

CÍNTIA RIBEIRO ANDRADE

**CONTROLE DE SISTEMAS MAX-PLUS LINEARES
SUJEITOS A RESTRIÇÕES NO ESTADO:
APLICAÇÃO A SISTEMAS DE TRANSPORTE**

Belo Horizonte
18 de novembro de 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**CONTROLE DE SISTEMAS MAX-PLUS LINEARES
SUJEITOS A RESTRIÇÕES NO ESTADO:
APLICAÇÃO A SISTEMAS DE TRANSPORTE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Autora: Cíntia Ribeiro Andrade
Orientador: Carlos Andrey Maia

Belo Horizonte
18 de novembro de 2008

Dedicatória

*Aos meus pais, Osmar e Edi
Ao meu irmão, Tobias
Ao meu namorado, Helvésio
Amo muito vocês!*

Agradecimentos

A Deus, pela sua proteção e bênção a cada dia.

Ao meu pai, Osmar, e minha mãe, Edi, obrigada pelo exemplo de vida, pelo apoio e por todo amor que me dedicam.

Ao meu irmão, Tobias, por todo seu carinho e por sempre torcer por mim.

Ao meu namorado, Helvésio, por estar sempre ao meu lado, apoiando-me, incentivando e mostrando-me o quanto sou capaz. Obrigada pelo carinho, amor e compreensão.

Ao Prof. Carlos Andrey, pela sua orientação, ensinamentos, paciência e exemplo.

Ao Prof. Márcio Barroso, que sempre me incentivou a gostar da área de pesquisas.

A CAPES pelo apoio financeiro em meus estudos.

Aos companheiros de mestrado pela troca de experiência e apoio mútuo.

A todas as pessoas que de alguma forma sempre torceram e rezaram para que eu conseguisse mais esta vitória.

Obrigada a todos vocês!!!

Resumo

Essa dissertação trata da modelagem e controle de sistemas a eventos discretos sujeitos a fenômenos de sincronização e de atraso no tempo. Esses sistemas são não-lineares na álgebra convencional, mas podem ser descritos de maneira linear utilizando a álgebra max-plus. O objetivo dessa dissertação é projetar um controlador que garanta que o sistema evolua sem violar restrições temporais impostas ao estado. Nesse sentido, é obtida uma condição suficiente que garante a existência e o cálculo do controlador. Para ilustrar a contribuição deste trabalho, uma rede de tráfego urbano é apresentada, sendo que o controlador é aplicado de forma a garantir que restrições de temporização sejam respeitadas.

Palavras-chave: sistemas a eventos discretos, controle de sistemas de tráfego, álgebra max-plus.

Abstract

This thesis deals with the modeling and control of discrete events systems subject to synchronization and time delay phenomena. These systems are non-linear in conventional algebra, but can be described in a linear way using the max-plus algebra. The objective of this thesis is to design a controller that guarantees that the system will evolve without violating timed restrictions imposed to the state. In this sense, a sufficient condition which guarantees the existence and computation of the controller is obtained. To illustrate the contribution of this work, an urban traffic network is presented, in which the controller is designed in order to guarantee that temporization restrictions are respected.

Keywords: discrete event systems, traffic system control, max-plus algebra.

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos Preliminares	6
2.1	Sistemas a Eventos Discretos	6
2.1.1	Redes de Petri	8
2.1.2	Grafo de Eventos Temporizado	12
2.2	Álgebra Max-Plus	14
2.2.1	Teoria Espectral de Matrizes	19
2.2.2	Representação de Sistemas	21
2.3	Resolução da Equação $A \otimes x = B \otimes y$ na Álgebra Max-plus . .	23
2.4	Conclusão	25
3	Modelagem e Controle de Sistemas Max-plus Lineares	26
3.1	Introdução	26
3.2	Definição do Problema	29
3.3	Controle por Realimentação de Estados	31
3.4	Conclusão	35
4	Aplicação no Problema de Controle de Tráfego Urbano	36
4.1	Aplicação na Sincronização de Semáforos em Cruzamentos . .	37
4.2	Aplicação a Uma Malha Viária - ondas verdes	49
4.3	Conclusão	60

Sumário

5 Conclusões

61

Lista de Figuras

2.1	Comparação entre um sistema contínuo e um SED	7
2.2	Exemplo de um grafo de rede de Petri	9
2.3	Grafo de uma rede de Petri marcada	9
2.4	Dinâmica de uma rede de Petri	11
2.5	Rede p-temporizada	11
2.6	Exemplo de um GET (Grafo de Eventos Temporizado)	12
2.7	Um outro exemplo de um GET	13
2.8	Um sistema modelado pela álgebra max-plus	15
4.1	Conjunto de cruzamentos de uma via	37
4.2	Modelo da via com semaforização	38
4.3	Modelo de um semáforo	40
4.4	Conexão entre 2 cruzamentos	40
4.5	Modelo da via	41
4.6	Modelo da via com entradas de controle	42
4.7	Exemplo de uma malha viária de 3 interseções	49
4.8	Modelo de uma via de mão dupla	51
4.9	Modelo de um semáforo	51
4.10	Conexão de uma via e um semáforo	52
4.11	Modelo de uma malha com entradas de controle	53

Lista de símbolos

P	conjunto finito de lugares
T	conjunto finito de transições
A	conjunto de arcos
w	função de ponderação dos arcos
$I(t_j)$	conjunto de lugares conectados à entrada da transição
$O(t_j)$	conjunto de lugares conectados à saída da transição
x_p	marcação do conjunto de lugares
\in	pertence
\mathbb{N}^n	conjunto dos vetores naturais de dimensão n
f	função de transição de estados
\oplus	operador "max"
\otimes	operador "+"
∞	infinito
ε	$-\infty$
e	elemento 0
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
\cup	união
\mathbb{R}_{max}	conjunto $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$, max , $+$

Lista de símbolos

D	dióide
\forall	para todo
\geq	maior ou igual
\mathbb{Z}	conjunto dos números inteiros
$\overline{\mathbb{Z}}_{max}$	dióide completo
$*$	operação estrela de Kleene
G	grafo dirigido
p	caminho de um grafo
d	comprimento do caminho de um grafo
$ p _l$	número de nós percorridos
$ p _d$	peso de um caminho
$G(A)$	grafo de precedência da matriz A
λ	autovalor
v	autovetor
\leq	menor ou igual
A^Δ	matriz conjugada de A
\otimes'	operador de minimização
E	matriz de restrições
I	matriz identidade
F	matriz de controle
\exists	existe
$ $	dado que
$/$	tal que
\neq	diferente
\sum	somatório

Lista de símbolos

\Rightarrow	implica
S_i	semáforos
I_i	interseções

Capítulo 1

Introdução

Durante muito tempo pesquisadores têm estudado os fenômenos que podem ser modelados, por exemplo, pelas leis da física. Esses pesquisadores sempre lidaram com variáveis contínuas tais como deslocamento, velocidade e temperatura. Baseando-se nesse fato, ferramentas matemáticas como as equações diferenciais e ordinárias foram desenvolvidas para modelar, analisar e controlar sistemas contínuos.

Mas, nos dias atuais, em que a tecnologia e a dependência computacional ganham cada vez mais espaço, surgiu a necessidade de lidar com variáveis discretas como a contagem de chamadas telefônicas, o número de carros que circulam em uma determinada via ou a quantidade de produção de uma empresa. Muitos processos que envolvem as variáveis discretas são dirigidos por eventos como atender o telefone, abrir o sinal verde de um semáforo ou apertar um botão. Devido a essa constante presença de sistemas que são dirigidos por eventos surgiu a definição dos Sistemas Dinâmicos a Eventos Discretos (SEDs) (Ho 1989, Cassandras & Lafortune 1999).

Os SEDs são sistemas cujo espaço de estados é usualmente discreto e cuja evolução se dá pela ocorrência de eventos discretos, de duração instantânea no tempo. A teoria dos SEDs (Cassandras & Lafortune 1999) tem sido

1 Introdução

utilizada na modelagem de muitos sistemas de engenharia tais como redes de transporte, processos de manufatura, redes de comunicação, dentre outros.

Várias técnicas são utilizadas para a modelagem de SEDs, dentre as quais podem-se citar: Redes de Petri (Murata 1989, Peterson 1981) e Autômatos (Hopcroft & Ullman 1979, Ramadge & Wonham 1989). Uma maneira formal de descrever Sistemas a Eventos Discretos é através de Redes de Petri que são uma ferramenta para a modelagem gráfica e matemática de muitos sistemas. As Redes de Petri temporizadas são particularmente úteis quando há interesse em avaliar o desempenho do SED. Um outro formalismo que tem sido aplicado na modelagem de sistemas é a álgebra max-plus.

A álgebra max-plus (Baccelli, Cohen, Olsder & Quadrat 1992, Cohen, Moller, Quadrat & Viot 1989) é uma ferramenta utilizada na modelagem de sistemas sujeitos a sincronização e fenômenos de atraso. Esses sistemas podem ser representados por Grafos de Eventos Temporizados (GET), um caso particular das redes de Petri temporizadas. Nessa área têm-se obtido muitos avanços, não só na análise dos sistemas como também nos problemas de controle.

Existem diversas abordagens para a modelagem e controle de SEDs. Uma delas é a Teoria do Controle Supervisório (Ramadge & Wonham 1987) que coordena o funcionamento do SED. Essa teoria é baseada em linguagens formais e autômatos de estados finitos e estabelece condições necessárias e suficientes para a existência de um supervisor minimamente restritivo, além de fornecer uma metodologia formal para o cálculo desses supervisores (Wonham 2007).

Uma outra abordagem é a utilização de Redes de Petri (Murata 1989). Uma possibilidade interessante das Redes de Petri é a análise e síntese do sistema por meio de invariantes de lugar (Yamalidou, Moody, Lemmon & Antsaklis 1996). Diversos trabalhos têm explorado a simplicidade e o poder gráfico das Redes de Petri. Em particular, em Yamalidou et al. (1996) as restrições de funcionamento são representadas na forma de desigualdades

1 Introdução

lineares. O controlador que força o sistema a respeitar as restrições é também uma Rede de Petri e é obtido transformando o conjunto de restrições em invariantes de lugar do sistema controlado. Caso o sistema possua transições não-controláveis, pode não ser possível forçar diretamente a obediência a uma dada restrição, que é então dita não-admissível.

O uso de controle por modelo de referência (Cottenceau, Hardouin, Boimond & Ferrier 2001, Maia, Hardouin, Santos-Mendes & Cottenceau 2003, Maia 2003) é outra abordagem utilizada. Essa técnica consiste na utilização de um modelo cujo comportamento deverá ser aproximado pelo sistema controlado. Em síntese, a variável de controle deve ser calculada de modo a ser máxima, mas respeitando as restrições definidas pelo modelo de referência.

Nos trabalhos de Garcia (2007) e Katz (2007), o objetivo é resolver o problema de modelagem e controle de sistemas de tráfego através da álgebra max-plus. Em Garcia (2007), o problema estudado é o da coordenação semafórica de vias arteriais. Em Katz (2007), o estudo foi sobre a sincronização de trens. Nos dois trabalhos a solução proposta utiliza o conceito de (A, B) -invariância (Basile & Marro 1991) para obter um sistema controlado com realimentação de estados.

O objetivo desta dissertação é resolver um problema de modelagem e controle de sistemas através da álgebra max-plus. Este trabalho utilizará as técnicas de modelagem de SEDs para modelar e controlar um sistema de tráfego urbano. A razão para se modelar sistemas de tráfego como sistemas a eventos discretos está no fato de sua dinâmica ser dirigida pela ocorrência de eventos. São exemplos de eventos: a chegada de um veículo tipo i , a partida de um veículo tipo j , o sinal tornar-se verde, o sinal tornar-se vermelho, dentre outros.

Os congestionamentos de tráfego urbano e o excesso de velocidade trazem diversas conseqüências negativas para a sociedade, como o desperdício de tempo, os acidentes e os custos decorrentes destes. A solução habitual para

1 Introdução

o problema de congestionamentos é a expansão física das vias, que, apesar de trazer benefícios como o aumento da capacidade viária, e aparentemente melhorar a mobilidade urbana, termina por utilizar espaços que poderiam ser ocupados por áreas verdes ou de lazer, e assim, contribuindo para a degradação da qualidade de vida dos habitantes nos centros urbanos. O problema de controle de tráfego urbano tem sido foco de pesquisa nos dias atuais, e segundo Gazis (2002) seus dois principais objetivos são a segurança e o conforto dos motoristas.

Uma das maneiras de se fazer o controle do tráfego urbano é através da coordenação dos semáforos nas vias arteriais de uma malha viária de maneira que haja formação de ondas verdes. O fenômeno conhecido como onda verde acontece quando os semáforos são coordenados de maneira que um veículo que receba sinal verde em um extremo de uma arterial (via em que a velocidade média dos veículos é alta), trafegando em velocidade pré-determinada, possa percorrê-la até a outra extremidade sem parar em nenhum sinal vermelho durante o trajeto (Garcia 2007). A presença de ondas verdes tende a reduzir o número de paradas, mas o favorecimento da progressão na arterial não pode prejudicar em demasia as vias transversais.

Diferentemente dos resultados já apresentados na literatura, o controle proposto neste trabalho utiliza propriedades algébricas do sistema e, a partir do comportamento dinâmico do sistema e de uma matriz de restrições (que garantem o funcionamento desejado para o sistema), a matriz de controle é encontrada. Essa matriz atua realimentada nos estados e é encontrada resolvendo-se uma equação linear na álgebra max-plus (Cuninghame-Green & Butkovic 2003).

Esta dissertação está dividida da seguinte maneira:

- No capítulo 2 são apresentados os conceitos relativos aos SEDs, à álgebra max-plus e demais ferramentas necessárias ao desenvolvimento do controle proposto.

1 Introdução

- No capítulo 3 apresenta-se uma revisão de alguns trabalhos na área de controle e também uma estratégia de controle é proposta.
- No capítulo 4 dois exemplos ilustrativos são desenvolvidos. Aplica-se o controle desenvolvido no capítulo anterior e os resultados são apresentados.
- A conclusão é apresentada no capítulo 5.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Este capítulo aborda os conceitos relativos aos sistemas a eventos discretos, dentre eles as redes de Petri, os grafos a eventos temporizados, a álgebra max-plus e outros conceitos necessários para a compreensão deste trabalho.

2.1 Sistemas a Eventos Discretos

Ao longo dos anos, cientistas e engenheiros concentraram seus estudos em fenômenos que podem ser modelados pelas leis da física, fenômenos estes que tem como parâmetros variáveis contínuas como pressão, temperatura, velocidade, deslocamento, dentre outros. Várias ferramentas matemáticas e técnicas têm sido desenvolvidas para modelar, analisar e controlar sistemas desse tipo. A principal delas são as equações diferenciais.

Nos tempos atuais, em que o avanço tecnológico e computacional estão cada vez mais presentes, encontram-se quantidades discretas nos processos estudados como em sistemas de filas, sistemas de comunicação, sistemas de manufatura e sistemas de transporte. Nota-se também que a coordenação desses sistemas é feita pela ocorrência de “eventos” como a chegada de um cliente, o recebimento de dados, o término da produção de um produto ou

o acionamento da luz de um semáforo (Cassandras & Lafortune 1999, Cao 1989).

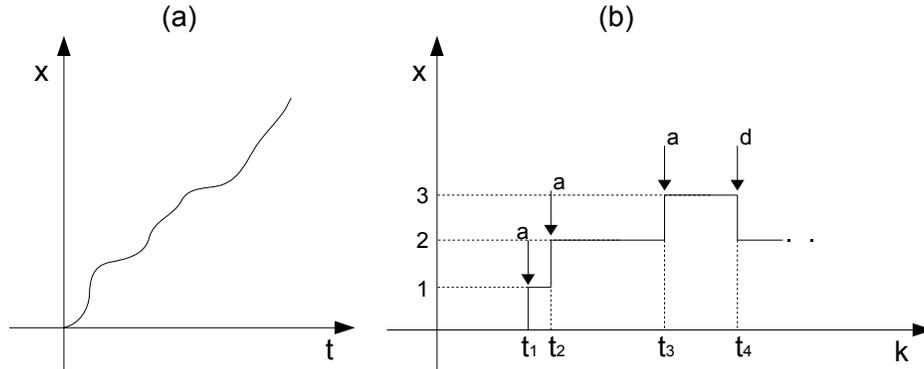


Figura 2.1: Comparação entre um sistema contínuo e um SED

Quando o espaço de estado de um sistema é normalmente descrito por um conjunto discreto como $\{0, 1, 2, \dots\}$, e as transições de estado são observadas somente em pontos discretos do tempo, associam-se estas transições com eventos e define-se assim, um sistema a evento discreto (SED). Um evento é algo que ocorre instantaneamente e causa transição de um valor do estado para outro. A Figura 2.1 mostra uma comparação entre um sistema dinâmico contínuo e um SED. Na Figura 2.1(a), o comportamento do sistema evolui continuamente com o tempo, o espaço de estado desse sistema é o conjunto dos números reais e a variável x pode ser qualquer valor deste conjunto. Já a Figura 2.1(b) é um SED que tem como espaço de estado um conjunto discreto sendo que a mudança de estado ocorre somente com a ocorrência de eventos. Por exemplo, em t_1 ocorre o evento a e o estado vai para 1, em t_2 ocorre novamente o evento a e o estado vai para 2. Nesse exemplo, quando ocorre o evento a , o estado é incrementado de uma unidade e, quando ocorre o evento d , o estado é decrementado de uma unidade.

Os formalismos que modelam os SEDs podem ser não-temporizados, temporizados ou estocásticos, de acordo com o nível de abstração de interesse. Os

dois formalismos mais conhecidos na literatura são: os autômatos (Hopcroft & Ullman 1979) e as redes de Petri (Murata 1989). Neste trabalho as redes de Petri serão utilizadas.

2.1.1 Redes de Petri

As redes de Petri são ferramentas para a modelagem gráfica e matemática de muitos sistemas. Um estudo detalhado encontra-se em Murata (1989). Uma rede de Petri é um grafo bipartido que é composto por dois tipos de nós chamados de lugares e transições. Em uma representação gráfica lugares são representados por círculos e as transições por barras. Os arcos do grafo são direcionados e interligam lugares a transições e transições a lugares. Para cada arco direcionado da rede, o nó origem é denominado nó de entrada e o nó de destino é denominado nó de saída.

Definição 2.1.1 (Rede de Petri). *(Cassandras & Lafortune 1999) Uma rede de Petri (ou estrutura de rede de Petri) é um grafo bipartido ponderado*

$$(P, T, A, w)$$

sendo P um conjunto finito de lugares; T um conjunto finito de transições; $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ é o conjunto de arcos de lugares para transições e de transições para lugares no grafo; $w : A \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ é a função de ponderação dos arcos.

Para a descrição de uma rede de Petri é conveniente usar $I(t_j)$ para representar o conjunto de lugares conectados à entrada da transição t_j e $O(t_j)$ para representar o conjunto de lugares conectados à saída da transição t_j .

Exemplo:

Considere uma rede de Petri definida por:

$$P = \{p_1, p_2, p_3\}, T = \{t_1, t_2\}, A = \{(p_1, t_1), (t_1, p_2), (p_2, t_2), (t_2, p_3)\},$$

e com os pesos definidos por:

$$w(p_1, t_1) = 1, w(t_1, p_2) = 1, w(p_2, t_2) = 2, w(t_2, p_3) = 1.$$

A representação gráfica correspondente a essa rede de Petri é mostrada na Figura 2.2.

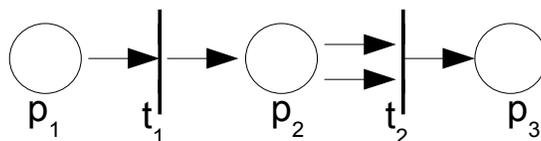


Figura 2.2: Exemplo de um grafo de rede de Petri

Definição 2.1.2 (Rede de Petri marcada). (*Cassandras & Lafortune 1999*)
 Uma rede de Petri marcada é uma quintupla (P, T, A, w, x_p) sendo (P, T, A, w) uma rede de Petri e x_p uma marcação do conjunto de lugares P ;
 $x_p = [x_p(p_1), x_p(p_2), \dots, x_p(p_n)] \in \mathbb{N}^n$ é o vetor linha associado a x_p , representando a marcação da rede.

A marcação da rede é o que define as condições de disparo de uma transição e suas conseqüências para a rede. Uma marcação associa a cada lugar um número inteiro positivo. Este número inteiro associado ao lugar indica seu número de fichas.

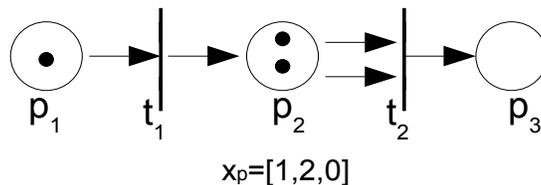


Figura 2.3: Grafo de uma rede de Petri marcada

Na Figura 2.3 os pontos escuros (fichas) indicam a marcação da rede. Note que há 1 ficha no lugar p_1 , 2 fichas no lugar p_2 e nenhuma ficha em p_3 . Essa marcação é representada por $x_p = [1, 2, 0]$.

Uma transição, que é associada a algum tipo de evento, é disparada quando o evento que ela representa ocorre e é esse conceito que permite modelar a evolução dinâmica do SED. Os lugares da rede definem as condições sob as quais as suas transições de saída são disparadas. Uma transição é dita estar habilitada se cada lugar de entrada é marcado com pelo menos o número de fichas igual ao peso do arco que conecta o lugar à transição. Se a transição está habilitada, então ela pode disparar. Um disparo de uma transição habilitada retira um número de fichas (igual ao peso do arco lugar-transição) de cada lugar de entrada e adiciona um número de fichas (igual ao peso do arco transição-lugar) em cada lugar de saída.

Definição 2.1.3 (Transição habilitada). (*Cassandras & Lafortune 1999*) Uma transição $t_j \in T$ em uma rede de Petri está habilitada se

$$x_p(p_i) \geq w(p_i, t_j) \text{ para todo } p_i \in I(t_j).$$

Como exemplo observa-se que as transições t_1 e t_2 da Figura 2.3 estão habilitadas.

Definição 2.1.4 (Dinâmica da rede de Petri). (*Cassandras & Lafortune 1999*) A função de transição de estados, $f : \mathbb{N}^n \times T \rightarrow \mathbb{N}^n$, de uma rede de Petri (P, T, A, w, x_p) é definida para a transição $t_j \in T$ se e somente se

$$x_p(p_i) \geq w(p_i, t_j) \text{ para todo } p_i \in I(t_j).$$

Se $f(x_p, t_j)$ é definida, então o próximo estado é dado por $x'_p = f(x, t_j)$ sendo

$$x'_p(p_i) = x_p(p_i) - w(p_i, t_j) + w(t_j, p_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

A Figura 2.4 mostra a marcação da rede antes e depois do disparo das transições t_1 e t_2 . Observa-se que ao disparar t_1 o lugar p_1 perde uma ficha (peso do arco (p_1, t_1)) e o lugar p_2 recebe uma ficha (peso do arco (t_1, p_2)). Ao disparar a transição t_2 retiram-se duas fichas de p_2 (peso do arco (p_2, t_2)) e p_3 recebe uma ficha (peso do arco (t_2, p_3)).

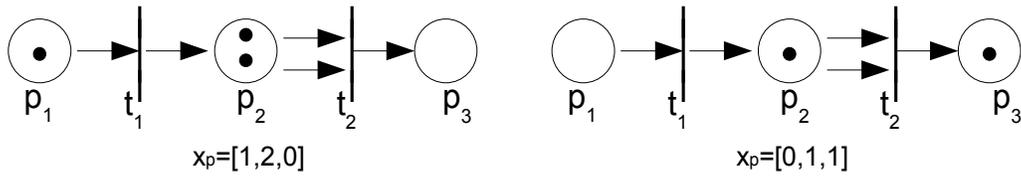


Figura 2.4: Dinâmica de uma rede de Petri

Existem diversas maneiras para se temporizar uma rede de Petri. A temporização utilizada neste trabalho é a rede p-temporizada que atribui um atraso a cada lugar. O atraso de um lugar é representado por um número inteiro positivo que tem como significado o intervalo de tempo entre o instante em que uma ficha é atribuída àquele lugar e o instante em que essa ficha contribui para a habilitação das transições de saída do lugar. Por exemplo, a Figura 2.5 mostra uma rede p-temporizada. A transição t_2 dispara 2 unidades de tempo após o disparo de t_1 .

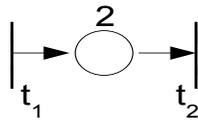


Figura 2.5: Rede p-temporizada

A temporização de uma rede de Petri pode ser importante quando se deseja avaliar o desempenho de um sistema a evento discreto. Por exemplo, em sistemas de transporte o tempo é uma variável de grande interesse.

2.1.2 Grafo de Eventos Temporizado

De uma forma geral, as redes de Petri são utilizadas para a modelagem de concorrência a recursos e a sincronização de tarefas. Os grafos de eventos são uma subclasse das redes de Petri na qual as situações de concorrência não podem ocorrer.

Definição 2.1.5 (Grafo de Eventos Temporizado - GET). *(Bacelli et al. 1992)* Um Grafo de Eventos Temporizado (GET) é uma Rede de Petri temporizada na qual cada lugar tem um tempo de espera associado e somente uma transição de entrada e somente uma transição de saída.

Os GET modelam SED em que somente aspectos de sincronização são observados.

A Figura 2.6 representa um GET. Os lugares são representados por círculos, as transições por barras, os arcos por flechas, o número de fichas (v) é representada pelo ponto e os números inteiros (s) indicam os tempos de atraso em cada lugar.

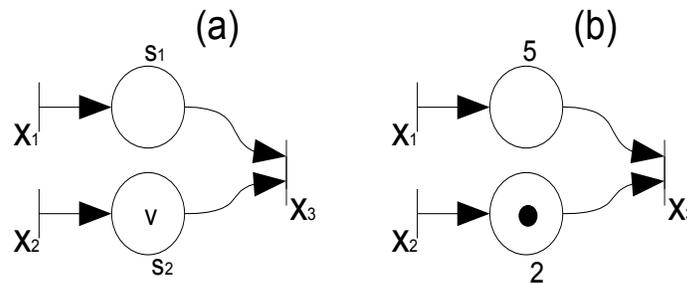


Figura 2.6: Exemplo de um GET (Grafo de Eventos Temporizado)

Para descrever um GET pode-se utilizar a descrição por datadores, ou seja, associa-se a cada transição x uma seqüência de datas de disparos da transição, $x(k)$, sendo que k é o número do disparo. Cada elemento da série representa o instante do k -ésimo disparo dessa transição. O número de fichas

em um dado lugar ocasiona um avanço nos disparos e o tempo de espera ocasiona um atraso na data em relação às transições. O comportamento dinâmico de um sistema como o apresentado na Figura 2.6 pode ser completamente descrito utilizando os operadores “max” e “+”.

A partir da Figura 2.6 (a) tem-se a equação: $x_3(k) = \max\{x_1(k) + s_1; x_2(k - v) + s_2\}$. A Figura 2.6 (b) mostra que a data do k -ésimo disparo da transição x_3 só pode ocorrer após a data do k -ésimo disparo da transição x_1 , com um atraso de cinco unidades de tempo, e após a data do $(k - 1)$ -ésimo disparo da transição x_2 , com um atraso de duas unidades de tempo, ou seja, $x_3(k) = \max\{x_1(k) + 5; x_2(k - 1) + 2\}$.

Considere o GET da Figura 2.7:

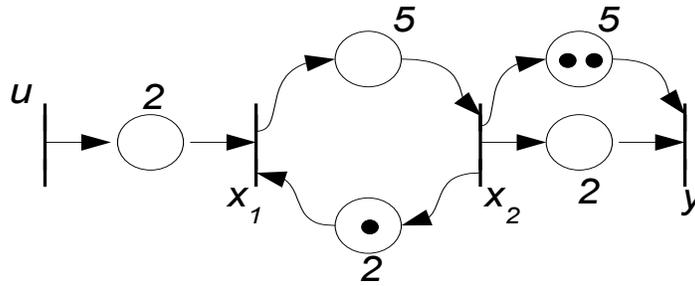


Figura 2.7: Um outro exemplo de um GET

A transição u não depende de nenhuma outra transição do sistema, u é a entrada do sistema. A transição y , chamada de saída do sistema, não condiciona nenhuma outra transição. As demais transições são chamadas de transições internas. O comportamento dinâmico desse sistema é descrito pelas equações a seguir:

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= \max\{2 + u(k); 2 + x_2(k - 1)\} \\
 x_2(k) &= 5 + x_1(k) \\
 y(k) &= \max\{2 + x_2(k); 5 + x_2(k - 2)\}
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

O operador “max” está relacionado com a sincronização do consumo de recursos e o operador “+” com o tempo de processamento das diversas tarefas do processo. De uma maneira geral, o comportamento dinâmico de um GET pode ser descrito utilizando a álgebra $(\text{Max}, +)$ na qual o operador “max” é definido como \oplus e o operador “+” é definido como \otimes . Pode-se reescrever o sistema anterior como:

$$\begin{aligned}x_1(k) &= 2 \otimes u(k) \oplus 2 \otimes x_2(k-1) \\x_2(k) &= 5 \otimes x_1(k) \\y(k) &= 2 \otimes x_2(k) \oplus 5 \otimes x_2(k-2)\end{aligned}\tag{2.2}$$

As equações acima ainda requerem que se especifique o estado inicial do sistema, ou seja, os valores de $x_1(k)$ e $x_2(k)$ para $k < 0$. Nesse caso, arbitra-se que todos os disparos anteriores a $k = 0$ ocorreram em $-\infty$. Conseqüentemente, a marcação inicial da rede já cumpriu o tempo de atraso de seus respectivos lugares e pode contribuir imediatamente para a habilitação de uma transição. Note que a marcação inicial promove deslocamentos na numeração dos disparos associados a uma transição e a descrição do modelo depende desta marcação inicial. Tem-se portanto, um sistema de equações recursivas lineares numa nova álgebra, denominada álgebra max-plus.

2.2 Álgebra Max-Plus

Para entender o princípio da álgebra max-plus considere a Figura 2.8. Esta figura mostra um sistema que modela a chegada de um homem em um prédio e seu deslocamento por meio de um elevador até o segundo andar deste prédio. Este sistema pode ser modelado por um GET.

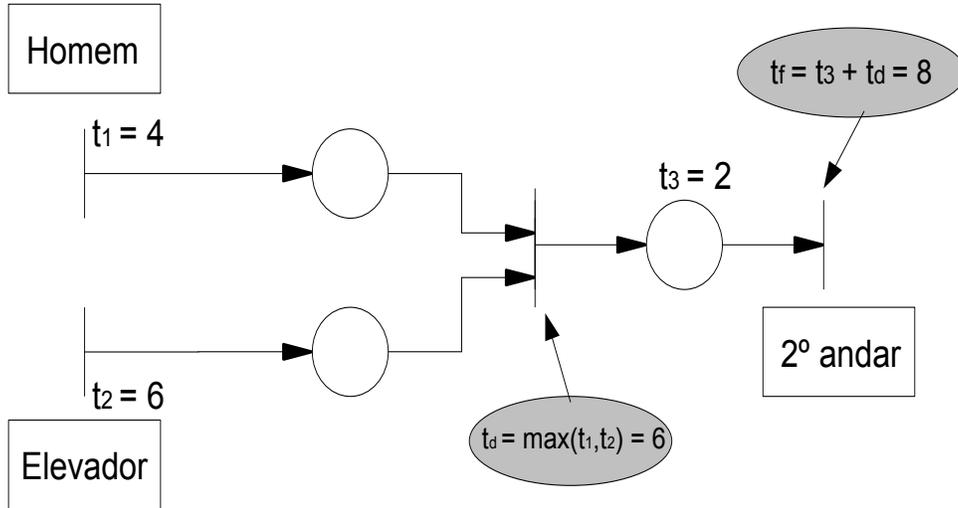


Figura 2.8: Um sistema modelado pela álgebra max-plus

Observe que o homem chega ao prédio no tempo t_1 e o elevador está disponível no tempo t_2 , então o deslocamento deste homem até o segundo andar se inicia em $t_d = \max(t_1, t_2)$. Se o elevador gasta um tempo t_3 para subir até o andar desejado, então o instante em que ele chega ao segundo andar é $t_f = t_3 + t_d = \max(t_1, t_2) + t_3$.

A álgebra max-plus é um exemplo de uma estrutura algébrica, mais geral, denominada dióide. Dióide é uma estrutura algébrica que apresenta todas as propriedades de um anel exceto a de elemento inverso aditivo. Além disso, a adição é idempotente, ou seja, $a \oplus a = a$ para todos elementos a pertencentes ao dióide. Por essas razões, os dióides são caracterizados algebricamente como semi-anéis idempotentes (Baccelli et al. 1992).

A álgebra max-plus é composta por duas operações \oplus e \otimes (Baccelli et al. 1992). Nessa álgebra define-se $\varepsilon = -\infty$ e $e = 0$ e denota-se por \mathbb{R}_{max} o conjunto $(\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}, \max, +)$, sendo que \mathbb{R} é o conjunto dos números reais.

Para os elementos $a, b \in \mathbb{R}_{max}$ definem-se as operações \oplus e \otimes como:

$$a \oplus b = \max(a, b) \quad e \quad a \otimes b = a + b \quad (2.3)$$

Exemplo:

Sejam $a = 10$ e $b = 2$, as operações $a \oplus b$ e $a \otimes b$ são:

$$10 \oplus 2 = \max(10, 2) = 10 \quad e \quad 10 \otimes 2 = 10 + 2 = 12$$

A álgebra max-plus é um díóide caracterizado por um conjunto e as duas operações (soma = \oplus = max) e (produto = \otimes = plus), notado (D, \oplus, \otimes) , tal que a soma seja associativa, comutativa e idempotente ($a \oplus a = a$), e o produto seja associativo (mas não necessariamente comutativo) e distributivo à esquerda e à direita em relação à soma. Além disso, devem existir elementos neutros para ambas as operações. O elemento nulo ε é absorvente em relação ao produto ($a \otimes \varepsilon = \varepsilon$) e o elemento e é unitário ($a \otimes e = a$). Como na álgebra convencional, a multiplicação tem prioridade sobre a soma. Na álgebra max-plus, as propriedades seguintes são verificadas (Baccelli et al. 1992):

Axioma 2.2.1. (*Associatividade da adição*):

$$\forall a, b, c \in D, (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$$

Axioma 2.2.2. (*Comutatividade da adição*):

$$\forall a, b \in D, a \oplus b = b \oplus a.$$

Axioma 2.2.3. (*Associatividade da multiplicação*):

$$\forall a, b, c \in D, (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c).$$

Axioma 2.2.4. (*Distributividade da multiplicação em relação à adição*):

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in D, a \otimes (b \oplus c) &= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c); \\ (b \oplus c) \otimes a &= (b \otimes a) \oplus (c \otimes a). \end{aligned}$$

Axioma 2.2.5. (*Existência do elemento neutro da adição*):

$$\forall a \in D, a \oplus \varepsilon = a.$$

Axioma 2.2.6. (*Absorção pelo elemento neutro da adição*):

$$\forall a \in D, \varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon.$$

Axioma 2.2.7. (*Existência do elemento identidade da multiplicação*):

$$\forall a \in D, a \otimes e = e \otimes a = a.$$

Axioma 2.2.8. (*Idempotência da adição*):

$$\forall a \in D, a \oplus a = a.$$

Além dessas propriedades observa-se que a comparação entre dois elementos de um dióide é feita da seguinte maneira:

$$a \geq b, \tag{2.4}$$

se e somente se:

$$a \oplus b = a. \tag{2.5}$$

Um dióide é completo se ele for fechado em relação a somas infinitas e se o produto for distributivo em relação a somas infinitas. A estrutura $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}, \max, +)$ é um dióide completo geralmente denominado Max-plus e simbolizado por $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$.

Uma operação importante, definida em qualquer dióide, é a operação estrela de Kleene, definida por $a^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} a^i$, com $a^i = a \otimes a^{(i-1)}$ e $a^0 = e$. Verifica-se que, para qualquer inteiro positivo p , $(a^*)^p = a^*$ e $(a^*)^* = a^*$.

Teorema 2.2.1. *A equação implícita*

$$x = ax \oplus b \quad (2.6)$$

*aparece com frequência em diversos problemas que envolvem GET (Baccelli et al. 1992). Essa equação tem como menor solução $x = a^*b = \bigoplus_{k \geq 0} a^k b$ sendo $*$ o operador estrela de Kleene.*

Demonstração. (Baccelli et al. 1992) Primeiramente, mostra-se que $x = a^*b$ é solução de 2.6. Observa-se que

$$a(a^*b) \oplus b = a(e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots)b \oplus b = (e \oplus a \oplus a^2 \oplus a^3 \dots)b = a^*b.$$

Se x é solução de 2.6 então $x = ax \oplus b$, ou seja,

$$x \geq ax \quad e \quad x \geq b.$$

Pela isotonia do produto,

$$x \geq ax \Rightarrow x \geq ax \geq a^2x \geq \dots \geq a^kx,$$

somando as parcelas, tem-se $x \geq \bigoplus_{k \geq 0} a^kx = a^*x$. Finalmente, tem-se que

$$x \geq a^*x \quad e \quad x \geq b \Rightarrow x \geq a^*x \geq a^*b.$$

Ou seja, toda solução de 2.6 é maior que a^*b . □

As matrizes também podem ser definidas pela álgebra max-plus. Se $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}$, sendo $n, m \in \mathbb{N}$, e i, j são, respectivamente, as linhas e colunas das matrizes, pode-se definir a soma das matrizes como $[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$ para $i = 1 \dots m$.

Se $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times l}$ e $B \in \mathbb{R}_{max}^{l \times m}$ então o produto de matrizes é definido como $[A \otimes B]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes b_{jk} = \max_{j \in l} (a_{ij} + b_{jk})$ para $i = 1 \dots n$ e $k = 1 \dots m$.

Exemplo:

Sejam A e B as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

A soma e o produto dessas duas matrizes são dados por:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 6 \oplus 3 & 2 \oplus 5 \\ 1 \oplus 2 & 7 \oplus 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} (6 \otimes 3) \oplus (2 \otimes 2) & (6 \otimes 5) \oplus (2 \otimes 4) \\ (1 \otimes 3) \oplus (7 \otimes 2) & (1 \otimes 5) \oplus (7 \otimes 4) \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 9 \oplus 4 & 11 \oplus 6 \\ 4 \oplus 9 & 6 \oplus 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$$

Doravante, para simplificar a notação, o símbolo de produto \otimes será omitido quando conveniente.

2.2.1 Teoria Espectral de Matrizes

Um grafo dirigido G é definido por um conjunto de nós interconectados por arcos orientados. Um grafo é denominado ponderado se os arcos que ligam os nós i e j possuem pesos associados a eles. Esse arco é denotado por (i, j) e o peso $w(i, j)$ desse arco é igual ao termo A_{ij} de uma matriz A associada ao grafo.

Um caminho em um grafo é uma seqüência de arcos $(p_0, p_1), (p_1, p_2), \dots, (p_{l-1}, p_l)$, também representado por $p = (p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow \dots \rightarrow p_l)$, e o comprimento d do caminho p é dado pelo número de nós percorridos, denotado por $|p|_l$. O peso de um caminho p , representado por $|p|_d$ é dado pela soma dos pesos de seus arcos.

Quando um caminho é fechado, ou seja, $p_0 = p_l$, denomina-se esse caminho de circuito.

Definição 2.2.1 (Ciclo médio). (*Baccelli et al. 1992*) *O peso médio de um caminho é dado pela divisão do peso pelo comprimento $|p|_d / |p|_l$. Se este caminho é um circuito seu peso médio é chamado de ciclo médio.*

Circuitos cujos ciclos médios sejam iguais ao máximo ciclo médio do grafo são chamados circuitos críticos.

As seguintes definições foram extraídas de Garcia (2007):

Definição 2.2.2 (Grafo de precedência). *Seja $A \in D^{n \times n}$ uma matriz quadrada com coeficientes no dióide D . Denota-se $G(A)$ o grafo de precedência de A onde existem n nós e os arcos (i, j) são ponderados com A_{ij} . Se $A_{ij} \neq \varepsilon$ existe um arco que liga os nós i e j , caso contrário a ligação não existe.*

Definição 2.2.3 (Grafo fortemente conexo). *Um grafo $G(A)$ é dito fortemente conexo se para todo par de nós $(i, j) \in G(A)$ o nó j é alcançável a partir do nó i .*

Definição 2.2.4 (Matriz irredutível). *Uma matriz $A \in D^{n \times n}$ é considerada irredutível se o grafo de precedência $G(A)$ é fortemente conexo.*

As matrizes $n \times n$ com coeficientes definidos sobre os dióides apresentam algumas propriedades. Uma delas é a possibilidade de associar um grafo orientado e ponderado, chamado grafo de precedência, a cada matriz quadrada, ou seja, existe uma representação gráfica para as matrizes. Além disso, se esse grafo é fortemente conexo é possível afirmar que sua matriz correspondente é irredutível.

Para uma matriz A irredutível existe um inteiro c que garante a seguinte propriedade de ciclicidade:

$$A^{k+c} = \lambda^c \otimes A^k,$$

sendo que k é superior a um número inteiro K e λ representa o autovalor da matriz A .

Essa ciclicidade define um comportamento periódico em regime permanente, após um regime transitório (Baccelli et al. 1992).

Definição 2.2.5 (Autovalor e autovetor). *(Garcia 2007) Seja $A \in \mathbb{R}_{max}$ uma matriz quadrada. Se $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$ é um escalar e $v \in \mathbb{R}_{max}$ um vetor que contém ao menos um elemento finito de modo que*

$$A \otimes v = \lambda \otimes v$$

então λ é chamado de autovalor de A e v é um autovetor de A associado ao autovalor λ .

Para o caso de matrizes irredutíveis, a solução λ é única e calculada através da seguinte expressão:

$$\lambda = \bigoplus_{k=1}^n (\text{traço}(A^k))^{1/k},$$

sendo $\text{traço}(A^k) = \bigoplus_{i=1}^n (A^k)_{ii}$ e n corresponde a ordem da matriz A .

Além disso, em Baccelli et al. (1992) prova-se que se A é irredutível o autovalor também é dado pelo máximo ciclo médio de $G(A)$:

$$\lambda = \bigoplus_{i=1}^r \frac{|p|_d}{|p|_l},$$

sendo r o número de circuitos de $G(A)$.

2.2.2 Representação de Sistemas

A álgebra max-plus permite descrever a evolução da data de ocorrência dos eventos em sistemas sujeitos a restrições de sincronização e de atraso.

Esses sistemas são representados por equações lineares do tipo:

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \quad (2.7)$$

O vetor $x(k)$ representa o estado do sistema e $u(k)$ uma entrada externa. $A \geq I$, pois $x(k+1) \geq x(k)$, isto é, as datas de disparo das transições são não-decrescentes. A matriz I é a matriz identidade sendo definida por $i_{ij} = e$ para $i = j$ e $i_{ij} = \varepsilon$ para $i \neq j$.

Vale observar que alguns tipos de sistemas são modelados por:

$$x(k) = A_0x(k) \oplus A_1x(k-1) \oplus B_0u(k), \quad (2.8)$$

entretando essa equação pode ser colocada na forma (2.7). Em Baccelli et al. (1992) é mostrado que (2.8) é equivalente a:

$$x(k) = A_0^*A_1x(k-1) \oplus A_0^*B_0u(k). \quad (2.9)$$

Isso pode ser visto facilmente considerando $x(k) = A_0x(k) \oplus W$, sendo $W = A_1x(k-1) \oplus B_0u(k)$.

Então:

$$\begin{aligned} x(k) &= A_0x(k) \oplus W \\ x(k) &= A_0(A_0x(k) \oplus W) \oplus W \\ x(k) &= A_0^2x(k) \oplus A_0W \oplus W \\ &\vdots \\ x(k) &= A_0^l x(k) \oplus A_0^{l-1}W \oplus A_0^{l-2}W \oplus \dots \oplus W. \end{aligned}$$

Se A_0 tem o máximo ciclo médio negativo, então $\lim_{l \rightarrow \varepsilon} A_0^l = \varepsilon$. Sendo assim:

$$\begin{aligned} x(k) &= A_0^{l-1}W \oplus A_0^{l-2}W \oplus \dots \oplus W \\ x(k) &= A_0^*W, \end{aligned}$$

substituindo W :

$$x(k) = A_0^* A_1 x(k-1) \oplus A_0^* B_0 u(k).$$

2.3 Resolução da Equação $A \otimes x = B \otimes y$ na Álgebra Max-plus

Um resultado importante diz respeito à solução de equações do tipo $A \otimes x = B \otimes y$ sobre $(\max, +)$. Com esse objetivo Cuninghame-Green & Butkovic (2003) desenvolveram um algoritmo que converge para uma solução finita partindo de algum ponto inicial finito, caso exista tal solução. Se os elementos finitos de A e B são todos inteiros, a convergência desse algoritmo acontece em um número finito de iterações. As matrizes A e B devem ser G-astic.

Definição 2.3.1 (Matriz G-astic (Cuninghame-Green & Butkovic 2003)).
Uma matriz é G-astic se em cada linha existir pelo menos um elemento finito.

O algoritmo para solucionar a equação $A \otimes x = B \otimes y$ é apresentado abaixo (Cuninghame-Green & Butkovic 2003):

Inicialize

Escolha arbitrariamente um vetor finito x

$$r = 0; x(0) = x$$

Repita

$$y = \text{solução principal de } B \otimes y \leq A \otimes x; \quad y(r) = y$$

$$x = \text{solução principal de } A \otimes x \leq B \otimes y; \quad x(r+1) = x$$

$$r = r + 1$$

Até convergir ($A \otimes x = B \otimes y$)

Fim

A solução principal é o maior y tal que $B \otimes y \leq A \otimes x$ e o maior x tal que $A \otimes x \leq B \otimes y$.

Um conjunto de desigualdades lineares do tipo $A \otimes x \leq b$ sobre $\mathbb{R}_{max} = (\{-\infty\} \cup \mathbb{R}, max, +)$, sempre possui uma solução. A maior solução é

$$x = A^\Delta \otimes' b, \quad (2.10)$$

sendo $A^\Delta = [-a_{ji}]$ a matriz conjugada de A e \otimes' é definido como o operador de minimização (min).

O seguinte teorema assegura que, caso exista uma solução não-nula para a equação $A \otimes x = B \otimes y$, o algoritmo convergirá para uma solução não-nula para qualquer vetor inicial $x(0)$.

Teorema 2.3.1. *(Cunninghame-Green & Butkovic 2003) A seqüência de pares $\{(x(r), y(r)) (r = 0, 1, \dots)\}$, gerada pelo algoritmo, converge se e somente se uma solução existe. A convergência é então monotônica, para uma solução estável, para qualquer escolha de $x(0)$.*

O teorema abaixo assegura a convergência em um número finito de passos.

Teorema 2.3.2. *(Cunninghame-Green & Butkovic 2003) No caso inteiro, se uma solução existe, o algoritmo produz uma solução em um número finito de passos.*

A demonstração desses dois teoremas se baseia no fato de que todos os pares da seqüência $\{(x(r), y(r))\}$ são elementos inteiros. Além disso a seqüência é monotonicamente não-crescente e, se uma solução existe, então a seqüência tem sempre um limitante inferior para todo $x(0)$.

Os resultados teóricos apresentados nesta seção serão utilizados para se encontrar a solução de equações da forma $BZ = E^*Y$, tendo como objetivo a síntese de controlador para sistemas max-plus lineares sujeitos a restrições no estado.

2.4 Conclusão

Nesse capítulo foram apresentados os principais conceitos da teoria dos sistemas a eventos discretos e da álgebra max-plus. O capítulo seguinte apresenta uma estratégia de controle para sistema max-plus linear sujeito a restrição no estado.

Capítulo 3

Modelagem e Controle de Sistemas Max-plus Lineares

Este trabalho tem como objetivo modelar e controlar sistemas a eventos discretos através da álgebra max-plus. Esses sistemas estão sujeitos a fenômenos de sincronização e atraso no tempo. A partir da obtenção do modelo, a estrutura de controle é definida com base na realimentação de estados. O objetivo, nesse caso, é projetar um controlador que garanta que o sistema evolua sem violar restrições temporais impostas ao estado (Andrade & Maia 2008).

Várias estratégias de controle para sistemas a eventos discretos modelados pela álgebra max-plus estão sendo utilizadas na literatura. Na próxima seção deste capítulo serão apresentados alguns trabalhos na área de controle que serviram de inspiração para o desenvolvimento do presente trabalho.

3.1 Introdução

Existem na literatura alguns trabalhos relacionados ao controle de sistemas que podem ser modelados pela álgebra max-plus. Dentre esses, alguns

modelam sistemas de tráfego, que são sistemas sujeitos a restrições de sincronização.

Em Maia, Lüders, Santos-Mendes & Hardouin (2005), diversas estratégias de controle baseadas na abordagem por modelo de referência são apresentadas. Um problema de controle é proposto e o que se deseja obter é o “melhor” controle possível de maneira a garantir que a saída do sistema siga uma determinada trajetória de referência.

Este problema de controle está relacionado com a estratégia *just-in-time* de planejamento de produção. Tomando um sistema de manufatura como exemplo, isto significa que se considera uma dada trajetória como sendo uma referência para o sistema e o objetivo do controlador é retardar ao máximo a entrada de matérias-primas no processo de modo a evitar a formação de estoques no interior da planta, mas atendendo à demanda pré-especificada pela taxa de produção de referência. A solução desse problema foi genericamente denominada de controle ótimo, no sentido de que o “melhor” controle possível é aquele que atrasa ao máximo o disparo dos eventos de entrada do sistema.

Os autores descrevem a dinâmica de um SED a partir de um sistema de equações algébricas lineares. Esse equacionamento permite a análise de alguns aspectos do desempenho do sistema e, em combinação com a Teoria de Residuação, obtém-se a síntese de controladores de modo a satisfazer determinados critérios de desempenho. O projeto de controladores é feito de modo a satisfazer a restrição imposta pelo modelo de referência maximizando os controladores e, por isso, retardando os disparos das transições sobre as quais se dá a ação de controle.

No trabalho de Houssin, Lahaye & Boimond (2007), o controle de sistemas max-plus lineares foi desenvolvido utilizando a estratégia *Just-in-Time*. Este controle se baseia nos seguintes princípios: o sistema satisfaz as condições iniciais e finais que foram dadas, o sistema deve obedecer a restrições impostas

ao estado e o controle é ótimo no sentido de otimizar um critério escolhido. Essa estratégia de controle é aplicada em um sistema de transporte urbano de forma a sintetizar os horários dos ônibus.

Em Katz (2007), um problema de sincronização de trens é resolvido utilizando a teoria de semimódulos (A, B) -invariantes. A álgebra max-plus é utilizada para definir a tabela de horários para as partidas dos trens a fim de permitir conexões.

Nesse trabalho, Katz (2007) mostra como calcular uma tabela de horários para o sistema ferroviário de modo que as restrições apresentadas sejam sempre respeitadas. Especificações que definem limites para os intervalos entre partidas dos trens e para o tempo de espera dos passageiros são definidas como semimódulo. O problema então é determinar se existe um semimódulo (A, B) -invariante e então calcular um controle com realimentação de estados que garanta que as restrições sejam sempre respeitadas. O método para encontrar o semimódulo é descrito em detalhes em Katz (2007).

Um outro trabalho na área de controle é o de Goverde (2007). Considerando um denso tráfego ferroviário ou quando se têm horários altamente interconectados, um único trem atrasado pode causar um efeito dominó de atrasos secundários em toda a rede, que é uma das principais preocupações dos planejadores da rede. Em seu trabalho, Goverde (2007) descreve uma teoria da estabilidade para analisar a sensibilidade nos horários e robustez a atrasos usando um sistema linear para descrever uma rede ferroviária na álgebra max-plus.

O modelo max-plus inclui a interdependência dos trens resultante dos horários, da logística e da infra-estrutura compartilhada. A estabilidade é o comportamento auto-regulador do sistema ferroviário para retornar ao estado estacionário do horário após interrupções. A abordagem proposta avalia a estabilidade do horário utilizando a análise espectral max-plus e quantifica a robustez utilizando algoritmos do caminho crítico. Além disso, a propagação

do atraso inicial ao longo do tempo e do espaço é computada eficazmente por equações recursivas explícitas que levam em consideração a dinâmica de ordem zero. A abordagem max-plus permite uma análise em tempo real em grande escala periódica dos horários ferroviários. Um estudo de caso da rede ferroviária nacional holandesa ilustra o potencial da metodologia desenvolvida para apoiar a concepção do transporte ferroviário confiável em horários de grande densidade de tráfego nas redes ferroviárias.

Garcia (2007), em seu trabalho, resolve um problema de controle de tráfego urbano através da álgebra max-plus. O conceito de (A, B) -invariância sobre o semi-anel max-plus é utilizado para realizar a coordenação semafórica. Além da coordenação, procura-se projetar ondas verdes nas vias arteriais.

O problema de coordenação de semáforos em um sistema de tráfego urbano pode ser analisado como um problema de controle de sistemas a eventos discretos. O problema apresentado por Garcia (2007) foi traduzido em um conjunto de restrições de coordenação e operacionais sobre o grafo a eventos que modela o sistema. Após encontrar uma especificação para o problema, a síntese de controle consistiu de dois passos: encontrar um semimódulo (A, B) -invariante e uma matriz de controle F que atua realimentada nos estados. O exemplo do sistema de tráfego que foi controlado por Garcia (2007) será apresentado em detalhes no próximo capítulo.

Os trabalhos descritos foram estudados em detalhes e serviram de base teórica e inspiração para a proposta de controle que será apresentada a seguir.

3.2 Definição do Problema

O sistema que se deseja controlar é modelado por:

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k). \quad (3.1)$$

Esse sistema está sujeito a restrições de sincronização. O objetivo do

controle é assegurar que:

$$Ex(k) \leq x(k), \quad (3.2)$$

sendo $A, E \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}^{n \times n}$, $B \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}^{n \times p}$, com n transições internas (ou estados) e p entradas.

A matriz que contém as restrições é a matriz E da equação 3.2.

Os resultados apresentados a seguir foram adaptados de Baccelli et al. (1992).

Supondo que:

$$Ex(k) \leq x(k), \quad (3.3)$$

pode-se observar o seguinte:

$$\begin{aligned} E.Ex(k) &\leq Ex(k) \leq x(k) \\ E^3x(k) &\leq \dots \leq x(k) \\ x(k) \oplus Ex(k) \oplus E^2x(k) \oplus \dots \oplus E^nx(k) \oplus \dots &\leq x(k) \oplus x(k) \oplus \dots \\ (I \oplus E \oplus E^2 \oplus \dots)x(k) &\leq x(k) \\ E^*x(k) &\leq x(k). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Mas,

$$I \leq E^* \Rightarrow Ix(k) \leq E^*x(k) \Rightarrow x(k) \leq E^*x(k). \quad (3.5)$$

Das Equações (3.4) e (3.5):

$$E^*x(k) = x(k). \quad (3.6)$$

Mostrou-se que:

$$Ex(k) \leq x(k) \Rightarrow E^*x(k) = x(k). \quad (3.7)$$

Como $E \leq E^*$:

$$E^*x(k) = x(k) \Rightarrow Ex(k) \leq x(k), \quad (3.8)$$

tem-se que:

$$Ex(k) \leq x(k) \Leftrightarrow E^*x(k) = x(k). \quad (3.9)$$

Propriedade 3.2.1. *Todas as condições iniciais factíveis para o sistema devem satisfazer $x(0) = E^*v$, sendo $v \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}^n$.*

Demonstração. Se a condição inicial é factível, então $x(0) = E^*x(0)$, ou seja, $x(0) = E^*v$, sendo $v = x(0)$.

Se $x(0) = E^*v$, então $E^*x(0) = E^*E^*v = E^*v = x(0)$, portanto a condição é factível. \square

3.3 Controle por Realimentação de Estados

O objetivo é implementar uma lei de controle por realimentação de estados, isto é:

$$u(k) = Fx(k-1),$$

sendo $F \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}^{p \times n}$.

Esse controle deve ser tal que:

$$E^*x(k) \leq x(k) \quad \forall k \geq 0.$$

Com isso o sistema da Equação (3.1) passa a ser reescrito como:

$$x(k) = (A \oplus BF)x(k-1). \quad (3.10)$$

Proposição 3.3.1. *O problema de controle proposto apresenta solução para toda condição inicial factível se e somente se:*

$$\begin{aligned} E^*(A \oplus BF)E^* &= (A \oplus BF)E^* \\ E^*AE^* \oplus E^*BFE^* &= AE^* \oplus BFE^* \end{aligned} \quad (3.11)$$

Demonstração. Considere a equação $x(k) = Ax(k) \oplus Bu(k)$ sendo $u(k) = Fx(k-1)$. O problema é encontrar $F|Ex(k) \leq x(k)$. Dessa forma, deve-se assegurar que:

$$x(k) = (A + BF)x(k-1), \quad (3.12)$$

de forma a respeitar (veja Equação (3.9)):

$$E^*x(k) = x(k). \quad (3.13)$$

Substituindo a Equação (3.12) na (3.13):

$$E^*(A \oplus BF)x(k-1) = (A \oplus BF)x(k-1), \quad \forall k \geq 1 \quad (3.14)$$

Em particular para $k = 1$:

$$E^*(A \oplus BF)x(0) = (A \oplus BF)x(0), \quad (3.15)$$

pela Propriedade 3.2.1:

$$\begin{aligned} E^*(A \oplus BF)E^*v &= (A \oplus BF)E^*v, \quad \forall v \\ E^*(A \oplus BF)E^* &= (A \oplus BF)E^*. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dessa forma, mostrou-se que (3.14) implica (3.16). Deve-se mostrar que (3.16) implica (3.14).

Se (3.16) é verdadeira, lembrando que $x(0) = E^*v$, então $E^*x(1) = x(1)$, pois:

$$\begin{aligned} E^*(A \oplus BF)E^* &= (A \oplus BF)E^* \Rightarrow \\ \Rightarrow E^*(A \oplus BF)E^*v &= (A \oplus BF)E^*v \Rightarrow E^*x(1) = x(1) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Assumindo (3.16), deve-se mostrar que:

$$E^*x(k) = x(k) \Rightarrow E^*x(k+1) = x(k+1), \quad \forall k \geq 0. \quad (3.18)$$

A demonstração será feita por indução. Assume-se que $E^*x(k) = x(k)$ é verdadeira e prova-se que $E^*x(k+1) = x(k+1)$. Dessa forma, como

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A \oplus BF)x(k) \\ E^*x(k) &= x(k), \end{aligned} \tag{3.19}$$

tem-se que

$$x(k+1) = (A \oplus BF)E^*x(k). \tag{3.20}$$

Como, por hipótese, (3.16) é verdadeira, pode-se reescrever (3.20) como:

$$x(k+1) = E^*(A \oplus BF)E^*x(k). \tag{3.21}$$

Portanto,

$$E^*x(k+1) = E^*E^*(A \oplus BF)E^*x(k). \tag{3.22}$$

Lembrando que $E^*.E^* = E^*$ e usando (3.21):

$$E^*x(k+1) = x(k+1). \tag{3.23}$$

□

Lema 3.3.1. *Se a matriz B é G -astíc, $\forall G \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}^{n \times n}$, $\exists F | BF \geq G$.*

Demonstração. É direta a partir da seguinte observação:

Se a matriz B é G -astíc ($(\forall i)(\exists l)/B_{il} \neq \varepsilon$): $\Rightarrow [BF]_{ij} = \sum_{l=1}^p B_{il}F_{lj}$. Portanto é sempre possível fazer $[BF]_{ij}$ tão grande quanto se queira. □

Proposição 3.3.2. *Para um sistema tal que B é G -astíc, uma condição suficiente para a existência do controlador é encontrar uma solução ($Z_{ij} \neq \varepsilon$) para a equação:*

$$BZ = E^*Y. \tag{3.24}$$

Demonstração. a) $BZ = E^*Y \Rightarrow E^*BZ = E^*E^*Y = E^*Y = BZ$. Dessa forma: $BZ = E^*Y \Rightarrow E^*BZ = BZ$.

b) se $\exists Z | Z_{ij} \neq \varepsilon \Rightarrow \hat{Z} = Z \otimes M$ ($M = mI$), sendo $I \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}^{n \times n}$ a matriz identidade e $m \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}$, também é solução para a equação (3.24) pois $E^*BZ = BZ \Rightarrow E^*BZ \otimes M = BZ \otimes M$.

c) de forma análoga, $\tilde{F} = \hat{Z}E^*$ também é solução para (3.24).

De b) e c), em conjunto com o Lema 3.3.1, conclui-se que é sempre possível fazer \tilde{F} suficientemente grande, tal que $B\tilde{F} \geq E^*AE^*$, ou seja, $E^*AE^* \oplus B\tilde{F} = B\tilde{F}$. Dessa forma, utilizando a Equação (3.24), tem-se: $E^*AE^* \oplus E^*B\tilde{F} = B\tilde{F}$.

Como $B\tilde{F} \geq E^*AE^*$, então $B\tilde{F} \geq AE^*$, pois $E^* \geq I$. Logo, $B\tilde{F} \oplus AE^* = B\tilde{F}$.

Portanto:

$$E^*AE^* \oplus E^*B\tilde{F} = B\tilde{F} = B\tilde{F} \oplus AE^*. \quad (3.25)$$

Como

$$\tilde{F} = \hat{Z}E^*, \quad (3.26)$$

logo

$$\tilde{F} = \tilde{F}E^*. \quad (3.27)$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} E^*AE^* \oplus E^*B\tilde{F}E^* &= B\tilde{F}E^* \oplus AE^* \\ E^*(A \oplus B\tilde{F})E^* &= (A \oplus B\tilde{F})E^*. \end{aligned} \quad (3.28)$$

□

A proposição 3.3.2, juntamente com a teoria apresentada na Seção 2.3, resulta no seguinte algoritmo para o cálculo da matriz de controle F :

Inicialize**Iniciar** Z **Calcular** uma solução para $BZ = E^*Y$

$$m = 0$$

$$M = mI$$

$$\tilde{F} = ZME^*$$

Enquanto $(B\tilde{F} < E^*AE^*)$,

$$m = m \otimes 1$$

$$M = mI$$

$$\tilde{F} = ZME^*$$

Fim

$$F = \tilde{F}$$

Fim

Este algoritmo é um dos principais resultados deste trabalho. Ele será utilizado para o cálculo da matriz de controle F nas duas aplicações que serão apresentadas no próximo capítulo.

3.4 Conclusão

Esse capítulo abordou a modelagem e controle de sistemas a eventos discretos por meio da álgebra max-plus. A principal contribuição apresentada é a estratégia de controle utilizando propriedades algébricas do sistema. A matriz de controle é encontrada a partir do comportamento dinâmico do sistema e de uma matriz de restrições. O próximo capítulo utilizará a estratégia de controle desenvolvida para sincronizar os tempos de semaforização em dois sistemas de tráfego urbano.

Capítulo 4

Aplicação no Problema de Controle de Tráfego Urbano

Atualmente, o trânsito tem sido um problema que está constantemente presente no cotidiano das pessoas. Principalmente nas grandes cidades, a população se depara a cada dia com grandes filas de congestionamentos, o que traz um desconforto e prejudica o dia-a-dia dessas pessoas. Para tentar amenizar esse problema, pesquisadores vêm estudando maneiras de controlar o tráfego urbano pois, controlando o tráfego, consegue-se uma redução nos congestionamentos, propiciando mais segurança e qualidade de vida aos motoristas e pedestres.

A álgebra max-plus, formalismo utilizado neste trabalho, é adequada para tratar o problema de controle de tráfego urbano quando se deseja realizar sincronização de semáforos. No capítulo anterior foi apresentada uma estratégia de controle desenvolvida utilizando essa álgebra. A eficiência dessa estratégia de controle será mostrada através de duas aplicações a sistemas de transporte.

4.1 Aplicação na Sincronização de Semáforos em Cruzamentos em Cruzamentos

Considere o sistema mostrado na Figura 4.1. Ele se refere a um conjunto de cruzamentos de uma via, localizada na cidade de Itaúna-MG. Cruzamentos são interseções onde ocorrem movimentos de travessia, de divergência ou convergência.



Figura 4.1: Conjunto de cruzamentos de uma via

Nesta via há um fluxo intenso de veículos e não há semaforização, o que ocasiona um trânsito confuso e perigoso. Através de um estudo do local, realizado por mim, observou-se que se houvesse semáforos com temporizações adequadas o problema da região poderia ser amenizado. A Figura 4.2 mostra um modelo para a via com os semáforos que seriam instalados. Os carros podem trafegar em qualquer sentido indicado pelas setas.

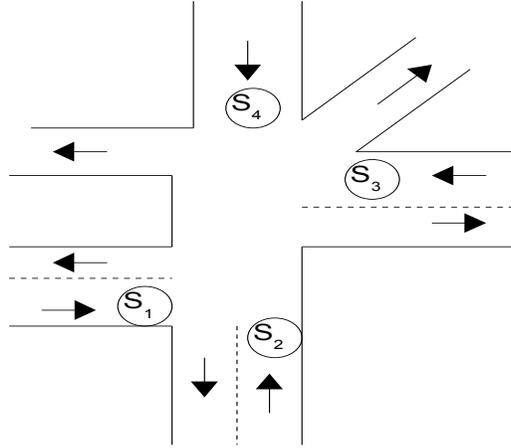


Figura 4.2: Modelo da via com semaforização

Nesta seção o objetivo é apresentar um modelo que represente essa via e desenvolver uma estratégia de controle que possa agir nos tempos de semaforização, sincronizando-os, para que amenize o grande volume de tráfego na região. Os semáforos estão representados por S_i com $i = 1, 2, 3, 4$.

Primeiramente, será visto como a evolução desse tipo de sistema pode ser descrita por sistemas dinâmicos lineares da forma $x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k)$ na álgebra max-plus. Os eventos que há interesse em modelar são as trocas de sinal dos semáforos.

Um cruzamento pode ser modelado através de um GET. A Figura 4.3 mostra o GET para um semáforo. Os semáforos podem estar com a indicação verde, amarela ou vermelha. As transições indicam a troca de sinal do semáforo, S_{i1} habilita o sinal verde, S_{i2} o sinal amarelo e S_{i3} habilita o sinal vermelho. Os lugares g_i , y_i e r_i representam, respectivamente, os tempos de verde, amarelo e vermelho do semáforo i com $i = 1, 2, 3, 4$. Além disso, g_i , y_i e r_i também são utilizados para nomear os lugares. A marcação utilizada no modelo indica a habilitação do sinal amarelo.

Em cada transição há um auto-laço, ou seja, um lugar com uma ficha

partindo e retornando para a mesma transição. A necessidade deste auto-laçõ é garantir que os disparos das transições sejam sempre crescentes, por exemplo, $S_{i1}(k+1) \geq S_{i1}(k)$.

A conexão entre o semáforo de um cruzamento e o semáforo de um outro cruzamento se dá através de um lugar não temporizado entre as transições que habilitam o sinal vermelho para um cruzamento e o sinal verde para o outro cruzamento. A Figura 4.4 mostra a conexão entre dois cruzamentos.

A conexão entre todos os cruzamentos da via é definida por um GET que é mostrado na Figura 4.5. A marcação indica que o semáforo está com o sinal amarelo habilitado para a via 1. Observe neste modelo que as transições S_{13} e S_{21} , por exemplo, são disparadas ao mesmo tempo. Isto é um problema para este modelo, pois ao fechar o sinal vermelho de um cruzamento instantaneamente abre-se o sinal verde do cruzamento seguinte, o que pode vir a causar uma colisão pois poderá existir veículos que ainda não completaram a travessia. O controle desse sistema é uma forma de evitar que este conflito possa vir a ocorrer.

Para se obter uma malha semaforizada e possível de ser controlada aplicam-se entradas de controle nas transições que representam a abertura do sinal verde, ou seja, controla-se o sinal vermelho. Aplica-se o controle também na abertura do sinal amarelo do primeiro cruzamento, para garantir que a matriz B do sistema seja G-astig e exista um controlador. A Figura 4.6 mostra o GET da Figura 4.5 depois de introduzir as entradas de controle. A introdução das transições u_i permite que os chaveamentos do sinal semaforico sejam atrasados em relação àqueles definidos pelos tempos mínimos.

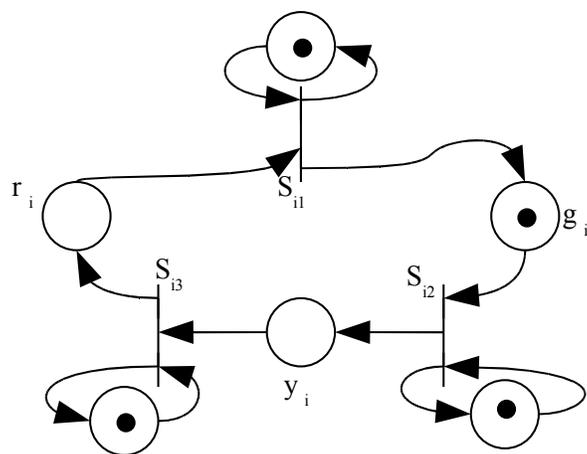


Figura 4.3: Modelo de um semáforo

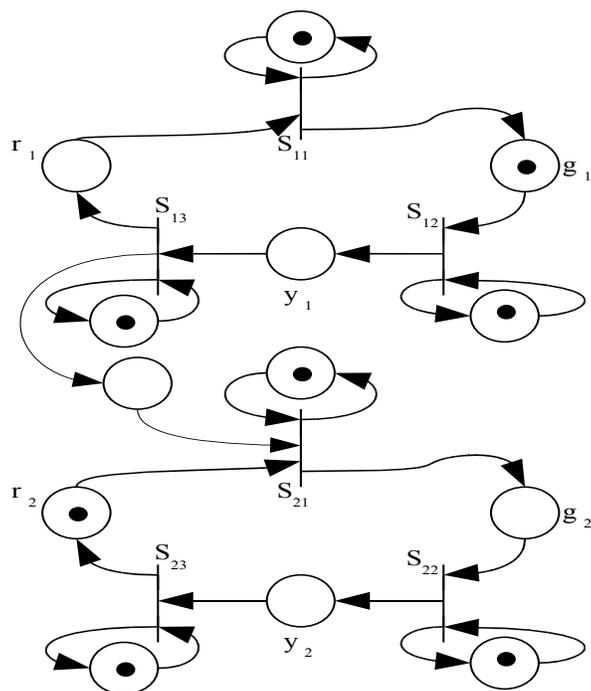


Figura 4.4: Conexão entre 2 cruzamentos

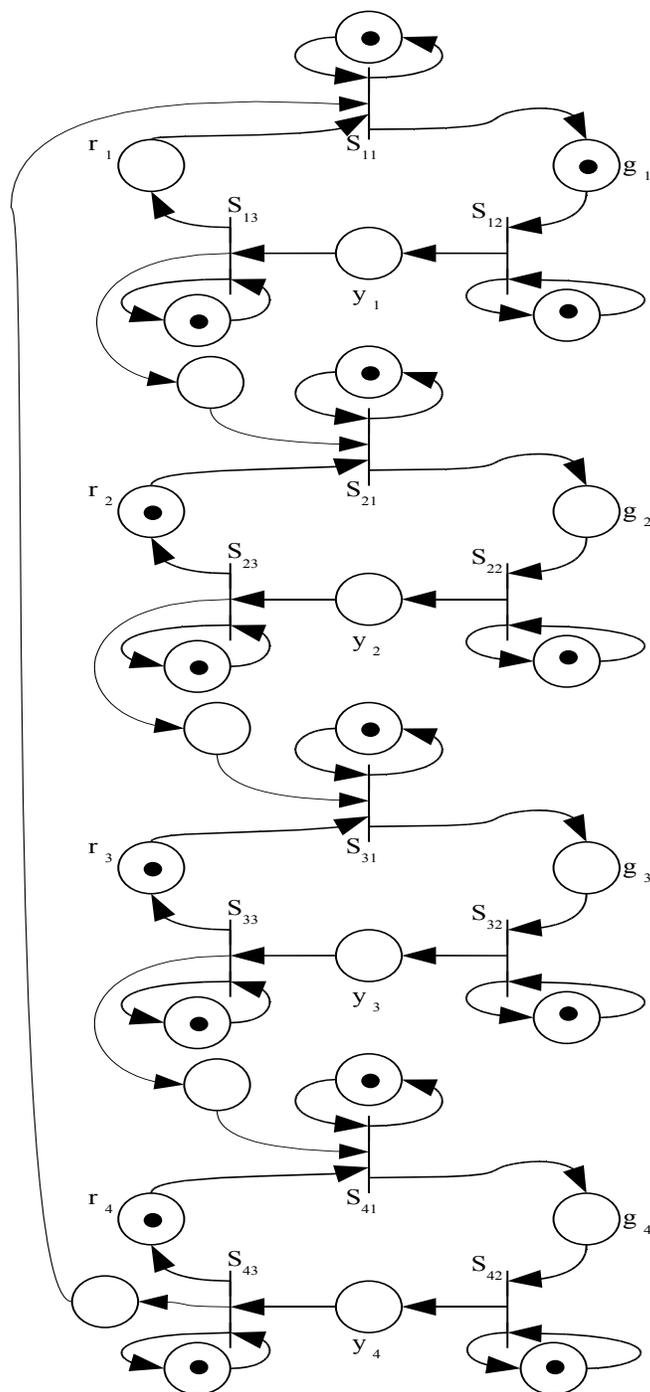


Figura 4.5: Modelo da via

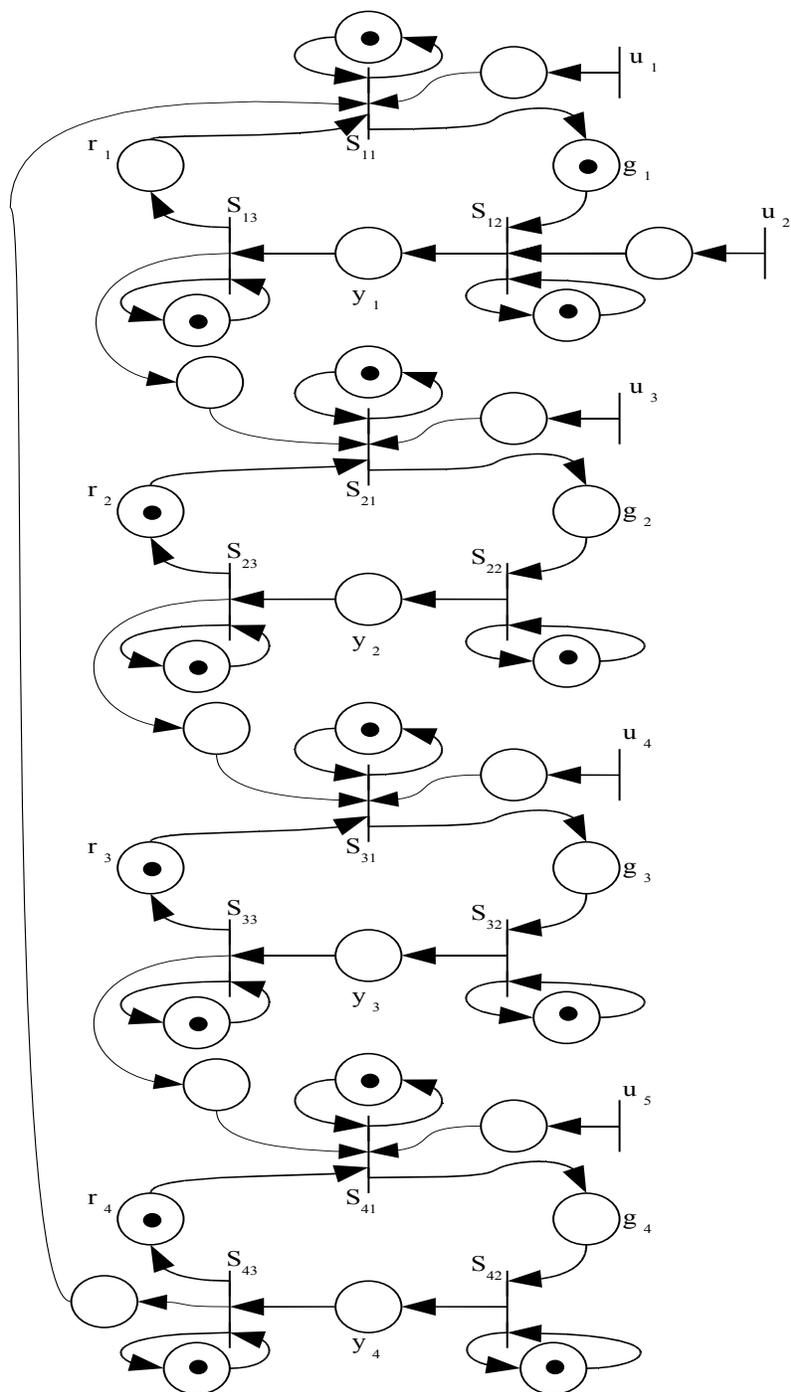


Figura 4.6: Modelo da via com entradas de controle

O estado do sistema pode ser expresso através da Equação (2.7) sendo:

$$x(k) = [S_{11}(k) \ S_{12}(k) \ S_{13}(k) \ S_{21}(k) \ S_{22}(k) \ S_{23}(k) \ S_{31}(k) \ S_{32}(k) \\ S_{33}(k) \ S_{41}(k) \ S_{42}(k) \ S_{43}(k)]^T,$$

$$u(k) = [u_1(k) \ u_2(k) \ u_3(k) \ u_4(k) \ u_5(k)]^T.$$

As equações que representam as transições do modelo são definidas por:

$$\begin{aligned} S_{11}(k) &= r_1 S_{13}(k) \oplus S_{43}(k) \oplus S_{11}(k-1) \oplus u_1(k) \\ S_{12}(k) &= g_1 S_{11}(k-1) \oplus S_{12}(k-1) \oplus u_2(k) \\ S_{13}(k) &= y_1 S_{12}(k) \oplus S_{13}(k-1) \\ S_{21}(k) &= r_2 S_{23}(k-1) \oplus S_{13}(k) \oplus S_{21}(k-1) \oplus u_3(k) \\ S_{22}(k) &= g_2 S_{21}(k) \oplus S_{22}(k-1) \\ S_{23}(k) &= y_2 S_{22}(k) \oplus S_{23}(k-1) \\ S_{31}(k) &= r_3 S_{33}(k-1) \oplus S_{23}(k) \oplus S_{31}(k-1) \oplus u_4(k) \\ S_{32}(k) &= g_3 S_{31}(k) \oplus S_{32}(k-1) \\ S_{33}(k) &= y_3 S_{32}(k) \oplus S_{33}(k-1) \\ S_{41}(k) &= r_4 S_{43}(k-1) \oplus S_{33}(k) \oplus S_{41}(k-1) \oplus u_5(k) \\ S_{42}(k) &= g_4 S_{41}(k) \oplus S_{42}(k-1) \\ S_{43}(k) &= y_4 S_{42}(k) \oplus S_{43}(k-1) \end{aligned}$$

O sistema $x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k)$, para facilitar a implementação deste exemplo, é expandido para:

$$x(k) = A_0 x(k) \oplus A_1 x(k-1) \oplus B_0 u(k), \quad (4.1)$$

que pode ser expresso como (Baccelli et al. 1992):

$$x(k) = A_0^* A_1 x(k-1) \oplus A_0^* B_0 u(k). \quad (4.2)$$

As matrizes A_0 , A_1 e B_0 são apresentadas abaixo, sendo: $g_1 = g_2 = g_3 = 20$, $g_4 = 12$, $r_i = 10$, $y_i = 2$ ($i = 1, 2, 3, 4$). As unidades dos intervalos estão expressas em segundos.

Os tempos de verde e amarelo foram definidos de acordo com o estudo realizado da via. Em vários dias da semana e em horários de pico (manhã, horário de almoço e fim de tarde), foram realizadas medições do tempo gasto nas conversões entre os cruzamentos e da quantidade de veículos que trafegavam na via. Com base neste estudo definiu-se os tempos g_1 , g_2 e g_3 com os mesmos valores e g_4 um pouco menor por ser um cruzamento de menor fluxo. Os tempos de vermelho foram inicializados por um valor mínimo para que o controlador, respeitando as restrições do sistema, defina os tempos de vermelho adequados.

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & r_1 & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & y_1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & g_2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & y_2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & g_3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & y_3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & g_4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & y_4 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ g_1 & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & r_2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & r_4 \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

A matriz A da Equação (2.7) é $A_0^*A_1$ e a matriz B é $A_0^*B_0$. Elas são mostradas abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 80 & 60 & 58 & 58 & 38 & 68 & 36 & 16 & 46 & 14 & 2 & 24 \\ 20 & 0 & \varepsilon \\ 22 & 2 & 0 & \varepsilon \\ 22 & 2 & 0 & 0 & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 42 & 22 & 20 & 20 & 0 & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 44 & 24 & 22 & 22 & 2 & 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 44 & 24 & 22 & 22 & 2 & 32 & 0 & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 64 & 44 & 42 & 42 & 22 & 52 & 20 & 0 & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 66 & 46 & 44 & 44 & 24 & 54 & 22 & 2 & 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 66 & 46 & 44 & 44 & 24 & 54 & 22 & 2 & 32 & 0 & \varepsilon & 10 \\ 78 & 58 & 56 & 56 & 36 & 66 & 34 & 14 & 44 & 12 & 0 & 22 \\ 80 & 60 & 58 & 58 & 38 & 68 & 36 & 16 & 46 & 14 & 2 & 24 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 60 & 58 & 36 & 14 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 22 & 20 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 24 & 22 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 24 & 22 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 44 & 42 & 20 & \varepsilon \\ \varepsilon & 46 & 44 & 22 & \varepsilon \\ \varepsilon & 46 & 44 & 22 & 0 \\ \varepsilon & 58 & 56 & 34 & 12 \\ \varepsilon & 60 & 58 & 36 & 14 \end{bmatrix}$$

Para garantir o funcionamento desejável do sistema controlado é necessário definir um conjunto de restrições operacionais. As restrições que foram impostas a esse sistema e que dão origem à matriz E_0 são:

→ Um pelotão (grupo de veículos) deve ser absorvido em um tempo t_a . É o tempo gasto para que uma determinada quantidade de veículos termine a conversão. Ao fechar o sinal vermelho de um cruzamento o sinal verde do cruzamento seguinte não pode abrir imediatamente, é preciso esperar um tempo para que todos os veículos tenham terminado a travessia, evitando assim possíveis colisões.

$$S_{13}(k) - S_{21}(k) \leq -t_a$$

$$S_{23}(k) - S_{31}(k) \leq -t_a$$

$$S_{33}(k) - S_{41}(k) \leq -t_a$$

$$S_{43}(k) - S_{11}(k) \leq -t_a$$

sendo $t_a = 6$.

Para a aplicação apresentada e para a que será mostrada na próxima seção faz-se necessário a inclusão de restrições que são impostas pelo modelo.

Pela definição do problema tem-se:

$$x(k) = A_0x(k) \oplus A_1x(k-1) \oplus B_0u(k).$$

Analisando esta equação pode-se observar que $x(k)$ não pode ocorrer antes de outro termo que contenha $x(k)$, ou seja:

$$A_0x(k) \leq x(k).$$

Sabe-se que:

$$E_0x(k) \leq x(k),$$

então:

$$A_0x(k) \oplus E_0x(k) \leq x(k)$$

$$(A_0 \oplus E_0)x(k) \leq x(k).$$

Sendo assim define-se uma matriz E que é dada por:

$$E = A_0 \oplus E_0. \quad (4.3)$$

A matriz E_0 e a matriz E para este exemplo são representadas abaixo:

$$E_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & t_a \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & t_a & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_a & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & t_a & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 10 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 12 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Para o cálculo do controlador utiliza-se a matriz E , que é a matriz completa de todas as restrições que foram impostas ao sistema.

Verifica-se para este exemplo que a matriz B é G-astic. Dessa forma, através da solução do algoritmo apresentado na Seção 3.3 foi gerada uma matriz de controle F que atua realimentada nos estados e é dada por:

$$F = \begin{bmatrix} 104 & 188 & 186 & 180 & 160 & 158 & 152 & 132 & 130 & 124 & 112 & 110 \\ 20 & 104 & 102 & 96 & 76 & 74 & 68 & 48 & 46 & 40 & 28 & 26 \\ 28 & 112 & 110 & 104 & 84 & 82 & 76 & 56 & 54 & 48 & 36 & 34 \\ 56 & 140 & 138 & 132 & 112 & 110 & 104 & 84 & 82 & 76 & 64 & 62 \\ 84 & 168 & 166 & 160 & 140 & 138 & 132 & 112 & 110 & 104 & 92 & 90 \end{bmatrix}$$

Uma possível seqüência para o estado inicial é:

$$\begin{aligned} x(0) &= [84 \ 0 \ 2 \ 8 \ 28 \ 30 \ 36 \ 56 \ 58 \ 64 \ 76 \ 78]^T \\ x(1) &= [188 \ 104 \ 106 \ 112 \ 132 \ 134 \ 140 \ 160 \ 162 \ 168 \ 180 \ 182]^T \\ x(2) &= [292 \ 208 \ 210 \ 216 \ 236 \ 238 \ 244 \ 264 \ 266 \ 272 \ 284 \ 286]^T \\ x(3) &= [396 \ 312 \ 314 \ 320 \ 340 \ 342 \ 348 \ 368 \ 370 \ 376 \ 388 \ 390]^T \end{aligned}$$

Cada elemento da série indica a data de disparo das transições. Por exemplo, o primeiro elemento de $x(0)$ indica que o disparo de número 0 da

transição S_{11} ocorreu no instante 84 segundos, o da transição S_{12} ocorreu no instante 0, o mesmo acontece para as demais transições. O primeiro elemento de $x(1)$ indica o disparo de número 1 da transição S_{11} que ocorreu no instante 188 segundos, o da transição S_{12} ocorreu no instante 104 segundos, o mesmo acontece para as demais transições e para os demais vetores de estado.

Com o cálculo do autovalor obtém-se o tempo de ciclo da malha viária que é de 104s. Para realizar os cálculos foi utilizado o max-plus toolbox do Scilab (Quadrat 2003, Hardouin, Gruet, Cottenceau & Lhommeau 2001).

Após os ajustes que foram feitos pelo controlador, respeitando as restrições que foram impostas ao sistema, os tempos dos semáforos são: $g_1 = g_2 = g_3 = 20$, $g_4 = 12$, $r_1 = r_2 = r_3 = 82$, $r_4 = 90$, $y_i = 2$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Pode-se observar que os tempos de vermelho aumentaram bastante. Considerando que são quatro semáforos na via, este aumento é aceitável. Quanto ao fato de se implantar essa semaforização na situação real, é necessário um estudo mais detalhado da viabilidade financeira do projeto.

4.2 Aplicação a Uma Malha Viária - ondas verdes

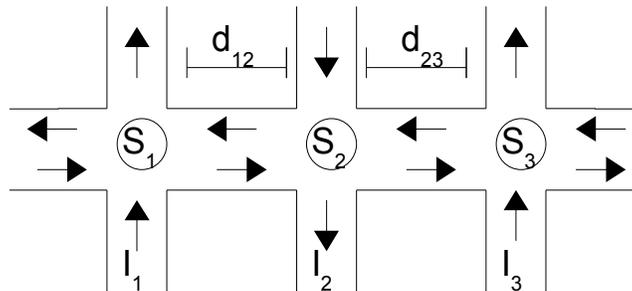


Figura 4.7: Exemplo de uma malha viária de 3 interseções

A aplicação apresentada nesta seção foi extraída de Garcia, Cury & Junior (2006) e Garcia (2007). Em seu trabalho, Garcia et al. (2006) utiliza o conceito de (A, B) -invariância sobre o semi-anel max-plus para realizar a coordenação semafórica.

Considere o sistema mostrado na Figura 4.7. Ele se refere a um conjunto de interseções de uma via. Os carros podem trafegar em qualquer sentido indicado pelas setas. Nesta seção o objetivo é apresentar um modelo que represente essa via e utilizar a estratégia de controle proposta no capítulo anterior para que possa agir nos tempos de semaforização, sincronizando-os, para que haja formação de ondas verdes (quando possível).

Os veículos que se deslocam entre as interseções são agrupados em pelotões e o tamanho do pelotão é ignorado, considerando-o como um ponto indivisível. Os semáforos estão representados por S_i e as interseções por I_i com $i = 1, 2, 3$. O tempo de deslocamento entre as interseções é a razão entre a distância das interseções pela velocidade determinada para onda verde. Utilizando a mesma nomenclatura de Garcia et al. (2006), o tempo de deslocamento entre I_1 e I_2 é d_{12} e entre I_2 e I_3 é d_{23} .

Primeiramente, será visto como a evolução desse tipo de sistema pode ser descrita por sistemas dinâmicos lineares da forma $x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k)$ na álgebra max-plus. Os eventos que há interesse em modelar são as trocas de sinal dos semáforos e as passagens dos pelotões pelas interseções.

A via arterial de mão dupla da Figura 4.7 pode ser modelada através de um GET. A Figura 4.8 mostra o GET para a arterial, onde as transições x_{i1} e x_{i2} indicam a passagem de um pelotão pela interseção I_i com $i = 1, 2$ e conversões não são permitidas. Aos lugares que conectam as transições são associados os tempos $d_{12} = d_{21}$, que representam o tempo de deslocamento entre as duas interseções. A marcação dos lugares, que são nomeados d_{ij} , indicam a presença ou não de um pelotão na via.

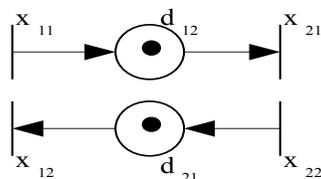


Figura 4.8: Modelo de uma via de mão dupla

Os semáforos podem estar com a indicação semafórica verde ou vermelha. O tempo de amarelo não é considerado isoladamente. O fato da indicação estar verde na direção da arterial significa que o sinal está vermelho na direção da via transversal, e vice-versa. Isto significa que todas as interseções podem estar com o sinal verde ao mesmo tempo para a arterial não havendo colisões porque todas as transversais estarão com o sinal vermelho.

O modelo utilizado para o semáforo é mostrado na Figura 4.9. As transições que indicam a troca de sinal do semáforo são: S_{i1} habilita o sinal verde e S_{i2} habilita o sinal vermelho. Os lugares g_i e r_i representam, respectivamente, os tempos de verde e vermelho do semáforo i com $i = 1, 2, 3$. A marcação indica a habilitação do sinal verde ao inicializar a rede.

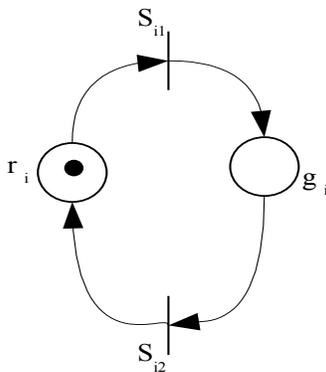


Figura 4.9: Modelo de um semáforo

A conexão entre uma via e um semáforo se dá através de um lugar não

temporizado entre as transições que habilitam o sinal verde para a arterial e as transições que habilitam a passagem de um pelotão pela via. A Figura 4.10 mostra a conexão entre uma via e um semáforo, onde um pelotão só pode ingressar na via $x_{11} \rightarrow x_{21}$ quando o semáforo S_1 estiver com o sinal verde, ou seja, quando a transição S_{11} for sensibilizada.

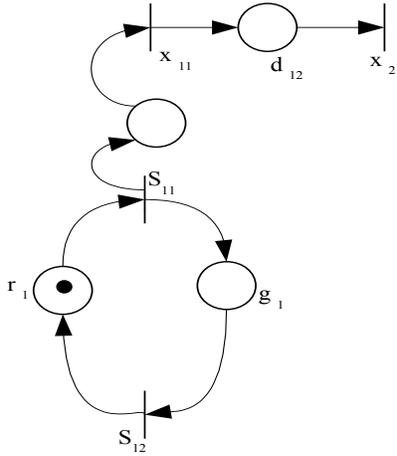


Figura 4.10: Conexão de uma via e um semáforo

Após definir modelos isolados para uma via e um semáforo, e a conexão entre eles, é possível definir um GET que modele a malha viária da Figura 4.7. A malha viária é composta de três interseções, e portanto é necessário modelar três semáforos, um para cada interseção. Além disso, como a via é de mão dupla é necessário modelar a conexão para cada direção da via separadamente. O modelo da malha semaforizada com as entradas de controle está na Figura 4.11.

Para se obter uma malha semaforizada e possível de ser controlada aplicam-se entradas de controle nas transições que representam a abertura dos sinais vermelho e verde. A introdução das transições de controle permite que os chaveamentos do sinal semaforico sejam atrasados em relação àqueles definidos pelos tempos mínimos de verde e vermelho (Garcia et al. 2006,

Garcia 2007).

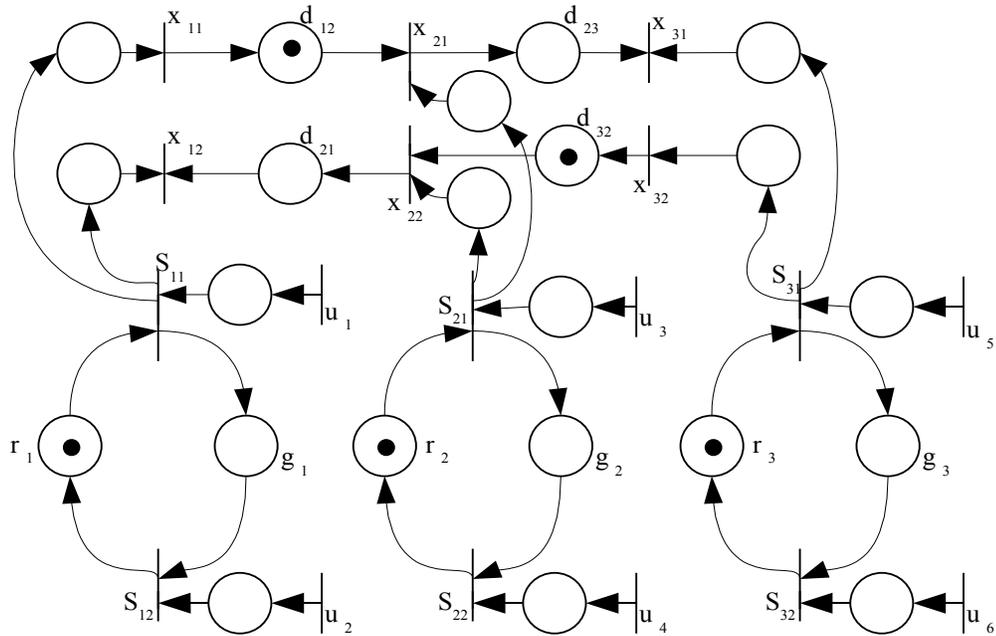


Figura 4.11: Modelo de uma malha com entradas de controle

O estado do sistema pode ser expresso através da Equação (2.7) sendo:

$$x(k) = [S_{11}(k) \quad S_{12}(k) \quad x_{11}(k) \quad x_{12}(k) \quad S_{21}(k) \quad S_{22}(k) \quad x_{21}(k) \quad x_{22}(k) \\ S_{31}(k) \quad S_{32}(k) \quad x_{31}(k) \quad x_{32}(k)]^T,$$

$$u(k) = [u_1(k) \quad u_2(k) \quad u_3(k) \quad u_4(k) \quad u_5(k) \quad u_6(k)]^T.$$

As equações que representam as transições deste modelo são:

$$\begin{aligned}
S_{11}(k) &= r_1 S_{12}(k-1) \oplus u_1(k) \\
S_{12}(k) &= g_1 S_{11}(k) \oplus u_2(k) \\
x_{11}(k) &= S_{11}(k) \\
x_{12}(k) &= d_{21} x_{22}(k) \oplus S_{11}(k) \\
S_{21}(k) &= r_2 S_{22}(k-1) \oplus u_3(k) \\
S_{22}(k) &= g_2 S_{21}(k) \oplus u_4(k) \\
x_{21}(k) &= d_{12} x_{11}(k-1) \oplus S_{21}(k) \\
x_{22}(k) &= d_{32} x_{32}(k-1) \oplus S_{21}(k) \\
S_{31}(k) &= r_3 S_{32}(k-1) \oplus u_5(k) \\
S_{32}(k) &= g_3 S_{31}(k) \oplus u_6(k) \\
x_{31}(k) &= d_{23} x_{21}(k) \oplus S_{31}(k) \\
x_{32}(k) &= S_{31}(k)
\end{aligned}$$

O sistema $x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k)$ pode ser expresso como (Baccelli et al. 1992):

$$x(k) = A_0^* A_1 x(k-1) \oplus A_0^* B_0 u(k). \quad (4.4)$$

As matrizes A_0 , A_1 e B_0 são apresentadas abaixo, sendo: $g_1 = g_2 = g_3 = 44$, $r_1 = r_2 = r_3 = 20$, $d_{12} = d_{21} = 15$, $d_{23} = d_{32} = 20$. As unidades dos intervalos estão expressas em segundos.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 44 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 44 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 44 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 20 & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

É necessário definir um conjunto de restrições operacionais para garantir o funcionamento desejável do sistema controlado. As restrições que dão origem à matriz E_0 são:

→ Habilitação da passagem do pelotão apenas com o semáforo em verde.

$$\begin{aligned} S_{11} - x_{1i} &\leq 0 \\ S_{21} - x_{2i} &\leq 0 \\ S_{31} - x_{3i} &\leq 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

→ O tempo de verde deve ser capaz de absorver um pelotão (t_a é o tempo de absorção).

$$\begin{aligned} x_{1i} - S_{12} &\leq -t_{a1} \\ x_{2i} - S_{22} &\leq -t_{a2} \\ x_{3i} - S_{32} &\leq -t_{a3}, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

→ O tempo de verde não pode ultrapassar um máximo m .

$$S_{i2} - S_{i1} \leq m_i, \quad i = 1, 2, 3$$

→ O *offset* entre os semáforos S_i não pode ultrapassar um máximo *off*.

$$S_{11} - S_{21} \leq off_{12}$$

$$S_{21} - S_{11} \leq off_{12}$$

$$S_{21} - S_{31} \leq off_{23}$$

$$S_{31} - S_{21} \leq off_{23}$$

sendo $m_i = 70, t_{ai} = 44, off_{12} = 5$ e $off_{23} = 40$.

Para essa aplicação também será necessária a inclusão das restrições impostas pelo modelo que foram apresentadas na seção anterior. Sendo assim as matrizes E_0 e E podem ser representadas por:

$$E_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & -m_1 & \varepsilon & \varepsilon & -off_{12} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & t_{a1} & t_{a1} & \varepsilon \\ e & \varepsilon \\ e & \varepsilon \\ -off_{12} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -m_2 & \varepsilon & \varepsilon & -off_{23} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_{a2} & t_{a2} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -off_{23} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -m_3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & t_{a3} & t_{a3} & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon & -70 & \varepsilon & \varepsilon & -5 & \varepsilon \\ 44 & \varepsilon & 44 & 44 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -70 & \varepsilon & \varepsilon & -40 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 44 & \varepsilon & 44 & 44 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -40 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -70 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 44 & \varepsilon & 44 & 44 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Nesse exemplo verifica-se também que a matriz B é G-astíc. Dessa forma, solucionando o algoritmo apresentado na Seção 3.3, encontra-se a matriz de controle F . Essa matriz é representada por:

$$F = \begin{bmatrix} 84 & 25 & 69 & 69 & 89 & 25 & 89 & 84 & 69 & 25 & 69 & 69 \\ 143 & 84 & 128 & 128 & 148 & 84 & 148 & 143 & 128 & 84 & 128 & 128 \\ 79 & 20 & 64 & 64 & 84 & 20 & 84 & 79 & 64 & 20 & 64 & 64 \\ 143 & 84 & 128 & 128 & 148 & 84 & 148 & 143 & 128 & 84 & 128 & 128 \\ 99 & 40 & 84 & 84 & 104 & 40 & 104 & 99 & 84 & 40 & 84 & 84 \\ 143 & 84 & 128 & 128 & 148 & 84 & 148 & 143 & 128 & 84 & 128 & 128 \end{bmatrix}$$

Uma possível seqüência para o estado inicial é:

$$\begin{aligned} x(0) &= [0 \ 59 \ 0 \ 15 \ 0 \ 44 \ 0 \ 0 \ 0 \ 64 \ 20 \ 0]^T \\ x(1) &= [89 \ 148 \ 89 \ 99 \ 84 \ 148 \ 84 \ 84 \ 104 \ 148 \ 104 \ 104]^T \\ x(2) &= [173 \ 232 \ 173 \ 183 \ 168 \ 232 \ 168 \ 168 \ 188 \ 232 \ 188 \ 188]^T \\ x(3) &= [257 \ 316 \ 257 \ 267 \ 252 \ 316 \ 252 \ 252 \ 272 \ 316 \ 272 \ 272]^T \end{aligned}$$

O primeiro elemento de $x(0)$ indica que o disparo de número 0 da transição S_{11} ocorreu no instante 0, o da transição S_{12} ocorreu no instante 59 segundos,

o mesmo acontece para as demais transições. O primeiro elemento de $x(1)$ indica o disparo de número 1 da transição S_{11} que ocorreu no instante 89 segundos, o da transição S_{12} ocorreu no instante 148 segundos, o mesmo acontece para as demais transições e para os demais vetores de estado.

Com o cálculo do autovalor obtém-se o tempo de ciclo da malha viária que é de 84s. Para realizar os cálculos foi utilizado o max-plus toolbox do Scilab (Quadrat 2003, Hardouin et al. 2001).

Comparando os resultados obtidos neste trabalho com os de Garcia et al. (2006) observa-se que ambos conseguiram encontrar uma matriz de controle para o sistema, satisfazendo as restrições que foram impostas ao modelo. Neste trabalho obteve-se um ganho de 6 segundos em relação ao tempo de ciclo, que em Garcia et al. (2006) foi de 90 segundos. É um ganho considerável, visto que em sistemas de tráfego urbano a diminuição do tempo é positiva.

4.3 Conclusão

Nesse capítulo foram apresentadas duas aplicações para a estratégia de controle proposta no capítulo anterior. Os resultados encontrados comprovam a eficiência dessa estratégia que conseguiu encontrar, nos dois casos, um controlador que assegura que as restrições impostas ao estado do sistema fossem respeitadas.

Capítulo 5

Conclusões

Nesta dissertação foi desenvolvida uma estratégia de controle para sistemas a eventos discretos max-plus lineares sujeitos a restrições no estado. A partir de um estudo dos SEDs observou-se que existe uma subclasse das redes de Petri (GET) que é capaz de modelar sistemas sujeitos a fenômenos de sincronização e atraso no tempo. Notou-se também que a álgebra max-plus é um formalismo eficiente para descrever o comportamento dinâmico de um GET.

A partir da utilização da álgebra max-plus foi proposta uma nova estrutura de controle com base na realimentação de estados. Essa estratégia de controle utiliza propriedades algébricas do sistema e foi desenvolvida de forma a respeitar restrições de sincronização que foram impostas ao sistema. Foi apresentada uma condição suficiente para a existência do controlador resultando em um algoritmo para o cálculo da matriz de controle.

Para mostrar a eficiência da estratégia de controle desenvolvida foram apresentadas duas aplicações no controle de tráfego urbano. Na primeira, modelou-se um conjunto de cruzamentos em uma via. O controle foi aplicado de forma a sincronizar os tempos dos semáforos para que amenize o tráfego intenso na região. Já na segunda aplicação, modelou-se um conjunto de

5 Conclusões

interseções de uma via. O objetivo do controle, nesse caso, era agir nos tempos de semaforização para que houvesse a formação de ondas verdes, favorecendo os veículos que se deslocam em grandes vias arteriais. Em ambos os casos foram impostas restrições ao sistema e verificou-se que o controle encontrado respeita essas restrições. O tempo de ciclo obtido também foi satisfatório.

Na implementação dos exemplos foi utilizado o *software* gratuito Scilab, especificamente o pacote para trabalhar com a álgebra max-plus que pode ser obtido em Quadrat (2003).

Uma proposta para trabalhos futuros seria a reestruturação da matriz B daqueles sistemas que não satisfizessem a condição apresentada, ou seja, aquelas matrizes que não fossem G -astic. Dessa forma seria possível utilizar a estratégia de controle proposta neste trabalho.

Uma outra sugestão para a pesquisa (e possível aplicação) deste trabalho seria utilizar a estrutura de controle que foi desenvolvida para controlar outros tipos de sistemas de tráfego, como tráfego de trens (ou metrô).

Referências Bibliográficas

- Andrade, C. R. & Maia, C. A. (2008). Controle de sistemas max-plus lineares sujeitos a restrições no estado: aplicação a sistemas de transporte, *XL Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* pp. 1–12.
- Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J. & Quadrat, J. P. (1992). *Synchronization and Linearity*, Wiley.
- Basile, G. & Marro, G. (1991). *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*, Prentice Hall, Italy.
- Cao, X. R. (1989). A comparison of the dynamics of continuous and discrete event systems, *Proceedings of the IEEE* **77**(1): 7–13.
- Cassandras, C. G. & Lafortune, S. (1999). *Introduction to Discrete Event Systems*, Kluwer Academic Publishers.
- Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J. P. & Viot, M. (1989). Algebraic tools for the performance evaluation of discrete event systems, *Proceedings of the IEEE* **77**(1): 39–58.
- Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J. & Ferrier, J. (2001). Model reference control for timed event graphs in dioid, *Automatica* **37**: 1451–1458.
- Cuninghame-Green, R. A. & Butkovic, P. (2003). The equation $a \otimes x = b \otimes y$ over $(\max, +)$, *Theoretical Computer Science* **293**: 3–12.

Referências Bibliográficas

- Garcia, T. R. (2007). *Modelagem e controle da coordenação do tráfego urbano através de formalismos para sistemas a eventos discretos e híbridos*, PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Garcia, T. R., Cury, J. E. R. & Junior, W. K. (2006). Modelagem e controle de vias arteriais urbanas através da álgebra max-plus, *Congresso Brasileiro de Automática* pp. 983–988.
- Gazis, D. C. (2002). *Traffic Theory*, Kluwer Academic Publishers.
- Goverde, R. M. P. (2007). Railway timetable stability analysis using max-plus system theory, *Transportation Research Part B* **41**: 179–201.
- Hardouin, L., Gruet, B., Cottenceau, B. & Lhommeau, M. (2001). <http://istia.univ-angers.fr/hardouin/outils.html>.
- Ho, Y. C. (1989). Introduction to special issue on dynamics of discrete event systems, *Proceedings of the IEEE* **77**(1): 3–6.
- Hopcroft, J. E. & Ullman, J. D. (1979). *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, Addison-Wesley.
- Houssin, L., Lahaye, S. & Boimond, J. (2007). Just in time control of constrained (max, +)-linear systems, *Discrete Event Dynamic Systems. Theory and Applications* **17**(2): 159–178.
- Katz, R. D. (2007). Max-plus (a, b)-invariant spaces and control of timed discrete-event systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **52**(2): 229–241.
- Maia, C. A. (2003). *Identificação e controle de sistemas a eventos discretos na álgebra (max, +)*, PhD thesis, UNICAMP.
- Maia, C. A., Hardouin, L., Santos-Mendes, R. & Cottenceau, B. (2003). Optimal closed-loop control of timed event graphs in dioids, *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(12): 2284–2287.

Referências Bibliográficas

- Maia, C. A., Lüders, R., Santos-Mendes, R. & Hardouin, L. (2005). Estratégias de controle por modelo de referência de sistemas a eventos discretos max-plus lineares, *Revista Controle e Automação* **16**(3): 263–278.
- Murata, T. (1989). Petri nets: Properties, analysis and applications, *Proceedings of the IEEE* **77**(4): 541–580.
- Peterson, J. L. (1981). *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*, Prentice Hall.
- Quadrat, J.-P. (2003). www.scilab.org/contrib.
- Ramadge, P. J. G. & Wonham, W. M. (1989). The control of discrete event systems, *Proceedings of the IEEE* **77**(1): 81–98.
- Ramadge, P. J. & Wonham, W. M. (1987). Supervisory control of a class of discrete event processes, *SIAM Journal on Control and Optimization* **25**(1): 206–230.
- Wonham, W. M. (2007). *Supervisory control of discrete-event systems*, www.control.utoronto.ca/people/profs/wonham/wonham.html.
- Yamalidou, K., Moody, J., Lemmon, M. & Antsaklis, P. (1996). Feedback control of petri nets based on place invariants, *Automatica* **32**(1): 15–28.