega) = -H(\omega + \pi) . \quad (6.28)$$

A condição (6.25) fica então

$$H(\omega)G(\omega + \pi) - H(\omega + \pi)G(\omega) = 2. \quad (6.29)$$

Cancelado o aliasing o banco de filtros torna-se um sistema linear e invariante no tempo. A sua função de transferência é agora facilmente determinada, bastando tomar a razão entre saída e entrada.

$$T(\omega) = \frac{\tilde{X}(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{2}[H(\omega)G(\omega + \pi) - H(\omega + \pi)G(\omega)] \quad (6.30)$$

Desejando-se um banco de filtros com reconstrução perfeita do sinal, não é possível admitir distorções, neste caso, permiti-se que $T(\omega)$ seja no máximo um atraso, i.e., $T(\omega) = e^{-j\omega\tau_0}$. Neste caso, com esta condição um pouco menos restritiva, a condição (6.29) ficará na seguinte forma:

$$H(\omega)G(\omega + \pi) - H(\omega + \pi)G(\omega) = 2e^{-j\omega\tau_0}. \quad (6.31)$$

O sistema de equações constituído por (6.25) e (6.26) pode ser reescrito em forma matricial, da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} H(\omega) & G(\omega) \\ H(\omega + \pi) & G(\omega + \pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega) \\ \tilde{G}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-j\omega\tau_0} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Obtém-se então a matriz de modulação de análise, que é central na teoria de bancos de filtros. É possível também, sem dificuldades, obter a matriz de modulação de síntese, bastando para tanto tomar as mesmas equações, mas agora substituir ω por $\omega + \pi$.

$$\begin{bmatrix} H(\omega) & G(\omega) \\ H(\omega + \pi) & G(\omega + \pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega) & \tilde{H}(\omega + \pi) \\ \tilde{G}(\omega) & \tilde{G}(\omega + \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-j\omega\tau_0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Utilizando a inversa da matriz de análise é possível obter os filtros de síntese, da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega) \\ \tilde{G}(\omega) \end{bmatrix} = \frac{2}{\Delta(\omega)} \begin{bmatrix} G(\omega + \pi) \\ -H(\omega + \pi) \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

onde $\Delta(\omega)$ é o determinante da matriz de análise

$$\Delta(\omega) = H(\omega)G(\omega + \pi) - H(\omega + \pi)G(\omega). \quad (6.35)$$

Os filtros de reconstrução serão estáveis apenas se o determinante for não nulo em todo o intervalo $[-\pi, \pi]$.

Se os filtros em questão possuírem uma resposta ao impulso finita, então, o deter-

minante $\Delta(\omega)$ pode ser calculado. Isso leva a uma relação simples entre os filtros de decomposição e reconstrução.

A Equação (6.34) fornece uma maneira se obtermos os filtros de síntese, de forma que

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{2}{\Delta(\omega)}G(\omega + \pi) \quad \text{e} \quad (6.36)$$

$$\tilde{G}(\omega) = -\frac{2}{\Delta(\omega)}H(\omega + \pi) . \quad (6.37)$$

Utilizando a definição acima (6.36) poderá-se retirar

$$G(\omega) = G(\omega + 2\pi) = \tilde{H}(\omega + \pi)\frac{\Delta(\omega + \pi)}{2} \quad (6.38)$$

Usando agora (6.37) e (6.38) obtém-se

$$\tilde{G}(\omega)G(\omega) = -\frac{\Delta(\omega + \pi)}{\Delta(\omega)}\tilde{H}(\omega + \pi)H(\omega + \pi) . \quad (6.39)$$

Pela definição (6.35) é fácil mostrar que $\Delta(\omega + \pi) = -\Delta(\omega)$, então

$$\tilde{G}(\omega)G(\omega) = \tilde{H}(\omega + \pi)H(\omega + \pi) . \quad (6.40)$$

Utilizando agora o resultado de (6.40) em (6.25)

$$\tilde{H}(\omega)H(\omega) + \tilde{H}(\omega + \pi)H(\omega + \pi) = 2 . \quad (6.41)$$

Se os filtros possuírem resposta ao impulso finita, então suas representações em frequência serão na forma de uma série finita em $e^{\pm jn\omega}$. Desta forma, o determinante definido em (6.35) será também representado por uma série finita. E ainda mais, as equações (6.36) e (6.37) mostram que $\Delta^{-1}(\omega)$ deve também ser representado por uma série finita. Como ambos $\Delta(\omega)$ e $\Delta^{-1}(\omega)$ são séries finitas em $e^{\pm jn\omega}$, é possível concluir que elas devem possuir apenas um termo. Como $\Delta(\omega + \pi) = -\Delta(\omega)$, concluí-se que o expoente n deve ser ímpar. Finalmente concluí-se que $\Delta(\omega)$ deve ser da forma

$$\Delta(\omega) = ae^{j(2l+1)\omega} \quad (6.42)$$

onde $a \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{Z}$. O que leva, usando as relações (6.36) e (6.37) a

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{2}{a}e^{-j(2l+1)\omega}G(\omega + \pi) \quad \text{e} \quad (6.43)$$

$$\tilde{G}(\omega) = -\frac{2}{a} e^{-j(2l+1)\omega} H(\omega + \pi) . \quad (6.44)$$

Impondo que o filtro de reconstrução deva ser igual ao filtro de síntese, $\tilde{H}(\omega) = H(\omega)$, obtém-se, a partir de (6.41),

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2 , \quad (6.45)$$

condição esta que define os filtros conjugados espelhados. Mostra-se posteriormente, ao analisar as funções wavelets no domínio da frequência, que esta mesma condição será derivada.

De maneira análoga é possível obter

$$\tilde{G}(\omega)G(\omega) + \tilde{G}(\omega + \pi)G(\omega + \pi) = 2 . \quad (6.46)$$

Mais uma vez escolhendo a condição que fornece filtros conjugados espelhados, obtém-se agora

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 2 . \quad (6.47)$$

A condição para que não haja distorção (6.25) pode ser reescrita, definindo para tanto $P_0(\omega) = H(\omega)\tilde{H}(\omega)$ e $P_1(\omega) = G(\omega)\tilde{G}(\omega)$

$$P_0(\omega) + P_1(\omega) = 2e^{j\omega\tau_0} . \quad (6.48)$$

Usando as escolhas feitas em (6.27) e (6.28) obtém-se $P_1(\omega) = -P_0(\omega + \pi)$

$$P_1(\omega) = G(\omega)\tilde{G}(\omega) = -G(\omega)H(\omega + \pi) = -\tilde{H}(\omega + \pi)H(\omega + \pi) = -P_0(\omega + \pi) . \quad (6.49)$$

É possível assim simplificar a Equação (6.48)

$$P_0(\omega) - P_0(\omega + \pi) = 2e^{j\omega\tau_0} . \quad (6.50)$$

O projeto dos filtros agora restringe-se a projetar um filtro passa-baixas P_0 satisfazendo a condição (6.50), em seguida, deve-se fatorar P_0 em H e \tilde{H} , e então, através das relações (6.27) e (6.28) encontrar os outros dois filtros.

Adota-se agora como convenção a utilização da variável complexa, então, ao invés de utilizar ω , passa-se a utilizar z . A relação entre as duas variáveis é dada por $e^{j\omega} = z$. Nada mais é que um mapeamento, sendo as frequências reais mapeadas no círculo unitário $|z| = 1$, as frequências complexas com parte real negativa são mapeadas no interior do círculo e as de parte real positiva no exterior do círculo.

Ao se realizar tal mapeamento, estar-se-á evitando a inconveniência da impossibilidade de se distinguir entre as frequências ω , $\omega + 2\pi$, $\omega + 4\pi$, etc. No domínio z essas frequências são mapeadas em um mesmo ponto, e portanto evitamos a preocupação em tentar distinguir tais frequências, pois os números complexos $z = e^{j\omega}$, $z = e^{j\omega+2\pi}$, $z = e^{j\omega+4\pi}$, etc, são absolutamente iguais. Esse resultado é também válido para frequências complexas, pois baseia-se apenas no fato de que $e^{j2\pi} = 1$.

Dado um sinal discreto $x(n)$, temos a sua representação em frequência $X(\omega)$ e agora a sua representação no domínio z , $X(z)$, dada pela transformada z do sinal

$$X(z) = \sum_n x(n)z^{-n} . \quad (6.51)$$

É possível agora transpor as propriedades dos filtros vistos anteriormente para o domínio z . A Equação (6.50) fica

$$P_0(z) - P_0(-z) = 2z^l , \quad (6.52)$$

e as equações (6.27) e (6.28) ficam

$$\tilde{H}(z) = G(-z) \quad (6.53)$$

$$\tilde{G}(z) = -H(-z) . \quad (6.54)$$

Existem várias formas de se escolher o polinômio $P_0(z)$, assim como várias são as formas de fatorá-lo em $H(z)$ e $\tilde{H}(z)$. Note que o grau do polinômio $P_0(z)$ determina o grau dos polinômios $H(z)$ e $\tilde{H}(z)$, sendo o grau do primeiro a soma dos graus do segundo e terceiro. A condição (6.52) acima pode ser vista como uma condição sobre os termos de potência ímpar em $P_0(z)$. Os termos de potência ímpar devem possuir coeficientes nulos, exceto o termo em z^l , que deve possuir coeficiente unitário.

Uma maneira utilizada de se escolher o polinômio $P_0(z)$ é defini-lo da seguinte forma

$$P_0(z) = (1 + z^{-1})^{2p}Q(z) . \quad (6.55)$$

Essa é a chamada construção binomial ou maximamente plana, devido ao termo $(1+z^{-1})^{2p}$. O termo binomial fornece $2p$ zeros em $z = -1$, desta forma a resposta é maximamente plana em $\omega = \pi$. O termo binomial sozinho representa um filtro spline, mas $Q(z)$ será necessário. Mais sobre a construção desses polinômios será discutido adiantes, seguindo os passos de Daubechies.

A Equação (6.52) pode ser simplificada, utilizando para tanto a seguinte normalização

$$P(z) = z^l P_0(z) . \quad (6.56)$$

Como l é ímpar, então $P(-z) = (-z)^l P_0(-z) = -z^l P_0(-z)$, e a Equação 6.52 se reduz a:

$$P(z) + P(-z) = 2 . \quad (6.57)$$

Os termos ímpares se anulam (ao combinar $P(z)$ com $P(-z)$), e todos os termos pares de $P(z)$ devem ser nulos, com exceção do termo constante que deve ser igual a um.

6.2 Wavelets no domínio da frequência

Para obter uma representação no domínio da frequência, utiliza-se a transformada de Fourier. Considerando a função escala ϕ , a transformada de Fourier da função escala é dada abaixo

$$\widehat{\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6.58)$$

Aplicando (6.58) à relação de escala (5.60), obtêm-se

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k h_k \phi(t') e^{-j\omega \frac{t'+k}{2}} \frac{1}{2} dt' \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_k h_k e^{-j\frac{\omega}{2}k} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t') e^{-j\omega \frac{t'}{2}} dt' \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_k h_k e^{-j\frac{\omega}{2}k} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} H\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) , \end{aligned} \quad (6.59)$$

onde

$$H(\omega) = \sum_k h_k e^{-j\omega k} . \quad (6.60)$$

A relação (6.59) acima nada mais é que a relação de dilatação vista no domínio de Fourier.

De forma similar é possível obter a relação para a função wavelet ψ

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} G\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) , \quad (6.61)$$

onde $G(\omega)$ é dado por

$$G(\omega) = \sum_k g_k e^{-j\omega k} . \quad (6.62)$$

As equações (6.60) e (6.62) são representações no domínio da frequência para os filtros da função escala e da wavelet, respectivamente. É interessante aqui notar que estas representações, a menos do fator $\sqrt{2}/2$, levarão a resultados idênticos aos encontrados na Seção 6.1. Incorporando-se o termo $\sqrt{2}/2$ à definição de $G(\omega)$ e $H(\omega)$ obtêm-se os mesmos resultados, a menos desse fator de normalização. Isso mostrará a equivalência entre um banco de filtros digitais para reconstrução perfeita e a análise wavelet.

Deseja-se que as funções escalas satisfaçam certas condições de ortogonalidade. E ainda mais, que as funções geradas por translações e dilatações sejam ortogonais entre si. Mostra-se então primeiramente como a ortogonalidade entre funções transladadas numa mesma escala se reflete no domínio da frequência.

Deseja-se que $\phi(t)$ seja ortogonal a $\phi(t - k)$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

$$\langle \phi(t), \phi(t - k) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \overline{\phi(t - k)} dt = \delta_{0,k} \quad (6.63)$$

Aplicando o Teorema de Parseval (veja Apêndice ??) à Equação (6.63) acima,

$$\begin{aligned} \langle \phi(t), \phi(t - k) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\phi}(\omega) \overline{\widehat{\phi}(\omega)} e^{j\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega)|^2 e^{j\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} |\widehat{\phi}(\omega)|^2 e^{j\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} |\widehat{\phi}(\omega' + 2\pi l)|^2 e^{j\omega' k} e^{j2\pi l k} d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 e^{j\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\omega) e^{j\omega k} d\omega, \end{aligned} \quad (6.64)$$

onde define-se

$$A(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 . \quad (6.65)$$

$A(\omega)$ é uma função periódica, de período 2π e, portanto, possui uma série de Fourier

$$A(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \sum_k a_k e^{-j\omega k}, \quad (6.66)$$

onde os coeficientes são dados por

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\omega) e^{j\omega k} d\omega. \quad (6.67)$$

Deseja-se a ortonormalidade de $\{\phi(t - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$, ou seja

$$\langle \phi(t), \phi(t - k) \rangle = \delta_{k,0} \quad (6.68)$$

Quando $k = 0$, obtêm-se

$$\langle \phi(t), \phi(t - k) \rangle|_{k=0} = \langle \phi(t), \phi(t) \rangle = \|\phi(t)\|^2 = 1 \quad (6.69)$$

Para $k \neq 0$

$$\langle \phi(t), \phi(t - k) \rangle = \delta_{k,0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 e^{j\omega k} d\omega \quad (6.70)$$

Fazendo a seguinte escolha

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = 1, \quad (6.71)$$

a Equação (6.70) se reduzirá a

$$\langle \phi(t), \phi(t - k) \rangle = \delta_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\omega k} d\omega. \quad (6.72)$$

Usando agora a identidade

$$\int e^{j\omega k} d\omega = 2\pi \delta(k), \quad (6.73)$$

obtêm-se

$$\langle \phi(t), \phi(t - k) \rangle = \frac{1}{2\pi} 2\pi \delta(k) = \delta_k \quad (6.74)$$

Para garantir que isso aconteça, basta dividir ϕ pela raiz quadrada de $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega +$

$2\pi l)^2$.

$$\widehat{\phi}_{orto}(\omega) = \frac{\widehat{\phi}(\omega)}{\sqrt{\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2}}, \quad (6.75)$$

de forma que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}_{orto}(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\widehat{\phi}(\omega + 2\pi k)}{\sqrt{\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2}} \right|^2 = 1. \quad (6.76)$$

Assim $\widehat{\phi}_{orto}(\omega)$ satisfaz a condição (6.71), e então, $\{\phi_{orto}(t - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ é ortonormal.

Mostra-se agora como a escolha feita em (6.71) se reflete através da equação de dilatação do ponto de vista de Fourier (6.59) como uma condição sobre $H(\omega)$:

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sqrt{2}}{2} H\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |H(\omega' + \pi l)|^2 |\widehat{\phi}(\omega' + \pi l)|^2 = 1 \end{aligned} \quad (6.77)$$

A relação (6.77) é verdadeira para todo $\omega' = \omega/2$, é possível então simplesmente substituir ω' por ω . Separando os termos pares ($l = 2k$) e os ímpares ($l = 2k + 1$), obtêm-se

$$2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |H(\omega + 2k\pi)|^2 |\widehat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |H(\omega + (2k+1)\pi)|^2 |\widehat{\phi}(\omega + (2k+1)\pi)|^2. \quad (6.78)$$

Como $H(\omega)$ é periódico de período 2π ,

$$H(\omega + 2k\pi) = H(\omega) \quad \text{e} \quad H(\omega + (2k+1)\pi) = H(\omega + \pi). \quad (6.79)$$

Desta forma, a Equação (6.78) se reduz a

$$|H(\omega)|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + (2k+1)\pi)|^2 = 2. \quad (6.80)$$

Como foi feita a escolha (6.71), (6.80) se reduz a

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2, \quad (6.81)$$

que é a mesma condição derivada em (6.45).

Como $H(\omega)$ é definido em termos de $\{h_k\}$ em (6.60), a condição (6.81) é na verdade uma condição sobre os coeficientes de filtro $\{h_k\}$ para que $\{\phi(t - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ seja ortogonal.

De maneira semelhante deriva-se as condições no domínio da frequência para que as funções wavelets também satisfaçam a condição de ortogonalidade por translação. Para que $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ seja ortogonal será necessário que as seguintes condições sejam satisfeitas

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}(\omega - 2\pi k)|^2 = 1 \quad (6.82)$$

ou, de forma equivalente, como mostramos no caso análogo das funções escala,

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (6.83)$$

A relação (6.83) acima, por sua vez, impõe uma restrição sobre os valores de $\{g_k\}$.

Falta agora derivar as condições no domínio da frequência para que $\{\phi(t-k)\}$ e $\psi(t-k)$ sejam ortogonais entre si. Ou seja, deseja-se

$$\begin{aligned} \langle \phi(t), \psi(t-k) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \overline{\psi(t-k)} dt = 0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\phi}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(\omega)} e^{j\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\omega + 2\pi l) \overline{\widehat{\psi}(\omega + 2\pi l)} e^{j\omega k} d\omega \end{aligned} \quad (6.84)$$

Para que exista ortogonalidade, será necessário que o termo $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\omega + 2\pi l) \overline{\widehat{\psi}(\omega + 2\pi l)}$ seja identicamente nulo.

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\omega + 2\pi l) \overline{\widehat{\psi}(\omega + 2\pi l)} = 0 \quad (6.85)$$

Utilizando agora as relações (6.59) e (6.61), reescrevemos a condição (6.85) na seguinte forma

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right) \overline{G\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right)} &= 0 \\ \sum_{l=-\infty}^{\infty} H(\omega' + \pi l) \widehat{\phi}(\omega' + \pi l) \overline{G(\omega' + \pi l) \widehat{\phi}(\omega' + \pi l)} &= 0. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Como a relação acima é válida para todo $\omega' = \omega/2$, podemos substituir ω' por ω . E em seguida, mais uma vez, separaremos os termos pares ($l = 2k$) dos termos ímpares

($l = 2k + 1$).

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega + 2k\pi) \widehat{\phi}(\omega + 2k\pi) \overline{G(\omega + 2k\pi) \widehat{\phi}(\omega + 2k\pi)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega + (2k + 1)\pi) \widehat{\phi}(\omega + (2k + 1)\pi) \overline{G(\omega + (2k + 1)\pi) \widehat{\phi}(\omega + (2k + 1)\pi)} = 0 \quad (6.87)$$

Lembre-se mais uma vez que $H(\omega)$, $G(\omega)$ e $\widehat{\phi}(\omega)$ são todos periódicos com período 2π . Assim, a Equação (6.87) fica na forma

$$H(\omega) \widehat{\phi}(\omega) \overline{G(\omega) \widehat{\phi}(\omega)} + H(\omega + \pi) \widehat{\phi}(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi) \widehat{\phi}(\omega + \pi)} = 0 \quad (6.88)$$

Se $\widehat{\phi}(\omega) = \widehat{\phi}(\omega + \pi)$ a Equação 6.88 se reduz a

$$H(\omega) \overline{G(\omega)} + H(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} = 0. \quad (6.89)$$

Esta condição deve ser satisfeita para que $\{\psi(t - k)\}$ e $\{\phi(t - k)\}$ sejam ortogonais entre si. A condição (6.89) estabelece uma relação entre os coeficientes wavelet $\{g_k\}$ e aquelas da equação de dilatação $\{h_k\}$, através de (6.60) e (6.62). Para encontrar uma relação explícita entre os dois conjuntos de coeficientes, é preciso resolver a equação.

Por definição sabe-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = 1, \quad (6.90)$$

isto implica em $\widehat{\phi}(0) = 1$ e, então, pela relação (6.59),

$$H(0) = \sqrt{2}. \quad (6.91)$$

Utilizando agora (6.91) juntamente com (6.81) obtêm-se:

$$H(\pi) = 0. \quad (6.92)$$

Utilizando agora a relação entre H e G , dada em (6.89), é possível concluir que

$$G(0) = 0. \quad (6.93)$$

Como G satisfaz a relação (6.83), concluí-se também que

$$G(\pi) = \sqrt{2}. \quad (6.94)$$

O fato de que $H(0) = G(\pi)$, $H(\pi) = G(0)$ e $H(\omega) \overline{G(\omega)} + H(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} = 0$

fazem de H e G um par de filtros complementares. Estes são chamados filtros conjugados espelhados, pois suas respostas em frequência são imagens espelhadas com relação à frequência central $\pi/2$ (também conhecida como frequência de quadratura).

As condições (6.91) e (6.92) fornecem uma dica de que H possa ser escrito da seguinte forma

$$H(\omega) = \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right)^m Q(\omega) \quad (6.95)$$

onde $m \geq 1$ e Q é uma função periódica de período 2π . Observe que, quando $\omega = \pi$, $e^{i\pi} = -1$, então $H(\pi) = 0$, conforme a restrição em (6.92). Fazendo agora $\omega = 0$, obtém-se $e^0 = 1$ e, portanto, $H(0) = Q(0)$. Para que a condição (6.91) seja também satisfeita, é necessário que $Q(0) = \sqrt{2}$. Além disso, exige-se também que $Q(\pi) \neq 0$, para que a multiplicidade da raiz de H em π não seja aumentada por Q .

Como foi feita a escolha em (6.95) é interessante ver graficamente a forma da função $\left(\frac{1+e^{i\omega}}{2}\right)^m$ para alguns valores de m . Observe então as figuras 6.8 a 6.10. É possível notar que quanto maior for o valor de m menor será a banda passante do filtro H .

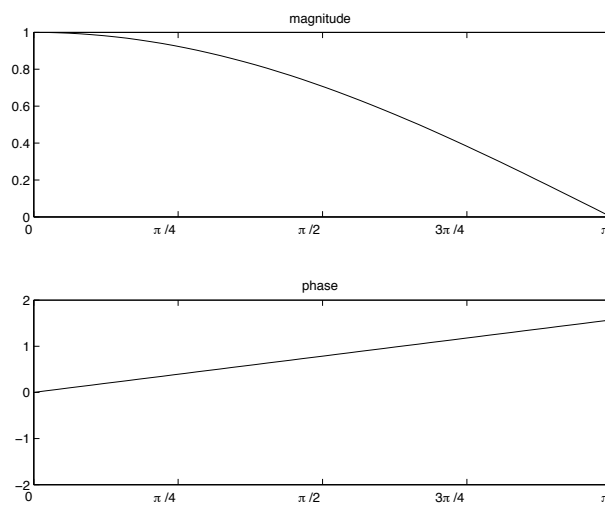


Figura 6.8: $m = 1$.

Nota-se que a Equação (6.89) é satisfeita para a seguinte escolha de $G(\omega)$

$$G(\omega) = \lambda(\omega) \overline{H(\omega + \pi)}, \quad (6.96)$$

onde $\lambda(\omega) = -\lambda(\omega + \pi)$ é uma função periódica de período 2π e $|\lambda(\omega)|^2 = 1$.

Observe que a escolha feita acima não especifica unicamente um G ou uma wavelet, temos a liberdade de escolher funções periódicas de período 2π e de módulo unitário. É possível, por exemplo, escolher $\lambda(\omega) = -e^{-j\omega}$, mas sem esquecer que outras escolhas são

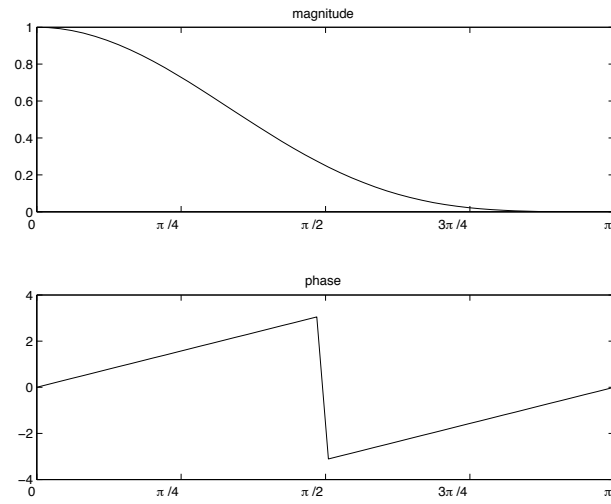


Figura 6.9: $m = 4$.

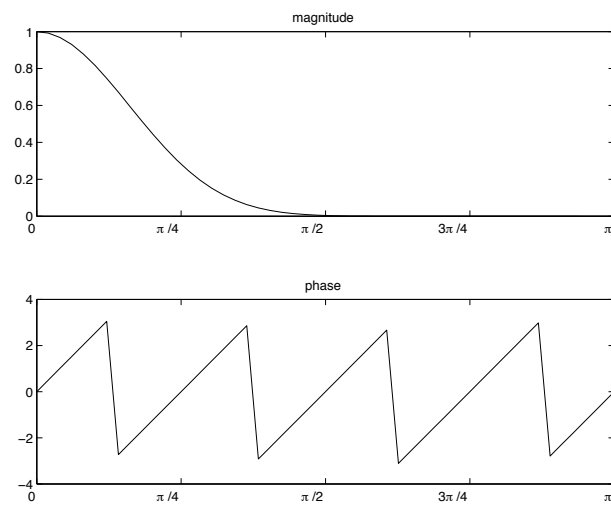


Figura 6.10: $m = 16$.

igualmente possíveis. Com tal escolha, G será da seguinte forma

$$G(\omega) = -e^{-j\omega} \overline{H(\omega + \pi)} \quad (6.97)$$

Escrevendo $H(\omega)$ explicitamente usando (6.60),

$$\begin{aligned} G(\omega) &= -e^{-j\omega} \sum_k \frac{h_k}{\sqrt{2}} e^{j(\omega+\pi)k} \\ &= \sum_k \frac{h_k}{\sqrt{2}} (-e^{-j\omega}) e^{j\omega k} e^{j\pi k} \\ &= \sum_k \frac{h_k}{\sqrt{2}} (-1)^{1-k} e^{-j(1-k)\omega} \\ &= \sum_n \frac{(-1)^n h_{1-n}}{\sqrt{2}} e^{-j\omega n} \end{aligned} \quad (6.98)$$

Comparando o resultado de (6.98) com a definição de G em (6.62), imediatamente identifica-se os coeficientes g_n

$$g_n = (-1)^n h_{1-n}. \quad (6.99)$$

Uma vez que a função escala ϕ é conhecida, os coeficientes $\{h_k\}$ são obtidos calculando o produto interno de ϕ com $\phi_{1,k}$. Por sua vez, os coeficientes $\{g_k\}$ serão obtidos pela relação (6.99). Através da Equação (5.61), é possível calcular a wavelet. Por outro lado, conhecendo-se os coeficientes $\{h_k\}$, é possível achar a função escala, nos racionais da forma $k2^j$, e por interpolação, nos demais pontos, resolvendo, para tanto, a equação de dilatação, Equação (5.60).

6.3 Funções no domínio da frequência

Na seção anterior, foi visto a representação das funções escala e wavelet no domínio da frequência. Foi também mostrado a equivalência entre a resposta em frequência de filtros digitais e a representação em frequência da relação de dilatação. Mostra-se nesta seção como aplicar os mesmos conceitos na representação de funções no domínio da frequência.

Seja uma função f em $L^2(\mathbb{R})$. É possível supor, sem perda alguma de generalidade, que esta função pode ser bem representada no subespaço V_0 . Chama-se então de f^0 a representação de f em V_0 , ou seja, $f^0 = P_{V_0} f$. Como, pela AMR, sabe-se que $V_{j+1} \subset V_j$, e em particular, $V_0 \subset V_{-1}$, é possível também representar f em V_{-1} , sem perder informação alguma, $f^0 = f^{-1}$.

Tome então o seguinte conjunto de funções $\{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ como base para o subespaço V_0 e $\{\phi_{1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ como base para V_{-1} . As projeções f^0 e f^{-1} podem ser representadas da seguinte

forma

$$f^0 = \sum_k a_{0,k} \phi_{0,k} = \sum_k a_{0,k} \phi(t - k) \quad (6.100)$$

$$f^{-1} = \sum_k a_{-1,k} \phi_{-1,k} = \sum_k a_{-1,k} \phi(2t - k) . \quad (6.101)$$

Para obter a representação no domínio da freqüência, tome a transformada de Fourier, como definida na Equação (5.4, das equações acima

$$\begin{aligned} \widehat{f}^0 &= \sum_k a_{0,k} \widehat{\phi}(\omega) e^{-i\omega k} \\ &= \widehat{\phi}(\omega) \sum_k a_{0,k} e^{-i\omega k} \\ &= \widehat{\phi}(\omega) A_0(\omega) \end{aligned} \quad (6.102)$$

$$\begin{aligned} \widehat{f}^{-1} &= \sum_k a_{-1,k} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-i\frac{\omega}{2}k} \\ &= \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_k a_{-1,k} e^{-i\frac{\omega}{2}k} \\ &= \widehat{\phi}(\omega) A_{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) , \end{aligned} \quad (6.103)$$

sendo definido

$$A_j(2^j \omega) = \sum_k a_{j,k} e^{-i2^j \omega k} . \quad (6.104)$$

A representação em freqüência de uma função qualquer, nada mais é do que o produto entre a representação em freqüência da função de base e a representação em freqüência do filtro de coeficientes $a_{j,k}$.

Seja f^j a projeção de f em um subespaço V_j , obtém-se

$$f^j = \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k} \quad (6.105)$$

então

$$\begin{aligned} \widehat{f}^j &= \sum_k a_{j,k} \widehat{\phi}_{j,k} \\ &= \sum_k a_{j,k} \widehat{\phi}(2^j \omega) e^{-i2^j \omega k} \\ &= \widehat{\phi}(2^j \omega) \sum_k a_{j,k} e^{-i2^j \omega k} \\ &= \widehat{\phi}(2^j \omega) A_j(2^j \omega) . \end{aligned} \quad (6.106)$$

Veja agora como é possível representar A_j em função de A_{j-1} . Para tanto, tome o exemplo de A_0 , dado em (6.102), e A_{-1} em (6.103). Aplique a Equação (5.69) a A_0 e obtêm-se

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sum_k \left(\sum_n h_n a_{-1,2k+n} \right) e^{-i\omega k} \\ &= \sum_n h_n \left(\sum_k a_{-1,2k+n} \right) e^{-i\omega k}, \end{aligned} \quad (6.107)$$

fazendo a substituição $m = 2k + n$,

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sum_n h_n \sum_k a_{-1,2k+n} e^{-i\omega k} \\ &= \sum_n h_n \sum_m a_{-1,m} e^{-i\omega m/2} e^{i\omega n/2} \\ &= \sum_n h_n A_{-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) e^{i\omega n/2} \\ &= A_{-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) \sum_n h_n e^{i\omega n/2} \\ &= A_{-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) H \left(-\frac{\omega}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.108)$$

Voltando agora na representação de f^0 no domínio da frequência (6.102) e utilizando o resultado obtido acima (6.108), obtêm-se

$$\begin{aligned} \hat{f}^0 &= \hat{\phi}(\omega) A(\omega) \\ &= \hat{\phi}(\omega) A_{-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) H \left(-\frac{\omega}{2} \right) \\ &= H \left(\frac{\omega}{2} \right) \hat{\phi} \left(\frac{\omega}{2} \right) A_{-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) H \left(-\frac{\omega}{2} \right) \\ &= \hat{\phi} \left(\frac{\omega}{2} \right) A_{-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) H \left(\frac{\omega}{2} \right) H \left(-\frac{\omega}{2} \right) \\ &= \left| H \left(\frac{\omega}{2} \right) \right| e^{j\angle H(\omega/2)} \left| H \left(-\frac{\omega}{2} \right) \right| e^{j\angle H(-\omega/2)} \hat{f}^{-1} \\ &= \left| H \left(\frac{\omega}{2} \right) \right| \left| H \left(-\frac{\omega}{2} \right) \right| \hat{f}^{-1} \\ &= \left| H \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 \hat{f}^{-1}, \end{aligned} \quad (6.109)$$

onde emprega-se que $|H(\omega)|$ é uma função par, o que pode ser facilmente verificado pela própria definição de $H(\omega)$ na Equação (6.60). De maneira geral, tem-se

$$\hat{f}^j = \left| H \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 \hat{f}^{j-1}. \quad (6.110)$$

Obtém-se acima uma relação entre a representação em frequência da projeção de uma função f em dois subespaços subseqüentes. Conhecendo-se a transformada de Fourier da função em uma dada escala, e sabendo quais os coeficientes de escala, é possível obter a representação em frequência em uma escala subseqüente, basta para tanto utilizar a relação (6.110).

De maneira análoga é possível derivar a representação no domínio de Fourier dos detalhes perdidos ao se passar de uma resolução para a sua subseqüente. Como visto, a ARM fornece a seguinte relação entre os subespaços subseqüentes $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$, de forma que sendo $f^{-1} \in V_{-1}$, $f^0 \in V_0$ e $\delta^0 \in W_0$, obtém-se a relação $f^{-1} = f^0 + \delta^0$. Mostrou-se acima como é possível obter \hat{f}^0 a partir de \hat{f}^{-1} . Mostra-se agora como obter $\hat{\delta}^0$. Utilizando (5.70), é possível escrever δ^0 como uma combinação linear de funções wavelet $\psi_{j,k}$

$$\delta^0 = \sum_k d_{0,k} \psi_{0,k} . \quad (6.111)$$

Tomando a transformada de Fourier da equação acima,

$$\begin{aligned} \hat{\delta}^0 &= \sum_k d_{0,k} \hat{\psi}(\omega) e^{-i\omega k} \\ \hat{\delta}^0 &= \hat{\psi}(\omega) \sum_k d_{0,k} e^{-i\omega k} \\ \hat{\delta}^0 &= \hat{\psi}(\omega) D(\omega) , \end{aligned} \quad (6.112)$$

onde define-se

$$D(\omega) = \sum_k d_{0,k} e^{-i\omega k} . \quad (6.113)$$

Utiliza-se agora (6.61) em (6.112),

$$\hat{\delta}^0 = D(\omega) G\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6.114)$$

Os coeficientes de wavelet $d_{j,k}$ são dados pela relação (5.71)

$$d_{0,k} = \sum_n \bar{g}_n a_{-1,2k+n} . \quad (6.115)$$

Substituindo em (6.113)

$$\begin{aligned} D(\omega) &= \sum_k \sum_n g_n a_{-1,2k+n} e^{-i\omega k} \\ &= \sum_n g_n \sum_k a_{-1,2k+n} e^{-i\omega k} \end{aligned} \quad (6.116)$$

e agora fazendo a substituição $m = 2k + n$

$$\begin{aligned}
 D(\omega) &= \sum_n g_n \sum_m a_{-1,m} e^{-i\omega(m-n)/2} \\
 &= \sum_n g_n \sum_m a_{-1,m} e^{-i\frac{\omega}{2}m} e^{i\frac{\omega}{2}n} \\
 &= \sum_n g_n A_{-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) e^{i\frac{\omega}{2}n} \\
 &= A_{-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) \sum_n g_n e^{i\frac{\omega}{2}n} \\
 &= A_{-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) G \left(-\frac{\omega}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{6.117}$$

O resultado obtido (6.117) pode agora ser utilizado em (6.118), obtendo, assim

$$\hat{\delta}^0 = A_{-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) G \left(-\frac{\omega}{2} \right) G \left(\frac{\omega}{2} \right) \hat{\phi} \left(\frac{\omega}{2} \right) . \tag{6.118}$$

Fazendo uso de (6.103) e do fato de $|G(\omega)|$ ser uma função par, obtém-se

$$\hat{\delta}^0 = \left| G \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 \hat{f}^{-1} . \tag{6.119}$$

Utilizando-se agora os resultados obtidos em (6.109) e (6.119) obtém-se o seguinte

$$\begin{aligned}
 \hat{f}^{-1} &= \hat{\delta}^0 + \hat{f}^0 \\
 &= \left| H \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 \hat{f}^{-1} + \left| G \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 \hat{f}^{-1} \\
 &= \hat{f}^{-1} \left(\left| H \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 + \left| G \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 \right) ,
 \end{aligned} \tag{6.120}$$

ou seja,

$$\left| H \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 + \left| G \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 = 1. \tag{6.121}$$

Die Summe innerer Bewegungen, welche dem Menschen leicht fallen und die er in Folge dessen gerne und mit Anmut tut, nennt man seine Seele; – er gilt als seelenlos, wenn er Mühe und Härte bei inneren Bewegungen merken läßt.

Friedrich Nietzsche

7

Fator de escala maior do que dois

7.1 Construção das wavelets de Daubechies

A construção das wavelets de Daubechies é baseada na construção do filtro H ou m_0 ao invés da construção direta da função escala ϕ . Como visto anteriormente, m_0 deve satisfazer algumas condições, dentre elas:

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1. \quad (7.1)$$

É possível mostrar que, para algumas restrições serem satisfeitas, como $\{\psi_{j,k}\}$ constituir uma base de wavelets associada a uma ARM, será necessário que m_0 seja fatorado da seguinte forma

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N \mathfrak{L}(\omega), \quad (7.2)$$

em que $N \geq 1$ e \mathfrak{L} um polinômio trigonométrico, o que constituirá, na verdade, uma condição para garantir certa regularidade a ψ (Daubechies, 1992). Há de se ressaltar que nem todo m_0 que satisfizer essas condições terá a ele uma wavelet associada, tais condições são necessárias, porém não suficientes.

As wavelets de Daubechies são wavelets de suporte compacto, esta é então a primeira consideração que se deve fazer. Uma maneira prática de impôr suporte compacto às wavelets, é impô-lo primeiramente à função escala. Escolhendo-se uma função escala ϕ de

suporte compacto, pela definição de h_n ,

$$h_n = \sqrt{2} \int \phi(x) \overline{\phi(2x - n)} dx, \quad (7.3)$$

é possível concluir que apenas um número finito dos h_n serão não-nulos. Desta forma, como ψ pode ser escrito por uma combinação linear finita dos elementos $\phi_{-1,k}$,

$$\psi = \sum_n g_n \phi_{-1,n}, \quad \text{em que } g_n = (-1)^n \overline{h_{-n+1}}, \quad (7.4)$$

que são funções de suporte compacto, então ψ também será uma função de suporte compacto.

Sendo ϕ uma função escala de suporte compacto e periódica de período 2π , então o filtro m_0 ,

$$m_0(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_n h_n e^{-in\omega}, \quad (7.5)$$

torna-se um polinômio trigonométrico.

Juntando as condições (7.1) e (7.2), é possível concluir que procura-se uma função

$$M_0(\omega) = |m_0(\omega)|^2, \quad (7.6)$$

que seja um polinômio em $\cos(\omega)$ e satisfaça

$$M_0(\omega) + M_0(\omega + \pi) = 1 \quad (7.7)$$

e

$$M_0(\omega) = \left(\cos^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) \right)^N L(\omega), \quad (7.8)$$

sendo $L(\omega) = |\mathcal{L}(\omega)|^2$ também um polinômio em $\cos(\omega)$. É mais conveniente, no entanto, escrever $L(\omega)$ como um polinômio em $\text{sen}^2(\omega/2) = (1 - \cos(\omega))/2$,

$$M_0(\omega) = \left(\cos^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) \right)^N P \left(\text{sen}^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) \right). \quad (7.9)$$

Aplicando agora (7.9) à restrição (7.7), obtém-se

$$\left(\cos^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) \right)^N P \left(\text{sen}^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) \right) + \left(\cos^2 \left(\frac{\omega + \pi}{2} \right) \right)^N P \left(\text{sen}^2 \left(\frac{\omega + \pi}{2} \right) \right) = 1. \quad (7.10)$$

Fazendo a substituição $y = \text{sen}^2(\omega/2)$,

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1, \quad (7.11)$$

condição esta que deve ser satisfeita para todo $y \in [0, 1]$. Mas é possível ver (7.11) da seguinte forma

$$(1 - y)^N q_1(y) + y^N q_2(y) = 1. \quad (7.12)$$

Pelo teorema de Bezout (Apêndice E), dado que $(1 - y)^N$ e y^N não possuem raízes em comum, os polinômios q_1 e q_2 , de grau $\leq N - 1$, são únicos. Fazendo-se a substituição de $1 - y$ por y na Equação (7.12), obtém-se

$$(1 - y)^N q_2(1 - y) + y^N q_1(1 - y) = 1. \quad (7.13)$$

Como, pelo teorema de Bezout, q_1 e q_2 são únicos, então $q_2(y) = q_1(1 - y)$. Desta forma $P(y) = q_1(y)$ é uma solução para (7.11). Da Equação (7.13) obtém-se

$$q_1(y) = (1 - y)^{-N} [1 - y^N q_1(1 - y)]. \quad (7.14)$$

O termo $(1 - y)^{-N}$ pode ser escrito em série Taylor da seguinte forma:

$$(1 - y)^{-N} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(N + n - 1)!}{(N - 1)! n!} y^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{N + n - 1}{n} y^n. \quad (7.15)$$

Se a série for truncada deixando de fora o termo de ordem N , então (7.14) poderá ser reescrito da seguinte forma

$$q_1(y) = \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N + n - 1}{n} y^n + O(y^N). \quad (7.16)$$

Como o grau de $q_1 \leq N - 1$, então q_1 é igual à sua expansão em série de Taylor truncada após N termos,

$$q_1(y) = \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N + n - 1}{n} y^n. \quad (7.17)$$

A expressão (7.17) fornece uma solução explícita para (7.11). Esta única solução de grau mais baixo chama-se P_N . Existem, no entanto, outras soluções de grau mais elevado. Qualquer solução P deverá satisfazer (7.12) e, assim

$$(1 - y)^N [P(y) - P_N(y)] + y^N [P(1 - y) - P_N(1 - y)] = 0. \quad (7.18)$$

Conclui-se que $P - P_N$ é divisível por y^N , podendo ser escrito na seguinte forma

$$P(y) - P_N(y) = y^N \tilde{P}(y). \quad (7.19)$$

Usando (7.19) em (7.18) obtém-se

$$\tilde{P}(y) + \tilde{P}(1 - y) = 0, \quad (7.20)$$

ou seja, \tilde{P} é antisimétrico com relação a $\frac{1}{2}$.

Com as informações anteriores obtém-se uma completa caracterização de $|m_0(\omega)|^2$, mas deseja-se obter m_0 e não $|m_0|^2$.

No caso em que $N = 1$ tem-se que (7.17) se resumirá a $L(\omega) = 1$. Fazendo a substituição verifica-se que tal L é realmente solução para (7.1) quando $N = 1$. Da mesma forma verifica-se que $L(\omega) = 2 - \cos(\omega)$ é solução de (7.1) quando $N = 2$.

7.2 Transformada wavelet discreta com fator de escala qualquer

Conforme visto na Seção 5.9, no caso da Transformada Discreta, restringem-se os fatores de escala e translação. O fator de escala será da forma $s = s_0^j$ onde $j \in \mathbb{Z}$ e s_0 deve ser tal que $s_0 \neq 0$. O fator de translação dependerá do fator de escala da seguinte forma: $u = ku_0s_0^j$, em que $u_0 > 0$ e $k \in \mathbb{Z}$. A transformada discreta de wavelets terá então a seguinte forma

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \psi\left(\frac{t - ku_0s_0^j}{s_0^j}\right) = s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j}t - ku_0). \quad (7.21)$$

É possível seguir o mesmo desenvolvimento adotado na Seção 6.2 e deduzir algumas propriedades no domínio da frequência. Se a análise em resoluções múltiplas (ARM) for válida, poderemos usar o fato de os espaços gerados pelas funções serem espaços encaixantes. Utiliza-se $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ para escrever uma função qualquer em V_j ou em W_j como uma combinação linear de funções em V_{j+1} . No entanto, mostra-se posteriormente na Seção 7.6 que só é possível construir uma ARM com filtros finitos quando o fator de escala for um número inteiro. Este será o caso tratado nesta seção. Na seção 7.6, veremos o caso da escolha de um fator de escala fracionário. Considerando então um fator de escala inteiro e, por conseguinte, a validade da ARM, é possível escrever a função escala ϕ como uma combinação linear de funções $\{\phi_{-1,\cdot}\}$,

$$\phi(x) = s_0^{1/2} \sum_k h_k \phi(s_0x - ku_0). \quad (7.22)$$

Tal relação no domínio da frequência é reescrita como:

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}(\omega) &= s_0^{1/2} \sum_k h_k \frac{1}{|s_0|} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{s_0}\right) e^{-jku_0\omega/s_0} \\ &= s_0^{-1/2} \sum_k h_k \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{s_0}\right) e^{-jku_0\omega/s_0}.\end{aligned}\quad (7.23)$$

Define-se então

$$H(\omega) = \sum_k h_k e^{-jku_0\omega} \quad (7.24)$$

e assim a Equação (7.23) pode ser reescrita na forma

$$\widehat{\phi}(\omega) = s_0^{-1/2} H\left(\frac{\omega}{s_0}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{s_0}\right). \quad (7.25)$$

Seguindo os mesmos passos, define-se

$$G(\omega) = \sum_k g_k e^{-jku_0\omega} \quad (7.26)$$

e a relação entre a wavelet e a função escala no domínio da frequência será dada por

$$\widehat{\psi}(\omega) = s_0^{-1/2} G\left(\frac{\omega}{s_0}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{s_0}\right). \quad (7.27)$$

É possível deduzir algumas propriedades sobre os filtros H e G , assim como foi feito na Seção 6.2, a Equação (6.77) pode ser reescrita, no caso de uma fator escala qualquer, da seguinte forma

$$\begin{aligned}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left| s_0^{-1/2} H\left(\frac{\omega + 2\pi l}{s_0}\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\omega + 2\pi l}{s_0}\right) \right|^2 \\ &= s_0^{-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |H(\omega' + \pi l)|^2 |\widehat{\phi}(\omega' + \pi l)|^2 = 1.\end{aligned}\quad (7.28)$$

O algoritmo rápido para decomposição também pode ser deduzido da mesma maneira em que foi deduzido na Seção 5.6. Tome para tanto a relação de uma função escala em um subespaço V_0 reescrevendo-a na base de V_{-1}

$$\phi(x) = \sum_k h_k \phi_{-1,k}(x) = \sum_k h_k s_0^{1/2} \phi(s_0 x - ku_0), \quad (7.29)$$

em que $h_k = \langle f, \phi_{-1,k} \rangle$. Considere a relação de escala e utilize o resultado de (7.29)

$$\begin{aligned}\phi_{m,n}(x) &= s_0^{-m/2} \phi(s_0^{-m}x - nu_0) \\ &= s_0^{-m/2} \sum_k h_k s_0^{1/2} \phi(s_0^{-(m-1)}x - (s_0 u_0 n - u_0 k)) \\ &= \sum_k h_k \phi_{m-1, s_0 n - k}(x).\end{aligned}\tag{7.30}$$

Como $a_{m,n} = \langle f, \phi_{m,n} \rangle$, reescreve-se a fórmula acima (7.30) e obtém-se

$$a_{m,n} = \sum_k \bar{h}_k a_{m-1, s_0 n - k}, \tag{7.31}$$

que define o algoritmo rápido para obter os coeficientes de representação de uma função em uma escala a partir dos coeficientes da escala anterior. De maneira equivalente obtém-se os coeficientes wavelets

$$d_{m,n} = \sum_k \bar{g}_k a_{m-1, s_0 n - k}. \tag{7.32}$$

Note que, assim como anteriormente, a operação de mudança de escala pode ser vista como uma convolução do sinal com um filtro e uma subsequente decimação. No caso em questão a decimação será um de fator igual a s_0 . Como trata-se de um fator de escala inteiro, não haverá maiores problemas e é possível implementar facilmente o algoritmo rápido em (7.31) e (7.32).

A decimação de um sinal x por fator qualquer M é dada

$$v = (\downarrow M)x \tag{7.33}$$

$$v(k) = x(Mk). \tag{7.34}$$

Generalizando o resultado da Seção 6.1 é possível deduzir a relação de decimação para o domínio da frequência. Faz-se então

$$V(\omega) = \sum_k v(k)e^{-j\omega k} = \sum_k x(Mk)e^{-j\omega k} = \sum_{n=Mk} x(n)e^{-j\frac{\omega}{M}n}. \tag{7.35}$$

Faz-se então

$$\begin{aligned}A(\omega) &= \sum_{k=Mn} b(k)e^{-j\omega k} \\ &= \frac{1}{M} \sum_k b(k)e^{-j\omega k} + \frac{1}{M} \sum_k b(k)e^{-j(\omega + \frac{2\pi}{M})k} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{M} \sum_k b(k) e^{-j(\omega + \frac{4\pi}{M})k} + \dots + \\
 & + \frac{1}{M} \sum_k b(k) e^{-j(\omega + \frac{(M-1)2\pi}{M})k} \\
 = & \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_k b(k) e^{-j(\omega + \frac{2\pi i}{M})k} \\
 = & \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} B\left(\omega + \frac{2\pi i}{M}\right). \tag{7.36}
 \end{aligned}$$

Utilizando a relação obtida em (7.36) em (7.35), obtém-se

$$V(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X\left(\frac{\omega}{M} + \frac{2\pi i}{M}\right). \tag{7.37}$$

É possível também generalizar o resultado para uma interpolação por um fator M , dado

$$u = (\uparrow M)v = \begin{cases} u(k) = v(k/M), & \text{se } k = nM, \text{ onde } n \in \mathbb{N} \\ u(k) = 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{7.38}$$

Deve-se então verificar quais as conseqüências dessa interpolação no domínio da frequência

$$\begin{aligned}
 U(\omega) & = \sum_n u(n) e^{-j\omega n} \\
 & = \sum_{n=Mk} u(n) e^{-j\omega n} \\
 & = \sum_k u(Mk) e^{-j\omega Mk} \\
 & = \sum_k v(k) e^{-jM\omega k} \\
 & = V(M\omega). \tag{7.39}
 \end{aligned}$$

No caso em que o fator de decimação M for um número fracionário, da forma $M = P/Q$, é possível escrever $(\downarrow M)$ da seguinte forma:

$$(\downarrow M) = (\downarrow P)(\uparrow Q) \quad ? \tag{7.40}$$

Se, dado um sinal x , obtém-se v a partir da decimação de x

$$v = (\downarrow M)x = (\downarrow P)(\uparrow Q)x, \tag{7.41}$$

é possível obter a representação na frequência, bastando para tanto tomar os resultados

de (7.36) e (7.39):

$$V(\omega) = (\downarrow P)(X(Q\omega)) = \frac{1}{P} \sum_{i=0}^{P-1} X\left(\frac{Q\omega}{P} + \frac{2\pi i}{P}\right). \quad (7.42)$$

Mostra-se na Seção 7.6 que não é possível realizar uma decimação racional da maneira descrita pela Equação (7.40). Na verdade, seria necessária uma interpolação entre os processo de upsample e decimação (downsample), sendo tanto mais exato quanto mais próximo o filtro de interpolação for do filtro ideal (sinc) (Schafer e Rabiner, 1973). É fácil notar que o processo descrito acima estaria errado, analisando um caso qualquer. Após o upsample teremos vários zeros inseridos no sinal. Com o processo de decimação acaba-se tomando vários zeros e desprezando algumas amostras do sinal original. Se um sinal inicialmente é, por exemplo, em toda a sua extensão maior do que um valor fixo e positivo, após o upsample e a decimação obtém-se zeros no novo sinal, o que está em desconformidade com o sinal original, é possível assim perceber que este processo não é válido.

7.3 Particionamento do subespaço com mais de uma wavelet

Como mostrado no artigo de Cohen e Daubechies (1993) e também na Seção 7.6, fatores de dilatação não-inteiros não podem gerar uma análise em resoluções múltiplas com funções escala de suporte compacto. Uma segunda alternativa para se obter uma melhor resolução em frequência é utilizar mais de um espaço de detalhes, ou seja, tendo-se um fator de dilatação N , utiliza-se então uma função escala ϕ e $N - 1$ diferentes wavelets ψ_l , $l = 1, \dots, N - 1$. Tais funções devem satisfazer relações de escala semelhantes $\phi(x) = \sum_n c_n \phi(Nx - n)$ ou, equivalentemente, na frequência, $\hat{\phi}(\omega) = m_0(\omega/N)\hat{\phi}(\omega/N)$, onde assume-se aqui $m_0(\omega) = N^{-1} \sum_n c_n e^{i\omega n}$. As diferentes ψ_l podem ser escritas como combinação linear de $\phi(Nx - n)$. Existe, no entanto, polinômios trigonométricos m_l de forma tal que $\hat{\psi}_l(\omega) = m_l(\omega/N)\hat{\phi}(\omega/N)$. Para que m_l sejam de fato polinômios, é necessário assumir suporte compacto das funções ϕ e ψ_l . Para que se tenha ortonormalidade nos diferentes subespaços na análise em resoluções múltiplas é necessário que a matriz $N \times N$, $M(\omega)$, cujos elementos são da forma

$$M_{lk}(\omega) = m_{l-1}\left(\omega + \frac{2\pi}{N}(k-1)\right), \quad (7.43)$$

seja unitária para todo ω , ou seja, a inversa de M é a sua própria transposta complexo conjugada.

Para um valor de N qualquer, a mudança de um subespaço V_j para um subespaço de resolução mais grosseira V_{j+1} corresponde ao salto de $\log_2 N$ oitavas em frequência, já que o fator de dilatação entre as duas resoluções é N . Cada uma das wavelets ψ_l corresponde então, em média, a uma largura de banda de $(N - 1)^{-1} \log_2 N$. Para $N = 4$, por exemplo, teríamos 3 wavelets para duas oitavas, correspondendo a uma média de $\frac{2}{3}$ oitavas por wavelet, o que é melhor que a relação de uma oitava por wavelet obtida com $N = 2$.

No artigo de [Cohen e Daubechies \(1993\)](#), ilustra-se um processo de construção de uma base wavelet com fator de dilatação 4, dada uma base ortonormal wavelet para o fator de dilatação 2. Para tanto, referencia-se as wavelets com fator de escala 4 com um til “˘” sobre as letras e as sem o til “˘” serão utilizadas para designar aquelas cujo fator de escala é 2. Os polinômios trigonométricos são então dados por:

$$\tilde{m}_0(\omega) = m_0(\omega)m_0(2\omega), \tag{7.44}$$

$$\tilde{m}_1(\omega) = m_0(\omega)m_1(2\omega), \tag{7.45}$$

$$\tilde{m}_2(\omega) = m_1(\omega)m_1(2\omega), \tag{7.46}$$

$$\tilde{m}_3(\omega) = m_1(\omega)m_0(2\omega), \tag{7.47}$$

em que $m_1(\omega) = e^{i\omega} \overline{m_0(\omega + \pi)}$ e $m_0(\omega)$ é um polinômio trigonométrico associado a uma base ortonormal wavelet com $N = 2$.

Um banco de filtros para o esquema de decomposição proposto acima é ilustrado na Figura 7.1. O banco é constituído por quatro ramos, mas como o fator de decimação é 4, a densidade de amostras ao longo do banco é mantida constante.

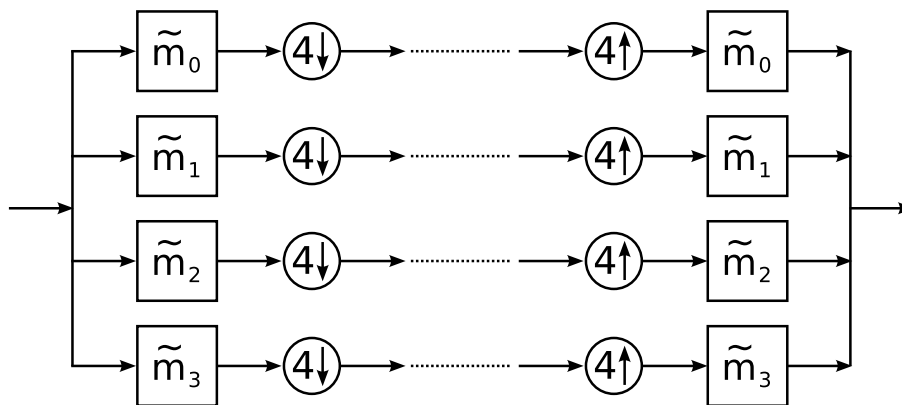


Figura 7.1: Banco de Filtros com fator de escala 4.

Tomando o caso mais simples, obtém-se $m_0(\omega) = (1 + e^{-i\omega})$, o que fornece as wavelets de Haar. Para tal escolha de m_0 , m_1 será dado por $m_1(\omega) = e^{i\omega}(1 - e^{i\omega})$. Os coeficien-

tes para m_0 são $[\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ e para m_1 são $[\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2]$. É possível então calcular os coeficientes para \tilde{m}_i , $i = 0, 1, 2, 3$. Tem-se respectivamente: $[1/2, 1/2, 1/2, 1/2]$, $[1/2, 1/2, -1/2, -1/2]$, $[1/2, -1/2, -1/2, 1/2]$ e $[1/2, -1/2, 1/2, -1/2]$. A matriz de coeficientes M_c é dada então por:

$$M_c = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad (7.48)$$

e os polinômios trigonométricos para o caso em questão serão dados por:

$$\tilde{m}_0(\omega) = 1 + e^{-i\omega} + e^{-i2\omega} + e^{-i3\omega}, \quad (7.49)$$

$$\tilde{m}_1(\omega) = e^{i\omega} + e^{i2\omega} - e^{i3\omega} - e^{i4\omega}, \quad (7.50)$$

$$\tilde{m}_2(\omega) = e^{i3\omega} - e^{i4\omega} - e^{i5\omega} + e^{i6\omega}, \quad (7.51)$$

$$\tilde{m}_3(\omega) = -1 + e^{i\omega} + e^{-i\omega} - e^{i2\omega}. \quad (7.52)$$

As respostas em frequência dos filtros acima especificados, nas equações (7.49) a (7.52), são graficamente ilustradas na figuras 7.2, 7.3, 7.4 e 7.5, respectivamente.

É fácil verificar que filtros da forma especificada em (7.47) fazem com que a matriz M dada em (7.43) seja de fato unitária, condição necessária para um banco de filtros com reconstrução perfeita, como mostrado na Seção 7.4.

A função $\tilde{\phi}$ correspondente ao filtro \tilde{m}_0 é dada então por:

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{\phi}}(\omega) &= \prod_{j=1}^{\infty} \tilde{m}_0(4^{-j}\omega) \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} [m_0(2^{-2j}\omega)m_0(2^{-2j+1}\omega)] \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\omega) = \widehat{\phi}(\omega), \end{aligned} \quad (7.53)$$

ou seja, $\tilde{\phi} \equiv \phi$. As funções de base dos subespaços \tilde{V}_j são equivalentes às funções de base ϕ . Isso significa que o espaço gerado pelas primeiras funções é equivalente ao subespaço das segundas, ou seja, $\tilde{V}_0 = V_0$. Seguindo o mesmo princípio, os espaços \tilde{V}_j gerados por funções $\tilde{\phi}(4^{-j}x - k)$ são equivalentes aos subespaços V_m onde o índice m é um número par, tendo então $\tilde{V}_j = V_{2j}$.

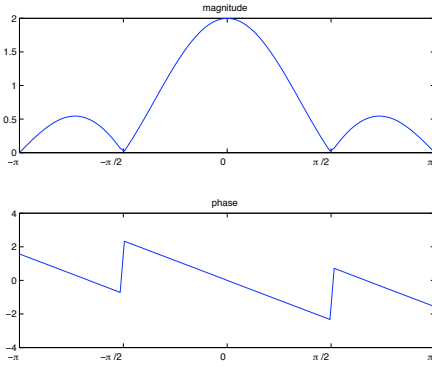


Figura 7.2: Resposta em Frequência do Filtro \tilde{m}_0 .

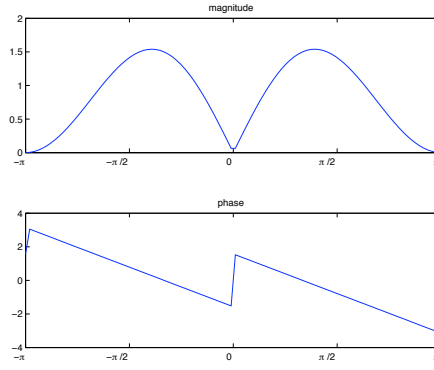


Figura 7.3: Resposta em Frequência do Filtro \tilde{m}_1 .

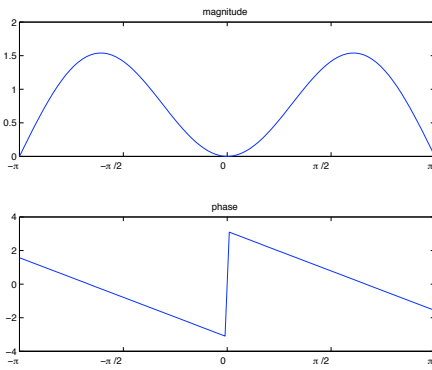


Figura 7.4: Resposta em Frequência do Filtro \tilde{m}_2 .

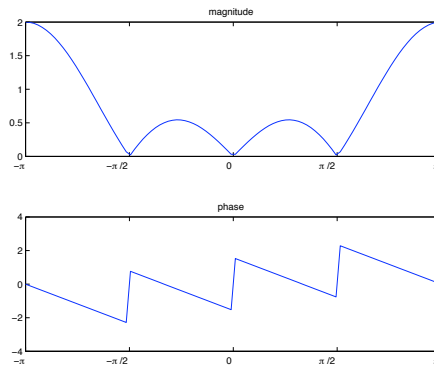


Figura 7.5: Resposta em Frequência do Filtro \tilde{m}_3 .

As funções wavelets $\tilde{\psi}^l$, $l = 1, 2, 3$ são dadas por

$$\tilde{\psi}^l(\omega) = \widehat{m}_l\left(\frac{\omega}{4}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{4}\right), \quad (7.54)$$

em particular,

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{\psi}}^1(\omega) &= m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) m_0\left(\frac{\omega}{4}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{4}\right) \\ &= m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \widehat{\psi}(\omega), \end{aligned} \quad (7.55)$$

então $\tilde{\psi}^1 \equiv \psi$. Como a função ψ é em essência uma função de banda de oitava, assim também será $\tilde{\psi}$, por conseguinte. Este fato mostra que a primeira suposição de que a largura de banda média por wavelet seria de 2/3 de oitava estava equivocada. A função $\tilde{\psi}^1$ possui a mesma localização em frequência que a função ψ . Por outro lado, as duas wavelets remanescentes, $\tilde{\psi}^2$ e $\tilde{\psi}^3$, que não estavam presentes no caso do fator de escala 2, possuem sim uma melhor localização em frequência. As duas, juntas, são responsáveis por uma oitava, o que leva a crer, por uma análise ingênua (novamente), que sejam funções com largura de banda de 1/2 oitava aproximadamente, mas certamente, menor que uma

oitava.

As funções $\tilde{\psi}^2$ e $\tilde{\psi}^3$ geram espaços \tilde{W}_j^2 e \tilde{W}_j^3 que, juntamente com $\tilde{W}_j^1 = W_{2j}$, complementam $\tilde{V}_j = V_{2j}$ em relação a $\tilde{V}_{j-1} = V_{2j-2}$,

$$\tilde{V}_{j-1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j^1 \oplus \tilde{W}_j^2 \oplus \tilde{W}_j^3 \quad (7.56)$$

$$V_{2j-2} = V_{2j} \oplus W_{2j} \oplus \tilde{W}_j^2 \oplus \tilde{W}_j^3. \quad (7.57)$$

Como $V_{2j} \oplus W_{2j} = V_{2j-1}$, segue que $\tilde{W}_j^2 \oplus \tilde{W}_j^3 = W_{2j-1}$. Todo subespaço da forma W_{2j-1} , de índice ímpar, será dividido em dois subespaços de aproximadamente 1/2 oitava.

7.4 Generalização para um fator de escala inteiro maior que dois

Um esquema de análise utilizando um fator de escala inteiro N maior que 2, em geral, possui uma função escala ϕ e $N - 1$ diferentes funções wavelets ψ^l , $l = 1, 2, \dots, N - 1$. A função escala deve satisfazer uma relação de escala e translação da forma

$$\phi(x) = \sum_n c_n \phi(Nx - n), \quad (7.58)$$

que, sob o ponto de vista da frequência, é expressa como

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{N}\right), \quad (7.59)$$

no qual

$$m_0(\omega) = \frac{1}{N} \sum_n c_n e^{in\omega}. \quad (7.60)$$

Sob a ótica da análise em resoluções múltiplas, cada subespaço gerado pelas funções escala será subsequentemente decomposto em um espaço de baixa resolução mais $N - 1$ espaços de detalhes associados às $N - 1$ wavelets. Ou seja, dado um \tilde{V}_{j-1} qualquer, este será decomposto em $\tilde{V}_{j-1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j^1 \oplus \tilde{W}_j^2 \oplus \dots \oplus \tilde{W}_j^{N-1}$. Fica claro então que $\tilde{V}_j, \tilde{W}_j^1, \dots, \tilde{W}_j^{N-1} \subset \tilde{V}_{j-1}$. Desta forma, todas as wavelets ψ^l podem ser escritas como uma combinação linear de $\phi(Nx - n)$,

$$\psi^l(x) = \sum_n g_n^l \phi(Nx - n). \quad (7.61)$$

No domínio de Fourier, obtém-se

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}^l(\omega) &= \sum_n g_n^l \frac{1}{N} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{N}\right) e^{-j\frac{\omega}{N}n} \\ &= \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{N}\right) m_l\left(\frac{\omega}{N}\right),\end{aligned}\quad (7.62)$$

onde é definido

$$m_l(\omega) = \frac{1}{N} \sum_n g_n^l e^{-j\omega n}. \quad (7.63)$$

Assumindo que ϕ e ψ^l possuem suporte compacto, então m_0 e m_l serão polinômios.

Deseja-se mostrar a ortonormalidade nos diferentes subespaços. Faz-se então um desenvolvimento análogo ao que foi feito na Seção 6.2. Para que se tenha a ortonormalidade entre as funções da família $\{\phi(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ exige-se que $\langle \phi(x), \phi(x-n) \rangle = \delta_{o,n}$. Seguindo os mesmos passos de (6.63) a (6.64), obtém-se

$$\langle \phi(x), \phi(x-n) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{j\omega n} d\omega, \quad (7.64)$$

onde define-se

$$A(\omega) = |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2. \quad (7.65)$$

A escolha que garante a ortogonalidade é

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} A(\omega) = 1, \quad (7.66)$$

pois

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\omega n} = \delta_{o,n}. \quad (7.67)$$

Tal escolha se reflete em m_0 da seguinte forma, usando $\widehat{\phi}(\omega) = \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{N}\right)m_0\left(\frac{\omega}{N}\right)$:

$$\begin{aligned}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 &= 1 \\ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{\phi}\left(\omega + \frac{2\pi l}{N}\right) \right|^2 \left| m_0\left(\omega + \frac{2\pi l}{N}\right) \right|^2 &= 1.\end{aligned}\quad (7.68)$$

Separando nas várias fases, $l = Nk$, $l = Nk + 1$, \dots , $l = Nk + N - 1$, obtém-se

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 |m_0(\omega + 2\pi k)|^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{\phi} \left(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi}{N} \right) \right|^2 \left| m_0 \left(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi}{N} \right) \right|^2 + \dots + \\
 & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{\phi} \left(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi(N-1)}{N} \right) \right|^2 \left| m_0 \left(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi(N-1)}{N} \right) \right|^2 \\
 1 = & \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{\phi} \left(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N} \right) \right|^2 \left| m_0 \left(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N} \right) \right|^2
 \end{aligned} \tag{7.69}$$

Como m_0 é periódico com período 2π , é possível fazer a seguinte simplificação:

$$\begin{aligned}
 1 &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{\phi} \left(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N} \right) \right|^2 \left| m_0 \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right) \right|^2 \\
 1 &= \sum_{i=0}^{N-1} \left| m_0 \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right) \right|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{\phi} \left(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N} \right) \right|^2 \\
 1 &= \sum_{i=0}^{N-1} \left| m_0 \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right) \right|^2,
 \end{aligned} \tag{7.70}$$

que é a condição de ortonormalidade sobre m_0 .

Para que cada uma das famílias $\{\psi^l(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$, $l = 1, \dots, N-1$, seja ortonormal, exige-se que $\langle \psi^l, \psi^l(x-n) \rangle = \delta(n)$. De forma semelhante ao desenvolvimento anterior, escolhe-se

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\phi} \left(\omega + \frac{2\pi l}{N} \right) \right|^2 \left| m_l \left(\omega + \frac{2\pi l}{N} \right) \right|^2 = 1. \tag{7.71}$$

Usando agora $\widehat{\psi}^l(\omega) = \widehat{\phi}(\frac{\omega}{N})m_l(\frac{\omega}{N})$ e fazendo a separação nas diversas fases, chega-se à seguinte conclusão:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left| m_l \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right) \right|^2 = 1, \quad l = 1, \dots, N-1. \tag{7.72}$$

Deve-se, além de exigir a ortonormalidade dentro uma família, exigir a ortogonalidade entre famílias diferentes para que, assim, os subespaços \tilde{V}_j e \tilde{W}_j^l sejam ortogonais entre si, e também para que os subespaços \tilde{W}_j^l e $\tilde{W}_j^{l'}$ sejam ortogonais para $l \neq l'$. Para que exista ortogonalidade entre \tilde{V}_j e \tilde{W}_j^l é necessário que

$$\begin{aligned}
 \langle \phi(x), \psi^l(x-n) \rangle &= 0 \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overline{\psi^l(x-n)} dx &= 0 \\
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\omega) \overline{\widehat{\psi}^l(\omega)} e^{i\omega n} d\omega &= 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\omega + 2\pi l) \overline{\widehat{\psi}^l(\omega + 2\pi l)} e^{i\omega n} d\omega = 0, \quad (7.73)$$

e, portanto, escolhe-se

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\omega + 2\pi l) \overline{\widehat{\psi}^l(\omega + 2\pi l)} = 0. \quad (7.74)$$

Escrevendo $\widehat{\phi}$ e $\widehat{\psi}^l$ em função de m_0 e m_l , obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}\left(\omega + \frac{2\pi l}{N}\right) m_0\left(\omega + \frac{2\pi l}{N}\right) \overline{\widehat{\phi}\left(\omega + \frac{2\pi l}{N}\right) m_l\left(\omega + \frac{2\pi l}{N}\right)} &= 0 \\ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\phi}\left(\omega + \frac{2\pi l}{N}\right) \right|^2 m_0\left(\omega + \frac{2\pi l}{N}\right) \overline{m_l\left(\omega + \frac{2\pi l}{N}\right)} &= 0. \end{aligned} \quad (7.75)$$

E separando as fases,

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\phi}\left(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N}\right) \right|^2 m_0\left(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N}\right) \overline{m_l\left(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N}\right)} = 0, \quad (7.76)$$

mas m_0 e m_l são periódicos de período 2π e portanto é possível reduzir a equação acima a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\phi}\left(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N}\right) \right|^2 m_0\left(\omega + \frac{2\pi i}{N}\right) \overline{m_l\left(\omega + \frac{2\pi i}{N}\right)} &= 0 \\ \sum_{i=0}^{N-1} m_0\left(\omega + \frac{2\pi i}{N}\right) \overline{m_l\left(\omega + \frac{2\pi i}{N}\right)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\phi}\left(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N}\right) \right|^2 &= 0 \\ \sum_{i=0}^{N-1} m_0\left(\omega + \frac{2\pi i}{N}\right) \overline{m_l\left(\omega + \frac{2\pi i}{N}\right)} &= 0. \end{aligned} \quad (7.77)$$

A ortogonalidade entre ψ^l e $\psi^{l'}$, para $l \neq l'$, levará, através de passos muito semelhantes aos anteriores, à seguinte condição que deve ser satisfeita entre m_l e $m_{l'}$:

$$\sum_{i=0}^{N-1} m_l\left(\omega + \frac{2\pi i}{N}\right) \overline{m_{l'}\left(\omega + \frac{2\pi i}{N}\right)} = 0. \quad (7.78)$$

Analisando as condições (7.70), (7.72), (7.77) e (7.78) é possível concluir que a ortonormalidade dos diferentes subespaços na análise em resoluções múltiplas implica na

matriz $N \times N$, $M(\omega)$, com elementos da forma

$$M_{l,k}(\omega) = m_{l-1} \left(\omega + \frac{2\pi}{N}(k-1) \right), \quad (7.79)$$

ser unitária para todo ω , ou seja, a inversa de M é a transposta complexa conjugada de M : $M^{-1} = M^*$. As linhas de M são bases unitárias, isto é, cada linha possui tamanho unitário e produto interno Hermitiano nulo. De forma similar, as colunas também são bases unitárias. Na verdade, tomando-se uma base unitária, a matriz cujas linhas ou colunas for essa base será uma matriz unitária.

Tendo em vista os elementos da matriz M em (7.79), é possível reescrevê-la como um produto de duas matrizes

$$M(\omega) = GE(\omega) \quad (7.80)$$

cujos elementos são dados por:

$$G_{l,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} g_k^l, \quad (7.81)$$

$$E_{l,k}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{il(\omega + \frac{2k\pi}{N})}, \quad (7.82)$$

para $l = 0, 1, \dots, M-1$ e $k = 0, 1, \dots, N-1$. A matriz E está completamente definida acima (7.82). Para projetar a matriz M é necessário então apenas especificar os coeficientes dos filtros na matriz G .

Através de uma análise, constata-se que a matriz E é, de fato, uma matriz unitária. Qualquer elemento do produto $E(\omega)E^*(\omega)$ pode ser escrito da seguinte forma

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \right)^2 e^{il(\omega + \frac{2k\pi}{N})} e^{-il(\omega + \frac{2k\pi}{N})} = 1, \quad (7.83)$$

e portanto a matriz E é unitária.

Para obter a condição de ortonormalidade entre os subespaços, como visto acima, é necessário que a matriz M seja unitária, ou seja, $M(\omega)M^*(\omega) = I$, mas, tem-se também

$$\begin{aligned} M(\omega)M^*(\omega) &= (GE(\omega))(GE(\omega))^* \\ &= GE(\omega)E^*(\omega)G^* \\ &= GG^* = I, \end{aligned} \quad (7.84)$$

onde usou-se o fato de E ser também unitária. Conclui-se assim que impor que a matriz M seja unitária, é equivalente a impor que uma matriz G seja também unitária. O projeto de bancos de filtros resume-se então a achar uma matriz G unitária.

No caso em que a matriz G é 2×2 , é possível escrevê-la como

$$G_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} p & t \\ q & u \end{bmatrix}. \quad (7.85)$$

Para que a matriz $G_{2 \times 2}$ seja unitária será necessário que as seguintes condições sejam satisfeitas

$$p\bar{p} + t\bar{t} = 1 \quad (7.86)$$

$$q\bar{q} + u\bar{u} = 1 \quad (7.87)$$

$$p\bar{q} + t\bar{u} = 0. \quad (7.88)$$

Uma possível escolha que satisfaz as condições (7.87) a (7.88) é a seguinte: $p = e^{i\theta}/\sqrt{2}$, $q = e^{-i\theta}/\sqrt{2}$ e $t = -q$, $u = p$ ou $t = q$, $u = -p$. No primeiro caso, se os coeficientes forem reais e $\theta = \pi/4$, então obtém-se o caso equivalente à wavelet de Haar. As matrizes 2×2 propostas podem ser vistas como matrizes de rotação. No caso de Haar, obtém-se uma rotação de um ângulo $\pi/4$.

Tomando agora o caso em que G é $n \times n$, é possível tomar como exemplo as matrizes ortogonais que promovem as transformações de Householder (Householder, 1958). No espaço tridimensional, tal transformação é uma reflexão de um vetor em um plano. Em espaço euclidianos genéricos, é uma transformação linear que descreve uma reflexão num hiperplano que contenha a origem. Para obter a matriz da transformação basta tomar um vetor não-nulo qualquer \mathbf{v} e obter a matriz como abaixo

$$Q = I - 2 \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}. \quad (7.89)$$

Desta forma, o numerador em (7.89) é uma matriz simétrica enquanto o denominador é o quadrado da magnitude de \mathbf{v} . Isto será uma reflexão em um hiperplano perpendicular a \mathbf{v} . No caso em que \mathbf{v} é um vetor unitário, basta fazer $Q = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T$. Qualquer matriz ortogonal de tamanho $n \times n$ pode ser construída com um produto de não mais que n matrizes de reflexão de Householder.

A implementação de exemplo para a decomposição de um sinal, utilizando-se para tanto um banco de filtros dado por uma transformação de Householder, é mostrado no Apêndice F.4. Note que neste exemplo o banco de filtros utilizado realizar apenas uma reflexão de Householder, não há garantia alguma de que esse banco de filtros seja um banco de filtros wavelet.

7.5 Generalização da construção das wavelets de Daubechies

Na presente seção encontra-se uma generalização da construção das wavelets de Daubechies para o caso em que o fator de escala é maior do que dois e possui mais do que uma wavelet associada à análise de resoluções múltiplas. A escolha de um fator de escala N (no caso em que $N = 2$ recai-se no caso tradicional do fator de escala 2 e, desta forma, a construção das wavelets de Daubechies pode ser simplificada, conforme consta na Seção 7.1) acarreta a existência de $N - 1$ funções wavelets ψ_l , $l = 1, 2, \dots, N - 1$, e uma função escala ϕ associadas à ARM. Por questão de conveniência, pode-se chamar a função escala de ψ_0 . A todas essas funções ψ_l estão associados os seus respectivos filtros m_l . Como visto na seção anterior (Seção 7.4), a condição de ortonormalidade das bases formadas por cada uma das funções $\{\psi_l\}$ e a ortogonalidade entre as diferentes bases, $\{\psi_l\}$ e $\{\psi_{l'}\}$, $l, l' = 0, 1, \dots, N - 1$ e $l \neq l'$, podem ser reescritas como condições sobre os filtros m_l . São estas

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left| m_l \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right) \right|^2 = 1, \quad l = 0, 1, \dots, N - 1, \quad \text{e} \quad (7.90)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} m_l \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right) \overline{m_{l'} \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right)} = 0, \quad l \neq l', \quad l, l' = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (7.91)$$

O primeiro passo a se considerar é o projeto do filtro m_0 . Sabe-se, pela definição, que a seguinte condição deve ser satisfeita

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = 1. \quad (7.92)$$

Esta condição pode ser traduzida como $\widehat{\phi}(0) = 1$, no domínio da frequência. Lembrando-se agora da relação de escala no domínio da frequência,

$$\widehat{\phi}(\omega) = m_0 \left(\frac{\omega}{N} \right) \widehat{\phi} \left(\frac{\omega}{N} \right), \quad (7.93)$$

é possível então concluir que $m_0(0) = 1$ e, assim, $|m_0(0)|^2 = 1$. Usando (7.93) na relação (7.90), obtêm-se que

$$\left| m_0 \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right) \right|^2 = 0. \quad (7.94)$$

Tem-se então que m_0 é um polinômio trigonométrico (como mostra-se adiante) com zeros em pontos da forma $\omega = 2\pi i/N$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$. Para que os zeros sejam tais pontos,

é necessário exigir $m_0(\omega) \propto Q(\omega)$, sendo

$$Q(\omega) = \prod_{k=1}^{N-1} q_k^M(\omega) = \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1 + e^{-i(\omega + \pi - \frac{2k\pi}{N})}}{N^{\frac{1}{N-1}}} \right)^M. \quad (7.95)$$

Nas figuras 7.6 a 7.9 seguem alguns exemplos de $Q(\omega)$ para o caso em que $N = 2, 4, 6, 8$. Note que nas figuras é mostrado apenas o intervalo $[0, \pi]$ e, portanto, a outra metade dos zeros está simetricamente disposta no intervalo $[\pi, 2\pi]$.

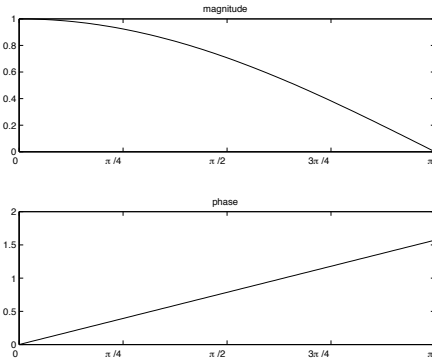


Figura 7.6: $Q(\omega)$ com $N = 2$.

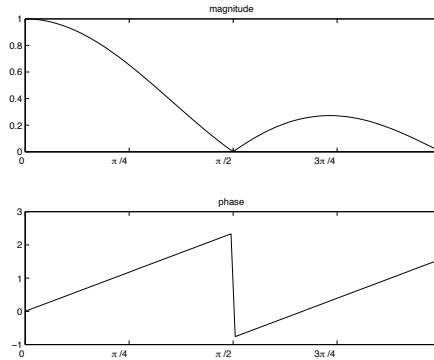


Figura 7.7: $Q(\omega)$ com $N = 4$.

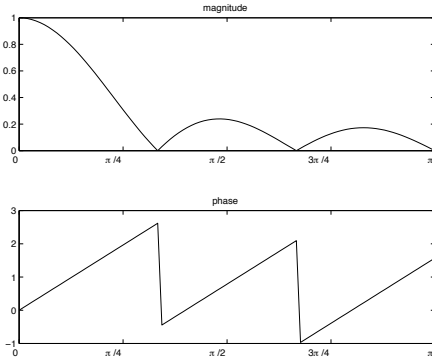


Figura 7.8: $Q(\omega)$ com $N = 6$.

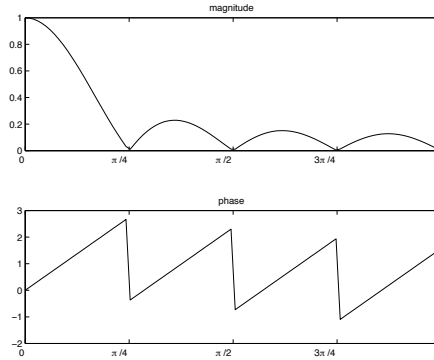


Figura 7.9: $Q(\omega)$ com $N = 8$.

Definindo

$$M_0(\omega) = |m_0(\omega)|^2, \quad (7.96)$$

já que na Equação (7.90) utilizou-se o módulo de m_0 . Por sua vez, o módulo de $Q(\omega)$ é dado da seguinte forma:

$$|Q(\omega)|^2 = \prod_{k=1}^{N-1} |q_k^M(\omega)|^2, \quad (7.97)$$

mas cada termo $q_k(\omega)$ é dado por:

$$q_k^M(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i(\omega + \pi - \frac{2k\pi}{N})}}{N^{\frac{1}{N-1}}} \right)^M$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{N^{\frac{M}{N-1}}} (1 + z_k)^M \\
 &= \frac{1}{N^{\frac{M}{N-1}}} \sum_{l=0}^M \binom{M}{l} z_k^{M-l}.
 \end{aligned} \tag{7.98}$$

Na Equação (7.97) tem-se o módulo ao quadrado, que é dado por

$$|q_k^M(\omega)|^2 = (\Re\{q_k^M\})^2 + (\Im\{q_k^M\})^2, \tag{7.99}$$

a soma dos quadrados da parte real e da parte imaginária de q_k^M . Cada uma das partes em (7.99) pode ser obtida utilizando-se a Equação 7.98:

$$\Re\{q_k^M\} = \frac{1}{N^{\frac{M}{N-1}}} \sum_{l=0}^M \binom{M}{l} \cos\left((M-l)\left(\omega + \pi - \frac{2k\pi}{N}\right)\right), \tag{7.100}$$

$$\Im\{q_k^M\} = \frac{1}{N^{\frac{M}{N-1}}} \sum_{l=0}^M \binom{M}{l} \sen\left((M-l)\left(\omega + \pi - \frac{2k\pi}{N}\right)\right). \tag{7.101}$$

Substituindo-se agora os resultados obtidos em (7.97), obtêm-se

$$\begin{aligned}
 |Q(\omega)|^2 &= \frac{1}{N^{\frac{2M}{N-1}}} \prod_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^M \binom{M}{l} \cos\left((M-l)\left(\omega + \pi - \frac{2k\pi}{N}\right)\right) \right)^2 + \\
 &+ \left(\sum_{l=0}^M \binom{M}{l} \sen\left((M-l)\left(\omega + \pi - \frac{2k\pi}{N}\right)\right) \right)^2.
 \end{aligned} \tag{7.102}$$

Assim, M_0 será dado por:

$$M_0(\omega) = |Q(\omega)|^2 L(\omega), \tag{7.103}$$

em que, $L(\omega)$ é um polinômio em $\cos(\omega)$. Note que, ainda sim, resolver

$$\sum_{k=0}^{N-1} M_0(\omega + 2k\pi/N) = 1 \tag{7.104}$$

não é trivial. A Equação (7.104) pode, entretanto, ser resolvida numericamente, sendo assim possível determinar $L(\omega)$, o que completa a caracterização de m_0 . Usando (7.103) em (7.104) obtêm-se

$$\sum_{k=0}^{N-1} |Q(\omega + 2k\pi/N)|^2 L(\omega + 2k\pi/N) = 1. \tag{7.105}$$

De forma a escrever a Equação (7.105) de forma mais concisa, faz-se $A_k^M(\omega) = |Q(\omega + \gamma_k)|^2$,

em que $\gamma_k = \frac{2k\pi}{N}$ e, de maneira análoga, $L_k(\omega) = L(\omega + 2k\pi/N)$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} A_k^M(\omega)L_k(\omega) = 1. \quad (7.106)$$

Tomando a expressão acima para $\omega = \gamma_0 = 0$ obtêm-se

$$A_0^M(\gamma_0)L_0(\gamma_0) + A_1^M(\gamma_0)L_1(\gamma_0) + \dots + A_{N-1}^M(\gamma_0)L_{N-1}(\gamma_0) = 1. \quad (7.107)$$

Calculando-se agora a expressão para $\omega = \gamma_1 = 2\pi/N$,

$$A_0^M(\gamma_1)L_0(\gamma_1) + A_1^M(\gamma_1)L_1(\gamma_1) + \dots + A_{N-1}^M(\gamma_1)L_{N-1}(\gamma_1) = 1, \quad (7.108)$$

que pode ser reescrita como

$$A_1^M(\gamma_0)L_1(\gamma_0) + A_2^M(\gamma_0)L_2(\gamma_0) + \dots + A_0^M(\gamma_0)L_0(\gamma_0) = 1, \quad (7.109)$$

usando aqui o fato de que os polinômios acima são periódicos com período 2π . Para $\omega = \gamma_k$

$$A_0^M(\gamma_k)L_0(\gamma_k) + A_1^M(\gamma_k)L_1(\gamma_k) + \dots + A_{N-1}^M(\gamma_k)L_{N-1}(\gamma_k) = 1, \quad (7.110)$$

e assim

$$A_k^M(\gamma_0)L_k(\gamma_0) + A_{k+1}^M(\gamma_0)L_{k+1}(\gamma_0) + \dots + A_{k+N-1}^M(\gamma_0)L_{k+N-1}(\gamma_0) = 1. \quad (7.111)$$

É possível então reescrever as equações na forma de um sistema matricial

$$\begin{bmatrix} A_0^M(\gamma_0) & A_1^M(\gamma_0) & A_2^M(\gamma_0) & \dots & A_{N-1}^M(\gamma_0) \\ A_{N-1}^M(\gamma_0) & A_0^M(\gamma_0) & A_1^M(\gamma_0) & \dots & A_{N-2}^M(\gamma_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^M(\gamma_0) & A_2^M(\gamma_0) & A_3^M(\gamma_0) & \dots & A_0^M(\gamma_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0(\gamma_0) \\ L_1(\gamma_0) \\ L_2(\gamma_0) \\ \vdots \\ L_{N-1}(\gamma_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7.112)$$

que pode ser escrito como $\mathbf{A}(\gamma_0)\vec{\mathbf{I}}(\gamma_0) = \mathbf{1}$. Para um ângulo γ genérico, obtêm-se o equivalente:

$$\mathbf{A}(\gamma)\vec{\mathbf{I}}(\gamma) = \mathbf{1}. \quad (7.113)$$

Resolvendo o sistema (7.113) para diferentes valores de γ , é possível determinar o valor de $L(\omega)$ nos pontos desejados e, assim, numericamente, determina-se o polinômio $L(\omega)$. Al-

guns resultados são apresentados nas figuras 7.10 a 7.13. Os resultados aqui apresentados foram obtidos através das rotinas apresentadas no Apêndice F.1.

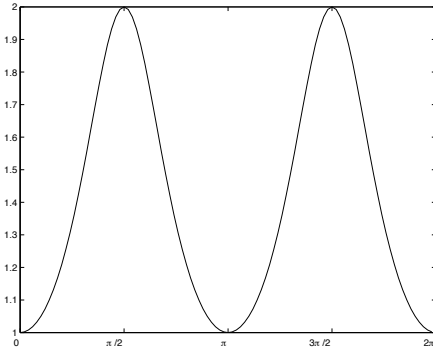


Figura 7.10: $L(\omega)$ com $N = 2$ e $M = 2$.

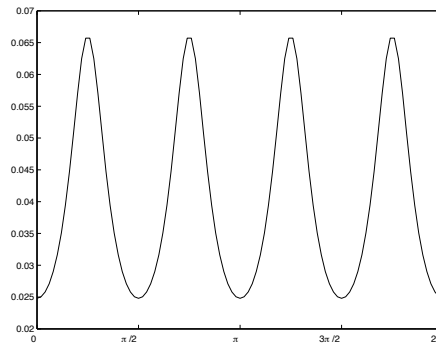


Figura 7.11: $L(\omega)$ com $N = 4$ e $M = 2$.

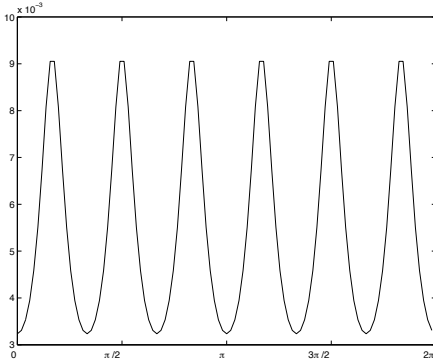


Figura 7.12: $L(\omega)$ com $N = 6$ e $M = 2$.

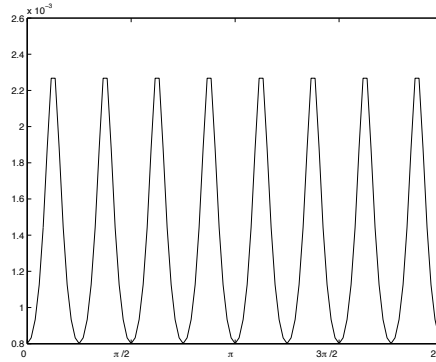


Figura 7.13: $L(\omega)$ com $N = 8$ e $M = 2$.

Nota-se ainda que devido à periodicidade e simetria de Q , a matriz \mathbf{A} em (7.112) será uma matriz simétrica, já que a seguinte relação é satisfeita por seus elementos constituintes

$$A_i^M(\gamma) = A_{N-i}^M(\gamma). \quad (7.114)$$

Para o caso em que $N = 2$ e $M = 1$, a Equação (7.102) pode ser simplificada da seguinte forma

$$\begin{aligned} |Q(\omega)|^2 &= \frac{1}{4} [(1 + \cos(\omega))^2 + (\sin(\omega))^2] \\ &= \frac{1}{4} [1 + 2\cos(\omega) + \cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)] \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos(\omega)). \end{aligned} \quad (7.115)$$

Aplicando o resultado (7.115) em (7.105) obtêm-se

$$\begin{aligned} |Q(\omega)|^2 L(\omega) + |Q(\omega + \pi)|^2 L(\omega + \pi) &= 1 \\ (1 + \cos(\omega)) L(\omega) + (1 - \cos(\omega)) L(\omega + \pi) &= 2. \end{aligned} \quad (7.116)$$

Por uma simples inspeção é fácil verificar que $L(\omega) = 1$ é uma solução de (7.116). De fato, o resultado obtido numericamente é exatamente esse.

Para um exemplo um pouco mais complicado, em que $N = 2$ e $M = 2$, a Equação (7.102) poderá ser simplificada

$$\begin{aligned}
 |Q(\omega)|^2 &= \frac{1}{2^4} \left\{ \left[\sum_{l=0}^2 \binom{2}{l} \cos((2-l)\omega) \right]^2 + \left[\sum_{l=0}^2 \binom{2}{l} \sen((2-l)\omega) \right]^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{16} \{ [\cos(2\omega) + 2\cos(\omega) + \cos(0)]^2 + [\sen(2\omega) + 2\sen(\omega) + \sen(0)]^2 \} \\
 &= \frac{1}{16} \{ [1 - 2\sen^2(\omega) + 2\cos(\omega) + 1]^2 + [2\sen(\omega)\cos(\omega) + 2\sen(\omega)]^2 \} \\
 &= \frac{1}{16} \{ [1 - 2(1 - \cos^2(\omega)) + 2\cos(\omega) + 1]^2 + [2\sen(\omega)(\cos(\omega) + 1)]^2 \} \\
 &= \frac{1}{16} \{ [2\cos(\omega)(\cos(\omega) + 1)]^2 + [2\sen(\omega)(\cos(\omega) + 1)]^2 \} \\
 &= \frac{1}{16} \{ 4\cos^2(\omega)(\cos(\omega) + 1)^2 + 4\sen^2(\omega)(\cos(\omega) + 1)^2 \} \\
 &= \frac{1}{4} (\cos(\omega) + 1)^2. \tag{7.117}
 \end{aligned}$$

Aplicando o resultado (7.117) em (7.105) obtêm-se

$$(\cos(\omega) + 1)^2 L(\omega) + (1 - \cos(\omega))^2 L(\omega + \pi) = 4. \tag{7.118}$$

O resultado numérico para $L(\omega)$ pode ser visto na figura 7.10. Dado o resultado encontrado numericamente, é fácil verificar (também numericamente) que o resultado de fato satisfaz a Equação 7.118. Analiticamente verifica-se que

$$L(\omega) = \frac{2}{\cos^2(\omega) + 1}, \tag{7.119}$$

é solução de (7.118), o que valida de fato a solução encontrada numericamente.

Para casos mais complicados o cálculo analítico de $L(\omega)$ torna-se demasiadamente complicado, mas ainda é possível determinar $L(\omega)$ numericamente. Note que assim, obtêm-se uma caracterização completa de $|m_0(\omega)|^2$. Mas, na verdade, o objetivo é obter $m_0(\omega)$. Será que apenas extrair a raiz quadrada de $L(\omega)$ é suficiente para determinar $m_0(\omega)$? A raiz quadrada de $L(\omega)$ fornecerá o módulo de $\mathfrak{L}(\omega)$, uma vez que $|\mathfrak{L}(\omega)|^2 = L(\omega)$. Uma possibilidade interessante seria utilizar a transformada de Hilbert, pois caso o filtro seja um filtro de fase mínima (todos os zeros dentro do círculo unitário), ela nos garantirá uma relação biunívoca entre o módulo e a fase e, assim, pode-se caracterizar $m_0(\omega)$ completamente. No entanto existe um lemma que ajudará a encontrar $\mathfrak{L}(\omega)$.

Lema 7.5.1. (*Daubechies, 1992*) O Lemma diz que seja A um polinômio trigonométrico positivo contendo apenas cossenos, $A(\omega) = \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega)$ (com $a_n \in \mathbb{R}$), então, existe um polinômio trigonométrico B , também de ordem N , $B(\omega) = \sum_{n=0}^N b_n e^{in\omega}$, com coeficientes b_n , tal que:

$$|B(\omega)|^2 = A(\omega). \quad (7.120)$$

Demonstração. A prova desse lema consiste na construção de B a partir de A . Para tanto,

$$\begin{aligned} A(\omega) &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n (e^{in\omega} + e^{-in\omega}) \\ &= e^{-iN\omega} \left[\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} a_{N-n} e^{in\omega} + a_0 e^{iN\omega} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n e^{i(N+n)\omega} \right], \end{aligned} \quad (7.121)$$

ao qual é possível associar o polinômio

$$P_A(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} a_{N-n} z^n + a_0 z^N + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n z^{N+n}. \quad (7.122)$$

O polinômio de (7.122) possui $2N$ zeros (contando as multiplicidades). P_A é tal que $P_A(e^{i\omega}) = e^{iN\omega} A(\omega)$, segue então que os polinômios $P_A(z)$ e $z^{2N} P_A(z^{-1})$ são coincidentes no círculo unitário e, por conseguinte, em todo o plano complexo

$$z^{2N} P_A(z^{-1}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} a_{N-n} z^{2N-n} + a_0 z^N + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n z^{N-n}. \quad (7.123)$$

Fazendo a substituição $n' = N - n$, a equação acima torna-se:

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n z^{N+n} + a_0 z^N + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} a_{N-n} z^n = P_A(z). \quad (7.124)$$

Os dois polinômios possuem, portanto, os mesmos zeros. Isso implica que se z_0 é um zero de P_A , $P_A(z_0) = 0$, então z_0^{-1} também é um zero de P_A . Como os coeficientes a_n são, por definição, reais, conclui-se também que $\overline{P_A(z)} = P_A(\bar{z})$. Isso implica que, dado um zero z_0 de P_A , o seu complexo conjugado \bar{z}_0 também é zero de P_A . Assim, os zeros de P_A aparecem sempre em grupos de quatro, z_0, \bar{z}_0, z_0^{-1} e \bar{z}_0^{-1} . Caso $z_0 = r_0$ seja real, aparecerão em grupos de dois, r_0 e r_0^{-1} . Utilizando-se a seguinte notação, $z_j, \bar{z}_j, z_j^{-1}, \bar{z}_j^{-1}$, para designar o grupo de quatro raízes completas e r_k, r_k^{-1} , as raízes reais, expressa-se P_A

da seguinte forma:

$$P_A(z) = \frac{1}{2} a_N \left(\prod_{k=1}^K (z - r_k)(z - r_k^{-1}) \right) \left(\prod_{j=1}^J (z - z_j)(z - \bar{z}_j)(z - z_j^{-1})(z - \bar{z}_j^{-1}) \right). \quad (7.125)$$

Fazendo $z = e^{i\omega}$, o módulo de cada termo da forma $(z - z_0)(z - \bar{z}_0^{-1})$ será dado por

$$\begin{aligned} |(e^{i\omega} - z_0)(e^{i\omega} - \bar{z}_0^{-1})| &= \frac{|(e^{i\omega} - z_0)(\bar{z}_0 - e^{-i\omega})|}{|\bar{z}_0 e^{-i\omega}|} \\ &= |z_0|^{-1} |(e^{i\omega} - z_0)(\bar{z}_0 - e^{-i\omega})| \\ &= |z_0|^{-1} |(e^{i\omega} - z_0)|^2. \end{aligned} \quad (7.126)$$

Pode-se utilizar o resultado acima, tomando-se o módulo de P_A :

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |A(\omega)| = |P_A(e^{i\omega})| \\ &= \left[\frac{1}{2} |a_N| \prod_{k=1}^K |r_k|^{-1} \prod_{j=1}^J |z_j|^{-2} \right] \left| \prod_{k=1}^K (e^{i\omega} - r_k) \prod_{j=1}^J (e^{i\omega} - z_j)(e^{i\omega} - \bar{z}_j) \right|^2 \\ &= |B(\omega)|^2, \end{aligned} \quad (7.127)$$

ou seja,

$$B(\omega) = \left[\frac{1}{2} |a_N| \prod_{k=1}^K |r_k|^{-1} \prod_{j=1}^J |z_j|^{-2} \right]^{1/2} \prod_{k=1}^K (e^{i\omega} - r_k) \prod_{j=1}^J (e^{2i\omega} - 2e^{i\omega} \Re\{z_j\} + |z_j|^2) \quad (7.128)$$

é um polinômio trigonométrico de ordem N com apenas coeficientes reais. \square

Em geral B não é único. Dentro de qualquer conjunto de quatro zeros, $z_0, \bar{z}_0, z_0^{-1}, \bar{z}_0^{-1}$, pode-se escolher o par de zeros a se preservar, para a construção de B , de quatro maneiras diferentes. Para cada dupla de zeros reais de P_A duas escolhas são possíveis. Isso resulta em 2^N diferentes possibilidades para B . Todas essas diferentes possibilidades, correspondentes a diferentes escolhas de zeros de P_A a serem mantidos para B , constituem as soluções para (7.120). Pode-se mostrar que, a menos de uma fator de fase arbitrário $\pm e^{iK\omega}$, $K \in \mathbf{C}$, todos os polinômios B que satisfazem (7.120) são necessariamente da forma (7.128).

Para determinar $B(\omega)$ em (7.128), deve-se primeiramente determinar os coeficientes a_n do polinômio (7.122). O problema em questão é determinar o polinômio trigonométrico

(em cossenos) que melhor se ajusta a $A(\omega)$:

$$A(\omega) = \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega). \quad (7.129)$$

Usando a fórmula de Euler e colocando o termo $e^{iN\omega}$ em evidência, obtêm-se

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N a_n (e^{in\omega} + e^{-in\omega}) \\ e^{iN\omega} A(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N a_n (e^{i(n+N)\omega} + e^{i(N-n)\omega}). \end{aligned} \quad (7.130)$$

Fazendo agora a substituição $x = e^{i\omega}$

$$\begin{aligned} x^N A(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N a_n (x^{n+N} + x^{N-n}) \\ &= \frac{1}{2} (a_0(x^N + x^N) + a_1(x^{N+1} + x^{N-1}) + \dots + \\ &\quad + a_{N-1}(x^{2N-1} + x^1) + a_N(x^{2N} + x^0)) \\ 2x^N A(\omega) &= a_N x^{2N} + a_{N-1} x^{2N-1} + \dots + \\ &\quad + a_1 x^{N+1} + 2a_0 x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_{N-1} x^1 + a_N, \end{aligned} \quad (7.131)$$

verifica-se agora claramente que, para encontrar os coeficientes a_n , basta ajustar o polinômio de grau $2N$ para a função $2x^N A(\omega) = 2e^{i\omega N} A(\omega)$. Como é possível verificar em (7.131), os coeficientes a_n aparecem duas vezes nesse polinômio de grau $2N$, inclusive a_0 que aparece multiplicado por 2. Assim, basta tomar metade dos coeficientes e lembrar-se do fator 2 que multiplica a_0 .

Mostra-se agora que existe uma relação simples entre os coeficientes a_n e os coeficientes do polinômio trigonométrico, em exponenciais complexas, que representa a mesma função desejada. Ao final, basta tomar os coeficientes do polinômio de grau $2N$ e dividir todos por 2. Faz-se então

$$T_N(\omega) = \sum_{n=0}^N p_n e^{in\omega}, \quad (7.132)$$

$$t_N(\omega) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega) + \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\omega). \quad (7.133)$$

Mostra-se que $T_{2N}(\omega) = e^{iN\omega}t_N(\omega)$.

$$\begin{aligned} e^{iN\omega}t_N(\omega) &= \frac{a_0}{2}e^{iN\omega} + \sum_{n=1}^N Na_n \frac{e^{i(N+n)\omega} + e^{i(N-n)\omega}}{2} - \sum_{n=0}^N ib_n \frac{e^{i(N+n)\omega} - e^{i(N-n)\omega}}{2} \\ &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2} \right) e^{i(N+n)\omega} + \left(\frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2} \right) e^{i(N-n)\omega}. \end{aligned} \quad (7.134)$$

Fazendo as mesmas substituições que anteriormente, $x = e^{i\omega}$, a Equação (7.134) acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} x^N t_N(\omega) &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2} \right) x^{N+n} + \left(\frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2} \right) x^{N-n} \\ &= \left(\frac{a_N}{2} - i\frac{b_N}{2} \right) x^{2N} + \left(\frac{a_{N-1}}{2} - i\frac{b_{N-1}}{2} \right) x^{2N-1} + \dots + \\ &\quad \left(\frac{a_2}{2} - i\frac{b_2}{2} \right) x^{N+2} + \left(\frac{a_1}{2} - i\frac{b_1}{2} \right) x^{N+1} + \\ &\quad a_0 x^N + \left(\frac{a_1}{2} + i\frac{b_1}{2} \right) x^{N-1} \\ &\quad \left(\frac{a_2}{2} + i\frac{b_2}{2} \right) x^{N-2} + \dots + \\ &\quad \left(\frac{a_{N-1}}{2} + i\frac{b_{N-1}}{2} \right) x + \left(\frac{a_N}{2} + i\frac{b_N}{2} \right) \\ &= d_N x^{2N} + d_{N-1} x^{2N-1} + \dots + d_1 x^{N+1} + d_0 x^N + \\ &\quad c_0 x^N + c_1 x^{N-1} + \dots + c_{N-1} x + c_N, \end{aligned} \quad (7.135)$$

em que $d_n = a_n/2 - ib_n/2$ e $c_n = a_n/2 + ib_n/2$.

Note que, no nosso caso, em que se trata de um polinômio apenas em cossenos, tem-se $d_n = c_n$, pois $b_n = 0$. Os coeficientes p_n de T_{2N} podem ser determinados diretamente. Observe que a forma expressa em (7.135) é equivalente à (7.131), e fica desta forma claro que $p_n = a_n/2$. Tomando os coeficientes encontrados no ajuste polinomial em (7.131) (considerando os coeficientes repetidos), basta dividi-los por 2 para obter os coeficientes do polinômio em exponenciais complexas.

7.6 Fatores de escala não-inteiros

Até aqui mostrou-se como é possível aumentar a resolução em frequência através de um fator de escala inteiro maior que dois e um conjunto de mais de duas wavelets. Uma outra forma de obter uma melhor resolução em frequência é tomar fatores de escala menores

que o usualmente escolhido fator de escala dois. Obviamente o fator de escala deve ser maior que um e, portanto, deseja-se um fator de escala no intervalo aberto]1, 2[.

É possível existir bases ortonormais de wavelets para fatores de dilatação racional, como mostrado por Auscher (1989). No entanto não é possível estabelecer uma análise em resoluções múltiplas (ARM) com funções ϕ e ψ de suporte compacto. Suponha que o fator de escala seja p/q onde p e q são inteiros. Levantando-se a hipótese de que a ARM é válida, então obtém-se $V_0 \subset V_{-1}$ e, existem duas seqüências $(c_{1,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ e $(c_{2,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ tais que

$$\phi(x) = \sum_n c_{1,n} \phi\left(\frac{p}{q}x - n\right), \quad (7.136)$$

$$\phi(x-1) = \sum_n c_{2,n} \phi\left(\frac{p}{q}x - n\right). \quad (7.137)$$

As equações em (7.136) e (7.137) podem ser reescritas da seguinte forma, tomando a transformada de Fourier e manipulando alguns termos:

$$\frac{p}{q} \widehat{\phi}\left(\frac{p}{q}\omega\right) = \left(\sum_n c_{1,n} e^{jn\omega}\right) \widehat{\phi}(\omega), \quad (7.138)$$

$$\frac{p}{q} \widehat{\phi}\left(\frac{p}{q}\omega\right) = e^{jp\omega/q} \left(\sum_n c_{2,n} e^{jn\omega}\right) \widehat{\phi}(\omega). \quad (7.139)$$

Isto implica em

$$\sum_n c_{1,n} e^{jn\omega} = e^{jp\omega/q} \sum_n c_{2,n} e^{jn\omega}. \quad (7.140)$$

Mas assumindo-se que as funções ϕ e ψ possuem suporte compacto então, as seqüências $(c_{1,n})$ e $(c_{2,n})$ devem ser necessariamente finitas. Se ambas são finitas, na igualdade (7.140) obtém-se polinômios em ambos os lados e, portanto, a igualdade é falsa. Não é possível gerar um termo de freqüência fracionária, à direita, com um número finito de termos de freqüências inteiras, à esquerda. Em aplicações práticas deve-se trabalhar com um número sempre finito de coeficientes. Para tanto deve-se truncar a série em algum ponto, o que gerará erro no resultado final.

Restringindo a análise a fatores racionais da forma p/q , neste caso, estar-se-á lidando com bancos de filtros com mudança no fator de amostragem por uma fator p_i/q_i em cada um dos braços. Interessante notar que, para que a densidade de amostras se mantenha a mesma ao longo do banco é necessário que

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{q_i}{p_i} = 1, \quad (7.141)$$

onde N é o número de braços no banco de filtros. A condição (7.141) é a condição de

taxa de amostragem crítica.

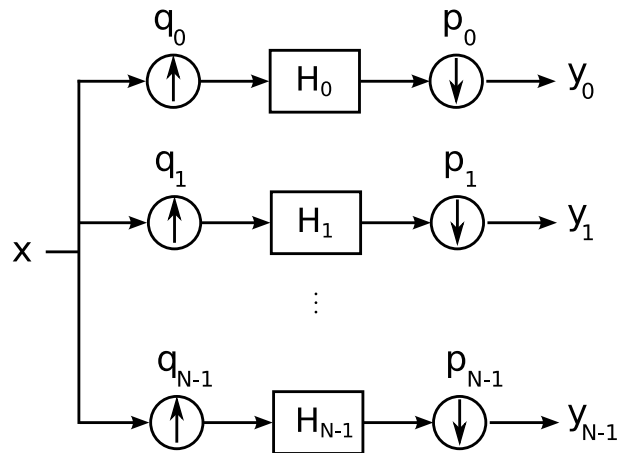


Figura 7.14: Banco de Filtros com Decimação Racional.

O banco de filtros esquematizado na Figura 7.14 é um artefato que separa o sinal em N canais através de filtragem e decimação por fatores da forma p_i/q_i . O i -ésimo canal do banco de filtros contém as frequências na faixa

$$\left[\left(\sum_{k=0}^{i-1} \frac{p_k}{q_k} \right) \pi, \left(\sum_{k=0}^i \frac{p_k}{q_k} \right) \pi \right]. \quad (7.142)$$

No caso em que os bancos de filtros possuem dois ramos, obtém-se então uma interpolação por um fator q e outra por um fator $p - q$, e uma decimação pelo fator p em ambos os ramos. O esquema do banco de filtros está representado na Figura 7.15. Dado um banco de filtros de análise em duas bandas conforme o proposto, é necessário projetar os filtros FIR para análise e síntese. Uma abordagem analítica de como fazê-lo é descrita por Hsiao (1987) e uma abordagem numérica por Nayebi, III, e Smith (1991).

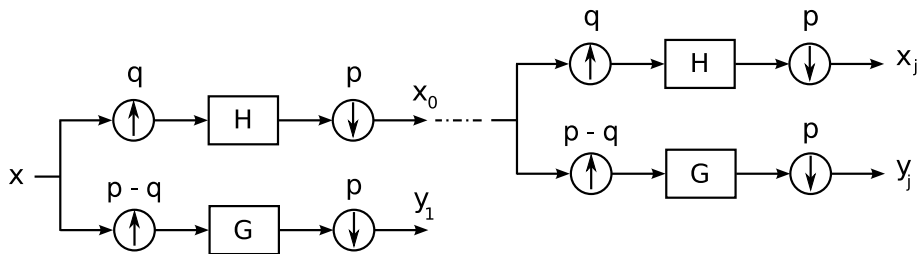


Figura 7.15: Banco de Filtros Iterativo com Decimação Racional.

Para obter uma análise racional deve-se claramente, em cada ramo, ter uma interpolação ou decimação por um fator racional. Assumindo-se que um sinal $x(t)$ é limitado em frequência, então este pode ser reconstruído sem erro a partir das suas amos-

tras $x(n\tau)$, para tanto usando a relação de Nyquist $x(t) = \sum_k x(k\tau)\chi(t/\tau - k)$ onde $\chi(t) = \text{sen}(\pi t)/(\pi t)$. Mudar o período de amostragem de τ para $p\tau/q$ fornece então

$$x\left(\frac{p}{q}n\tau\right) = \sum_k x(k\tau)\chi\left(\frac{np - kq}{q}\right). \tag{7.143}$$

A equação acima apenas estabelece que para se obter as amostras em instantes de amostragem da forma $(p/q)n\tau$ é necessário primeiramente realizar uma interpolação (up-sample) por um fator q , posteriormente filtrar pelo filtro passa-baixas $G(z) = \sum_k \chi(k/q)z^{-k}$ e, finalmente, realizar uma decimação (downsample) por um fator p . Obtém-se desta forma

$$y[n] = \sum_k g[np - kq]x[k]. \tag{7.144}$$

Exemplificando, a implementação de um banco de filtros com fatores de conversão da taxa de amostragem $2/3$ e $1/3$, conforme esquematizado na Figura 7.16. Como observa-se

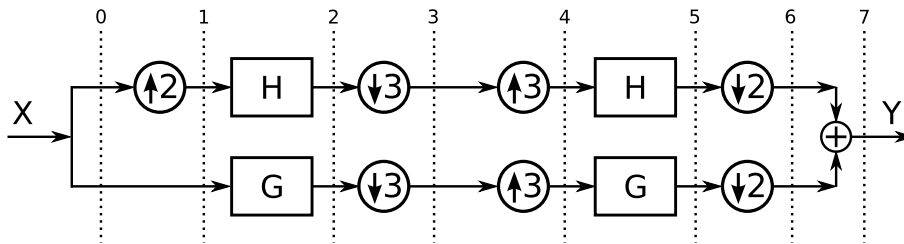


Figura 7.16: Banco de Filtros com fatores $2/3$ e $1/3$.

na Figura 7.17, através da análise da informação espectral do sinal ao longo do banco, a reconstrução perfeita é atingida na condição de se utilizar filtros ideais (com coeficientes reais). Em alguns casos é possível obter a reconstrução perfeita, embora exista um embaralhamento em frequência (Kovacevic e Vetterli, 1993b).

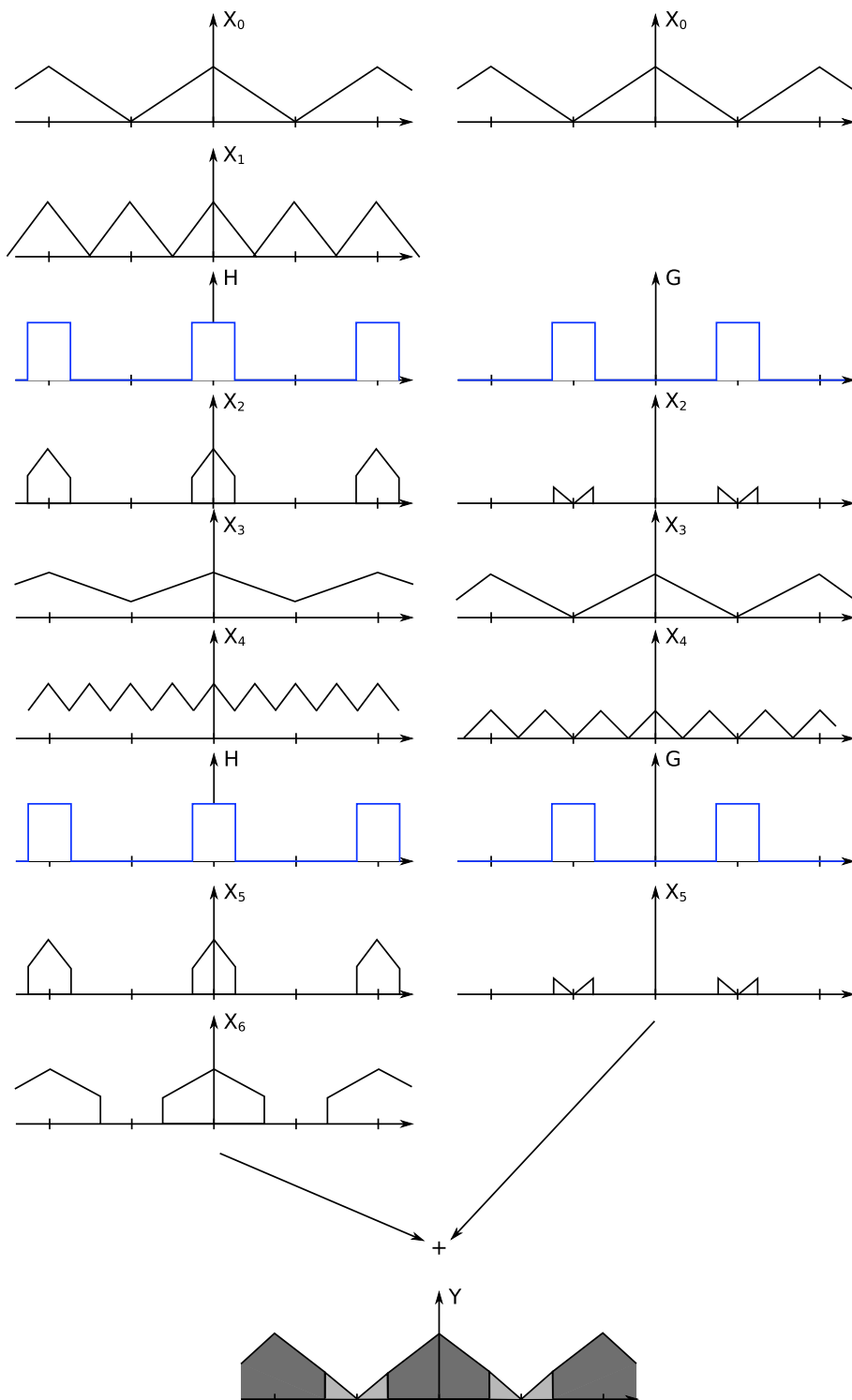


Figura 7.17: Análise espectral do sinal ao longo do Banco de Filtros.

The time has come, the Walrus said, To talk of many things: Of shoes—and ships—and sealing-wax— Of cabbages—and kings— And why the sea is boiling hot— And whether pigs have wings.

Lewis Carroll

Pasmo sempre quando acabo qualquer coisa. Pasmo e desolo-me. O meu instinto de perfeição deveria inibir-me de acabar; deveria inibir-me até de dar começo. Mas distraio-me e faço. O que consigo é um produto, em mim, não de uma aplicação de vontade, mas de uma cedência dela. Começo porque não tenho força para pensar; acabo porque não tenho alma para suspender. Este livro é a minha cobardia.

Fernando Pessoa, Livro do Desassossego



Conclusões e perspectivas

A motivação deste trabalho foi um estudo da audição humana visando a criação de um modelo auditivo ou adaptação de um já existente. Com esse propósito foi estudado o importante trabalho desenvolvido por [von Békésy \(1960\)](#) e os subsequentes trabalhos de [Lyon e Mead \(1988\)](#), [Patterson, Allerhand, e Giguere \(1995\)](#), [Flanagan \(1972, 1960\)](#), [Hewitt e Meddis \(1995, 1994\)](#) e [Slaney \(1994, 1988, 1998\)](#). A proposta foi então adaptar o modelo computacional de Malcom, que na verdade é a implementação computacional do modelo de [Lyon e Mead \(1988\)](#), substituindo o banco de filtros utilizado por um banco de filtros wavelets. Como visto na demonstração da [Seção 5.3](#), a cóclea passiva, salvo algumas aproximações, realiza uma análise do sinal acústico (que entra através da janela oval) de maneira semelhante a uma análise wavelet (onde as funções de base respeitam uma determinada relação de escala e translação entre si). Este fato peculiar sugere então a incorporação de tal ferramenta a um modelo passivo para o sistema auditivo humano.

Em um primeiro instante foi utilizada a abordagem clássica, análise wavelet com fator de escala igual a dois. Como visto no [Capítulo 6](#), a análise com fator de escala dois decompõe o sinal em bandas de oitava, bandas bem maiores que as bandas críticas ¹,

¹Em 1940, [Fletcher \(1940\)](#) realizou experimentos para medir o limiar de audição para um sinal senoidal como uma função da largura de banda de um ruído mascarador. A faixa do ruído estava sempre centrada na frequência do sinal e a densidade de potência do ruído foi mantida constante. Desta forma, a energia total do ruído aumenta com o alargamento da faixa do ruído. Como resultado obtido, o limiar de audição do sinal inicialmente aumenta à medida que a largura de faixa do ruído também aumenta, mas a partir de certo ponto, mantém-se constante; aumentos subsequentes da largura de faixa do ruído em nada altera o

sugerindo então uma necessidade em se melhorar a resolução em frequência. Para tanto algumas abordagens são possíveis: alterar o fator de escala para um número entre um e dois; utilizar mais wavelets e um fator de escala maior que dois, podendo assim, a princípio, diminuir a razão wavelet por oitava; ou utilizar a abordagem dos pacotes de wavelets (Wickerhauser, 1993, Nov. 18, 1991; Wickerhauser). O presente trabalho concentrou-se nas duas primeiras abordagens, que ainda são pouco conhecidas e para as quais, até onde vai o conhecimento deste autor, não se encontra nenhuma implementação computacional disponível.

Tradicionalmente utiliza-se a análise wavelet com fator de escala igual a dois. Para esta abordagem encontra-se uma larga referência na literatura, diversas implementações computacionais e ainda vários projetos de filtros que são utilizados nos processo de análise e reconstrução. Na Seção 7.1 viu-se quais as condições que um filtro deve satisfazer para o caso do fator de escala ser igual a dois e também apresentou-se o princípio da abordagem proposta por Ingrid Daubechies, mostrando como projetar filtros que levam a wavelets de suporte compacto para o fator de escala igual a dois. Além disso, para diferentes wavelets é possível encontrar em tabelas de livros os valores dos coeficientes de filtros. Também é possível obtê-los computacionalmente, através de bibliotecas disponíveis em diversos pacotes, como por exemplo o Wavekit para MatLab (Ojanen).

Como visto na Seção 6.2, a largura de banda de uma oitava é forçada pela utilização do fator de escala 2. Fica claro então que uma maneira natural de se obter uma melhor resolução em frequência é através da escolha de um fator de escala menor do que dois e maior do que um. Na Seção 7.3 vimos que não é possível obter uma análise em resoluções múltiplas com filtros finitos quando o fator de escala é racional. Neste caso, as funções de base não podem possuir um suporte compacto e portanto as séries para representar uma função qualquer não podem ser finitas, o que trará, por conseguinte, um erro devido à aproximação feita ao escolher-se um número finito de coeficientes. No entanto, Kovacevic e Vetterli construíram esquemas de filtros de subbandas utilizando filtros FIR e fatores de escala racionais (Kovacevic e Vetterli (1991, 1993b); Bernardini e Kovacevic (1999)).

Nas sessões 7.4, 7.5 e 7.3 tratamos do tema que foi principalmente desenvolvido neste trabalho: a utilização de fatores de escala maiores que dois e mais de uma wavelet para representar o espaço de detalhes. Como foi mostrado, a condição necessária sobre o banco de filtros para que seja possível uma reconstrução perfeita é que a matriz de coeficientes deve ser unitária. Apenas essa condição não é suficiente para explicitar a forma dos filtros.

limiar de percepção do sinal. Para explicar esse fato, Fletcher, seguindo a sugestão de Helmholtz, sugere que a audição periférica deva comportar-se como se constituísse por um banco de filtros passa-banda, com faixas passantes que se sobrepõem. Esses filtros foram denominados ‘filtros auditivos’. Fletcher chamou a largura de banda para a qual o limiar de percepção do sinal para de subir como ‘largura de banda crítica’.

Seguimos então a mesma abordagem de Ingrid Daubechies para obter os coeficientes de filtros, conforme detalhado na Seção 7.5. No entanto, o que foi apresentado consiste apenas na forma de obter-se o filtro passa-baixas, $m_0 (H(\omega))$. A obtenção de tal filtro deve ser feita numericamente, pois a equação torna-se demasiadamente complexa para ser resolvida analiticamente. Os exemplos realizados mostram que as respostas encontradas são realmente soluções para o problema. No entanto, ao resolvermos como proposto para o caso em que o fator de escala é igual a 2, esperávamos obter a mesma resposta obtida por Ingrid Daubechies, mas o que se verificou foi a obtenção de uma outra solução de ordem maior. Infelizmente a razão desta diferença permanece sem explicação.

Para se realizar a análise wavelet completa, i.e. para se criar um banco de filtros com reconstrução perfeita, será necessário ainda projetar os demais filtros do banco, m_1, m_2, \dots, m_{N-1} . Para tanto é necessário propor uma maneira para obter-se tais filtros. Sabe-se, entretanto, que os filtros devem ser tais que satisfaçam a condição de que a matriz de coeficientes do banco de filtro seja unitária.

Uma vez definido um procedimento para se obter os demais coeficientes de filtros do banco, é possível obter a caracterização completa dos filtros que o constitui. Sabe-se então o quão melhor será a localização em frequência proporcionada por cada filtro. Desta forma, seria possível a utilização de um banco de filtros wavelets com fator de escala inteiro maior que dois para realizar a análise de um sinal atendendo a um critério para se obter uma melhor resolução em frequência. Seria possível, desta forma, criar um banco de filtros wavelets que analise um sinal acústico de forma semelhante à cóclea passiva.



Fórmulas de Parseval e Plancherel

Teorema A.0.1. *Sejam duas funções f e h , ambas pertencentes ao espaço $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, sendo $L^1(\mathbb{R})$ o espaço das funções de módulo integrável e $L^2(\mathbb{R})$ o espaço das funções de quadrado integrável, então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{h}^*(\omega)d\omega \quad (\text{fórmula de Parseval}) \quad (\text{A.1})$$

Se $h = f$ obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{fórmula de Plancherel}) \quad (\text{A.2})$$

Demonstração. Seja $g = f * \bar{h}$ onde $\bar{h}(t) = h^*(-t)$, utilizando a dualidade entre a convolução e a multiplicação nos domínios do tempo e da frequência e a propriedade do complexo conjugado na transformada de Fourier, é possível mostrar que $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{h}^*(\omega)$. Aplicando agora a inversa da transformada de Fourier

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{A.3})$$

e tomando $t = 0$ obtém-se

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)h^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{h}^*(\omega) d\omega \quad (\text{A.4})$$

A fórmula de Plancherel é o caso específico da fórmula de Parseval quando $f = h$. \square

B

Incerteza de Heisenberg

Heisenberg foi parado por um policial que o pergunta “O senhor sabe o quão rápido estava dirigindo?”, e o físico responde, “Não, mas sei precisamente onde estou!”.

“A maioria das pessoas aprendem que o princípio da incerteza de Heisenberg está ligado à mecânica quântica, mas é também uma afirmação central na teoria da informação e processamento de sinais. Qualquer método de codificação de informação que se baseie no fato de que a informação pode ser quebrada por frequências vem contra essa limitação, dizendo que a precisão sobre o tempo impõe uma certa incerteza a cerca das frequências, e vice versa. A transformada de Fourier clássica força-nos a escolher entre tempo e frequência; análise de Fourier com janela e wavelets oferecem diferentes compromissos.

Essa limitação não resulta de uma proteção misteriosa da realidade contra nossos olhos; assim é a realidade, como vemos olhando a análise matemática de Fourier.” (Hubbard, 1998)

O princípio da incerteza de Heisenberg afirma que não é possível obter uma precisão infinita para certos pares de variáveis observáveis. Ainda mais, este princípio quantifica precisamente um limite inferior (diferente de zero) para o produto dos desvios padrões

dessas duas variáveis. O princípio da incerteza é uma das bases da física quântica e foi formulado por Heisenberg em 1927.

Considere um sinal variando no tempo, um sinal acústico por exemplo. Não faz sentido tentar determinar o espectro em frequência deste sinal em um instante de tempo. Para determinar as frequências que compõem um sinal, é necessário ter um intervalo do sinal diferente de zero. Ao tomar intervalos de tempo subsequentemente menores, está se perdendo precisão temporal, mas é possível assim realizar uma análise mais precisa e descobrir quais componentes em frequência constituem o sinal. Em outras palavras, um sinal qualquer, como um sinal acústico, não pode possuir um tempo preciso, como um pulso, e uma frequência precisa, como em um tom puro contínuo.

As variâncias em tempo (σ_t^2) e frequência (σ_ω^2) de $f \in L^2(\mathbb{R})$ devem satisfazer a seguinte relação

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4} \quad (\text{B.1})$$

sendo a igualdade satisfeita se e somente se f for da forma

$$f(t) = ae^{j\xi t - b(t-u)^2}, \quad (\text{B.2})$$

onde a , b , u e ξ são constantes.

[*demonstração*]

Para a demonstração supõem-se que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sqrt{t} f(t) = 0 \quad (\text{B.3})$$

mas o teorema é válido para qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$. Se o tempo médio de f é u e a frequência média é ξ , então é possível obter uma função de média nula, em frequência e tempo, bastando, para tanto, fazer um ‘shift’ no tempo e em frequência de u e ξ , respectivamente, obtendo $f(t-u)e^{-j\xi t}$. Pode-se então provar o teorema apenas para o caso em que $u = \xi = 0$.

Sendo as seguintes variâncias

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2 dt, \quad (\text{B.4})$$

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{\|f\|^2 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega \hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (\text{B.5})$$

Então

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi \|f\|^4} \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |\omega \hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{B.6})$$

Como $j\omega \hat{f}(\omega)$ é a transformada de Fourier de $f'(t)$, e utilizando a identidade de Plancherel (A.2), obtém-se:

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi \|f\|^4} \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt \quad (\text{B.7})$$

Utilizando a desigualdade de Schwarz, obtém-se

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 \sigma_\omega^2 &\geq \frac{1}{\|f\|^4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |tf'(t)f^*(t)| dt \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{\|f\|^4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{2} [f'(t)f^*(t) + f'^*(t)f(t)] dt \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{4\|f\|^4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} t(|f(t)|^2)' dt \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

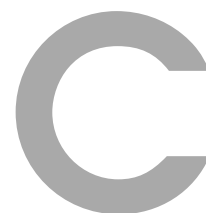
Utilizando a suposição feita em (B.3) e realizando a integral anterior por partes, obtém-se

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4\|f\|^4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^2 = \frac{1}{4}. \quad (\text{B.9})$$

Para obter uma igualdade, a desigualdade de Schwarz aplicada em (B.8) deve ser na verdade um igualdade. Isto implica que existe $b \in \mathbb{C}$ tal que:

$$f'(t) = -2bt f(t). \quad (\text{B.10})$$

Então, existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(t) = ae^{-bt^2}$. Os demais passos da demonstração são igualdades de tal forma que o limite inferior é de fato alcançado. Quando $u \neq 0$ e $\xi \neq 0$ as translações em tempo e frequência correspondentes levam a (B.2). \square



Átomos de Gabor

Gabor (1946)¹, em 1946, sugeriu a idéia de utilizar-se um sistema granular para produzir som. Em seu trabalho, Gabor discutiu os problemas inerente à análise de Fourier, segundo ele, embora a matemática esteja absolutamente correta, não era possível aplicá-la fisicamente, principalmente em sons comuns, como o som de uma sirene, em que a frequência é variável. Outro problema seria a implícita suposição, ao se utilizar senoides, de que a duração do sinal deva ser infinita. Gabor propõe então a idéia de aplicar os métodos da física quântica aos sinais sonoros, permitindo estabelecer uma analogia entre o som e o quanta. Ele propôs uma maneira para que o método de Fourier fosse reduzido a células, dentro de um contexto matemático. Seus estudos tinham como foco a transmissão de informação por canais de comunicação. Gabor via em seus átomos uma possibilidade de compressão para a transmissão de sinais sonoros, não seria necessário transmitir o sinal em si, bastaria transmitir os coeficientes de sua representação em termo de seus átomos.

A função, ou átomo de Gabor, é definida da seguinte forma:

$$g_{l,n}(x) = g(x - al)e^{2\pi ibnx}, \quad -\infty < l, n < \infty, \quad (\text{C.1})$$

onde a, b são constantes e g é uma determinada função em $L^2(\mathbb{R})$, tal que $\|g\| = 1$. De forma semelhante às famílias wavelets, está-se gerando uma base $\{g_{l,n}\}$ para $L^2(\mathbb{R})$, utilizando para tanto translações e modulações (ao invés de mudança de escala) de uma função

¹Ganhador do Prêmio Nobel pelo seu trabalho em Holografia.

base. Como na ótica da transformada de Fourier, translações e modulações são duais, a escolha mais natural para g talvez seja a Gaussiana $g(x) = e^{-\pi x^2}$. A sua transformada de Fourier é

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}g)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\pi x^2} e^{-i\omega x} dx \\ &= e^{-\pi\omega^2} = \widehat{g}(\omega). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

A transformada de Fourier das funções $g_{l,n}$ podem ser facilmente calculadas

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}g_{l,n})(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g_{l,n}(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(x - al) e^{2\pi i b n x} e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\pi(x-al)^2} e^{2\pi i b n x} e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\pi(\omega - bn)^2} e^{2\pi i a l \omega} = \widehat{g}_{l,n}(\omega). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Desta forma consegue-se uma simetria entre localização no espaço-tempo e na freqüência. Mas infelizmente esta família das funções de Gabor $\{g_{l,n}\}$ não é ortonormal,

$$\langle g_{l,m}, g_{l,n} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int e^{-2\pi\omega^2} e^{2\pi i(n-m)\omega} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\pi(m-n)^2/2} \neq 0. \quad (\text{C.4})$$

No entanto existem escolhas que tornam $g_{l,m}$ e $g_{l,n}$ ortogonais entre si, por exemplo, se escolhendo-se g como a função retangular $g(x) = b(x) = \chi_{[0,1)}(x)$, no intervalo $[0, 1)$, então a família de Gabor será claramente ortogonal, pois o suporte das funções $g_{l,m}$ e $g_{l',n}$ será disjunto, a menos que $l = l'$. Quando $l = l'$ obtém-se

$$\langle g_{l,m}, g_{l,n} \rangle = \int_l^{l+1} e^{2\pi i(n-m)\omega} d\omega = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Mas com tal escolha tem-se então a seguinte transformada de Fourier para as funções de Gabor:

$$\widehat{g}_{l,n}(\omega) = e^{-\pi i \omega} \frac{\text{sen}(\omega - n)}{\omega - n} e^{-2\pi i l \omega}, \quad (\text{C.6})$$

de forma que obtém-se uma localização máxima no tempo, mas em contraposição, uma

péssima localização em frequência. Trocando a função retangular pela função sinc² é possível obter o caso contrário, ótima localização na frequência, mas péssima localização no tempo. É possível, através desses exemplos, ver que existe uma forte relação entre localização no tempo e na frequência e qualquer ortonormalidade que uma família de Gabor possa vir a ter.

²A função sinc é definida por:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x} \tag{C.7}$$



Algumas propriedades dos espaços vetoriais munidos de produto interno

Teorema D.0.2. *Seja V um espaço vetorial complexo munido de produto interno, então as seguintes propriedades são satisfeitas*

1. *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\| \quad (\text{D.1})$$

2. *Desigualdade Triangular*

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (\text{D.2})$$

3. *Identidade de Polarização*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}(\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + j\|f + jg\|^2 - j\|f - jg\|^2) \quad (\text{D.3})$$

Demonstração. 1. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Sabe-se que

$$\|f - \lambda g\|^2 = \langle f - \lambda g, f - \lambda g \rangle \geq 0 \quad (\text{D.4})$$

$$\langle f - \lambda g, f - \lambda g \rangle = \langle f, f \rangle - \lambda \langle f, g \rangle - \bar{\lambda} \langle g, f \rangle + |\lambda|^2 \langle g, g \rangle \quad (\text{D.5})$$

escolhendo

$$\lambda = \frac{\langle g, f \rangle}{\langle g, g \rangle}, \quad (\text{D.6})$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \langle f - \lambda g, f - \lambda g \rangle &= \langle f, f \rangle - \frac{\langle g, f \rangle}{\langle g, g \rangle} \langle f, g \rangle - \frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle} \langle g, f \rangle + \\ &\quad + \frac{\langle g, f \rangle}{\langle g, g \rangle} \frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle} \langle g, g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - 2 \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\langle g, g \rangle} + \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\langle g, g \rangle} \\ &= \langle f, f \rangle - \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\langle g, g \rangle} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

o que é verdadeiro se e somente se

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle \quad (\text{D.8})$$

ou, equivalentemente

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\| \quad (\text{D.9})$$

□

2. (Desigualdade Triangular) Para qualquer f e g em V e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtém-se

$$\begin{aligned} 0 \leq \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + \langle f, g \rangle + \overline{\langle f, g \rangle} \\ &\leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2|\langle f, g \rangle| \\ &\leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\| \|g\| \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2 \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

□

3. (Identidade de Polarização)

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle \\ -\|f - g\|^2 &= -\|f\|^2 - \|g\|^2 + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle \\ j\|f + jg\|^2 &= j\|f\|^2 + j\|g\|^2 + \langle f, g \rangle - \langle g, f \rangle \end{aligned}$$

$$-j\|f - jg\|^2 = -j\|f\|^2 - j\|g\|^2 + \langle f, g \rangle - \langle g, f \rangle \quad (\text{D.11})$$

somando as equações acima obtém-se

$$(\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + j\|f + jg\|^2 - j\|f - jg\|^2) = 4\langle f, g \rangle. \quad (\text{D.12})$$

□

D.1 Base de Riesz

Em um espaço de infinitas dimensões, relaxando-se a condição de ortogonalidade de uma base, deve-se impor uma equivalência parcial de energia para garantir a estabilidade da base. Dada uma família de vetores $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, ela é dita uma base de Riesz de H se for linearmente independente e existir $A, B > 0$ tais que, para qualquer $f \in H$, seja possível encontrar $\{\lambda_n\}$ de forma que

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n, \quad (\text{D.13})$$

em que a seguinte condição seja satisfeita

$$\frac{1}{B}\|f\|^2 \leq \sum_n |\lambda_n|^2 \leq \frac{1}{A}\|f\|^2. \quad (\text{D.14})$$

O teorema de representação de Riesz (Reed e Simon, 1980) prova que existe \tilde{e}_n tal que $\lambda_n = \langle f, \tilde{e}_n \rangle$, e por (D.14), obtém-se

$$\frac{1}{B}\|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, \tilde{e}_n \rangle|^2 \leq \frac{1}{A}\|f\|^2. \quad (\text{D.15})$$

Existe um teorema (veja teorema 5.2 em (Mallat, 1999)) que garante que para todo $f \in H$

$$A\|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad (\text{D.16})$$

e

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \tilde{e}_n \rangle e_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle \tilde{e}_n. \quad (\text{D.17})$$

A família dual $\{\tilde{e}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ é linearmente independente e também uma base de Riesz. Essas bases duais devem ser biortogonais pois no caso em que $f = e_p$ obtém-se $e_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_p, \tilde{e}_n \rangle e_n$. Como $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ constitui uma família linearmente independente, obtém-

se a relação de biortogonalidade entre as bases

$$\langle e_p, \tilde{e}_n \rangle = \delta_{p-n} . \quad (\text{D.18})$$

E

Teorema de Bezout

Teorema E.0.1. (*Daubechies, 1992*) Sejam p_1 e p_2 dois polinômios, de grau n_1 e n_2 , respectivamente, que não possuem raízes em comum, então existem polinômios únicos q_1 e q_2 , de grau $n_2 - 1$ e $n_1 - 1$, respectivamente, tal que a seguinte igualdade seja satisfeita

$$p_1(x)q_1(x) + p_2(x)q_2(x) = 1. \quad (\text{E.1})$$

Demonstração. A prova deste teorema é bem semelhante à construção do algoritmo de Euclides. Primeiramente mostra-se a existência desses dois polinômios, q_1 e q_2 , e posteriormente mostra-se a unicidade. É possível inicialmente assumir $n_1 \geq n_2$, ou seja, o grau de p_1 é maior ou igual ao grau de p_2 , e desta forma, encontrar polinômios $a_2(x)$ e $b_2(x)$, com grau dado: $\text{grau}(a_2) = \text{grau}(p_1) - \text{grau}(p_2)$ e $\text{grau}(b_2) \leq \text{grau}(p_2)$, de forma que

$$p_1(x) = a_2(x)p_2(x) + b_2(x). \quad (\text{E.2})$$

Ou seja, decompõem-se p_1 em função dos polinômios a_2 , p_2 e b_2 . De forma semelhante, é possível decompor p_2 ,

$$p_2(x) = a_3(x)b_2(x) + b_3(x), \quad (\text{E.3})$$

em que $\text{grau}(a_3) = \text{grau}(p_2) - \text{grau}(b_2)$ e $\text{grau}(b_3) < \text{grau}(b_2)$. É possível continuar com

esse procedimento, de forma que um b_{n-1} genérico será escrito da forma:

$$b_{n-1}(x) = a_{n+1}(x)b_n(x) + b_{n+1}(x). \quad (\text{E.4})$$

Como é possível observar, o grau de b_n é estritamente decrescente e, portanto, o procedimento terá um limite, quando atingir o termo $b_{N+1} = 0$, para um dado N , com $b_N \neq 0$,

$$b_{N-1}(x) = a_{N+1}(x)b_N(x). \quad (\text{E.5})$$

Como

$$b_{N-2}(x) = a_N(x)b_{N-1}(x) + b_N(x), \quad (\text{E.6})$$

então b_N , por dividir b_{N-1} e a ele mesmo, também dividirá b_{N-2} . Por indução, b_N dividirá todos os b_n antecessores, e assim também p_2 e p_1 . Como p_1 e p_2 não possuem zeros em comum, então segue que b_N é uma constante não nula. Tomando b_N dado em (E.6), e substituindo b_{N-1} pela equação equivalente a (E.6) para b_{N-3} , obtém-se

$$\begin{aligned} b_N &= b_{N-2} - a_N b_{N-1} = b_{N-2} - a_N(b_{N-3} - a_{N-1}b_{N-2}) \\ &= (1 + a_N a_{N-1})b_{N-2} - a_N b_{N-3} \\ &\text{etc ...} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Por indução

$$b_N = \tilde{a}_{N,k} b_{N-k} + \tilde{a}_{N,k} b_{N-k-1}, \quad (\text{E.8})$$

sendo que $\tilde{a}_{N,1} = -a_N$, $\tilde{a}_{N,1} = 1$, $\tilde{a}_{N,k+1} = \tilde{a}_{N,k} - \tilde{a}_{N,k} a_{N-k}$, $\tilde{a}_{N,k+1} = \tilde{a}_{N,k}$. Segue então por indução que $\text{grau}(\tilde{a}_{N,k}) = \text{grau}(b_{N-k-1}) - \text{grau}(b_{N-1})$, $\text{grau}(\tilde{a}_{N,k}) - \text{grau}(b_{N-1})$. Para $k = N - 1$, obtém-se

$$b_N = \tilde{a}_{N,N-1} p_2 + \tilde{a}_{N,N-1} p_1, \quad (\text{E.9})$$

sendo $\text{grau}(\tilde{a}_{N,N-1}) = \text{grau}(p_1) - \text{grau}(b_{N-1}) < \text{grau}(p_1)$, $\text{grau}(\tilde{a}_{N,N-1}) = \text{grau}(p_2) - \text{grau}(b_{N-1}) < \text{grau}(p_2)$. (Usou-se $\text{grau}(b_{N-1}) \geq 1$; se $\text{grau}(b_{N-1})$ fosse zero, então b_N seria zero.) Segue então que $q_1 = \tilde{a}_{N,N-1}/b_N$ e $q_2 = \tilde{a}_{N,N-1}/b_N$ são solução de (E.1) e satisfazem as restrições desejadas.

Resta agora estabelecer a unicidade da solução. Suponha que q_1, q_2 e \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 sejam dois pares de solução para (E.1), ambas satisfazendo as restrições de grau. Então

$$p_1(q_1 - \tilde{q}_1) + p_2(q_2 - \tilde{q}_2) = 0. \quad (\text{E.10})$$

Como p_1 e p_2 não possuem zeros em comum, isso implica que todo zero de p_2 é um zero de $q_1 - \tilde{q}_1$, com ao menos a mesma multiplicidade. Se $q_1 \neq \tilde{q}_1$, então isso significa que

$\text{grau}(q_1 - \tilde{q}_1) \geq \text{grau}(p_2)$, o que é impossível, pois $\text{grau}(q_1), \text{grau}(\tilde{q}_1) < \text{grau}(p_2)$. Desta forma $q_1 = \tilde{q}_1$. Da mesma forma, segue que $q_2 = \tilde{q}_2$.

□

F

Códigos fonte

No presente capítulo apresenta-se alguns dos códigos fontes desenvolvido para o trabalho tratado nesta dissertação de mestrado. Nem todos os fontes são aqui apresentados, apenas os principais utilizados para a obtenção dos resultados obtidos. Caso deseje-se obter outros códigos, deve-se entrar em contado com o autor. Toda implementação aqui apresentada foi feita para ser utilizada no MatLab.

F.1 Rotina para cálculo de $L(\omega)$

```
function [L,w] = calcL(N,M)
%
% Find the L(w) function, given N (scale factor) and M (filter order).
% Syntax: [L,w] = calcL(N,M)
%     where w has Npts points and cover linearly the interval [0,2pi].
%
% created by LEO (CEFALA-UFMG) - 2006

% number of points in the interval
Npts = round(100/N);
```

```

D = 2*pi/N;
d = D/Npts;

L = [];
w = [];
for np = 0 : Npts-1,
    A = [];
    idx = [0 : N-1];
    for i = 0 : N-1,
        for j = 0 : N-1,
            w = np*d;
            k = idx(j+1);
            A(i+1,j+1) = calcA(w,k,N,M);
            w(np+1,j+1) = w + j*D;
        end;
        idx = delay(idx,-1);
    end;
    y = ones(N,1);
    A = inv(A);
    L(np+1,:) = (A*y)';
end;
L = L(:);
w = w(:);

function A = calcA(w,k,N,M)
    A = 1 / ( N^(2*M/(N-1)) );
    for l = 1 : N - 1,
        qk1 = 0;
        qk2 = 0;
        for n = 0 : M,
            qk1 = qk1 + factorial(M)/(factorial(M-n)*factorial(n)) * ...
                cos((M-n)*(w + pi -2*(k-1)*pi/N));
            qk2 = qk2 + factorial(M)/(factorial(M-n)*factorial(n)) * ...
                sin((M-n)*(w + pi -2*(k-1)*pi/N));
        end;
        A = A * (qk1^2 + qk2^2);
    end;
end;

```



```
end;
```

F.2 Obteção dos coeficientes de filtro

```
function a = findCoeffCos(m,w,N,M)
% Find the coefficients of the cossene polynomial fuction
% which best fits (using a least mean square method) the curve
% given by m(w).
% Syntax: [a] = findCoeffCos([m],[w],N,M)
%   where [a] are the coefficients found, [m] the function at hand,
%   [w] the frequency vector, N the scale factor and M the order
%   of the polynome.
%
% created by LEO (CEFALA-UFMG) - 2006

x = []; XN = [];
for n = 1 : length(w),
    x(n) = exp(i*w(n));
    XN(n) = 2*exp(i*w(n)*M);
end;
[a,s] = polyfit(x,m.*XN,2*M);
a = real(a);
a = a./2;
```

```
function h = findCoeff(m,w,N,M)
%
% Find the coefficients of the trigonometric polynomial fuction
% which best fits (using a least mean square method) the curve
% given by m(w).
% Syntax: h = findCoeff(m,w,N,M)
%   where h is the coefficients found, m the function at hand,
%   w the frequency vector, N the scale factor and M the order
```

```

% of the polynome.
%
% created by LEO (CEFALA-UFMG) - 2006

x = []; for n = 1 : length(w), x(n) = exp(-i*w(n)); end;
[h,s] = polyfit(x,m,M);

```

F.3 Banco de filtros

```

function A=waveleo_1d_integer(A,M)
%
% Perform a full 1D decomposition of a signal [A]
% using the filter bank given by the matrix [M] of coefficients.
%
% syntax: [A]=waveleo_1d_integer([A],[M])
%
% WAVELEO_1D_INTEGER
%
% created by LEO (CEFALA-UFMG) - 2006

N = size(M,1);
lA=length(A);
i=lA;
while i > 1,
    i=i/N;
end;

if i~=1,
    error('\nThe input vector must have N^n elements, where n is an integer.\n');
end;

kl=lA;
while kl>1,

```

```

    temp = waveleo_dec_integer(A(1:kl),N,M)';
    A(1:kl) = temp(:);
    kl=kl/N;
end;

```

```

function A=waveleo_rec_1d_integer(A,M)
%
% Perform the reconstruction process of a vector [A] decomposed
% by the filter bank given by the matrix [M] of filter coefficients.
%
% syntax: [A]=waveleo_rec_1d_integer([A],[M])
%
% created by LEO (CEFALA-UFMG) - 2006

N = size(M,1);
lA=length(A);
i=lA;
while i > 1,
    i=i/N;
end;

if i~=1,
    error('\nThe input vector must have N^n elements, where n is an integer.\n');
end;

kl=1;
while kl<lA,
    kl=kl*N;
    temp = [];
    for i = 0 : N-1,
        temp(i+1,:) = A((kl/N)*i+1:(kl/N)*(i+1));
    end;
    temp = waveleo_rec_integer(temp,N,M);
    A(1:kl) = temp(:);
end;

```

```

function [output] = waveleo_dec_integer(input,N,M)
%
% WAVELEO_DEC_INTEGER
%
% input :
% N : downsampling factor (scale factor)
% M : filter Matrix (NxL), N filters of length L
%
% syntax:
% [output] = waveleo_dec_integer(input,N,M)
%
% See also:
% WAVELEO_IM_DEC_NAO_PADRAO, WAVELEO_IM_DEC_PADRAO, WAVELEO_MA_DEC_NAO_PADRAO,
% WAVELEO_MA_DEC_PADRAO, etc
%
% created by LEO (CEFALA-UFMG) - 2006

sA = size(input);
if sA(1) > sA(2), input = input'; end;
LA=length(input);
if round(LA/N) < 1,
    error('\nThe entry vector is too small.\n');
end;

output = [];
for i = 1 : size(M,1),
    output(i,:) = downsample(delay(periodicConv(input,M(i,:)),N-1),N);
end;

function output = waveleo_rec_integer(input,N,M)

```

```

%
% WAVELEO_REC performs a 1D, one step, wavelet reconstruction using periodic bounds
% This algorithm is based on the decomposition process discribed on WAVELEO_DEC.
%
% created by LEO (CEFALA-UFMG) - 2006

if size(input,1) ~= size(M,1), error('wrong parameters'); end;

temp = [];
for i = 1 : size(M,1),
    temp(i,:) = makeLine(periodicConv(upsample(input(i,:),N),mirror(M(i,:))));
end;
output = sum(temp,1);

```

F.4 Exemplo

```

use all; clear all;
% scale factor
N = 4;

% create a Householder transform
v = rand(N,1);
Q = eye(N) - 2 * (v*v') ./ (v'*v);

x = load(signal.mat);
xd1 = waveleo_dec_integer(x,N,Q);

```

F.5 Rotinas auxiliares

```

function x = delay(x,n)

```

```
%  
% Periodic delay a signal [x] by n samples.  
% If n is negative, then an advance will be the result.  
% syntax: [x] = delay([x],n)  
%  
% created by LEO (CEFALA-UFMG) - 2006
```

```
sx = size(x);  
lx = length(x);  
if n > 0,  
    if sx(1) > sx(2),  
        x = [x(n+1:lx); x(1:n)];  
    else  
        x = [x(n+1:lx) x(1:n)];  
    end;  
else  
    if sx(1) > sx(2),  
        x = [x(lx+n+1:lx); x(1:lx+n)];  
    else  
        x = [x(lx+n+1:lx) x(1:lx+n)];  
    end;  
end;  
end;
```

```
function x = makeLine(x)  
% make sure [x] is a line vector  
if size(x,1) > size(x,2), x = x'; end;
```

```
function x = mirror(x,din)  
% Mirror the input vector [x].  
%  
% syntax: [x] = mirror([x],din)  
%
```

```
% created by LEO (CEFALA-UFMG) - 2006

if din == 1,
    x = x(:,size(x,2) : -1 : 1);
elseif din == 2,
    x = x(size(x,1) : -1 : 1,:);
else
    error('din must be either 1 or 2');
end;

function y = periodicConv(x,h)
%
% Do the periodic convolution of two vectors [x] and [h], which might
% be seen as a signal and a filter, or two signals.
%
% syntax : [y] = periodicConv([x],[h])
%
% created by LEO (CEFALA-UFMG) - 2006

y = zeros(size(x));
for i = 1 : length(y),
    for j = 1 : length(h),
        idx = i-j+1;
        while idx < 1, idx = length(x) + idx; end;
        y(i) = y(i) + h(j)*x(idx);
    end;
end;
```

Referências Bibliográficas

- Aslaksen, E. W. e Klauder, J. R. Unitary representations of the affine group. *j-J-MATH-PHYS*, 9(2):206–211, feb 1968.
- Auscher, P. *Ondelettes fractales et applications*. PhD thesis, University of Paris IX, 1989.
- Battle, Guy. A block spin construction of ondelettes. part i: Lemarié functions. *Comm. Math. Phys.*, 110:601–615, 1987.
- Benjamin, Walter. A imagem de proust. In *Obras Escolhidas de Walter Benjamin*, volume 5. 2005.
- Bernardini, Riccardo e Kovacevic, Jelena. Arbitrary tilings of the time-frequency plane using local bases. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47:2293–2304, 1999.
- Blu, Thierry. A new design algorithm for two-band orthonormal rational filter banks and orthonormal rational wavelets. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(6): 1494–1504, 1998.
- Calderón, A.P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia Math.*, 24:113–190, 1964.
- Calderón, A.P. Parabolic maximal functions associated to a distribution. *Adv. Math.*, 16: 1–64, 1974.
- Chui, C. K. e Z.Wang, J. On compactly supported spline wavelets and a duality principle. *Trans. Math. Soc.*, 330(2):903–915, 1992.
- Cohen, A., Daubechies, I., e Feauveau, J.C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure & Appl. Math*, (45):485–560, 1992.
- Cohen, A. e Daubechies, Ingrid. Orthonormal bases of compactly supported wavelets iii. better frequency resolution. *SIAM Journal of Mathematics Analysis*, 24(2):520–527, 1993.

- Daubechies, Ingrid. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41:909–996, 1988.
- Daubechies, Ingrid. The wavelet transformation, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE Transactions Information Theory*, 36:961–1005, 1990.
- Daubechies, Ingrid. *Ten lectures on wavelets*. Soc for Industrial and Applied Math, 1992.
- Lima, Paulo Cupertino de. Wavelets: uma introdução à teoria, aos algoritmos e às aplicações. 2006.
- Farge, Marie. Wavelets transforms and their applications to turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 24:395–457, 1992.
- Flanagan, James L. Models for approximating basilar membrane displacement. ii. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 32(11):1494–1495, 1960.
- Flanagan, James L. *Speech Analysis, Synthesis and Perception*. Springer Verlag, 1972.
- Fletcher, Harvey. Auditory patterns. *Rev. Mod. Phys.*, 12:47–65, 1940.
- Fourier, Jean Baptiste Joseph. *Théorie analytique de la chaleur*. 1822.
- Gabor, Dennis. Theory of communication. *J. Inst. Electr. Eng.*, 93, 1946.
- Gomes, Jonas e Velho, Luiz. *From Fourier Analysis to Wavelets*. SIGGRAPH'99 Course Notes #5, SIGGRAPH-ACM publication, 1999.
- Gomes, Jonas, Velho, Luiz, e Goldenstein, Siome. *Wavelets: Teoria, Software e Aplicacoes*. IMPA publication (21º Colóquio Brasileiro de Matemática), 1997.
- Grossmann, A. e Morlet, J. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal of Math. Anal.*, 15(4):723–736, July 1984.
- Grossmann, A., Morlet, J., e Paul, T. Transforms associated to square integrable group representations I: General results. *J. Math. Phys.*, 26:2473–2479, 1985.
- Grossmann, A., Morlet, J., e Paul, T. Transforms associated to square integrable group representations II: Examples. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 45:293, 1986.
- Hamming, Richard Wesley. *Introduction to applied numerical analysis*. Taylor & FrancisHemisphere, 1989.
- Heil, Christopher E. e Walnut, David F. Continuous and discrete wavelet transforms. *SIAM Review*, 31(4):628–666, 1989.

- Herley, Cormac, Kovacevic, Jelena, Ramchandran, Kannan, e Vetterli, Martin. Tilings of the time-frequency plane: construction of arbitrary orthogonal bases and fast tiling algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3341–3359, 1993.
- Hewitt, Michael J. e Meddis, Ray. A computer model of amplitude-modulation sensitivity of single units in the inferior colliculus. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95(4):2145–2159, 1994.
- Hewitt, Michael J. e Meddis, Ray. A computer model of dorsal cochlear nucleus pyramidal cells: Intrinsic membrane properties. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 97(4):2405–2413, 1995.
- Householder, Alston S. Unitary triangularization of a nonsymmetric matrix. *J. ACM*, 5(4):339–342, 1958.
- Hsiao, Chia-Chuan. Polyphase filter matrix for rational sampling rate conversions. *Proc. ICASSP*, pages 2173–2176, 1987.
- Hubbard, Barbara Burke. *The World According to Wavelets*. AK Peters, Ltd., 1998.
- Kant, Immanuel. *Kritik der Reinen Vernunft*. Reclam, 1787.
- Kovacevic, Jelena e Vetterli, Martin. Perfect reconstruction filter banks with rational sampling rate changes. *IEEE*, pages 1785–1788, 1991.
- Kovacevic, Jelena e Vetterli, Martin. Perfect reconstruction filter banks with arbitrary rational sampling rates. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(6):2047–2066, 1993a.
- Kovacevic, Jelena e Vetterli, Martin. Perfect reconstruction filter banks with rational sampling factors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41:2047–2066, 1993b.
- Kronland-Martinet, R., Morlet, J., e Grossmann, A. Analysis of sound patterns through wavelet transforms. *Int. J. Patt. Rec. Art. Intell.*, 1(2):273–301, 1988.
- Körner, Thomas William. *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, 1988.
- Lemarie, P. G. Sur l’existence des analyses multi-résolutions en théorie des ondelettes. *Revista Mat. Iberoamericana*, 8:457–474, 1993.
- Lyon, Richard e Mead, Carver. An analog electronic cochlea. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 36(7):1119–1134, 1988.

- Mallat, S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell.*, 11:674–693, 1989a.
- Mallat, Stéphane. Multiresolution approximation and wavelets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 315:69–88, 1989b.
- Mallat, Stéphane. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1999.
- Meyer, Yves. *Wavelets and Operators*. Cambridge University Press, 1992.
- Morlet, J., Arens, G., Fourgeau, I., e Giard, D. Wave propagation and sampling theory. *Geophysics*, 47:203–236, 1982.
- Nayebi, K., III, T. P. Barnwell, e Smith, M. J. T. The design of perfect reconstruction nonuniform band filters. *Proc. ICASSP*, pages 1781–1784, 1991.
- Ojanen, Harri. Wavekit: a wavelet toolbox for matlab.
- Patterson, Roy D., Allerhand, Mike H., e Giguere, Christian. Time-domain modelling of peripheral auditory processing: A modular architecture and a software platform. *Journal of the Acoustical Society of America*, 98:1890–1894, 1995.
- Paul, T. Functions analytic on the half-plane as quantum mechanical states. *JMP*, 25 (11):3252–3263, 1984.
- Poussin, Nicolas. textos reunidos. In Blunt, Anthony, editor, *Letras e proposições para Arte*. Hermann, Paris, 1964.
- Proust, Marcel. *A la Recherche du Temps Perdu*. 1927.
- Reed, Michael e Simon, Barry. *Functional Analysis*, volume 1. Academic Press, 1980.
- Roth, Philip. Os fatos, carta para zuckerman, 1988.
- Schafer, Ronald W. e Rabiner, Lawrence R. A digital signal processing approach to interpolation. *Proceedings of The IEEE*, 61(6):692–702, 1973.
- Slaney, Malcolm. Lyon's cochlear model. Technical Report 13, Apple Computer, 1988.
- Slaney, Malcolm. Auditory modeling. Technical Report 45, Apple Computer, 1994.
- Slaney, Malcolm. *Computational Auditory Scene Analysis*, chapter A Critique of Pure Audition. Erlbaum, 1998.
- Strang, Gilbert e Nguyen, Truong. *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley College, 1996.

- Sweldens, W. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets. *SIAM J. Math. Anal.*, 29(2):511–546, 1997.
- Unser, M., Aldroubi, A., e Eden, M. On the asymptotic convergence of b-spline wavelets to gabor functions. *IEEE, Trans. Information Theory*, 38(2):864–872, 1992.
- Vetterli, M. e Herley, C. Wavelets and filter banks: theory and design. *IEEE Trans. Signal Process.*, 9(40):2207–2232, 1992.
- Vetterli, Martin e Kovacevic, Jelena. *Wavelets and Subband Coding*. Prentice Hall Ptr, 1995.
- Békésy, Georg von. *Experiments in Hearing*. McGraw-Hill Book Company Inc., 1960.
- Wickerhauser, Mladen V. Lectures on wavelet packet algorithms. Nov. 18, 1991.
- Wickerhauser, Mladen Victor. Comparison of picture compression methods: Wavelet, wavelet packet, and local cosine transform coding.
- Wickerhauser, Mladen Victor. Lectures on wavelet packet algorithms. *Proceedings ondelettes et paquets d’ondes*, pages 31–99, 1991.
- Wickerhauser, Mladen Victor. Best-adapted wavelet packet bases. In Daubechies, Ingrid, editor, *Different Perspectives on Wavelets*, volume 47, pages 155–171. American Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- Winckel, Fritz. *Music, Sound and Sensation*. Dover, 1967.