

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CÁLCULO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO E ANÁLISE
DA TENSÃO INDUZIDA EM LINHAS AÉREAS
DEVIDO A DESCARGAS ATMOSFÉRICAS

AUTOR: ALMIR-FÉLIX LORENZATO DA FONSECA

ORIENTADORES: JOSÉ OSVALDO SALDANHA PAULINO

BENJAMIN RODRIGUES DE MENEZES

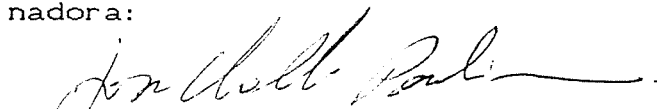
"CÁLCULO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO E ANÁLISE
DA TENSÃO INDUZIDA EM LINHAS AÉREAS
DEVIDO A DESCARGAS ATMOSFÉRICAS."

ENG.º ALMIR FÉLIX LORENZATO DA FONSECA

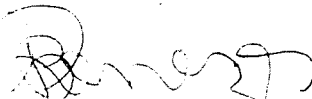
Dissertação de Mestrado submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Aprovada em 18 de Junho de 1990.

Banca examinadora:



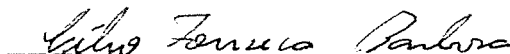
José Osvaldo Saldanha Paulino (Orientador)
Ms.C. CPGEE-UFMG/Prof. do CPGEE-UFMG



Benjamin Rodrigues de Menezes (Orientador)
Dr. Ing. Nancy-FR/Prof. do CPGEE-UFMG



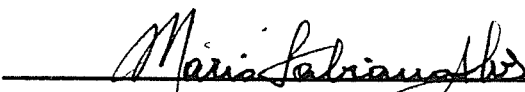
Antônio Roberto Panicalli
Ph.D. Univ. Illinois-USA/Eng.º CPqD-TELEBRÁS



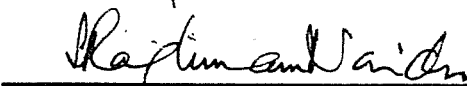
Célio Fonseca Barbosa
Ms.C. CPGEE-UFMG/Eng.º CPqD-TELEBRÁS



João Antônio Vasconcelos
Ms.C. UFPb- Paraíba/Prof. do CPGEE-UFMG



Mário Fabiano Alves
Ph.D. Univ. of Toronto-Canadá/Eng.º MF/Consultoria Ltda



Sreeramulu Raghuram Naidu
Ph.D. Univ. of Liverpool-Inglaterra/Pós-Doutorado
Univ. of British Columbia Canadá/Prof. UFPb-Paraíba

AGRADECIMENTOS

Ao professor José Osvaldo Saldanha Paulino pela
idéia do tema e pela orientação.

À Telebrás e especialmente ao Engenheiro Célio
Barbosa Fonseca pelo apoio.

Aos colegas Ivan, Paulo Henrique e Wallace pelas
discussões e contribuições valiosas relativas ao tema.

Aos colegas e professores do LEAT pela amizade e
convivência durante a realização deste trabalho.

Este trabalho é dedicado aos meus pais

Altair e Judith.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
<u>NOMENCLATURA UTILIZADA</u>	1
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	5
<u>CAPÍTULO 2 - CARACTERIZAÇÃO DA DESCARGA ATMOSFÉRICA</u>	13
2.1 - A Descarga Atmosférica Natural	13
2.1.1 - Introdução	13
2.1.2 - Descarga Nuvem-Terra	13
2.1.3 - Descargas que não envolvem a Terra	18
2.2 - Modelagem da Descarga Atmosférica Nuvem-Terra ..	18
<u>CAPÍTULO 3 - CÁLCULO ANALÍTICO DO CAMPO</u> <u>ELETROMAGNÉTICO PRODUZIDO POR UMA DESCARGA ATMOSFÉRICA</u> <u>INCIDINDO SOBRE UM SOLO DE RESISTIVIDADE NULA</u>	23
3.1 - Introdução	23
3.2 - Obtenção das Técnicas de Cálculo do Campo	27
3.3 - Caracterização do Método do Monopolo	37

3.4 - Caracterização do Método do Dipolo	39
3.5 - Cálculo do Campo Eletromagnético usando o modelo de descarga atmosférica adotado por Rusck e o método do monopolo	43
3.5.1 - Modelo	43
3.5.2 - Considerações do Modelo	43
3.5.3 - Cálculo Analítico	43
a) Especificação da Densidade de Corrente	45
b) Cálculo da Densidade de Carga	46
c) Cálculo do Potencial Vetor	47
d) Cálculo do Potencial Escalar	49
e) Cálculo do Campo Eletromagnético	51
3.6 - Cálculo do Campo Eletromagnético usando o modelo de Descarga Atmosférica adotado por Martin Uman e o método do dipolo	59
3.6.1 - Modelo	59
3.6.2 - Considerações do Modelo	59
3.6.3 - Cálculo Analítico	60
a) Especificação da Densidade de Corrente	62
b) Determinação do Potencial Vetor	62
c) Determinação do Campo Eletromagnético	63
3.7 - Comparação entre os Modelos	79
3.8 - Comparação das Técnicas de Cálculo Utilizadas ..	82
3.9 - Considerações Finais	85

<u>CAPÍTULO 4 - OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ONDA PARA UMA LINHA UNIFILAR INFINITA SUBMETIDA A UM CAMPO ELETRO- MAGNÉTICO</u>	88
---	----

4.1- Introdução	88
4.2 - Obtenção das Equações de Onda a Partir das Equações de Maxwell	90
4.2.1 - Primeira Formulação para as Equações de Onda	90
4.2.1.1 - Extensão para Descargas Atmosféricas ..	100
4.2.2 - Segunda Formulação para as Equações de Onda .	105
4.2.3 - Terceira Formulação para as Equações de Onda	107
4.3 - Considerações Finais	109

CAPÍTULO 5 - MEDICÃO DE CAMPO ELÉTRICO E CONFRONTAÇÃO

<u>COM RESULTADOS CALCULADOS</u>	111
--	-----

5.1 - Medição de Campo Elétrico	111
5.2 - Confrontação da Medição com o Resultado Simulado	113
5.3 - Observação	115

<u>CONCLUSÃO FINAL</u>	116
------------------------------	-----

<u>SUGESTÕES PARA CONTINUAÇÃO DO TRABALHO</u>	119
---	-----

<u>APÊNDICE A - TEORIA DAS IMAGENS</u>	121
--	-----

A.1 - Condutor carregado sobre um plano de terra metálico infinito	121
--	-----

A.2 - Condutor conduzindo corrente sobre um plano de terra metálico infinito	122
--	-----

<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	125
---	-----

NOMENCLATURA UTILIZADA

Grandezas vetoriais:

$\vec{\nabla}$ = Operador del

\vec{E} = Campo Elétrico

\vec{H} = Campo Magnético

\vec{J} = Densidade de corrente

\vec{A} = Potencial vetor

\vec{r} = Posição do ponto de observação do campo

\vec{r}' = Posição de um elemento infinitesimal da fonte do campo

\vec{a}_x , \vec{a}_y , \vec{a}_z = Vetores unitários com relação às coordenadas retangulares

\vec{a}_r , \vec{a}_ϕ , \vec{a}_z = Vetores unitários com relação às coordenadas cilíndricas

Grandezas escalares

x, y, z = Posição no espaço segundo às coordenadas retangulares

x', y', z' = Posição de um elemento infinitesimal da fonte do campo, segundo às coordenadas retangulares

r, ϕ, z = Posição no espaço segundo às coordenadas cilíndricas

r', ϕ', z' = Posição de um elemento infinitesimal da fonte do campo, segundo às coordenadas cilíndricas

ρ = Densidade de carga

ϵ = Permissividade do meio

ϵ_0 = Permissividade do vácuo (ou aproximadamente do ar)

μ = Permeabilidade do meio

μ_0 = Permeabilidade do vácuo (ou aproximadamente do ar)

t = Tempo

ϕ = Potencial escalar

V' = Região do espaço delimitado pela fonte de campo

ρ_l = Densidade linear de carga

i = Corrente de retorno

I_0 = Amplitude da corrente de retorno

L = Altura do canal de descarga e da imagem correspondente

v_0 = Velocidade da luz = $1/\sqrt{\mu \cdot \epsilon}$

c = Velocidade da luz no vácuo = $1/\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}$

v = Velocidade de propagação da corrente de retorno

β = Constante de propagação da corrente de retorno = v/c

H_x, H_y, H_z = Componentes de campo magnético, com relação às coordenadas retangulares

H_z, H_r, H_ϕ = Componentes de campo magnético, com relação às coordenadas cilíndricas

E_x, E_y, E_z = Componentes de campo elétrico, com relação às coordenadas retangulares

E_z, E_r, E_ϕ = Componentes de campo elétrico, com relação às coordenadas cilíndricas

Com relação às componentes anteriores, os super-escritos utilizados no capítulo 3 significam:

a) r = radiação

b) i = indução

Com relação às mesmas componentes, os super-escritos utilizados no capítulo 4 significam:

a) i = incidente

b) s = devido à resposta da linha

R = Distância do ponto de observação do campo a um elemento infinitesimal da fonte

r_1 = Distância da base do canal ao ponto de observação do campo

r = Distância que corresponde à projeção de r_1 no plano xy

L' = Altura da frente de onda da corrente de retorno no canal, vista por um observador em ' r ' no tempo ' t '

h = Altura da linha com relação ao solo

L_p = Indutância própria de um condutor unifilar sobre um plano infinito condutor por unidade de comprimento

C_p = Capacitância de um condutor unifilar sobre um plano infinito condutor por unidade de comprimento

V^s = Tensão no condutor com relação ao solo devido à resposta da linha

V^i = Tensão no condutor com relação ao solo devido ao campo elétrico incidente

V^t = Tensão total no condutor = $V^s + V^i$

V_e^i = Tensão na linha com relação ao solo devido ao campo elétrico conservativo incidente

V_m^i = Tensão na linha com relação ao solo devido ao campo elétrico não-conservativo incidente

V^P = Tensão na linha com relação ao solo devido à resposta da linha, somada à parcela devido ao campo conservativo incidente = $V^S + V_e^i$

I = Corrente no condutor

Q = Carga líquida no condutor por unidade de comprimento

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O efeito das descargas atmosféricas em linhas aéreas vem sendo estudado ao longo dos tempos. Não só o efeito das descargas que atingem a linha, mas particularmente o efeito das descargas indiretas. Tais descargas, que não incidem diretamente na linha, devido ao efeito da indução eletromagnética, podem provocar danos em sistemas de baixa tensão e de comunicação. Portanto, um trabalho de engenharia se justifica, na medida em que se procura estabelecer critérios de proteção para tais sistemas. Para se atingir tal objetivo, o seguinte cronograma pode ser estabelecido:

- 1 - Caracterização e modelagem do fenômeno da descarga atmosférica;
- 2 - Cálculo do campo eletromagnético devido a ocorrência do fenômeno da descarga atmosférica estabelecido pelo modelo;
- 3 - Cálculo da resposta transitória de uma linha aérea frente ao campo eletromagnético produzido pela descarga;
- 4 - Computação dos transitórios eletromagnéticos para se obter a tensão induzida num sistema genérico;
- 5 - Estabelecimento de um modelo em escala reduzida do fenômeno da descarga para medição da tensão induzida em

linhas;

6 - Comparação entre os resultados obtidos na medição em modelo reduzido com o obtido no modelo teórico;

7 - Simulação em computador dos arranjos de proteção selecionados, para se estabelecer o mais eficaz no sentido de se limitar a tensão induzida em um dado sistema.

O cronograma acima, além de outros aspectos relacionados aos efeitos das descargas em cabos subterrâneos, é alvo de um convênio entre a Escola de Engenharia da UFMG, através da Fundação Christiano Ottoni, e a Telebrás, através de seu CPqD, e envolve alunos de mestrado em seus respectivos trabalhos de dissertação.

O presente trabalho se restringe aos três primeiros itens do cronograma acima. Uma vez que as diversas partes deste cronograma foram desenvolvidas paralelamente, envolvendo outras teses de mestrado ([31], [32], [33]), era necessário a adoção de uma modelagem baseada na literatura, que envolvesse os três itens citados e que permitisse uma independência inicial entre os trabalhos. Desta forma, esta dissertação se voltaria no sentido de dar suporte teórico às outras no que diz respeito à modelagem adotada: possíveis limitações, restrições, questionamentos, etc.

No entanto, o trabalho de escolha desta teoria a ser adotada é dificultado pelo fato de não existir uma unanimidade ou definição na literatura quanto a modelagem da

descarga atmosférica, quanto a forma de cálculo do campo eletromagnético e quanto a resposta de uma linha aérea submetida a um campo eletromagnético produzido por uma descarga atmosférica, ou seja, exatamente os três pontos em que este trabalho se propõe a avaliar.

Entre as diversas modelagens existentes que abordam os três primeiros aspectos do cronograma, destacam-se os trabalhos de três pesquisadores, os quais são citados abaixo, por apresentarem algumas considerações que os distinguem entre si:

1- S. Rusck

Desenvolveu uma teoria para o cálculo do campo eletromagnético e da tensão induzida em linhas aéreas em 1957 [06], a qual foi questionada posteriormente com os seguintes argumentos:

- A técnica de cálculo do campo eletromagnético estaria errada;
- As equações utilizadas para o cálculo da tensão induzida em linhas aéreas estaria incompleta, não levando em consideração todas as fontes de corrente induzida;
- Não era levada em consideração a condutividade finita do solo a qual seria decisiva para a tensão induzida.

2- M. Uman

Desenvolveu uma teoria para o cálculo do campo

eletromagnético e da tensão induzida em linhas. Contesta o trabalho de S. Rusck no que se refere ao efeito da condutividade finita do solo [10], além de questionar o cálculo do campo eletromagnético por julgá-lo incorreto uma vez que, segundo ele, não obedecia a condição de Lorentz [10]. Este último questionamento foi levantado porque o cálculo do campo eletromagnético realizado por ele [08] levava a resultados diferentes dos apresentados por Rusck.

3- P. Chowdhuri

Desenvolveu uma teoria para o cálculo do campo eletromagnético e da tensão induzida em linhas aéreas. Contesta S. Rusck no que se refere a fonte de corrente induzida numa linha aérea [15,25].

Dentre estas teorias optou-se por utilizar a teoria de Rusck devido aos seguintes fatores:

- Apresentava uma modelagem que incluía uma expressão analítica para a tensão induzida em linhas aéreas;
- Medições anteriores em modelo reduzido realizadas por Paulino [36] já indicavam a validade da teoria de Rusck para a tensão induzida em linhas aéreas sobre um solo de resistividade zero;
- Medições em modelo reduzido realizadas por Boaventura [32], sobre um solo de alta resistividade, indicaram que o efeito da resistividade seria pouco significativo para a

tensão induzida em linhas aéreas, quando o ponto de incidência da descarga é próximo à linha.

Uma vez que optou-se por utilizar a modelagem já desenvolvida por S. Rusck por julgá-la a mais adequada a nossos propósitos, esta dissertação se propõe a validá-la nos questionamentos apresentados por M. Uman e P. Chowdhuri, já citados anteriormente.

Desta forma foram traçados os seguintes objetivos, os quais são discutidos ao longo do texto:

- 1- Desenvolver as duas técnicas utilizadas genericamente para o cálculo analítico do campo eletromagnético no domínio do tempo e mostrar que a técnica utilizada por S. Rusck está correta;
- 2- Comparar os resultados do campo eletromagnético obtidos por S. Rusck e M. Uman, no que se refere às componentes do campo obtidas e dos modelos de descarga utilizados;
- 3- Obter as equações de onda de uma linha aérea submetida a um campo eletromagnético variável no tempo e mostrar que a formulação utilizada por S. Rusck está correta.

A seguir é feito um comentário sobre a abordagem dada em cada capítulo:

Capítulo 2:

Neste capítulo é feito inicialmente a caracterização de uma descarga natural. Em seguida são apresentadas as principais simplificações feitas, a fim de

se obter um modelo do fenômeno físico. As simplificações inicialmente apresentadas são comuns a todos os modelos em uso para se calcular o campo eletromagnético produzido pela descarga. No entanto, existe uma diferença básica entre os modelos. Esta diferença se relaciona a especificação da fonte do campo, ou seja, a distribuição de carga e corrente da descarga, e é apresentada e avaliada neste capítulo e no capítulo subsequente.

Capítulo 3:

Duas técnicas matemáticas vem sendo usadas para se obter uma expressão analítica para o campo eletromagnético. A primeira chamada de método do monopolo, é caracterizada pela necessidade do conhecimento da distribuição de carga e corrente da fonte de campo. A segunda técnica conhecida como método do dipolo, é caracterizada pela necessidade do conhecimento da distribuição de corrente somente. A primeira parte do capítulo se dedica a apresentar as duas técnicas e a demonstrar que as duas técnicas levam a resultados finais do campo eletromagnético idênticos, se forem definidas as mesmas fontes do campo.

A partir desta constatação, o campo eletromagnético é calculado usando as duas técnicas de cálculo e os modelos citados no capítulo 2. Uma vez que as técnicas levam a mesmos resultados para o campo total, os modelos citados no capítulo 2 podem ser comparados do ponto de vista do campo

eletromagnético produzido. Desta forma, é mostrado que os modelos levam aos mesmos valores de variação de campo, que é o que importa para a tensão induzida em linhas, se for definido nos dois modelos a mesma corrente de descarga.

Finalmente é feita uma interpretação e comparação das componentes de campo eletromagnético obtidas ao calculá-lo segundo as duas técnicas citadas.

Capítulo 4:

Neste capítulo, são obtidas as equações de onda no domínio do tempo de uma linha aérea, unifilar e infinita, sobre um solo plano de resistividade zero, quando submetida a um campo eletromagnético, como o criado por uma descarga atmosférica.

O problema em si se resume a se obter as equações que permitam calcular as tensões e correntes induzidas em uma linha aérea, quando submetida a um campo eletromagnético.

É demonstrado que três formulações para as equações de onda são possíveis, dependendo de como as tensões obtidas a partir delas são definidas.

Capítulo 5:

Neste capítulo é apresentado resultados de medição em modelo reduzido e é feita uma comparação com os resultados obtidos com o modelo teórico calculado no

capítulo 3.

Apêndice A:

Neste apêndice é apresentado os princípios da teoria das imagens. A teoria das imagens é utilizada como alternativa para se considerar o efeito de um plano metálico infinito, nas proximidades de uma distribuição de carga ou corrente.

CAPÍTULO 2

CARACTERIZAÇÃO DA DESCARGA ATMOSFÉRICA

2.1 - A Descarga Atmosférica Natural

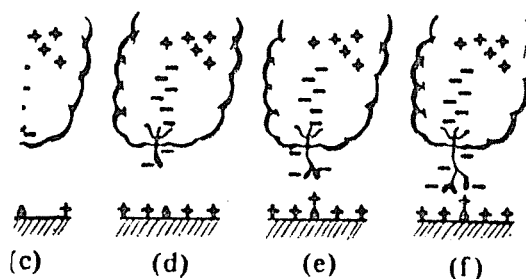
2.1.1 - Introdução:

A descarga atmosférica é um fenômeno transitório, que conduz correntes elevadas e cujo percurso se estende por quilômetros. A descarga atmosférica ocorre quando alguma região da atmosfera, geralmente uma nuvem, reúne uma quantidade de cargas elétricas suficientes para que o campo elétrico associado às cargas causem uma ruptura elétrica do ar. Tais descargas podem ocorrer inteiramente dentro de uma nuvem, entre duas nuvens (descargas^{ny} entre nuvens), entre uma nuvem e terra (descargas nuvem-terra) ou entre uma nuvem e o ar nas vizinhanças. As descargas nuvem-terra são as mais extensivamente estudadas devido ao seu interesse prático, como por exemplo, os distúrbios provocados em linhas de transmissão e de comunicação.

2.1.2 - Descarga nuvem-terra:

No modelo idealizado de distribuição das cargas na nuvem, é mostrado na Figura 1(a) as principais regiões onde se concentram cargas positivas (P) e negativas (ND), da ordem de dezenas de coulombs. A região de cargas positivas

(p) é uma região de distribuição de cargas menor.



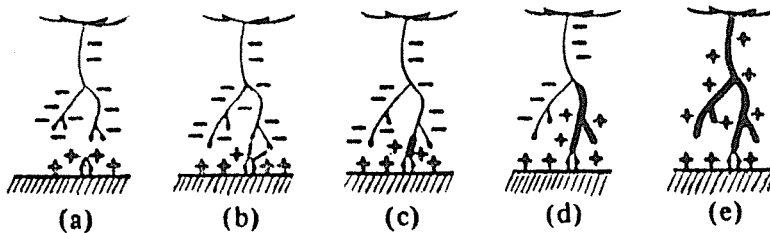
- (a) Distribuição de cargas na nuvem;
 (b) Ruptura preliminar na parte inferior da nuvem;
 (c)-(f) Progressão do líder em direção à terra;

Figura 1 - Iniciação e propagação do líder

Fonte: Uman [04]

Nesta condição, é iniciado um processo de ruptura preliminar dentro da nuvem, apesar de haver uma certa discordância sobre a exata forma e localização deste processo. Na Figura 1, a ruptura preliminar é mostrada ocorrer na nuvem entre as regiões N e p. Esta ruptura preliminar inicia o chamado líder passo a passo, em que há uma canalização de cargas negativas a partir da nuvem em direção à terra em uma série de passos tenuamente luminosos. Neste desenvolvimento em direção à terra, o canal negativamente carregado formado pelo líder, apresenta

ramificações e tortuosidades. Dados obtidos a partir de fotografias, mostram que cada passo do líder descendente dura aproximadamente $1 \mu\text{s}$ (Uman [04]), possui algumas dezenas de metros de comprimento e tem uma pausa entre passos de aproximadamente $50 \mu\text{s}$ (Figura 1(c-f), Figura 2(a)).



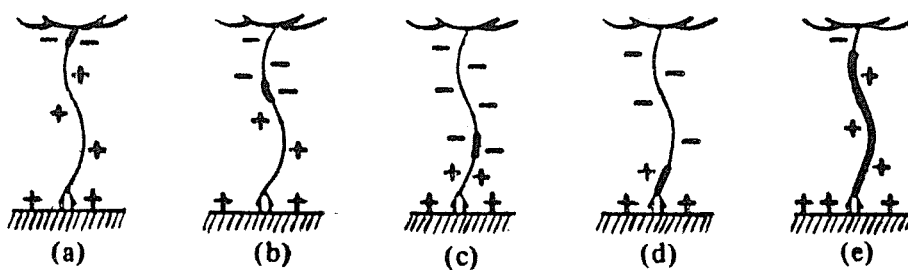
- (a) Fase final do líder descendente;
 (b) Iniciação do líder ascendente;
 (c)-(e) Propagação da corrente de retorno da terra para a nuvem;

Figura 2 - Iniciação e Propagação da Corrente de Retorno

Fonte: Uman [04]

Quando a ponta do líder se aproxima da terra, o campo elétrico abaixo dele aumenta e causa um ou mais processos similares de ruptura, ocasionando algo semelhante a um líder ascendente carregando cargas positivas (Figura 2). Quando uma das ramificações ascendentes entra em contato

com o líder descendente, algumas dezenas de metros acima da superfície da terra, a ponta do líder descendente é conectada ao potencial de terra. O canal do líder é então descarregado quando uma onda conduzindo o potencial de terra, a corrente de retorno, se propaga pelo caminho previamente ionizado pelo líder. A velocidade da corrente de retorno é tipicamente $1/3$ da velocidade da luz e o tempo de trânsito total da terra até o topo do canal é cerca de $100 \mu\text{s}$. O valor de pico da corrente de retorno pelo menos em sua porção inferior é tipicamente 30 kA , sendo que o tempo que vai de zero ao pico de corrente é de uns poucos microsegundos (Uman [04]).



- (a)-(c) O líder contínuo deposita carga negativa no canal residual da primeira descarga;
 (d)-(e) A corrente de retorno se propaga da terra para a nuvem;

Figura 3 - Líder Contínuo e Corrente de Retorno Subsequente

Fonte: Uman [04]

Após a corrente de retorno ter cessado de fluir, o raio pode terminar. No entanto, se alguma carga adicional se tornar disponível no topo do canal por descargas dentro da nuvem, um líder contínuo (Figura 3) pode se propagar em direção à terra no canal residual da primeira descarga. Ao contrário do líder que ocorre na primeira descarga, este líder se propaga continuamente e normalmente não possui ramificações. Ao se propagar, o líder contínuo deposita carga negativa no canal residual, iniciando uma segunda corrente de retorno. Esta descarga é chamada descarga subsequente e pode ocorrer uma ou mais vezes.

O tempo decorrido entre cada descarga subsequente em um raio, é geralmente de 40 a 80 ms, mas pode ser de algumas dezenas de segundos se uma corrente contínua fluir no canal após a descarga. Esta corrente contínua é da ordem de 100 A e representa uma transferência direta de carga da nuvem para a terra (Uman [04]).

Além do movimento descendente do líder negativamente carregado mostrado na Figura 1 e 2, que inicia o processo chamado de descarga negativa, o processo de descarga pode ser iniciado por um movimento descendente de um líder positivamente carregado. Estas descargas positivas são mais raras de ocorrer. A descarga pode também ser iniciada por um líder ascendente a partir da terra, geralmente em montanhas ou estruturas altas, podendo ser positivamente ou negativamente carregado. Desta forma, o

processo de ramificação do líder é feito numa direção ascendente.

2.1.3 - Descargas que não envolvem a terra:

Os tipos mais comuns de descarga que não envolvem a terra são as descargas dentro da nuvem e as descargas nuvem-nuvem. Estas descargas não são tão extensivamente estudadas quanto às descargas nuvem-terra e, desta forma, muito menos se é conhecido sobre suas características físicas. Elas usualmente ocorrem quando um centro de carga positiva e um centro de carga negativa se contactam através da propagação de um líder e da conseqüente formação de um canal entre eles. As correntes de retorno médias relacionadas a este fenômeno variam de 1 a 4 kA (Uman [04]), sendo portanto muito inferiores às da descarga nuvem-terra. Apesar disso, este valor pode ser responsável por uma tensão induzida significativa em redes de baixa tensão. No entanto, esta dissertação se restringe a avaliar os efeitos das descargas nuvem-terra, deixando o estudo das descargas que não envolvem a terra como sugestão para um estudo posterior.

2.2 - Modelagem da Descarga Atmosférica Nuvem-Terra

Algumas simplificações (Liew [35], Chowdhuri [15], Haldar [14]) são possíveis ao processo da descarga nuvem-terra natural, a fim de se obter um modelo que permita

o cálculo do campo eletromagnético e da tensão induzida em linhas. Algumas constatações do fenômeno físico e as simplificações assumidas são citadas a seguir.

Constatações:

- O tipo mais comum de descarga é a descarga negativa, a qual é iniciada por um movimento descendente de um líder negativamente carregado;
- A ruptura preliminar, a subsequente canalização de cargas negativas em direção à terra pelo líder e o resultante anulamento de cargas no canal e na nuvem, se combinam para produzir uma variação de campo eletromagnético;
- O canal de descarga possui ramificações;

Simplificações:

- Todos os fenômenos considerados, com exceção do anulamento de cargas no canal, com a resultante corrente de retorno, são desprezados em função de não provocarem uma variação de campo suficientemente rápida que os tornem significativos, do ponto de vista da tensão induzida em linhas aéreas. Desta forma o único fenômeno considerado para o cálculo do campo eletromagnético é o da corrente de retorno;
- Apesar do canal de descarga possuir ramificações, ele é assumido como retilíneo e perpendicular em relação ao solo;
- A terra, onde se inicia a corrente de retorno, é

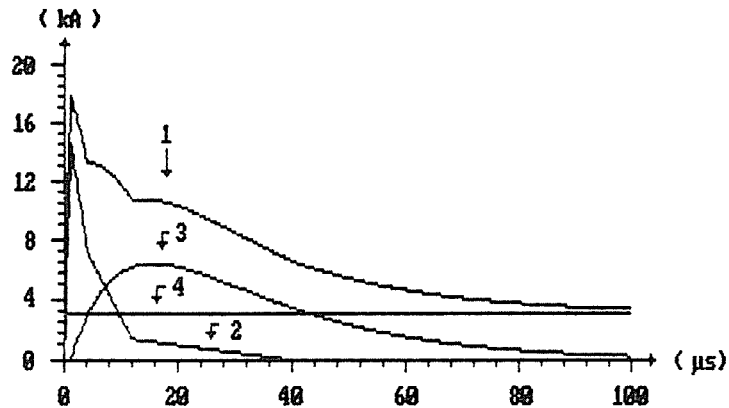
considerado um condutor perfeito;

- A velocidade da corrente de retorno ao se propagar ao longo do canal, é considerada constante.

Uma vez adotadas estas simplificações, fica faltando especificar a fonte do campo, ou seja, a distribuição de carga e corrente no canal. No entanto, embora as simplificações anteriores sejam consenso entre os autores do assunto (Liew [35], Rusck [06], Master [08]), a especificação da fonte do campo não é, dando origem a dois modelos básicos.

O primeiro modelo, adotado inicialmente por S. Rusck [06], considera o canal inicialmente carregado com uma carga negativa distribuída uniformemente, dando origem a uma corrente de retorno em forma de um degrau positivo, a qual vem da terra para anular as cargas negativas previamente armazenadas.

O segundo modelo, utilizado de uma forma mais completa por M. Uman [08], considera o canal inicialmente descarregado, e uma corrente positiva e arbitrária é injetada na base do canal depositando carga positiva ao longo deste. Esta corrente arbitrária é posteriormente modelada de forma a assumir uma forma de onda e valor de pico típicos de uma descarga real, como mostrado na Figura 4.



- Curva 1 - Corrente Total
- Curva 2 - Corrente impulsiva
- Curva 3 - Corrente de Corona
- Curva 4 - Corrente contínua

Figura 4 - Componentes da corrente de retorno na terra, calculadas a partir de medições de campo elétrico e magnético por Y.T. Lin e M. Uman [05].

Embora, a diferença mais visível entre os modelos seja a simplicidade da corrente de retorno no primeiro comparada ao segundo, a diferença básica, que é motivo de avaliação no capítulo seguinte, é a consideração no primeiro modelo de um anulamento de cargas negativas no canal, enquanto o segundo considera um carregamento de cargas positivas no canal.

O fato de se usar uma corrente de retorno simplificada como no primeiro modelo comparada ao segundo, também será motivo de avaliação no capítulo subsequente.

CAPÍTULO 3

CÁLCULO ANALÍTICO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO PRODUZIDO POR UMA DESCARGA INCIDINDO SOBRE UM SOLO DE RESISTIVIDADE NULA

3.1- Introdução

O objetivo principal desta dissertação é a validação da teoria de Rusck no que diz respeito aos questionamentos levantados por outros autores, já que se acredita devido aos argumentos já apresentados que ela é a mais adequada aos propósitos desta e de outras teses de mestrado elaboradas simultaneamente a esta ([31], [32], [34]).

Desta forma, neste capítulo são avaliados os questionamentos quanto ao cálculo do campo eletromagnético feito por Rusck [06], levantados por M. Uman [8,9,10]. Tais questionamentos são citados a seguir.

Em 1983, M. Uman publicou um artigo (Master [08]) onde em parte de sua modelagem e cálculo do campo eletromagnético, havia uma similaridade com o trabalho realizado por Rusck [06] em 1957. No entanto, apesar desta similaridade, os resultados parciais apresentados eram totalmente diferentes daqueles apresentados por S. Rusck. Esta constatação levou M. Uman a questionar o trabalho de

Rusck. Neste caso havia apenas duas possibilidades de questionamento, por serem estas as únicas diferenças entre os dois modelos e metodologias de cálculo utilizadas:

1- Quanto à técnica de cálculo utilizada para se obter uma expressão analítica para o campo eletromagnético;

Duas técnicas a princípio distintas foram utilizadas pelos dois autores citados para o cálculo analítico do campo eletromagnético. A técnica de cálculo utilizada por S. Rusck, chamada por nós de método do monopolo é caracterizada pela necessidade do conhecimento da distribuição de carga e corrente da fonte ou no nosso caso, no canal de descarga. A técnica utilizada por M. Uman denominada método do dipolo é caracterizada pela necessidade do conhecimento da distribuição de corrente somente.

Devido a esta aparente super-especificação (necessidade do conhecimento da distribuição de carga e corrente) no método do monopolo utilizado por Rusck, M. Uman argumentava que esta técnica estaria incorreta por não obedecer a condição de Lorentz.

2- Quanto a fonte do campo eletromagnético ou seja, o modelo adotado para se caracterizar a descarga atmosférica

Esta diferença não é citada por M. Uman, mas foi notada

por nós como possível causadora da divergência constatada por ele.

Ambos os modelos, utilizados por S. Rusck e M. Uman, consideram um solo de resistividade nula e um canal vertical e reto sobre este solo. A diferença surge ao se caracterizar a fonte do campo. O modelo utilizado por S. Rusck para obter uma expressão analítica para o campo eletromagnético, considera o canal inicialmente com uma carga uniformemente distribuída de polaridade negativa e uma corrente, em forma de um degrau parte do solo para neutralizar esta carga. O modelo utilizado por M. Uman, considera o canal inicialmente descarregado e uma corrente é injetada na base do canal depositando carga positiva ao longo deste. No cálculo parcial realizado por M. Uman esta corrente tinha a forma de um degrau.

Esta diferença poderia ser a causadora da divergência entre os resultados, uma vez que não sabemos a princípio avaliar o efeito para o campo eletromagnético ao se carregar um canal ou descarregá-lo da forma citada anteriormente.

A abordagem dada para se avaliar estas divergências e questionamentos é citada a seguir:

A) É feita uma revisão das duas técnicas de cálculo utilizadas pelos dois autores citados, obtendo-as a partir das equações de Maxwell. Para tanto, é utilizada a dedução

realizada por Plonsey [24], com a diferença de que enquanto lá as técnicas são obtidas no domínio da frequência, aqui elas são obtidas no domínio do tempo.

Neste ítem se deseja avaliar se o método do monopolo obedece ou não a condição de Lorentz, além de se caracterizar rigorosamente os dois métodos. Também é possível se avaliar a possibilidade da diferença na fonte do campo ser a causadora da divergência verificada por Uman.

B) É feito o cálculo do campo eletromagnético a partir dos modelos e das técnicas de cálculo utilizados por cada autor citado.

Neste caso se deseja avaliar se ocorreu alguma falha dos autores citados ao se calcular analiticamente o campo eletromagnético o que também é uma possível fonte da divergência entre os resultados apresentados por eles.

Aqui se deseja avaliar também, embora não tenha ainda sido citado, o fato de as duas técnicas de cálculo do campo conduzirem a componentes de campo eletromagnético com interpretações físicas diferentes. Esta avaliação é apenas de caráter teórico, não sendo esta uma possível fonte da divergência entre os resultados apresentados pelos autores, uma vez que embora as componentes de campo sejam distintas, a divergência foi notada para o campo eletromagnético total, que se esperava fosse o mesmo.

3.2- Obtenção das técnicas de cálculo do campo

As equações de Maxwell sob condições de variação no tempo podem ser escritas na seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{\mu H}}{\partial t} \quad (01)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = \rho \quad (02)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \quad (03)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mu H} = 0 \quad (04)$$

onde:

\vec{E} = vetor campo elétrico

\vec{H} = vetor campo magnético

ρ = distribuição de carga da fonte de campo

\vec{J} = vetor distribuição de corrente da fonte de campo

μ = permeabilidade do meio (considerado homogêneo e isotrópico)

ϵ = permissividade do meio

A presença do campo eletromagnético é associado à presença de fontes. Uma vez conhecidas as distribuições de carga e corrente, o campo poderia ser determinado segundo as equações acima. No entanto, sob condições de variação no tempo, as distribuições de carga e corrente se relacionam

segundo a equação da continuidade:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (05)$$

Desta forma, nós não podemos especificar ρ e \vec{J} independentemente.

As equações de Maxwell são suficientes para completamente definir os campos. Elas definem 7 equações diferenciais independentes (3 em (1), 1 em (2) e 3 em (3)), pois a equação (4) pode ser eliminada com a informação de que μH se anula em algum instante. Uma vez que tem-se 10 variáveis (3 de \vec{E} , 3 de \vec{H} , 3 de \vec{J} e 1 de ρ), é necessário especificar no mínimo 3 para se obter o campo, ou seja, as 3 componentes da distribuição de corrente. Ao especificar-se a distribuição de corrente, o campo eletromagnético pode ser calculado através das equações (1) e (3) e a distribuição de carga através de (2). A distribuição de carga obtida desta maneira é a mesma que poderia ser obtida usando-se a equação da continuidade. Isto ocorre porque a equação da continuidade está implícita nas equações de Maxwell, calculando-se o divergente de (3) e usando-se (2) para substituir $\vec{\nabla} \cdot \vec{\epsilon E}$. A equação da continuidade não é, portanto, uma equação independente no conjunto das equações de Maxwell.

Uma vez que pode se tornar difícil obter os campos \vec{E} e \vec{H} diretamente das equações de Maxwell, o procedimento usual é primeiro obter um potencial vetor e escalar e, a partir deles, obter os campos.

Observando, na equação (4), que $\vec{\nabla} \cdot \mu \vec{H}$ é nulo, pode-se escrever:

$$\mu \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (06)$$

desde que,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

Da equação (1), pode ser escrito:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Sendo o vetor $\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$ irrotacional, ele pode ser

derivado de um potencial escalar, isto é:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \vec{\nabla} \phi$$

$$\vec{E} = - \vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (07)$$

Usando agora (3), (6) e (7), obtém-se:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \vec{A}$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \vec{J} + \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \vec{J} - \epsilon \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} - \mu \epsilon \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (08)$$

Segundo o teorema de Helmholtz, um campo vetorial é completamente definido por seu divergente e rotacional. Desde que (6) especifica somente o rotacional de \vec{A} , o divergente de \vec{A} pode ser escolhido arbitrariamente. Ao observar a expressão (8), fica claro que ela simplifica se for feita a seguinte escolha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (09)$$

Esta escolha é conhecida como condição de Lorentz.

Fazendo uso dela em (8), obtém-se:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\mu\epsilon \frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad (10)$$

Até aqui já foram usadas todas as equações de Maxwell, exceto (2). Para assegurar que $\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = \rho$, \vec{E} é substituído por (7) e, a condição de Lorentz é utilizada para obter:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla}^2 \phi + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$-\vec{\nabla}^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (11)$$

Portanto, um novo conjunto de equações pode ser definido por (6), (7), (9), (10) e (11), ou seja:

$$\vec{\nabla}^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (11)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad (10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (9)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7)$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (6)$$

Estas equações definem um sistema de 11 equações independentes (1 em cada equação escalar e 3 em cada equação vetorial, ou seja: 1 em (11), 3 em (10), 1 em (9), 3 em (7) e 3 em (6)) e 14 variáveis (1 de ϕ , 1 de ρ , 3 de \vec{A} , 3 de \vec{J} , 3 de \vec{E} e 3 de \vec{H}). Desta forma, 3 variáveis devem ser especificadas ou seja, as 3 componentes da distribuição de corrente \vec{J} , e o campo eletromagnético pode ser obtido a partir do seguinte procedimento:

- 1- Especificar a distribuição de corrente \vec{J} ;
- 2- Calcular o potencial vetor \vec{A} a partir de (10);
- 3- Calcular o potencial escalar ϕ a partir de \vec{A} usando (9);
- 4- Obter \vec{E} e \vec{H} a partir de (7) e (6).

Este procedimento caracteriza o método do dipolo. Ele requer somente o conhecimento da distribuição de corrente para calcular o campo eletromagnético.

A distribuição de carga ρ pode ser obtida em (11) se ela for uma variável de interesse, o que normalmente não ocorre. A distribuição de carga ρ obtida desta maneira deve, segundo as equações de Maxwell, se relacionar com a distribuição de corrente \vec{J} de acordo com a equação da continuidade. Resta verificar portanto, se esta condição é satisfeita neste novo conjunto de equações. Isto pode ser feito a partir da condição de Lorentz :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (9)$$

Tomando o Laplaciano de (9), obtém-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \vec{\nabla}^2 \phi}{\partial t} \quad \text{desde que,}$$

$$\vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}^2 \vec{A})$$

Tomando o divergente de (10) e substituindo no primeiro membro acima, e substituindo $\vec{\nabla}^2 \phi$ no segundo membro acima por (11), obtém-se:

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}{\partial t^2} - \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\rho}{\epsilon} \right)$$

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

O lado esquerdo da equação se anula devido a

condição de Lorentz. Isto significa que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (05)$$

Desta forma, a condição de Lorentz é vista como sendo a condição que garante que ρ e \vec{J} se relacionam segundo a equação da continuidade. Portanto, ao se utilizar a condição de Lorentz para obter o potencial ϕ , está se garantindo que a função ϕ obtida, corresponde a um \vec{A} que satisfaz (10), tal que ϕ é uma solução de (11) para uma fonte ρ que é relacionada a \vec{J} pela equação da continuidade.

Uma vez que a equação da continuidade é satisfeita no conjunto de equações (6), (7), (9) (10) e (11), pode-se pensar em fazer uso dela para calcular o campo eletromagnético seguindo um outro procedimento:

- 1- Especificar a distribuição de corrente \vec{J} ;
- 2- Obter a distribuição de carga ρ , usando a equação da continuidade (5);
- 3- Calcular os potenciais vetor e escalar através de (10) e (11);
- 4- Calcular o campo eletromagnético através de (6) e (7).

Este procedimento descrito acima, caracteriza o método do monopolo. Apesar de exigir a especificação da distribuição de corrente, ele também requer o conhecimento da distribuição de cargas.

Neste novo conjunto de equações, ((5), (6), (7), (10) e (11)) a única equação que não foi utilizada foi a condição de Lorentz (9). Deve-se verificar portanto, se esta condição é satisfeita. Isto pode ser feito a partir da equação da continuidade:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (05)$$

Calculando-se $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$ em (11) e $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$ em (10),

obtem-se:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}^2 \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

Igualando os dois termos acima, sabendo-se que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$, obtém-se:

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}^2 \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}) = - \frac{1}{\mu} \vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$-\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{1}{\mu} \vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Da expressão acima pode-se concluir que a condição de Lorentz ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$), embora seja uma solução para a expressão acima, ela não é única.

No entanto, qualquer solução diferente de $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{Constante})$ é incompatível com o conjunto de equações dado ((11), (10), (07), (06)). Para se garantir que $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0)$ basta que se escolha as constantes de integração na solução de (10) e (11) como nulas, o que normalmente é feito, significando a atribuição de um potencial zero ao infinito.

A condição de Lorentz portanto, se verifica no método do monopolo. Isto significa que ao se calcular a densidade de carga ρ , a partir da densidade de corrente \vec{J} usando a equação da continuidade (05), estará se garantindo que os potenciais ϕ e \vec{A} , obtidos a partir de (11) e (10), obedecem a condição de Lorentz .

O método do dipolo se baseia nas equações (06), (07), (09), (10) e (11), que são independentes, sendo que a equação da continuidade (05) é verificada nesse conjunto de equações. Já o método do monopolo se baseia nas equações (06), (07), (05), (10) e (11), e a condição de Lorentz (09) se verificã nesse novo conjunto de equações independentes.

Desta forma, apesar dos conjuntos de equações independentes sejam diferentes, as equações (05), (06), (07), (09), (10) e (11) são verificadas nos dois métodos. Pode-se tirar daí duas conclusões, uma decorrente da outra:

- A equação da continuidade e a condição de Lorentz carregam a mesma informação, podendo ser usada uma ou outra [24];

- A solução obtida para o campo eletromagnético, a partir de uma mesma distribuição de carga e corrente, utilizando-se o método do monopolo ou o método do dipolo é a mesma. As vantagens da utilização de um ou outro método serão analisadas posteriormente.

3.3- Caracterização do Método do monopolo

Na prática, o conjunto de equações que forma a base do método do monopolo não é usado na forma apresentada anteriormente. Os potenciais vetor e escalar devem ser expressos em função das fontes ρ e \vec{J} .

A solução de (10) e (11) respectivamente é:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/v_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (12)$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/v_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (13)$$

onde:

- \vec{r} e \vec{r}' se referem ao sistema de coordenadas mostrado na Fig. 5;
- $v_0 = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

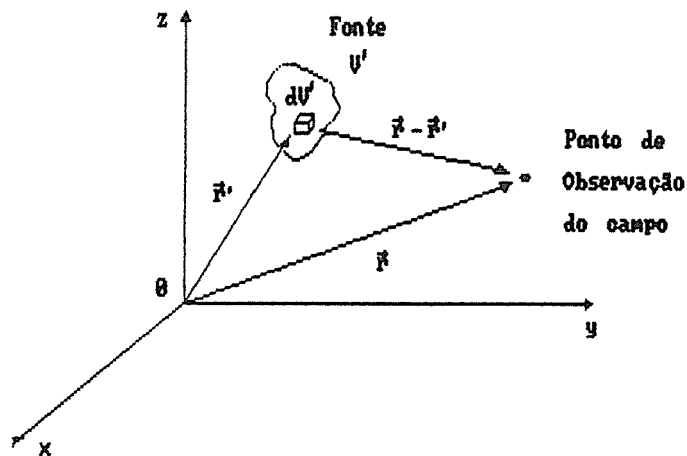


Figura 5

As equações (12) e (13) obtidas como solução de (10) e (11) são as equações que garantem que a condição de Lorentz seja satisfeita no método do monopolo, pois os potenciais A e ϕ se anulam no infinito ($r \rightarrow \infty$).

Os potenciais A e ϕ obtidos são conhecidos como potenciais retardados, pois incorporam o retardo de tempo envolvido devido a distância entre a fonte e o ponto de observação do campo, para que uma variação na fonte possa ser observada.

A solução dos campos \vec{E} e \vec{H} pode ser obtida a partir do seguinte conjunto de equações:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (05)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/v_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (12)$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/v_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (13)$$

$$\vec{E} = - \vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (07)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (06)$$

Sequência de operações para se obter o campo eletromagnético:

- 1- Especificar a distribuição de corrente \vec{J} ;
- 2- Determinar a distribuição de carga ρ através de (5);
- 3- Calcular o potencial vetor e escalar através de (12) e (13);
- 4- Obter os campos \vec{E} e \vec{H} através de (7) e (6);

3.4- Caracterização do Método do dipolo

Uma vez que o método do dipolo requer apenas o conhecimento da distribuição de corrente, o campo

eletromagnético pode ser obtido em função do potencial vetor somente.

Partindo da condição de Lorentz, obtém-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = - \mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (109)$$

$$\phi = - \frac{1}{\mu \epsilon} \int_{-\infty}^t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, d\tau + \phi(t=0) \quad (14)$$

onde:

- $\phi(t=0)$ é a condição inicial ou seja, o potencial produzido pela configuração de cargas existente antes de se iniciar o processo.

Substituindo-se (14) em (07), obtém-se:

$$\vec{E} = \frac{1}{\mu \epsilon} \int_{-\infty}^t \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \, d\tau - \vec{\nabla} \phi(t=0) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (15)$$

O novo sistema de equações é:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/v_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dV' \quad (12)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\mu \epsilon} \int_{-\infty}^t \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \, d\tau - \vec{\nabla} \phi(t=0) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (15)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (06)$$

A seqüência de operações para se obter o campo eletromagnético é:

- 1- Especificar a distribuição de corrente \vec{J} ;
- 2- Determinar o potencial vetor \vec{A} através de (12);
- 3- Obter os campos \vec{E} e \vec{H} através de (15) e (06).

Baseado no conjunto de equações acima é possível avaliar o efeito, do ponto de vista do campo eletromagnético produzido, dos dois modelos citados no início do capítulo. Se analisarmos somente o efeito de termos no primeiro modelo uma corrente positiva que vem da terra para neutralizar uma carga negativa previamente armazenada no canal, e no segundo modelo uma corrente positiva injetada no canal a partir do solo, pode-se observar pelas equações acima que desde que a densidade de corrente nos dois modelos seja a mesma, a diferença no campo produzido pelos dois modelos é o campo eletrostático inicial produzido pela distribuição de cargas no primeiro modelo, representada no conjunto de equações acima por $-\nabla\phi(t=0)$.

Uma vez que devido a distribuição de carga presente no canal no primeiro modelo, a corrente no canal deve ser em forma de degrau, uma comparação entre os dois modelos do ponto de vista do campo eletromagnético produzido só pode ser feita se, ao invés de se especificar a corrente mostrada na Figura 4 do Capítulo 2 para o segundo modelo, se

especificar um degrau de corrente. Isto será feito nos dois itens subsequentes ao se calcular o campo eletromagnético utilizando-se os modelos e as técnicas adotadas pelos autores citados no início do capítulo.

3.5 - Cálculo do Campo Eletromagnético usando o modelo de descarga atmosférica adotado por Rusck e o método do monopolo.

3.5.1 - Modelo:

A teoria de Rusck usa o modelo de Bruce-Golde da corrente de retorno. Neste modelo o líder deposita carga no canal e a corrente de retorno vem da terra para neutralizar esta carga.

3.5.2 - Considerações do Modelo:

a) O canal de descarga, considerado uma linha de transmissão ideal, é vertical em relação à superfície do solo;

b) O canal possui uma carga de polaridade negativa, a qual é distribuída uniforme e linearmente.

c) A corrente de retorno inicia no solo, no tempo $t=0$, para anular a carga depositada no canal pelo líder;

d) A velocidade da corrente de retorno é constante;

e) A corrente de retorno é um degrau que viaja sem distorção ou atraso e mantém a mesma forma que ela tem no solo;

f) O plano de terra é considerado um condutor perfeito, e é levado em consideração através da teoria das imagens.

3.5.3 - Cálculo Analítico:

O cálculo do campo eletromagnético usando o método

do monopolo será efetuado seguindo os passos descritos ao se caracterizar o método e baseado na geometria da Figura 6 e no sistema de coordenadas da Figura 7.

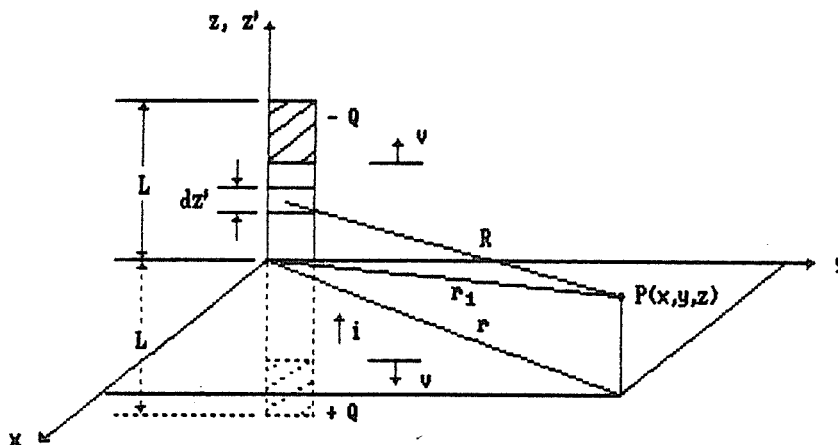


Figura 6 - Geometria da fonte e do ponto de observação do campo.

onde:

- x, y, z são as coordenadas do ponto de observação do campo;
- z' é a posição do elemento dz' da fonte, a qual coincide com o eixo z ;
- $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+z')^2}$ é a distância do ponto de observação do campo ao elemento dz' ;
- $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância da base do canal (origem) ao ponto de observação do campo;
- v é a velocidade da corrente de retorno;

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é distância que corresponde à projeção de r_1 no plano xy ;

- L é a altura do canal e da imagem correspondente.

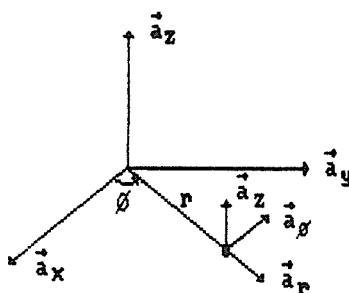


Figura 7 - Sistema de coordenadas utilizado

a) Especificação da Densidade de Corrente:

A densidade de corrente no canal satisfaz as seguintes exigências:

- Só possui componente na direção de z' ;
- A densidade de corrente se restringe a uma corrente filamentar:

- A corrente se restringe ao canal e é de mesma amplitude e forma de onda daquela no nível do solo:

$$i(z', t) = i(0, t) \quad -L \leq z' \leq L$$

$$i(z', t) = 0 \quad L < z' < -L$$

- A corrente vem do solo para neutralizar uma carga distribuída uniformemente, previamente depositada no canal.

- A corrente se propaga ao longo do canal, como se propagaria numa linha de transmissão ideal:

$$i(z', t) = i(v.t - z') \quad 0 \leq z' \leq L$$

$$i(z', t) = i(v.t + z') \quad -L \leq z' < 0$$

Desta forma, a corrente no canal e na imagem é:

$$\vec{I}(z', t) = I_0 \cdot u(0, t) \cdot U(v.t - z') \vec{a}_z \quad \text{para o canal}$$

$$\vec{I}(z', t) = I_0 \cdot u(0, t) \cdot U(v.t + z') \vec{a}_z \quad \text{para a imagem}$$

onde $U(v.t - z')$ é um degrau se propagando no sentido de \vec{a}_z e $U(v.t + z')$ no sentido de $-\vec{a}_z$. O termo $u(0, t)$ é também um degrau, porém ele é sempre avaliado em $z'=0$. O sentido positivo de corrente é o sentido convencional ou seja, o do fluxo de carga positiva.

b) Cálculo da Densidade de Carga:

A densidade linear de carga correspondente à corrente especificada acima é obtida a partir da equação da continuidade:

$$\frac{\partial I}{\partial z'} = - \frac{\partial \rho_l}{\partial t}$$

$$\rho(z', t) = i(z', t) \cdot \frac{\partial t}{\partial z'}$$

Uma vez que $\frac{\partial t}{\partial z'} = \frac{1}{v}$, onde v é a velocidade

da corrente de retorno, a densidade de carga é:

$$\rho_f(z', t) = \frac{I_0}{v} \cdot u(0, t) \cdot U(v \cdot t - z') \quad \text{no canal}$$

$$\rho_f(z', t) = - \frac{I_0}{v} \cdot u(0, t) \cdot U(v \cdot t + z') \quad \text{na imagem}$$

Esta carga, de acordo com o modelo, é suficiente para neutralizar a carga depositada no canal pelo líder. Desta forma, a carga líquida em qualquer instante é:

$$\rho_f(z', t) = - \frac{I_0}{v} \cdot [1 - u(0, t) \cdot U(v \cdot t - z')] \quad \text{no canal}$$

$$\rho_f(z', t) = \frac{I_0}{v} \cdot [1 - u(0, t) \cdot U(v \cdot t + z')] \quad \text{na imagem}$$

c) Cálculo do Potencial Vetor:

Uma vez que a corrente está confinada ao eixo z' , a expressão do potencial vetor a partir de (12) se reduz a:

$$\vec{A}(R, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{I}(z', t - R/c)}{R} dz' \quad (16)$$

Ou seja, o potencial vetor \vec{A} só possui componente na direção de \vec{a}_z .

$$\vec{A}(R, t) = A_z \vec{a}_z$$

Substituindo a corrente no canal e na imagem em

(16) obtém-se:

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_0^L \frac{I_0 \cdot U(t - r_1/c) \cdot U(v \cdot t - z' - v \cdot R/c)}{R} dz' + \int_{-L}^0 \frac{I_0 \cdot U(t - r_1/c) \cdot U(v \cdot t + z' - v \cdot R/c)}{R} dz' \right]$$

sendo que:

$$u(0, t - R/c) = U(t - r_1/c)$$

Fazendo uma mudança de variável de z' para $-z'$ na segunda integral, obtém-se:

$$A_z = \frac{\mu_0 \cdot I_0}{4\pi} \cdot U(t - r_1/c) \cdot \left[\int_0^L \frac{U(v \cdot t - z' - \beta \cdot \sqrt{r^2 + (z - z')^2})}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} dz' + \int_0^L \frac{U(v \cdot t - z' - \beta \cdot \sqrt{r^2 + (z + z')^2})}{\sqrt{r^2 + (z + z')^2}} dz' \right]$$

onde:

$$\begin{aligned} - \beta &= v/c \\ - r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Se a primeira integral é $f(z)$, a segunda é $f(-z)$. O integrando de $f(z)$ é diferente de 0 somente entre $z'=0$ e $z'=L'$, onde L' é calculado da equação:

$$L' = v \cdot t - \beta \cdot \sqrt{r^2 + (z - L')^2} \quad (17)$$

Resolvendo para L' em (17), obtém-se:

$$L' = \frac{-\beta^2 \cdot z + \beta \cdot c \cdot t - \beta \cdot \sqrt{(z - \beta \cdot c \cdot t)^2 + (1 - \beta^2) \cdot r^2}}{(1 - \beta^2)} \quad (18)$$

Desta forma, $f(z)$ se reduz a:

$$f(z) = \int_0^{L'} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \quad (19)$$

Integrando (19), obtém-se:

$$f(z) = \ln \left[(\beta \cdot c \cdot t - z) + \sqrt{(\beta \cdot c \cdot t - z)^2 + (1 - \beta^2) \cdot r^2} \right] - \ln(1 - \beta) - \ln \left[\sqrt{r^2 + z^2} \right] \quad (20)$$

Uma vez obtido $f(z)$, A_z é obtido da expressão:

$$A_z = \frac{\mu_0 \cdot I_0}{4\pi} \cdot U(t - r_1/c) \cdot \left[f(z) + f(-z) \right] \quad (21)$$

d) Cálculo do Potencial Escalar:

Uma vez que a densidade de carga se limita ao eixo z' , a expressão do potencial escalar se reduz a:

$$\phi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_f(z', t - R/c)}{R} dz' \quad (22)$$

Substituindo a densidade de carga no canal e na imagem em (22), obtém-se:

$$\phi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[- \int_0^L \frac{I_0}{v} \cdot \frac{[1 - U(t - r_1/c) \cdot U(v \cdot t - z' - v \cdot R/c)]}{R} dz' \right. \\ \left. + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{-L}^0 \frac{I_0}{v} \cdot \frac{[1 - U(t - r_1/c) \cdot U(v \cdot t + z' - v \cdot R/c)]}{R} dz' \right]$$

onde:

$$u(0, t - R/c) = U(t - r_1/c)$$

Fazendo uma mudança de variável de z' para $-z'$ na segunda integral, obtém-se:

$$\phi = \frac{I_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot v} \cdot \left[- \int_0^L \frac{[1 - U(t - r_1/c) \cdot U(v \cdot t - z' - \beta \cdot R)]}{R} dz' \right. \\ \left. + \int_0^L \frac{[1 - U(t - r_1/c) \cdot U(v \cdot t - z' - \beta \cdot R^*)]}{R^*} dz' \right]$$

onde:

$$- \beta = v/c$$

$$- R = \sqrt{r^2 + (z - z')^2}$$

$$- R^* = \sqrt{r^2 + (z + z')^2}$$

Cada integral acima pode ser dividida em duas, ou seja:

$$\phi = \frac{I_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot v} \cdot \left[-g(z) + g(-z) + U(t - r_1/c) \cdot [f(z) - f(-z)] \right] \quad (23)$$

onde $f(z)$ é a solução de (19), e $g(z)$ é a solução da integral abaixo:

$$g(z) = \int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z-z')^2}}$$

$$g(z) = \ln \left[\sqrt{r^2 + (L-z)^2} + L - z \right] - \ln \left[\sqrt{r^2 + z^2} - z \right] \quad (24)$$

A solução de (19) foi dada em (20):

$$f(z) = \ln \left[(\beta \cdot c \cdot t - z) + \sqrt{(\beta \cdot c \cdot t - z)^2 + (1-\beta^2) \cdot r^2} \right] - \ln(1-\beta) - \ln \left[\sqrt{r^2 + z^2} - z \right] \quad (20)$$

Desta forma, a partir de (20) e (24), o potencial escalar é obtido de (23).

e) Cálculo do Campo Eletromagnético:

O campo eletromagnético é obtido a partir dos potenciais através das equações (07) e (06):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (07)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (06)$$

Para exemplificar o método, o campo eletromagnético

será obtido na superfície do solo ou seja, para $z=0$, onde pela condição de fronteira o campo elétrico é vertical. O campo magnético é tangencial porque o potencial vetor só tem componente na direção de \vec{a}_z .

Desde que $z=0$:

$$r_1 = r$$

$$\vec{E} = \left[-\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \right] \vec{a}_z = E_z \vec{a}_z$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{a}_x - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{a}_y = H_x \vec{a}_x + H_y \vec{a}_y$$

O campo eletromagnético a partir das expressões acima e do potencial vetor e escalar obtido anteriormente vale:

para $0 \leq t < r/c$

$$E_z = E_{z0} = \frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot v} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + L^2}} + \frac{1}{r} \right] \quad (25)$$

$$H_x = H_y = 0 \quad (26)$$

O campo eletromagnético para $t < r/c$ se restringe ao campo eletrostático ou seja, ao campo produzido por uma linha de comprimento L , vertical em relação a um solo perfeitamente condutor, carregado uniformemente por uma carga de polaridade negativa. Somente no tempo $t = r/c$ aparece a primeira perturbação do campo.

Para $r/c \leq t < L/v + \sqrt{L^2 + r^2} / c$

o campo elétrico vertical é obtido como sendo:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} = E_{ze} = \frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot v} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{(\beta \cdot c \cdot t)^2 + (1 - \beta^2) \cdot r^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right]$$

$$-\frac{\partial A_z}{\partial t} = E_{zv} = \frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot v} \cdot \left[-\frac{\beta^2}{\sqrt{(\beta \cdot c \cdot t)^2 + (1 - \beta^2) \cdot r^2}} \right]$$

$$E_z = E_{ze} + E_{zv}$$

$$E_z = \frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot v} \cdot \left[\frac{(1 - \beta^2)}{\sqrt{(\beta \cdot c \cdot t)^2 + (1 - \beta^2) \cdot r^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right] \quad (27)$$

Nas expressões acima E_{ze} é a componente conservativa do campo elétrico, e E_{zv} é a componente não conservativa.

As componentes H_x e H_y do campo magnético podem ser escritas na seguinte forma:

$$H_x = \frac{I_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{y}{r} \cdot \left[\frac{(1 - \beta^2) \cdot r}{(\beta \cdot c \cdot t) \cdot k + k^2} - \frac{1}{r} \right]$$

$$H_y = -\frac{I_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{x}{r} \cdot \left[\frac{(1 - \beta^2) \cdot r}{(\beta \cdot c \cdot t) \cdot k + k^2} - \frac{1}{r} \right]$$

onde $k = \sqrt{(\beta \cdot c \cdot t)^2 + (1 - \beta^2) \cdot r^2}$

A partir do sistema de coordenadas da Figura 7,

obtem-se:

$$\text{sen } \phi = \frac{y}{r} \quad , \quad \text{cos } \phi = \frac{x}{r}$$

$$H_x = - H_\phi \cdot \text{sen } \phi \quad , \quad H_y = H_\phi \cdot \text{cos } \phi$$

Aplicando estas definições nas expressões de H_x e H_y obtidas anteriormente, o campo magnético pode ser escrito em função da componente \vec{a}_ϕ somente:

$$\vec{H} = H_\phi \vec{a}_\phi$$

$$H_\phi = \frac{I_0}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{1}{r} - \frac{(1-\beta^2) \cdot r}{(\beta \cdot c \cdot t) \cdot k + k^2} \right] \quad (28)$$

onde: $k = \sqrt{(\beta \cdot c \cdot t)^2 + (1-\beta^2) \cdot r^2}$

O intervalo de tempo de validade das expressões acima definido inicialmente, pode ser explicado da seguinte forma:

No tempo $t = r/c$ aparece a primeira perturbação devido ao anulamento das cargas no canal. O instante final considerado é o momento em que apareceria no ponto de observação do campo, o efeito da extremidade do canal, ou seja, o instante t obtido em (17) para $z=0$ e $L'=L$:

$$t = L/v + \sqrt{r^2 + L^2} / c$$

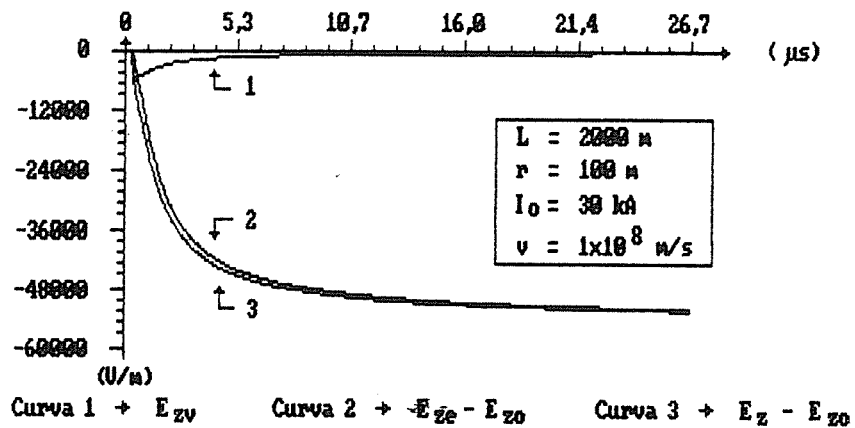
As figuras a seguir mostram as expressões obtidas anteriormente para o campo eletromagnético no solo, ao se especificar valores de L, r, I_0 e v , onde:

L = altura do canal;

r = distância do canal ao ponto de observação do campo;

I_0 = Amplitude do degrau de corrente definido para a
descarga;

v = velocidade da corrente de retorno.

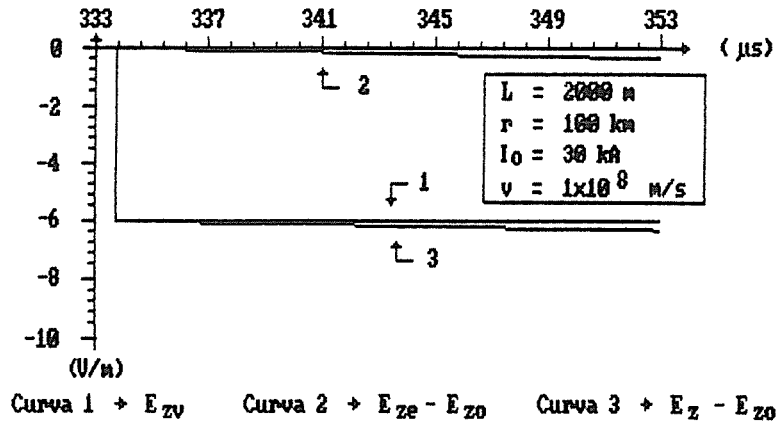


Curva 1 - Campo elétrico não conservativo

Curva 2 - Campo elétrico conservativo menos o campo eletrostático inicial devido às cargas previamente depositadas no canal.

Curva 3 - Campo total obtido da soma das duas componentes anteriores.

Figura 8 - Campo Elétrico no Solo



Curva 1 - Campo elétrico não conservativo

Curva 2 - Campo elétrico conservativo menos o campo eletrostático inicial.

Curva 3 - Campo total (Soma das duas componentes anteriores)

Figura 9 - Campo Elétrico no Solo

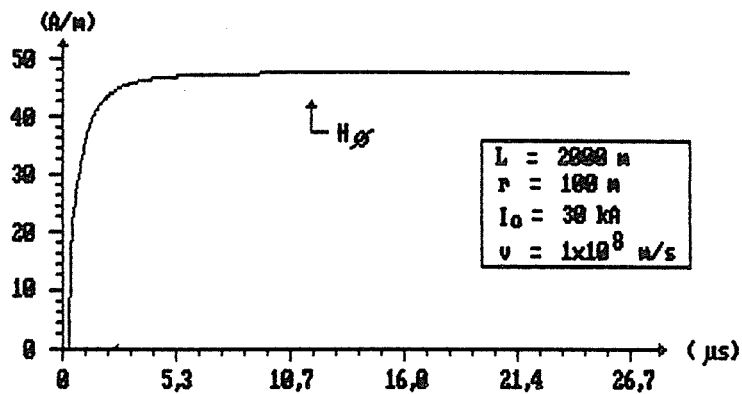


Figura 10 - Campo Magnético no Solo

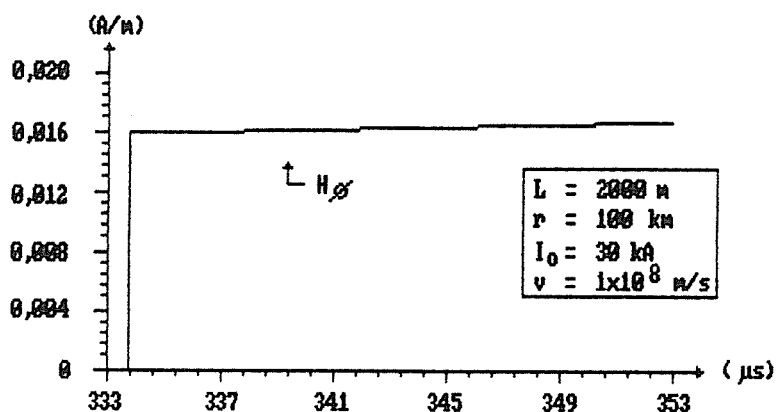


Figura 11 - Campo Magnético no Solo

Nas figuras acima são mostrados o campo elétrico e magnético no solo. O único parâmetro que mudou da Figura 8 para a Figura 9, onde é mostrado o campo elétrico, e da Figura 10 para a Figura 11, onde é mostrado o campo magnético, foi a distância do ponto de observação do campo ao ponto de incidência da descarga atmosférica.

Nas figuras 8 e 9, as componentes mostradas são:

$E_{zV} \rightarrow$ É a componente do campo elétrico derivada do potencial vetor ou seja, a componente não-conservativa do campo elétrico;

$E_{ze} \rightarrow$ É a componente do campo elétrico derivada do campo elétrico;

E_{z0} → É o campo eletrostático inicial, devido às cargas negativas presentes no canal da descarga;

E_z → É o campo elétrico total.

Uma vez que E_{z0} é um valor constante presente no campo conservativo e no campo total, ele não é importante do ponto de vista da variação do campo e por este motivo é subtraído nas curvas 2 e 3. O que se pode notar ao confrontar as Figuras 8 e 9, é que nas proximidades da descarga atmosférica, como mostrado na Figura 8 para $r=100m$, o campo conservativo é preponderante como parcela do campo total ou seja, o efeito da configuração de cargas no canal é mais forte. Para pontos de observação do campo distantes do ponto de incidência da descarga, como mostrado na Figura 9 para $r=100 km$, ocorre o oposto ou seja, o efeito do campo não-conservativo como parcela do campo total é preponderante.

3.6 - Cálculo do Campo Eletromagnético usando o modelo de Descarga atmosférica adotado por Martin Uman e o método do dipolo.

3.6.1 - Modelo:

O modelo de descarga atmosférica em si adotado neste caso, não se baseia num conceito físico como no modelo anterior, onde se considerava que a descarga se produzia devido ao anulamento de cargas previamente depositadas no canal.

Considera-se agora uma antena vertical, reta e de altura L acima de um solo perfeitamente condutor, como mostrado na Figura 12 e calcula-se o campo produzido por ela quando percorrida por uma corrente positiva arbitrária injetada em sua base. O princípio do modelo se baseia no fato de que uma vez determinado o campo eletromagnético devido a uma corrente arbitrária, a corrente possa ser modelada de forma a reproduzir uma forma de onda e valor de pico típicos de uma descarga atmosférica real e, então, o campo devido a esta corrente possa ser obtido.

3.6.2 - Considerações do Modelo:

a) A antena é um condutor ideal, vertical em relação ao solo e de comprimento L ;

b) A seção transversal da antena é considerada muito pequena comparada ao comprimento de onda de qualquer radiação sob consideração ou seja, a antena é considerada uma linha;

c) A corrente é assumida a princípio como arbitrária;

d) A velocidade de propagação da corrente é constante;

e) O solo é considerado um condutor perfeito e é levado em conta através da teoria das imagens.

Para efeito de comparação do campo eletromagnético produzido pelo modelo do ítem 5 e para o modelo citado acima, é necessário que a corrente especificada seja um degrau de corrente. Isto será feito oportunamente.

3.6.3 - Cálculo Analítico:

O cálculo do campo eletromagnético será feito a partir da sequência de operações obtida ao se caracterizar o método do dipolo, baseado na geometria da Figura 12, que por sua vez é baseado nas considerações do modelo apresentado anteriormente, e no sistema de coordenadas da Figura 13. O sistema de coordenadas cartesianas, neste caso, é colocado apenas para orientação uma vez que apenas o sistema de coordenadas cilíndricas é utilizado.

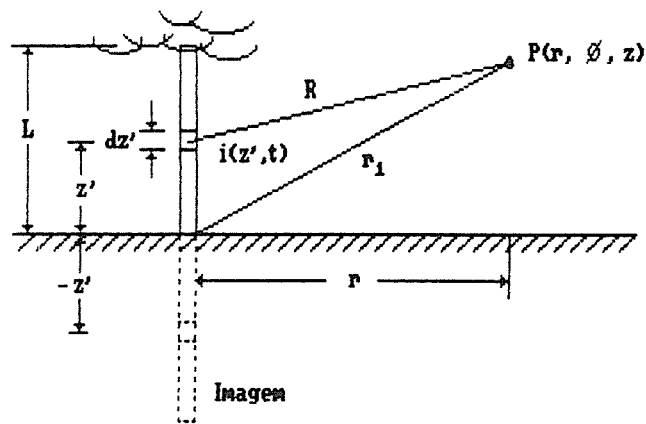


Figura 12 - Geometria da Fonte e do ponto de Observação

onde:

- r, ϕ, z são as coordenadas do ponto de observação do campo;
- z' é a posição do elemento dz' da fonte, a qual coincide com o eixo z ;
- r é a distância entre a base da antena (origem) e a projeção do ponto P no plano $z=0$;
- $R = \sqrt{r^2 + (z-z')^2}$ é a distância do ponto de observação ao elemento dz' ;
- v é a velocidade da corrente de retorno;
- $r_1 = \sqrt{r^2 + z^2}$ é distância da base da antena (origem) ao ponto de observação P ;
- L é a altura da antena e da imagem correspondente.

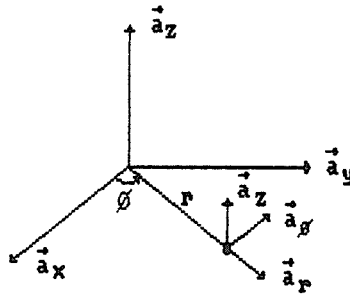


Figura 13 - Sistema de coordenadas utilizado

a) Especificação da Densidade de Corrente:

A partir das considerações do modelo a densidade de corrente se reduz a uma corrente, a qual é arbitrária, nula em qualquer lugar em $t=0$ e limitada a antena:

$$\begin{aligned}
 \vec{J}(r', t) &= i(z', t) \vec{a}_z & -L \leq z' \leq L \\
 i(z', 0) &= 0 & -L \leq z' \leq L \\
 i(z', t) &= 0 & L < z' < -L
 \end{aligned} \tag{29}$$

b) Determinação do Potencial Vetor:

Ao invés de se achar diretamente o potencial vetor para todos os vários pequenos dipolos de corrente ao longo da antena, pode-se achar a contribuição para o potencial

vetor de um dipolo infinitesimal de corrente de comprimento dz' , em uma posição z' arbitrária, conduzindo uma corrente $i(z', t)$ também arbitrária, como mostrado na Figura 12. O potencial vetor total pode ser obtido posteriormente ao se integrar a contribuição de todos os dipolos infinitesimais ao longo da antena. A contribuição \vec{dA} para o potencial vetor obtido para um dipolo infinitesimal como definido acima é obtido a partir de (12) como:

$$\vec{dA} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{i(z', t - R/c)}{R} dz' \right] \vec{a}_z \quad (30)$$

onde:

$$R = \sqrt{r^2 + (z - z')^2}$$

c = velocidade da luz no vácuo ou, aproximadamente, no ar

c) Determinação do Campo Eletromagnético:

O campo elétrico produzido pelo dipolo infinitesimal de corrente é obtido de (15):

$$\vec{dE} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^t \nabla (\nabla \cdot \vec{dA}) dt - \frac{\partial(\vec{dA})}{\partial t} \quad (31)$$

Ao se substituir (30) em (31), obtém-se da expressão (31):

$$\vec{dE} = dE_r \vec{a}_r + dE_z \vec{a}_z \quad (32)$$

onde:

$$dE_r = \frac{dz'}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{3 \cdot r \cdot (z-z')}{R^5} \int_0^t i(z', \tau-R/c) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot r \cdot (z-z')}{c \cdot R^4} i(z', t-R/c) + \frac{r \cdot (z-z')}{c^2 \cdot R^3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} i(z', t-R/c) \right] \quad (33)$$

$$dE_z = \frac{dz'}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{2 \cdot (z-z')^2 - r^2}{R^5} \int_0^t i(z', \tau-R/c) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{2 \cdot (z-z')^2 - r^2}{c \cdot R^4} i(z', t-R/c) - \frac{r^2}{c^2 \cdot R^3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} i(z', t-R/c) \right] \quad (34)$$

O campo magnético produzido pelo dipolo infinitesimal de corrente é obtido a partir de (06):

$$\vec{dH} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \nabla \times (dA) \quad (35)$$

Substituindo (30) em (35), obtém-se:

$$\vec{dH} = dH_\phi \vec{a}_\phi$$

onde:

$$dH_{\phi} = \frac{dz'}{4 \cdot \pi} \left[\frac{r}{R^3} i(z', t-R/c) + \frac{r}{c \cdot R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} i(z', t-R/c) \right] \quad (36)$$

A parte do campo elétrico que envolve os dois primeiros termos das equações (33) e (34) e a parte do campo magnético que envolve o primeiro termo da equação (36) é o chamado campo próximo ou campo de indução. Ele é similar em natureza ao campo estático e portanto, a energia associada a este campo é armazenada nas proximidades da fonte. Para pequenos valores de r , esta é a parcela do campo eletromagnético que predomina. O último termo das equações (33), (34) e (36) é o chamado campo distante ou campo de radiação. A energia associada a este campo é transferida para a vizinhança e portanto, representa um fluxo real de energia a partir da fonte. Esta parcela do campo é a única que tem um valor significativo para grandes valores de r .

O campo eletromagnético mostrado nas equações (33), (34) e (36) foi obtido para um dipolo infinitesimal de corrente e está escrito em função de uma corrente arbitrária. Para se calcular o campo eletromagnético para uma corrente especificada por algum modelo desenvolvido para caracterizar uma forma de onda e valor de pico de corrente típicos de uma descarga atmosférica, como mostrado na Figura 4 do Capítulo 2, pode-se seguir os seguintes passos:

- 1) Determinar o campo eletromagnético devido a um degrau unitário positivo de corrente que viaja sem distorção ou atraso ao longo da antena;
- 2) Obter pelo princípio da superposição, a partir do resultado obtido no passo anterior, o campo eletromagnético devido a uma corrente especificada.

A obtenção do campo eletromagnético para o degrau unitário positivo de corrente, como no primeiro passo, permitirá, além de uma possível extensão, através do princípio da superposição, a um modelo de corrente, uma comparação com o resultado obtido segundo o modelo e método utilizado em 3.5. Neste caso, do ponto de vista do modelo utilizado, a única diferença seria a condição inicial, já que o modelo adotado em 3.5 considera o canal inicialmente carregado com cargas de polaridade negativa.

Uma vez que o objetivo desta parte do trabalho é apenas de comparação entre os modelos e técnicas de cálculo, a extensão sugerida no passo 2 não será feita.

Para seguir as mesmas considerações feitas ao se obter o campo eletromagnético segundo a técnica e modelo anteriores, o campo será obtido na superfície do solo, ou seja, para $z = 0$.

Desta forma:

$$r_1 = r \quad , \quad R = \sqrt{r^2 + (z')^2}$$

A especificação da corrente é feita segundo as mesmas considerações feitas no item 3.5.3.a, ou seja, o degrau de corrente viaja sem distorção ou atraso ao longo da antena como numa linha de transmissão ideal:

$$\vec{I}(z', t) = I_0 \cdot u(0, t) \cdot U(v \cdot t - z') \vec{a}_z \quad 0 \leq z' \leq L \quad (37)$$

$$\vec{I}(z', t) = I_0 \cdot u(0, t) \cdot U(v \cdot t + z') \vec{a}_z \quad -L \leq z' < 0$$

O limite de variação de z' nas equações (33), (34) e (36) é $-L \leq z' \leq L$ devido à presença da antena e sua imagem. Dividindo este limite em dois ou seja, $-L \leq z' \leq 0$ para a imagem e $0 < z' \leq L$ para a antena, as equações (33), (34) e (36) se desdobram em duas para representar cada um dos limites. Ao se fazer uma mudança de variável de z' para $-z'$ na equação que representa o campo da imagem e sabendo que para $z=0$, $i(z', t-R/c)$ (para $0 \leq z' \leq L$) = $i(-z', t-R/c)$ (para $-L \leq z' < 0$) como pode ser visto em (37), as equações (33), (34) e (36) se reduzem às expressões abaixo:

$$dE_z = \frac{dz'}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{2 \cdot (z')^2 - r^2}{R^5} \int_0^t i(z', \tau - R/c) d\tau + \frac{2 \cdot (z')^2 - r^2}{c \cdot R^4} i(z', t - R/c) - \frac{r^2}{c^2 \cdot R^3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} i(z', t - R/c) \right] \quad (38)$$

$$dH_{\phi} = \frac{dz'}{2 \cdot \pi} \left[\frac{r}{R^3} i(z', t-R/c) + \frac{r}{c \cdot R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} i(z', t-R/c) \right] \quad (39)$$

O limite de variação de z' é agora:

$$0 \leq z' \leq L$$

Uma vez que o solo é considerado um condutor perfeito, o campo elétrico só tem componente na direção de \vec{a}_z :

As equações (38) e (39) podem agora ser usadas para determinar o campo eletromagnético. A seguir o campo eletromagnético será determinado a partir de suas componentes de radiação e indução.

Campo Elétrico de Radiação:

$$dE_z^r = \frac{dz'}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[- \frac{r^2}{c^2 \cdot R^3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} i(z', t-R/c) \right]$$

onde:

- dE_z^r é a parcela de radiação do campo elétrico vertical da equação (38);

$$- i(z', t-R/c) = I_0 \cdot U(t-r/c) \cdot U(v \cdot t - \beta \cdot R - z')$$

$$- \beta = v/c$$

Para determinar a derivada acima, assume-se que a corrente vai de 0 ao valor I_0 em um intervalo Δt . No limite, para $\Delta t \rightarrow 0$, obtém-se:

$$dE_z^r = \frac{dz'}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[- \frac{r^2}{c^2 \cdot R^3} \cdot \frac{I_0}{dt} \right] \quad (40)$$

Uma vez que o degrau de corrente em z' é diferente de zero somente a partir de:

$$t = z'/v + \sqrt{r^2 + (z')^2}/c$$

obtém-se para dt/dz' :

$$\frac{dt}{dz'} = \frac{1}{v} + \frac{1}{c} \cdot \left[\frac{L'}{\sqrt{r^2 + L'^2}} \right]$$

onde L' é calculado da expressão abaixo:

$$L' = v \cdot t - \beta \cdot \sqrt{r^2 + L'^2} \quad , \text{ onde: } \beta = v/c,$$

e vale:

$$L' = \frac{\beta \cdot c \cdot t - \beta \cdot \sqrt{(\beta \cdot c \cdot t)^2 + (1 - \beta^2) \cdot r^2}}{(1 - \beta^2)} \quad (41)$$

Substituindo dt/dz' em (40), obtém-se para o campo elétrico de radiação:

$$E_z^r = - \frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{r^2}{\left[\frac{1}{v} + \frac{L'}{c \cdot R} \right] \cdot c^2 \cdot R^3} \right] \quad (42)$$

onde:

$$R = \sqrt{r^2 + L'^2}$$

Campo Magnético de Radiação:

$$dH_{\phi}^r = \frac{dz'}{2 \cdot \pi} \left[\frac{r}{c \cdot R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} i(z', t - R/c) \right] \quad (43)$$

onde:

- dH_{ϕ}^r é a parcela de radiação do campo magnético dado pela equação (39).

Usando o mesmo princípio e considerações feitas ao se calcular o campo elétrico de radiação, o campo magnético de radiação pode ser obtido como sendo:

$$H_{\phi}^r = \frac{I_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{r}{\left[\frac{c \cdot R^2}{v} + L' \cdot R \right]} \quad (44)$$

onde:

$$R = \sqrt{r^2 + L'^2} \quad \text{sendo que } L' \text{ é obtido de (41).}$$

Campo Elétrico de Indução:

Dividindo o campo elétrico de indução em dois ou seja, uma parcela dependente da integral da corrente e outra dependente da corrente somente, obtém-se:

$$dE_z^i = dE_z^1 + dE_z^2 \quad (45)$$

A primeira parcela acima é:

$$dE_z^1 = \frac{dz'}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{2 \cdot (z')^2 - r^2}{R^5} \int_0^t i(z', \tau - R/c) d\tau \right]$$

onde:

$$i(z', t - R/c) = I_0 \cdot U(t - r/c) \cdot U(v \cdot t - \beta \cdot R - z')$$

Uma vez que o degrau $U(t - r/c)$ apenas indica o limite de tempo inferior de validade da expressão do campo, ele será omitido daqui em diante e será novamente considerado quando for avaliado o limite de validade de todas as equações.

Substituindo a expressão da corrente na equação do campo acima obtém-se:

$$dE_z^1 = \frac{dz'}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{2 \cdot (z')^2 - r^2}{R^5} \int_0^{z-t} I_0 \cdot U(v \cdot t - \beta \cdot R - z') d\tau \right]$$

O degrau $U(v \cdot t - \beta \cdot R - z')$ apenas altera os limites de integração de t e z' como será visto a seguir.

Uma vez que o degrau de corrente em z' é diferente de zero somente a partir de:

$$t = z'/v + R/c$$

A expressão do campo dE_z^1 fica:

$$dE_z^1 = \frac{dz'}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{2 \cdot (z')^2 - r^2}{R^5} \int_{R/c + z'/v}^t I_0 d\tau \right]$$

Ao se resolver a integral acima e integrar novamente, desta vez em relação a z' , obtém-se:

$$E_z^1 = \frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \int_0^{L'} \left[\frac{2 \cdot (z')^2 - r^2}{R^5} \right] \cdot \left[t - \frac{R}{c} - \frac{z'}{v} \right] dz'$$

Uma vez que z' é diferente de zero somente no intervalo $0 \leq z' \leq L'$, onde L' é obtido de (41), obtém-se:

$$E_z^1 = \frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \int_0^{L'} \left[\frac{2 \cdot (z')^2 - r^2}{R^5} \right] \cdot \left[t - \frac{R}{c} - \frac{z'}{v} \right] dz'$$

A solução da expressão acima ao se resolver a integral pode ser escrita na forma:

$$E_z^1 = \frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{-t \cdot L' + 2 \cdot L'^2/v + r^2/v}{R^3} - \frac{1}{r \cdot v} - \frac{1}{2 \cdot c \cdot r} \cdot \left[\arctan \left(\frac{L'}{r} \right) - \frac{3 \cdot r \cdot L'}{R^2} \right] \right\} \quad (46)$$

A segunda parcela do campo elétrico de indução, é:

$$dE_z^2 = \frac{dz'}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{2 \cdot (z')^2 - r^2}{c \cdot R^4} i(z', t - R/c) \right]$$

Ao se substituir a corrente especificada anteriormente, obtém-se:

$$dE_z^2 = \frac{dz'}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{2 \cdot (z')^2 - r^2}{c \cdot R^4} \right] \cdot I_0 \cdot U(v \cdot t - \beta \cdot R - z')$$

Ao se integrar em relação a z' , obtém-se:

$$E_z^2 = \frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^{L'} \left[\frac{2 \cdot (z')^2 - r^2}{c \cdot R^4} \right] dz'$$

O limite de integração acima é $0 \leq z' \leq L'$, pelos mesmos motivos expostos no cálculo de E_z^1 , onde L' é obtido de (41). A solução de E_z^2 ao se integrar a expressão acima é:

$$E_z^2 = \frac{I_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r \cdot c} \cdot \left[\arctan \left(\frac{L'}{r} \right) - \frac{3 \cdot r \cdot L'}{R^2} \right] \quad (47)$$

O campo elétrico de indução é obtido somando as expressões (46) e (47):

$$E_z^i = E_z^1 + E_z^2$$

$$E_z^i = \frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{-t \cdot L' + 2 \cdot L'^2/v + r^2/v}{R^3} - \frac{1}{r \cdot v} \right] \quad (48)$$

Campo Magnético de Indução:

A expressão para calcular o campo magnético de indução é obtida de (39):

$$dH_{\phi}^i = \frac{dz'}{2 \cdot \pi} \left[\frac{r}{R^3} i(z', t-R/c) \right]$$

onde:

$$i(z', t-R/c) = I_0 \cdot U(t-r/c) \cdot U(v \cdot t - \beta \cdot R - z')$$

Ao se substituir a corrente especificada acima na expressão do campo magnético de indução, obtém-se:

$$dH_{\phi}^i = \frac{dz'}{2 \cdot \pi} \left[\frac{r}{R^3} I_0 \cdot U(v \cdot t - \beta \cdot R - z') \right]$$

Ao se integrar a equação acima com relação a z' , onde o limite de integração é $0 \leq z' \leq L'$ pelos motivos já expostos, obtém-se:

$$H_{\phi}^i = \frac{I_0}{2 \cdot \pi} \int_0^{L'} \frac{r}{R^3} dz'$$

Cuja solução ao se fazer a integral é:

$$H_{\phi}^i = \frac{I_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{L'}{r \cdot R} \quad (49)$$

Campo Eletromagnético Total:

As equações (42) e (48) devem ser somadas para se encontrar o campo elétrico total, assim como as equações (44) e (49) devem ser somadas para se encontrar o campo magnético total. Ao se fazer isto, o campo elétrico total é dado em (50) e o campo magnético total é dado em (51):

$$E_z = \frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{-t \cdot L' + 2 \cdot L'^2 / v + r^2 / v}{R^3} - \frac{1}{r \cdot v} - \frac{r^2}{\left[\frac{1}{v} + \frac{L'}{c \cdot R} \right] \cdot c^2 \cdot R^3} \right] \quad (50)$$

$$H_\phi = \frac{I_0}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{L'}{r \cdot R} + \frac{r}{\left[\frac{c \cdot R^2}{v} + L' \cdot R \right]} \right] \quad (51)$$

onde:

$$R = \sqrt{r^2 + L'^2}$$

O limite de tempo de validade das expressões (42), (44), (48), (49), (50) e (51) é:

$$r/c \leq t < L/v + \sqrt{r^2 + L^2} / c$$

Em $t = r/c$ aparece a primeira perturbação de campo devido a injeção de corrente na base da antena, onde r é a distância entre o ponto de incidência da descarga e o ponto de observação do campo no solo. O tempo final considerado é o tempo em que apareceria no ponto de observação do campo, a perturbação devido à corrente ter atingido a extremidade superior da antena ou seja, $t = z'/v + \sqrt{r^2 + (z')^2}/c$, para $z'=L$, uma vez que a corrente em $z'=L$ é nula até este instante.

Para $t < r/c$, uma vez que não há fontes presentes, as componentes do campo eletromagnético são:

$$E_z = 0 \quad , \quad H_\phi = 0$$

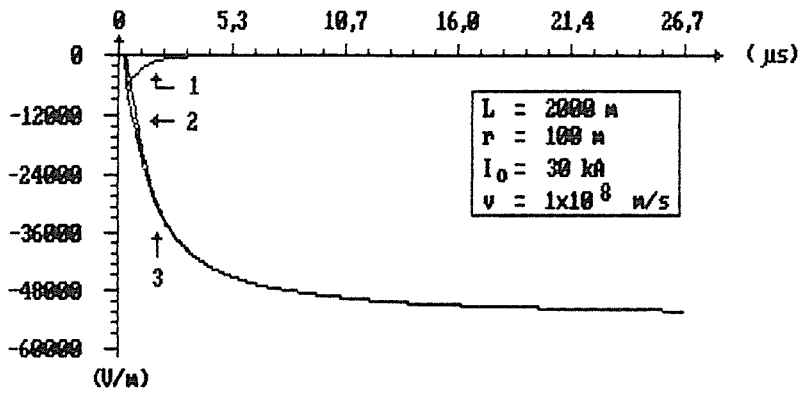
As figuras a seguir mostram o campo eletromagnético a partir das expressões obtidas anteriormente, para os mesmos casos do item 5, onde:

L = Altura da antena;

r = distância entre o ponto de incidência da descarga e o ponto de observação do campo no solo;

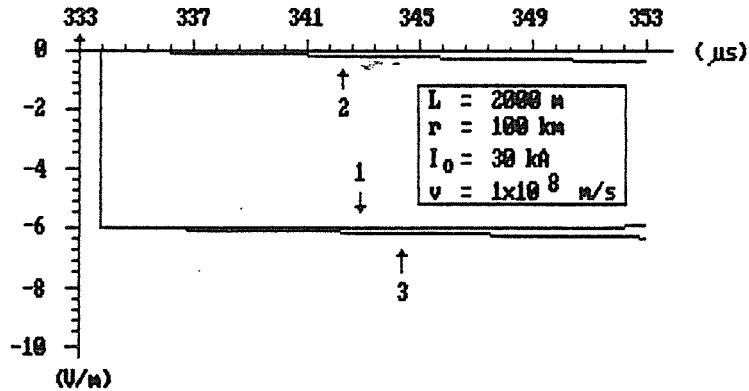
I_0 = Amplitude da corrente de retorno;

v = velocidade da corrente de retorno.



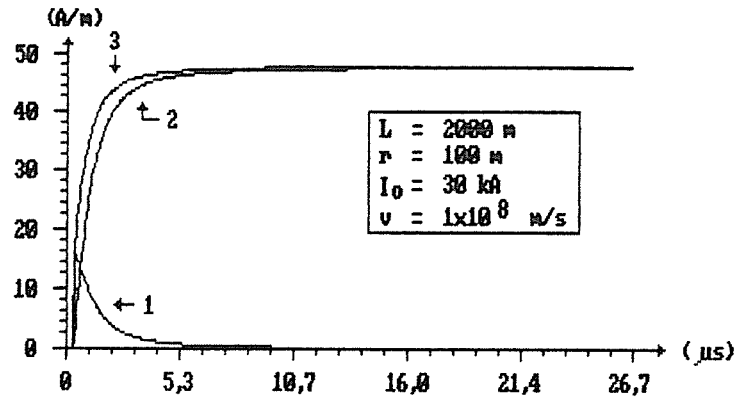
Curva 1 - Campo Elétrico de Radiação
 Curva 2 - Campo Elétrico de Indução
 Curva 3 - Campo Elétrico Total

Figura 14 - Campo Elétrico no Solo



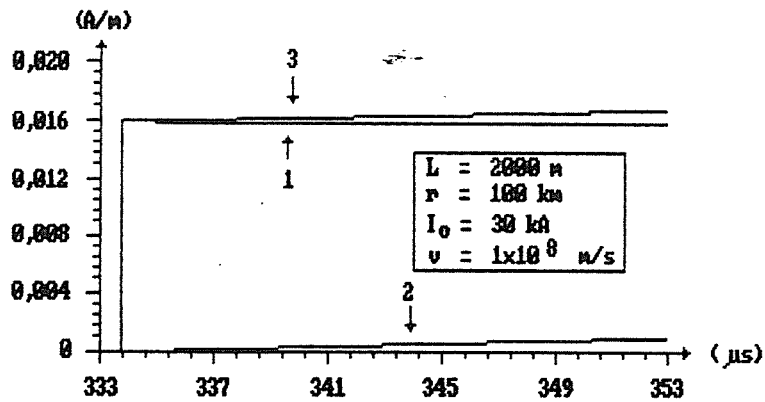
Curva 1 - Campo Elétrico de Radiação
 Curva 2 - Campo Elétrico de Indução
 Curva 3 - Campo Elétrico Total

Figura 15 - Campo Elétrico no Solo



Curva 1 - Campo Magnético de Radiação
 Curva 2 - Campo Magnético de Indução
 Curva 3 - Campo Magnético Total

Figura 16 - Campo Magnético no Solo



Curva 1 - Campo Magnético de Radiação
 Curva 2 - Campo Magnético de Indução
 Curva 3 - Campo Magnético Total

Figura 17 - Campo Magnético no Solo

Nas figuras apresentadas anteriormente é apresentado o campo eletromagnético no solo. Como em 3.5, o único parâmetro alterado da Figura 14 para a Figura 15 do campo elétrico, e da Figura 16 para a Figura 17 do campo magnético, foi a distância do ponto de observação do campo ao ponto de incidência da descarga atmosférica.

Para pontos de observação do campo próximos da incidência da descarga, o campo de indução predomina em relação ao campo total, como pode se observar para o campo elétrico de indução na Figura 14 e para o campo magnético de indução na Figura 16, ambos para $r = 100$ m.

Para pontos de observação do campo distantes da incidência da descarga, o campo de radiação predomina, como pode ser observado para o campo elétrico de radiação na Figura 15 e para o campo magnético de radiação na Figura 17, ambos para $r = 100$ km.

3.7 - Comparação entre os modelos

A técnica do monopolo utilizada no item 3.5 e a técnica do dipolo utilizada no item 3.6 foram mostradas em 3.1 conduzirem a resultados idênticos.

Uma vez que o modelo de descarga atmosférica utilizado em 3.5 e o modelo utilizado em 3.6 são similares, com exceção da carga estática inicial presente no canal

especificada no primeiro modelo, se esperava que a diferença entre os dois modelos fosse o campo eletrostático inicial devido a presença das cargas.

Isso pode ser comprovado ao se observar a Figura 8 para o campo elétrico total em 3.5 (onde se subtraiu o campo eletrostático inicial) e a Figura 14 em 3.6. Embora as componentes do campo elétrico obtidas sejam diferentes o campo elétrico total é o mesmo. A mesma comparação pode ser feita entre a Figura 9 (onde também se subtraiu o campo eletrostático inicial) e a Figura 15, Figuras 10 e 16, e Figuras 11 e 17 para os campos totais.

Já foi dito no item 3.6 que o modelo adotado por M. Uman, permite uma extensão utilizando o princípio da superposição, para uma corrente especificada por um modelo que caracterize formas de onda e valores de pico mais próximos de uma descarga real. Desta forma, fisicamente falando, talvez este modelo seja mais completo ao se caracterizar a descarga atmosférica do que o modelo mais simples adotado por Rusck, que se limita a uma carga uniforme previamente depositada no canal e corrente de retorno em forma de um degrau. No entanto, uma vez que o objetivo do cálculo do campo eletromagnético aqui feito, tem em vista o cálculo da tensão induzida em uma linha aérea, os argumentos usados por Rusck para adotar este modelo mais simples parecem razoáveis e dignos de nota [02]:

1) A forma de onda da corrente de retorno de uma descarga

atmosférica é caracterizada por uma frente rápida e uma cauda longa;

2) O modelo parte do princípio de que o líder deposita uma carga negativa no canal, a qual é uniformemente distribuída;

3) A corrente de retorno é então um degrau positivo, o qual viaja ao longo do canal com uma velocidade constante;

4) Se o tempo de frente da corrente de descarga é desconsiderado, a aproximação em 2 e 3 pode ser usada para a parte inferior do canal da descarga, onde pode-se desprezar a variação da carga e da velocidade com a altura acima do solo isto é, aquela parte do canal a qual determina a frente e geralmente a amplitude da tensão induzida em linhas;

5) Naqueles casos onde a consideração acima não é válida, se estará sendo conservativo ao adotá-la.

Desta forma, adotar uma corrente de retorno em forma de um degrau como realizado, pode ser, pelo menos para uma primeira avaliação, uma boa aproximação. No entanto, uma vez que a especificação de uma carga negativa armazenada no canal, como foi feito no modelo adotado por Rusck, não permite uma extensão do modelo para avaliar o efeito do tempo de frente e do tempo de cauda da corrente através do princípio da superposição e, como já foi dito que estas cargas apenas são responsáveis por um campo eletrostático superposto à variação de campo produzida pelo degrau de corrente viajando ao longo do canal, elas podem

ser desconsideradas.

Este modelo, da forma como citado acima, é exatamente o modelo adotado por M. Uman, onde a corrente especificada é um degrau de corrente.

Concluindo, o modelo adotado por M. Uman, de injeção de corrente na base do canal, deve ser preferencialmente utilizado porque embora tenha sido desenvolvido para permitir a especificação de um modelo de corrente mais complexo, pode-se especificar a corrente de retorno em forma de degrau, que é o modelo citado por Rusck como satisfatório se o objetivo final é o cálculo da tensão induzida, e ainda tem-se a flexibilidade de se poder utilizar a superposição para avaliar o efeito do tempo de frente e do tempo de cauda da corrente, sem necessariamente utilizar um modelo de corrente como o da Figura 4 do Capítulo 2.

A adoção deste modelo não invalida a teoria de Rusck, uma vez que a carga inicial do canal representa apenas uma parcela constante somada ao campo elétrico conservativo produzido.

3.8 - Comparação das Técnicas de Cálculo Utilizadas

Embora as técnicas utilizadas ou seja, o método do

monopolo no item 3.5 e o método do dipolo no item 3.6, levam a resultados finais do campo eletromagnético iguais, ao se caracterizar a mesma fonte do campo, a expressão obtida segundo a técnica do monopolo para o campo elétrico (equação (27) menos a equação (25), para se retirar o efeito do campo eletrostático produzido pelas cargas inicialmente armazenadas no canal) e segundo a técnica do dipolo (equação (50)) parecem muito diferentes. O mesmo ocorre para a expressão obtida para o campo magnético segundo o método do monopolo (equação (28)) e pelo método do dipolo (equação (51)). Mesmo tendo a mesma fonte do campo ao escrevê-las segundo as considerações acima ou seja, um degrau positivo de corrente, elas parecem diferentes e não foi possível provar a equivalência das expressões obtidas analiticamente. Desta forma, foi feita uma comparação numérica, utilizando um programa de computador e a equivalência foi observada até o décimo algarismo significativo para os seguintes dados:

$$L = 2000 \text{ m}$$

$$r = 100 \text{ m}$$

$$I_0 = 30 \text{ kA}$$

$$v = 1 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Além disso, as duas técnicas levam a componentes de campo diferentes.

As componentes obtidas segundo o método do monopolo são:

- Campo Elétrico Conservativo;

- Campo Elétrico não-Conservativo;
- Campo Magnético.

As componentes obtidas segundo o método do dipolo são:

- Campo Elétrico de Indução;
- Campo Elétrico de Radiação;
- Campo Magnético de Indução;
- Campo Magnético de Radiação;

Embora segundo o método do dipolo seja possível obter as mesmas componentes obtidas utilizando-se o método do monopolo, o inverso não ocorre. Esta é uma das vantagens citadas por quem utiliza o método do dipolo.

Esta vantagem é baseada no fato de que as componentes de indução e radiação podem ser usadas alternativamente ao invés do campo total, dependendo da distância em relação ao ponto de incidência da descarga. Isto pode ser observado nas Figuras 14 e 15 e nas Figuras 16 e 17, onde se observa que o campo de indução predomina a pequenas distâncias e o campo de radiação predomina a grandes distâncias entre o ponto de observação e o ponto de incidência da descarga.

No entanto, pelo menos em relação ao campo elétrico obtido pelo método do monopolo, o campo elétrico conservativo e não-conservativo têm as mesmas

características apresentadas em função da distância. Comparando as Figuras 8 e 9, observa-se que o campo elétrico conservativo predomina a pequenas distâncias e o campo elétrico não-conservativo predomina a grandes distâncias, podendo portanto, definir-se faixas de predominância de um e de outro, como feito para o campo elétrico de indução e de radiação. Isto ocorre, porque o campo não-conservativo é exclusivamente um campo de radiação e o campo conservativo é predominantemente um campo de indução, possuindo uma pequena parcela de radiação.

Do ponto de vista do trabalho matemático envolvido, as duas técnicas possuem o mesmo grau de dificuldade, não podendo-se desta forma destacar uma em relação à outra. No entanto, foi possível chegar a uma expressão final do campo eletromagnético pelo método do monopolo mais simples e compacta do que a obtida pelo método do dipolo. Isto permite um trabalho subsequente, como por exemplo o cálculo analítico da tensão induzida em linhas, mais simples.

3.0- Considerações finais

As duas possíveis causas da divergência entre os resultados apresentados por Rusck [06] em 1957 e por M. Uman [08] em 1983 já foram avaliados e não foi notada nenhuma diferença substancial, ou seja:

a) Quanto às técnicas de cálculo utilizadas

Quanto às técnicas de cálculo utilizadas, ou seja o

método do monopolo por Rusck e o método do dipolo por M. Uman, a análise mostrada em 3.1 demonstrou que as duas técnicas obedecem as mesmas equações básicas, inclusive a condição de Lorentz e que portanto levam a mesmos resultados. Desta forma, as duas técnicas de cálculo utilizadas não poderiam ser uma fonte de erro.

b) Quanto ao modelo de descarga utilizado

Quanto ao modelo de descarga utilizado a análise mostrada no final do item 3.1 e ao longo do capítulo, demonstrou que o modelo utilizado por Rusck, descarregar um canal que possuía inicialmente uma carga negativa distribuída uniformemente, e o modelo utilizado por Uman, carregar um canal, descarregado inicialmente, com uma carga positiva devido à injeção de um degrau de corrente em sua base, levam a mesmos valores de variação de campo eletromagnético, desde que a corrente nos dois casos tenha a mesma amplitude. A única diferença entre os dois modelos é que o primeiro apresenta um campo eletrostático inicial, devido à presença das cargas negativas distribuídas, somado ao campo elétrico total.

Esta portanto, não poderia ser também uma fonte de erro já que os resultados apresentados pelos autores apresentam diferenças não só quanto à amplitude, mas também quanto à forma de onda.

Desta forma a única fonte de erro possível seria um

erro no cálculo analítico efetuado pelos autores. Ao se comparar a expressão obtida aqui com a obtida por Rusck em 1957 observa-se que as duas expressões são as mesmas. No entanto ao se comparar a expressão aqui obtida com a expressão obtida por M. Uman em 1983 constatou-se uma diferença. Tal erro foi reconhecido por M. Uman em um artigo (Rusbinstein [09]) publicado simultaneamente à elaboração da tese, onde ele constatou dois erros de cálculo e onde a nova expressão obtida coincide com a calculada nesta dissertação. A comparação realizada no artigo é similar a realizada aqui, mas lá é feita apenas uma comparação numérica dos resultados obtidos a partir da utilização das duas técnicas de cálculo do campo eletromagnético, sem observar que na verdade as duas técnicas obedecem as mesmas equações básicas, como mostrado aqui em 3.1, o que implica no mesmo resultado para o campo eletromagnético obtido a partir delas, ao se definir a mesma fonte de campo.

CAPÍTULO 4

OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ONDA PARA UMA LINHA UNIFILAR INFINITA SUBMETIDA A UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO.

4.1 - Introdução

Em nosso trabalho de validação da teoria de Rusck há um outro ponto a ser avaliado. Este ponto se relaciona à formulação utilizada por ele para o cálculo da resposta transitória de uma linha devido à incidência de um campo eletromagnético produzido por descargas atmosféricas.

Em 1957, Rusck [08] apresentou uma formulação para o cálculo da resposta transitória de uma linha devido a incidência de uma descarga atmosférica em sua vizinhança, mas não deu muitos detalhes da lógica utilizada. Isto deu margem a interpretações posteriores discordantes, que ainda são motivos de artigos recentes por parte de Chowdhuri ([25],[37]) que questiona a formulação empregada e Jakubowski [26] que a defende. Tal questionamento se relaciona com a fonte de corrente induzida na linha. Enquanto Rusck e Jakubowski argumentam que devido ao modelo adotado para a descarga atmosférica, somente o campo conservativo e conseqüentemente o potencial escalar devido ao campo incidente é responsável por um movimento de cargas na linha, Chowdhuri argumenta que não somente o campo conservativo mas também o campo não-conservativo, e a F.E.M. decorrente, seria responsável pela circulação de corrente na

linha.

A fim de se avaliar tal divergência são obtidas neste capítulo as equações de onda no domínio do tempo para uma linha unifilar infinita sobre um solo de resistividade nula, quando submetida a um campo eletromagnético variável não-uniforme, utilizando rigorosamente as equações de Maxwell. Tal desenvolvimento é necessário uma vez que os autores citados fazem uma análise apenas qualitativa deixando sempre margem à dúvida.

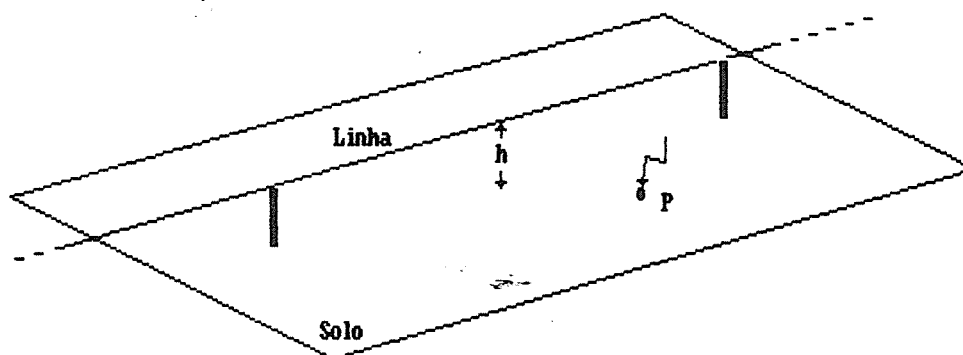
Tais equações de onda formam um sistema que permite calcular as tensões e correntes na linha. Desta forma é possível se obter outras formulações dependendo de como a tensão na linha obtida a partir delas é definida. Neste trabalho são obtidas duas formulações além da formulação em questão acima, cujos significados físicos para as tensões obtidas a partir delas se relacionam com as utilizadas por Koga [13] e Uman [10].

O trabalho aqui desenvolvido é baseado em um artigo de Agrawal [30] publicado em 1980. No entanto enquanto lá são obtidas duas formulações cujas expressões são escritas em função do campo eletromagnético incidente, aqui são obtidas três formulações e as expressões, devido à extensão aqui realizada tendo-se em vista os modelos adotados para descargas atmosféricas, podem e são obtidas em função do potencial na linha devido ao campo elétrico vertical incidente.

4.2 - Obtenção das Equações de Onda a partir das Equações de Maxwell.

4.2.1- Primeira Formulação para as equações de onda:

O arranjo considerado é indicado na Figura 18, a qual mostra uma linha unifilar e uma fonte de campo eletromagnético em suas proximidades. Embora a fonte de campo indicada seja uma descarga atmosférica, ela pode a princípio ser genérica.



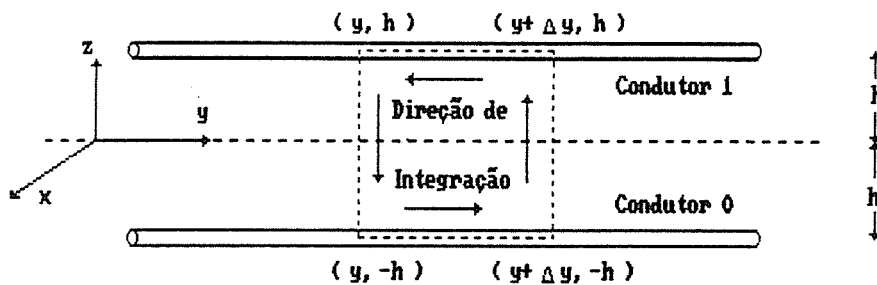
P - Ponto de incidência da descarga atmosférica.
h - Altura da linha.

Figura 18 - Arranjo Considerado

As seguintes considerações são feitas ao arranjo acima:

- a) Assume-se que a linha possui uma seção transversal desprezível ao longo de seu comprimento e é sem perdas;
- b) O condutor está a uma altura 'h' do solo;

- c) O meio que envolve o condutor tem uma permissividade ϵ , uma permeabilidade μ e é não-condutivo;
- d) Nenhuma restrição é feita, a princípio, ao campo eletromagnético incidente, o qual pode ser qualquer campo não-uniforme que satisfaça as equações de Maxwell;
- e) O solo é um condutor perfeito e é levado em consideração através da teoria das imagens.



Condutor 0 + Imagem e Referência

Figura 19 - Sistema de coordenadas utilizado.

Referindo-se à Figura 19, onde é mostrado o sistema de coordenadas utilizado, considere a área envolvida pela linha pontilhada entre o condutor 1 e o condutor 0 (imagem), e entre y e $y + \Delta y$ no plano yz . O ponto de partida é a equação de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \mu \vec{H}}{\partial t} \quad (01)$$

Integrando (01) sobre a área envolvida pela linha pontilhada como mostrado na Figura 19, obtém-se:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \int_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{H} \cdot \vec{a}_x dS \quad (52)$$

Na equação acima, s é a superfície no plano yz envolvida pela linha pontilhada na Figura 19 e c é o contorno de s no sentido anti-horário. O vetor \vec{a}_x é um vetor unitário na direção x e o elemento de área dS equivale a $dydz$.

Em (52) o campo eletromagnético é função de x, y, z e t , e representa o campo total isto é, ele consiste do campo incidente somado ao campo devido a corrente induzida no condutor.

Fazendo a integração em (52) sobre a área mostrada na Figura 19, obtém-se:

$$\int_{-h}^h E_z(y+\Delta y, z) dz - E_y(y, h) \cdot \Delta y - \int_{-h}^h E_z(y, z) dz + E_y(y, -h) \cdot \Delta y = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_y^{y+\Delta y} \int_{-h}^h H_x(y, z) dydz \quad (53)$$

Na equação (53) E_z é a componente do campo elétrico na direção z (vertical), E_y é a componente do campo elétrico ao longo dos condutores e H_x é a componente do campo magnético perpendicular ao plano $x=0$. A distância entre os centros dos condutores é $2h$. A dependência do tempo e das outras variáveis que não eram de interesse em cada caso foi suprimida por conveniência.

Uma vez que o solo é considerado um condutor perfeito, obtém-se as seguintes igualdades ao se aplicar a teoria das imagens para o campo total a que é submetida a configuração da Figura 19:

$$\begin{aligned} E_y(y, h) &= -E_y(y, -h) \\ E_z(y+\Delta y, z) &= E_z(y+\Delta y, -z) \\ E_z(y, z) &= E_z(y, -z) \\ H_x(y, z) &= H_x(y, -z) \end{aligned}$$

Aplicando-se as igualdades acima à equação (53), dividindo-se (53) por Δy e fazendo-se o limite quando $\Delta y \rightarrow 0$, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^h E_z(y, z) dz - E_y(y, h) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h H_x(y, z) dz \quad (54)$$

É conveniente separar o campo total, isto é:

$$\begin{aligned} E_z &= E_z^i + E_z^s \\ E_y &= E_y^i + E_y^s \\ H_x &= H_x^i + H_x^s \end{aligned} \quad (55)$$

Onde o superescrito 'i' se refere ao campo incidente e 's' se refere ao campo produzido devido a corrente induzida no condutor 1.

A partir de (55), a equação (54) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h E_z^s(y,z) dz + \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h H_x^s(y,z) dz - E_y(y,h) &= \\ = - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h E_z^i(y,z) dz - \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h H_x^i(y,z) dz \end{aligned} \quad (56)$$

A equação (56) é exata uma vez que nenhuma restrição foi feita. A fim de se obter as equações de onda, o lado esquerdo de (56) deve ser diretamente relacionado a tensões e correntes na linha.

Assume-se que o único modo possível de propagação na linha é o modo TEM (Kraus [21]) devido às seguintes considerações:

- A linha é considerada sem impedância interna;
- O solo é considerado um condutor perfeito;

- O menor comprimento de onda do campo eletromagnético em consideração é muito maior que as dimensões transversais envolvidas (altura da linha).

Para um modo de propagação como o especificado acima pode-se fazer as seguintes afirmações (Straton [38]):

1) A integral de linha do campo elétrico entre 2 pontos em um plano transversal ($y=\text{constante}$) é independente do caminho. Desta forma, o campo elétrico transversal pode ser expresso como o gradiente de um potencial escalar. Esta propriedade garante que a tensão na linha devido ao campo produzido pela corrente induzida é única, podendo ser definida em relação ao condutor imagem como:

$$V^S(y) = - \int_0^{H^-} E_z^S(y,z) dz \quad (57)$$

2) O fluxo magnético através de qualquer superfície cilíndrica envolvendo o condutor, limitada por dois planos $y=\text{constante}$, é independente do contorno da superfície.

Esta propriedade garante que uma indutância própria constante da linha formada pelo condutor 1 com retorno pelo condutor imagem pode ser definida. O fluxo magnético produzido pela resposta da linha pode ser diretamente relacionado a indutância por unidade de comprimento e a corrente no condutor:

$$\mu \int_0^h H_x^s(y,z) dz = -L_p I(y) \quad (58)$$

onde I é a corrente no condutor 1 em y e L_p a indutância por unidade de comprimento da linha.

Se a indutância interna do condutor 1 for expressiva a relação não é esta colocada acima.

Substituindo (57) e (58) em (56), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} V^s(y) + L_p \frac{\partial}{\partial t} I(y) + E_y(y,h) &= \\ = \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_0^h E_z^i(y,z) dz + \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h H_x^i(y,z) dz \right] & \quad (59) \end{aligned}$$

Deve-se enfatizar que V^s é a tensão induzida no condutor 1 devido a corrente induzida na linha e não a tensão total. Para se obter a tensão total é necessário somar a V^s , a tensão devido ao campo elétrico vertical incidente entre o condutor imagem e o condutor 1.

O lado direito de (59), o qual é o termo que corresponde a 'fonte' de campo, pode ser expresso em termos da componente na direção y do campo elétrico (tangencial ao condutor 1), ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^h E_z^i(y,z) dz + \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h H_x^i(y,z) dz = E_y^i(y,h) \quad (60)$$

A equação (60) é obtida integrando (01) sobre a área envolvida pela linha pontilhada para o campo incidente, como mostrado na Figura 19.

Se o condutor 1 for considerado sem impedância interna, o termo $E_y(y,h)$ da equação (59), ou seja, o campo elétrico total na direção do condutor 1 é nulo. A partir desta consideração e de (60), obtém-se para a equação (59):

$$\frac{\partial}{\partial y} V^S(y) + L_p \frac{\partial}{\partial t} I(y) = E_y^i(y,h) \quad (61)$$

A equação (61) é a primeira das equações de onda. A segunda equação de onda é obtida da equação de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \quad (03)$$

Considere uma superfície cilíndrica fechada envolvendo o condutor 1 de comprimento Δy , entre y e $y+\Delta y$. Então, integrando (03) sobre esta superfície, obtém-se:

$$\oint (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \oint \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (62)$$

Para a integral de superfície fechada da densidade de corrente obtém-se:

1) Da porção das extremidades da superfície em y e $y+\Delta y$:

$$\int_{\text{extr.}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = I(y+\Delta y) - I(y) \quad (63)$$

2) Da porção cilíndrica da superfície, uma vez que o meio envolvendo o condutor tem condutividade nula:

$$\int_{\text{cil.}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (64)$$

A integral de superfície fechada da densidade de campo elétrico é a carga total envolvida, ou seja:

$$\oint \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_t \quad (65)$$

Substituindo (63), (64) e (65) em (62) e dividindo por Δy , obtém-se quando $\Delta y \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial}{\partial y} I(y) + \frac{\partial}{\partial t} Q(y) = 0 \quad (66)$$

Onde $Q(y)$ é a carga líquida por unidade de comprimento.

A carga na equação (66) deve ser relacionada à tensão. Para fazer isso, assume-se de novo que a resposta da linha devido ao campo incidente produz um campo magnético transversal à direção de propagação. Com esta condição a carga e a tensão na linha se relacionam segundo a capacitância por unidade de comprimento, isto é:

$$Q(y) = C_p \cdot V^S(y) \quad (67)$$

onde C_p é a capacitância constante por unidade de comprimento.

Substituindo (67) em (66), obtém-se a segunda equação de onda, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial y} I(y) + \frac{\partial}{\partial t} V^S(y) = 0 \quad (68)$$

A equação acima, junto com a equação (61), forma a primeira formulação possível para as equações de onda:

$$\frac{\partial}{\partial y} V^S(y) + L_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} I(y) = E_y^i(y, h) \quad (61)$$

Em (61) e (68) a tensão V^S obtida é a tensão produzida pela corrente induzida na linha. A tensão total V^t no condutor 1 é dada por:

$$V^t(y) = V^S(y) + V^i(y) = V^S(y) - \int_0^h E_z^i(y, z) dz \quad (69)$$

onde $E_z^i(y, z)$ é o campo vertical incidente em (y, z) .

Pode-se notar nas equações de onda (61) e (68), que a fonte da corrente induzida na linha só aparece em uma das equações e é o campo elétrico incidente tangencial à linha.

4.2.1.1- Extensão para Descargas Atmosféricas:

Até aqui nenhuma restrição foi feita ao campo incidente, o qual foi assumido como genérico. No entanto, quando se estende o conceito desenvolvido anteriormente a descargas atmosféricas, algumas simplificações podem ser feitas.

Uma aproximação utilizada quando se deseja calcular a tensão induzida em uma linha aérea devido a descarga atmosférica, é considerar o campo elétrico vertical na altura da linha o mesmo campo calculado no solo. Ou seja, o campo elétrico vertical abaixo da linha é considerado uniforme. Esta aproximação não é limitante devido às dimensões envolvidas. Enquanto o canal da descarga, ou seja a fonte do campo, tem alguns quilômetros, a linha está a uma altura de alguns metros. Uma vez que o campo no solo, devido a consideração de condutor ideal, é vertical, a princípio o campo na altura da linha também seria somente vertical. Desta forma, observando as equações de onda obtidas, aparentemente não haveria corrente induzida na linha, e a tensão induzida seria unicamente devido ao potencial produzido pelo campo vertical incidente na linha obtido através de (69). Isto inviabilizaria a consideração de campo uniforme abaixo da linha, uma vez que se espera haver corrente induzida na linha.

No entanto, a partir de (60), uma importante relação é obtida:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^h E_z^i(y,z) dz + \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h H_x^i(y,z) dz = E_y^i(y,h) \quad (60)$$

Todas as grandezas acima se referem ao campo incidente na linha produzido pela fonte.

O campo elétrico incidente pode ser escrito de forma genérica, como função de um potencial escalar (campo conservativo) e de um potencial vetor (campo não-conservativo), ou seja:

$$\vec{E}^i = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (67)$$

A componente vertical (direção z) do campo elétrico é:

$$E_z^i = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \quad (70)$$

O campo magnético incidente pode ser obtido a partir de um potencial vetor:

$$\vec{H}^i = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (68)$$

A componente vertical do campo elétrico obtida em

(60) se aplica a um campo elétrico genérico. No entanto, uma vez que o potencial vetor, obtido a partir do fenômeno da descarga atmosférica calculado no capítulo anterior, só possui componente A_z (direção z), já que o canal da descarga onde se propaga a corrente de retorno é perpendicular ao solo, a componente do campo magnético normal ao plano $x=0$ é:

$$H_x^i = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad (71)$$

Substituindo (70) e (71) em (60), obtém-se:

$$E_y^i(y, h) = - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} \phi(y, z) dz = - \frac{\partial v_e^i}{\partial y} \quad (72)$$

onde:

1) $-\frac{\partial}{\partial z} \phi(y, z)$ é a componente vertical do campo elétrico incidente obtida a partir do potencial escalar;

2) $v_e^i = \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} \phi(y, z) dz$ é o potencial escalar na linha;

A partir de (72) se observa que mesmo ao se considerar o campo elétrico vertical na linha o mesmo do solo, uma componente tangencial na linha está implícita, a qual é dada pela taxa de variação do potencial escalar ao longo dela, produzido pelo campo vertical incidente, desde que, como no caso de descargas atmosféricas, o potencial

vetor só possua componente vertical (direção z). Esta constatação é que viabiliza a consideração de campo elétrico vertical uniforme abaixo da linha.

Uma vez que a equação (60) foi obtida rigorosamente a partir da equação de Maxwell, isto significa que o campo elétrico vertical e o campo elétrico horizontal não podem ser tratados isoladamente como responsáveis pelas fontes na linha. No caso específico da descarga atmosférica é possível apenas calculando o campo vertical incidente, seja ele considerado uniforme abaixo da linha como normalmente é feito ou não, se obter a tensão produzida pela corrente induzida na linha em (61) e (68), usando (72), e calcular a tensão induzida usando (69).

É interessante notar em (72) que somente a taxa de variação do potencial escalar ao longo da linha, produzido pelo campo elétrico vertical incidente, é responsável pelo campo elétrico tangencial ao longo dela. Embora a taxa de variação do potencial vetor ao longo da linha possa ser calculada e é diferente de zero, ela não define um campo elétrico tangencial à linha. Esta diferença de tratamento para o campo elétrico conservativo (obtido a partir do potencial escalar) e para o campo elétrico não-conservativo (obtido a partir do potencial vetor), pode ser explicado a partir da Figura 20:

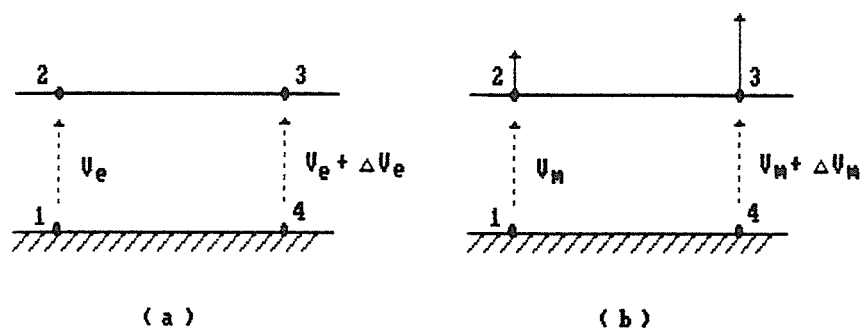


Figura 20 - Reação da linha a um campo vertical incidente.

Supõe-se que na linha na Figura 20(a) um campo elétrico conservativo incidente definiu um potencial escalar em (2) diferente de (3). Nesta condição uma componente de campo na direção da linha está implícita, a qual é associada à variação deste potencial escalar, produzindo uma resposta da linha no sentido de equalizar este potencial.

Supõe-se agora na Figura 20(b) que um campo elétrico não-conservativo incidindo na linha definiu um potencial em (2) diferente de (3). Uma vez que ao potencial vetor está associado uma direção e desde que no caso de descargas atmosféricas esta direção é perpendicular à linha, embora exista uma diferença de potencial de (2) para (3), esta tensão é uma tensão de circuito aberto, não implicando

numa reação da linha.

4.2.2- Segunda Formulação para as Equações de Onda:

Em (61) e (68) a tensão V^s obtida é a tensão produzida pela corrente na linha. A tensão total é:

$$V^t(y) = V^s(y) + V^i(y) = V^s(y) - \int_0^h E_z^i(y,z) dz \quad (69)$$

Substituindo (70) em (69), obtém-se:

$$V^t(y) = V^s(y) + V_e^i(y) + V_m^i(y) \quad (73)$$

$$\text{onde: } V^i(y) = V_e^i(y) + V_m^i(y)$$

$$V_e^i = \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} \phi(y,z) dz \quad (74)$$

$$V_m^i = \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} A_z(y,z) dz \quad (75)$$

Se V^s for substituído em (61) e (68) por $(V^t - V^i)$, obtém-se a partir de (72):

$$\frac{\partial}{\partial y} I(y) + C_p \frac{\partial}{\partial t} V^t(y) = C_p \frac{\partial}{\partial t} V^i(y) \quad (76)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} V^t(y) + L_p \frac{\partial}{\partial t} I(y) = \frac{\partial}{\partial y} V_m^i(y) \quad (77)$$

Esta é a segunda formulação possível para as equações de onda, onde $V^t(y)$ é a tensão induzida total na linha em y .

Nesta formulação onde a tensão induzida total é obtida diretamente da solução das equações de onda, pode-se concluir que o circuito equivalente da linha a um campo elétrico incidente não é uma fonte vertical aplicada à linha devido ao campo elétrico vertical, e uma fonte horizontal aplicada à linha devido ao campo elétrico horizontal. Se assim fosse a formulação para se obter a tensão induzida total diretamente a partir das equações de onda, deveria conter a equação (77) e (61), onde V^s em (61) seria substituído por V^t . Isto não ocorre devido à dependência entre as componentes vertical e horizontal de campo elétrico.

Em [13], uma formulação semelhante foi obtida, onde a tensão total na linha é obtida diretamente a partir das equações de onda. No entanto, ela parece incorreta porque o autor considera o campo elétrico horizontal e vertical incidentes na linha como independentes.

4.2.3- Terceira Formulação para as Equações de Onda:

Uma terceira formulação é possível se $V^t(y)$ na formulação anterior for substituído por $[V^P(y) + V_m^i(y)]$, onde $V^P(y)$ é definido por:

$$V^P(y) = V^t(y) - V_m^i(y) = V^s(y) + V_e^i(y)$$

e é apenas uma tensão auxiliar sem uma definição física específica.

Fazendo a substituição acima, a terceira formulação é obtida como sendo:

$$\frac{\partial}{\partial y} I(y) + C_p \frac{\partial}{\partial t} V^P(y) = C_p \frac{\partial}{\partial t} V_e^i(y) \quad (78)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} V^P(y) + L_p \frac{\partial}{\partial t} I(y) = 0 \quad (79)$$

Uma vez obtido $V^P(y)$ ao solucionar o sistema acima, a tensão total induzida é:

$$V^t(y) = V^P(y) + V_m^i(y) = V^P(y) + \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} A_z(y, z) dz \quad (80)$$

Uma vez que o campo elétrico vertical é considerado uniforme abaixo da linha, obtém-se:

$$V^t(y) = V^P(y) + V_m^i(y) = V^P(y) + h \cdot \frac{\partial}{\partial t} A_z \quad (81)$$

Nesta terceira formulação fica bastante claro que a parcela de campo elétrico responsável pela corrente induzida na linha é o campo conservativo, porque apenas ele aparece nas equações de onda. O campo não-conservativo é somente responsável por uma tensão de circuito aberto, a qual é somada a V^P para se obter a tensão induzida total.

Esta terceira formulação é exatamente a obtida por Rusck [06] e defendida por Jakubowski [26]. Em [25], Chowdhuri argumenta que na equação (78) não há razão para se considerar apenas o potencial escalar na linha, devendo ser considerado o potencial total, ou seja $V_e^i(y)$ deveria ser substituído por:

$$V_e^i(y) + h \cdot \frac{\partial}{\partial t} A_z$$

No entanto, como já foi dito, apenas ao potencial escalar está associado um campo na direção da linha. Desta forma, o potencial vetor não provoca qualquer reação da linha e a formulação de Chowdhuri [25] se mostra incorreta. Isto ocorre, porque a corrente no canal no modelo adotado por nós, flui numa direção perpendicular à linha em consideração. Assim, não há uma F.E.M. induzida na direção da linha, apesar de aparecer uma diferença de potencial ao longo dela, mas que é apenas uma tensão de circuito aberto.

Uma vez que ao potencial escalar não está associada nenhuma direção ou sentido, basta que haja uma diferença de potencial para que a ela seja associada uma componente de campo elétrico nesta direção. Desta forma a linha reage a uma diferença de potencial deste tipo que aparece ao longo dela.

4.3 - Considerações Finais.

Três formulações para as equações de onda foram obtidas, a fim de se calcular a tensão induzida em uma linha submetida a um campo eletromagnético produzido por uma descarga atmosférica.

A fonte da tensão induzida é tanto o campo elétrico quanto o campo magnético incidente. No entanto, devido a dependência entre eles e no caso específico da descarga atmosférica, foi possível obter as equações de onda em função do campo elétrico somente. Além disso foi demonstrado que é possível obter todas as formulações em função do campo elétrico vertical incidente. Uma vez que o campo elétrico, como visto anteriormente, pode ser considerado uniforme abaixo da linha, a dependência das equações de onda ao campo elétrico vertical incidente é vantajosa, porque pode-se calcular o campo elétrico vertical produzido pela descarga atmosférica apenas no solo, como feito no capítulo anterior, o que simplifica enormemente o cálculo analítico

do campo elétrico.

Do ponto de vista do trabalho matemático envolvido no sentido de se fazer o cálculo analítico da tensão induzida, a princípio tanto a primeira quanto a terceira formulação seriam equivalentes e mais simples do que a segunda formulação, uma vez que nas equações de onda a fonte do campo só aparece em uma delas, envolvendo uma derivada simples do potencial escalar na linha.

CAPÍTULO 5

MEDIÇÃO DE CAMPO ELÉTRICO E CONFRONTAÇÃO COM
RESULTADOS CALCULADOS.

5.1- Medição de Campo Elétrico.

O arranjo utilizado para a medição do campo elétrico é apresentado na figura abaixo.

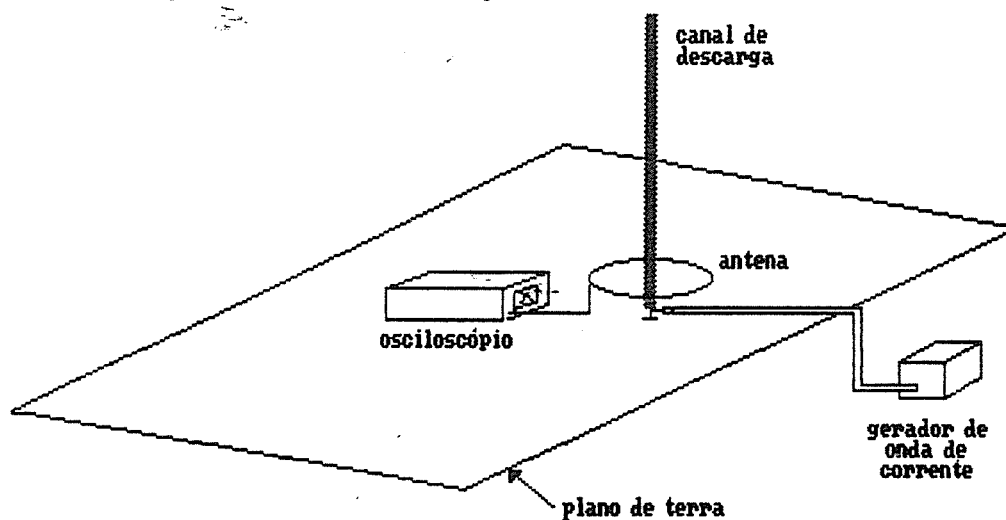


Figura 21 - Montagem utilizada para medição de Campo Elétrico

- O plano de terra é um plano de cobre de dimensões 2,30 x 6,5 m.

- O canal é um solenóide com núcleo de papelão com 7,88 m de comprimento.
- A antena é um anel circular de alumínio de 30,5 cm de diâmetro, sendo que o diâmetro do fio é de 6,6 mm.
- Para gerar a corrente injetada no canal, foi utilizado um gerador de degrau da Haeffely, type 40.
- O osciloscópio utilizado foi o modelo 466 da Tektronix, banda de passagem de 100 MHz, com memória.
- A ponta de prova de tensão utilizada foi o modelo P6009 da Tektronix, banda de passagem de 120 MHz e capacitância de 2,5 pF.
- Para a medição de corrente foi utilizada a ponta de prova modelo A6302 da Tektronix, banda de passagem de 50 MHz e sensor de efeito Hall.

Com este arranjo, deseja-se medir o campo elétrico vertical a 10,34 cm do plano de cobre.

Devido às dimensões envolvidas, o campo elétrico vertical pode ser considerado constante entre o plano e a antena, ou seja, o campo no plano é o mesmo na antena. Esta consideração é boa se evidentemente, for feito um deslocamento vertical entre os dois pontos em relação ao solo. Além disso, devido a simetria axial do arranjo, o campo elétrico vertical e conseqüentemente a tensão induzida em qualquer ponto da antena é a mesma. Essa tensão induzida portanto não produz qualquer circulação de corrente na antena.

Nestas condições, a tensão induzida na antena colocada a uma altura h em relação ao plano é dada por:

$$V = \int_0^h \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot h$$

Desta forma o campo elétrico vertical pode ser definido como:

$$E = \frac{V}{h}$$

5.2- Confrontação da Medição com o Resultado Simulado.

Para efeito de simulação a corrente medida no canal foi aproximada por 6 retas como mostrado abaixo.

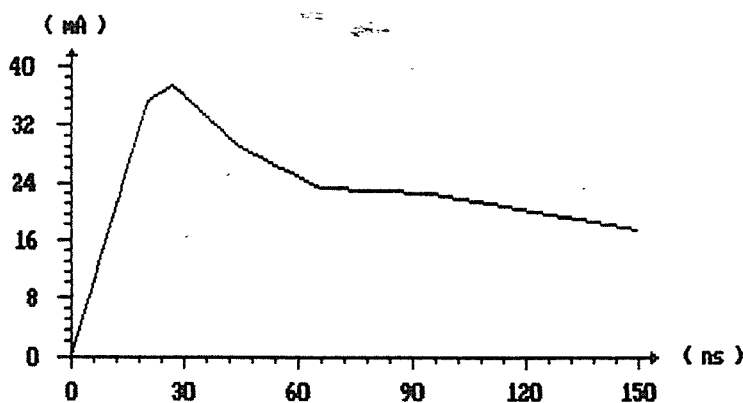


Figura 22 - Corrente Utilizada para Efeito de Simulação

A simulação desta onda de corrente foi feita utilizando-se o princípio da superposição para a solução para o degrau obtida na página 41. A simulação plotada abaixo é baseada no simétrico da expressão (27) subtraída da expressão (25), $-(E_z - E_{z0})$, conforme definição da página 40 e 41. Desta forma, como na medição, a única contribuição para o campo elétrico é a injeção de corrente no canal, ou seja, o campo elétrico inicial é nulo.

Os dados para simulação, baseados na medição, foram:

$L =$ altura do canal $= 7,88 \text{ m}$

$r =$ distância do canal à projeção do ponto de observação do campo no plano $= 15,25 \text{ cm}$

$v =$ velocidade da corrente de retorno $= 36 \text{ m}/\mu\text{s}$

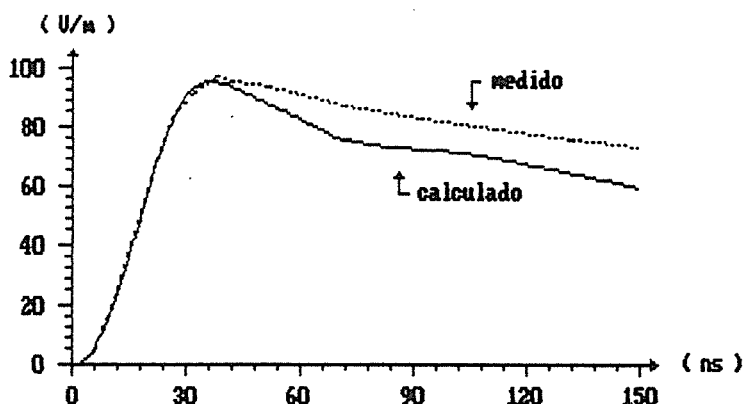


Figura 23 - Comparação entre Simulação e Medição

Pela comparação acima, pode-se observar que a frente de onda do campo elétrico e o valor de pico simulados possuem uma excelente aproximação como a medição. Somente a cauda possui uma diferença apreciável com relação ao valor medido. Uma possível razão desta diferença se deve ao fato da cauda da onda de corrente medida apresentar algumas oscilações. Desta forma a aproximação da cauda por retas representando um valor médio pode ser uma das fontes de erro.

5.3 - Observação

Na curva apresentada como medição de campo não foi feita qualquer correção, a qual seria possivelmente necessária devido ao efeito de carga do sistema de medição. O erro, neste caso da ordem de 16 %, não foi levado em conta porque ficou-se em dúvida quanto ao efeito do campo externo sobre a ponta de prova, o qual poderia compensá-lo. De qualquer forma, um erro desta ordem é perfeitamente admissível aos propósitos da dissertação.

CONCLUSÃO FINAL

Foi destacado nos objetivos deste trabalho que se desejava validar a teoria de Rusck [06] quanto aos questionamentos contra ela apresentados na literatura, uma vez que em trabalhos anteriores a este (Paulino [36]), já se tinha um bom indício de sua validade para os nossos propósitos: efeitos das descargas atmosféricas incidindo nas proximidades de uma linha.

Observou-se que em todos os questionamentos apresentados sempre se argumentava contra o cálculo matemático envolvido, uma vez que Rusck não apresentou em [06] muitos detalhes da metodologia envolvida, deixando sempre margem a este tipo de dúvida. No entanto, a partir do cálculo obtido neste trabalho, pode-se observar todo o rigor matemático envolvido na teoria desenvolvida por Rusck, onde não foi feita qualquer simplificação matemática, mas apenas restrições ao modelo físico da descarga atmosférica.

A validação da teoria de Rusck consistiu da demonstração matemática de que os argumentos contra ela eram infundados. Para tanto realizou-se o seguinte trabalho baseado nos questionamentos apresentados na literatura atual sobre o assunto:

1- Demonstrou-se que a técnica de cálculo utilizada por

Rusck para a obtenção do campo eletromagnético obedecia a condição de Lorentz;

2- Demonstrou-se que a formulação utilizada por Rusck para as equações de onda no domínio do tempo para uma linha unifilar submetida a um campo eletromagnético, como o produzido por uma descarga atmosférica, está correto.

Além da validação da teoria de Rusck, os seguintes pontos podem ser destacados deste trabalho:

1- Foram obtidas duas técnicas para o cálculo do campo eletromagnético, no domínio do tempo, para fontes arbitrárias. Foi demonstrado que apesar de levarem a componentes de campo com interpretações físicas diferentes, elas levam a mesmos resultados para o campo total desde que se especifique nos dois casos a mesma fonte de campo.

2- Foi mostrado que obtém-se a mesma variação de campo eletromagnético para os modelos de descarga atmosférica usualmente adotados:

- Canal de descarga inicialmente com uma distribuição uniforme de cargas negativas. A corrente de descarga é um degrau e ocorre para anular estas cargas.

- Canal de descarga inicialmente descarregado. A corrente de descarga é injetada na base do canal, no solo, e poderia ser a princípio arbitrária.

No entanto, a condição necessária é que a corrente especificada no segundo modelo seja em forma de degrau.

3- Foram obtidas três formulações para as equações de onda de uma linha unifilar submetida a um campo eletromagnético, todas em função do potencial na linha devido ao campo elétrico vertical incidente.

4- Foi implementada uma metodologia para a medição de campo elétrico em modelo reduzido, em conjunto com Boaventura [32].

SUGESTÕES PARA CONTINUAÇÃO DO TRABALHO

1- Avaliar o efeito das descargas entre nuvens e dentro das nuvens;

O objetivo deste trabalho era limitado às descargas que envolvem a terra, as quais são muito mais intensas Uman [04]. No entanto para sistemas de baixa tensão estas descargas podem causar danos, os quais devem ser avaliados posteriormente.

2- Avaliar o efeito da resistividade do solo;

Embora se tenha bons indícios (Boaventura [32]) de que a condutividade finita do solo tenha um efeito pouco significativo para linhas próximas ao ponto de incidência da descarga atmosférica, não se pôde fazer esta afirmativa com certeza. Além disso, persiste a dúvida para longas distâncias. Portanto, estas condições devem ser avaliadas.

3- Avaliar a consideração de modo TEM na linha;

A consideração de modo TEM na linha não é fundamental para as hipóteses apresentadas no capítulo 4. Bastava a condição de modo TM. Neste caso poderia ser suprimida uma restrição: as perdas na linha. No entanto não se pode dizer se o modo TM é garantido quando se tem uma linha com retorno por um solo de resistividade elevada. Neste caso, deve ser avaliada a condição de modo de

propagação TM, com a resistividade do solo como parâmetro.

APENDICE A

TEORIA DAS IMAGENS

A.1- Condutor carregado sobre um plano de terra metálico infinito.

Considera-se um condutor cilíndrico uniformemente carregado, posicionado perpendicularmente a um plano de terra metálico infinito, a uma altura s deste, como mostrado na Figura A-1(a). Pela teoria das imagens, esta configuração é equivalente, do ponto de vista do comportamento do campo elétrico, à metade superior da Figura A-1(b), onde o plano de terra foi removido e substituído por um condutor posicionado simetricamente com a mesma distribuição de carga, mas de polaridade contrária.

Desta forma, o campo elétrico em (a) pode ser encontrado superpondo-se o campo elétrico devido a cada condutor em (b) isoladamente, para a metade superior da Figura, uma vez que para a metade inferior ele é nulo devido à condição de plano de terra metálico infinito.

Um outro método possível é achar o potencial escalar eletrostático V , como a superposição escalar do potencial devido a cada condutor isoladamente. O campo elétrico é então achado como o simétrico do gradiente de V .

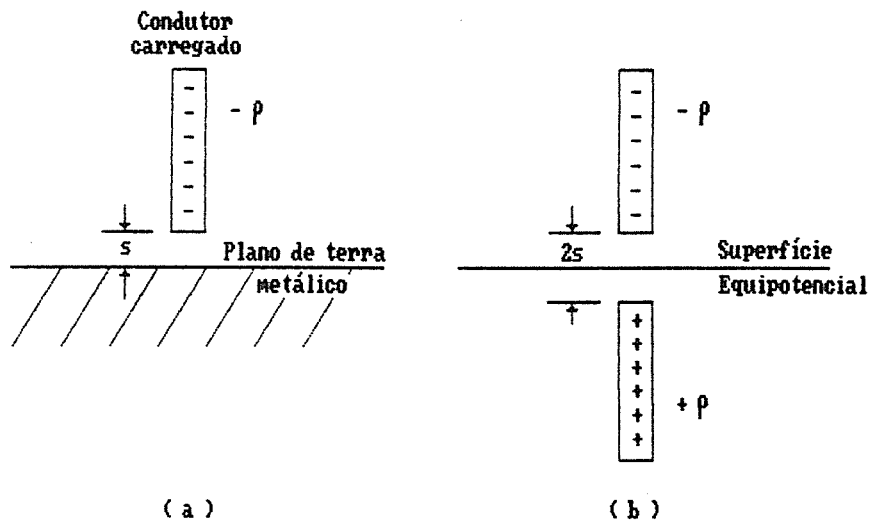


Figura A-1 - Condutor carregado sobre um plano de terra. O campo acima da superfície equipotencial plana, em (b), é o mesmo que em (a).

A.2- Condutor conduzindo corrente sobre um plano de terra metálico infinito.

Considera-se um condutor filamentar suspenso no ar a uma altura s conduzindo uma corrente I e paralelo ao plano de terra metálico, como mostra a Figura A-2(a). Por convenção, a corrente I , fluindo para a direita, representa o movimento de cargas positivas para a direita, tendo as cargas velocidade v , isto é,

$$I = \rho \cdot v$$

onde ρ é a carga por unidade de comprimento no condutor. O movimento de carga positiva para a direita tem como imagem o movimento de carga negativa para a direita. Isto é equivalente ao movimento de carga positiva para a esquerda. Por isso a corrente I terá uma corrente imagem I' abaixo do plano de terra, igual em grandeza, mas fluindo no sentido oposto, como sugere a Figura A-2(a), isto é:

$$I' = -\rho \cdot v = -I$$

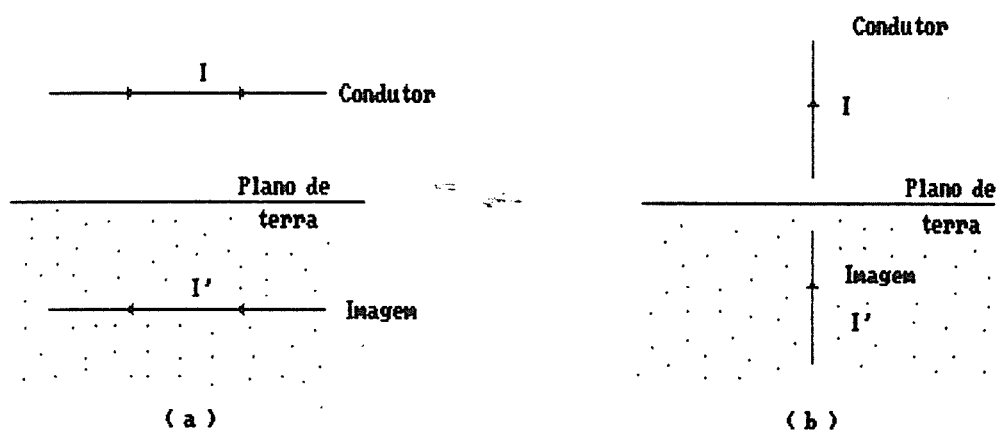


Figura A-2 - Imagem de um condutor conduzindo corrente horizontal e verticalmente a um plano de terra.

Considera-se agora um condutor filamental conduzindo uma corrente I perpendicularmente a um plano de

terra metálico, como na Figura A-2(b). Usando-se um raciocínio semelhante, pode-se ver que este condutor filamental tem um condutor imagem vertical conduzindo uma corrente no mesmo sentido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] Golde, R.H., Lightning, vol. 1, Physics of Lightning, Academic Press, London, 1977.
- [02] Golde, R. H., Lightning, vol. 2, Lightning Protection, Academic Press, London, 1977.
- [03] Lin, Y. T., Uman, M. A. e Standler, R. B., 'Lightning Return Stroke Models', Journal of Geophysical Research, vol. 85, No. C3, pp. 1571-1583, March 20, 1980.
- [04] Uman, M. A., Lightning, Dover Publications, New York, 1984.
- [05] Master, M. J., Uman., M. A., Lin, Y. T. e Standler, R. B., 'Calculations of Lightning Return Stroke Electric and Magnetic Fields Above Ground', Journal of Geophysical Research, vol. 86, No. C12, pp. 12127-12132, December 20, 1981.
- [06] Rusck, S., 'Induced Lightning Over-voltages on Power Transmission Lines with Special Reference to the Over-voltage Protection of Low-voltage Networks', Doctoral Thesis, 1957.

- [07] Heidler, F., 'Traveling Current Source Model for LEMP Calculation', 6th Symposium on EMC, Zurich, 1985.
- [08] Master, M. J., & Uman, M. A., 'Transient Electric and Magnetic Fields Associated with Establishing a Finite Electrostatic Dipole', American Journal of Physics, vol. 51, No. 2, February 1983.
- [09] Rubinstein, M. & Uman, M. A., 'Methods for Calculating the Electromagnetic Fields from a Known Source Distribution: Application to Lightning', IEEE Transactions on EMC, vol. EMC-31, No. 2, pp. 183-189, May 1989.
- [10] Master, M. J. & Uman, M. A., 'Lightning Induced Voltages on Power Lines: Theory', IEEE Transactions on PAS, vol. PAS-103, No. 9, pp. 2502-2518, September 1984.
- [11] Master, M. J. & Uman, M. A., 'Lightning Induced Voltages on Power Lines: Experiment', IEEE Transactions on PAS, vol. PAS-103, No. 9, pp. 2519-2529, September 1984.
- [12] Uman, M. A., McLain, D. K. & Krider, E. P., 'The Electromagnetic Radiation from a Finite Antenna', American Journal of Physics, vol. 43, pp. 33-38,

January 1975.

- [13] Koga, H., Motomitsu, T. & Taguchi, M., 'Lightning Surge Waves Induced on Overhead Lines', The Transactions of the IECE of Japan, vol E 62, No. 4, pp. 216-223, April 1979.
- [14] Haldar, M. K. & Liew, A. C., 'Validation of Rusck's Scalar and Vector Potential Expressions Due to a Return Stroke in Lightning Channel', IEE Proceedings, vol. 134, Pt. C1, No. 5, pp. 366-367, September 1987.
- [15] Chowdhuri, P. & Gross, E. T. B., 'Voltage Surges Induced on Overhead Lines by Lightning Strokes', IEE Proceedings, vol. 114, No. 12, pp. 1899-1907, December 1967.
- [16] Sakakibara, A., 'Calculation of Induced Voltages on Overhead Lines Caused by Inclined Lightning Strokes', IEEE Transactions on PWRD, vol. PWRD-4, No. 1, pp. 683-693, January 1989.
- [17] Golde, R. H., 'Lightning Surges on Overhead Distribution Lines Caused by Indirect and Direct Lightning Strokes', AIEE Transactions, vol. 73, pp. 437-447, June 1954.

- [18] Rusck, S., 'Lightning Over-voltages and Over-voltage Protection in Low-voltage Networks', ASEA Journal, vol. 31, No. 6, pp. 75-82, 1958.
- [19] Mattos, M. A. F. e Christopoulos, C., 'A Nonlinear Transmission Line Model of the Lightning Return Stroke', IEEE Transactions on EMC, vol. EMC-30, No. 3, pp. 401-406, August 1988.
- [20] Spiegel, M. R., Manual de Formulas e Tabelas Matemáticas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1973.
- [21] Kraus, J. D. e Carver, K. R., Eletromagnetismo, Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1978.
- [22] Macedo, A., Eletromagnetismo, Editora Guanabara, Rio de Janeiro, 1988.
- [23] Smythe, W. R., Static and Dynamic Electricity, McGraw-Hill Book Company, New York, 1950.
- [24] Plonsey, R. e Collin, R. E., Principles and Applications of Electromagnetic Fields, TATA McGraw-Hill Publishing Company, New Delhi, 1978.

- [25] Chowdhuri, P., 'Analysis of Lightning Induced Voltages on Overhead Lines', IEEE Transactions on PWRD, vol. PWRD-4, vol. 1, No. 4, pp. 479-492, January 1980.
- [26] Jakubowski, J. L., 'Base de Calcul de La Composante Magnétique de la Tension Induite par la Foudre', Archiwum Elektrotechniki, vol. 23, pp. 1023-1035, 1974.
- [27] Schlessinger, L., 'Currents Induced by a Plane Wave on an Infinite Wire Above Earth', IEEE Transactions on EMC, vol. EMC-17, No. 3, pp. 156-158, August 1975.
- [28] Olsen, R. G. & Usta, M., 'The Excitation of Current on an Infinite Horizontal Wire Above Earth by a Vertical Electric Dipole', IEEE Transactions on AP, pp. 560-565, July 1977.
- [29] Olsen, R. G. & Chang, D. C., 'Current Induced by a Plane Wave on a Thin Infinite Wire Near the Earth', IEEE Transactions on AP, pp. 586-589, July 1974.
- [30] Agrawal, A. K., Price, H. J. & Gurbaxani, S. H., 'Transient Response of Multiconductor Transmission Lines Excited by a Nonuniform Electromagnetic Field', IEEE Transactions on EMC, vol. EMC-22, No. 2, pp. 110-120, May 1980.

- [31] Lopes, I. J. S., Estudo do Comportamento de um Condutor Multiaterrado Frente a Tensões Induzidas por Descargas Atmosféricas, Tese de Mestrado número 67 do C.P.G.E.E. DA U.F.M.G., 1990.
- [32] Boaventura, W. C., Estudo da Tensão Induzida em Linhas Aéreas por Descargas Laterais Utilizando Técnicas de Modelo Reduzido, Tese de Mestrado número 69 do C.P.G.E.E. da U.F.M.G., 1990.
- [33] Porto, E. W., Cálculo de Sobretensões em Linhas de Distribuição Devido a Descargas Atmosféricas Laterais, Tese de Mestrado número 62 do C.P.G.E.E. da U.F.M.G., 1990.
- [34] Ferreira, P. H. N., Tensão Induzida em um Cabo Telefônico por uma Corrente Circulando na sua Blindagem, Tese de Mestrado número 68 do C.P.G.E.E. da U.F.M.G., 1990.
- [35] Liew, A. C. e Mar, S. C., 'Extension of the Chowdhuri-Gross Model for Lightning Induced Voltage on Overhead Lines', IEEE Transactions on PWRD, vol. PWRD-1. No. 2, pp. 240-247, April 1986.

[36] Paulino, J. O. S., Teixeira, T. L. S. e Santos. I. M.,
'Tensões Induzidas em Redes Aéreas devido a Descargas
Atmosféricas', Relatorio Contrato Telebrás/EE-UFG/FCO,
Belo Horizonte, Novembro 1986.

[37] Stratton, J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill
Book Company, New York and London, 1941.