

**Universidade Federal de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em
Engenharia Elétrica**

**Modelos de Hammerstein e de Wiener:
conexões com modelos NARX e sua aplicação
em identificação de sistemas não-lineares**

Mara Cristina da Silveira Coelho

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Luis Antonio Aguirre
Co-orientador: Marcelo Vieira Corrêa

Resumo

A identificação de sistemas tem recebido bastante atenção nas últimas décadas, visto que a necessidade de compreender, analisar, prever e controlar sistemas reais tem crescido rapidamente com o avanço tecnológico e industrial.

O objetivo deste trabalho é a identificação de sistemas não-lineares utilizando modelos de Hammerstein e de Wiener, os quais representam o sistema através de blocos interconectados. A maior dificuldade em obter tais modelos consiste em estimar o sinal intermediário aos blocos, o qual é inerente aos modelos.

Visando investigar as propriedades dos modelos de Hammerstein e de Wiener e procurando entender melhor suas características, é apresentado um estudo comparativo entre tais representações e a representação NARX polinomial. Esta se justifica do ponto de vista da análise, pelas técnicas para a extração de informações analíticas disponíveis. Em particular, propõem-se procedimentos para se obter modelos de Hammerstein e de Wiener a partir de modelos polinomiais NARX previamente identificados.

Em termos práticos, é proposto um procedimento para a identificação de modelos de Hammerstein e de Wiener a partir de dados dinâmicos de sistemas reais. Os conceitos de pontos fixos e de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos de termos são usados para auxiliar na detecção da estrutura da função estática não-linear que descreve a característica estática das representações.

Para validar o procedimento desenvolvido, a função estática não-linear é estimada a partir dos dados dinâmicos de um sistema simulado. Posteriormente, dados coletados de sistemas reais são utilizados, tornando-se possível distinguir algumas particularidades deste procedimento.

Os resultados mostram que os procedimentos propostos são viáveis em situações práticas. Discutem-se algumas das dificuldades encontradas e sugerem-se procedimentos alternativos.

Abstract

System identification has received considerable attention over the last decades, since the necessity to understand, analyze, predict and control real systems has grown quickly with the technological and industrial advance.

The objective of this work is the identification of nonlinear systems using Hammerstein and Wiener models, are known as block-oriented model structures. A practical difficulty in obtaining such models consists of estimating the intermediate signal for the blocks, which is inherent to the models.

In order to investigate and better understand the properties of the Hammerstein and Wiener models, a comparative study between such representations and polynomial NARX models is presented. This comparison is carried out analytically. In particular, procedures are considered to obtain Hammerstein and Wiener models from previously identified NARX polynomials.

A procedure for the practical identification of models of Hammerstein and Wiener from dynamic data of real systems is suggested. The concepts of fixed points and term clusters and cluster coefficients are used to help in the determination of the structure of the nonlinear function that describes the static characteristic of the system.

To validate the developed procedure, the nonlinear static function is estimated from the dynamic data of a simulated system. At a second stage, data collected from laboratory systems are used, thus highlighting some particularities of this procedure.

The results show that the suggested procedures are viable in practical situations. Some of the difficulties found are discussed and alternative procedures are suggested.

“Tudo posso naquele que me fortalece.” (Filipenses,4:13)

Agradecimentos

A Deus por ter me dado força e saúde em todos os momentos de minha vida.

Ao Prof. Luis Antonio Aguirre pela orientação, atenção, confiança, incentivo e serenidade.

Ao Prof. Marcelo V. Corrêa pela constante atuação e colaboração no desenvolvimento deste trabalho, mesmo que à distância.

Ao Prof. Eduardo M. A. M. Mendes, pelo incentivo e confiança desde a graduação.

À minha família, em especial à minha mãe Lúcia, pela paciência, à Flávia, Renata e Mayara, pela amizade e companheirismo.

Aos colegas do CPDEE e do MACSIN, em especial, Andreza I. Silva, Dair J. de Oliveira, Erivelton G. Nepomuceno, Gleison F. V. Amaral, Kétia S. Moreira, Marcelo Costa, Márcio F. S. Barroso, Ubiratan Freitas, pela colaboração, amizade e por proporcionarem momentos “mitológicos”.

Ao Cristiano por ter dado um “Ctrl C”.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização de mais uma etapa em minha vida.

Ao apoio financeiro da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), o qual foi de vital importância para a realização deste trabalho.

Conteúdo

Resumo	i
Abstract	ii
Agradecimentos	iv
Conteúdo	v
Lista de Tabelas	viii
Lista de Figuras	ix
Lista de Símbolos	xiii
Nomenclatura	xiv
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	2
1.2 Relevância	3
1.2.1 Apresentação do trabalho	4
2 Identificação de Sistemas	6
2.1 Procedimento para a identificação de sistemas	7
2.2 Experimentação	8
2.3 Detecção de não-linearidades	9
2.3.1 Método de correlação cruzada não-linear	9
2.3.2 Método de autocorrelação não-linear	10
2.4 Representações de sistemas não-lineares	10
2.4.1 Modelos de blocos interconectados	11
2.4.2 Modelos NARMAX	13
2.5 Detecção de Estrutura	15
2.6 Estimação dos Parâmetros	16

2.7	Validação	18
2.7.1	Validação dinâmica	18
2.7.2	Validação estática	19
2.8	Agrupamento de Termos	19
2.9	Característica Estática	22
2.9.1	Pontos fixos	22
2.9.2	Pontos fixos em sistemas não autônomos	24
2.9.3	Estabilidade de pontos fixos	25
2.10	Considerações finais	26
3	Modelos de Blocos Interconectados	27
3.1	Propriedades dos modelos de Hammerstein	29
3.1.1	Pontos Fixos	30
3.1.2	Estabilidade dos Pontos Fixos	31
3.2	Propriedades dos modelos de Wiener	32
3.2.1	Pontos fixos	34
3.2.2	Estabilidade dos Pontos Fixos	35
3.3	Síntese das propriedades	36
3.4	Derivação das representações de Hammerstein e de Wiener . .	37
3.5	Aplicações	39
3.5.1	Aquecedor Elétrico	39
3.5.2	Obtenção de modelos de Hammerstein e de Wiener . .	40
3.5.3	Conversor CC-CC Buck	47
3.5.4	Obtenção de modelos de Hammerstein e de Wiener . .	48
3.6	Discussão	53
4	Estimação da característica estática.	55
4.1	Análise de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupa- mentos	55
4.2	Rotina I	57
4.3	Rotina II	61
4.4	Algoritmo para a estimação da característica estática	64
4.5	Resultados obtidos a partir de dados simulados	66
4.5.1	Estimação da característica estática	67
4.6	Discussão	79
5	Identificação de sistemas usando modelos de Hammerstein e de Wiener	80
5.1	Aquecedor elétrico	80
5.1.1	Estimação da característica estática	81
5.1.2	Modelo de Hammerstein	85

5.1.3	Modelo de Wiener	86
5.1.4	Modelo NARX polinomial	89
5.2	Válvula de controle	91
5.2.1	Estimação da característica estática	92
5.2.2	Modelo de Hammerstein	97
5.2.3	Modelo de Wiener	97
5.2.4	Modelo NARX polinomial	100
5.3	Conversor Buck	103
5.3.1	Estimação da característica estática	104
5.3.2	Modelo de Hammerstein	107
5.3.3	Modelo de Wiener	108
5.3.4	Modelo NARX polinomial	112
5.4	Discussão	114
6	Discussão e Conclusão	116
6.1	Análise usando modelos NARX	116
6.2	Identificação a partir de dados	117
6.3	Proposta para trabalhos futuros	118
	Bibliografia	125
A	Tabelas - capítulo 4	126

Lista de Tabelas

3.1	Validação quantitativa da resposta dinâmica e estática dos modelos de Hammerstein e de Wiener - Aquecedor elétrico. . .	46
3.2	Validação quantitativa da resposta dinâmica e estática dos modelos de Hammerstein e de Wiener - Conversor Buck. . . .	52
5.1	Validação quantitativa da resposta dinâmica e estática dos modelos de Hammerstein e de Wiener - Aquecedor elétrico. . .	91
5.2	Validação quantitativa da resposta dinâmica e estática dos modelos de Hammerstein e de Wiener - válvula de controle. . .	103
5.3	Validação quantitativa da resposta dinâmica e estática dos modelos de Hammerstein e de Wiener - conversor Buck.	112
A.1	Parâmetros obtidos pelo Rotina I.	127
A.2	Parâmetros obtidos pelo Rotina II.	128
A.3	Valor médio e final dos coeficientes dos agrupamentos.	129
A.4	Parâmetros obtidos pelo Rotina I.	130
A.5	Parâmetros obtidos pelo Rotina II.	131
A.6	Valor médio e final dos coeficientes dos agrupamentos.	131
A.7	Parâmetros obtidos pelo Rotina I.	132
A.8	Parâmetros obtidos pelo Rotina II.	132
A.9	Valor médio e final dos coeficientes dos agrupamentos.	133
A.10	Parâmetros obtidos pelo Rotina I.	133
A.11	Parâmetros obtidos pelo Rotina II.	134
A.12	Valor médio e final dos coeficientes dos agrupamentos.	134

Lista de Figuras

2.1	Modelos de blocos interconectados.	12
3.1	Modelo de Hammerstein	29
3.2	Modelo de Wiener	33
3.3	Dados do aquecedor elétrico.	40
3.4	Característica estática do modelo NARX polinomial dada por (3.31) para cada ponto de operação do sistema (\bar{u}, \bar{y})	41
3.5	Função inversa do modelo de Wiener.	42
3.6	Curva estática do modelo de Wiener.	43
3.7	Validação dinâmica do modelo de Wiener, composto por (3.34) e (3.32).	43
3.8	Curva estática do modelo de Hammerstein.	44
3.9	Validação dinâmica do modelo de Hammerstein composto por (3.35) e (3.36).	45
3.10	Validação dinâmica do modelo NARX polinomial (3.29).	46
3.11	Dados para identificação do Conversor Buck.	47
3.12	Curva estática do modelo de Hammerstein de um conversor Buck, dada pela equação (3.40).	49
3.13	Validação dinâmica do modelo de Hammerstein composto por (3.40) e (3.41).	49
3.14	Função inversa do modelo de Wiener do conversor Buck.	50
3.15	Curva estática do modelo de Wiener.	51
3.16	Validação do modelo Wiener composto por (3.44) e (3.42).	52
3.17	Validação dinâmica do modelo NARX polinomial (3.37).	53
4.1	Dados de identificação obtidos pela simulação do modelo (4.10).	67
4.2	Coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados.	69
4.3	Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas da matriz Ψ_e	69
4.4	Coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados.	72

4.5	Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas na matriz Ψ_e	72
4.6	Coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados.	75
4.7	Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas na matriz Ψ_e	75
4.8	Coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados.	77
4.9	Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas da matriz Ψ_e	78
4.10	Curva estática estimada usando a equação (4.15).	79
5.1	Dados de identificação do aquecedor elétrico.	81
5.2	Coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados.	82
5.3	Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas da matriz Ψ_e	82
5.4	Coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados.	84
5.5	Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas da matriz Ψ_e	84
5.6	Característica estática do modelo de Hammerstein dada pela (5.2).	86
5.7	Saída do modelo de Hammerstein composto por (5.2) e (5.3).	87
5.8	Polinômio (5.5) ajustado à inversa da característica estática para o modelo de Wiener.	88
5.9	Validação dinâmica modelo de Wiener composto por (5.6) e (5.4).	88
5.10	Característica estática do modelo de Wiener dada por (5.4).	89
5.11	Característica estática do modelo NARX polinomial dada por (5.8).	90
5.12	Saída do modelo NARX polinomial (5.7).	91
5.13	Dados de identificação da válvula de controle.	92
5.14	Coeficientes dos agrupamentos em função da janela de dados.	93
5.15	Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas da matriz Ψ_e	93
5.16	Coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados.	95
5.17	Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas da matriz Ψ_e	95
5.18	Característica estática estimada para a válvula de controle.	96

5.19	Saída do modelo de Hammerstein composto por (5.10) e (5.11).	98
5.20	Inversa da característica estática do modelo Wiener da válvula.	99
5.21	Característica estática do modelo Wiener da válvula.	99
5.22	Saída do modelo de Wiener composto por (5.14) e (5.12). . . .	100
5.23	Característica estática do modelo NARX polinomial dada por (5.16).	102
5.24	Saída do modelo NARX polinomial (5.7).	102
5.25	Dados do conversor Buck.	104
5.26	Característica estática do conversor Buck.	105
5.27	Coefficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados.	105
5.28	Coefficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas da matriz Ψ_e	106
5.29	Característica estática estimada a partir de (5.19) para o con- versor Buck.	107
5.30	Característica estática estimada a partir de (5.20) usando in- formação <i>a priori</i>	108
5.31	Característica estática do modelo de Hammerstein de um con- versor Buck.	109
5.32	Validação dinâmica do modelo de Hammerstein composto por (5.21) e (5.22).	109
5.33	Função inversa do modelo de Wiener.	110
5.34	Validação dinâmica do modelo de Wiener composto por (5.25) e (5.23)	111
5.35	Característica estática do modelo de Wiener.	111
5.36	Característica estática do modelo NARX polinomial (5.27). . .	113
5.37	Validação dinâmica do modelo NARX polinomial (5.27). . . .	113

Lista de Símbolos

k	Tempo discreto
t	Tempo contínuo
\bar{y}	Saída em estado estacionário
\bar{u}	Entrada em estado estacionário
Df	Matriz Jacobiana
$\text{var}(\cdot)$	Variância
$y(k - j)$	Regressor de Saída
$u(k - i)$	Regressor de Entrada
$v(k)$	Sinal intermediário
$e(k)$	Ruído presente no sistema
n_y	Máximo atraso do sinal de saída
n_u	Máximo atraso do sinal de entrada
n_e	Máximo atraso do sinal de ruído
$f(\cdot)$	Função não-linear
ℓ	Grau de não-linearidade
n_θ	número de termos candidatos a um modelo NARX polinomial
m	grau de não-linearidade dos termos de um modelo NARX polinomial
N	Número de dados
N_i	Número de dados usados na identificação de um modelo
N_v	Número de dados usados na validação de um modelo
ξ	Resíduo
$E[\cdot]$	Operador esperança matemática
Θ	Vetor de parâmetros
T_s	Período de amostragem
τ_m	Constante usada para determinar T_s
$\phi_{y'y'}$	Função de autocorrelação linear do sinal de saída
$\phi_{y'^2y'^2}$	Função de autocorrelação não-linear do sinal de saída
$\Omega_{y^p u^{m-p}}$	Agrupamento de termos
$\Sigma_{y^p u^{m-p}}$	Coefficiente do agrupamento de termos $\Omega_{y^p u^{m-p}}$
Y	Vetor Contendo os Regressores da Saída
$J_{MQ}(\cdot)$	Função Custo
r	coeficiente de correlação linear

Nomenclatura

ARX	Auto-Regressivo com variáveis eXógenas
ERR	taxa de redução de erro (<i>error reduction ratio</i>)
NARMAX	Não-linear Auto-Regressivo de Média Móvel com variáveis eXógenas
NARX	Não-linear Auto-Regressivo com Entrada eXógena
RMSE	raiz do erro médio quadrático (<i>root mean square erro</i>)

Capítulo 1

Introdução

Um dos grandes desafios da identificação de sistemas é obter uma representação matemática que mais se aproxime dos fenômenos a serem investigados, cujas informações estão contidas no conjunto de dados disponíveis.

Os modelos matemáticos permitem descrever a relação entre as variáveis do sistema (Aguirre, 2000a) e também podem ser utilizados no desenvolvimento de controladores (Ogata, 1998). Quando esta relação não quantifica a dependência temporal entre as variáveis, o modelo tem caráter estático sendo representado por equações algébricas. Porém, quando tal relação inclui a resposta transitória, o modelo matemático é dito dinâmico, sendo descrito por equações diferenciais ou equações de diferença.

No início, os modelos usados para representar os sistemas eram, em geral, lineares. Toda a teoria do “Controle Clássico” (Ogata, 1998), bem como técnicas de identificação de sistemas, foram desenvolvidas baseadas nestas aproximações lineares (Ljung, 1987). Os modelos lineares são capazes de aproximar os sistemas em determinadas faixas de operação, porém não conseguem reproduzir os comportamentos dinâmicos não-lineares, tais como bifurcações, comportamentos quase periódicos e caos (Aguirre, 1994b). Logo, a utilização de modelos não-lineares torna-se mais adequada, em certos casos, uma vez que tais modelos podem incorporar as não-linearidades presentes no sistema.

Em (Billings, 1980) são apresentadas algumas representações não-lineares, dentre as quais a série de Volterra (Volterra, 1930) e os modelos de blocos interconectados (Narendra and Gallman, 1966; Gallman, 1976; Hsia, 1976; Billings and Fakhouri, 1978) como uma alternativa bastante atrativa para contornar a complexidade das séries funcionais.

Em meados da década de oitenta, foram apresentados os modelos NARMAX (*Nonlinear Autoregressive Moving Average model with exogenous variables*) polinomiais (Leontaritis and Billings, 1985a,b), que realizam um mapeamento não-linear das entradas e saídas passadas para a saída atual. Den-

tre as principais características destas representações, pode-se citar a relativa facilidade com que a informação analítica sobre a dinâmica do modelo pode ser obtida em certos casos.

Ao lidar com técnicas de controle, os modelos híbridos (constituídos de um bloco dinâmico linear e um bloco estático não-linear) são bem-vindos, pois a dinâmica existente no sistema é representada por um modelo dinâmico linear e a não-linearidade é representada por um modelo estático não-linear (Fruzzetti et al., 1996; Bai, 1998).

Apenas dois tipos de modelos de blocos interconectados serão tratados neste trabalho, os modelos de Hammerstein, que consistem de um bloco estático não-linear seguido por um bloco dinâmico linear e os modelos de Wiener, que consistem de um bloco dinâmico linear seguido de um bloco estático não-linear. Além desses, existe um outro tipo de modelo de blocos interconectados, o modelo de Lur'e, o qual apresenta uma realimentação estática. Estes modelos foram tratados em (Pottmann and Pearson, 1998; Pearson and Pottmann, 2000) e são utilizados para a modelagem de processos com múltiplas saídas em estado estacionário.

Entende-se por múltiplas entradas estacionárias, a situação em que mais que uma entrada estacionária corresponde a um mesmo valor de saída estacionária. E por múltiplas saídas estacionárias, quando para uma mesma entrada estacionária pode-se ter mais do que uma saída estacionária correspondente.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo a identificação de sistemas não-lineares usando modelos de Hammerstein e de Wiener. Como será visto ao longo do texto, a maior dificuldade na obtenção de tais modelos consiste na estimação do sinal intermediário, o qual é inerente às representações de blocos interconectados. Optou-se por obter o sinal intermediário a partir do bloco estático não-linear. Logo, faz-se necessária a estimação da característica estática. Neste contexto, duas abordagens serão apresentadas.

A primeira consiste em mapear as representações de Hammerstein e de Wiener a partir de um modelo NARX polinomial previamente identificado. Sendo apresentadas algumas das propriedades de tais representações na forma polinomial. A segunda consiste de um procedimento para a estimação da característica estática a partir de dados dinâmicos de entrada e saída do sistema a ser investigado, dispensando o uso de algoritmos específicos. Este procedimento permite aliar os métodos paramétricos às representações de blocos interconectados.

1.2 Relevância

O estudo e desenvolvimento de ferramentas para a obtenção de modelos de blocos interconectados tiveram início com o trabalho (Narendra and Gallman, 1966), no qual os parâmetros dos modelos de Hammerstein são estimados separando a parte linear da parte estática não-linear.

A partir do trabalho (Narendra and Gallman, 1966), inúmeros artigos foram publicados, os quais tratam os modelos de Hammerstein como um modelo linear MISO (múltiplas entradas/única saída) estendendo métodos de identificação linear para tais modelos, como em (Chang and Luus, 1971), o qual o método dos mínimos quadrados foi utilizado para estimar os parâmetros do modelo. Este método foi depois estendido para incluir efeitos de “ruído colorido” em (Haist et al., 1973). Também no artigo (Hsia, 1976), foi proposto um esquema não iterativo utilizando o método dos mínimos quadrados.

Análise de correlação, a qual estima o modelo não parametricamente, ou seja, os coeficientes da resposta ao impulso para a parte linear e um conjunto de dados para a parte não-linear, foi usada em (Billings and Fakhouri, 1978). Os autores mencionam que o método requer um ruído “branco” como entrada, o que faz com que este método seja um tanto quanto restrito.

Em (Haber, 1979, 1988) foi proposta uma metodologia, a qual utiliza uma combinação de análise de correlação e o método dos mínimos quadrados para obter os parâmetros dos modelos de Hammerstein. Método das variáveis instrumentais foi usado para identificar modelos de Hammerstein em (Bamberger and Isermann, 1978). O uso do método das variáveis instrumentais foi posteriormente investigado em (Stoica and Söderström, 1982). Identificação de modelos de Hammerstein em malha fechada foi investigado em (Beyer et al., 1979). Identificação on-line de modelos de Hammerstein foi tratada em (Kortmann and Unbehauen, 1987). Em (Greblicki and Pawlak, 1989), a identificação de modelos de Hammerstein é feita usando métodos de correlação e no domínio da frequência. Em (Eskinat et al., 1991), os autores investigam a utilidade de modelos de Hammerstein na representação da dinâmica de processos químicos não-lineares. Diferentes métodos de estimação dos parâmetros de modelos de Hammerstein são testados e uma comparação entre os modelos de Hammerstein e os modelos lineares obtidos é apresentada neste último trabalho.

Métodos para a estimação de modelos de Wiener foram apresentados em (Ledoux, 1996; Hagenblad, 1999). No primeiro, o autor compara técnicas de identificação caixa-preta e caixa-cinza para obter modelos de Wiener. A função inversa do modelo é obtida usando redes neurais. No bloco dinâmico foram utilizados modelos ARX e modelos em espaço de estados. Em (Ha-

genblad, 1999), a não-linearidade estática é estimada através de “Splines” e o bloco dinâmico por modelos FIR.

Aplicações práticas dos modelos de Hammerstein e de Wiener em controle podem ser vistas em (Fruzzetti et al., 1996; Bai, 1998; Abonyi et al., 2000).

1.2.1 Apresentação do trabalho

O trabalho consiste de 6 capítulos, ao longo dos quais encontram-se descritos os aspectos teóricos, metodológicos e conclusivos.

O capítulo 2 revisa alguns dos conceitos teóricos necessários à compreensão dos procedimentos propostos e dos resultados obtidos. Atentando para os principais passos necessários à identificação de sistemas. Neste são apresentadas as representações usadas ao longo deste trabalho.

No capítulo 3, faz-se a análise das principais propriedades das representações de Hammerstein e de Wiener expandidas na forma polinomial. A partir destas propriedades, um procedimento para a obtenção das representações de Hammerstein e de Wiener a partir de modelos NARX polinomial é proposto.

O capítulo 4 descreve um procedimento para a estimação das representações de Hammerstein e de Wiener a partir de dados dinâmicos do sistema a ser identificado. Um dos objetivos iniciais deste trabalho foi o de propor um procedimento para obter modelos de Hammerstein e de Wiener que não exigisse técnicas por demais sofisticadas para a obtenção da função estática. A razão para isso é simples. Conforme descrito no capítulo 3, é possível obter-se bons modelos de Hammerstein e de Wiener a partir de modelos NARX polinomiais, ou seja, para situações em que sofisticação de procedimento não é um problema, o capítulo 3 já apresenta uma boa proposta. O desafio era desenvolver um procedimento que não requisitasse a implementação de técnicas específicas para a identificação de modelos de Hammerstein e de Wiener.

No capítulo 5 o desempenho do procedimento descrito no capítulo 4, é avaliado em três situações distintas. Na primeira, os modelos de Hammerstein e de Wiener são estimados a partir de dados que percorrem uma ampla faixa de operação do sistema. Na segunda, são usados dados que estão fortemente contaminados por ruído. E na terceira, são usados dados dinâmicos que excursionam uma faixa limitada de operação do sistema. Deseja-se encontrar modelos de Hammerstein e de Wiener capazes de aproximar tanto a dinâmica do sistema quanto a resposta estática fora da região dos dados dinâmicos.

No capítulo 6 discutem-se as principais vantagens e desvantagens do procedimento proposto e investigado neste trabalho, a partir das quais são extraídas as principais conclusões e os principais pontos que necessitam de

maiores investigações.

Capítulo 2

Identificação de Sistemas

A identificação de sistemas trata do problema de construção de modelos baseados em dados medidos do sistema.

Um modelo tem como objetivo descrever a relação entre as variáveis do sistema. Quando tal relação for expressa em termos de equações matemáticas, o modelo é dito matemático. Dentre as motivações para a construção de modelos pode-se citar que:

- algumas técnicas de controle avançado requerem um modelo do sistema;
- modelos podem ser usados para análise, simulação e previsão.

A complexidade de um modelo matemático dependerá da aplicação visada, seja na pesquisa, no projeto ou no controle (Eykhoff, 1974).

O levantamento e a formulação matemática de todos os fenômenos que afetam o comportamento de um dado sistema é uma tarefa extremamente complexa. Com isso, é impossível o modelo reproduzir exatamente o comportamento do sistema original. Então, o modelo deve ser capaz de reproduzir o comportamento original da melhor maneira possível, pois caso contrário, todos os esforços posteriores para a análise do modelo e controle do sistema serão pouco eficientes. Dois grandes grupos de técnicas usadas para a obtenção de modelos matemáticos, são:

- modelagem pela física do processo ou modelagem caixa-branca;
- modelagem a partir de dados ou identificação de sistemas.

A modelagem pela física do processo utiliza as leis físicas que descrevem os fenômenos envolvidos, além de conhecimento *a priori* sobre o sistema. Esta é feita somente quando se tem disponível uma visão global do comportamento

do processo. Quando o sistema é grande e complexo e há a necessidade de atuação de controle em tempo real, por exemplo, torna-se inviável a utilização de técnicas de modelagem caixa-branca (Jácome, 1996). Uma alternativa é a utilização de técnicas de identificação de sistemas, através da qual o modelo é obtido a partir de dados de entrada e saída e distúrbios (quando disponível) do sistema. Identificação caixa-cinza utiliza informação *a priori* para auxiliar na determinação da estrutura e/ou estimação dos parâmetros, resultando em modelos mais concisos (Corrêa, 2001).

Vários algoritmos têm sido desenvolvidos para auxiliar a identificação de sistemas usando técnicas caixa-preta (Billings and Fakhouri, 1978; Billings et al., 1989; Chen et al., 1989; Sjöberg et al., 1995).

2.1 Procedimento para a identificação de sistemas

O procedimento para a identificação de sistemas exige o constante envolvimento do modelador, e consiste em:

- projeto e execução de testes para a obtenção dos dados e determinação da taxa de amostragem;
- detecção de não-linearidades no sistema;
- escolha da representação;
- detecção da estrutura do modelo;
- estimação dos parâmetros do modelo;
- validação do modelo.

A obtenção dos dados depende do sistema a ser investigado, bem como das condições experimentais.

A aquisição de dados experimentais deve ser realizada de tal forma que se minimize o efeito do ruído. A modelagem do ruído pode comprometer a validade do modelo encontrado, e uma forma de aliviar este problema é através de cuidados na escolha da estrutura do modelo (Mendes and Billings, 1998). É possível fazer a identificação de um sistema sem a segunda etapa, por exemplo, identificação linear.

2.2 Experimentação

A experimentação consiste na determinação do sinal de entrada, na escolha da taxa de amostragem e na coleta dos dados para a estimação dos parâmetros e ajuste do modelo (Söderström and Stoica, 1989). Esta etapa no processo de identificação de sistemas é a mais importante, pois os resultados posteriores dependerão da qualidade e da quantidade de informações contidas nos dados coletados.

Os dados coletados durante o processo de operação normal do sistema podem, em alguns casos, ser usados na identificação do sistema. Porém, é preferível, sempre que possível, injetar sinais externos no sistema, capazes de excitar toda a dinâmica do sistema durante o processo de identificação. Todas as características estáticas e dinâmicas que não forem excitadas não aparecerão nos dados e o que não estiver nos dados não poderá ser modelado. Dentre os sinais usados na identificação de sistemas podem-se destacar os sinais pseudo-aleatórios (PRBS) e o ruído “branco”, uma vez que estes podem excitar toda a dinâmica do sistema, pois estes sinais são persistentemente excitantes.

A escolha da taxa de amostragem também é importante, pois taxas de amostragem diferentes podem resultar em modelos diferentes. Pode-se classificar os dados com relação à taxa de amostragem em três categorias: subamostrados, bem amostrados e superamostrados. Dados subamostrados tipicamente não contêm informação dinâmica suficiente, impossibilitando assim, a determinação de um modelo para o processo. Um sinal superamostrado, em que sucessivas amostras tendem a estar fortemente correlacionadas, pode proporcionar mau condicionamento numérico da matriz de regressores e dificultar a determinação da estrutura do modelo (Billings and Aguirre, 1995), porém, estas dificuldades podem ser contornadas se estes sinais forem decimados, possibilitando assim, a utilização destes na estimação e validação do modelo.

Para auxiliar na escolha da taxa de amostragem, pode-se empregar um procedimento que consiste em utilizar as funções de autocorrelação linear, $\phi_{y'y'}$, e não-linear, $\phi_{y'^2y'^2}$, da saída do sistema, definidas em (2.1) e (2.2), respectivamente:

$$\phi_{y'y'} = E[(y(k) - \overline{y(k)})(y(k - \tau) - \overline{y(k)})], \quad (2.1)$$

$$\phi_{y'^2y'^2} = E[(y^2(k) - \overline{y^2(k)})(y^2(k - \tau) - \overline{y^2(k)})], \quad (2.2)$$

sendo que $\overline{y(k)}$ e $\overline{y^2(k)}$ representam os valores médios, E a esperança matemática e o apóstrofe indica que o sinal teve sua média removida.

A partir das funções de correlação (2.1) e (2.2), pode-se determinar a seguinte constante:

$$\tau_m = \min\{\tau_{y'}, \tau_{y'2}\}. \quad (2.3)$$

sendo $\tau_{y'}$ o instante do primeiro mínimo de $\phi_{y'y'}$ e $\tau_{y'2}$ o instante do primeiro mínimo de $\phi_{y'2y'2}$. Desta forma, pode-se determinar a taxa de amostragem, T_s , através da seguinte relação (Billings and Aguirre, 1995):

$$\frac{\tau_m}{20} \leq T_s \leq \frac{\tau_m}{10}. \quad (2.4)$$

Em alguns casos, este intervalo pode ser relaxado para:

$$\frac{\tau_m}{25} \leq T_s \leq \frac{\tau_m}{5}. \quad (2.5)$$

2.3 Detecção de não-linearidades

A existência de não-linearidades no sistema pode ser verificada a partir de testes não paramétricos, utilizando apenas os sinais coletados, ou seja, estes testes são realizados independentes do tipo de representação e da estrutura. Dentre os testes para detectar não-linearidade pode-se citar: testes em regime permanente, testes do valor médio da saída, testes no domínio da frequência, testes no domínio do tempo e testes de correlação (Haber and Keviczky, 1985), sendo que os dois últimos destacam-se pela simplicidade e eficiência.

2.3.1 Método de correlação cruzada não-linear

Inicialmente, o método de correlação é aplicado em sinais de entrada e saída normalizados, dados por:

$$u'(k) = \frac{[u(k) - \overline{u(k)}]}{\text{var}(u(k))}, \quad (2.6)$$

$$y'(k) = \frac{[y(k) - \overline{y(k)}]}{\text{var}(y(k))}, \quad (2.7)$$

tal que, $\overline{u(k)}$ e $\overline{y(k)}$, representam os valores médios da entrada e da saída do sistema, respectivamente, e $\text{var}(\cdot)$, corresponde à variância de cada sinal.

Posteriormente, define-se a variável $x(k)$, tal que:

$$x(k) = \frac{[u'^2(k) - \overline{u'^2(k)}]}{\text{var}(u'^2(k))}. \quad (2.8)$$

Considerando a seguinte função de correlação:

$$\phi_{xy'}(\tau) = E[x(t + \tau)y'(t)], \quad (2.9)$$

tem-se que se o sistema for linear, (Billings and Voon, 1983)

$$\phi_{xy'}(\tau) = 0, \quad \forall \tau. \quad (2.10)$$

2.3.2 Método de autocorrelação não-linear

Para a variável $y'(k)$ definida na equação (2.7) e a variável $\nu(k)$, definida como:

$$\nu'(k) = \frac{[y'^2(k) - \overline{y'^2(k)}]}{\text{var}(y'^2(k))}, \quad (2.11)$$

e a função de correlação dada por:

$$\phi_{\nu y'}(\tau) = E[\nu(t + \tau)y'(t)], \quad (2.12)$$

tem-se que o sistema será considerado linear, se (Billings and Voon, 1983):

$$\phi_{\nu y'}(\tau) = 0, \quad \forall \tau. \quad (2.13)$$

Pode-se notar que os testes apresentados procuram verificar se os dados satisfazem certas propriedades de sistemas lineares, logo, se tais propriedades não forem detectadas deve-se utilizar um modelo não-linear para representar o sistema.

2.4 Representações de sistemas não-lineares

Anterior à determinação da estrutura, deve-se escolher qual tipo de representação será usada. Há um vasto número de representações para sistemas não-lineares e a escolha de qual usar e em que circunstância, parecem ser questões que estão longe de serem resolvidas. A escolha do tipo de representação depende principalmente da finalidade do modelo e das ferramentas disponíveis para a sua obtenção, bem como das informações disponíveis sobre o sistema. Sabe-se que para algumas representações não há uma forma sistemática para se detectar a melhor estrutura do modelo (Cassini, 1999).

Dentre as representações não-lineares pode-se destacar: modelos baseados em redes neurais (Braga et al., 2000; Haykin, 1994; Amaral, 2001), modelos NARMAX polinomiais (Barroso, 2001), modelos contínuos (Freitas, 2001), Wavelets (Billings and Coca, 1999a,b). Além destas, outras representações

podem ser utilizadas, como os modelos de blocos interconectados (Narendra and Gallman, 1966; Billings, 1980), os quais são o foco deste trabalho. Em (Billings, 1980), são citados alguns modelos mais usados na época para representar sistemas não-lineares.

A representação de sistemas não-lineares teve início por volta de 1930, quando Volterra mostrou que para um sistema não-linear invariante no tempo, o qual gera uma saída contínua e limitada, $y(t)$, quando excitado por uma entrada também contínua e limitada, $u(t)$, a relação entre a entrada e a saída pode ser expressa como (Volterra, 1930):

$$\begin{aligned} y(t) = h_0 + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1)u(t - \tau_1)d\tau_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)u(t - \tau_1)u(t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \\ + \dots + \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n)d\tau_1 \dots d\tau_n. \end{aligned} \quad (2.14)$$

A equação (2.14) é denominada Série de Volterra, e a função $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ é chamada *kernel* de Volterra.

A série de Volterra, apesar de sua ampla aplicabilidade na representação de sistemas não-lineares, possui algumas limitações, tal como o grande número de parâmetros requerido para explicar um simples sistema não-linear, o que acarreta em um grande esforço computacional. Este fato é consequência da série de Volterra mapear as entradas passadas para a saída atual $y(t)$. Uma forma de reduzir o número de parâmetros é utilizar valores da saída e da entrada para determinar $y(t)$, ou seja, usar recorrência ou auto-regressão da saída. Os modelos NARMAX têm essas características (Aguirre, 2000b).

2.4.1 Modelos de blocos interconectados

Os modelos de blocos interconectados representam o sistema através de blocos interconectados. Em um dos blocos a não-linearidade do sistema é modelada por uma função estática não-linear e no outro bloco modela-se a dinâmica através de um modelo linear.

A disposição destes blocos define modelos com comportamento dinâmico diferente, como será mostrado no capítulo 3. Quando o bloco estático precede o bloco dinâmico linear, este é denominado modelo Hammerstein, mostrado pela Figura 2.1 (a). Em modelos Wiener, o bloco dinâmico linear precede o bloco estático não-linear, como mostra a Figura 2.1 (b).

Um tipo menos comum de modelo de blocos interconectados denominado modelo de Lur'e, apresenta realimentação estática e é útil na modelagem de processos com múltiplas saídas em estado estacionário (Pottmann and Pearson, 1998; Pearson and Pottmann, 2000). Este modelo é constituído por

uma não-linearidade estática como realimentação do bloco dinâmico linear, conforme ilustrado na Figura 2.1 (c).

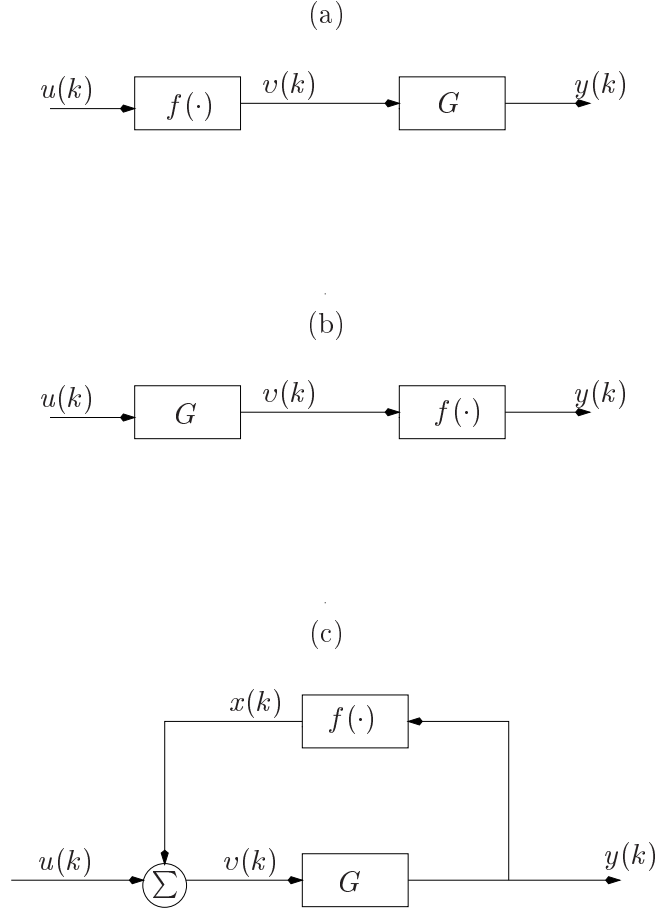


Figura 2.1: Modelos de blocos interconectados. Em (a) modelo de Hammerstein, em (b) modelo de Wiener e em (c) modelo com realimentação estática, denominado modelo de Lur'e.

Nesta figura, $f(\cdot)$ é uma função não-linear algébrica (estática) e G um modelo linear dinâmico.

O bloco dinâmico linear, no presente trabalho, é representado por um modelo ARX (*AutoRegressive with eXogenous variables*), de ordem n_y , dado por:

$$y(k) = \sum_{j=1}^{n_y} \theta_j y(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i u(k-i), \quad (2.15)$$

e o bloco estático não-linear por uma função polinomial ou racional, $f(\cdot)$.

No capítulo 3, algumas propriedades sobre as representações Hammerstein e Wiener descritas na forma polinomial, serão extraídas, tais como número de saída e entrada estacionárias, com o intuito de restringir a derivação das representações Hammerstein e Wiener a partir de modelos NARX polinomiais.

2.4.2 Modelos NARMAX

O modelo NARMAX (Nonlinear AutoRegressive Moving Average with eXogenous variables) é uma derivação não-linear da representação linear ARMAX (AutoRegressive Moving Average with eXogenous variables). Os modelos NARMAX foram introduzidos em (Leontaritis and Billings, 1985b,a), e realizam o mapeamento não-linear das entradas e saídas passadas para a saída atual, $y(k)$, dada por:

$$y(k) = F[(y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-1), \dots, u(k-n_u+1), e(k-1), \dots, e(k-n_e))] + e(k), \quad (2.16)$$

sendo que os sinais de entrada, saída e o ruído aditivo são representados, respectivamente por $u(k)$, $y(k)$ e $e(k)$, com atrasos máximos de n_u , n_y e n_e . $F(\cdot)$ é uma função não-linear, que pode assumir uma variedade de formas, tais como, racional e polinomial. Esta última é satisfatória em muitos casos e é aqui utilizada. A justificativa teórica do uso de modelos NARMAX polinomiais pode ser encontrada em (Chen and Billings, 1989a), onde é mostrado que existe uma função polinomial de grau ℓ que aproxima o sistema original com uma boa exatidão. Uma das mais importantes vantagens do modelo NARMAX polinomial é que este é linear nos parâmetros, possibilitando assim, o uso do método dos mínimos quadrados na estimação dos mesmos.

O modelo NARMAX polinomial é obtido expandindo-se a função F como um polinômio de grau ℓ , tal que:

$$y(k) = \theta_0 + \sum_{i_1=1}^n \theta_{i_1} x_{i_1}(k) + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=i_1}^n \theta_{i_1 i_2} x_{i_1}(k) x_{i_2}(k) + \dots + \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_\ell=i_{\ell-1}}^n \theta_{i_1 \dots i_\ell} x_{i_1}(k) \dots x_{i_\ell}(k) + e(k), \quad (2.17)$$

sendo que $n = n_y + n_u + n_e$, θ_i são os parâmetros a serem estimados e

$$x_1(k) = y(k-1), x_2(k) = y(k-2), \dots, x_{n_y+1}(k) = u(k-1), \dots, x_{n_y+n_u+1}(k) = e(k-1), \dots, x_n(k) = e(k-n_e).$$

O número total de termos candidatos, n_θ , em um modelo NARMAX polinomial monovariável é dado pela seguinte relação (Korenberg et al., 1988):

$$n_\theta = M + 1,$$

$$M = \sum_{i=1}^{\ell} n_i, \quad n_i = \frac{n_{i-1}(n_y + n_u + n_e + i - 1)}{i}, \quad n_0 = 1. \quad (2.18)$$

Verifica-se que o número de termos candidatos cresce rapidamente de acordo com o grau de não-linearidade ℓ e com os atrasos máximos da entrada, saída e do ruído, n_u , n_y e n_e , respectivamente. Quando o modelo é multivariável, n_θ , também dependerá do número de entradas e saídas.

Se todos os termos candidatos forem incluídos no modelo, como demonstra a equação (2.18), este poderá conter muitos termos, proporcionando, na maioria das vezes, mau condicionamento da matriz de regressores. Uma maneira de contornar este problema é determinar qual a estrutura que melhor se ajusta às informações disponíveis sobre o sistema em questão. Este procedimento é chamado de detecção ou escolha da estrutura. No contexto deste trabalho, objetiva-se obter a melhor estrutura que descreva aspectos dinâmicos e estáticos do sistema.

A generalização do modelo NARMAX (2.16) para o caso multivariável, é dada por (Billings et al., 1989):

$$y(k) = F[(\mathbf{y}(k-1), \dots, \mathbf{y}(k-n_y), \mathbf{u}(k-1), \dots, \mathbf{u}(k-n_u), \mathbf{e}(k-1), \dots, \mathbf{e}(k-n_e))] + \mathbf{e}(k), \quad (2.19)$$

sendo, $F(\cdot)$ uma função vetorial não-linear, $\mathbf{y}(k)$ o vetor de saída com atraso máximo n_y , $\mathbf{u}(k)$ o vetor de entrada com atraso máximo n_u e $\mathbf{e}(k)$ o vetor de ruído com atraso máximo n_e , tal que,

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_m(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_r(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}(k) = \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \\ \vdots \\ e_m(k) \end{bmatrix}.$$

Um caso particular do modelo NARMAX polinomial monovariável, que não tem modelo de ruído, é conhecido como modelo NARX polinomial e é dado por:

$$y(k) = F^\ell[(y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-1), \dots, u(k-n_u+1))] + e(k), \quad (2.20)$$

sendo F uma função polinomial de grau ℓ .

Técnicas para detecção da estrutura, validação dos modelos e métodos para a estimação dos parâmetros baseados no algoritmo dos mínimos quadrados têm sido desenvolvidos nas últimas décadas para ajustar os modelos NARX polinomiais a sistema não-lineares.

2.5 Detecção de Estrutura

A detecção da estrutura é uma etapa extremamente importante e difícil no processo de identificação de sistemas, visto que as características dinâmicas e estáticas que serão extraídas estão ligadas a estrutura do modelo estimado (Aguirre and Billings, 1995a).

A presença de termos desnecessários no modelo pode proporcionar instabilidade numérica e ocasionar comportamentos dinâmicos espúrios ao sistema. Além do número excessivo de termos, efeitos espúrios podem ocorrer devido a sobreparametrização do modelo em relação ao número de pontos fixos¹ (Aguirre and Mendes, 1996; Mendes and Billings, 1998).

No contexto de identificação caixa-preta, alguns métodos podem ser usados para auxiliar na determinação da estrutura, tais como: o critério de informação de Akaike, AIC (Akaike, 1974), agrupamento de termos (Aguirre, 1994a; Aguirre and Billings, 1995b) e a taxa de redução de erro, ERR, (Billings et al., 1989; Chen et al., 1989).

A taxa de redução de erro, ERR, atribui a cada termo candidato um valor correspondente à contribuição deste na explicação do valor quadrático médio dos dados de saída, ou seja, quantifica a redução no erro da saída do modelo devido à introdução de cada termo. Em identificação caixa-cinza, estes métodos podem ser usados juntamente com alguma informação *a priori* sobre o sistema, tal como o número de pontos fixos ou o conhecimento da curva estática do sistema (Corrêa, 2001).

O critério de informação de Akaike, AIC, é um critério estatístico, que verifica a redução na variância dos resíduos à medida que termos são acrescentados ao modelo, tal que:

$$AIC = N\ln(\text{var}(\xi(t))) + 2n_\theta. \quad (2.21)$$

sendo N o número de dados de treinamento, $\text{var}(\xi(t))$ a variância dos resíduos e n_θ o número de termos no modelo.

Conceitos de agrupamentos de termos para auxiliar na determinação da estrutura de modelos NARX foi usado em (Jácome, 1996; Cassini, 1999).

¹A definição de pontos fixos é apresentada na seção 2.9.1.

No capítulo 4 será proposto um procedimento que utiliza tais conceitos e a análise de agrupamentos de termos para auxiliar na escolha da estrutura da função não-linear, a qual descreve a característica estática, usando dados dinâmicos do sistema.

A composição destes três métodos aplicados na identificação de um sistema real pode ser visto em (Cassini, 1999).

2.6 Estimação dos Parâmetros

Após determinar qual o tipo de representação e qual a sua estrutura, o próximo passo no processo de identificação de sistemas, consiste em estimar os parâmetros do modelo de modo a minimizar a diferença entre a predição e a saída estimada pelo modelo.

Como este trabalho discorre acerca dos modelos NARX polinomiais e modelos de blocos interconectados, que utilizam modelos ARX no bloco dinâmico linear, esta seção apresenta o procedimento para estimar os parâmetros do modelo NARX polinomial que minimiza a função custo do algoritmo dos mínimos quadrados.

Inicialmente, tem-se que o modelo dado pela equação (2.17), pode ser representado como:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_\theta} \psi_i(k-1)\theta_i + e(k) \quad (2.22)$$

sendo $y(k)$ a saída atual do modelo, $\psi(k-1)$ são os termos que constituem a matriz de regressores Ψ tomadas até o instante $k-1$, θ os parâmetros a serem estimados e $e(k)$ o ruído. O número de termos no modelo é representado por n_θ .

Desprezando o termo de ruído, pode-se reescrever (2.22) em sua forma matricial:

$$\mathbf{y} = \Psi \Theta, \quad (2.23)$$

sendo que,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} \Psi^T(0) \\ \Psi^T(1) \\ \vdots \\ \Psi^T(N-1) \end{bmatrix}.$$

e Θ o vetor de parâmetros.

A saída do modelo, predita um passo à frente é dada por²:

$$\begin{aligned}\hat{y}(k) &= \sum_{i=1}^{n_\theta} \psi_i(k-1)\hat{\theta}_i \\ &= \psi^T(k-1)\hat{\Theta}.\end{aligned}\quad (2.24)$$

O erro entre o valor estimado e o valor medido da saída é denominado resíduo e é representado por:

$$\xi(k) = y(k) - \hat{y}(k) = y(k) - \psi^T(k-1)\hat{\Theta}.\quad (2.25)$$

Utilizando-se um número maior de amostras, N , do que o número de regressores n_θ , tem-se um sistema de equações sobre determinado, resultando em uma matriz Ψ não quadrada, o que impossibilita a estimação de Θ a partir da inversão de Ψ em (2.23). Dessa forma, define-se um algoritmo para a estimação de $\hat{\Theta}$ que minimize a soma dos quadrados do erro dado pela seguinte função custo:

$$J_{MQ} = \sum_{i=1}^N \xi(i)^2 = \xi^T \xi,\quad (2.26)$$

Substituindo (2.25) em (2.26), tem-se:

$$\begin{aligned}J &= (\mathbf{y} - \Psi\hat{\Theta})^T(\mathbf{y} - \Psi\hat{\Theta}) \\ &= \mathbf{y}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\Psi\hat{\Theta} - \hat{\Theta}^T\Psi^T\mathbf{y} - \hat{\Theta}^T\Psi^T\Psi\hat{\Theta}.\end{aligned}\quad (2.27)$$

A minimização da função custo J_{MQ} em relação ao vetor de parâmetros $\hat{\Theta}$ é feita resolvendo-se $\partial J_{MQ}/\partial \hat{\Theta} = 0$, cuja solução é dada por:

$$\hat{\Theta} = (\Psi^T\Psi)^{-1}\Psi^T\mathbf{y}.\quad (2.28)$$

A equação (2.28) é denominada estimador dos mínimos quadrados clássico³.

Se a matriz de covariância dos regressores for singular ou mal condicionada, esta estará sujeita a problemas numéricos que podem afetar a estabilidade do algoritmo dos mínimos quadrados⁴. Para contornar este problema, pode-se utilizar métodos numéricos, os quais ortogonalizam a matriz Ψ , ou seja, os regressores não serão mais correlacionados. Dentre estes, pode-se citar o método da transformação de Householder (Ljung, 1987).

²O símbolo $\hat{\cdot}$ significa que são valores a serem estimados.

³No presente trabalho a equação (2.28) não é implementada, utilizou-se o método de transformação de Householder e a função `pinv.m` do MATLAB.

⁴O mau condicionamento é devido à alta correlação entre as colunas dos regressores da matriz Ψ .

2.7 Validação

A validação em identificação de sistemas consiste em verificar quão bom é um modelo para explicar um sistema. Para isso, deve-se ter em mente qual é a finalidade do modelo. Neste trabalho, pretende-se obter modelos de Hammerstein e de Wiener que sejam capazes de aproximar tanto a dinâmica quanto a característica estática do sistema em questão.

2.7.1 Validação dinâmica

A validação dinâmica tem por finalidade verificar se o modelo estimado é capaz de recuperar a dinâmica do sistema em questão. A capacidade de generalização de um modelo deve ser analisada usando uma massa de dados de validação diferente da massa de dados de identificação. Pois assim é possível verificar se o modelo consegue explicar uma outra massa de dados do sistema.

Para validar um modelo dinamicamente, pode-se usar a simulação livre do mesmo, que consiste em usar um conjunto de dados do sistema, os de validação, e as previsões passadas da saída na matriz de regressores. Para ilustrar tal procedimento, considere a seguinte matriz de regressores (Aguirre, 2000b):

$$\psi^T(k-1) = \begin{bmatrix} y(k-1) & y(k-2) & u(k-1) & u(k-2) \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Inicialmente, a saída do modelo, é estimada usando valores medidos da saída, ou seja, para $k = 3$, $y(1)$ e $y(2)$ são usados, tal como:

$$\hat{y}(3) = \begin{bmatrix} y(2) & y(1) & u(2) & u(1) \end{bmatrix} \hat{\theta},$$

em seguida, tem-se:

$$\hat{y}(4) = \begin{bmatrix} \hat{y}(3) & y(2) & u(3) & u(2) \end{bmatrix} \hat{\theta},$$

$$\hat{y}(5) = \begin{bmatrix} \hat{y}(4) & \hat{y}(3) & u(4) & u(3) \end{bmatrix} \hat{\theta},$$

$$\hat{y}(6) = \begin{bmatrix} \hat{y}(5) & \hat{y}(4) & u(5) & u(4) \end{bmatrix} \hat{\theta},$$

A saída do modelo obtida a partir da simulação livre é representada em um gráfico juntamente com os dados de validação da saída do sistema, e uma comparação visual pode ser feita.

A validação quantitativa do desempenho do modelo é feita usando-se o índice RMSE (raiz do erro médio quadrático), que compara a saída predita do modelo, ou predição do modelo com a média temporal do sinal de saída do sistema. O índice RMSE é dado por:

$$RMSE = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y})^2}}, \quad (2.30)$$

sendo que $\hat{y}(k)$ é a simulação livre da saída do modelo e \bar{y} é o valor médio do sinal de saída do sistema. O desempenho do modelo é considerado bom se o índice RMSE for menor do que um, o que indica que é melhor em termos de previsão do que o preditor trivial de média (Aguirre, 2000b).

2.7.2 Validação estática

Para verificar se o modelo foi capaz de recuperar a característica estática do sistema, este pode ser validado tanto quantitativamente quanto qualitativamente. A validação qualitativa é feita a partir de uma inspeção visual da curva estática do sistema comparada à estimada pelo modelo.

A medida quantitativa do ajuste estático do modelo é dada pelo índice de correlação linear, r , entre as funções estáticas do sistema e do modelo. O coeficiente r quantifica o grau de associação linear entre duas variáveis. O valor de r está entre -1 e 1, sendo que quanto maior for o módulo de r , maior a correlação linear entre as variáveis, o que denota uma boa qualidade de ajuste na curva estática⁵. O valor de r para duas variáveis x e y , é dado por:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (2.31)$$

sendo, σ_{xy} a covariância entre x e y e σ_x e σ_y os desvios-padrão de x e y , respectivamente.

2.8 Agrupamento de Termos

Um agrupamento de termos é definido como o conjunto de todos os agrupamentos do mesmo tipo e seus coeficientes como a soma de todos os coeficientes do agrupamento (Aguirre, 1994a).

⁵Se r assumir valor negativo, implica que ele foi capaz de descrever o “formato” da curva só que “em sentido contrário.”

Considere a função F do modelo NARX dado pela equação (2.20) como uma função polinomial com grau de não-linearidade ℓ . A expansão de tal modelo composto por termos com graus de não-linearidade variando na faixa $1 \leq m \leq \ell$ é mostrada na equação (2.32). Cada termo de grau de não-linearidade m contém um fator de ordem p em $y(k - n_i)$ e um fator de ordem $(m - p)$ em $u(k - n_i)$, e um coeficiente $\theta_{p,m-p}(n_1, \dots, n_m)$, tal como:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^m \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} \theta_{p,m-p}(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^p y(k - n_i) \prod_{i=1}^{m-p} u(k - n_i), \quad (2.32)$$

sendo,

$$\sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} \equiv \sum_{n_1=1}^{n_y} \equiv \sum_{n_1=1}^{n_y} \dots \sum_{n_m=1}^{n_u}, \quad (2.33)$$

e n_y e n_u os atrasos máximos da saída e da entrada, respectivamente. A massa de dados $u(k)$ e $y(k)$ foi obtida a partir do conjunto de dados contínuos $u(t)$ e $y(t)$ com taxa de amostragem igual a $\frac{1}{T_s}$.

Por exemplo, considere a equação (2.32) para o grau de não-linearidade $\ell = 2$ (Cassini, 1999):

$$\begin{aligned} y(k) &= \theta_{0,0} + \sum_{n_1=1}^{n_y} \theta_{1,0}(n_1) y(k - n_1) + \sum_{n_1=1}^{n_u} \theta_{0,1}(n_1) u(k - n_1) + \\ &\quad \sum_{n_1=1}^{n_y} \sum_{n_2=1}^{n_u} \theta_{2,0}(n_1, n_2) y(k - n_1) y(k - n_2) + \\ &\quad \sum_{n_1=1}^{n_y} \sum_{n_2=1}^{n_u} \theta_{1,1}(n_1, n_2) y(k - n_1) u(k - n_2) + \\ &\quad \sum_{n_1=1}^{n_y} \sum_{n_2=1}^{n_u} \theta_{0,2}(n_1, n_2) u(k - n_1) u(k - n_2). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Se considerado que o sistema é assintoticamente estável em torno do ponto de operação, com todas as derivadas da entrada e da saída nulas, pode-se assumir que:

$$\left. \begin{aligned} y(k) &= y(k-1) = y(k-2) = \dots = y(k-n_y) \\ u(k) &= u(k-1) = u(k-2) = \dots = u(k-n_u) \end{aligned} \right\},$$

então a equação (2.32) pode ser reescrita como:

$$y(k) = \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} \theta_{p, m-p}(n_1, \dots, n_m) \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^m y(k-1)^p u(k-1)^{m-p}. \quad (2.35)$$

As constantes $\sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} \theta_{p, m-p}(n_1, \dots, n_m)$ na equação (2.35) são os coeficientes dos agrupamentos de termos $\Sigma_{y^p u^{m-p}}$ que contém termos da forma $y(k-i)^p u(k-j)^{m-p}$ para $m = 0, \dots, \ell$ e $p = 0, \dots, m$. Tais coeficientes são denominados coeficientes de agrupamentos, sendo representados por $\Sigma_{y^p u^{m-p}}$ (Aguirre and Billings, 1995b).

O conjunto de termos candidatos para um modelo NARX de grau de não-linearidade ℓ é constituído pela união de todos os agrupamentos possíveis, tal que:

{ agrupamentos possíveis } = $\Omega_0 \cup \Omega_y \cup \Omega_u \cup \Omega_{y^2} \cup \dots \cup$ todas as possíveis combinações para o grau de não-linearidade ℓ .

Por exemplo, considere o seguinte modelo NARX polinomial:

$$\begin{aligned} y(k) = & 0,7210 + 1,3920y(k-1) - 0,4235y(k-2) + 0,5537u(k-1) \\ & + 0,0454u(k-1)^2 + 0,0218u(k-2)^2 - 0,4388u(k-2)y(k-1) \\ & + 0,3756u(k-2)y(k-2) + 0,4424y(k-1)^2 + 0,0010y(k-2)^2 \\ & - 0,5790y(k-1)^3 + 0,7759y(k-1)y(k-2)^2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

que pode ser descrito na forma da equação (2.32) com,

$$\begin{array}{ll} \theta_{0,0} = 0,7210 & \theta_{1,0}(1) = 1,3920 \\ \theta_{1,0}(2) = -0,4235 & \theta_{0,1}(1) = 0,5537 \\ \theta_{0,2}(1,1) = 0,0454 & \theta_{0,2}(2,2) = 0,0218 \\ \theta_{1,1}(1,2) = -0,4388 & \theta_{1,1}(2,2) = 0,3756 \\ \theta_{2,0}(1) = 0,4424 & \theta_{2,0}(2,2) = 0,0010 \\ \theta_{3,0}(1,1,1) = -0,5790 & \theta_{3,0}(1,2,2) = 0,7759. \end{array}$$

Os coeficientes dos agrupamentos de termos, $\Omega_0, \Omega_y, \Omega_u, \Omega_{u^2}, \Omega_{yu}, \Omega_{y^2}$ e Ω_{y^3} , do modelo NARX dado pela equação (2.36) são, respectivamente:

Logo, um agrupamento de termos $\Omega_{y^p u^{m-p}}$, é um conjunto de termos da forma $y(k-i)^p u(k-j)^{m-p}$ para $m = 0, \dots, \ell$ e $p = 0, \dots, m$, e o seu respectivo coeficiente de agrupamento, $\Sigma_{y^p u^{m-p}}$, é o somatório dos coeficientes de todos os termos no modelo que estão contidos em tais agrupamentos. Ressalta-se que, como os coeficientes dos agrupamentos de termos dependem do tempo de amostragem, no limite quando $T_s \rightarrow 0$, todos os termos de um agrupamento

$$\begin{aligned}
\Sigma_0 &= 0,7210 \\
\Sigma_y &= \theta_{1,0}(1) + \theta_{1,0}(2) = 0,9685 \\
\Sigma_u &= \theta_{0,1}(1) = 0,5537 \\
\Sigma_{u^2} &= \theta_{0,2}(1,1) + \theta_{0,2}(2,2) = 0,0672 \\
\Sigma_{yu} &= \theta_{1,1}(1,2) = \theta_{1,1}(2,2) = -0,0632 \quad \Sigma_{y^2} = \theta_{2,0}(1,1) + \theta_{2,0}(2,2) = 0,4434 \\
\Sigma_{y^3} &= \theta_{3,0}(1,1,1) + \theta_{3,0}(1,2,2) = 0,1969
\end{aligned}$$

tornam-se equivalentes, e todos os coeficientes de agrupamentos anulam-se, exceto Σ_y , que no limite é igual a unidade, ou seja,

$$\begin{aligned}
\lim_{T_s \rightarrow 0} \Sigma_y &= 1, \\
\lim_{T_s \rightarrow 0} \Sigma_{y^p u^{m-p}} &= 0.
\end{aligned}$$

A análise de agrupamentos de termos, a qual auxilia na determinação da estrutura de um modelo para a estimação da função estática não-linear será discutida no capítulo 4.

2.9 Característica Estática

A relação entre a entrada e a saída de um sistema em estado estacionário, designados por \bar{u} e \bar{y} , respectivamente, de modelos NARX polinomiais, pode ser estimada utilizando os conceitos de pontos fixos e de agrupamento e coeficientes de agrupamento de termos.

2.9.1 Pontos fixos

Os pontos fixos de um modelo discreto autônomo são definidos como os pontos nos quais $y(k) = y(k+i)$, $i \in Z$ e podem ser determinados utilizando o conceito de agrupamentos e coeficientes de agrupamentos de termos (Aguirre and Mendes, 1996). O número de pontos fixos, tanto para o caso autônomo quanto para o não autônomo, depende do grau de não-linearidade dos regressores da saída.

Considerando somente a parte auto regressiva do modelo NARX polinomial dado em (2.20), e utilizando a definição de pontos fixos, pode-se

reescrever o modelo NAR polinomial em regime estático como se segue:

$$\begin{aligned} y(k) = & \theta_{0,0} + y(k) \sum_{n_1=1}^{n_y} \theta_{1,0}(n_1) + y(k)^2 \sum_{n_1, n_2}^{n_y, n_y} \theta_{2,0}(n_1, n_2) + \dots + \\ & + \dots + y(k)^\ell \sum_{n_1, n_\ell}^{n_y, n_y} \theta_{\ell,0}(n_1, \dots, n_\ell). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Omitindo o argumento k , e utilizando o conceito de coeficiente de agrupamento de termos, a equação (2.37) pode ser expressa como:

$$\Sigma_{y^\ell} y^\ell + \dots + \Sigma_{y^2} y^2 + (\Sigma_y - 1)y + \Sigma_0 = 0, \quad (2.38)$$

em que $\Sigma_0 = \theta_{0,0}$ é o termo constante do modelo.

A localização dos pontos fixos do modelo NAR polinomial é obtida calculando-se as raízes de (2.38). Dessa forma, para um modelo polinomial autônomo com grau de não-linearidade ℓ , o número de pontos fixos é igual a ℓ se $\Sigma_y^\ell \neq 0$.

A equação (2.38), pode ser expressa como (2.39), quando $\Sigma_0 = 0$. Neste caso, o modelo NAR possui um ponto fixo trivial e $\ell - 1$ pontos fixos diferentes de zero,

$$[\Sigma_{y^\ell} y^{\ell-1} + \dots + \Sigma_{y^2} y + (\Sigma_y - 1)]y = 0. \quad (2.39)$$

Por exemplo, considere um modelo linear cuja forma agrupada é do tipo,

$$(\Sigma_y - 1)y + \Sigma_0 = 0, \quad (2.40)$$

que possui apenas um ponto fixo cuja localização é dada por:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma_0}{1 - \Sigma_y}. \quad (2.41)$$

Modelos quadráticos, cuja representação agrupada é:

$$\Sigma_{y^2} y^2 + (\Sigma_y - 1)y = 0, \quad (2.42)$$

possuem 2 pontos fixos, se $\Sigma_{y^2} \neq 0$, dados por:

$$\bar{y}_{1,2} = \frac{1 - \Sigma_y \pm \sqrt{\Delta}}{2\Sigma_{y^2}}, \quad (2.43)$$

sendo $\Delta = (\Sigma_y - 1)^2 - 4\Sigma_{y^2}\Sigma_0$.

Para modelos polinomiais cúbicos agrupados, que podem ser descritos como,

$$\Sigma_{y^3} y^3 + \Sigma_{y^2} y^2 + (\Sigma_y - 1)y = 0, \quad (2.44)$$

a localização dos seus pontos fixos é dada por (Aguirre and Mendes, 1996):

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= (\Delta_3 + \Delta_2) - \Sigma_{y^2}/(3\Sigma_{y^3}), \\ \bar{y}_{2,3} &= -0,5(\Delta_3 + \Delta_2) - \Sigma_{y^2}/(3\Sigma_{y^3}) \pm j\sqrt{3}(\Delta_3 - \Delta_2)/2,\end{aligned}\quad (2.45)$$

sendo $j = \sqrt{-1}$,

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \sqrt{3}[4(\Sigma_y - 1)^3\Sigma_{y^3} - (\Sigma_y - 1)^2\Sigma_{y^2} - 18(\Sigma_y - 1)\Sigma_0\Sigma_{y^2}\Sigma_{y^3} \\ &\quad + 27\Sigma_0^2\Sigma_{y^3}^2 + 4\Sigma_0\Sigma_{y^2}^3]^{0,5}/\Sigma_{y^3}^2, \\ \Delta_2 &= [\Sigma_{y^2}(\Sigma_y - 1)/6\Sigma_{y^3}^2 - \Sigma_0/2\Sigma_{y^3} - \Sigma_{y^2}^3/27\Sigma_{y^3}^3 - \Delta_1/18]^{1/3} \\ \Delta_3 &= [\Sigma_{y^2}(\Sigma_y - 1)/6\Sigma_{y^3}^2 - \Sigma_0/2\Sigma_{y^3} - \Sigma_{y^2}^3/27\Sigma_{y^3}^3 + \Delta_1/18]^{1/3}.\end{aligned}\quad (2.46)$$

Até o grau de não-linearidade $\ell = 3$, a localização dos pontos fixos de um modelo dinâmico autônomo, pode ser determinada analiticamente, para graus superiores, os pontos fixos podem ser determinados numericamente.

2.9.2 Pontos fixos em sistemas não autônomos

Para modelos discretos não autônomos, os pontos fixos são definidos como aqueles pontos nos quais $\bar{y} = y(k) = y(k+i)$, $i \in Z$ e para um valor constante da entrada $\bar{u} = u(k) = u(k+i)$, $i \in Z$.

Utilizando o conceito de pontos fixos, o modelo NARX polinomial dado na equação (2.35), pode ser escrito como em (2.47):

$$y(k) = \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} \theta_{p,m}(n_1, \dots, n_m) \sum_{m_\ell=0}^{\ell} \sum_{p=0}^m y(k)^p u(k)^{m-p}, \quad (2.47)$$

sendo que m corresponde ao grau de não-linearidade dos termos que varia na faixa $1 \leq m \leq \ell$. Cada termo de grau de não-linearidade m pode conter um fator em $y(k)$ de ordem p , um fator em $u(k)$ de ordem $(m-p)$ com um coeficiente $\theta_{p,m-p}(n_1, \dots, n_m)$ relacionado.

Omitindo o argumento k e usando o conceito de coeficiente de agrupamento de termos, a equação (2.47) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\Sigma_{y^\ell} y^\ell + \sum_{m_\ell=\ell-1}^{\ell} [\Sigma_{u^{m_\ell-(\ell-1)} y^{\ell-1}}] y^{\ell-1} + \dots + \\ + \sum_{m_\ell=p}^{\ell} [\Sigma_{u^{m_\ell-p} y^p} u^{m_\ell-p}] y^p + \dots + \sum_{m_\ell=1}^{\ell} [\Sigma_{u^{m_\ell-1} y} u^{m_\ell-1} - 1] y + \\ + \sum_{m_\ell=1}^{\ell} \Sigma_{u^{m_\ell}} u^{m_\ell} + \Sigma_0 = 0.\end{aligned}\quad (2.48)$$

A localização dos pontos fixos em sistemas não autônomos é diferente da feita para modelos autônomos. Neste caso, a saída em estado estacionário \bar{y} , é obtida para cada entrada correspondente \bar{u} , ou seja, através das raízes da equação (2.48) determina-se os pontos fixos \bar{y} para uma entrada correspondente \bar{u} .

Por exemplo, considere um modelo linear representado na sua forma agrupada como:

$$(\Sigma_y - 1)\bar{y} + \Sigma_u \bar{u} + \Sigma_0 = 0. \quad (2.49)$$

O modelo dado em (2.47), possui apenas um ponto fixo ($\ell = 1$), que é dado por:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma_0 + \Sigma_u \bar{u}}{1 - \Sigma_y}. \quad (2.50)$$

Para o modelo quadrático,

$$\Sigma_{y^2} \bar{y}^2 + (\Sigma_y - 1 + \Sigma_{yu} \bar{u}) \bar{y} + \Sigma_{u^2} \bar{u}^2 + \Sigma_u \bar{u} + \Sigma_0 = 0, \quad (2.51)$$

a localização dos dois pontos fixos, se $\Sigma_{y^2} \neq 0$, são dados por:

$$\bar{y}_{1,2} = \frac{1 - \Sigma_y - \Sigma_{yu} \bar{u} \pm \sqrt{\Delta}}{2\Sigma_{y^2}}, \quad (2.52)$$

tal que $\Delta = (\Sigma_y - 1 + \Sigma_{yu} \bar{u})^2 - 4\Sigma_{y^2}(\Sigma_{u^2} \bar{u}^2 + \Sigma_u \bar{u} + \Sigma_0)$.

Caso $\Sigma_{y^2} = 0$, o modelo quadrático dado em (2.51), possuirá um ponto fixo, tal que,

$$\bar{y} = \frac{\Sigma_0 + \Sigma_u \bar{u} + \Sigma_{u^2} \bar{u}^2}{1 - \Sigma_y - \Sigma_{yu} \bar{u}}. \quad (2.53)$$

Percebe-se pelas equações (2.50), (2.52) e (2.53), que em modelos com variáveis de entrada, tem-se que a localização do ponto fixo dependerá do valor da entrada estacionária correspondente, caracterizando assim, uma curva estática. Portanto, a partir destes modelos é possível determinar a característica estática de sistemas não autônomos usando os conceitos de pontos fixos e de agrupamento e coeficiente de agrupamento de termos. A aplicação destes conceitos na estimação da curva estática será vista no capítulo 4.

2.9.3 Estabilidade de pontos fixos

A estabilidade dos pontos fixos é determinada a partir dos autovalores da matriz Jacobiana avaliada em cada ponto fixo.

O modelo NAR de ordem n_y pode ser reescrito como um mapeamento f : $\Re^{n_y} \rightarrow \Re^{n_y}$ como se segue:

$$y(k) = f(y(k - n_j)), \quad j = 1 \dots n_y, \quad (2.54)$$

sendo $\mathbf{y} \in \Re^{n_y}$ o vetor de estado que, no caso de modelos NAR, é constituído de valores atrasados da variável de saída y . A representação matricial de (2.54) é dada por:

$$\begin{bmatrix} y(k - n_y + 1) \\ y(k - n_y + 2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{f_1}{y(k - n_y)} & \frac{f_2}{y(k - n_y + 1)} & \cdots & \frac{f_{n_y}}{y(k - 1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k - n_y) \\ y(k - n_y + 1) \\ \vdots \\ y(k - 1) \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

em que $\sum_{i=1}^{n_y} f_i = f$ e sendo $f_i/y(k - i) = 0$ caso o termo $y(k - i)$ não faça parte do mapeamento $f(\cdot)$.

Considerando uma linearização em torno de um dado ponto fixo, pode-se escrever (2.55):

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{Df} \times \mathbf{y}(k - 1), \quad (2.56)$$

sendo,

$$\mathbf{Df} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y(k - n_y)} & \frac{\partial f}{\partial y(k - n_y + 1)} & \frac{\partial f}{\partial y(k - n_y + 2)} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y(k - 1)} \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

A estabilidade dos pontos fixos do mapeamento f pode ser analisada determinando-se o Jacobiano definido por (2.57) em cada ponto fixo e calculando os seus respectivos autovalores, que para o caso discreto devem estar situados dentro do círculo de raio unitário. Caso os autovalores sejam estáveis, o ponto fixo é um atrator, caso contrário o mesmo é um repulsor (Fiedler-Ferrara and Prado, 1994). Se existirem pelo menos um autovalor instável e um estável relacionados ao mesmo ponto fixo, tal ponto é denominado de sela.

2.10 Considerações finais

Este capítulo procurou descrever os passos principais no processo de identificação de sistemas. Além de apresentar, sucintamente, algumas das ferramentas que serão utilizadas ao longo do texto para a análise das propriedades e a obtenção de modelos de Hammerstein e de Wiener.

Capítulo 3

Modelos de Blocos Interconectados

Nas últimas três décadas consolidou-se a teoria e a prática de identificação de sistemas. No início, os modelos matemáticos usados para representar os sistemas eram lineares e considerados suficientes, apesar de não conseguirem reproduzir o comportamento dinâmico não-linear dos sistemas sob investigação. A maior parte da teoria e dos procedimentos adotados para projetar controladores para tais sistemas era baseada nestes modelos lineares (Eykhoff, 1974).

O interesse pela modelagem não-linear e o desenvolvimento de ferramentas matemáticas (Billings and Leontaritis, 1981; Billings and Fadzil, 1985; Aguirre and Mendes, 1996; Chen and Billings, 1989b; Chen et al., 1989), para entender o comportamento dos fenômenos não-lineares têm crescido significativamente, uma vez que as técnicas existentes para modelos lineares não conseguem reproduzir toda a gama de comportamentos dinâmicos dos sistemas reais.

Dentre as representações não-lineares podem-se destacar os modelos de blocos interconectados, os quais representam a dinâmica do sistema através de um modelo dinâmico linear e a não-linearidade por uma função estática não-linear. Historicamente, tais modelos surgiram como representações de “transição” entre a teoria linear, já bem desenvolvida, e a teoria envolvendo modelos não-lineares, que ainda estava incipiente.

Os modelos de blocos interconectados foram muito utilizados até em meados da década de oitenta. Naquela época, Billings e Leontaritis em (Leontaritis and Billings, 1985b,a), apresentaram os modelos NARMAX (*Nonlinear Autoregressive Moving Average model with eXogenous inputs*) polinomiais. Estes por sua vez são capazes de representar uma gama de sistemas não-lineares. Várias técnicas de seleção de estrutura e estimação de parâmetros

foram desenvolvidas para tal representação (Leontaritis and Billings, 1985b,a; Aguirre and Mendes, 1996; Corrêa, 2001; Barroso, 2001; Nepomuceno, 2002).

Em meados da década de noventa (Lakshminarayanan et al., 1995; H. L. Duwaisha and Karimb, 1997; Ledoux, 1996; Greblicki, 1996; Fruzzetti et al., 1996; Ikonem and Najim, 1999), apesar da teoria de sistemas não-lineares ter avançado bastante, o interesse por modelos de blocos interconectados ressurgiu. Um dos fatores principais é que a representação do sistema através de blocos interconectados é atrativa para lidar com técnicas de controle. Além disso, análise da estabilidade de um modelo globalmente não-linear pode ser feita através do bloco dinâmico linear.

Como já mencionado no início deste capítulo, modelos de blocos interconectados representam a não-linearidade presente no sistema através de um bloco estático não-linear e a dinâmica através de um bloco dinâmico linear. A maneira com que estes blocos estão dispostos é que diferencia um modelo do outro. Esta diferença na disposição dos blocos acarreta em comportamento dinâmico diferente de um modelo para o outro, como os modelos de Hammerstein e de Wiener.

Nos modelos de Hammerstein, o bloco que contém a não-linearidade estática precede o bloco que contém a dinâmica linear, e nos modelos de Wiener o bloco dinâmico linear precede o bloco estático não-linear.

O maior obstáculo em identificação de sistemas não-lineares usando representações de Hammerstein e de Wiener é que o sinal intermediário aos blocos não está disponível, este é inerente a tais representações, logo, faz-se necessária a utilização de informação *a priori* e/ou alguma restrição para estimá-lo, como por exemplo, o conhecimento da curva estática (Pearson and Pottmann, 2000).

Este capítulo apresenta uma investigação sobre algumas características analíticas importantes das representações de Hammerstein e de Wiener. Para isso é necessário um estudo comparativo entre tais representações com uma outra representação cujas características analíticas podem ser extraídas com uma relativa facilidade. Optou-se pela representação NARX polinomial, pois, isso é possível na maior parte dos casos. Logo, os modelos de Hammerstein e de Wiener serão representados na forma polinomial.

Uma vez obtidas as características analíticas das representações de Hammerstein e de Wiener, propõe-se uma metodologia para obtenção de tais representações a partir de dados de entrada e saída de um sistema, utilizando a função estática não-linear disponível a partir de um modelo NARX polinomial previamente identificado. Salienta-se que, uma vez definida as características analíticas, é possível estabelecer algumas restrições para a derivação dos modelos de Hammerstein e de Wiener a partir de um modelo NARX polinomial.

Na seção 2.4.1 foi definido que o modelo que representa o bloco dinâmico linear é um modelo ARX, dado por:

$$y(k) = \sum_{j=1}^{n_y} \theta_j y(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i u(k-i), \quad (3.1)$$

cujo ganho em estado estacionário é dado por:

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{n_y} \sigma_i}{1 - \sum_{j=1}^{n_u} \theta_j}. \quad (3.2)$$

sendo n_u e n_y os atrasos máximos da entrada e da saída, respectivamente. Os parâmetros relacionados aos regressores $u(k-i)$ e $y(k-j)$ são σ_i e θ_j , respectivamente.

O bloco estático não-linear é representado por uma função estática não-linear, denotada $f(\cdot)$, com ordem finita ℓ , que pode ser polinomial ou racional.

3.1 Propriedades dos modelos de Hammerstein

O modelo de Hammerstein está representado na Figura 3.1. A não-linearidade estática é aplicada no sinal de entrada, $u(k)$, gerando o sinal intermediário, $v(k)$. A dinâmica do sistema é representada por um modelo dinâmico linear cuja saída é $y(k)$.

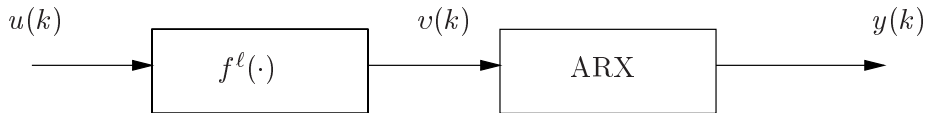


Figura 3.1: Modelo de Hammerstein

A partir das considerações anteriores, pode-se descrever o seguinte procedimento para obtenção da representação de Hammerstein na forma polinomial, ou seja, um modelo NARX polinomial equivalente à representação de Hammerstein.

Sabendo que o sinal intermediário, $v(k)$, é obtido pelo mapeamento do sinal de entrada, $u(k)$, através da função f^ℓ , tem-se que:

$$v(k) = f^\ell(u(k)), \quad (3.3)$$

$$v(k-i) = f^\ell(u(k-i)), i = 1 \dots n_u. \quad (3.4)$$

O modelo ARX é obtido utilizando o par de entrada e saída, $v(k)$ e $y(k)$, respectivamente, do bloco dinâmico linear, tal que:

$$y(k) = \sum_{j=1}^{n_y} \theta_j y(k-j) + \sum_{i=1}^{n_v} \sigma_i v(k-i), \quad (3.5)$$

sendo,

n_y = atraso máximo da saída do modelo ARX,

n_v = atraso máximo da entrada do modelo ARX¹.

θ_j = os parâmetros relacionados a cada regressor de saída do modelo ARX,

σ_i = os parâmetros relacionados a cada regressor de entrada do modelo ARX.

Na prática o sinal intermediário, $v(k)$, não está disponível. Logo, é desejável expressar o modelo de Hammerstein na forma polinomial com relação aos dados de entrada e saída do sistema, $u(k)$ e $y(k)$, respectivamente. Portanto, substituindo a equação (3.4) em (3.5), tem-se,

$$y(k) = \sum_{j=1}^{n_y} \theta_j y(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i f^\ell(u(k-i)). \quad (3.6)$$

A equação (3.6) revela que o modelo de Hammerstein é um caso particular do modelo NARX polinomial com grau de não-linearidade ℓ . Cada termo do modelo de ordem m , tal que $0 \leq m \leq \ell$, contém um fator de ordem 1 em $y(k-j)$ e um fator de ordem m em $u(k-i)$. Em suma, a representação NARX polinomial é equivalente a um modelo de Hammerstein quando:

- a não-linearidade atuar somente nos regressores da entrada,
- não houver a presença de termos do tipo $u(k-i)^{m-q}u(k-i_1)^m$, com $i \neq i_1$, $0 \leq q \leq m$ e $(m-q) \leq \ell$,

ou seja, a não-linearidade não atua em termos com atrasos diferentes.

3.1.1 Pontos Fixos

Chamando \bar{u} e \bar{y} , de entrada e saída, respectivamente, em estado estacionário e utilizando o procedimento para determinar os pontos fixos de modelos

¹ $n_v = n_u$ uma vez que $v(k)$ é obtido pelo mapeamento de $u(k)$ através da função f^ℓ , como mostra a equação (3.4).

não autônomos descrito na seção 2.9.2, o modelo (3.6) pode ser reescrito na forma agrupada, tal como:

$$\bar{y} = \left(\sum_{j=1}^{n_y} \theta_j \right) \bar{y} + \left(\sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i \right) f^\ell(\bar{u}). \quad (3.7)$$

Rearranjando a equação (3.7), tem-se que

$$\bar{y} = \frac{(\sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i) f^\ell(\bar{u})}{1 - (\sum_{j=1}^{n_y} \theta_j)}. \quad (3.8)$$

Substituindo o ganho em estado estacionário do modelo ARX dado pela equação (3.2) em (3.8), tem-se:

$$\bar{y} = G f^\ell(\bar{u}). \quad (3.9)$$

Verifica-se por meio da relação (3.9) que a saída do modelo de Hammerstein em estado estacionário, \bar{y} , é dada pelo produto do ganho do bloco dinâmico linear, dado pela equação (3.2), pela função não-linear estática $f^\ell(\cdot)$, aplicada em \bar{u} . Portanto, modelos de Hammerstein possuem apenas uma saída em estado estacionário, \bar{y} , para cada valor de entrada estacionária correspondente, \bar{u} . Porém, dependendo da função $f^\ell(\cdot)^2$, pode-se ter dois ou mais valores de \bar{u} que levam a saída para o mesmo \bar{y} , como por exemplo, a função raiz quadrada. Logo, a representação de Hammerstein em estado estacionário admite multiplicidade de entradas e apenas uma saída.

A relação estática entre \bar{u} e \bar{y} dada em (3.9), caracteriza a curva estática do modelo de Hammerstein na forma polinomial para o ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) do sistema.

3.1.2 Estabilidade dos Pontos Fixos

Como descrito na seção 2.9.3, a estabilidade dos pontos fixos de um modelo NARX polinomial pode ser analisada determinando os autovalores, λ , da matriz Jacobiana, \mathbf{D}_f , correspondente e avaliando-a em torno de cada ponto fixo, \bar{y} . Simplificando, os autovalores são calculados a partir da expressão do determinante da matriz Jacobiana, $\det = |\lambda I - \mathbf{D}_f|$, cuja equação característica é dada por:

$$\lambda^{n_y} - \Delta_1 \lambda^{n_y-1} - \dots - \Delta_{n_y-1} \lambda - \Delta_{n_y} = 0, \quad (3.10)$$

²Se $f^\ell(\cdot)$ não for inversível, modelos de Hammerstein podem apresentar multiplicidade de entradas estacionárias (Pearson and Pottmann, 2000).

sendo,

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{\partial y(k)}{\partial y(k-1)} \bigg|_{(\bar{u}, \bar{y})}, \\ &\vdots \\ \Delta_{n_y} &= \frac{\partial y(k)}{\partial y(k-n_y)} \bigg|_{(\bar{u}, \bar{y})}.\end{aligned}$$

Derivando o modelo NARX polinomial (3.6) com relação a cada regressor da saída, $y(k-j)$ para $j = 1 \dots n_y$, e substituindo pelo ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) , tem-se que:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \theta_1, \\ \Delta_2 &= \theta_2, \\ &\vdots \\ \Delta_{n_y} &= \theta_{n_y}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Substituindo (3.11) na equação característica da matriz Jacobiana dada em (3.10), tem-se que:

$$\lambda^{n_y} - \theta_1 \lambda^{n_y-1} - \dots - \theta_{n_y-1} \lambda - \theta_{n_y} = 0.\tag{3.12}$$

As raízes da equação (3.12) fornecem os valores de λ , os quais estabelecem se o ponto fixo em torno do qual o modelo foi analisado é ou não estável. A estabilidade do ponto fixo, dado pela equação (3.9), depende apenas dos parâmetros da parte auto-regressiva do modelo de Hammerstein na forma polinomial (3.6), sendo estes valores constantes³. Portanto, os autovalores de um modelo de Hammerstein são constantes com o ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) .

3.2 Propriedades dos modelos de Wiener

O modelo de Wiener representado na Figura 3.2, apresenta o bloco dinâmico linear precedendo o bloco que contém a não-linearidade estática.

³Um modelo linear discreto é considerado estável se todos os seus autovalores estiverem dentro do círculo unitário, ou seja, $-1 \leq \lambda \leq 1$.

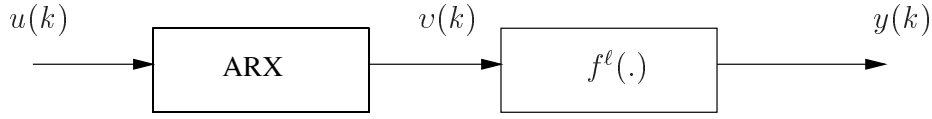


Figura 3.2: Modelo de Wiener

O sinal de saída do modelo de Wiener é obtido pelo mapeamento do sinal intermediário, $v(k)$, através da função f^ℓ , tal que:

$$y(k) = f^\ell(v(k)). \quad (3.13)$$

Como o sinal intermediário, $v(k)$, não está disponível, pode-se estimá-lo através da inversa da função f^ℓ . Por simplicidade, $(f^\ell)^{-1}$ será denotada por g^{ℓ_1} . Logo,

$$v(k) = g^{\ell_1}(y(k)), \quad (3.14)$$

sendo ℓ_1 o grau de não-linearidade da função inversa $g(\cdot)$ ⁴. Portanto, a função f terá que ser inversível⁵ para que um modelo de Wiener possa ser estimado, segundo o procedimento proposto.

O bloco dinâmico linear é representado por um modelo ARX, o qual é determinado para o par de entrada e saída do mesmo, $u(k)$ e $v(k)$, respectivamente, como mostra a equação (3.15),

$$v(k) = \sum_{j=1}^{n_v} \theta_j v(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i u(k-i). \quad (3.15)$$

Substituindo a equação (3.13) em (3.15), tem-se que:

$$y(k) = f^\ell \left(\sum_{j=1}^{n_v} \theta_j v(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i u(k-i) \right), \quad (3.16)$$

Considerando um atraso j , tal que $j = 1 \dots n_y$, a equação (3.14) pode ser reescrita como:

$$v(k-j) = g^{\ell_1}(y(k-j)). \quad (3.17)$$

Logo, substituindo a relação (3.17) em (3.16), a forma polinomial do modelo de Wiener é obtida com relação aos sinais de entrada e saída do sistema, $u(k)$ e $y(k)$, da seguinte maneira:

$$y(k) = f^\ell \left(\sum_{j=1}^{n_y} \theta_j g^{\ell_1}(y(k-j)) + \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i u(k-i) \right). \quad (3.18)$$

⁴ $\ell \neq \ell_1$, por exemplo, se $f(x) = x^2$, tem-se que a inversa desta função é $(f(x))^{-1} = x^{1/2}$.

⁵Para que uma função $f : A \rightarrow B$ admita a inversa f^{-1} , é necessário que esta função f seja bijetora. Sendo assim, tem-se $f^{-1} : B \rightarrow A$.

A equação (3.18) descreve um outro caso particular do modelo NARX polinomial, com grau de não-linearidade ℓ , que pode conter termos cruzados. O modelo NARX polinomial é constituído por termos com grau de não linearidade m , para $1 \leq m \leq \ell$. Cada termo de ordem m , pode conter um fator em $y(k-j)$ de ordem p e um fator em $u(k-i)$ de ordem $(m-p)$.

Em suma, uma representação NARX polinomial equivalente a um modelo de Wiener pode conter termos do tipo $y(k-j)^m u(k-i)^{m-p}$, para $i = 1 \dots n_u$ e $j = 1 \dots n_y$. Porém, não pode conter termos do tipo:

- $u(k-i_1)^p u(k-i_2)^{m-p}$, para $i_1 \neq i_2$ e $1 \leq p \leq m$;
- $y(k-j_1)^p y(k-j_2)^{m-p}$, para $j_1 \neq j_2$ e $1 \leq p \leq m$;
- $y(k-i)^p y(k-j)^{m-p}$, para $i \neq j$ e $1 \leq p \leq m$;

Assim como nos modelos de Hammerstein, a não-linearidade não atua em termos com atrasos diferentes⁶.

3.2.1 Pontos fixos

A partir do procedimento para obter os pontos fixos de modelos não autônomos descrito na seção 2.9.2, os pontos fixos do modelo NARX polinomial equivalente ao modelo de Wiener podem ser determinados. Reescrevendo o modelo de Wiener (3.18) em regime estático, tem-se que:

$$\bar{y} = f^\ell \left[\left(\sum_{j=1}^{n_y} \theta_j \right) g^{\ell_1}(\bar{y}) + \left(\sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i \right) \bar{u} \right]. \quad (3.19)$$

Aplicando g^{ℓ_1} nos dois lados da equação (3.19), tem-se:

$$\begin{aligned} g^{\ell_1}(\bar{y}) &= \left(\sum_{j=1}^{n_y} \theta_j \right) g^{\ell_1}(\bar{y}) + \left(\sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i \right) \bar{u}, \\ \left[1 - \left(\sum_{j=1}^{n_y} \theta_j \right) \right] g^{\ell_1}(\bar{y}) &= \left(\sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i \right) \bar{u}, \\ g^{\ell_1}(\bar{y}) &= \frac{(\sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i) \bar{u}}{1 - (\sum_{j=1}^{n_y} \theta_j)}. \end{aligned}$$

⁶Deve-se ressaltar que em modelos de Hammerstein a não-linearidade atua somente nos regressores da entrada.

Portanto, o ponto fixo do modelo de Wiener na forma polinomial, dado pela equação (3.18), pode ser obtido pela relação estática entre \bar{u} e \bar{y} , dada pela equação (3.20),

$$\bar{y} = f^\ell \left(\frac{(\sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i) \bar{u}}{1 - (\sum_{j=1}^{n_y} \theta_j)} \right). \quad (3.20)$$

Como o ganho em estado estacionário do modelo ARX, dado em (3.2), é constante, pode-se reescrever (3.21) como:

$$\bar{y} = G f^\ell (\bar{u}). \quad (3.21)$$

A equação (3.21), que representa a relação estática entre \bar{u} e \bar{y} , estabelece que modelos de Wiener possuem apenas um ponto fixo, \bar{y} , para cada entrada estacionária correspondente, \bar{u} , o que implica que modelos de Wiener apresentam apenas uma saída em estado estacionário. Porém, dependendo de $f^\ell(\cdot)$, este modelo pode assumir multiplicidade da entrada em estado estacionário⁷. A relação dada em (3.21) caracteriza a curva estática do modelo de Wiener para o ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) do sistema.

3.2.2 Estabilidade dos Pontos Fixos

A estabilidade do ponto fixo dado pela equação (3.21), é obtida analisando os autovalores da matriz Jacobiana correspondente ao modelo NARX polinomial (3.18), avaliada em torno do ponto fixo, \bar{y} .

Derivando o modelo de Wiener na forma polinomial (3.18) com relação a cada um dos regressores da saída, $y(k-j)$, para $j = 1 \dots n_y$, e procedendo como na seção 3.1.2, tem-se que para a equação característica (3.22),

$$\lambda^{n_y} - \Delta_1 \lambda^{n_y-1} - \dots - \Delta_{n_y-1} \lambda - \Delta_{n_y} = 0, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \ell f^{\ell-1} (\theta_1 g^{\ell_1}(\bar{y}) + \sigma_1(\bar{u})) \times (\theta_1 \ell_1) g^{\ell_1-1}(\bar{y}), \\ &\vdots \\ \Delta_{n_y} &= \ell f^{\ell-1} (\theta_{n_y} g^{\ell_1}(\bar{y}) + \sigma_{n_u}(\bar{u})) \times (\theta_{n_y} \ell_1) g^{\ell_1-1}(\bar{y}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Substituindo a equação (3.23) em (3.22), obtém-se:

⁷Se $f^\ell(\cdot)$ não admitir inversa os modelos de Wiener podem ter múltiplas entradas em estado estacionário (Pearson and Pottmann, 2000), porém, neste trabalho para que o modelo de Wiener possa ser obtido, $f^\ell(\cdot)$ tem que ser inversível. Logo, os modelos de Wiener, aqui considerados, não apresentam multiplicidade da entrada em estado estacionário.

$$\lambda^{n_y} - [\ell f^{\ell-1}(\theta_1 g^{\ell_1}(\bar{y}) + \sigma_1(\bar{u})) \times (\theta_1 \ell_1) g^{\ell_1-1}(\bar{y})] \lambda^{n_y-1} - \dots - \Delta_{n_y} = \ell f^{\ell-1}(\theta_{n_y} g^{\ell_1}(\bar{y}) + \sigma_{n_y}(\bar{u})) \times (\theta_{n_y} \ell_1) g^{\ell_1-1}(\bar{y}) = 0. \quad (3.24)$$

Os autovalores, λ , da matriz Jacobiana são as raízes da equação (3.24), através dos quais pode-se verificar que a estabilidade do ponto fixo dos modelos de Wiener não dependem somente dos parâmetros do modelo dinâmico (3.18), mas também da função $f^\ell(\cdot)$ e de sua inversa $g^{\ell_1}(\cdot)$ e das respectivas derivadas com relação a \bar{u} e \bar{y} . Portanto, os autovalores dos modelos de Wiener não são constantes e variam com o ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) do sistema.

3.3 Síntese das propriedades

Uma síntese das propriedades dos modelos de Hammerstein e de Wiener é aqui apresentada. Como um dos objetivos deste capítulo é a derivação das representações de Hammerstein e de Wiener a partir de modelos NARX polinomiais, pode-se fazer as seguintes considerações:

- Representação de Hammerstein:
 - a não-linearidade estática atua apenas no sinal de entrada,
 - em estado estacionário, admite multiplicidade de entradas e apenas uma saída.
 - possui autovalores constantes com o ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) do sistema.

Logo, a representação de Hammerstein está relacionada a modelos NARX polinomiais que apresentam agrupamentos de termos do tipo $\Omega_{y^p u^{m-p}}$, tal que $0 \leq p \leq 1$ e $0 \leq m \leq \ell$. Pois, como mostrado em (Corrêa, 2001), a presença de tais agrupamentos de termos acarreta em autovalores que variam com o ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) do sistema.

- Representação de Wiener:
 - a não-linearidade atua nos sinais de entrada e saída,
 - admite apenas uma saída e uma entrada em estado estacionário,
 - possui autovalores que podem variar com o ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) do sistema.

Logo, tal representação está relacionada a modelos NARX polinomiais que apresentam agrupamentos de termos $\Omega_{y^p u^{m-p}}$, tal que $0 \leq p \leq m$ e $0 \leq m \leq \ell$. Pois, a presença de tais agrupamentos implica em modelos com autovalores que variam com o ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) do sistema (Corrêa, 2001), a não ser que a presença destes termos não signifique a variação dos autovalores.

3.4 Derivação das representações de Hammerstein e de Wiener

Nesta seção é apresentada uma metodologia para a derivação das representações de Hammerstein e de Wiener a partir de dados de entrada e saída e de um modelo NARX polinomial previamente identificado, de um sistema não-linear. Esta metodologia justifica-se, conforme dito anteriormente, pelo grande número de modelos NARX polinomiais já identificados e pela relativa facilidade, em alguns casos, com que suas características analíticas podem ser extraídas, tal como a relação estática entre (\bar{u}, \bar{y}) como mostrado na seção 2.9.2.

A metodologia consiste em utilizar a função estática não-linear, $f^\ell(\cdot)$, que descreve a característica estática do modelo NARX polinomial já identificado, para estimar a característica estática dos modelos de Hammerstein e de Wiener⁸. Esta é descrita pelos seguintes passos:

Passo 1 - Reescrever modelo NARX polinomial na forma agrupada e determinar a relação estática entre \bar{u} e \bar{y} , descrita por uma função estática não-linear, f , como mostrado na seção 2.9.2, tal que:

$$\bar{y} = f(\bar{u}). \quad (3.25)$$

Passo 2 - Estimar o sinal intermediário, $v(k)$, a partir da função f , usando os sinais de entrada e de saída do bloco estático não-linear do modelo a ser identificado.

Passo 2.1 - Se o modelo NARX polinomial possuir na sua estrutura termos do tipo $y(k-j)^p u(k-i)^{m-p}$, tal que $0 \leq p \leq m$, $0 \leq m \leq \ell$, $i = 1 \dots n_u$ e $j = 1 \dots n_y$, ou há indícios de que os autovalores variam com o ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) , então conjectura-se que a representação de Wiener é a mais adequada, logo, a inversa da função $f(\cdot)$ deve ser determinada,

⁸Para simplificar ℓ será omitido.

ajustando-se um polinômio, $g(\cdot)$, de grau de não-linearidade ℓ_1 a f^{-1} , tal que⁹,

$$\bar{v} = g(\bar{y}). \quad (3.26)$$

Passo 2.2 - Se o modelo NARX polinomial possuir termos não-lineares do tipo $y(k-j)^p u(k-i)^{m-p}$, tal que $0 \leq p \leq 1$ e $0 \leq m \leq \ell$, ou há indício de que os autovalores do modelo NARX são constantes, conjectura-se que se deve utilizar a representação de Hammerstein. Logo, a relação estática é dada para o par de entrada e saída do bloco estático, \bar{u} e \bar{v} , respectivamente, tal que:

$$\bar{v} = f(\bar{u}). \quad (3.27)$$

Passo 3 - Identificar o modelo ARX a partir dos dados de entrada e saída do bloco dinâmico.

Passo 4 - Validar os modelos.

Ressalta-se que modelos de Hammerstein e de Wiener admitem apenas uma saída em estado estacionário para cada entrada correspondente, portanto, os modelos NARX polinomiais que serão considerados não podem conter agrupamentos do tipo $\Omega_{y^p u^{m-p}}$, para $p > 1$ e $1 \leq m \leq \ell$. Por isso, pode-se obter uma relação explícita entre \bar{u} e \bar{y} como as dadas em (3.25) e (3.27).

Porém, pode-se utilizar modelos NARX compostos por agrupamentos do tipo $\Omega_{y^p u^{m-p}}$, tal que $0 \leq p \leq m$ e $1 \leq m \leq \ell$, para a obtenção da função estática, desde que o sistema a ser investigado não possua multiplicidade de saídas em estado estacionário. Dessa forma, as representações de Hammerstein e de Wiener podem ser obtidas, mas não serão equivalentes ao modelo NARX polinomial.

Para determinar a relação estática entre a entrada e a saída no passo 1, utilizam-se os conceitos de pontos fixos em modelos não autônomos e de agrupamento e coeficientes de agrupamento de termos, como descrito na seção 2.9.2.

No passo 2 utiliza-se a função (3.25) para estimar o sinal intermediário, podendo assim levantar a característica estática dos modelos de Hammerstein e de Wiener. Para modelos de Hammerstein, a relação estática é dada entre o par de entrada e saída do bloco estático, \bar{u} e \bar{v} , respectivamente. Logo, o sinal $v(k)$ é estimado diretamente através da relação estática (3.27), uma vez que a entrada do bloco estático não-linear é o sinal de entrada do sistema,

⁹Utiliza-se a função `polyfit.m` e `polyval.m` do Matlab.

\bar{u} . Porém, para modelos de Wiener, a estimação de $v(k)$ é um tanto mais difícil. Como a relação entre \bar{v} e \bar{y} , entrada e saída do bloco estático, é dada por:

$$\bar{y} = f(\bar{v}), \quad (3.28)$$

não é possível obter o sinal $v(k)$ diretamente da relação (3.28). Por isso, é necessário o cálculo da inversa da função f^{-1} , o que é feito ajustando-se um polinômio de ordem ℓ_1 à função inversa, como mostrado em (3.26). Tal polinômio é ajustado por técnicas de regressão linear.

Os modelos de Hammerstein e de Wiener estimados devem ser capazes de aproximar tanto a resposta dinâmica quanto a resposta estática do sistema. Para validar os modelos quantitativamente são utilizados os índices de correlação linear, r , para a resposta estática, e o índice RMSE para a resposta dinâmica. A resposta dinâmica também é validada através do gráfico da resposta da simulação livre dos modelos obtidos, seção 2.7.

3.5 Aplicações

Nesta seção, os modelos de Hammerstein e de Wiener serão obtidos usando a metodologia descrita na seção 3.4. Serão usados modelos NARX polinomiais já identificados e os dados de entrada e saída coletados de dois sistemas distintos, um pequeno aquecedor elétrico e um conversor CC-CC do tipo Buck.

3.5.1 Aquecedor Elétrico

O sistema a ser identificado é um aquecedor elétrico, onde a tensão elétrica aplicada a um ferro de solda é o sinal de entrada, $u(k)$ e a tensão de saída do circuito amplificador corresponde ao sinal de saída, $y(k)$ ¹⁰. Os sinais de entrada e saída do sistema estão na Figura 3.3.

O modelo NARX polinomial utilizado é dado por (Cassini, 1999):

$$\begin{aligned} y(k) = & 1,2929y(k-1) + 0,0101u(k-1)u(k-2) + 0,0407u(k-1)^2 - \\ & - 0,3779y(k-2) - 0,1280y(k-1)u(k-2) + 0,0051u(k-2)^2 + \\ & + 0,0957y(k-2)u(k-2). \end{aligned} \quad (3.29)$$

¹⁰Todo procedimento usado para a aquisição de dados pode ser encontrado em (Cassini, 1999).

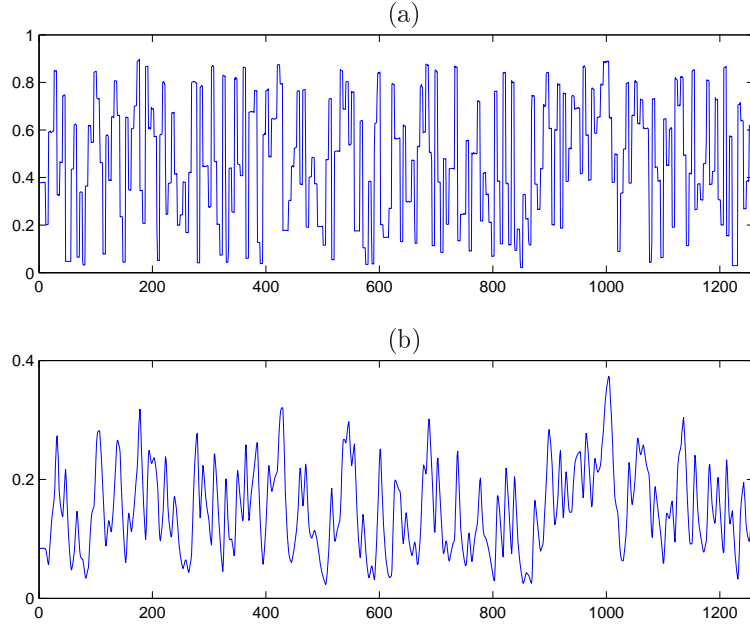


Figura 3.3: Dados de entrada e saída do sistema. Em (a) estão os dados de entrada $u(k)$ e em (b) os dados de saída $y(k)$. O eixo das abscissas contém o número de amostras e o eixo das ordenadas a amplitude dos sinais em pu. (`din3.mat`).

3.5.2 Obtenção de modelos de Hammerstein e de Wiener

Normalizou-se os dados, dividindo-os por 5. Separou-se as $N = 1260$ amostras dos sinais de entrada e saída em $N_i = 630$ amostras usadas para a identificação e $N_v = 630$ para a validação dos modelos.

Passo 1 - A estimação da função estática não-linear do modelo NARX polinomial, $f(\cdot)$, é feita usando o procedimento para obtenção dos pontos fixos em modelos não autônomos descrito na seção 2.9.2.

Utilizando-se o conceito de agrupamentos de termos e de pontos fixos, pode-se reescrever o modelo NARX polinomial (3.29) em estado estacionário, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \bar{y} = & 1,2929\bar{y} + 0,0101\bar{u}^2 + 0,0407\bar{u}^2 - 0,3779\bar{y} - \\ & - 0,1280\bar{y}\bar{u} + 0,0957\bar{y}\bar{u} + 0,0051\bar{u}^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Somando-se todos os coeficientes relacionados a um mesmo agrupamento de termos, tem-se:

$$(1 - 1,2929 + 0,3779)\bar{y} + (0,1280\bar{u} - 0,0957\bar{u})\bar{y} = (0,0101 + 0,0407 + 0,0051)\bar{u}^2.$$

Finalmente, a relação estática entre a entrada e a saída em estado estacionário é dada por:

$$\bar{y} = \frac{0,0559\bar{u}^2}{0,0850 + 0,0323\bar{u}}. \quad (3.31)$$

A Figura 3.4 mostra a característica estática do modelo NARX, obtida através da equação (3.31), para cada ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) do sistema.

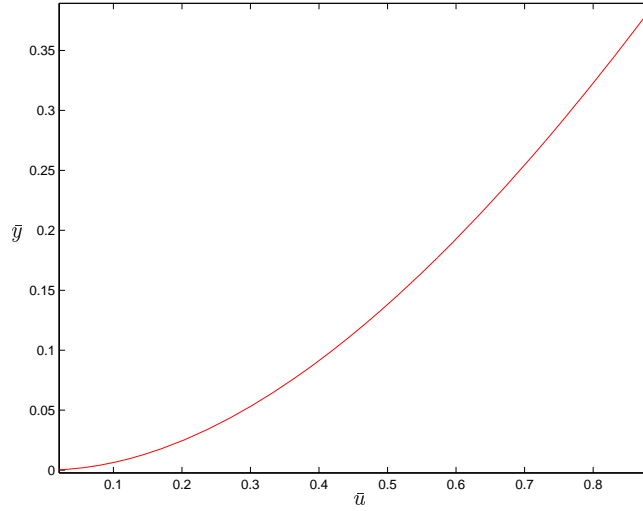


Figura 3.4: Característica estática do modelo NARX polinomial obtida através da equação (3.31) para cada ponto de operação do sistema (\bar{u}, \bar{y}) .

Passo 2 - Estimação do sinal intermediário $\hat{v}(k)$.

Passo 2.1 - A relação estática do modelo de Wiener é dada por (3.28), logo, a equação (3.31) é reescrita para o par de entrada e de saída do bloco estático do modelo, tal como:

$$\bar{y} = \frac{0,0559\bar{v}^2}{0,0850 + 0,0323\bar{v}}. \quad (3.32)$$

Verifica-se que o sinal intermediário não pode ser estimado diretamente através da relação (3.32). Logo, é necessário inverter a função, f , para que $\hat{v}(k)$ possa ser obtido. A inversa de f é obtida numericamente e um polinômio de grau 6 é então ajustado a f^{-1} . Logo, o sinal intermediário é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{v} = & -4196,26\bar{y}^6 + 5407,90\bar{y}^5 - 2730,99\bar{y}^4 + 687,03\bar{y}^3 \\ & -92,18\bar{y}^2 + 8,37\bar{y} + 0,04. \end{aligned} \quad (3.33)$$

O grau de não-linearidade do polinômio é escolhido de acordo com o maior índice de correlação linear, r , entre $u(k)$ e $\hat{v}(k)$. A representação gráfica da função inversa e do polinômio dado pela equação (3.33) é mostrada na Figura 3.5.

Salienta-se que a função que descreve a relação estática entre \bar{u} e \bar{y} , dada em (3.31), é uma função quadrática, ou seja, não é bijetora, logo não admite inversa. Porém, através da sua representação gráfica, mostrada na Figura 3.4, verifica-se que a curva estática é apenas um “braço” da parábola, pois, a entrada do sistema não assume valores negativos. Logo, pode-se estimar a inversa desta função.

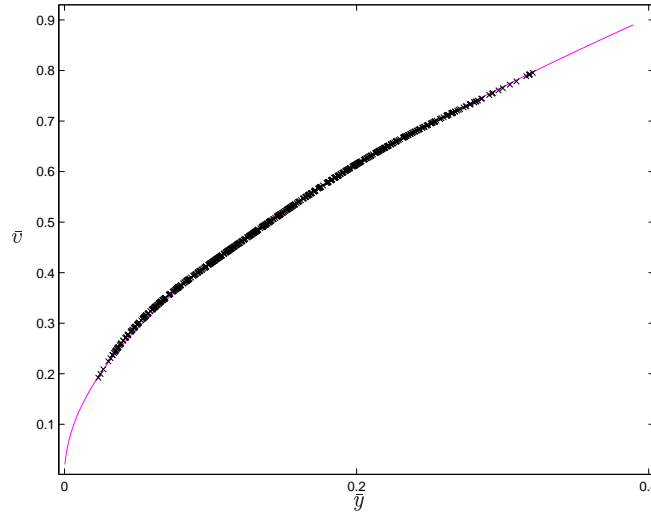


Figura 3.5: Função inversa da característica estática. (–) Modelo NARX polinomial e (x) polinômio dado em (3.33).

Passo 3 - A partir da equação (3.33), pode-se obter uma estimativa do sinal intermediário, $\hat{v}(k)$, a partir das medições dinâmicas da saída do sistema, $y(k)$. Dessa forma, pode-se estimar o modelo ARX a partir dos dados de entrada e saída, $u(k)$ e $\hat{v}(k)$, respectivamente, do bloco dinâmico linear. O modelo ARX é dado pela equação (3.34).

$$\begin{aligned}\hat{v}(k) = & 2,1909\hat{v}(k-1) + 0,0756u(k-1) - 1,6057\hat{v}(k-2) + \\ & + 0,4773\hat{v}(k-3) - 0,0654u(k-2) + 0,0303\hat{v}(k-5) - \\ & - 0,1022\hat{v}(k-4).\end{aligned}\tag{3.34}$$

A ordem do modelo ARX é definida considerando o menor índice RMSE do modelo de Wiener global, composto por (3.34) e (3.32).

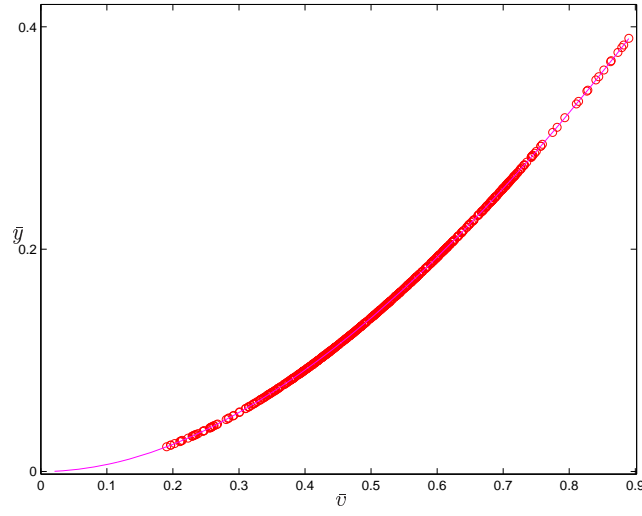


Figura 3.6: Característica estática. (—) Modelo NARX polinomial e em (o) modelo de Wiener.

A Figura 3.7 mostra a simulação livre do modelo de Wiener, composto por (3.34) e (3.32), comparada com os dados da saída do sistema usados para validar o modelo.

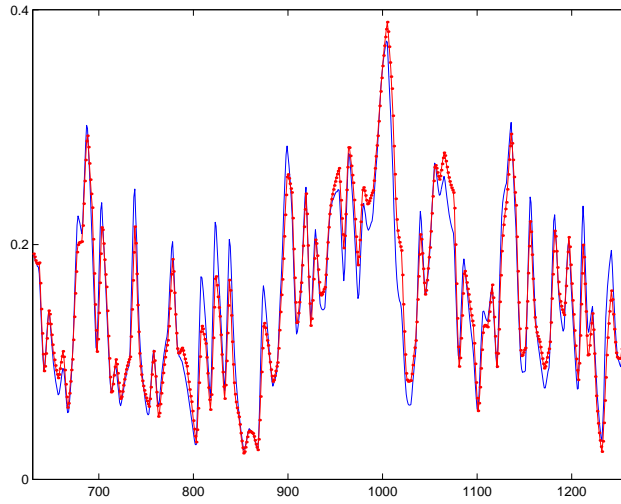


Figura 3.7: Simulação livre. (—) Sistema, (---) modelo de Wiener, composto por (3.34) e (3.32).

Passo 2.2 - Se um modelo de Hammerstein for derivado a partir do NARX polinomial, o sinal intermediário $v(k)$ é obtido reescrevendo a função

estática não-linear dada em (3.31), conforme a relação (3.27) dada entre a entrada e a saída estacionária do bloco estático não-linear. Logo, tem-se:

$$\hat{v} = \frac{0,0559\bar{u}^2}{0,0850 + 0,0323\bar{u}}, \quad (3.35)$$

cuja representação gráfica está na Figura 3.8.

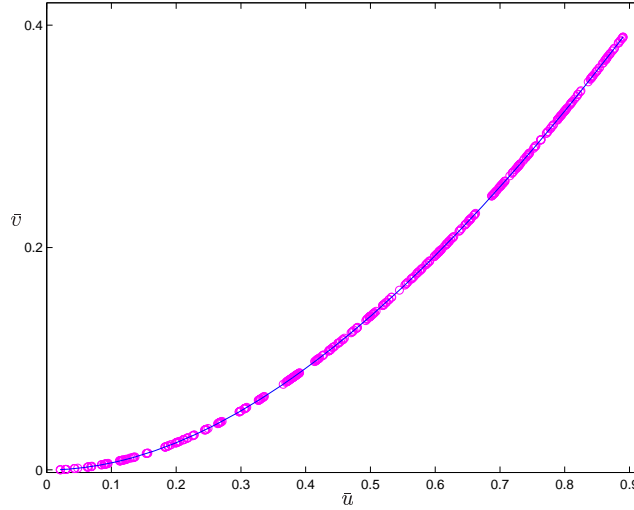


Figura 3.8: Característica estática dos modelos. (—) Modelo NARX polinomial e (o) modelo de Hammerstein dada em (3.35).

A função estática não-linear é a mesma para os modelos NARX polinomial, de Wiener e de Hammerstein, como mostra as equações (3.31), (3.32) e (3.35), respectivamente. O que difere as funções são as variáveis de entrada e saída do bloco estático das representações de Hammerstein e de Wiener. O sinal de entrada do modelo de Hammerstein é o mesmo do modelo NARX polinomial, equações (3.31) e (3.35), ou seja, o sinal de entrada do sistema, $u(k)$. Logo, a saída correspondente é a mesma como mostra a Figura 3.8. Já o sinal de entrada do bloco estático do modelo de Wiener é o sinal intermediário estimado, $\hat{v}(k)$, o que gera uma saída diferente da saída do modelo NARX polinomial, conforme ilustra a Figura 3.6.

Logo, pode-se concluir que a característica estática dos modelos NARX polinomial, de Hammerstein e de Wiener é a mesma, o que diferencia uma da outra é a faixa de abrangência para uma entrada cujos valores variam entre o mínimo e o máximo dos dados dinâmicos.

Passo 3 - O modelo ARX é estimado a partir dos dados de entrada e saída, $\hat{v}(k)$ e $y(k)$, respectivamente, do bloco dinâmico linear conforme a equação:

$$y(k) = 1,2006y(k-1) + 0,0939v(k-1) - 0,3041y(k-2) + 0,0109v(k-2). \quad (3.36)$$

A Figura 3.9 mostra a simulação livre do modelo de Hammerstein, composto por (3.35) e (3.36), comparada com o sinal de saída do sistema destinado à validação.

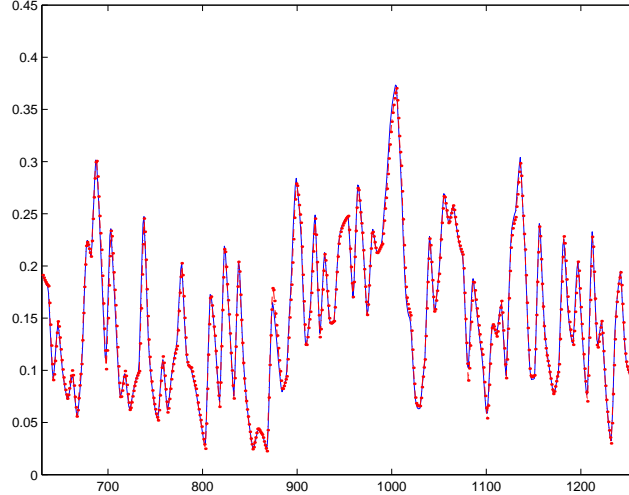


Figura 3.9: Simulação livre. (—) Sistema, (·—) modelo de Hammerstein composto por (3.35) e (3.36). O eixo x contém o número de amostras e no eixo y a amplitude dos sinais.

A Tabela 3.1 apresenta a validação quantitativa das respostas dinâmica e estática dos modelos de Hammerstein e de Wiener. A validação dinâmica usa o índice RMSE e a estática o índice de correlação linear, r . O desempenho do modelo de Hammerstein na aproximação da característica estática é o mesmo do obtido pelo modelo de Wiener para uma mesma entrada em estado estacionário que varia na faixa de $0,0222 \leq \bar{u} = \bar{v} \leq 0,9297$ ¹¹. A validação dinâmica dos modelos de Hammerstein e de Wiener, utilizando simulação livre, mostra que os dois modelos são bons para predizer o sistema, sendo que o modelo de Hammerstein, é melhor do que o modelo Wiener, tanto graficamente quanto através de seu índice RMSE.

Apesar do modelo NARX polinomial apresentar termos cruzados do tipo $y(k-j)u(k-i)$, os autovalores do mesmo não variam significativamente com o ponto de operação (Corrêa et al., 2000). Isso sugere que a melhor representação para este sistema é a de Hammerstein. Isso parece confirmar o melhor desempenho dessa representação quando comparada à representação de Wiener, conforme visto na Tabela 3.1.

¹¹O índice r dos modelos de Hammerstein e de Wiener é calculado para uma mesma entrada estacionária que varia na faixa de $0,0222 \leq \bar{u} = \bar{v} \leq 0,9297$. Verifica-se pelas equações (3.31), (3.32) e (3.35), que para uma mesma entrada estacionária, a saída estacionária correspondente será a mesma. Logo o índice r obtidos pelos modelos de Hammerstein e de Wiener é igual a 1.

Tabela 3.1: Validação quantitativa dos modelos.

Modelo	RMSE	r
Hammerstein	0,0798	1
Wiener	0,2522	1

O modelo NARX polinomial (3.29) apresenta um índice $\text{RMSE} = 0,0779$, e a representação gráfica da saída deste sobreposta à saída do sistema está na Figura 3.10.

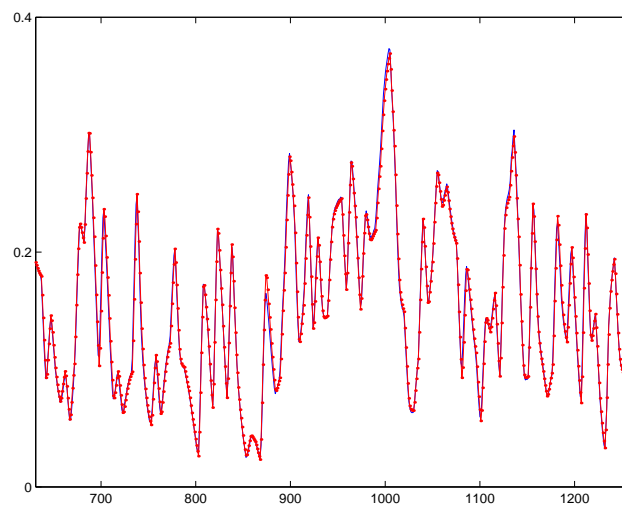


Figura 3.10: Simulação livre. (—) Sistema e em (.-) o modelo NARX polinomial dado pela equação (3.29).

3.5.3 Conversor CC-CC Buck

Nesta seção considera-se a identificação de um conversor CC-CC do tipo Buck (Aguirre et al., 2000) aplicando a metodologia proposta na seção 3.4. Os dados usados para identificação estão na Figura 3.11, através da qual

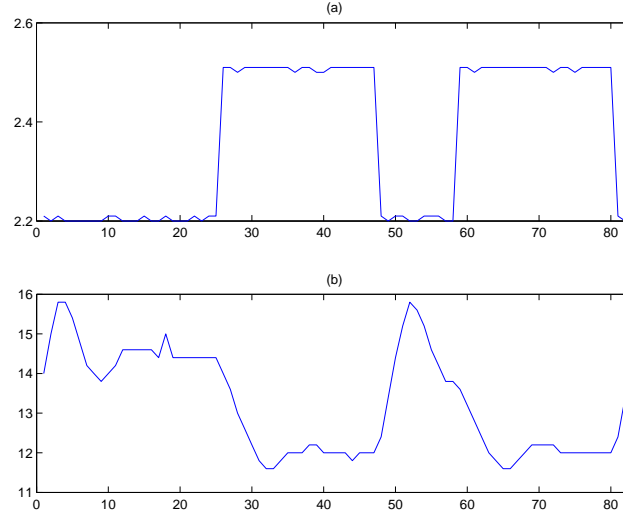


Figura 3.11: Em (a) estão os dados de entrada e em (b) os dados de saída usados na identificação (`acq7000.dat`). O eixo x contém o número de amostras e o eixo y a amplitude do sinal em volts.

verifica-se que o sistema é excitado pelos dados somente para valores de entrada na faixa $2, 2 \leq u(k) \leq 2,5$ volts. Logo, o objetivo é encontrar um modelo de Hammerstein e um modelo de Wiener utilizando a função estática não-linear extraída de um modelo NARX polinomial já identificado, sendo que estes modelos têm que ser capazes de aproximar tanto a dinâmica do sistema quanto a resposta estática fora da região dos dados de identificação.

O modelo NARX polinomial foi identificado em Corrêa (2001) e é dado por:

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 0,7315y(k-1) - 0,0047y(k-2) + 13,7292 - 0,8280u(k-1)^3 - \\
 & -0,2495y(k-3) + 3,6774u(k-3)u(k-1)^2 + 2,0210u(k-3)^3 - \\
 & -1,7617u(k-1)u(k-3) - 4,6409u(k-1)u(k-3)^2. \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

3.5.4 Obtenção de modelos de Hammerstein e de Wiener

Passo 1 - O modelo NARX polinomial dado em (3.37) é reescrito em estado estacionário como:

$$\begin{aligned}\bar{y} = & 0,7315\bar{y} - 0,0047\bar{y} + 13,7292 - 0,8280\bar{u}^3 - 0,2495\bar{y} \\ & + 3,6774\bar{u}^3 + 2,0210\bar{u}^3 - 1,7617\bar{u}^2 - 4,6409\bar{u}^3.\end{aligned}\quad (3.38)$$

Utilizando-se os conceitos de agrupamento de termos e de coeficiente de agrupamentos de termos, pode-se somar todos os coeficientes relacionados a um mesmo agrupamento de termos em (3.38). Dessa forma, a característica estática descrita pelo modelo NARX polinomial é dada pela relação (3.39),

$$\bar{y} = 0,4391\bar{u}^3 - 3,3704\bar{u}^2 + 26,2659. \quad (3.39)$$

Passo 2 - Estimar o sinal intermediário $\hat{v}(k)$ a partir da relação (3.39), usando os sinais de entrada e de saída do bloco estático não-linear.

Como o modelo NARX dado em (3.39) apresenta termos não-lineares apenas envolvendo o sinal de entrada, conjectura-se que a representação Hammerstein é a mais indicada.

Passo 2.1 - Se o modelo a ser estimado for Hammerstein, a equação (3.39) é reescrita em função da entrada e a saída do bloco estático, \bar{u} e \bar{v} , respectivamente, tal que,

$$\hat{v} = 0,4391\bar{u}^3 - 3,3704\bar{u}^2 + 26,2659. \quad (3.40)$$

A Figura 3.12 mostra a curva estática do modelo de Hammerstein, estimada através da equação (3.40), sobreposta a do modelo NARX polinomial dada por (3.39).

Passo 3 - O modelo ARX é estimado a partir dos dados de entrada e saída, $\hat{v}(k)$ e $y(k)$, respectivamente, do bloco dinâmico linear e é dado por (3.41):

$$\begin{aligned}y(k) = & 1,1016y(k-1) + 0,3449\hat{v}(k-1) - 0,8710y(k-3) - \\ & - 0,0241y(k-7) + 0,3520y(k-4) + 0,1323y(k-2) - \\ & - 0,0090y(k-6) + 0,0145y(k-5) - 0,0383\hat{v}(k-2) - \\ & - 0,0984\hat{v}(k-3) + 0,1416\hat{v}(k-4) - 0,0455\hat{v}(k-5).\end{aligned}\quad (3.41)$$

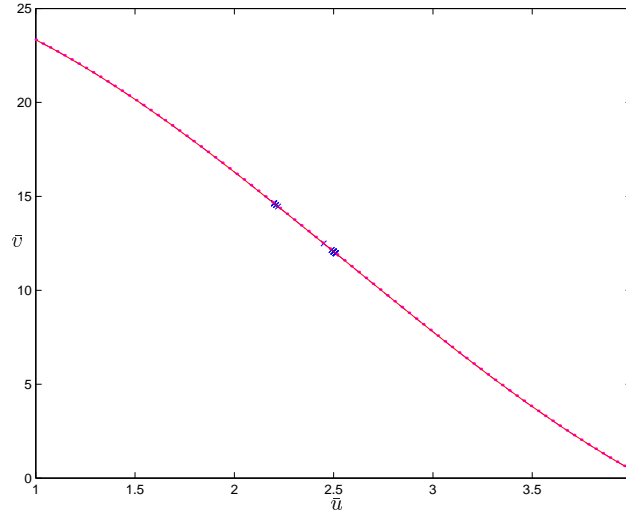


Figura 3.12: Característica estática dos modelos do conversor Buck. (—) Modelo NARX polinomial dada em (3.39) e (- -) modelo de Hammerstein dada em (3.40). As cruzes indicam a faixa de valores varrida pela entrada durante o teste dinâmico.

A Figura 3.13 mostra a saída do modelo Hammerstein comparada com os dados de saída do sistema usados para validação.

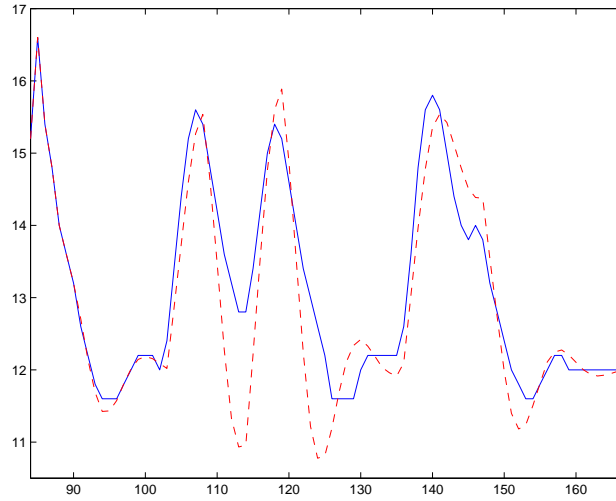


Figura 3.13: Simulação livre. (—) Sistema, (- -) modelo de Hammerstein composto por (3.40) e (3.41). O eixo x contém o número de amostras e no eixo y a amplitude dos sinais.

Passo 2.2 - Quando o modelo a ser estimado for do tipo Wiener, tem-se que a saída do bloco estático, \bar{y} , está em função do sinal intermediário,

\bar{v} , como mostra a equação (3.28), logo, a relação estática dada em (3.39), torna-se:

$$\bar{y} = 0,4391\bar{v}^3 - 3,3704\bar{v}^2 + 26,2659. \quad (3.42)$$

Para estimar o sinal $\hat{v}(k)$ é necessário inverter a função descrita em (3.42), ajustando-se um polinômio de ordem $n = 2$ a f^{-1} . A ordem do polinômio foi escolhida segundo o maior índice de correlação linear, r , entre $u(k)$ e $\hat{v}(k)$. O polinômio é dado pela equação (3.43) e está representado na Figura 3.14. Verifica-se que a função inversa do modelo NARX está sobreposta a curva obtida a partir do polinômio dado em (3.43).

$$\hat{v} = -0,0005\bar{y}^2 - 0,1048\bar{y} + 3,8296. \quad (3.43)$$

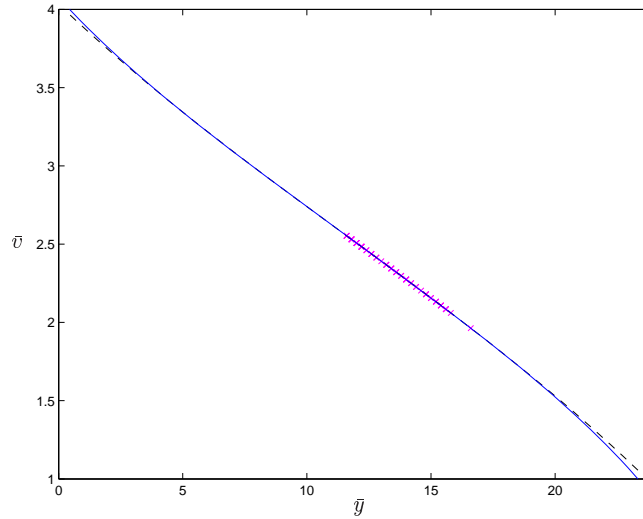


Figura 3.14: Função inversa da característica estática. (—) Modelo NARX dada pela equação (3.39), (---) polinômio dado em (3.43). As cruzes indicam a faixa de valores varrida pela saída durante o teste dinâmico.

Passo 3 - Utilizando-se o sinal intermediário estimado, $\hat{v}(k)$, obtido pela equação (3.43), pode-se estimar o modelo ARX a partir dos dados de entrada e saída, $u(k)$ e $\hat{v}(k)$, respectivamente, do bloco dinâmico do modelo de Wiener, conforme a equação (3.44):

$$\begin{aligned} \hat{v}(k) = & 0,6349\hat{v}(k-1) + 0,2876\hat{v}(k-2) + 0,2262u(k-1) - \\ & -0,4249\hat{v}(k-3) - 0,0634\hat{v}(k-6) - 0,0784\hat{v}(k-4) + \\ & +0,0994u(k-4) + 0,0327u(k-3) + 0,0358u(k-5) + \\ & 0,1028\hat{v}(k-5) + 0,1458u(k-2). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Apesar da função que descreve a relação entre a entrada e a saída em estado estacionário dos modelos NARX, Hammerstein e Wiener ser a mesma, as variáveis de entrada estacionária destes modelos são diferentes, acarretando em uma curva estática cuja abrangência, para uma entrada cujos valores variam entre o mínimo e o máximo dos dados dinâmicos, é diferente, como mostra a Figura 3.15.

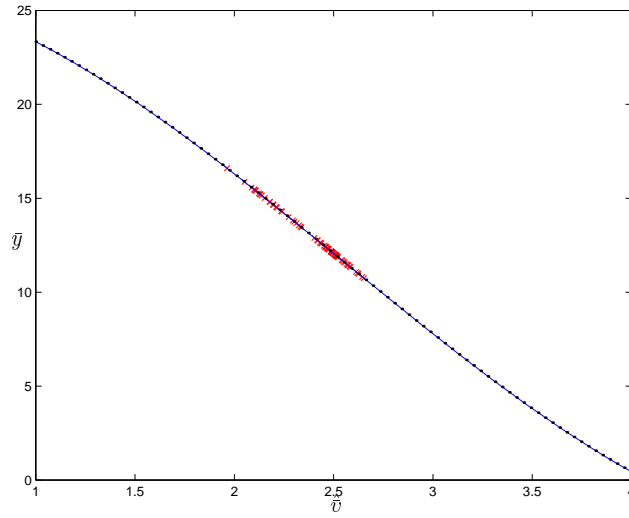


Figura 3.15: Característica estática. (—) Modelo NARX e (- -) modelo de Wiener dada em (3.42). As cruzes indicam a faixa de valores percorrida por $\hat{v}(k)$.

A simulação livre do modelo Wiener comparada à saída do sistema, é mostrada pela Figura 3.16.

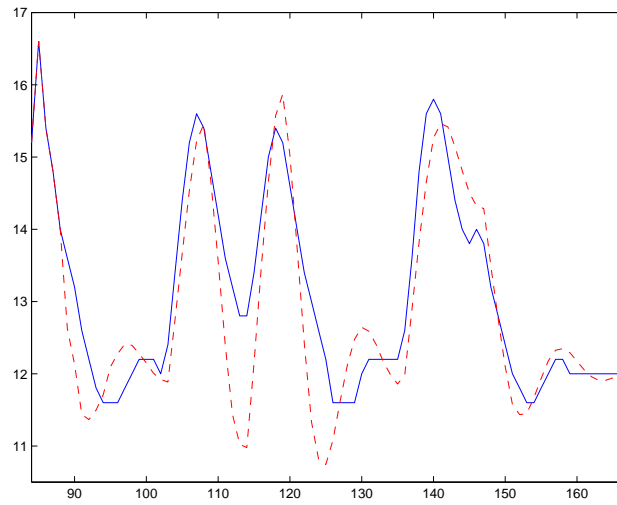


Figura 3.16: Simulação livre. (–) Sistema e (– –) modelo de Wiener composto por (3.44) e (3.42).

A Tabela 3.2 apresenta a validação quantitativa das respostas dinâmica e estática dos modelos de Hammerstein e Wiener. A validação dinâmica usa o índice RMSE e a estática o índice de correlação linear, r . O desempenho do modelo Hammerstein na recuperação da característica estática é o mesmo obtido pelo modelo de Wiener para uma mesma entrada estacionária, visto que a função que descreve a característica estática é a mesma. A validação dinâmica dos modelos de Hammerstein e de Wiener, utilizando simulação livre, mostra que os dois modelos são bons para prever o sistema, sendo que o modelo de Hammerstein apresenta um melhor ajuste do que o Wiener, tanto graficamente quanto através do seu índice RMSE.

Tabela 3.2: Validação quantitativa dos modelos.

Modelo	RMSE	r
Hammerstein	0,4312	1
Wiener	0,4733	1

O modelo NARX polinomial dado pela equação (3.37) apresenta um índice $\text{RMSE} = 0,4294$. A saída do modelo NARX polinomial comparada à saída do sistema e a saída dos modelos de Hammerstein e de Wiener está ilustrada na Figura 3.17.

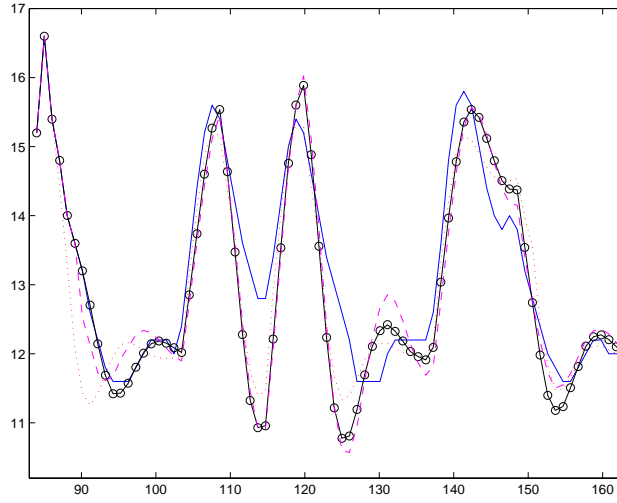


Figura 3.17: Simulação livre. (—) Sistema, (...) modelo NARX polinomial dado pela equação (3.37), (o—) modelo de Hammerstein composto por (3.40) e (3.41) e em (c) (- -) modelo de Wiener composto por (3.42) e (3.44). O eixo x contém as amostras e no eixo y a amplitude dos sinais.

3.6 Discussão

Este capítulo estabeleceu algumas relações entre modelos NARX polinomiais e modelos de Wiener e de Hammerstein. Ao proceder no sentido inverso, ou seja, obter modelos NARX polinomiais a partir de modelos de blocos interconectados, pode-se observar algumas particularidades, as quais serão consideradas nos próximos capítulos.

A partir da análise das características estáticas de modelos de Hammerstein e de Wiener, na forma polinomial, juntamente com o estudo das características analíticas de modelos NARX polinomiais, como a constante de tempo e o ganho em estado estacionário, apresentado em (Corrêa, 2001), pode-se concluir que:

- Modelos do tipo Hammerstein e Wiener não admitem multiplicidade estacionária da saída, podendo, dependendo da função f , assumir multiplicidade da entrada estacionária.
- Em modelos de Hammerstein a não-linearidade atua somente nos termos da entrada, $u(k)$. Portanto, estes modelos apresentam agrupamentos de termos não-lineares do tipo Ω_{u^m} . Como mostrado em (Corrêa, 2001), estes agrupamentos não influenciam nos autovalores do modelo NARX polinomial, logo, não afetam a sua “constante de tempo”. Porém, estes agrupamentos de termos influenciam no ganho em estado

estacionário do modelo.

Em suma, modelos do tipo Hammerstein apresentam ganho em estado estacionário variável e autovalores constantes com o ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) do sistema.

- Em modelos do tipo Wiener, a não-linearidade atua nos regressores da entrada e da saída, $u(k-i)$ e $y(k-j)$, possibilitando a presença de agrupamentos de termos cruzados do tipo $\Omega_{y^p u^{m-p}}$, para $p \neq 0$ e $m \neq 0$. Estes tipos de agrupamentos de termos indicam que os autovalores do modelo dependem do ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) , e afetam o ganho do modelo em estado estacionário. Portanto, modelos de Wiener possuem autovalores e ganho em estado estacionário variável com o ponto de operação do sistema.

A escolha de qual representação usar é um assunto que ainda está em aberto. Porém, se uma análise das características das representações de Hammerstein e de Wiener supracitadas, for realizada no processo a ser investigado, esta análise pode auxiliar na escolha da representação.

Capítulo 4

Estimação da característica estática

Na literatura disponível, o problema de identificação de modelos de Hammerstein e de Wiener é tratado utilizando métodos paramétricos e não-paramétricos (Lang, 1993, 1997; Greblicki and Pawlak, 1986, 1989; Greblicki, 1992, 1996).

Em métodos paramétricos, a não-linearidade estática pode ser modelada por um polinômio de ordem finita conhecida, ou seja, com estrutura conhecida, mas com parâmetros desconhecidos. A estimação dos parâmetros é feita utilizando técnicas de correlação, algoritmos recursivos ou uma combinação destas técnicas (Billings, 1979; Stoica and Söderström, 1982). Este capítulo propõe um procedimento paramétrico para a estimação da característica estática não-linear a partir de dados dinâmicos do sistema a ser investigado.

É utilizado o conceito de análise de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos de termos (Aguirre and Billings, 1995b), para auxiliar na determinação da estrutura da função estática não-linear. Uma vez definida a estrutura da função, seus coeficientes são calculados. Aparentemente, este é um dos primeiros trabalhos em que é possível ajustar a característica estática, a partir de dados dinâmicos do sistema, usando funções racionais.

4.1 Análise de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos

Normalmente, a análise de agrupamento de termos e de seus respectivos coeficientes é realizada para um conjunto de modelos, variando-se o número de termos de forma crescente. Para cada modelo, calculam-se os coeficientes de agrupamentos de termos. No final, representa-se, através de gráficos, as

variações dos coeficientes de agrupamentos de termos em função do número de termos no modelo.

Acredita-se que, a utilização de uma janela de dados diferente, não proporciona uma variação expressiva dos coeficientes de agrupamentos de termos efetivos ao modelo, desde que a janela seja “rica” em informações sobre o sistema.

Portanto, a análise de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos, aqui apresentada, é feita para coeficientes extraídos a partir de uma família de modelos estimados para uma estrutura fixa e uma janela de dados variável, e para modelos estimados para uma janela de dados fixa e uma estrutura variável. Para auxiliar esta análise são utilizados gráficos para ilustrar a variação dos coeficientes dos agrupamentos de termos à medida que a janela de dados desloca-se e também para o segundo caso, quando a estrutura muda. Baseado nestes gráficos um agrupamento de termos pode ser considerado espúrio quando (Cassini, 1999; Jácome, 1996):

- seu coeficiente possui valor irrelevante comparado aos demais,
- seu coeficiente tende à zero,
- seu coeficiente troca de sinal,
- seus coeficientes apresentam comportamento oscilatório ao longo de uma faixa variável de valores diferentes de zero;
- seus coeficientes não apresentam uma tendência definida.

Quando nenhuma informação puder ser extraída dos gráficos, serão usadas tabelas, as quais fornecem informações estatísticas dos valores finais dos parâmetros, seus respectivos desvios-padrão. Além dessa, outra tabela, que contém os valores dos coeficientes dos agrupamentos de termos calculados a partir destes parâmetros, pode ser usada para auxiliar na análise de agrupamentos de termos. O uso destas tabelas serve para verificar:

1. a ordem de grandeza dos parâmetros com relação a seus desvios-padrão. Assumindo-se uma distribuição gaussiana, o k -ésimo parâmetro do modelo é considerado *estatisticamente insignificante* com confiança de 95% se $\theta_k - 2\sigma \leq \theta_k \leq \theta_k + 2\sigma$ (Papoulis, 1991),
2. se um determinado coeficiente de agrupamento assume valores muito pequenos em comparação aos demais coeficientes, pode ser considerado espúrio.

Geralmente, se os parâmetros relacionados a um coeficiente de agrupamento anulam-se, pode-se considerar que tal agrupamento de termos é espúrio. Por outro lado, se a ordem de grandeza dos parâmetros for muito pequena, estes originarão um coeficiente de agrupamento de ordem de grandeza também pequena. Portanto, o fato de um coeficiente de agrupamento de termos assumir valores muito pequenos em comparação aos demais coeficientes, não implica, necessariamente, que este seja espúrio.

Vale ressaltar que estas tabelas serão utilizadas apenas nos casos em que se tem uma dificuldade de extrair as informações dos gráficos.

O procedimento para obtenção da função estática não-linear está dividido em três etapas distintas. As duas primeiras etapas são efetuadas simultaneamente para determinar quais agrupamentos de termos deverão compor a função e são designadas por Rotina I e Rotina II, respectivamente. A terceira etapa consiste em estimar os coeficientes dos agrupamentos de termos. A determinação dos termos que comporão a função não-linear é baseada no conceito de análise de agrupamentos e coeficientes de agrupamentos de termos.

Na Rotina I é estimada uma família de modelos de maneira recursiva para uma janela de dados de entrada e saída, $u(k)$ e $y(k)$, respectivamente, de tamanho L , que se desloca de um valor Δ até atingir o final das observações N_i (número de amostras usadas na identificação). Na Rotina II, uma família de modelos é estimada para uma janela de dados fixa, $L = N_i$ e uma estrutura variável. A partir destes modelos, os coeficientes dos agrupamentos de termos, tanto para a Rotina I quanto para a Rotina II, são obtidos utilizando o procedimento descrito na seção 2.8.

Em suma, é estimado um conjunto de modelos para uma janela de dados variável e um outro conjunto de modelos para uma estrutura variável, não se preocupando com a aproximação da dinâmica do sistema investigado e sim com a aproximação da sua curva estática.

Para compor a matriz de regressores são usados termos com grau não-linearidade, $\ell = 3$, e ordem máxima de atraso da entrada e saída, $n_u = n_y = 3$. A escolha da ordem é empírica. São usados os mesmos regressores tanto para os modelos estimados pela Rotina I quanto para os estimados via Rotina II, totalizando 28 termos em cada.

4.2 Rotina I

Em (Aguirre and Souza, 1998) é apresentada uma metodologia que estima pontos fixos de séries temporais a partir de dados dinâmicos. A metodologia

apresentada nesta seção baseia-se no trabalho supracitado estendendo-o para o caso não-autônomo, ou seja, para sistemas que possuem entrada e saída, $u(k)$ e $y(k)$, respectivamente. Sabe-se que para um determinado patamar de entrada estacionária, \bar{u} , pode-se determinar uma ou mais saídas estacionárias correspondentes, \bar{y} . Logo, cada ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) é colocado em um gráfico, caracterizando a curva estática.

Na implementação da Rotina I, os parâmetros dos modelos são estimados utilizando-se o algoritmo dos mínimos quadrados para uma estrutura fixa, previamente estabelecida¹ e uma janela de observações variável, L .

Inicialmente, a matriz de regressores Ψ_0 é composta por 3 termos referentes a cada um dos agrupamentos de termos possíveis a um modelo de grau de não-linearidade $\ell = 3$. Logo, tem-se uma matriz com 28 termos no total, incluindo o termo constante. Os termos estão arranajados seguindo a seqüência dada em (4.2):

$$\Psi_0 = \begin{bmatrix} 1 & y(k-1) & y(k-2) & y(k-3) & y(k-1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y(k+L-1-1) & y(k+L-1-2) & y(k+L-1-3) & y(k+L-1-1)^2 \\ \\ y(k-1)y(k-2) & y(k-1)y(k-3) & y(k-1)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y(k+L-1-1)y(k+L-1-2) & y(k+L-1-1)y(k+L-1-3) & y(k+L-1-1)^3 \\ \\ y(k-2)^3 & y(k-3)^3 & u(k-1) & u(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(k+L-1-2)^3 & y(k+L-1-3)^3 & u(k+L-1-1) & u(k+L-1-2) \\ \\ u(k-3) & u(k-1)^2 & u(k-1)u(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u(k+L-1-3) & u(k+L-1-1)^2 & u(k+L-1-1)u(k+L-1-2) \\ \\ u(k-1)u(k-3) & u(k-1)^3 & u(k-2)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u(k+L-1-1)u(k+L-1-3) & u(k+L-1-1)^3 & u(k+L-1-2)^3 \end{bmatrix}$$

¹A matriz de regressores é inicialmente composta por regressores, conforme descrito em (4.1), quando não se utiliza nenhum conhecimento *a priori*.

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{ccc} u(k-3)^3 & u(k-1)y(k-3) & u(k-1)y(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u(k+L-1-3)^3 & u(k+L-1-1)y(k+L-1-3) & u(k+L-1-1)y(k+L-1-2) \end{array} \\
& \begin{array}{ccc} u(k-3)y(k-1) & u(k-1)y(k-1)^2 & \\ \vdots & \vdots & \\ u(k+L-1-3)y(k+L-1-1) & u(k+L-1-1)y(k+L-1-1)^2 & \end{array} \\
& \begin{array}{ccc} u(k-2)y(k-1)^2 & u(k-3)y(k-1)^2 & \\ \vdots & \vdots & \\ u(k+L-1-1)y(k+L-1-1)^2 & u(k+L-1-1)y(k+L-1-1)^2 & \end{array} \\
& \begin{array}{ccc} u(k-3)y(k-1)^2 & u(k-1)^2y(k-1) & \\ \vdots & \vdots & \\ u(k+L-1-1)y(k+L-1-1)^2 & u(k+L-1-1)^2y(k+L-1-1) & \end{array} \\
& \left. \begin{array}{ccc} u(k-2)^2y(k-3) & u(k-3)u(k-1)y(k-3) & \\ \vdots & \vdots & \\ u(k+L-1-2)^2y(k+L-1-3) & u(k+L-1-3)u(k+L-1-1)y(k+L-1-3)^2 & \end{array} \right] \quad (4.1)
\end{aligned}$$

A partir destes modelos os coeficientes dos agrupamentos de termos são determinados usando o procedimento descrito na seção 2.8, e são armazenados em uma matriz cujas colunas estão, inicialmente, dispostas conforme (4.2). As variações dos coeficientes dos agrupamentos de termos à medida que a janela de dados L desloca-se de Δ são representadas em gráficos, possibilitando assim, a sua análise.

$$C_0 = \begin{bmatrix} \Sigma_0 & \Sigma_y & \Sigma_{y^2} & \Sigma_{y^3} & \Sigma_u & \Sigma_{u^2} & \Sigma_{u^3} & \Sigma_{yu} & \Sigma_{y^2u} & \Sigma_{yu^2} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Sabendo que n_θ é o número de termos presentes na matriz de regressores Ψ_0 dada em (4.1), e n_a^2 , o número de agrupamentos de termos em (4.2),

²Os valores de n_a e n_θ devem ser determinados pelo usuário, uma vez que estes estão ligados ao grau de não-linearidade ℓ e a n_y e n_u .

pode-se descrever o seguinte procedimento para estimar os coeficientes dos agrupamentos de termos a partir de modelos estimados usando uma estrutura fixa e uma janela de dados, L , que se desloca de Δ :

Implementação da Rotina I

1. faça $j = 0$;
2. para a janela de dados $\{y(k)\}_{1+j}^{L+j}$ e $\{u(k)\}_{1+j}^{L+j}$, monte a matriz de regressores $\Psi_j \in \Re^{L \times n_\theta}$, e o vetor \mathbf{y} , conforme as equações (4.1) e (4.3), respectivamente,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(k) & y(k+1) & \dots & y(k+L-1) \end{bmatrix}^T. \quad (4.3)$$

3. calcule $\hat{\theta}$ a partir da equação (4.4)³:

$$\hat{\theta} = [\Psi_j^T \Psi_j]^{-1} \Psi_j^T \mathbf{y}; \quad (4.4)$$

4. determine os coeficientes dos agrupamentos de termos e armazene-os na matriz, C_j , cujas colunas estão inicialmente dispostas conforme equação (4.2),
5. atualize a janela $j = j + \Delta$ e volte ao passo 2 até atingir o final das observações, N_i ;

Conforme a equação (2.18), o número de colunas na matriz Ψ_0 , n_θ , depende do grau de não-linearidade, ℓ , e dos atrasos máximos, n_u e n_y . Para $\ell = 3$, $n_y = n_u = 3$, o número total de termos é 84 incluindo o termo constante, isso acarreta em mau condicionamento da matriz Ψ_0 , o que pode proporcionar um comportamento dinâmico espúrio. Como o objetivo é a estimação da característica estática do sistema, não a sua dinâmica, a matriz Ψ_0 poderia conter todos os termos, porém para facilitar a implementação, somente três das possíveis combinações dos monômios $\{y(k-1) \dots y(k-n_y), u(k-1) \dots u(k-n_u)\}$ para o grau de não-linearidade $\ell = 3$ são utilizadas.

À medida que os agrupamentos forem classificados como espúrios, os termos referentes a estes agrupamentos são retirados da matriz Ψ_j e a Rotina I novamente executada.

³Ressalta-se que no presente trabalho a equação (4.4) não é implementada, são utilizados algoritmos baseados no método de transformação de Householder `orthreg.m` e a função `pinv.m` do MATLAB.

A estimação dos parâmetros $\hat{\theta}$, realizada no passo 3 utiliza o estimador dos mínimos quadrados.

O procedimento para calcular os coeficientes dos agrupamentos de termos, realizado no passo 4, utiliza os conceitos de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos em modelos não autônomos, conforme seção 2.8.

4.3 Rotina II

O procedimento adotado nesta etapa consiste em estimar uma família de modelos para uma janela de dados fixa, $L = N_i$, e uma estrutura variável. Inicialmente, a matriz de regressores Ψ_{e0} é constituída por 3 termos relacionados a cada agrupamento de termos possível a um modelo com grau de não-linearidade $\ell = 3$, tal que:

$$\Psi_{e0} = \begin{bmatrix} 1 & y(k-1) & y(k-1)^2 & y(k-1)^3 & u(k-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y(N-k-1) & y(N-k-1)^2 & y(N-k-1)^3 & u(N-k-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u(k-1)^2 & u(k-1)^3 & u(k-1)y(k-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u(N-k-1)^2 & u(N-k-1)^3 & u(N-k-1)y(N-k-3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u(k-1)y(k-1)^2 & u(k-1)^2y(k-1) & y(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u(N-k-1)y(N-k-1)^2 & u(N-k-1)^2y(N-k-1) & y(N-k-2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(k-1)y(k-2) & y(k-2)^3 & u(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N-k-2)y(N-k-2) & y(N-k-2)^3 & u(N-k-2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u(k-1)u(k-2) & u(k-2)^3 & u(k-1)y(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u(N-k-1)u(N-k-2) & u(N-k-2)^3 & u(N-k-1)y(N-k-2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{ccc} u(k-2)y(k-1)^2 & u(k-2)^2y(k-3) & y(k-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u(N-k-2)y(N-k-1)^2 & u(N-k-2)^2y(k-3) & y(N-k-3) \end{array} \\
& \begin{array}{ccc} y(k-1)y(k-3) & y(k-3)^3 & u(k-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N-k-1)y(N-k-3) & y(N-k-3)^3 & u(N-k-3) \end{array} \\
& \begin{array}{ccc} u(k-1)u(k-3) & u(k-3)^3 & u(k-3)y(k-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u(N-k-1)u(N-k-3) & u(N-k-3)^3 & u(N-k-3)y(N-k-1) \end{array} \\
& \left. \begin{array}{ccc} u(k-3)y(k-1)^2 & u(k-3)u(k-1)y(k-3) & \\ \vdots & \vdots & \\ u(N-k-3)y(N-k-1)^2 & u(N-k-3)u(N-k-1)y(N-k-3) & \end{array} \right] . \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Os coeficientes dos agrupamentos de termos estão arranjados, inicialmente, como mostra (4.6). Estes são calculados utilizando os conceitos de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos de termos mostrado na seção 2.8.

$$C_{e0} = \begin{bmatrix} \Sigma_0 & \Sigma_y & \Sigma_{y^2} & \Sigma_{y^3} & \Sigma_u & \Sigma_{u^2} & \Sigma_{u^3} & \Sigma_{yu} & \Sigma_{y^2u} & \Sigma_{yu^2} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Se o agrupamento de termos for indicado como espúrio, os termos referentes a estes agrupamentos, são retirados da matriz Ψ_{e0} e a rotina é novamente executada.

Implementação da Rotina II:

1. faça $j_1 = 0$;
2. $N_t = n_a + j_1$;
3. monte a matriz de regressores $\Psi_{e0} \in \Re^{N_t \times n_\theta}$ e o vetor \mathbf{y} , conforme a equações (4.5) e (4.7), respectivamente. O vetor \mathbf{y} é dado por:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(k) & y(k+1) & \dots & y(N-k) \end{bmatrix}^T. \quad (4.7)$$

4. Faça $\Psi_{ej_1} = \Psi_{e0}$, tal que $\Psi_{ej_1} \in \Re^{N_i \times N_t}$;
5. calcule $\hat{\theta}$ através da equação (4.4);
6. determine os coeficientes dos agrupamentos de termos e armazene-os em uma matriz, C_{ej_1} , cuja disposição é dada, inicialmente, por (4.6),
7. Faça $j_1 = j_1 + 1$ e retorne ao passo 4 até $N_t = n_\theta$.

Para o passo 2, como mencionado anteriormente, o valor de n_a depende de ℓ , e deve ser determinado antes de executar o programa. Salienta-se que para cada iteração da Rotina II, deve-se retirar da matriz Ψ_{e0} os termos referentes aos agrupamentos de termos considerados espúrios na iteração anterior.

Por exemplo, considere um modelo com grau de não-linearidade 2, atrasos máximos da saída e da entrada, $n_y = n_u = 2$. O número máximo de agrupamentos de termos possível é $n_a = 6$, incluindo o termo constante, portanto, o número máximo de regressores é igual a 15. Porém como só existem 2 termos lineares em u e y , n_θ será igual a 11, assegurando que o modelo seja composto pelo mesmo número de regressores referentes a cada agrupamento de termos presente. Portanto, a linha da matriz de regressores inicial, Ψ_1 , é dada por:

$$\psi_e = [1 \quad y(k-1) \quad y(k-1)^2 \quad u(k-1) \quad u(k-1)^2 \quad u(k-1)y(k-1)] \quad (4.8)$$

Logo, os termos serão acrescentados à matriz Ψ_e seguindo a seguinte seqüência:

$$C_e = [\Sigma_0 \quad \Sigma_y \quad \Sigma_{y^2} \quad \Sigma_u \quad \Sigma_{u^2} \quad \Sigma_{yu}]. \quad (4.9)$$

Na próxima iteração da Rotina II, o termo $y(k-2)$ é inserido e a matriz linha da Ψ_e torna-se:

$$\psi_e = [1 \quad y(k-1) \quad \underline{y(k-2)} \quad y(k-1)^2 \quad u(k-1) \quad u(k-1)^2 \quad u(k-1)y(k-1)]$$

Os termos serão acrescentados na matriz de regressores seguindo a seqüência inicial de coeficientes de agrupamentos dada em (4.9) até que $N_t = n_\theta$.

Ressalta-se que as duas rotinas, usadas para auxiliar na determinação da estrutura da função estática não-linear, são usadas simultaneamente, visto que estas apenas sugerem se um agrupamento pode ou não ser considerado espúrio. Uma vez definida a estrutura da função estática seus coeficientes são estimados.

O ponto de partida do procedimento consiste em analisar o modelo contendo todos os agrupamentos de termos possíveis para o grau de não-linearidade

$\ell = 3$, e atrasos máximos da saída e da entrada, $n_y = n_u = 3$. Para isso, é gerado um conjunto de termos candidatos formado pelo termo constante mais três das possíveis combinações de grau $\ell = 3$, dos monômios $\{u(k-1), u(k-2), u(k-3), y(k-1), y(k-2), y(k-3)\}$. À medida que forem detectados agrupamentos de termos possivelmente espúrios, estes devem ser retirados e os algoritmos executados novamente até que nenhum agrupamento de termos seja considerado espúrio.

Isto é feito, normalmente, quando não se tem nenhuma informação *a priori* sobre o sistema, porém, quando alguma informação estiver disponível, esta pode, às vezes, ser usada, e as rotinas serão inicializadas contendo os agrupamentos os quais, forem necessários baseados na informação *a priori* (Barroso, 2001; Corrêa, 2001). Por exemplo, se conhecido o número de pontos fixos do sistema, pode-se estabelecer o grau de não-linearidade dos regressores da saída, ou, se o conhecimento da constante de tempo do sistema está disponível, pode-se determinar se a função apresentará ou não termos cruzados.

4.4 Algoritmo para a estimação da característica estática

Nesta seção é apresentado o algoritmo para estimação da função estática não-linear, a qual descreve a característica estática. A Rotina I e a Rotina II sugerem uma estrutura para compor a função estática não-linear, porém, se o usuário perceber que tal estrutura não atende, deve-se então, executar as rotinas com uma nova estrutura.

A estimação dos coeficientes da função é feita usando o conceito de agrupamento e coeficientes de agrupamentos de termos descrito na seção 2.8. O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1 - normalize os dados de entrada e saída, $u(k)$ e $y(k)$, respectivamente e divida-os em dois conjuntos, um para identificação contendo N_i amostras dos sinais, e outro para validação, contendo n_v ;

Passo 2 - escolha uma janela de comprimento L , tal que $L < N_i$, e o tamanho do passo Δ .

Passo 3 - entre com os valores de n_a e n_θ ;

Passo 4 - execute a Rotina I;

Passo 5 - execute a Rotina II;

Passo 6 - trace os gráficos das variações dos coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de janela de dados, obtidas no passo 4,

Passo 7 - trace os gráficos das variações dos coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas da matriz Ψ_e , obtidas no passo 5,

Passo 8 - verifique se há algum agrupamento de termo que possa ser considerado espúrio, conforme discutido na seção 4.1. Se houver, execute o passo 9, se não, execute o passo 12,

Passo 9 - faça $n_a = n_a - n_{ar}$,

Passo 10 - faça $n_\theta = n_\theta - (n_a \times 3 + n_{const})$;

Passo 11 - retorne ao passo 4;

Passo 12 - estime os coeficientes dos agrupamentos de termos a partir do modelo constituído pelos agrupamentos efetivos.

No passo 1, a normalização dos dados é necessária para que se possa comparar a ordem de grandeza dos coeficientes dos agrupamentos. Quando não for possível fazer a normalização, um cuidado adicional deve ser tomado nesta comparação. As N amostras dos dados dinâmicos são divididas em dois conjuntos, um para identificação do modelo, N_i , e outra para sua validação, N_v . Somente o conjunto contendo os dados para a identificação é usado, visto que, o objetivo é estimar a função estática, esta etapa faz parte do processo de identificação.

O passo 2 consiste em escolher o tamanho de Δ e o tamanho da janela de dados a ser percorrida $L < N_i$, de modo que essa janela L deslize ao longo de todas as N_i observações. Uma condição necessária é que L contenha uma faixa de dados com informações suficientes sobre o sistema para que o mesmo possa ser corretamente modelado. Um teste realizado para determinar L é considerar que, para Δ igual a uma constante, L assume um valor x . O algoritmo é executado e o resultado armazenado, em seguida o valor de x é aumentado e o algoritmo novamente executado, assim sucessivamente, até que a variação dos coeficientes, para diferentes valores de L , não

sofra alterações significativas. Acredita-se que, este valor de L já contenha as informações necessárias para que o modelo possa ser corretamente estimado.

No passo 3, as rotinas são inicializadas contendo todos os agrupamentos de termos possíveis em um modelo com grau de não-linearidade $\ell = 3$, logo, $n_a = 10$, inclusive o termo constante. Inicialmente, as matrizes de regressores, Ψ_0 e Ψ_1 , são constituídas por três termos relacionados a cada agrupamento de termos, $n_\theta = 28$, se. assumido que nenhuma informação *a priori* é utilizada.

No passo 8, utilizam-se os gráficos gerados no passo 6 e 7, para verificar se há indício de agrupamentos de termos espúrios de acordo com o discutido na seção 4.1. Se algum agrupamento de termos é indicado como espúrio, os termos relacionados a este agrupamento devem ser retirados das matrizes Ψ_0 e Ψ_e0 . O algoritmo retorna o valor de n_{ar} , número de agrupamentos espúrios, com exceção do termo constante. Quando o termo constante for considerado espúrio, $n_{const} = 1$, quando não o for, $n_{const} = 0$. Logo, os passos 9 e 10 podem ser executados. Se no passo 8, todos os agrupamentos de termos forem indicados como efetivos ao modelo, o algoritmo executa o passo 12.

No passo 12, os parâmetros do modelo constituído pelos termos relacionados aos agrupamentos de termos efetivos são estimados via algoritmos dos mínimos quadrados e os coeficientes dos agrupamentos de termos calculados.

Portanto, a função f que descreve a característica estática de um dado sistema, será composta pelos agrupamentos efetivos determinados no passo 8 e seus respectivos coeficientes, determinados no passo 12.

4.5 Resultados obtidos a partir de dados simulados

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos pela aplicação do algoritmo proposto na seção 4.4 a partir de dados dinâmicos gerados pela simulação de um modelo NARX polinomial previamente identificado. O objetivo é validar a metodologia determinando uma função estática composta pelos mesmos termos do modelo que a originou. A equação (4.10) descreve o modelo NARX polinomial (Cassini, 1999):

$$\begin{aligned} y(k) = & 1,2968y(k-1) + 0,0100u(k-1)u(k-2) + 0,0420u(k-1)^2 - \\ & -0,3796y(k-2) - 0,1403y(k-1)u(k-2) + \\ & +0,1028y(k-2)u(k-2) + 0,0041u(k-2)^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Os dados foram divididos em dois conjuntos, um para identificação e outro para validação, contendo 630 amostras cada. Os conjuntos de dados de entrada usados na identificação estão ilustrados na Figura 4.1 (a) e o

conjunto de dados de saída obtidos via simulação da equação (4.10) pode ser visto na Figura 4.1(b).

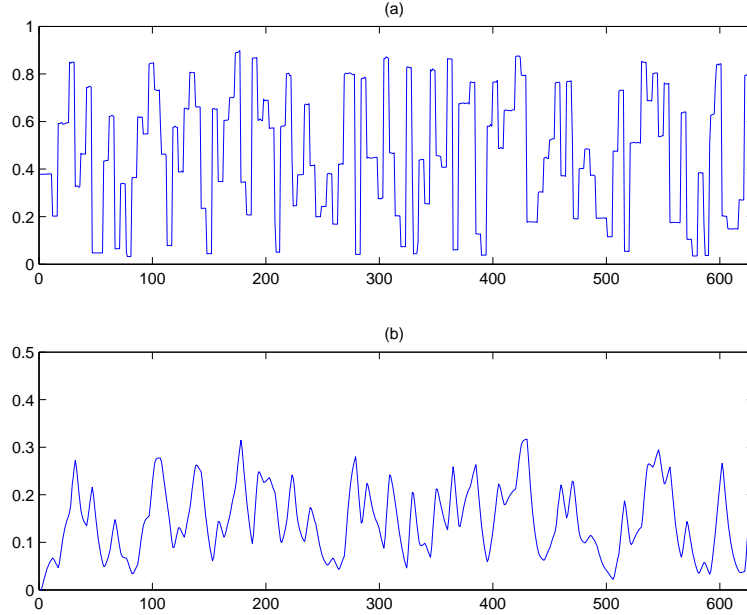


Figura 4.1: Dados de identificação. Em (a) estão os dados de entrada $u(k)$ e em (b) os dados de saída $y(k)$ obtidos pela simulação da equação (4.10). O eixo das abscissas contém o número de amostras e o eixo das ordenadas a amplitude dos sinais em pu.

O procedimento para obter a característica estática a partir do modelo NARX polinomial é mostrado na seção 2.9. Esta é descrita pela equação (4.11).

$$\bar{y} = \frac{0,0561\bar{u}^2}{0,0828 + 0,0375\bar{u}}. \quad (4.11)$$

4.5.1 Estimação da característica estática

Nesta seção são descritos todos os passos do algoritmo proposto na seção 4.4 para a recuperação da curva estática do aquecedor elétrico, utilizando os dados dinâmicos obtidos via simulação do modelo NARX (4.10).

1ª iteração do algoritmo:

Passo 1 - Normalizou-se os dados usados para identificação, dividindo-os por 5, os quais, estão representados na Figura 4.1.

Passo 2 - O tamanho da janela de dados usado é $L = 400$ e o do passo é $\Delta = 15$.

Passo 3 - Inicialmente, $n_a = 10$, uma vez que são usados todos os agrupamentos de termos possíveis a um modelo com grau de não-linearidade $\ell = 3$ e $n_\theta = 28$, pois, a estrutura dos modelos é composta por três regressores relacionados a cada agrupamento de termos.

Passo 4 - A Rotina I é executada para uma janela de dados $L = 400$ que se desloca de $\Delta = 15$, totalizando 16 janelas de tamanho L . A cada iteração do algoritmo os parâmetros do modelo são estimados através do método dos mínimos quadrados. Logo, para cada janela de dados L , um modelo é identificado e seus coeficientes de agrupamentos de termos calculados via procedimento descrito na seção 2.8 e armazenados na matriz \mathbf{C}_0 , cuja disposição das colunas é inicialmente dada por (4.2).

Passo 5 - A Rotina II é executada para uma janela de dados contendo todas as amostras usadas na identificação, ou seja, $L = N_i$, e uma estrutura variável. Inicialmente, um modelo é estimado para uma estrutura que contém apenas um regressor referente a cada agrupamento de termos, $n_\theta = 10$. Seus coeficientes de agrupamentos de termos são calculados e armazenados na matriz \mathbf{C}_{e0} . A cada iteração do algoritmo, um regressor é inserido na matriz Ψ_e , seguindo a seqüência dos coeficientes de agrupamentos relacionados a tais regressores dada em (4.6) e um novo modelo é estimado e seus coeficientes de agrupamentos calculados, até que $N_t = n_\theta = 28$.

Passo 6 - A variação dos coeficientes de agrupamentos de termos à medida que a janela de dados $L = 400$ desloca-se de $\Delta = 15$, está ilustrada na Figura 4.2.

Passo 7 - As variações dos coeficientes dos agrupamentos de termos à medida que termos são inseridos na matriz Ψ_e estão ilustradas pela Figura 4.3.

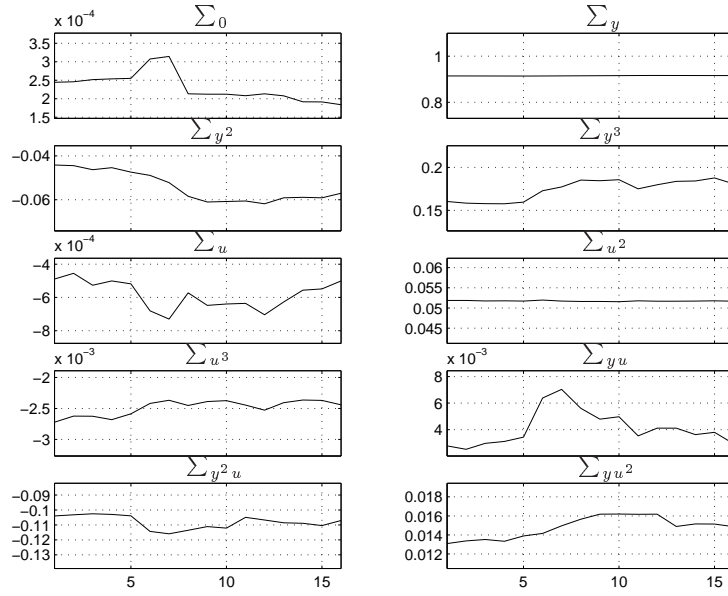


Figura 4.2: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados. Eixo x , número de janelas percorridas, 16 ao todo, eixo y , o valor de cada coeficiente.

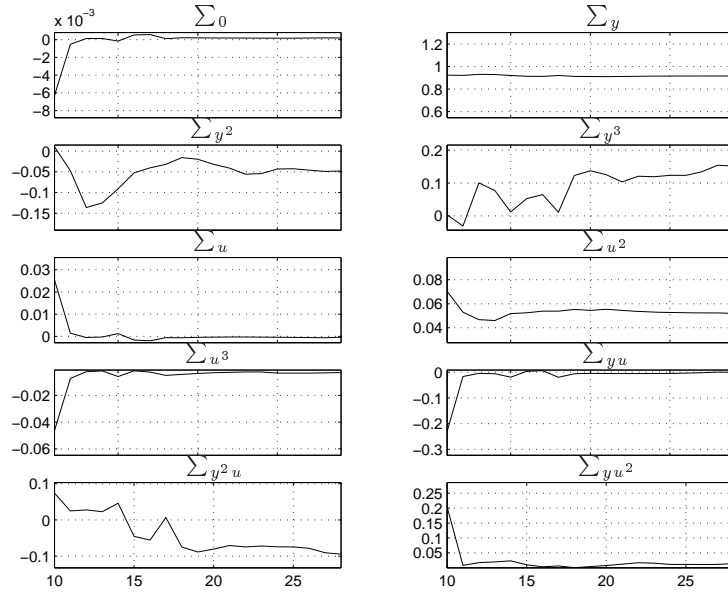


Figura 4.3: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas da matriz Ψ_e . No eixo x está o número de termos e no eixo y o valor dos coeficientes.

Passo 8 - Análise de agrupamentos de termos a partir das Figuras 4.2 e 4.3.

A análise de agrupamentos e coeficientes dos agrupamentos de termos, para uma janela de dados variável, a partir da Figura 4.2 sugere que os agrupamentos de termos $\Sigma_0, \Sigma_u, \Sigma_{u^3}$ e Σ_{yu} podem ser espúrios, uma vez que, seus respectivos coeficientes assumem valores pequenos quando comparados aos demais coeficientes.

Percebe-se que os coeficientes dos agrupamentos de termos $\Sigma_{u^2}, \Sigma_y, \Sigma_{y^2}, \Sigma_{y^3}, \Sigma_{y^2u}, \Sigma_{yu^2}$ variam relativamente pouco em torno de um valor diferente de zero e o agrupamento Σ_{u^2} possui uma tendência definida à medida que a janela de dados desloca-se, sendo que tais agrupamentos são considerados, em primeira análise, efetivos ao modelo.

A análise de agrupamentos de termos realizada com o auxílio da Figura 4.3 indica que os agrupamentos de termos $\Sigma_{y^2}, \Sigma_{y^3}$ e Σ_{y^2u} podem ser espúrios uma vez que seus coeficientes assumem valores que trocam de sinal à medida que termos são acrescentados à matriz Ψ_e . O agrupamento Σ_{y^3} também é considerado espúrio já que seu coeficiente oscila em uma faixa variável de valores à medida que a estrutura aumenta. Os coeficientes dos agrupamentos de termos Σ_0, Σ_u e Σ_{yu} assumem valores que tendem a zero à medida que aumenta o número de termos na matriz Ψ_e . Se os parâmetros relacionados aos termos que originam tais agrupamentos anulam-se, estes parâmetros podem ser inconsistentes, logo, os agrupamentos de termos oriundos podem ser espúrios.

Em primeira análise, somente os agrupamentos de termos, considerados espúrios devido o fato de seus respectivos coeficientes trocarem de sinal à medida que a janela de dados ou à medida que a estrutura muda, serão retirados. Isso porque a análise de agrupamentos de termos é um tanto subjetiva.

Salienta-se que é desejável que os agrupamentos a serem retirados sejam considerados espúrios nas análises dos resultados gráficos fornecidos pelas rotinas I e II, simultaneamente. Porém, como isso não ocorreu, apenas os agrupamentos de termos $\Sigma_{y^2}, \Sigma_{y^3}$ e Σ_{uy^2} , serão retirados.

Passo 9 - A análise feita no passo 8, indica que 3 agrupamentos de termos podem ser espúrios, $\Omega_{y^3}, \Omega_{y^2}$ e Ω_{y^2u} , portanto, o número de agrupamentos de termos a ser retirado $n_{ar} = 3$. Logo $n_a = 10 - 3 = 7$ agrupamentos de termos restantes.

Passo 10 - O número máximo de termos a ser considerado na próxima iteração do algoritmo é $n_\theta = 28 - (3 \times 3 + 0)$, pois, $n_{\text{const}} = 0$.

Passo 11 - Como foram detectados agrupamentos de termos possivelmente espúrios, as rotinas I e II são novamente executadas.

2ª iteração do algoritmo:

Passo 3 - O número de agrupamentos de termos é $n_a = 7$ e o número máximo de termos dos modelos é $n_\theta = 19$.

Passo 4 - Retirando da seqüência dada em (4.2), os agrupamentos considerados espúrios no passo 8 da 1ª iteração, Ω_{y^3} , Ω_{y^2} e Ω_{y^2u} , tem-se uma nova seqüência de agrupamentos de termos dada conforme (4.12):

$$C_1 = C_{e1} = \begin{bmatrix} \Sigma_0 & \Sigma_y & \Sigma_u & \Sigma_{u^2} & \Sigma_{u^3} & \Sigma_{yu} & \Sigma_{yu^2} \end{bmatrix}^T. \quad (4.12)$$

A Rotina I é executada para a janela de dados $L = 400$ e $\Delta = 15$, percorrendo um total de 16 janelas de tamanho L ao longo das N_i observações. Para cada modelo estimado, os coeficientes de agrupamento de termos são calculados e armazenados. Ressalta-se que os termos relacionados aos agrupamentos considerados espúrios, Ω_{y^3} , Ω_{y^2} e Ω_{y^2u} foram retirados da matriz Ψ_0 dada em (4.1).

Passo 5 - Para a Rotina II, $L = N_i = 630$, inicialmente, são estimados modelos e seus coeficientes de agrupamentos de termos calculados para estruturas contendo somente 7 regressores, $n_a = 7$, um referente a cada agrupamento de termos. A cada iteração do algoritmo é acrescentado 1 termo, seguindo a seqüência (4.12), até que o número máximo de regressores seja atingido, ou seja, $N_t = n_\theta = 19$. Ressalta-se que os termos relacionados aos agrupamentos considerados espúrios, Ω_{y^3} , Ω_{y^2} e Ω_{y^2u} foram retirados da matriz de regressores Ψ_e dada em (4.5).

Passo 6 - As variações dos coeficientes dos agrupamentos de termos à medida que a janela de dados $L = 400$ desloca-se de $\Delta = 15$, estão ilustradas na Figura 4.4.

Passo 7 - As variações dos coeficientes dos agrupamentos de termos à medida que termos são acrescentados à matriz Ψ_e estão ilustradas na Figura 4.5.

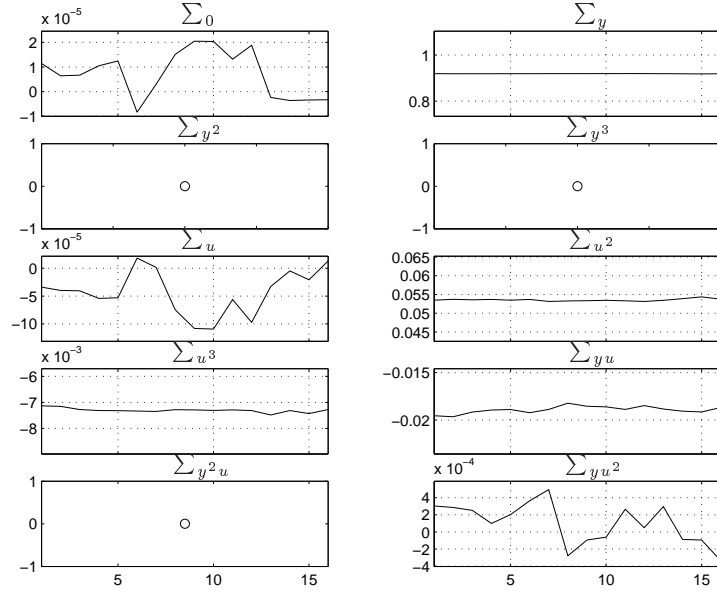


Figura 4.4: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados. No eixo x está o número de janelas percorridas, 16 ao todo, e no eixo y os valores dos coeficientes.

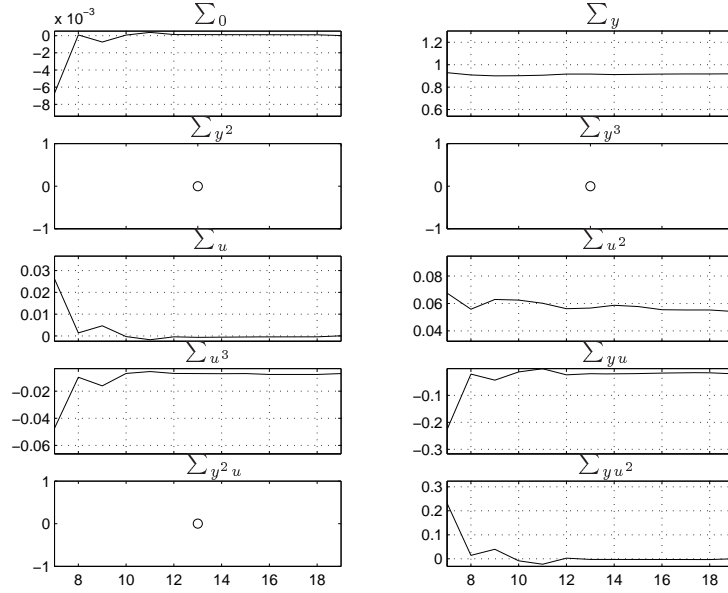


Figura 4.5: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas na matriz Ψ_e . No eixo x contém o número de termos e no eixo y os valores dos coeficientes.

Passo 8 - A análise de agrupamentos e coeficientes dos agrupamentos de termos a partir da Figura 4.4 mostra que os agrupamentos de termos Σ_0 , Ω_u e Ω_{yu^2} podem ser espúrios, pois, seus respectivos coeficientes assumem valores que mudam de sinal à medida que L varia. Além disso, seus valores são pequenos quando comparados aos demais coeficientes, exceto Ω_{u^3} . Este último também possui coeficiente que assume valores pequenos quando comparados aos demais coeficientes, porém este fato não é proveniente de anulação dos parâmetros dos termos referentes a este agrupamento de termo, como mostram as Tabelas ?? e ??. Percebe-se que este coeficiente tende a um valor diferente de zero. Portanto, este não será considerado espúrio.

A análise da Figura 4.5 indica que os agrupamentos de termos Ω_0 , Ω_u e Ω_{yu^2} podem ser espúrios, uma vez que seus respectivos coeficientes assumem valores que mudam de sinal à medida que termos são acrescentados à matriz Ψ_e . Além disso, os coeficientes de tais agrupamentos tendem a zero à medida que termos são acrescentados a matriz Ψ . Analisando as Tabelas ?? e ??, verifica-se que os parâmetros dos termos referentes a cada agrupamento de termo, Ω_u e Ω_{yu^2} , anulam-se, ou seja, estes agrupamentos de termos podem ser retirados do modelo.

Passo 9 - A análise feita no passo 8, indica que 3 agrupamentos de termos podem ser considerados espúrios, Ω_0 , Ω_u e Ω_{yu^2} , portanto, o número de agrupamentos de termos a ser retirado, $n_{ar} = 3$. Logo, $n_a = 7 - 3 = 4$ agrupamentos de termos.

Passo 10 - O número máximo de termos da matriz Ψ_0 e Ψ_{e0} para a próxima iteração do algoritmo é $n_\theta = 19 - (3 \times 2 + 1) = 12$, $n_{\text{const}} = 1$.

Passo 11 - Como foram detectados agrupamentos de termos possivelmente espúrios, as rotinas são novamente executadas e o algoritmo retorna ao passo 3.

3ª iteração do algoritmo:

Passo 3 - O número de agrupamentos de termos é $n_a = 4$ e o número máximo de termos $n_\theta = 12$.

Passo 4 - Considerando os resultados da análise realizada no passo 8 na segunda iteração, a Rotina I calcula os coeficientes dos agrupamentos de termos a partir de modelos que contem os agrupamentos $\Omega_y, \Omega_{u^2}, \Omega_{u^3}$ e Ω_{uy} . Logo, a nova seqüência dos coeficientes dos agrupamentos de termos é dada por:

$$C_2 = C_{e2} = \begin{bmatrix} \Sigma_y & \Sigma_{u^2} & \Sigma_{u^3} & \Sigma_{yu} \end{bmatrix}^T. \quad (4.13)$$

Ressalta-se que a matriz Ψ_0 irá conter apenas 3 termos relacionados a cada agrupamento de termos e a disposição dos termos segue a seqüência dos seus respectivos coeficientes de agrupamentos dada em (4.13).

Passo 5 - A Rotina II calcula os coeficientes de agrupamentos de termos para cada modelo estimado, que inicialmente contém 3 termos referentes a cada agrupamento de termos, sendo que para cada iteração do algoritmo, é inserido 1 termo na matriz Ψ_e , seguindo a seqüência (4.13), até que o modelo contenha todos os termos, $N_t = n_\theta = 12$.

Passo 6 - As variações dos coeficientes dos agrupamentos de termos à medida que a janela de dados desloca-se, estão ilustradas na Figura 4.6.

Passo 7 - As variações dos coeficientes de agrupamentos de termos à medida que o número de termos aumenta estão ilustradas na Figura 4.7.

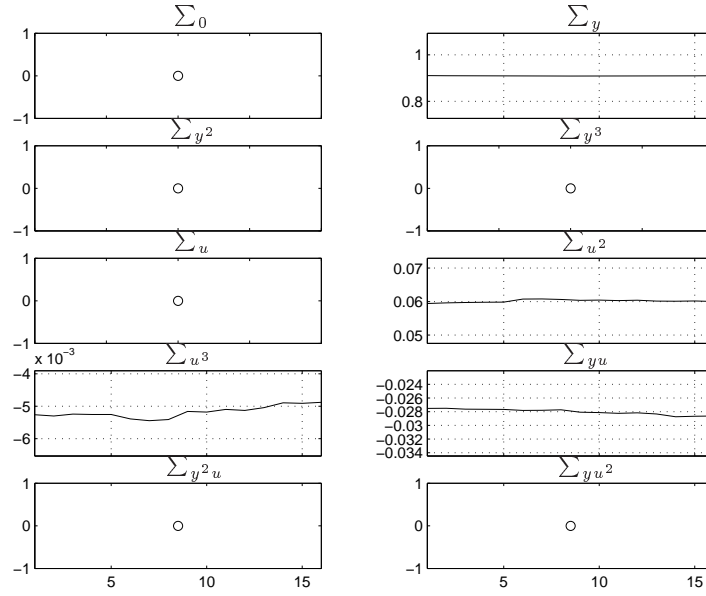


Figura 4.6: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados. No eixo x está o número de janelas percorridas, 16 no total, e no eixo y os valores dos coeficientes.

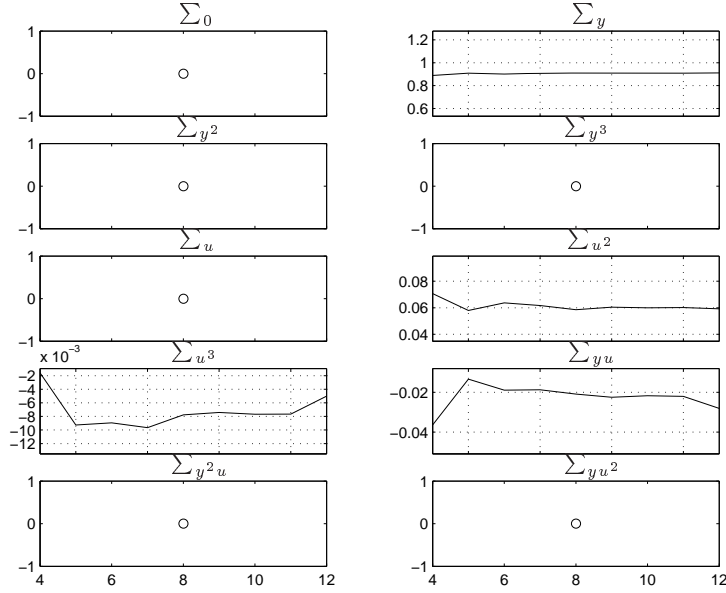


Figura 4.7: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas na matriz Ψ_e . No eixo x está o número de termos e no eixo y os valores dos coeficientes.

Passo 8 - A análise de agrupamento de termos e coeficientes de agrupamentos feita através das Figuras 4.6 e 4.7, indica que o agrupamento Ω_{u^3} pode ser espúrio. Verifica-se que seu coeficiente assume valores pequenos quando comparados aos demais coeficientes, o que já havia sido observado desde as análises anteriores. Portanto, o agrupamento de termos Σ_{u^3} é retirado do modelo.

Pelas Figuras, nota-se a tendência definida dos coeficientes dos agrupamentos Σ_y , Σ_{u^2} e Σ_{uy} , o que pode ser um indício de que tais agrupamentos são efetivos ao modelo.

Passo 9 - A análise feita no passo 8, indica que um agrupamento de termos pode ser considerado espúrio, Σ_{u^3} , portanto, o número de agrupamentos de termos a ser retirado, $n_{ar} = 1$. Logo $n_a = 4 - 1 = 3$ agrupamentos de termos.

Passo 10 - O número máximo de termos da matriz Ψ_0 e Ψ_{e0} para a próxima iteração do algoritmo é $n_\theta = 12 - (3 \times 1) = 9$, $= 0$.

Passo 11 - Como foram detectados possíveis agrupamentos de termos espúrios, o algoritmo retorna ao passo 3.

4^a iteração do algoritmo:

Passo 3 - O número de agrupamento de termos $n_a = 30$ e o número máximo de termos $n_\theta = 9$.

Passo 4 - Os coeficientes de agrupamentos de termos, na Rotina I, são obtidos a partir de modelos constituídos pelos agrupamentos de termos, Ω_y , Ω_{u^2} e Ω_{yu} . Logo, a nova seqüência dos coeficientes dos agrupamentos de termos é dada por:

$$C_3 = C_{e3} = \begin{bmatrix} \Sigma_y & \Sigma_{u^2} & \Sigma_{yu} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Passo 5 - Na Rotina II são estimados modelos que inicialmente são constituídos por 3 regressores referentes a cada agrupamento de termo. A cada iteração da rotina, é adicionado um termo na matriz Ψ_e seguindo a seqüência dada em (4.14), até que a estrutura contenha 9 termos.

Passo 6 - A variação dos coeficientes dos agrupamentos de termos, obtidos a partir de modelos estimados à medida que a janela de dados $L = 400$ desloca-se de $\Delta = 15$, está ilustrada na Figura 4.8.

Passo 7 - A Figura 4.9, mostra as variações dos coeficientes dos agrupamentos de termos calculados a partir de uma família de modelos obtidos via Rotina II.

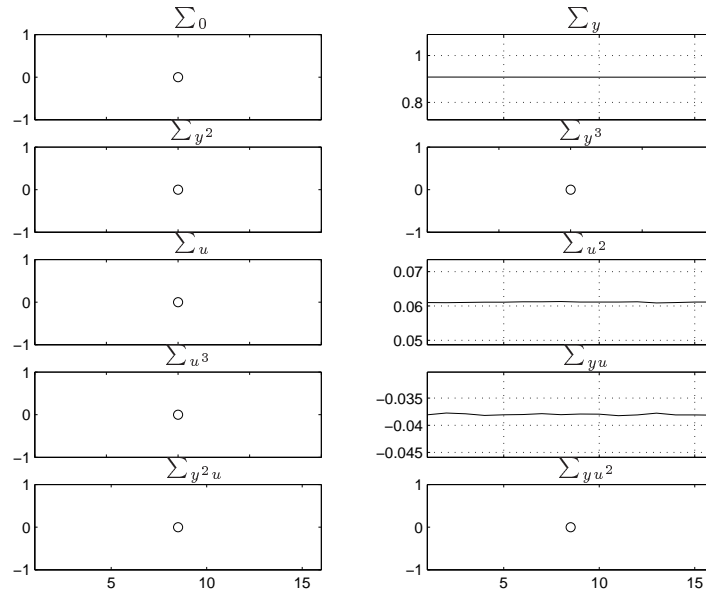


Figura 4.8: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados. No eixo x está o número de janelas percorridas, 16 no todo, e no eixo y o valor dos coeficientes em cada janela.

Passo 8 - A análise das Figuras 4.8 e 4.9 mostra que os coeficientes dos agrupamentos de termos Ω_y , Ω_{u^2} e Ω_{yu} apresentam tendência definida, logo, pode-se considerar que estes são efetivos ao modelo.

Passo 12 - Dessa forma, os termos que constituem a função usada para recuperar a curva estática são definidos, ou seja, esta função será composta pelos agrupamentos Ω_y , Ω_{u^2} e Ω_{yu} . Logo, os parâmetros do modelo constituído por 3 termos relacionados a estes agrupamentos de termos são estimados usando o método dos mínimos quadrados. Os coeficientes dos agrupamentos de termos são calculados usando os conceitos de pontos fixos e agrupamentos e coeficientes de agrupamentos de termos, como mostrado na seção 2.9.2. A equação (4.15) descreve a função estática não-linear estimada, ou seja, a

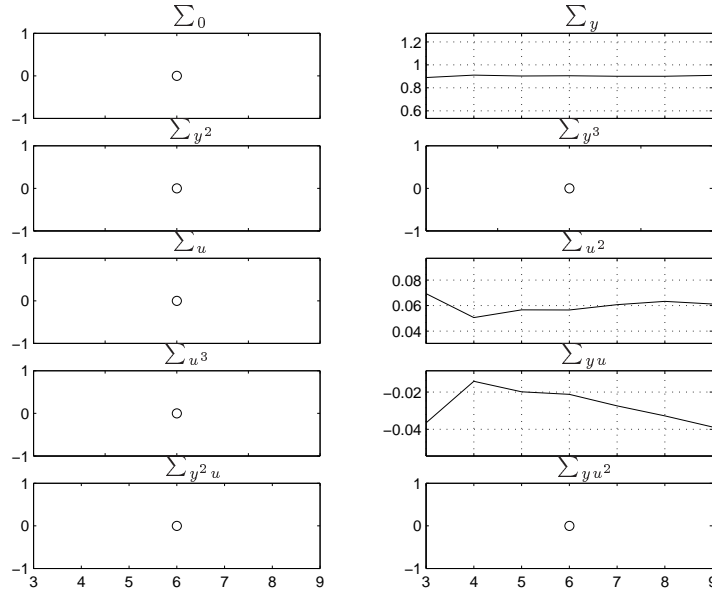


Figura 4.9: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas da matriz Ψ_e . No eixo x está o número de termos do modelo e no eixo y o valor de cada coeficiente.

relação estática entre \bar{u} e \bar{y} , que pode ser reescrita como $\bar{y} = f(\bar{u})$, sendo f uma função racional:

$$\bar{y} = 0,9081\bar{y} + 0,0612\bar{u}^2 - 0,0388\bar{y}\bar{u},$$

ou

$$\bar{y} = \frac{0,0612\bar{u}^2}{0,0919 + 0,0388\bar{u}}. \quad (4.15)$$

A característica estática é “levantada” a partir da relação (4.15) para cada ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) . A característica estática estimada através de (4.15), comparada com a curva do sistema simulado proveniente da equação (4.11), pode ser vista na Figura 4.10.

Comparando as equações (4.11) e (4.15), verifica-se que ambas possuem os mesmos termos e seus coeficientes são bem próximos, o que acarreta em uma boa aproximação da curva estática, como mostrado pela Figura 4.10. A validação quantitativa usando o índice de correlação linear entre as curvas é igual a 1, o que significa um bom ajuste.

Evidentemente que a qualidade desta aproximação deve-se, entre outras coisas, à ausência de ruído e ao fato de que a característica estática do sistema original ser da mesma forma que a do modelo NARX polinomial usado para aproximá-la.

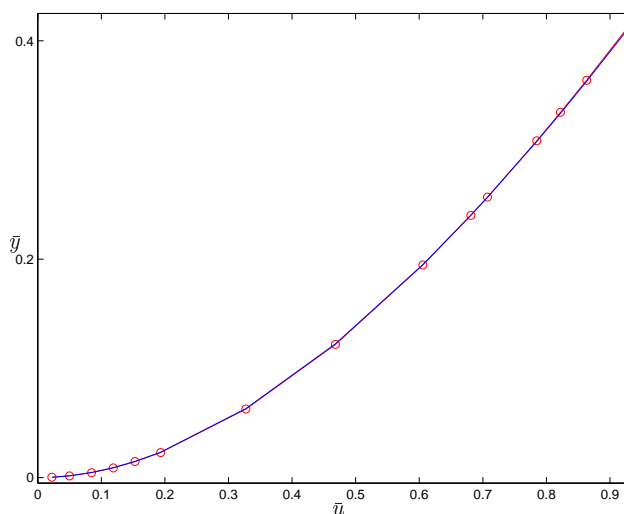


Figura 4.10: A curva estimada através da equação (4.15) está representada por (-o-), e a linha contínua (-) é a curva estimada pela equação (4.11).

4.6 Discussão

Neste capítulo foi apresentado um procedimento para a estimação da característica estática a partir de dados dinâmicos. Uma vez obtida a curva estática, os modelos de Hammerstein e de Wiener podem ser identificados.

Apesar de relevantes, a análise de agrupamentos de termos serve apenas para sugerir qual a melhor estrutura, pois ainda não se sabe qual a contribuição de um agrupamento de termos em um modelo (Jácome, 1996).

Um ponto importante neste procedimento comparado aos demais, que utilizam funções polinomiais para aproximar a função estática não-linear, é que no presente trabalho, apenas limita-se a ordem do polinômio, ou seja, a função não precisa conter todos os termos referentes a um polinômio de ordem ℓ e sim os necessários à recuperação da curva estática. Além disso, esta pode ser uma função racional.

Percebe-se através da 1ª iteração do algoritmo, que a análise de agrupamentos e coeficientes de agrupamentos de termos a partir dos resultados gráficos, nem sempre proporciona informações claras sobre o comportamento dos coeficientes dos agrupamentos de termos. Porém, logo após serem retirados alguns agrupamentos, esta pode fornecer resultados claros sobre o comportamento dos coeficientes.

Este procedimento é usado na identificação de modelos de Hammerstein e de Wiener a partir de dados reais no próximo capítulo.

Capítulo 5

Identificação de sistemas usando modelos de Hammerstein e de Wiener

O objetivo deste capítulo é a identificação de sistemas não-lineares usando modelos de Hammerstein e de Wiener. Deseja-se que tais modelos sejam capazes de aproximar a resposta dinâmica do sistema, bem como, aproximar a característica estática do mesmo. O procedimento proposto no capítulo 4 é aplicado para a estimação da característica estática a partir de dados dinâmicos do sistema em questão.

São usados os dados de entrada e saída de três sistemas reais. O primeiro consiste de um pequeno aquecedor elétrico¹, cujos dados dinâmicos excursionam uma ampla faixa de operação do sistema. O segundo sistema é uma válvula pneumática, cujos dados estão fortemente contaminados por ruído. O terceiro conjunto de dados usado é de um conversor estático do tipo Buck, sendo que os dados dinâmicos excursionam uma faixa limitada de operação do sistema.

5.1 Aquecedor elétrico

O sistema a ser identificado nesta seção consiste de um pequeno aquecedor elétrico. A descrição do sistema, bem como o procedimento para a aquisição dos dados, estão descritos em (Cassini, 1999). Os sinais de entrada e saída, utilizados na identificação, estão representados na Figura 5.1, sendo

¹No capítulo 4 foram usados dados obtidos a partir da simulação de um modelo NARX polinomial previamente identificado do aquecedor elétrico. Porém, ressalta-se que no presente capítulo são utilizados os dados reais de tal sistema.

que a entrada é o sinal de tensão aplicada ao aquecedor e a saída é o sinal amplificado de um termopar.

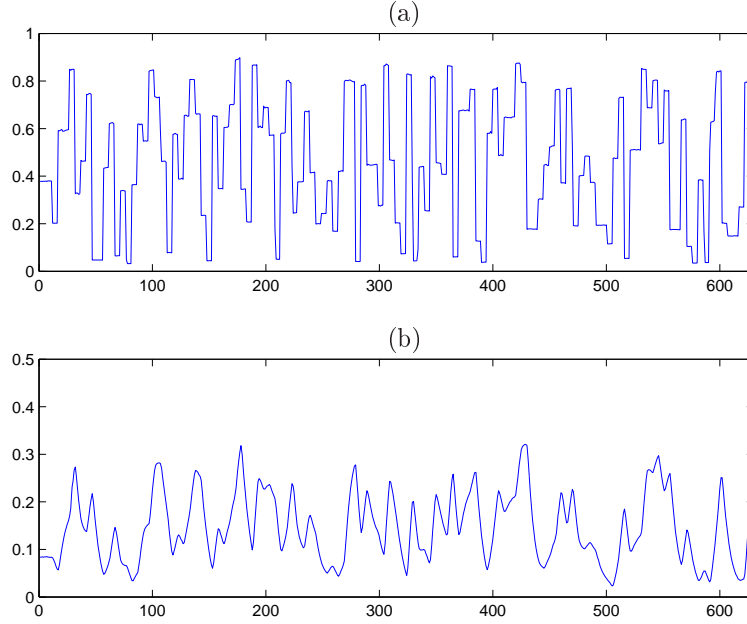


Figura 5.1: Dados de identificação. Em (a) estão os dados de entrada $u(k)$ e em (b) os dados de saída $y(k)$ (`din3.mat`). O eixo das abscissas contém o número de amostras e o eixo das ordenadas a amplitude dos sinais em pu.

5.1.1 Estimação da característica estática

O algoritmo para a estimação da curva estática a partir de dados dinâmicos, descrito no capítulo 4, é aplicado utilizando-se as 630 amostras iniciais do sinal de entrada e saída, normalizadas, conforme mostra a Figura 5.1. O tamanho da janela de dados é $L = 300$ que se desloca de $\Delta = 15$, obtendo-se um total de 23 janelas percorridas. Como mencionado no capítulo 4, quando não se utiliza nenhum conhecimento *a priori*, como no presente caso, a Rotina II é inicializada contendo um termo referente a cada agrupamento de termos. Logo, para um modelo com grau de não-linearidade $\ell = 3$, o número de agrupamentos de termos possíveis é $n_a = 10$, e o número máximo de termos presente na matriz de regressores é $n_\theta = 28$.

As Figuras 5.2 e 5.3 ilustram as variações dos coeficientes dos agrupamentos de termos à medida que a janela de dados $L = 300$ desloca-se de $\Delta = 15$ e à medida que termos são inseridos na matriz de regressores, Ψ_e , respectivamente.

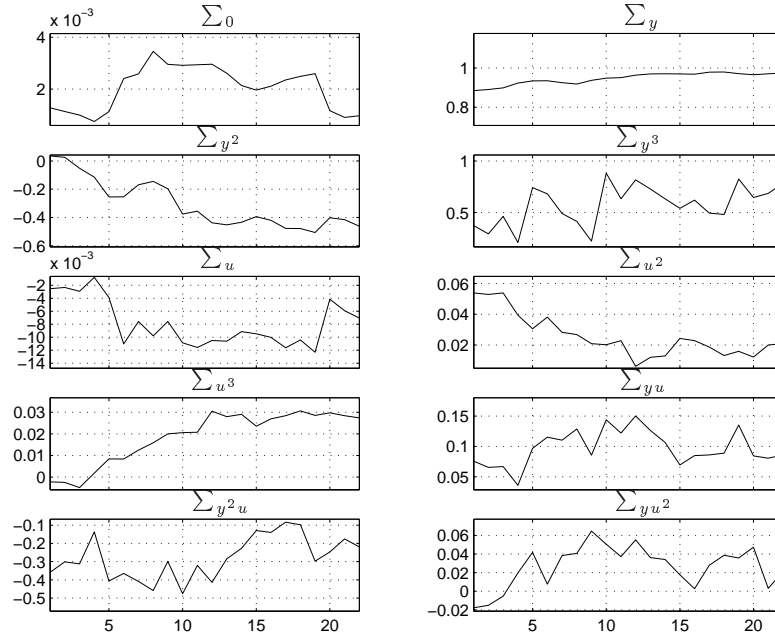


Figura 5.2: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados. No eixo x , o número total de janelas, 23, no eixo y , o valor de cada coeficiente.

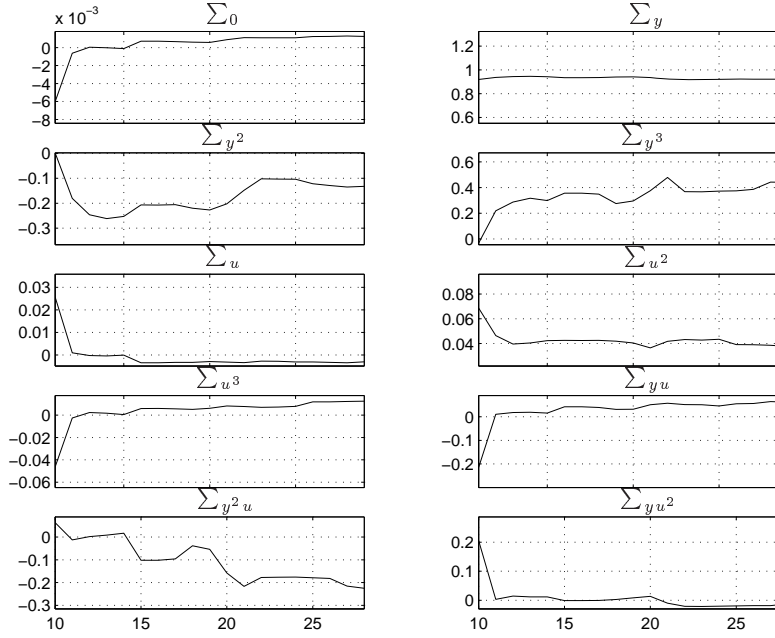


Figura 5.3: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas da matriz Ψ_e . No eixo x está o número de termos e no eixo y o valor de cada coeficiente.

A partir das Figuras 5.2 e 5.3 pode-se analisar o comportamento dos coeficientes dos agrupamentos de termos, e verificar se existe indício de que algum agrupamento de termo possa ser espúrio, conforme o discutido na seção 4.1. Pela Figura 5.2, verifica-se que os coeficientes dos agrupamentos de termos Ω_0 e Ω_u assumem valores pequenos se comparados aos demais, o que pode ser um indício de que estes agrupamentos sejam espúrios². Já os coeficientes dos agrupamentos de termos Ω_{y^2} , Ω_{u^3} e Ω_{yu^2} assumem valores que mudam de sinal à medida que a janela de dados $L = 300$ desloca-se de $\Delta = 15$, sendo que estes também podem ser considerados espúrios.

A análise feita a partir da Figura 5.3 indica que os agrupamentos de termos Ω_0 , Ω_{y^2} , Ω_{y^3} , Ω_u , Ω_{u^3} , Ω_{yu} , Ω_{uy^2} e Ω_{u^2y} podem ser espúrios, pois seus respectivos coeficientes trocam de sinal à medida que termos são inseridos na matriz de regressores, Ψ_e .

Porém, como a análise de agrupamentos de termos apenas sugerem que um agrupamento é espúrio, optou-se, inicialmente, por retirar os agrupamentos de termos considerados espúrios nos dois casos, ou seja, utilizou-se a “intersecção” dos resultados das análises realizadas a partir da Rotina I e da Rotina II. Dessa forma, os agrupamentos de termos Ω_{y^2} , Ω_{u^3} e Ω_{uy^2} são retirados e as rotinas I e II novamente executadas.

Na segunda iteração do algoritmo, a análise de agrupamentos de termos é realizada para modelos constituídos pelos agrupamentos de termos Ω_0 , Ω_y , Ω_{y^3} , Ω_u , Ω_{u^2} , Ω_{yu} e Ω_{u^2y} . A análise realizada a partir dos resultados da Rotina I sugere que os agrupamentos de termos Ω_{y^3} , Ω_u , Ω_{yu} e Ω_{u^2y} são espúrios, uma vez que seus respectivos coeficientes assumem valores que mudam de sinal à medida que a janela de dados $L = 300$ desloca-se de $\Delta = 15$. Já o agrupamento Ω_0 é indicado como espúrio, pois seu coeficiente assume, novamente, valores pequenos se comparado aos demais.

A análise realizada a partir dos resultados da Rotina II indica que os agrupamentos de termos Ω_0 , Ω_{y^3} , Ω_u , Ω_{yu} e Ω_{u^2y} são espúrios, uma vez que seus respectivos coeficientes trocam de sinal à medida que termos são inseridos na matriz de regressores. Portanto, os agrupamentos de termos Ω_0 , Ω_{y^3} , Ω_u , Ω_{yu} e Ω_{u^2y} são retirados e as rotinas novamente executadas.

A terceira iteração do algoritmo analisa o comportamento dos coeficientes agrupamentos de termos restantes, ou seja, Ω_y e Ω_{u^2} , e os resultados gráficos das rotinas I e II estão na Figuras 5.4 e 5.5, respectivamente.

²Em primeira análise, os agrupamentos de termos cujos coeficientes assumem valores pequenos quando comparado aos demais são retirados. Isto se justifica conforme discutido na seção 4.1.

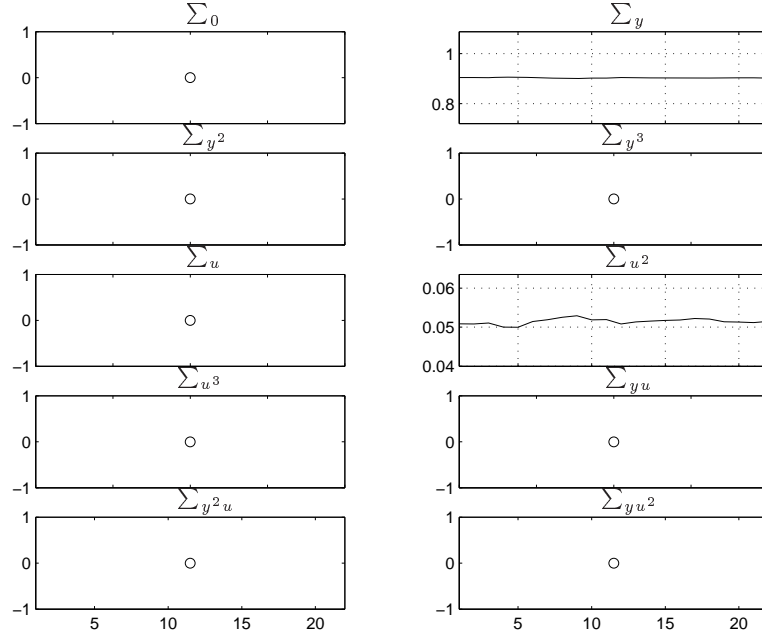


Figura 5.4: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados. No eixo x está o número total de janelas percorridas, 23, e no eixo y o valor de cada coeficiente.

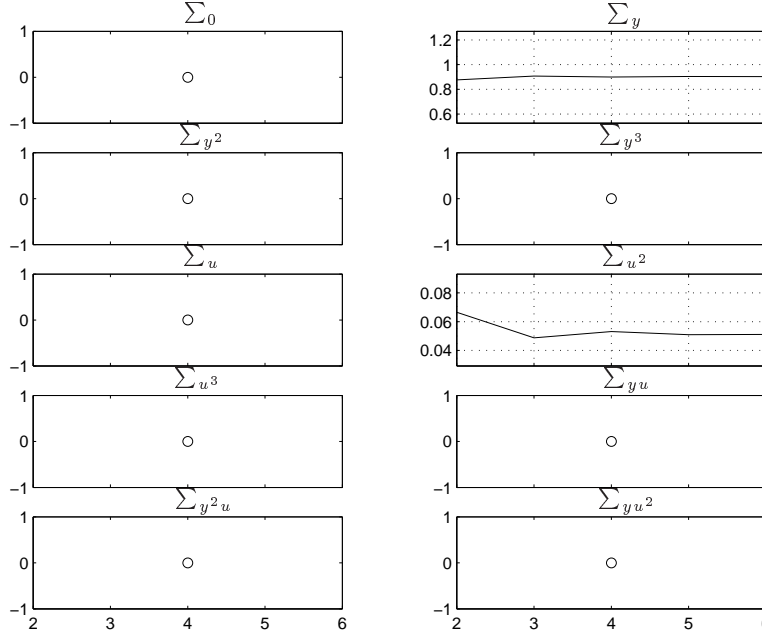


Figura 5.5: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas da matriz Ψ_e . No eixo x está o número de termos e no eixo y o valor de cada coeficiente.

Percebe-se, pelas Figuras 5.4 e 5.5, que os coeficientes dos agrupamentos de termos Ω_y e Ω_{u^2} apresentam uma tendência definida, tanto para o caso em que a janela de dados varia, Figura 5.4, quanto para o caso em que o número de termos presente na matriz de regressores aumenta, Figura 5.5. Logo, pode-se considerar que estes agrupamentos são efetivos ao modelo. Portanto, a função estática não-linear que descreve a característica estática será composta por tais agrupamentos de termos.

Os parâmetros do modelo, constituído pelos agrupamentos de termos Ω_y e Ω_{u^2} , são estimados via algoritmo dos mínimos quadrados, descrito na seção 2.6. Os coeficientes destes agrupamentos são determinados conforme seção 2.8. Dessa maneira, a aproximação da relação estática entre a entrada e a saída estacionárias do aquecedor elétrico é dada por:

$$\begin{aligned} 0,9034\bar{y} &= 0,0511\bar{u}^2, \\ \bar{y} &= 0,0566\bar{u}^2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

A característica estática “levantada” a partir da equação (5.1), para uma entrada estacionária que varia na faixa de $0,02 \leq \bar{u} \leq 0,93$, sobreposta à característica estática do sistema está representada na Figura 5.6³, através da qual pode-se verificar o bom ajuste da mesma. O índice de correlação linear entre as saídas estacionárias, estimada e medida, é $r = 0,9990$.

Uma vez que a função que descreve a característica estática do sistema foi determinada, torna-se possível a estimação dos modelos de Hammerstein e de Wiener, pois através da função estática pode-se estimar o sinal intermediário de tais modelos.

5.1.2 Modelo de Hammerstein

A relação estática descrita em (5.1) é reescrita usando-se a entrada e a saída do bloco estático não-linear do modelo de Hammerstein, \bar{u} e \bar{v} , respectivamente, tal como:

$$\hat{v} = 0,0566\bar{u}^2, \quad (5.2)$$

A característica estática do modelo de Hammerstein, estimada a partir de (5.2), para uma entrada estacionária que varia de $0,02 \leq \bar{u} \leq 0,93$ ⁴, está representada na Figura 5.6. O índice de correlação linear entre as saídas estacionárias, estimada e medida, é $r = 0,9990$.

³Ressalta-se que a curva estática aproximada por (5.1), mostrada na Figura 5.6, tem no eixo y a sua respectiva saída estacionária, \bar{y} .

⁴Utilizou-se a faixa de valores percorrida pela entrada estacionária do sistema (estat3.m).

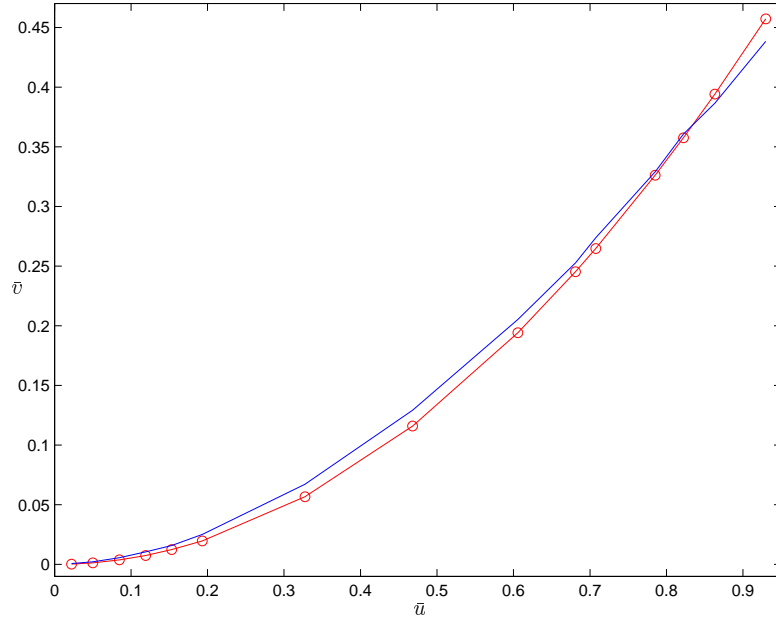


Figura 5.6: Característica estática. (—) Sistema real e (—o) a do modelo de Hammerstein dada pela (5.2).

O sinal intermediário, $\bar{v}(k)$, pode ser estimado diretamente através da função estática descrita em (5.2). Logo, o modelo ARX é obtido para o par de entrada e saída do bloco dinâmico, $\hat{v}(k)$ e $y(k)$, respectivamente, sendo sua estrutura determinada segundo o menor índice RMSE do modelo de Hammerstein global, portanto, tem-se que:

$$y(k) = 1,1729y(k-1) + 0,0887\hat{v}(k-1) - 0,2750y(k-2) + 0,0127\hat{v}(k-2). \quad (5.3)$$

A simulação livre do modelo de Hammerstein composto por (5.2) e (5.3), está mostrada na Figura 5.7, através da qual verifica-se o bom desempenho do modelo para predição do sistema. A medida quantitativa do ajuste da resposta dinâmica do modelo de Hammerstein é $\text{RMSE} = 0,0933$.

5.1.3 Modelo de Wiener

A característica estática do modelo Wiener é dada com respeito à entrada e à saída estacionárias do bloco estático não-linear, ou seja, \bar{v} e \bar{y} , respectivamente. Logo, a relação dada em (5.1) é reescrita da seguinte maneira:

$$\bar{y} = 0,0566\bar{v}^2, \quad (5.4)$$

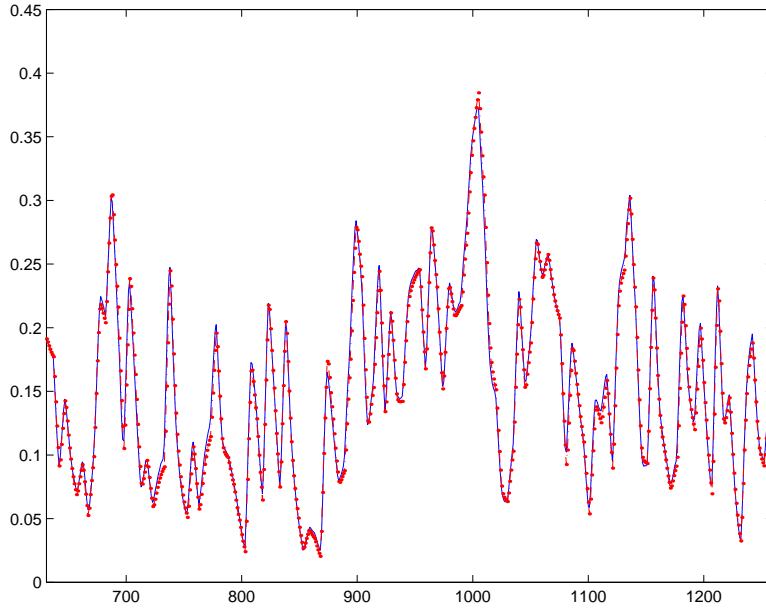


Figura 5.7: Simulação livre - (—) Saída do sistema e (.-) saída do modelo de Hammerstein composto por (5.2) e (5.3). No eixo x está o número de amostras e no eixo y a amplitude dos sinais em pu.

Para que o modelo de Wiener possa ser identificado, é necessário estimar o sinal intermediário, $\hat{v}(k)$, que não pode ser obtido diretamente da relação (5.4). Logo, é necessário inverter a função estática (5.4). Um polinômio de ordem 7 é ajustado à inversa numérica da função estática (5.1), tal que:

$$\begin{aligned} \hat{v} = & 21501,422\bar{y}^7 - 34353,954\bar{y}^6 + 22160,557\bar{y}^5 - 7405,473\bar{y}^4 + \\ & + 1373,354\bar{y}^3 - 143,372\bar{y}^2 + 10,034\bar{y} + 0,040. \end{aligned} \quad (5.5)$$

A ordem do polinômio é determinada segundo o maior índice de correlação linear entre a entrada do sistema, $u(k)$, e o sinal intermediário estimado, $\hat{v}(k)$. O polinômio (5.5) está representado na Figura 5.8 para um valor de \bar{y} que varia na faixa $0 \leq \bar{y} \leq 0,44$.

O modelo ARX estimado para o par de entrada e saída do bloco dinâmico do modelo de Wiener, $u(k)$ e $\hat{v}(k)$, respectivamente, é dado por (5.6), sendo sua estrutura definida segundo o menor índice RMSE do modelo de Wiener global, tal como:

$$\begin{aligned} \hat{v}(k) = & 2,2823\hat{v}(k-1) + 0,0702u(k-1) - 1,6677\hat{v}(k-2) + \\ & + 0,3838\hat{v}(k-3) - 0,0684u(k-2). \end{aligned} \quad (5.6)$$

A saída resultante da simulação livre do modelo de Wiener composto por (5.6) e (5.4), está representada na Figura 5.9. Por meio de uma inspe-

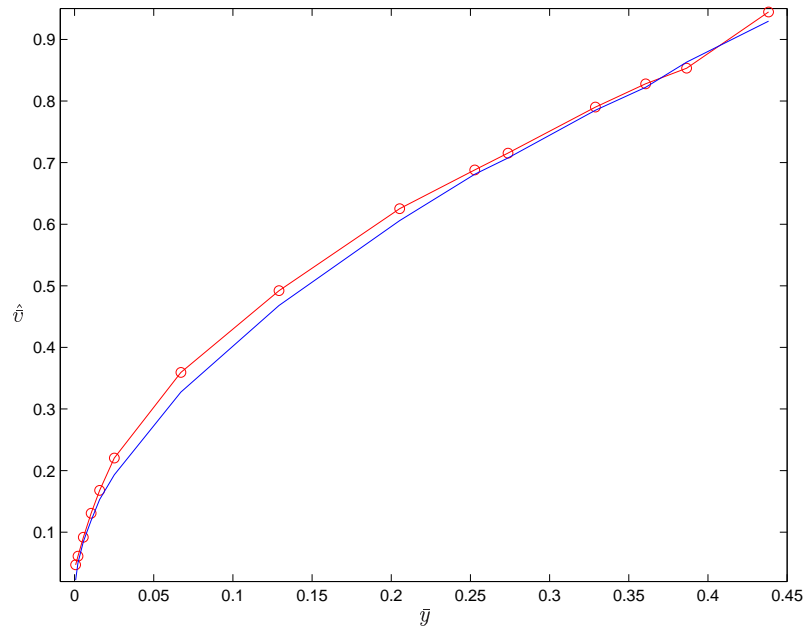


Figura 5.8: Inversa da característica estática. (—) Sistema e em (o) polinômio dado pela equação (5.5).

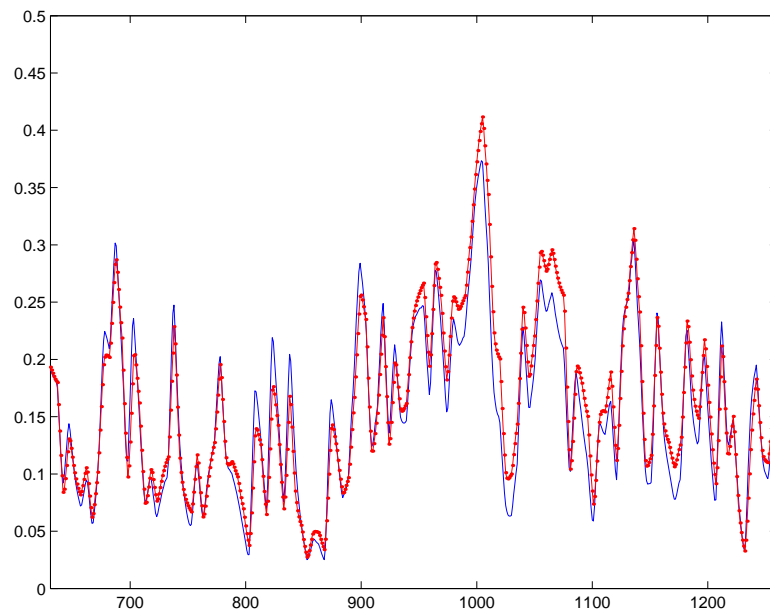


Figura 5.9: Simulação livre. (—) Saída do sistema e (.-) saída do modelo de Wiener composto por (5.6) e (5.4). O eixo x contém o número de amostras e o eixo y a amplitude dos sinais em pu.

ção visual da Figura 5.9 e do índice quantitativo do desempenho do ajuste dinâmico, $\text{RMSE} = 0,2816$, verifica-se que o modelo de Wiener aproxima com certa dificuldade a resposta dinâmica do sistema. A característica estática do modelo de Wiener dada pela relação (5.4), para uma mesma entrada estacionária, que varia na faixa $0,02 \leq \bar{v} \leq 0,93$, está representada na Figura 5.10. O índice de correlação linear é o mesmo obtido pelo modelo de Hammerstein e pela função estática estimada (5.1), ou seja, $r = 0,9990$.

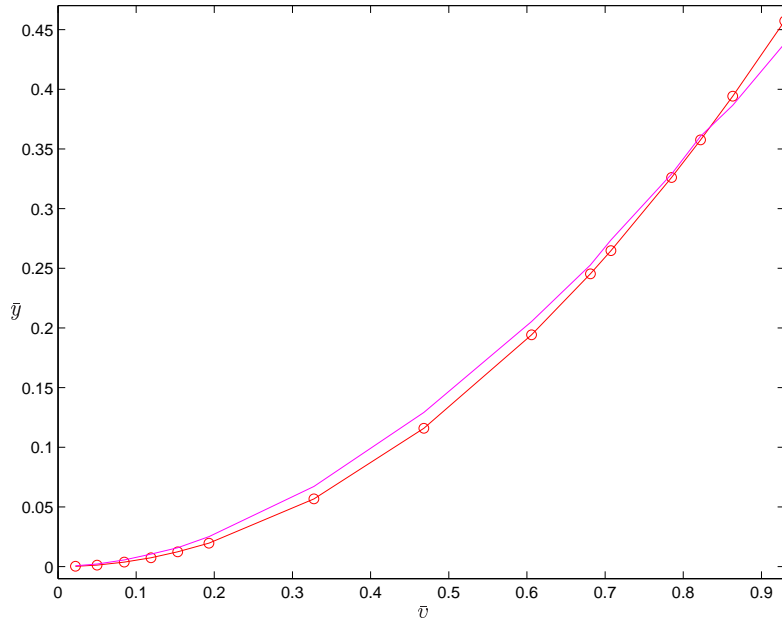


Figura 5.10: Característica estática (—) do sistema real e (—o) a do modelo de Wiener dada por (5.4).

5.1.4 Modelo NARX polinomial

Na presente seção é apresentada uma comparação das representações de Hammerstein e de Wiener com a representação NARX polinomial. Neste contexto, procurou-se um modelo NARX polinomial que apresentasse um melhor desempenho na aproximação das respostas estática e dinâmica, tal como:

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 1,2198y(k-1) - 0,3209y(k-2) + 0,0013u(k-1) + \\
 & + 0,0051u(k-2) + 0,0408u(k-1)^2 - 0,0072u(k-2)^2 + \\
 & + 0,0100u(k-2)u(k-1).
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

O modelo NARX polinomial (5.7) foi obtido admitindo-se como conhecida a sua estrutura (Corrêa, 2001) e estimando seus parâmetros via estimador dos mínimos quadrados⁵. O modelo NARX polinomial, em estado estacionário, apresenta a seguinte relação entre a entrada e a saída estacionárias:

$$\bar{y} = 0,0637\bar{u} + 0,4306\bar{u}^2. \quad (5.8)$$

A característica estática do modelo NARX polinomial, descrita pela relação estática (5.8), para uma entrada estacionária que varia na faixa de $0,002 \leq \bar{u} \leq 0,93$, está mostrada na Figura 5.11. A representação gráfica da saída resultante da simulação livre do modelo NARX polinomial (5.7) está na Figura 5.12.

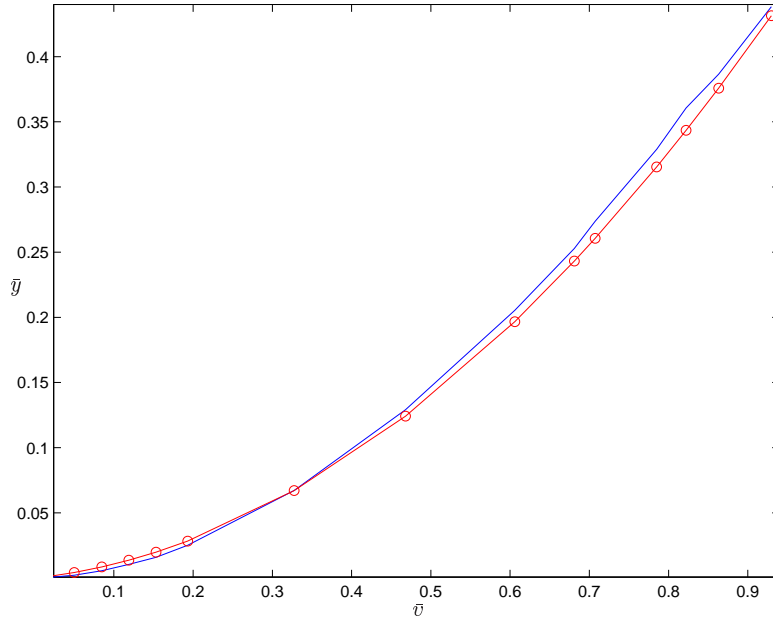


Figura 5.11: Característica estática. (—) Sistema e (o—) modelo NARX polinomial dada por (5.8).

Uma comparação quantitativa do desempenho das representações, Narx polinomial (5.7), de Hammerstein composto por (5.2) e (5.3) e de Wiener composto por (5.6) e (5.4), na aproximação das respostas dinâmica e estática do sistema está na Tabela 5.1.

Em termos percentuais, pode-se dizer que o modelo de Hammerstein composto por (5.2) e (5.3) aproximou a resposta dinâmica do sistema 16,05% pior

⁵A rotina usada para estimar os parâmetros dos modelos é a `orthreg.m` baseada no método de transformação de Householder.

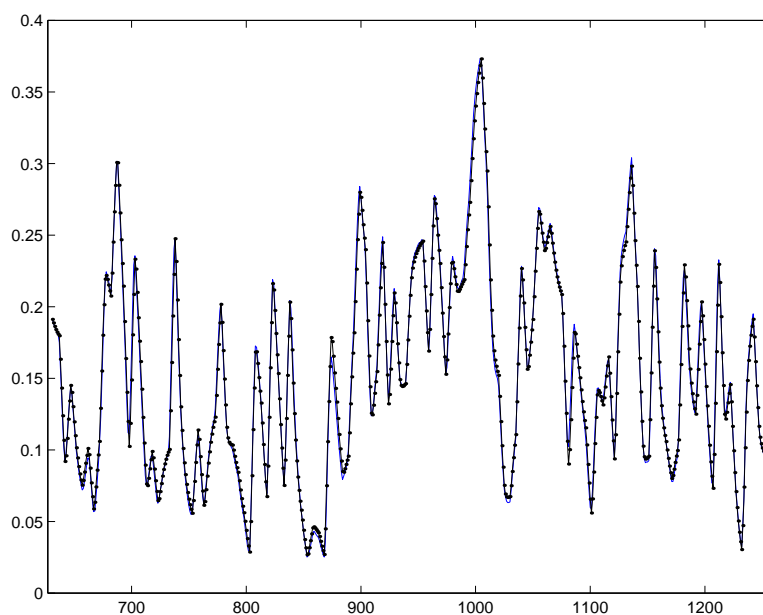


Figura 5.12: Simulação livre. (—) Saída do sistema e (---) saída do modelo NARX polinomial (5.7). No eixo x , o número de amostras e no eixo y a amplitude dos sinais em pu.

Tabela 5.1: Validação quantitativa dos modelos.

Modelo	RMSE	r
NARX	0,0804	0,9998
Hammerstein	0,0933	0,9990
Wiener	0,2816	0,9990

do que o modelo NARX polinomial (5.7). Já o modelo de Wiener composto por (5.6) e (5.4) apresenta uma aproximação da resposta dinâmica 250,25% pior do que o modelo NARX polinomial. Em relação à aproximação da resposta estática, o modelo NARX polinomial apresentou um desempenho cerca de 0,08% melhor do que o desempenho obtido pelos modelos de Hammerstein e de Wiener

5.2 Válvula de controle

O sistema aqui considerado consiste de uma válvula de controle acionada por um atuador pneumático, a descrição da planta encontra-se em (Abreu, 1993). A coleta dos dados e a identificação deste dispositivo foram descritas em (Abreu, 1993; Jácome, 1996). Os dados usados para a identificação do sistema, ilustrados na Figura 5.13, foram normalizados, dividindo-os por 3.

Os dados de entrada representam o sinal de controle enviado ao atuador, e os dados de saída correspondem à medição da vazão no duto no qual a válvula está montada.

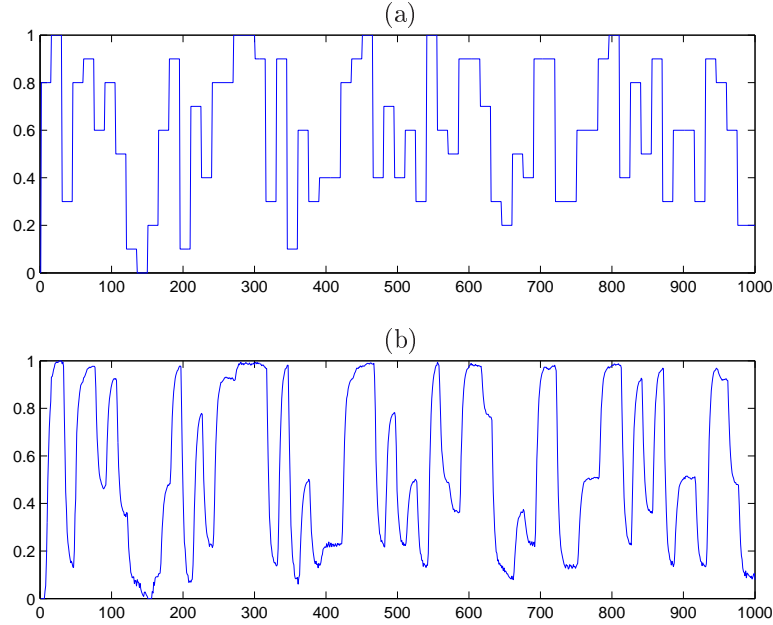


Figura 5.13: Dados de identificação. Em (a) estão os dados de entrada $u(k)$ e em (b) os dados de saída $y(k)$ (fcv01t7.mat). O eixo das abscissas contém o número de amostras e o eixo das ordenadas a amplitude dos sinais em pu.

5.2.1 Estimação da característica estática

A estimação da característica estática é feita utilizando o procedimento descrito no capítulo 4, ou seja, a partir dos dados dinâmicos do sistema. Utiliza-se um conjunto de dados de entrada e saída para a estimação da curva estática, contendo as 1000 amostras iniciais de cada sinal. Inicialmente, $n_a = 10$, visto que são usados todos os agrupamentos de termos possíveis a um modelo com grau de não-linearidade $\ell = 3$, incluindo o termo constante e o número máximo de termos na matriz de regressores é $n_\theta = 28$.

A Rotina I foi executada para um janela de dados de tamanho $L = 700$, que se desloca de $\Delta = 30$, obtendo-se um total de 10 janelas de tamanho L . A variação dos coeficientes dos agrupamentos de termos, à medida que a janela de dados L desloca-se de Δ , é mostrada na Figura 5.14.

A Rotina II foi executada para uma janela de dados $L = N_i$, e uma estrutura variável. As variações dos coeficientes dos agrupamentos de termos à medida que a estrutura aumenta estão ilustradas na Figura 5.15.

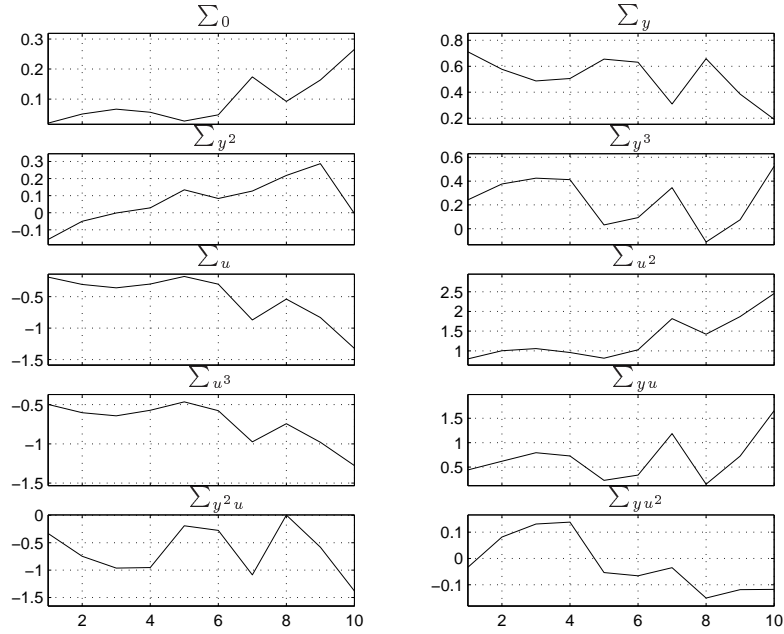


Figura 5.14: Coeficientes dos agrupamentos em função da janela de dados. No eixo x está o número total de janelas percorridas, 10, e no eixo y o valor de cada coeficiente.

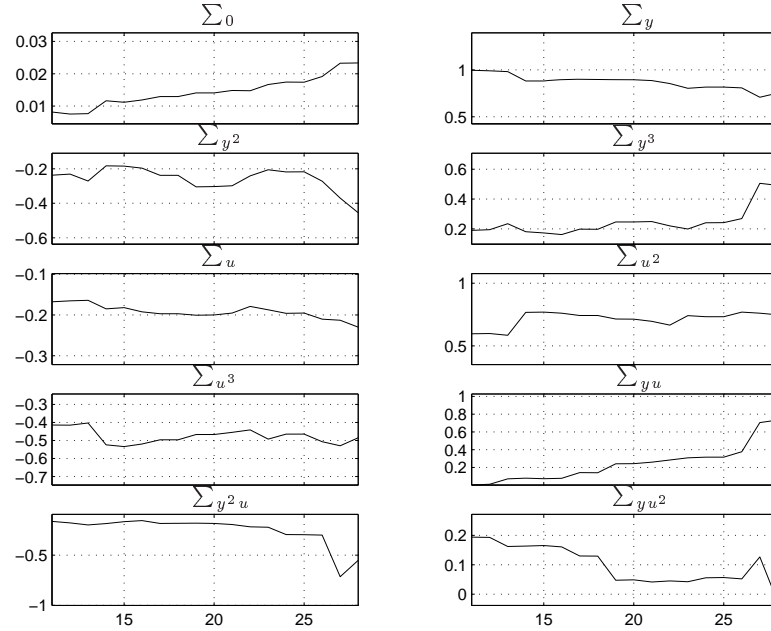


Figura 5.15: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas da matriz Ψ_e . No eixo x está o número de termos e no eixo y o valor de cada coeficiente.

A análise de agrupamentos de termos, para uma janela de dados variável, feita a partir da Figura 5.14, indica os agrupamentos de termos Σ_{y^2} , Σ_{y^3} e Σ_{yu^2} como espúrios, uma vez que seus coeficientes assumem valores que trocam de sinal à medida que a janela de dados $L = 700$ desloca-se de $\Delta = 30$.

A análise de agrupamentos de termos realizada com o auxílio da Figura 5.15 indica que o agrupamento de termo Ω_{yu^2} é espúrio, pois seu respectivo coeficiente assume valores que mudam de sinal à medida que termos são inseridos na matriz Ψ_e .

O agrupamento de termo Ω_{yu^2} foi indicado como espúrio pelas duas análises. Logo, este foi retirado e as rotinas novamente executadas para modelos sem os termos relacionados ao agrupamento de termos considerado espúrio, Ω_{yu^2} .

Na segunda iteração do algoritmo, a análise de agrupamentos e coeficientes dos agrupamentos de termos, para uma janela de dados variável, novamente sugeriu os agrupamentos de termos Ω_{y^2} e Ω_{y^3} como espúrios, uma vez que, seus coeficientes assumem valores que trocam de sinal à medida que a janela de dados L desloca-se. Já a análise de agrupamentos realizada para uma estrutura variável, indica que o agrupamento de termo Ω_{uy^2} é espúrio, pois seu coeficiente assume valores que mudam de sinal à medida que os termos são inseridos na matriz de regressores Ψ_e .

Como não houve “interseção” dos resultados das análises realizadas baseadas nos resultados das rotinas I e II, optou-se por retirar a “união” de tais análises, ou seja, retirar os agrupamentos de termos considerados espúrios pela Rotina I ou pela Rotina II. Logo, os termos relacionados aos agrupamentos de termos Ω_{y^2} , Ω_{y^3} e Ω_{uy^2} foram retirados e uma nova análise realizada com modelos constituídos pelos agrupamentos de termos restantes: Ω_0 , Ω_y , Ω_u , Ω_{u^2} , Ω_{u^3} e Ω_{yu} . As Figuras 5.16 e 5.17 mostram a análise final realizada para estes modelos.

As variações dos coeficientes dos agrupamentos de termos para uma janela de dados L que se desloca de Δ estão na Figura 5.16. E as variações dos coeficientes dos agrupamentos de termos à medida que a estrutura aumenta estão ilustradas na Figura 5.17.

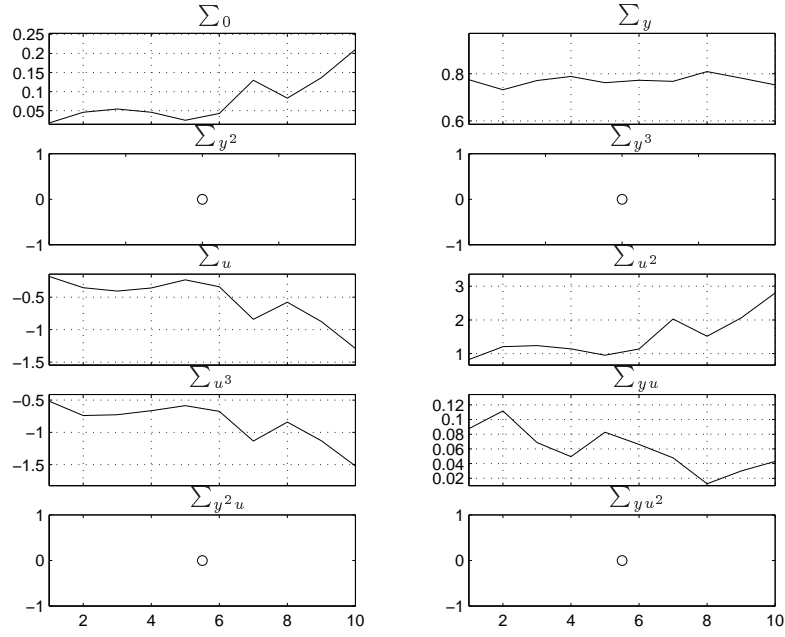


Figura 5.16: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados. No eixo x está o número total de janelas percorridas, 10, e no eixo y o valor de cada coeficiente.

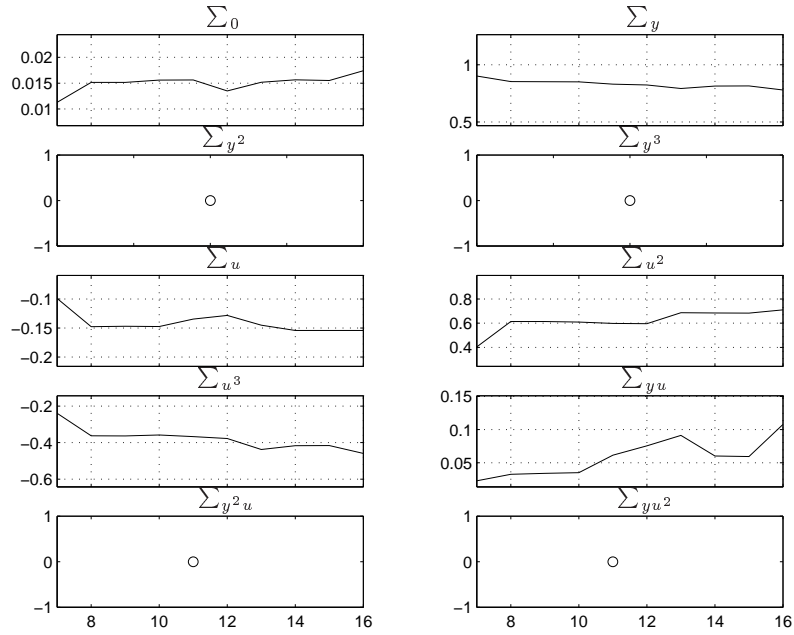


Figura 5.17: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas da matriz Ψ_e . No eixo x está o número de termos e no eixo y o valor de cada coeficiente.

Verifica-se pelas Figuras 5.16 e 5.17 que os agrupamentos de termos presentes podem ser efetivos ao modelo. Portanto, a estrutura da função estática não-linear usada para aproximar a característica estática do sistema é definida, ou seja, esta será composta pelos agrupamentos de termos Ω_0 , Ω_y , Ω_u , Ω_{u^2} , Ω_{u^3} e Ω_{yu} . Os parâmetros do modelo são estimados usando o algoritmo dos mínimos quadrados e os coeficientes destes agrupamentos determinados conforme seção 2.8. A função estática não-linear que aproxima a relação estática entre a entrada e a saída estacionárias da válvula de controle é dada por:

$$\bar{y} = \frac{-0,1541\bar{u} + 0,7109\bar{u}^2 - 0,4587\bar{u}^3 + 0,0174}{0,2198 - 0,1078\bar{u}}. \quad (5.9)$$

Utilizando-se uma entrada estacionária que varia na faixa de $0 \leq \bar{u} \leq 1$, tem-se a característica estática estimada a partir da equação (5.9), que pode ser comparada à característica estática do sistema, como mostra a Figura 5.18.

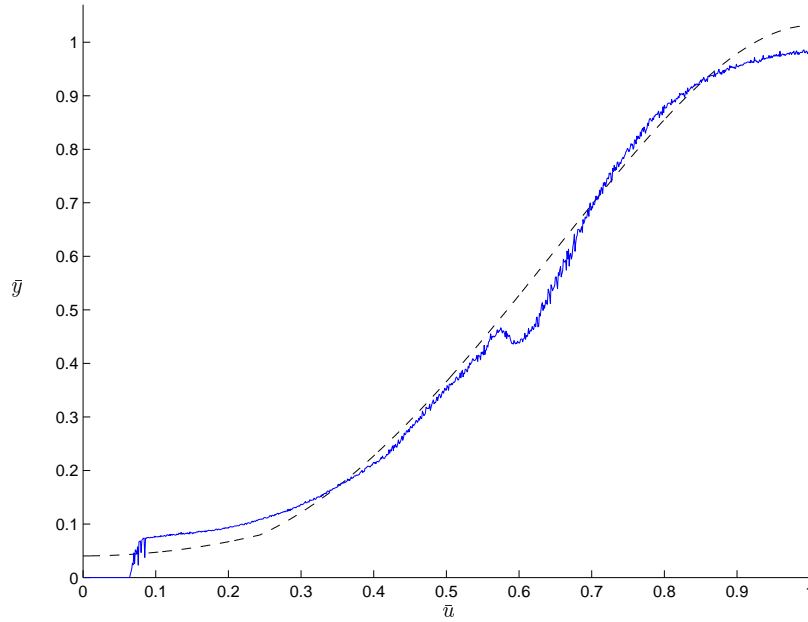


Figura 5.18: Característica estática. Em (—) válvula de controle e em (- -) a estimada a partir da equação (5.9).

A validação estática realizada através da inspeção visual da Figura 5.18, mostra que a curva estática aproximada usando a relação (5.9) apresenta um bom ajuste da resposta estática, com uma certa dificuldade de aproximação nos valores extremos. O desempenho quantitativo da mesma usando o índice de correlação linear, é $r = 0,9952$.

Uma vez estimada a função estática não-linear que descreve a característica estática do sistema, os modelos de Hammerstein e de Wiener podem ser obtidos.

5.2.2 Modelo de Hammerstein

Utilizando-se a entrada e a saída estacionárias do bloco estático não-linear do modelo de Hammerstein, \bar{u} e \bar{v} , respectivamente, tem-se que a relação estática dada em (5.9) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\hat{v} = \frac{-0,1541\bar{u} + 0,7109\bar{u}^2 - 0,4587\bar{u}^3 + 0,0174}{0,2198 - 0,1078\bar{u}}. \quad (5.10)$$

A representação da característica estática do modelo de Hammerstein estimada a partir de (5.10), para uma entrada estacionária que varia na faixa de $0 \leq \bar{u} \leq 1$, está na Figura 5.18. Sendo que para o modelo de Hammerstein, a variável representada no eixo das ordenadas é a saída do bloco estático, \hat{v} . O índice de correlação linear é o mesmo obtido em (5.9), $r = 0,9952$.

A entrada do bloco dinâmico linear do modelo de Hammerstein, $\hat{v}(k)$, é estimada diretamente através da relação (5.10), permitindo assim, a estimação do modelo ARX, tal que:

$$\begin{aligned} y(k) = & 1,3077y(k-1) + 0,1360\hat{v}(k-2) - 0,4511y(k-2) + \\ & + 0,0067\hat{v}(k-1). \end{aligned} \quad (5.11)$$

A validação dinâmica usando a simulação livre do modelo de Hammerstein, composto por (5.10) e (5.11), está representada na Figura 5.19. Através da inspeção visual da Figura 5.19, verifica-se que o modelo de Hammerstein foi capaz de aproximar a resposta dinâmica do sistema de forma geral, mas apresentou uma certa dificuldade na aproximação dos valores extremos. Este fato pode ser resultante da aproximação “ruim” da curva estática nos valores extremos, conforme mostra a Figura 5.18, ou seja, pode-se ter perdido informação dinâmica nos valores extremos. O índice de desempenho quantitativo da aproximação dinâmica é $RMSE = 0,1866$.

5.2.3 Modelo de Wiener

A relação estática do modelo de Wiener é dada para o par de entrada e saída do bloco estático, \bar{v} e \bar{y} , respectivamente. Logo, a relação estática (5.9) é reescrita da seguinte maneira:

$$\bar{y} = \frac{-0,1541\hat{v} + 0,7109\bar{v}^2 - 0,4587\bar{v}^3 + 0,0174}{0,2198 - 0,1078\hat{v}}. \quad (5.12)$$

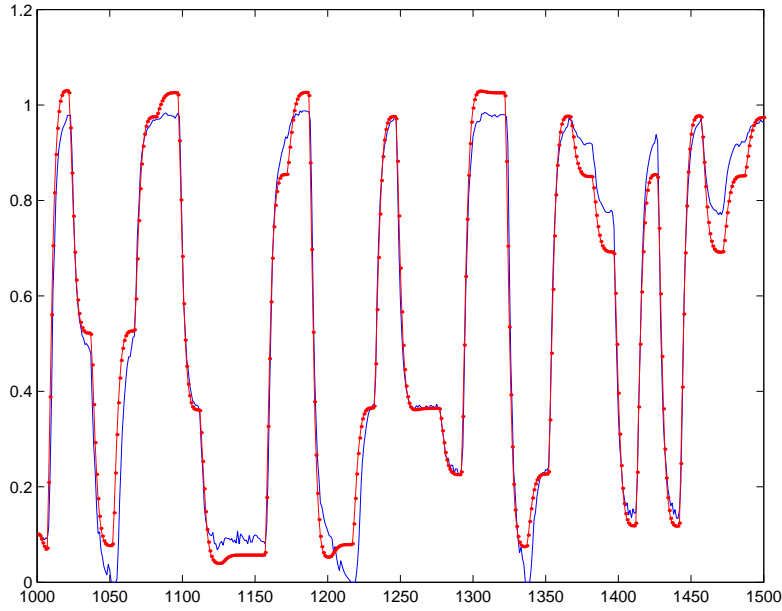


Figura 5.19: Simulação livre. (—) Saída do sistema e (.-) saída do modelo de Hammerstein composto por (5.10) e (5.11)). O eixo x contém o número de amostras e o eixo y a amplitude dos sinais em pu.

Verifica-se que não é possível estimar o sinal intermediário, $\hat{v}(k)$, diretamente da relação (5.12). Logo, é necessário inverter a função dada em (5.12)⁶. À inversa da função é ajustado um polinômio de ordem 3, dado por:

$$\hat{v} = 1,6488\bar{y}^3 - 2,8498\bar{y}^2 + 2,0882\bar{y} + 0,0548. \quad (5.13)$$

A ordem do polinômio foi escolhida segundo o maior índice de correlação linear entre a entrada do sistema, $u(k)$, e o sinal intermediário estimado, $\hat{v}(k)$. A representação gráfica do polinômio (5.13), sobreposto à função inversa do sistema é mostrada na Figura 5.20.

O modelo ARX é estimado para o par de entrada e saída do bloco dinâmico linear do modelo de Wiener, $\hat{v}(k)$ e $y(k)$, respectivamente, tal que:

$$\begin{aligned} \hat{v}(k) = & 1,1873\hat{v}(k) + 0,1328u(k-2) - 0,3327\hat{v}(k) \\ & + 0,0123u(k-1). \end{aligned} \quad (5.14)$$

A característica estática do modelo de Wiener, estimada a partir da relação (5.12) para $0 \leq \bar{v} \leq 1$, está representada na Figura 5.21. O índice de correlação linear é $r = 0,9952$, o mesmo índice obtido pela relação (5.9).

⁶A função estática descrita em (5.9), tem ordem ímpar, ou seja, admite inversa.

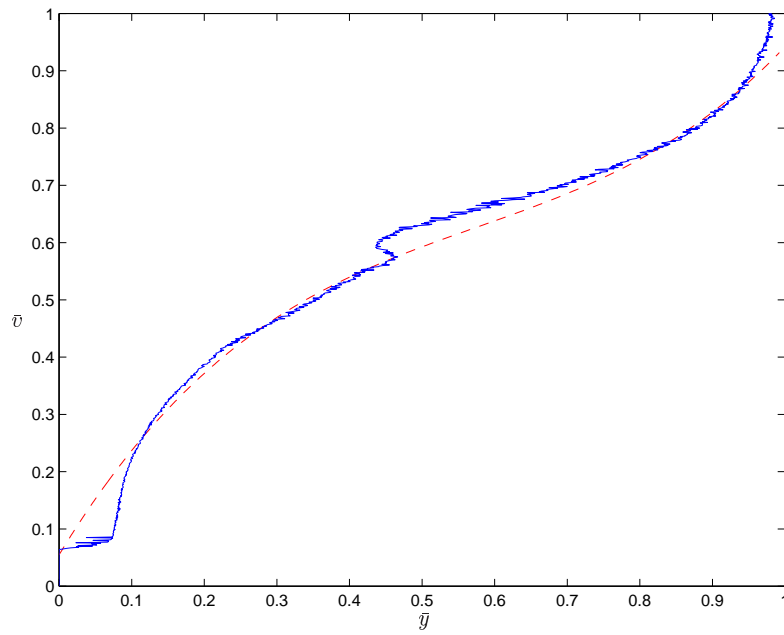


Figura 5.20: Inversa da característica estática. Em (—) válvula pneumática e em (- -) modelo de Wiener dada pelo polinômio (5.13).

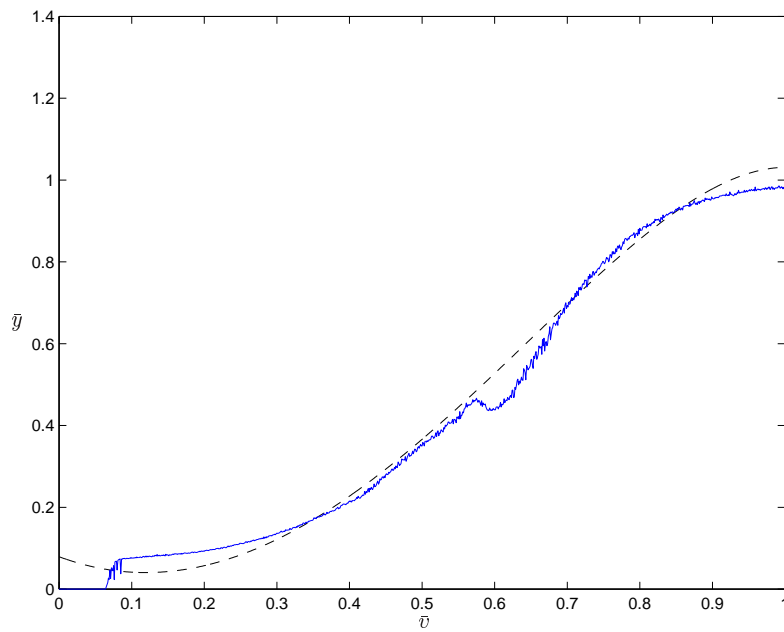


Figura 5.21: Característica estática. Em (—) válvula pneumática e em (- -) modelo de Wiener dada pela relação (5.12).

A saída resultante da simulação livre do modelo de Wiener, constituído por (5.14) e (5.12), comparada à saída do sistema, está representada na Figura 5.22, através da qual pode-se verificar o bom ajuste dinâmico deste modelo, com dificuldade na aproximação dos valores extremos. O índice RMSE do modelo de Wiener é 0,1676.

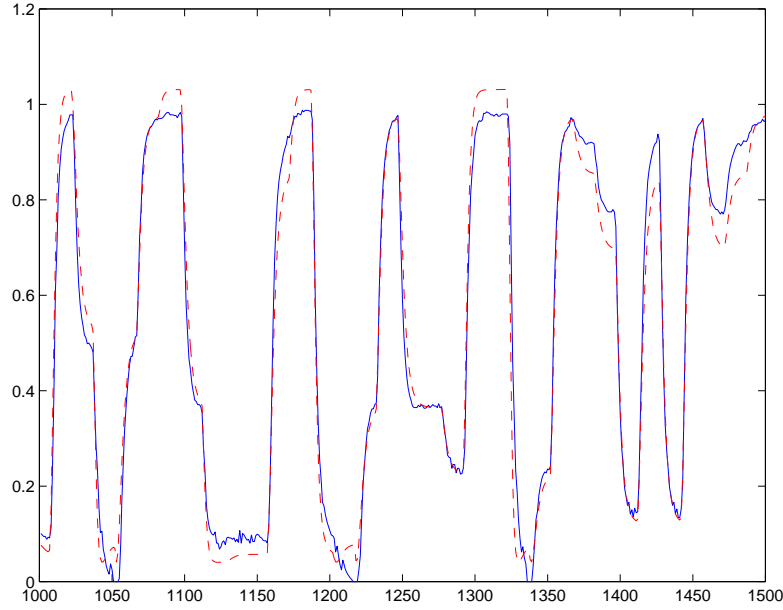


Figura 5.22: Simulação livre. Em (—) saída do sistema e em (- -) saída do modelo de Wiener composto por (5.14) e (5.12). O eixo x contém o número de amostras e o eixo y a amplitude dos sinais em pu.

5.2.4 Modelo NARX polinomial

Objetivando comparar o desempenho dos modelos de Hammerstein e de Wiener na aproximação da resposta dinâmica e estática da válvula de controle, o modelo NARX polinomial (5.15) foi identificado usando-se uma estrutura definida em (Aguirre, 2000b) e seus parâmetros estimados via estimador

dos mínimos quadrados⁷:

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 0,0237 + 0,1401y(k-1) + 0,7169y(k-2) - 0,0242u(k-2)^3 - \\
 & -2,3662u(k-3)^2y(k-1) + 0,0045u(k-1)y(k-1) - \\
 & -3,6645u(k-3)y(k-2) + 2,3382u(k-3)^2y(k-2) - \\
 & -0,7334u(k-3)^2u(k-2) - 2,1521u(k-2)y(k-3) - \\
 & -0,6306u(k-3)u(k-2)y(k-3) - 0,2734y(k-3) + \\
 & +3,1199u(k-3)y(k-3) + 3,6070u(k-2)y(k-1) + \\
 & +0,8932u(k-3)^3.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

A característica estática do modelo NARX polinomial (5.15) é descrita pela seguinte relação estática:

$$\bar{y} = \frac{0,1357\bar{u}^3 + 0,0237}{0,4165 - 0,9145\bar{u} + 0,6587\bar{u}^2}. \tag{5.16}$$

A característica estática do modelo NARX polinomial, dada pela relação estática (5.16), para uma entrada estacionária que varia na faixa $0 \leq \bar{u} \leq 1$, está na Figura 5.23. A validação dinâmica do modelo NARX (5.15) está representada na Figura 5.24.

⁷A rotina usada para estimar os parâmetros dos modelos é a `orthreg.m` baseada no método de transformação de Householder.

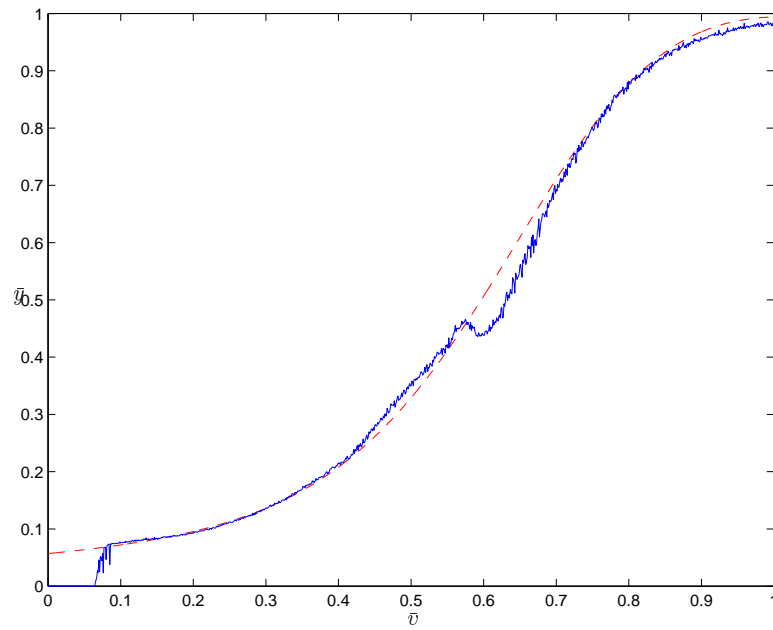


Figura 5.23: Característica estática. Em (—) sistema e em (- -) modelo NARX polinomial dada pela relação (5.16).

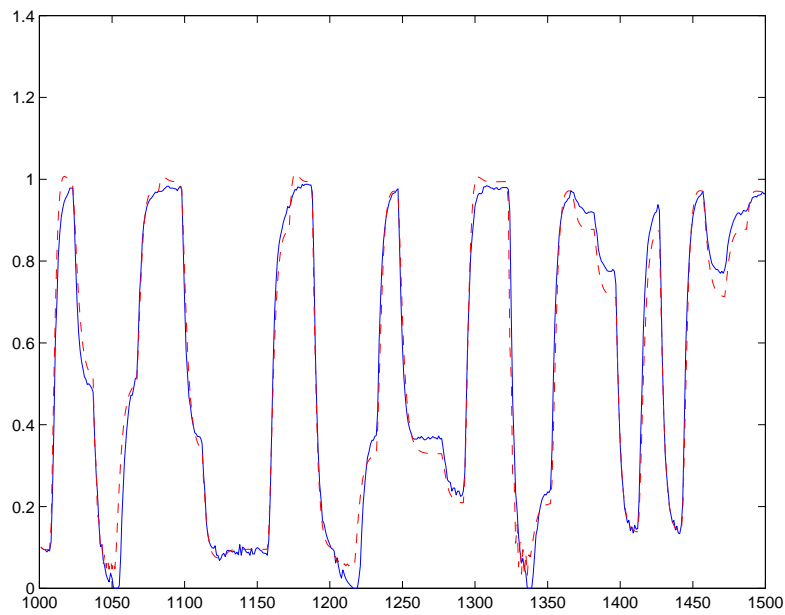


Figura 5.24: Simulação livre. Em (—) saída do sistema e em (- -) saída do modelo NARX polinomial (5.15). No eixo x , o número de amostras e no eixo y a amplitude dos sinais em pu.

A Tabela 5.2 mostra o desempenho quantitativo dos modelos de Hammerstein, de Wiener e o NARX polinomial na aproximação das respostas dinâmica e estática da válvula de controle. Em relação às aproximações das respostas dinâmica e estática, verificou-se um melhor desempenho no modelo NARX do que nos demais modelos.

Tabela 5.2: Validação quantitativa dos modelos.

Modelo	RMSE	r
NARX	0,1655	0,9974
Hammerstein	0,1866	0,9952
Wiener	0,1676	0,9952

Uma análise percentual da Tabela 5.2 mostra que o modelo de Hammerstein, composto por (5.10) e (5.11), aproximou a resposta dinâmica do sistema 12,7492% pior do que o modelo NARX polinomial (5.15). Porém, o modelo de Wiener, composto por (5.14) e (5.12), apresentou um desempenho na aproximação da resposta dinâmica somente 1,2689% pior do que o modelo NARX polinomial (5.15). Já na aproximação da resposta estática, o modelo NARX polinomial apresentou um desempenho cerca de 0,22% melhor do que a aproximação obtida pelos modelos de Hammerstein e de Wiener.

5.3 Conversor Buck

Nesta seção é apresentada a identificação de um conversor estático CC-CC do tipo Buck (Aguirre et al., 2000) utilizando os modelos de Hammerstein e de Wiener. O procedimento descrito no capítulo 4 é aplicado para a estimação da característica estática usando os dados dinâmicos do sistema em questão.

Este sistema é bastante atrativo, pois os dados dinâmicos excursionam uma faixa limitada de operação do sistema. Dessa forma, deseja-se verificar o desempenho do procedimento proposto para estimar a característica estática a partir de dados com pouca informação sobre a curva estática real. Os dados foram divididos em dois conjuntos, uma para a identificação, mostrado na Figura 5.25 e outro para a validação dos modelos.

Verifica-se pela Figura 5.25, que o sistema é excitado pelos dados somente para valores de entrada na faixa $2,2V \leq u(k) \leq 2,5V$ ⁸. Logo, o objetivo é encontrar um modelo de Hammerstein e um modelo de Wiener, a partir dos dados dinâmicos, capazes de aproximar tanto a resposta dinâmica do sistema quanto a resposta estática fora da região dos dados dinâmicos.

⁸A faixa de operação do conversor é de 1-4V.

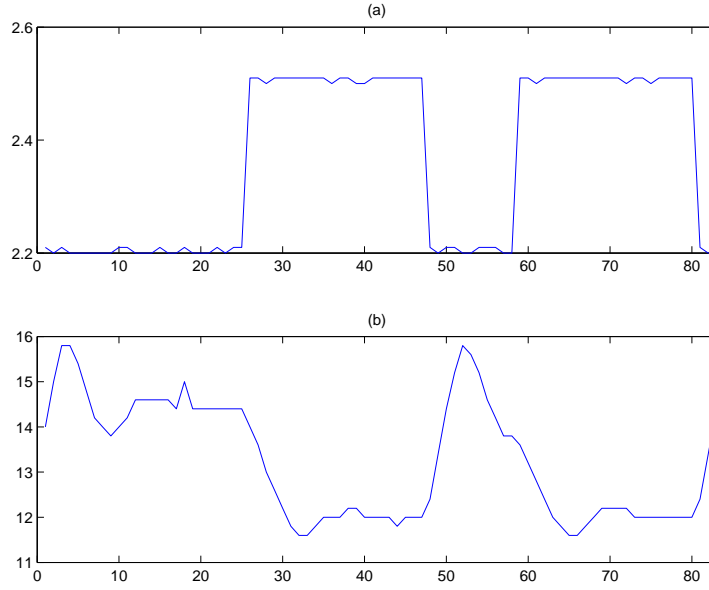


Figura 5.25: Em (a) estão os dados de entrada e em (b) os dados de saída usados na identificação (`acq7000.dat`). O eixo x contém as amostras e o eixo y a amplitude do sinal em volts.

Teoricamente a relação estática do conversor é dada por:

$$v_o = \frac{4v_d}{3} - \frac{v_d}{3}\bar{u}, \quad (5.17)$$

sendo v_d a fonte CC de alimentação mantida constante em 24 volts durante o teste dinâmico. Logo,

$$v_o = 32 - 8\bar{u}. \quad (5.18)$$

A característica estática do conversor Buck dada pela relação (5.18) está na Figura 5.25.

5.3.1 Estimação da característica estática

O algoritmo proposto no capítulo 4 foi aplicado utilizando-se uma janela de dados de tamanho $L = 30$ e um passo $\Delta = 5$. O resultado final do algoritmo, pode ser visto nas Figuras 5.27 e 5.28, as quais mostram as variações dos coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados e em função do número de termos na matriz de regressores, respectivamente.

A análise realizada com o auxílio das Figuras 5.27 e 5.28 indica que os agrupamentos de termos Ω_0 , Ω_y , Ω_{uy^2} e Ω_{yu^2} podem ser considerados efetivos ao modelo. Portanto, a função estática não-linear será constituída por estes termos.

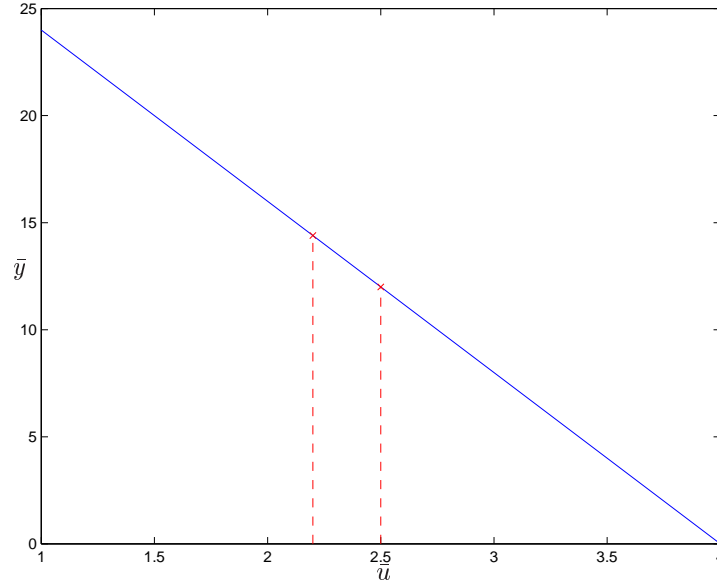


Figura 5.26: Característica estática do conversor Buck dada pela relação (5.17). As cruzes indicam a faixa de valores percorrida pelos dados durante o teste dinâmico.

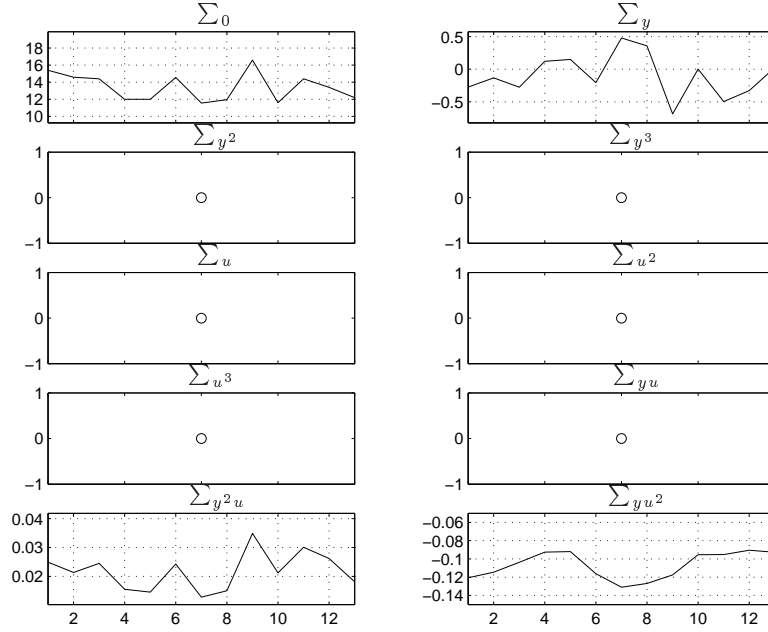


Figura 5.27: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função da janela de dados. No eixo x está o número total de janelas percorridas, no eixo y o valor de cada coeficiente.

Os parâmetros do modelo constituído pelos agrupamentos de termos Ω_0 , Ω_y , Ω_{uy^2} e Ω_{yu^2} são estimados via estimador dos mínimos quadrados e os

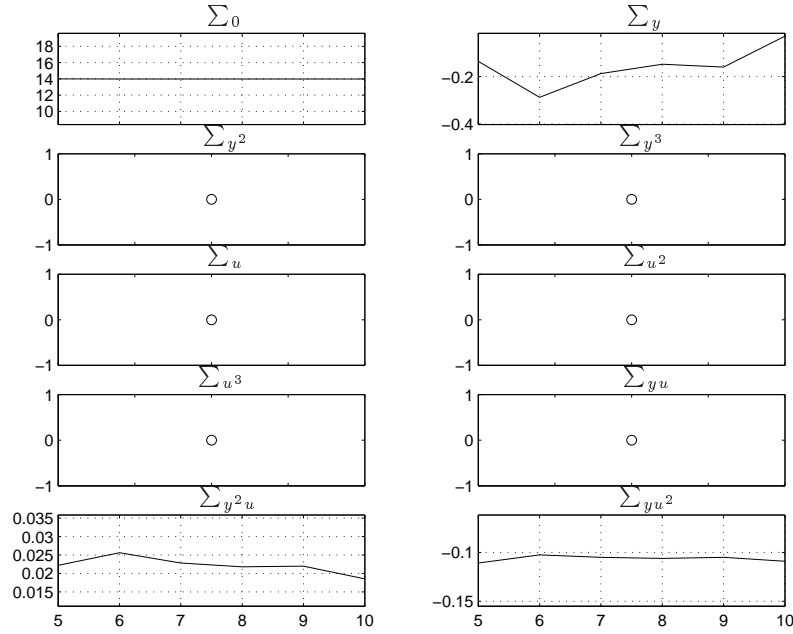


Figura 5.28: Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de colunas da matriz Ψ_e . No eixo x está o número de termos e no eixo y o valor de cada coeficiente.

coeficientes destes agrupamentos determinados conforme seção 2.8. Dessa forma, tem-se que a aproximação da relação estática do conversor Buck é dada por:

$$(0,0185\bar{u})\bar{y}^2 - (0,109\bar{u}^2 + 1,029)\bar{y} + 13,979 = 0 \quad (5.19)$$

Para cada valor da entrada estacionária, \bar{u} , aplicado na equação (5.19), tem-se dois valores de \bar{y} correspondente. Portanto, tem-se duas curvas estáticas estimadas a partir da relação (5.19). A Figura 5.29 ilustra somente a curva estática estimada estável.

Como se esperava, o procedimento para a estimação da característica estática a partir dos dados dinâmicos do sistema, não apresentou um bom ajuste na região fora dos dados dinâmicos, conforme ilustra a Figura 5.29. O índice de correlação linear entre as saídas medida e estimada, para uma entrada estacionária que varia na faixa de $1 \leq \bar{u} \leq 1$, é $r = 0,9742$.

Para contornar este problema, outros métodos para a estimação da curva estática podem ser usados, como por exemplo, o uso de informação *a priori* da característica estática do sistema que está disponível, ou seja, esta é dada pela relação (5.18).

Verifica-se pela Figura 5.26 que a curva estática do conversor Buck pode ser aproximada por uma reta. Logo, a curva estática será estimada utilizando

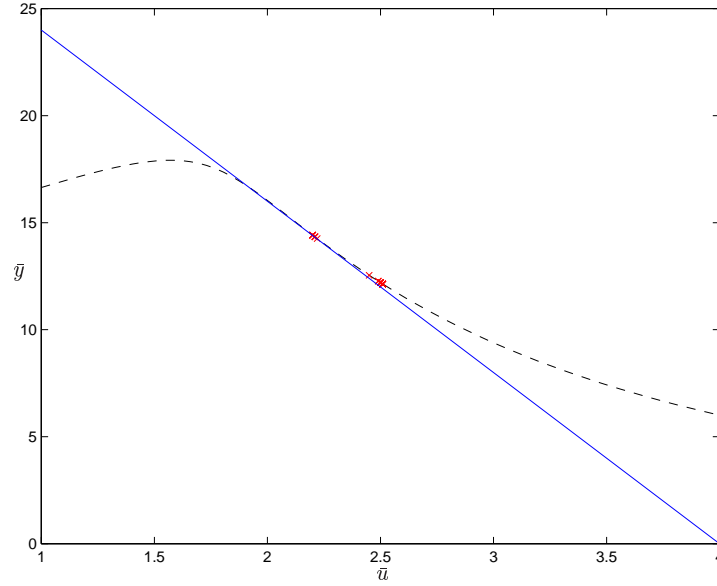


Figura 5.29: Característica estática. Em (—) conversor Buck e em (- -) a estimada pela relação (5.19). As cruzes indicam a faixa de valores varrida pela entrada durante o teste dinâmico.

somente a estrutura como conhecimento *a priori*, ou seja, esta será obtida a partir de um modelo composto por termos lineares em $u(k)$ e em $y(k)$, e um termo constante. Sendo seus respectivos parâmetros estimados. A função estática obtida é dada por:

$$\bar{y} = 31,013 - 7,517\bar{u}. \quad (5.20)$$

Pode-se perceber que os parâmetros da relação estática estimada (5.20) são valores próximos dos reais dados pela relação (5.18). A Figura 5.30 ilustra a característica estática estimada usando informação *a priori*. O índice de correlação linear entre as saídas estacionárias, a estimada e a medida é $r = 1$.

A partir da função estática não-linear (5.20), pode-se estimar o sinal intermediário dos modelos de Hammerstein e de Wiener.

5.3.2 Modelo de Hammerstein

A relação estática não-linear (5.20) é reescrita usando a entrada e a saída do bloco estático não-linear do modelo de Hammerstein, \bar{u} e \bar{v} , respectivamente, tal como:

$$\hat{v} = -7,517\bar{u} + 31,013. \quad (5.21)$$

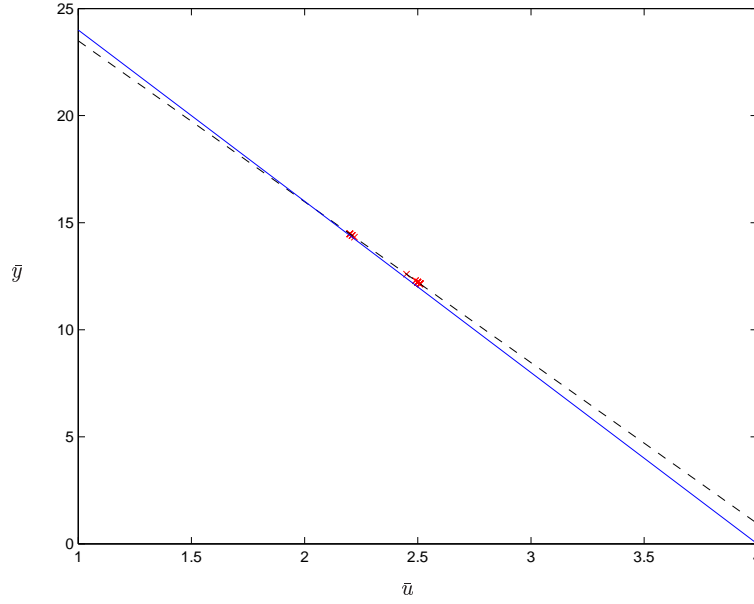


Figura 5.30: Característica estática. Em (—) conversor Buck e em (- -) a estimada (5.20). As cruzes indicam a faixa de valores varrida pela entrada durante o teste dinâmico.

A característica estática do modelo de Hammerstein dada pela relação (5.21), para uma entrada estacionária que varia na faixa de $1 \leq \bar{u} \leq 4$, está representada na Figura 5.31. O índice de correlação linear é o mesmo do obtida pela relação (5.20), $r = 1$.

O modelo ARX é estimado a partir dos dados de entrada e saída do bloco dinâmico linear do modelo de Hammerstein, $\hat{v}(k)$ e $y(k)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} y(k) = & 0,8409y(k-1) + 0,1660y(k-2) + 0,3496\hat{v}(k-1) - \\ & -0,3082y(k-3) + 0,0543\hat{v}(k-2) - 0,2020y(k-4) + \\ & +0,0996y(k-5). \end{aligned} \quad (5.22)$$

A simulação livre do modelo de Hammerstein, composto por (5.21) e (5.22), é mostrada na Figura 5.32. A medida quantitativa do ajuste dinâmico do modelo é $\text{RMSE} = 0,4756$.

5.3.3 Modelo de Wiener

A característica estática do modelo de Wiener é dada em relação a entrada e a saída estacionárias do bloco estático não-linear, ou seja, \bar{v} e \bar{y} . Logo, a relação estática (5.20) é reescrita como:

$$\bar{y} = -7,517\bar{v} + 31,013, \quad (5.23)$$

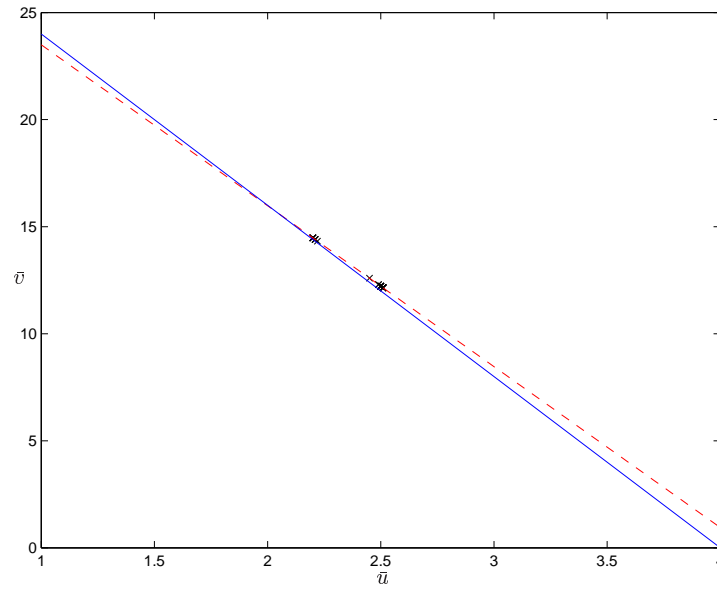


Figura 5.31: Característica estática. Em (—) conversor Buck e em (- -) a do modelo de Hammerstein dada por (5.21). As cruzes indicam a faixa de valores percorrida pela entrada dinâmica.

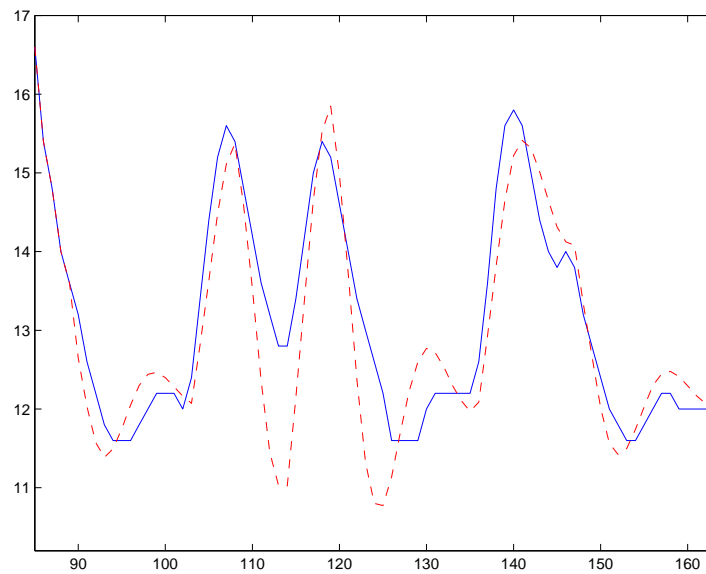


Figura 5.32: Simulação livre. Em (—) saída do sistema e em (- -) saída do modelo de Hammerstein composto por (5.21) e (5.22). No eixo x está o número de amostras dos sinais e no eixo y a amplitude dos sinais.

O sinal intermediário, $v(k)$, não pode ser estimado diretamente da relação (5.23). Logo, um polinômio de ordem 1 é ajustado à inversa da função

estática não-linear do sistema (5.18):

$$\hat{v} = -0,133\bar{y} + 4,133. \quad (5.24)$$

A ordem do polinômio é determinada a partir do maior o índice de correlação linear entre a entrada do sistema, $u(k)$, e o sinal intermediário estimado, $\hat{v}(k)$. O polinômio (5.24) está representado na Figura 5.33, para um valor de \bar{y} que varia na faixa de $11,6 \leq \bar{y} \leq 16,6$.

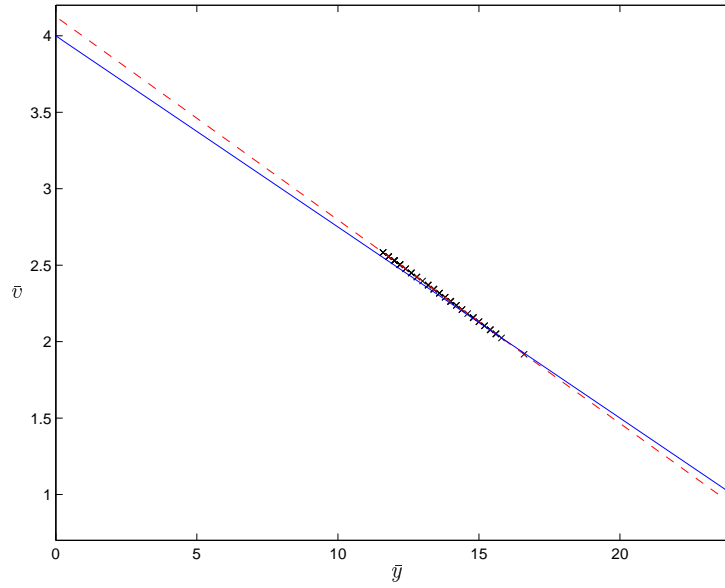


Figura 5.33: Função inversa. Em (—) conversor Buck e em (- -) o polinômio (5.24). As cruzes indicam a faixa de valores percorrida pela saída durante o teste dinâmico.

O modelo ARX estimado para o par de entrada e saída do bloco dinâmico do modelo de Wiener, $u(k)$ e $\hat{v}(k)$, respectivamente, é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{v}(k) = & 0,8879\hat{v}(k-1) + 0,1715\hat{v}(k-2) + 0,3635u(k-1) \\ & -0,3483\hat{v}(k-3) + 0,1200\hat{v}(k-5) - 0,1948\hat{v}(k-4). \end{aligned} \quad (5.25)$$

A simulação livre do modelo de Wiener, composto por (5.25) e (5.23), está representada na Figura 5.34. e o índice quantitativo do ajuste da resposta dinâmica do modelo é $RMSE = 0,4693$. A característica estática do modelo de Wiener, para uma entrada que varia na faixa de $1 \leq \bar{v} \leq 4$ é a mesma do modelo de Hammerstein como mostra a Figura 5.35 e o índice de correlação linear também, $r = 1$.

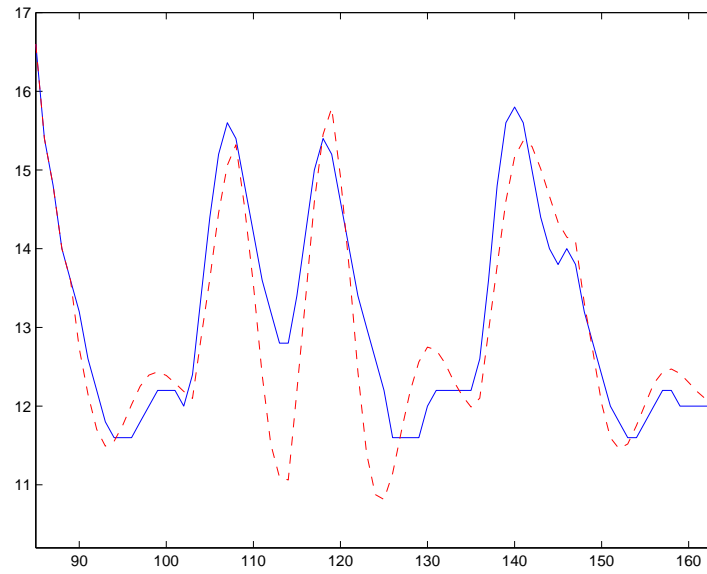


Figura 5.34: Simulação livre. Em (—) saída do conversor Buck e em (- -) saída do modelo de Wiener composto por (5.25) e (5.23). O eixo x contém o número de amostras e o eixo y a amplitude dos sinais.

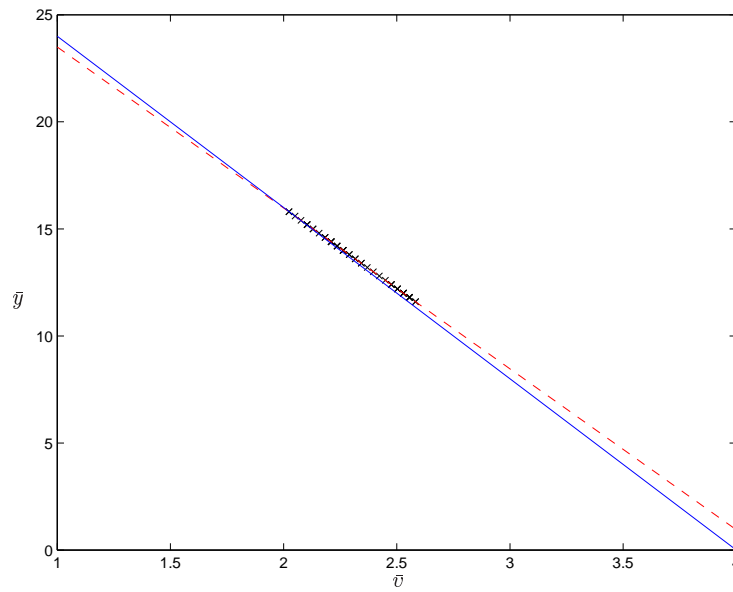


Figura 5.35: Característica estática. Em (—) conversor Buck e em (- -) a do modelo de Wiener dada pela relação (5.23) (- -). As cruzes indicam a faixa de valores percorrida por $\hat{v}(k)$.

5.3.4 Modelo NARX polinomial

O objetivo desta seção é comparar o desempenho nas aproximações das respostas dinâmica e estática, obtido pelos modelos de Hammerstein e de Wiener, seções 5.3.3 e 5.3.2, com o desempenho obtido pelo modelo NARX polinomial (5.26).

O modelo NARX polinomial foi identificado utilizando uma estrutura conhecida (Corrêa, 2001) e seus parâmetros estimados via estimador dos mínimos quadrados⁹, obtendo-se:

$$\begin{aligned} y(k) = & 0,7315y(k-1) - 0,0047y(k-2) + 13,7292 - 0,8280u(k-1)^3 - \\ & -0,2495y(k-3) + 3,6774u(k-3)u(k-1)^2 + 2,0210u(k-3)^3 - \\ & -1,7617u(k-1)u(k-3) - 4,6409u(k-1)u(k-3)^2. \end{aligned} \quad (5.26)$$

A característica estática do modelo NARX polinomial para o conversor Buck é determinada pela seguinte relação estática:

$$\bar{y} = 0,4391\bar{u}^3 - 3,3704\bar{u}^2 + 26,2659. \quad (5.27)$$

A característica estática do modelo NARX, dada pela relação (5.27), para uma entrada estacionária que varia na faixa de $1 \leq \bar{u} \leq 4$, está na Figura 5.36. O índice de correlação linear é $r = 0,9993$. A saída resultante da simulação livre do modelo NARX polinomial (5.26), comparada aos dados de saída do sistema destinados à validação dos modelos, está representada na Figura 5.37. O índice RMSE = 0,4294.

A Tabela 5.3 mostra o desempenho quantitativo dos modelos de Hammerstein, de Wiener e o NARX polinomial na aproximação das respostas dinâmica e estática da válvula de controle. Verifica-se que o modelo NARX polinomial apresentou um melhor desempenho na aproximação da resposta dinâmica do que os demais modelos.

Tabela 5.3: Validação quantitativa dos modelos.

Modelo	RMSE	r
NARX	0,4294	0,9994
Hammerstein	0,4756	1
Wiener	0,4693	1

Em termos percentuais, pode-se dizer que o modelo de Wiener, composto por (5.25) e (5.23), apresentou um desempenho na aproximação da resposta

⁹A rotina usada para estimar os parâmetros dos modelos é a `orthreg.m` baseada no método de transformação de Householder.

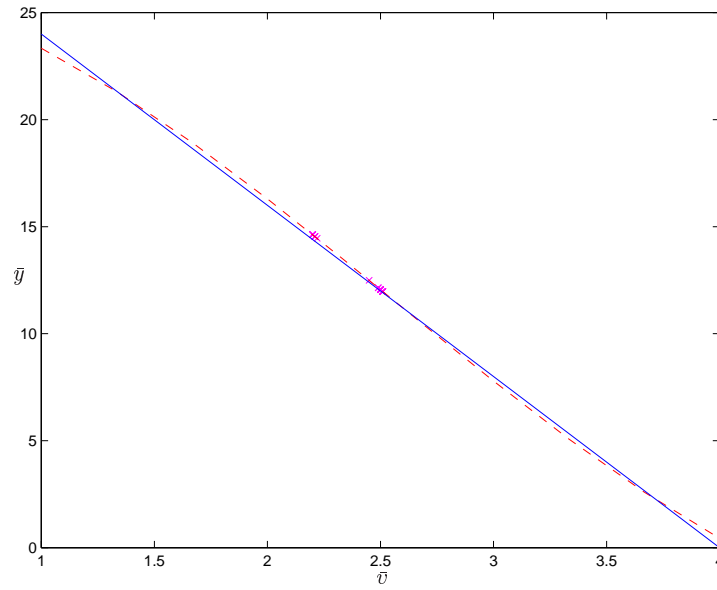


Figura 5.36: Característica estática. Em (—) conversor Buck e em (- -) modelo NARX polinomial dada pela relação (5.27). As cruzes indicam a faixa de valores percorrida pela entrada durante o teste dinâmico.

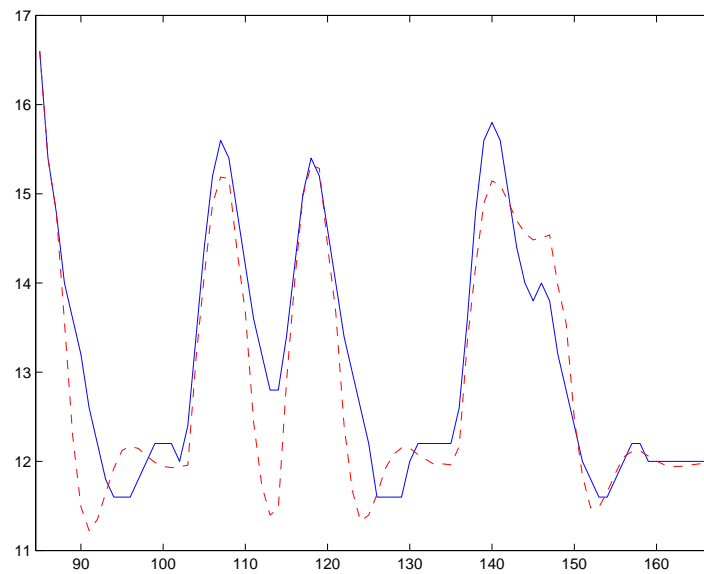


Figura 5.37: Simulação livre. Em (—) saída do conversor Buck e em (- -) saída do modelo NARX polinomial (5.26). O eixo x contém o número de amostras e o eixo y a amplitude dos sinais.

dinâmica do sistema 9,29% pior do que o desempenho obtido pelo modelo NARX polinomial (5.26). Já o modelo de Hammerstein, composto por (5.21)

e (5.22), apresentou um desempenho na aproximação da resposta dinâmica do sistema 10,76% pior.

Em relação à aproximação da resposta estática, os modelos de Hammerstein e de Wiener obtiveram um desempenho cerca de 0,06% melhor do que o obtido pelo modelo NARX polinomial.

5.4 Discussão

Neste capítulo foram identificados três sistemas reais usando as representações de Hammerstein e de Wiener. Para estimar a característica estática de tais representações, utilizou-se o procedimento descrito no capítulo 4, o qual utiliza os dados dinâmicos do sistema para estimar a curva estática.

Em particular, foi apresentada uma comparação do desempenho de tais modelos com um modelo NARX polinomial, que é um modelo não-linear global. Verificou-se através dos resultados obtidos o bom desempenho dos modelos de Hammerstein e de Wiener na aproximação da resposta estática e dinâmica dos sistemas.

Porém, vale salientar alguns aspectos do desempenho do procedimento para a estimação da curva estática dos modelos de Hammerstein e de Wiener perante três situações distintas.

Para o aquecedor elétrico, cujos dados dinâmicos excursionam uma ampla faixa de operação do sistema, o procedimento para a estimação da curva estática a partir dos dados dinâmicos apresentou um bom desempenho. O modelo NARX polinomial (5.7) conseguiu aproximar melhor a resposta estática e a resposta dinâmica do sistema do que o modelo de Hammerstein, composto por (5.2) e (5.3) e o de Wiener, composto por (5.6) e (5.4), conforme mostra a Tabela 5.1. Sendo que a aproximação da curva estática dos modelos de Hammerstein e de Wiener via dados dinâmicos foi cerca de 0,08% pior do que a obtida pelo modelo NARX polinomial.

No caso da válvula de controle, onde há uma forte presença de ruído nos dados, o modelo NARX polinomial (5.7) conseguiu uma melhor aproximação da resposta dinâmica do sistema. Sendo que a diferença em termos percentuais com a relação ao desempenho do modelo de Hammerstein, composto por (5.10) e (5.11) e de Wiener, composto por (5.14) e (5.12), não foi muito significativa. Porém, a aproximação da resposta estática do modelo NARX polinomial apresentou um desempenho cerca de 0,22% melhor do que a obtida usando o procedimento para a estimação da curva estática dos modelos de Hammerstein e de Wiener via dados dinâmicos.

O caso mais atraente foi o do conversor Buck. O conjunto de dados deste sistema excursiona uma faixa limitada de operação do sistema, ou seja, há

pouca informação da curva estática do sistema nos dados dinâmicos. Isso acarretou em uma aproximação ruim da curva estática fora da região dos dados dinâmicos, conforme mostra a Figura 5.29.

Se os modelos ARX fossem identificados utilizando o sinal intermediário estimado através desta função estática não-linear (que gerou a curva da Figura 5.29), os modelos de Hammerstein e de Wiener globais, seriam dinamicamente válidos, visto que a curva estática foi aproximada corretamente na região dos dados dinâmicos. Porém, como o objetivo é obter modelos dinamicamente e estaticamente válidos, foi necessário usar outro recurso para aproximar a curva estática também fora da região dos dados dinâmicos. Optou-se por utilizar informação *a priori* e obteve-se uma boa aproximação da curva estática fora da região dos dados dinâmicos, verifique a Figura 5.30. Salienta-se que o índice de correlação linear obtido pelo modelo NARX polinomial é cerca de 0,06% menor do que o obtido pelos modelos de Hammerstein e de Wiener.

Em suma, como todo procedimento caixa-preta a metodologia apresentada para estimar a curva estática a partir dos dados dinâmicos não consegue um bom desempenho na região fora dos dados. Porém, se os dados dinâmicos do sistema a ser investigado “varrem” uma ampla faixa de operação do sistema, o procedimento pode apresentar uma boa aproximação da curva estática.

Capítulo 6

Discussão e Conclusão

Este trabalho apresentou o uso das representações de Hammerstein e de Wiener no contexto de identificação de sistemas. Como foi visto ao longo do texto, para se obter tais modelos é necessário ter acesso a um terceiro sinal, o sinal intermediário aos blocos. Optou-se por estimar este sinal através do bloco estático não-linear. Neste contexto, este trabalho apresentou duas abordagens:

- a identificação dos modelos de Hammerstein e de Wiener utilizando a função estática não-linear conhecida, extraída de um modelo NARX polinomial previamente identificado.
- a identificação dos modelos de Hammerstein e de Wiener estimando a função estática não-linear a partir de dados dinâmicos do sistema.

6.1 Análise usando modelos NARX

Na primeira etapa do trabalho foi apresentada uma metodologia assumindo-se que a função estática não-linear é conhecida, sendo esta obtida de um modelo NARX polinomial previamente identificado.

A derivação das representações de Hammerstein e de Wiener a partir de um modelo NARX polinomial, pôde ser avaliada por meio da análise das propriedades de tais representações na forma polinomial, através da qual pode-se fazer as seguintes considerações:

- As representações de Hammerstein podem ser equivalentes a modelos NARX polinomiais que apresentam agrupamentos de termos do tipo $\Omega_{y^p u^{m-p}}$, tal que $0 \leq p \leq 1$ e $0 \leq m \leq \ell$. Pois, como mostrado na seção 3.3, estas representações possuem autovalores constantes com o

ponto de operação do sistema e têm a não-linearidade estática atuando somente no sinal de entrada.

- Já as representações de Wiener podem ser equivalentes a modelos NARX polinomiais que apresentam agrupamentos de termos do tipo $\Omega_y^p u^{m-p}$, tal que $0 \leq p \leq m$ e $0 \leq m \leq \ell$. Pois, tais representações possuem autovalores que variam com o ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) , a menos que, a presença destes termos no modelo NARX polinomial, não signifique a variação dos autovalores do sistema. Além disso, a não-linearidade estática de tais representações atua nos sinais de entrada e saída.

O fato do modelo NARX polinomial em questão, não apresentar tais características, não implica necessariamente, que as representações de Hammerstein e de Wiener não possam ser derivadas, como foi mostrado nas aplicações feitas nos modelos estimados para um pequeno aquecedor elétrico e um conversor estático. Porém, a única condição necessária para que tais representações possam ser obtidas é que o sistema real considerado não apresente multiplicidade da saída em estado estacionário, pois as representações de Hammerstein e de Wiener não admitem multiplicidade da saída em estado estacionário.

6.2 Identificação a partir de dados

O procedimento apresentado no capítulo 4, para estimar a característica estática a partir de dados dinâmicos do sistema, foi validado usando os dados de um sistema simulado, ou seja, os dados estavam livres de ruído.

No capítulo seguinte foi apresentada a identificação de sistemas reais usando os modelos de Hammerstein e de Wiener. A curva estática de tais modelos foi obtida usando o procedimento para estimá-la a partir dos dados dinâmicos dos sistemas, proposto no capítulo 4. A partir dos resultados obtidos pode-se observar que:

- Quando os dados dinâmicos excursionam uma ampla faixa de operação do sistema, é geralmente possível ter uma boa aproximação da curva estática, mesmo com a presença de ruído nos dados. Porém, quando isso não for possível, a curva estática estimada a partir de tais dados, só se aproxima da real na região visitada pelos dados dinâmicos.

Uma alternativa para contornar o problema supracitado, é a utilização de informação auxiliar, quando esta estiver disponível, ou a utilização de outras técnicas disponíveis, como as redes neurais. O obstáculo desta técnica é que,

nem sempre, é possível obter um resultado analítico da função que descreve a curva estática não-linear.

Ressalta-se que o procedimento proposto no presente trabalho, para a estimação da curva estática a partir de dados dinâmicos é um tanto subjetivo, exigindo intervenção do modelador. Como já mencionado em (Ljung, 1991), a identificação de sistemas é um processo que exige o envolvimento do modelador.

Em suma, um dos objetivos iniciais do presente trabalho foi o de propor um procedimento para obter modelos de Hammerstein e de Wiener a partir de dados dinâmicos que não exigisse técnicas sofisticadas para a obtenção da função estática não-linear. A razão para isso é simples. Conforme descrito no capítulo 3, é possível obter-se bons modelos de Hammerstein e de Wiener a partir de modelos NARX polinomiais, ou seja, para situações em que sofisticação de procedimento não é um problema, o capítulo 3 já apresenta uma boa proposta. O desafio era desenvolver um procedimento que não requisitasse a implementação de técnicas específicas para a identificação de modelos de globalmente não-lineares, como os modelos NARX polinomiais. No entanto, pode-se observar que a estimação da característica estática a partir de dados dinâmicos do sistema é um assunto que ainda está em aberto.

6.3 Proposta para trabalhos futuros

A seguir sugerem-se alguns aspectos que ainda podem ser explorados:

- estender os procedimentos apresentados para modelos de Lur'e;
- testar o desempenho do procedimento para a estimação da característica estática, com termos diferentes dos apresentados neste trabalho na matriz de regressores,
- utilizar outras ferramentas para a estimação da característica estática a partir de dados dinâmicos da entrada e da saída,
- aplicar o procedimento apresentado a outros sistemas reais.

Bibliografia

- Abonyi, J., Babuska, R., Verbruggen, H., and Szeifert, F. (2000). Incorporating prior knowledge in fuzzy model identification. *International Journal of Systems Science*, 31(5):657–667.
- Abreu, S. D. G. (1993). Avaliação de desempenho de controladores auto-ajustáveis. Dissertação de Mestrado, PPGEE, Universidade Federal de Minas, Belo Horizonte, Brasil.
- Aguirre, L. (1994a). Term clustering and the order selection of linear continuous systems. *Journal of the Franklin Institute*, 331B(4):403–415.
- Aguirre, L. (2000a). A nonlinear dynamical approach to system identification. *IEEE Circuits & Systems Newsletter Society*, 11(2):10–23.
- Aguirre, L. and Billings, S. (1995a). Identification of models for chaotic systems from noisy data: implication for performance and nonlinear filtering. *Physica D*, 85(1,2):239–258.
- Aguirre, L., Donoso-Garcia, P., and Santos-Filho, R. (2000). Use of a priori information in the identification of global nonlinear model – A case study using a buck converter. *IEEE Trans. Circ. Systems I*, 47(7)(7):1081–1085.
- Aguirre, L. and Souza, A. (1998). An algorithm for estimating fixed points of dynamical systems from time series. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 8(11):2203–2213.
- Aguirre, L. A. (1994b). Some remarks on structure selection for nonlinear models. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 4(6):1707–1714.
- Aguirre, L. A. (2000b). *Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora da UFMG, Belo Horizonte, MG.

- Aguirre, L. A. and Billings, S. A. (1995b). Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering. *International Journal of Control*, 62(3):569–587.
- Aguirre, L. A. and Mendes, E. M. A. M. (1996). Global nonlinear polynomial models: Structure, term cluster and fixed points. *Int. J. Bif. Chaos*, 6(2):279–294.
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 19(6):716–723.
- Amaral, G. (2001). Uso de conhecimento a priori e redes neurais na identificação de sistemas dinâmicos não-lineares. *Dissertação de mestrado PPGE, Universidade Federal de Minas Gerais*.
- Bai, E.-W. (1998). An optimal two-stage identification algorithm used for hammerstein system identification. *Automatica*, 34(3):333–338.
- Bamberger, W. and Isermann, R. (1978). Adaptive on-line steady-state optimization of slow dynamic process. *Automatic*, 14:223.
- Barroso, M. (2001). Métodos de otimização mono-objetivo aplicadas a Identificação caixa-cinza de sistemas não-lineares. *Dissertação de Mestrado PPGE. Universidade Federal de Minas Gerais*.
- Beyer, J., Gens, G., and Wernstedt, J. (1979). Identification of nonlinear systems in closed loop. *IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation*. Pergamon Press.
- Billings, S. and Aguirre, L. (1995). Effects of the Sampling Time and Identification of Nonlinear Models. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 5(6):1541–1556.
- Billings, S., Chen, S., and Korenberg, M. (1989). Identification of MIMO nonlinear systems using a forward-regression orthogonal estimator. *Int. J. Control*, 49(6):2157–2189.
- Billings, S. and Coca, D. (1999a). Discrete wavelet models for identification and qualitative analysis of chaotic systems. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 9(7):1263–1284.
- Billings, S. and Coca, D. (1999b). Discrete wavelet models for identification and qualitative analysis of chaotic systems. *Int. J. Bifuraction and Chaos*, 9(7):1263–1284.

- Billings, S. and Leontaritis, I. (1981). Identification of nonlinear systems using parameter estimation techniques. *In Proc.*, pages 183–187.
- Billings, S. and Voon, W. (1983). Structure Detection and Model Validity Tests in the Identification of Nonlinear Systems. *IEE Proceedings*, 130(4):193–199.
- Billings, S. A. and Fakhouri, S. (1979). Nonlinear system identification using the Hammerstein model. *International Journal of Systems Sciences*, 10:567–578.
- Billings, S. A. (1980). Identification of nonlinear systems - a survey. pages 272–285.
- Billings, S. A. and Fadzil, M. B. (1985). The practical identification of systems with nonlinearities. In *7th IFAC, Symposium on Identification and Systems Parameter estimation, York, U. K.*, pages 155–160.
- Billings, S. A. and Fakhouri, S. Y. (1978). Identification of a class of nonlinear systems using correlation analysis. *Proc. IEE*.
- Braga, A. P., Carvalho, A. C. P. L. F., and Ludemir, T. B. (2000). *Redes Neurais Artificiais: teoria e aplicações*. LTC.
- Cassini, C. (1999). Estimaco Recursiva de no-linearidades estticas usando modelos NARMAX polinomiais. Dissertao de Mestrado, PPGEE, Universidade Federal de Minas Geras, Belo Horizonte.
- Chang, F. H. and Luus, R. (1971). A noniterative method for identification using the Hammerstein model. *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-16:464–468.
- Chen, S. and Billings, S. (1989a). Representations of non-linear systems the NARMAX model. *Int. J. Control*, 49(3):1013–1032.
- Chen, S., Billings, S., and Luo, W. (1989). Orthogonal least-squares methods and their applications to non-linear system identification. *Int. J. Control*, 50(5):1873–1896.
- Chen, S. and Billings, S. A. (1989b). Representations of non-linear systems: the NARMAX model. *Int. J. Control*, 49(3):1013–1032.
- Corra, M. (2001). *Identificao caixa-cinza de sistemas no-lineares utilizando representaes NARMAX racionais e polinomiais*. Tese de Doutorado, PPGEE, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brazil.

- Corrêa, M., Aguirre, L., and Mendes, E. (2000). Modeling chaotic dynamics with discrete nonlinear rational models. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(5):1019–1032.
- Eskinat, E., Johnson, S. H., and Luyben, W. L. (1991). Use of hammerstein models in identification nonlinear systems. *AIChE Journal*, 37(2).
- Eykhoff, P. (1974). *System Identification - Parameter and State Estimation*. John Wiley & Sons.
- Fiedler-Ferrara, N. and Prado, C. (1994). *Caos - Uma Introdução*. Editora Edgard Bücher.
- Freitas, U. S. (2001). Uso de técnicas de detecção de estrutura na identificação de modelos dinâmicos contínuos não lineares polinomiais. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brazil, outubro.
- Fruzzetti, K., Palazolua, A., and McDonalda, K. (1996). Nonlinear model predictive control using Hammerstein models. *Journal of Process Control*, 7(1):31–41.
- Gallman, P. G. (1976). Comparison of two Hammerstein model identification algorithms. *IEEE Trans. Automatic Control*, 21(1):124–126.
- Greblicki, W. (1992). Nonparametric Identification of Wiener Systems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(5):1487–1493.
- Greblicki, W. (1996). Nonlinearity Estimation in Hammerstein Systems Based on Ordered Observations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(5):1224–1233.
- Greblicki, W. and Pawlak, M. (1986). Identification of discrete Hammerstein systems using kernel regression estimate. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 31(1):74–77.
- Greblicki, W. and Pawlak, M. (1989). Nonparametric Identification of Hammerstein Systems. *IEEE Transaction on Information Theory*, 35(2):409–418.
- H. Ll-Duwaisha, H. and Karimb, M. (1997). A New Method for the Identification of Hammerstein Model. *Automatica*, 33(10):1871–1875.

- Haber, R. (1979). Parametric identification of nonlinear dynamic systems based on correlation functions. In *IFAC Symp. on Identification*, Darmstadt, Germany.
- Haber, R. (1988). Parametric identification of nonlinear dynamic systems based on correlation functions. *IEE Proc. Pt. D.*, 135(6):405–420.
- Haber, R. and Keviczky, L. (1985). Identification of linear systems having signal dependent parameters. *Int. J. Systems Sci.*, 16(7):869–884.
- Hagenblad, A. (1999). *Aspects of the Identification of Wiener Models*. Tese de Doutorado, Linköpings Universitet.
- Haist, N. D., Chang, F. H. I., and Luus, R. (1973). Nonlinear identification in presence of correlated noise using a Hammerstein model. *IEEE Trans. Automatic Control*, 18:552–555.
- Haykin, S. (1994). *Neural Networks - a comprehensive foundation*. McMillan.
- Hsia, T. C. (1976). A multistage least squares method for identifying Hammerstein model nonlinear systems. *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*.
- Ikonem, E. and Najim, K. (1999). Identification of Wiener Systems with Steady-State Non-Linearities. In *European Control Conference, ECC'99*. Karlsruhe, Germany.
- Jácome, C. (1996). Uso de Conhecimento Prévio na Identificação de Modelos Polinomiais NARMAX. Dissertação de Mestrado, PPGEE, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Korenberg, M., Billings, S., Liu, Y., and Mcilroy, P. (1988). Orthogonal parameter estimation algorithm for non-linear stochastic systems. *Int. J. Control*, 48(1):193–210.
- Kortmann, M. and Unbehauen, H. (1987). Identification of Nonlinear MISO Systems. *IFAC World Cong. Proc.* Munich, Germany.
- Lakshminarayanan, S., Shaha, S., and Nandakumara, K. (1995). Identification of Hammerstein models using multivariate statistical tools. *Chemical Engineering Science*, 50(22):3599–3613.
- Lang, Z.-Q. (1993). Controller design oriented model identification method for Hammerstein systems. *Automatica*, 29:767–771.

- Lang, Z.-Q. (1997). A nonparametric polynomial identification algorithm for the Hammerstein system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(10):1435–1441.
- Ledoux, C. (1996). *Identification of SISO nonlinear Wiener systems*. Tese de Doutorado, Department of Electrical Engineering, Linköping University.
- Leontaritis, I. J. and Billings, S. A. (1985a). Input-output parametric models for non-linear systems - part II: stochastic non-linear systems. *Int. J. Control*, 41(2):329–344.
- Leontaritis, I. J. and Billings, S. A. (1985b). Input-output parametric models for non-linear systems - part I: deterministic non-linear systems. *Int. J. Control*, 41(2):303–328.
- Ljung, L. (1987). *System Identification: Theory for the User*. Prentice-Hall, London.
- Ljung, L. (1991). *System Identification for Use with MATLAB - User's Guide*. The MathWorks, Inc.
- Mendes, E. M. A. M. and Billings, S. A. (1998). On overparametrization of nonlinear discrete systems. *Int. J. Bif. Chaos*, 8(3):535–556.
- Narendra, K. S. and Gallman, P. G. (1966). An iterative method for the identification of nonlinear systems using the Hammerstein model. *IEEE Trans. Automatic Control*, 12:546.
- Nepomuceno, E. G. (2002). Identificação multiobjetivo de sistemas não-lineares. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG, Belo Horizonte, MG.
- Ogata, K. (1998). *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, RJ.
- Papoulis, A. (1991). *Probability, random variables, and stochastic process*. New York: MacGraw-Hill.
- Pearson, R. and Pottmann, M. (2000). Gray-box identification of block oriented nonlinear models. *Journal of Process Control*, pages 301–315.
- Pottmann, M. and Pearson, R. (1998). Block-oriented NARMAX models with output multiplicities. *AIChE Journal*, 44(1):131–140.

- Sjöberg, J., Zhang, Q., Ljung, L., Benveniste, A., Deylon, B., Glorennec, P., Hjalmarsson, H., and Juditsky, A. (1995). Nonlinear black-box modeling in system identification: a unified overview. Technical report.
- Söderström, T. and Stoica, P. (1989). *System Identification*. Prentice-Hall, London.
- Stoica, P. and Söderström, T. (1982). Instrumental variable methods for identification of Hammerstein systems. *Int. J. Control*, 35(3):459–476.
- Volterra, V. (1930). *Theory of functions*. Blackie and Sons.

Apêndice A

Tabelas - capítulo 4

Tabela A.1: Parâmetros obtidos pelo Rotina I.

Termos	Parâmetros	std
$const$	$1,837 \times 10^{-4}$	$1,981 \times 10^{-5}$
$y(k-1)$	1,326	$6,420 \times 10^{-3}$
$y(k-2)$	$-4,178 \times 10^{-1}$	$8,853 \times 10^{-3}$
$y(k-3)$	$7,798 \times 10^{-3}$	$3,147 \times 10^{-3}$
$y(k-1)y(k-1)$	$-6,703 \times 10^{-1}$	$3,583 \times 10^{-2}$
$y(k-2)y(k-1)$	$7,039 \times 10^{-1}$	$5,128 \times 10^{-2}$
$y(k-3)y(k-1)$	$-9,063 \times 10^{-2}$	$2,156 \times 10^{-2}$
$y(k-1)y(k-1)y(k-1)$	$6,018 \times 10^{-1}$	$2,936 \times 10^{-2}$
$y(k-2)y(k-2)y(k-2)$	$-4,626 \times 10^{-1}$	$2,853 \times 10^{-2}$
$y(k-3)y(k-3)y(k-3)$	$4,169 \times 10^{-2}$	$1,285 \times 10^{-2}$
$u(k-1)$	$2,334 \times 10^{-4}$	$1,286 \times 10^{-4}$
$u(k-2)$	$-5,750 \times 10^{-4}$	$1,409 \times 10^{-4}$
$u(k-3)$	$-1,590 \times 10^{-4}$	$1,165 \times 10^{-4}$
$u(k-1)u(k-1)$	$4,147 \times 10^{-2}$	$3,275 \times 10^{-4}$
$u(k-2)u(k-1)$	$1,158 \times 10^{-2}$	$1,787 \times 10^{-4}$
$u(k-3)u(k-1)$	$-1,357 \times 10^{-3}$	$2,208 \times 10^{-4}$
$u(k-1)u(k-1)u(k-1)$	$2,435 \times 10^{-4}$	$2,460 \times 10^{-4}$
$u(k-2)u(k-2)u(k-2)$	$-2,764 \times 10^{-3}$	$2,991 \times 10^{-4}$
$u(k-3)u(k-3)u(k-3)$	$7,857 \times 10^{-5}$	$7,274 \times 10^{-5}$
$u(k-1)y(k-3)$	$6,865 \times 10^{-3}$	$1,925 \times 10^{-3}$
$u(k-1)y(k-2)$	$-8,021 \times 10^{-3}$	$2,437 \times 10^{-3}$
$u(k-3)y(k-1)$	$4,101 \times 10^{-3}$	$1,226 \times 10^{-3}$
$u(k-1)y(k-1)y(k-1)$	$-7,671 \times 10^{-3}$	$2,618 \times 10^{-3}$
$u(k-2)y(k-1)y(k-1)$	$-8,466 \times 10^{-2}$	$3,213 \times 10^{-3}$
$u(k-3)y(k-1)y(k-1)$	$-1,471 \times 10^{-2}$	$4,318 \times 10^{-3}$
$u(k-1)u(k-1)y(k-1)$	$6,102 \times 10^{-4}$	$5,966 \times 10^{-4}$
$u(k-2)u(k-2)y(k-3)$	$1,051 \times 10^{-2}$	$1,136 \times 10^{-3}$
$u(k-3)u(k-1)y(k-3)$	$3,750 \times 10^{-3}$	$7,131 \times 10^{-4}$

Tabela A.2: Parâmetros obtidos pelo Rotina II.

Termos	Parâmetros	std
$const$	$1,853 \times 10^{-4}$	$1,605 \times 10^{-5}$
$y(k-1)$	1,327	$4,565 \times 10^{-3}$
$y(k-1)y(k-1)$	$-6,173 \times 10^{-1}$	$2,906 \times 10^{-2}$
$y(k-1)y(k-1)y(k-1)$	$5,245 \times 10^{-1}$	$2,095 \times 10^{-2}$
$u(k-1)$	$1,882 \times 10^{-4}$	$9,117 \times 10^{-5}$
$u(k-1)u(k-1)$	$4,173 \times 10^{-2}$	$2,251 \times 10^{-4}$
$u(k-1)u(k-1)u(k-1)$	$6,492 \times 10^{-5}$	$1,728 \times 10^{-4}$
$u(k-1)y(k-3)$	$8,286 \times 10^{-3}$	$1,538 \times 10^{-3}$
$u(k-1)y(k-1)y(k-1)$	$-4,200 \times 10^{-3}$	$2,163 \times 10^{-3}$
$u(k-1)u(k-1)y(k-1)$	$7,838 \times 10^{-4}$	$4,827 \times 10^{-4}$
$y(k-2)$	$-4,215 \times 10^{-1}$	$6,257 \times 10^{-3}$
$y(k-2)y(k-1)$	$6,635 \times 10^{-1}$	$4,112 \times 10^{-2}$
$y(k-2)y(k-2)y(k-2)$	$-4,126 \times 10^{-1}$	$2,086 \times 10^{-2}$
$u(k-2)$	$-6,641 \times 10^{-4}$	$9,804 \times 10^{-5}$
$u(k-2)u(k-1)$	$1,180 \times 10^{-2}$	$1,341 \times 10^{-4}$
$u(k-2)u(k-2)u(k-2)$	$-3,097 \times 10^{-3}$	$2,272 \times 10^{-4}$
$u(k-1)y(k-2)$	$-1,081 \times 10^{-2}$	$1,973 \times 10^{-3}$
$u(k-2)y(k-1)y(k-1)$	$-7,966 \times 10^{-2}$	$2,562 \times 10^{-3}$
$u(k-2)u(k-2)y(k-3)$	$9,762 \times 10^{-3}$	$9,152 \times 10^{-4}$
$y(k-3)$	$1,055 \times 10^{-2}$	$2,211 \times 10^{-3}$
$y(k-3)y(k-1)$	$-9,423 \times 10^{-2}$	$1,681 \times 10^{-2}$
$y(k-3)y(k-3)y(k-3)$	$3,941 \times 10^{-2}$	$9,955 \times 10^{-3}$
$u(k-3)$	$5,233 \times 10^{-5}$	$8,223 \times 10^{-5}$
$u(k-3)u(k-1)$	$-1,537 \times 10^{-3}$	$1,692 \times 10^{-4}$
$u(k-3)u(k-3)u(k-3)$	$1,402 \times 10^{-4}$	$5,927 \times 10^{-5}$
$u(k-3)y(k-1)$	$2,310 \times 10^{-3}$	$8,745 \times 10^{-4}$
$u(k-3)y(k-1)y(k-1)$	$-1,042 \times 10^{-2}$	$3,231 \times 10^{-3}$
$u(k-3)u(k-1)y(k-3)$	$3,784 \times 10^{-3}$	$5,904 \times 10^{-4}$

Tabela A.3: Em (a) estão os valores médios dos coeficientes dos agrupamentos de termos e em (b) o valor final destes coeficientes obtidos a partir do Rotina I e II. A terceira coluna de (a) e (b) estão os coeficientes calculados para $L = N_i$ e a estrutura completa.

Agrup.	Valor Médio		Orthreg.m	Valor Final	
	Alg. I	Alg. II		Alg. I	Alg. II
Ω_0	$2,315 \times 10^{-4}$	$-1,835 \times 10^{-4}$	$1,853 \times 10^{-4}$	$1,837 \times 10^{-4}$	$1,853 \times 10^{-4}$
Ω_y	$9,149 \times 10^{-1}$	$9,172 \times 10^{-1}$	$9,155 \times 10^{-1}$	$9,158 \times 10^{-1}$	$9,155 \times 10^{-1}$
Ω_{y^2}	$-5,409 \times 10^{-2}$	$-5,050 \times 10^{-2}$	$-4,802 \times 10^{-2}$	$-5,703 \times 10^{-2}$	$-4,802 \times 10^{-2}$
Ω_{y^3}	$1,744 \times 10^{-1}$	$8,973 \times 10^{-2}$	$1,513 \times 10^{-1}$	$1,808 \times 10^{-1}$	$1,513 \times 10^{-1}$
Ω_u	$-5,833 \times 10^{-4}$	$9,414 \times 10^{-4}$	$-4,236 \times 10^{-4}$	$-5,006 \times 10^{-4}$	$-4,236 \times 10^{-4}$
Ω_{u^2}	$5,174 \times 10^{-2}$	$5,350 \times 10^{-2}$	$5,199 \times 10^{-2}$	$5,170 \times 10^{-2}$	$5,199 \times 10^{-2}$
Ω_{u^3}	$-2,487 \times 10^{-3}$	$-5,606 \times 10^{-3}$	$-2,892 \times 10^{-3}$	$-2,442 \times 10^{-3}$	$-2,892 \times 10^{-3}$
Ω_{yu}	$4,110 \times 10^{-3}$	$-1,712 \times 10^{-2}$	$-2,152 \times 10^{-4}$	$2,944 \times 10^{-3}$	$-2,152 \times 10^{-4}$
Ω_{uy^2}	$-1,081 \times 10^{-1}$	$-4,062 \times 10^{-2}$	$-9,428 \times 10^{-2}$	$-1,070 \times 10^{-1}$	$-9,428 \times 10^{-2}$
Ω_{yu^2}	$1,480 \times 10^{-2}$	$2,158 \times 10^{-2}$	$1,433 \times 10^{-2}$	$1,487 \times 10^{-2}$	$1,433 \times 10^{-2}$

Tabela A.4: Parâmetros obtidos pelo Rotina I.

Termos	Parâmetros	std
$const$	$-3,291 \times 10^{-6}$	$3,239 \times 10^{-5}$
$y(k-1)$	1,327	$1,312 \times 10^{-2}$
$y(k-2)$	$-4,250 \times 10^{-1}$	$1,719 \times 10^{-2}$
$y(k-3)$	$1,642 \times 10^{-2}$	$5,326 \times 10^{-3}$
$u(k-1)$	$1,039 \times 10^{-3}$	$2,938 \times 10^{-4}$
$u(k-2)$	$-1,999 \times 10^{-3}$	$2,802 \times 10^{-4}$
$u(k-3)$	$9,730 \times 10^{-4}$	$1,616 \times 10^{-4}$
$u(k-1)u(k-1)$	$4,156 \times 10^{-2}$	$7,346 \times 10^{-4}$
$u(k-2)u(k-1)$	$1,557 \times 10^{-2}$	$2,176 \times 10^{-4}$
$u(k-3)u(k-1)$	$-3,367 \times 10^{-3}$	$3,644 \times 10^{-4}$
$u(k-1)u(k-1)u(k-1)$	$-7,725 \times 10^{-4}$	$5,485 \times 10^{-4}$
$u(k-2)u(k-2)u(k-2)$	$-6,629 \times 10^{-3}$	$5,144 \times 10^{-4}$
$u(k-3)u(k-3)u(k-3)$	$1,253 \times 10^{-4}$	$1,326 \times 10^{-4}$
$u(k-1)y(k-3)$	$3,917 \times 10^{-2}$	$3,284 \times 10^{-3}$
$u(k-1)y(k-2)$	$-5,572 \times 10^{-2}$	$3,871 \times 10^{-3}$
$u(k-3)y(k-1)$	$-2,118 \times 10^{-3}$	$8,555 \times 10^{-4}$
$u(k-1)u(k-1)y(k-1)$	$7,260 \times 10^{-3}$	$1,141 \times 10^{-3}$
$u(k-2)u(k-2)y(k-3)$	$-1,386 \times 10^{-2}$	$6,617 \times 10^{-4}$
$u(k-3)u(k-1)y(k-3)$	$6,265 \times 10^{-3}$	$9,667 \times 10^{-4}$

Tabela A.5: Parâmetros obtidos pelo Rotina II.

Termos	Parâmetros	std
$const$	$8,607 \times 10^{-6}$	$2,358 \times 10^{-5}$
$y(k-1)$	$1,318e+$	$8,769 \times 10^{-3}$
$u(k-1)$	$8,597 \times 10^{-4}$	$1,966 \times 10^{-4}$
$u(k-1)u(k-1)$	$4,180 \times 10^{-2}$	$4,832 \times 10^{-4}$
$u(k-1)u(k-1)u(k-1)$	$-8,238 \times 10^{-4}$	$3,654 \times 10^{-4}$
$u(k-1)y(k-3)$	$4,221 \times 10^{-2}$	$2,386 \times 10^{-3}$
$u(k-1)u(k-1)y(k-1)$	$6,624 \times 10^{-3}$	$8,526 \times 10^{-4}$
$y(k-2)$	$-4,105 \times 10^{-1}$	$1,153 \times 10^{-2}$
$u(k-2)$	$-1,660 \times 10^{-3}$	$1,883 \times 10^{-4}$
$u(k-2)u(k-1)$	$1,545 \times 10^{-2}$	$1,568 \times 10^{-4}$
$u(k-2)u(k-2)u(k-2)$	$-6,393 \times 10^{-3}$	$3,456 \times 10^{-4}$
$u(k-1)y(k-2)$	$-5,930 \times 10^{-2}$	$2,853 \times 10^{-3}$
$u(k-2)u(k-2)y(k-3)$	$-1,373 \times 10^{-2}$	$5,069 \times 10^{-4}$
$y(k-3)$	$1,071 \times 10^{-2}$	$3,605 \times 10^{-3}$
$u(k-3)$	$8,405 \times 10^{-4}$	$1,115 \times 10^{-4}$
$u(k-3)u(k-1)$	$-3,147 \times 10^{-3}$	$2,581 \times 10^{-4}$
$u(k-3)u(k-3)u(k-3)$	$2,622 \times 10^{-4}$	$1,016 \times 10^{-4}$
$u(k-3)y(k-1)$	$-3,103 \times 10^{-3}$	$6,460 \times 10^{-4}$
$u(k-3)u(k-1)y(k-3)$	$7,454 \times 10^{-3}$	$7,822 \times 10^{-4}$

Tabela A.6: Em (a) estão os valores médios dos coeficientes dos agrupamentos de termos e em (b) o valor final destes coeficientes obtidos a partir do Rotina I e II. A terceira coluna de (a) e (b) estão os coeficientes calculados para $L = N_i$ e a estrutura completa.

Agrup.	Valor Médio		Orthreg.m	Valor Final	
	Alg. I	Alg. II		Alg. I	Alg. II
Ω_0	$7,333 \times 10^{-6}$	$-4,699 \times 10^{-4}$	$8,607 \times 10^{-6}$	$-3,291 \times 10^{-6}$	$8,607 \times 10^{-6}$
Ω_y	$9,192 \times 10^{-1}$	$9,130 \times 10^{-1}$	$9,182 \times 10^{-1}$	$9,187 \times 10^{-1}$	$9,182 \times 10^{-1}$
Ω_{y^2}	-	-	-	-	-
Ω_{y^3}	-	-	-	-	-
Ω_u	$-4,325 \times 10^{-5}$	$2,056 \times 10^{-3}$	$3,993 \times 10^{-5}$	$1,334 \times 10^{-5}$	$3,993 \times 10^{-5}$
Ω_{u^2}	$5,356 \times 10^{-2}$	$5,832 \times 10^{-2}$	$5,410 \times 10^{-2}$	$5,377 \times 10^{-2}$	$5,410 \times 10^{-2}$
Ω_{u^3}	$-7,304 \times 10^{-3}$	$-1,098 \times 10^{-2}$	$-6,954 \times 10^{-3}$	$-7,276 \times 10^{-3}$	$-6,954 \times 10^{-3}$
Ω_{uy}	$-1,892 \times 10^{-2}$	$-3,531 \times 10^{-2}$	$-2,019 \times 10^{-2}$	$-1,867 \times 10^{-2}$	$-2,019 \times 10^{-2}$
Ω_{uy^2}	-	-	-	-	-
Ω_{yu^2}	$1,036 \times 10^{-4}$	$1,861 \times 10^{-2}$	$3,473 \times 10^{-4}$	$-3,367 \times 10^{-4}$	$3,473 \times 10^{-4}$

Tabela A.7: Parâmetros obtidos pelo Rotina I.

Termos	Parâmetros	std
$y(k-1)$	1,196	$6,506 \times 10^{-3}$
$y(k-2)$	$-2,389 \times 10^{-1}$	$9,346 \times 10^{-3}$
$y(k-3)$	$-4,703 \times 10^{-2}$	$3,570 \times 10^{-3}$
$u(k-1)u(k-1)$	$4,304 \times 10^{-2}$	$2,927 \times 10^{-4}$
$u(k-2)u(k-1)$	$1,643 \times 10^{-2}$	$1,828 \times 10^{-4}$
$u(k-3)u(k-1)$	$5,497 \times 10^{-4}$	$2,617 \times 10^{-4}$
$u(k-1)u(k-1)u(k-1)$	$-1,430 \times 10^{-3}$	$3,100 \times 10^{-4}$
$u(k-2)u(k-2)u(k-2)$	$-4,509 \times 10^{-3}$	$3,754 \times 10^{-4}$
$u(k-3)u(k-3)u(k-3)$	$1,060 \times 10^{-3}$	$1,843 \times 10^{-4}$
$u(k-1)y(k-3)$	$6,373 \times 10^{-2}$	$3,409 \times 10^{-3}$
$u(k-1)y(k-2)$	$-8,256 \times 10^{-2}$	$3,640 \times 10^{-3}$
$u(k-3)y(k-1)$	$-9,801 \times 10^{-3}$	$6,899 \times 10^{-4}$

Tabela A.8: Parâmetros obtidos pelo Rotina II.

Termos	Parâmetros	std
$y(k-1)$	1,211	$4,592 \times 10^{-3}$
$u(k-1)u(k-1)$	$4,258 \times 10^{-2}$	$2,107 \times 10^{-4}$
$u(k-1)u(k-1)u(k-1)$	$-8,046 \times 10^{-4}$	$2,161 \times 10^{-4}$
$u(k-1)y(k-3)$	$6,061 \times 10^{-2}$	$2,588 \times 10^{-3}$
$y(k-2)$	$-2,596 \times 10^{-1}$	$6,616 \times 10^{-3}$
$u(k-2)u(k-1)$	$1,647 \times 10^{-2}$	$1,423 \times 10^{-4}$
$u(k-2)u(k-2)u(k-2)$	$-5,384 \times 10^{-3}$	$2,602 \times 10^{-4}$
$u(k-1)y(k-2)$	$-7,910 \times 10^{-2}$	$2,744 \times 10^{-3}$
$y(k-3)$	$-4,051 \times 10^{-2}$	$2,557 \times 10^{-3}$
$u(k-3)u(k-1)$	$1,890 \times 10^{-4}$	$1,918 \times 10^{-4}$
$u(k-3)u(k-3)u(k-3)$	$1,183 \times 10^{-3}$	$1,406 \times 10^{-4}$
$u(k-3)y(k-1)$	$-9,551 \times 10^{-3}$	$5,467 \times 10^{-4}$

Tabela A.9: Em (a) estão os valores médios dos coeficientes dos agrupamentos de termos e em (b) o valor final destes coeficientes obtidos a partir do Rotina I e II. A terceira coluna de (a) e (b) estão os coeficientes calculados para $L = N_i$ e a estrutura completa.

Agrup.	Valor Médio		Orthreg.m	Valor Final	
	Alg. I	Alg. II		Alg. I	Alg. II
Ω_0	-	-	-	-	-
Ω_y	9,097	$9,062 \times 10^{-1}$	$9,113 \times 10^{-1}$	$9,101 \times 10^{-1}$	$9,113 \times 10^{-1}$
Ω_{y^2}	-	-	-	-	-
Ω_{y^3}	-	-	-	-	-
Ω_u	-	-	-	-	-
Ω_{u^2}	$6,016 \times 10^{-2}$	$6,137 \times 10^{-2}$	$5,924 \times 10^{-2}$	$6,002 \times 10^{-2}$	$5,924 \times 10^{-2}$
Ω_{u^3}	$-5,179 \times 10^{-3}$	$-7,220 \times 10^{-3}$	$-5,006 \times 10^{-3}$	$-4,879 \times 10^{-3}$	$-5,006 \times 10^{-3}$
Ω_{uy}	$-2,802 \times 10^{-2}$	$-2,249 \times 10^{-2}$	$-2,804 \times 10^{-2}$	$-2,862 \times 10^{-2}$	$-2,804 \times 10^{-2}$
Ω_{yyu^2}	-	-	-	-	-
Ω_{uy^2}	-	-	-	-	-

Tabela A.10: Parâmetros obtidos pelo Rotina I.

Termos	Parâmetros	std
$y(k-1)$	1,125	2,981e-003
$y(k-2)$	$-1,199 \times 10^{-1}$	4,694e-003
$y(k-3)$	$-9,757 \times 10^{-2}$	2,542e-003
$u(k-1)u(k-1)$	$4,117 \times 10^{-2}$	$1,348 \times 10^{-4}$
$u(k-2)u(k-1)$	$1,564 \times 10^{-2}$	$2,472 \times 10^{-4}$
$u(k-3)u(k-1)$	$4,314 \times 10^{-3}$	$2,206 \times 10^{-4}$
$u(k-1)y(k-3)$	$1,142 \times 10^{-1}$	$3,131 \times 10^{-3}$
$u(k-1)y(k-2)$	$-1,370 \times 10^{-1}$	$3,378 \times 10^{-3}$
$u(k-3)y(k-1)$	$-1,531 \times 10^{-2}$	$6,328 \times 10^{-4}$

Tabela A.11: Parâmetros obtidos pelo Rotina II.

Termos	Parâmetros	std
$y(k-1)$	1,126	$2,539 \times 10^{-3}$
$u(k-1)u(k-1)$	$4,118 \times 10^{-2}$	$1,140 \times 10^{-4}$
$u(k-1)y(k-3)$	$1,167 \times 10^{-1}$	$2,509 \times 10^{-3}$
$y(k-2)$	$-1,196 \times 10^{-1}$	$3,925 \times 10^{-3}$
$u(k-2)u(k-1)$	$1,559 \times 10^{-2}$	$2,116 \times 10^{-4}$
$u(k-1)y(k-2)$	$-1,400 \times 10^{-1}$	$2,715 \times 10^{-3}$
$y(k-3)$	$-9,826 \times 10^{-2}$	$2,061 \times 10^{-3}$
$u(k-3)u(k-1)$	$4,443 \times 10^{-3}$	$1,811 \times 10^{-4}$
$u(k-3)y(k-1)$	$-1,542 \times 10^{-2}$	$5,168 \times 10^{-4}$

Tabela A.12: Em (a) estão os valores médios dos coeficientes dos agrupamentos de termos e em (b) o valor final destes coeficientes obtidos a partir do Rotina I e II. A terceira coluna de (a) e (b) estão os coeficientes calculados para $L = N_i$ e a estrutura completa.

Agrup.	Valor Médio		Orthreg.m	Valor Final	
	Alg. I	Alg. II		Alg. I	Alg. II
Ω_0	-	-	-	-	-
Ω_y	$9,079 \times 10^{-1}$	$9,026 \times 10^{-1}$	$9,081 \times 10^{-1}$	$9,079 \times 10^{-1}$	$9,081 \times 10^{-1}$
Ω_{y^2}	-	-	-	-	-
Ω_{y^3}	-	-	-	-	-
Ω_u	-	-	-	-	-
Ω_{u^2}	$6,111 \times 10^{-2}$	$5,979 \times 10^{-2}$	$6,122 \times 10^{-2}$	$6,113 \times 10^{-2}$	$6,122 \times 10^{-2}$
Ω_{u^3}	-	-	-	-	-
Ω_{yu}	$-3,801 \times 10^{-2}$	$-2,726 \times 10^{-2}$	$-3,878 \times 10^{-2}$	$-3,814 \times 10^{-2}$	$-3,878 \times 10^{-2}$
Ω_{uy^2}	-	-	-	-	-
Ω_{yu^2}	-	-	-	-	-