

Universidade Federal de Minas Gerais  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

# Teste de Hipóteses Sobre o Espectro de Frequência, Aplicado na Manutenção Preditiva de Motores de Indução

Vinícius Damasceno Said Calil

Dissertação de mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

**Orientadores:** Benjamim Rodrigues de Menezes  
Lane Maria Rabelo Baccarini

**Belo Horizonte**  
**21/Agosto/2008**



# Dedicatória

Aos meus pais, *Ezequias e Benvinda*,  
e filho, *Gustavo*.



# Agradecimentos

Aos amigos do PPGEE: Eduardo Magalhães Oliveira, Levi Henrique Santana de Lelis, Luciana Pedrosa Salles, Roger Júnio Campos; obrigado pelo apoio logo nos primeiros passos dessa caminhada.

Ao meu Professor orientador, Benjamim Rodrigues de Menezes, obrigado pela paciência e compreensão. Ao Professor Carlos Julio Tierra-Criollo obrigado pelo constante auxílio. À minha Professora Co-orientadora, Lane Maria Rabelo Baccharini, obrigado por toda a sua dedicação.

Aos meus pais e filho: Ezequias, Benvinda e Gustavo; obrigado por todo o suporte e paciência.



# Resumo

Este projeto surge com o objetivo de aprimorar técnicas e desenvolver uma ferramenta de manutenção preditiva para diagnóstico de motores elétricos. Baseado na abordagem não intrusiva da Análise de Corrente (*Motor Current Signature Analysis - MCSA*) para detecção de quebra de barras em rotor de motores de indução trifásicos, foi elaborado um método de análise espectral que auferiu maior precisão e segurança, comparado à simples aplicação da Transformada de Fourier (*Fast Fourier Transform - FFT*). Após a análise das propriedades estocásticas da *FFT* e suas deficiências, aqui apresentadas, elaborou-se um Estimador de Máxima Verossimilhança - EMV que possibilita a realização do Teste de Hipóteses sobre variáveis aleatórias gaussianas das estimativas de amplitude, fase e frequência contínua do sinal. Para analisar sua viabilidade, tal método foi aplicado na análise de quebra de barras tendo resultados tão eficientes quanto o método de Análise Tradicional. Além disso, o método fornece uma variável de diagnóstico adequada para a avaliação de progressão da falha, incorporando especificidades de cada motor com a determinação de intervalos de confiança para o diagnóstico. Análises que incluíam distúrbios característicos de ambientes industriais (sobretensões, subtensões, desequilíbrios de fases) e outros tipos de falhas mecânicas e elétricas (desbalanceamento, desalinhamento e curto-circuito entre espiras de uma fase) revelaram condições nas quais, sem medidas de precaução, a variável utilizada na Análise Tradicional (muito usada em métodos de inteligência artificial) pode sofrer alterações de forma a comprometer o desempenho do diagnóstico.





# Abstract

This project had begun with the aim of technical improvement and a predictive maintenance tool development for electrical machines diagnosis. Based on nonintrusive approach *Motor Current Signature Analysis - MCSA* for three-phase induction motor broken bars detection, it was developed a spectral analysis method able to increase accuracy and reliability, compared to simple *Fast Fourier Transform - FFT* use. Upon *FFT* stochastic properties and deficiencies analysis, here presented, it was developed a *Maximum Likelihood Estimator - MLE* that allows Hypothesis Test implementation for Gaussian random variable from signal's amplitude, phase and continuous frequency estimates. To check-up its viability, this method was implemented for broken bars detection and achieved results as efficient as Traditional Analysis does. In addition, the method returns a suitable diagnostic variable for fault progress analysis, customized for each motor specifics characteristics by means of confidence intervals determination for diagnostic. Analysis under commonly industrial environment disturbance (undervoltages, overvoltages, unbalanced phases) and other sort of mechanical and electrical faults (axis unbalance and misalignment, single phase interturns short-circuit) tests revealed conditions in which Traditional Analysis variable (usually presents in artificial intelligence methods) may be changed leading to jeopardize the diagnostic performance.



# Lista de Símbolos e Abreviaturas

## Abreviaturas

<i>CTFT</i>	Continuous Time Fourier Transform;
<i>DTFT</i>	Discrete Time Fourier Transform;
<i>DTFS</i>	Discrete Time Fourier Series;
<i>FAC</i>	Função de Autocorrelação;
<i>FHRE</i>	Frequências Harmonicamente relacionadas à Resolução Espectral;
<i>JFFS</i>	Janela de Fourier com Fases Sincronizadas;
<i>MCSA</i>	Motor Current Signature Analysis;
<i>pdf</i>	Probability Density Function;
$P_{FA}$	Probability of False Alarm;
$P_M$	Probability of Miss;
<i>PSD</i>	Power Spectral Density;
<i>RESERE</i>	Razão da Energia do Sinal Espectral pelo Ruído Espectral;
<i>rgb</i>	Ruído Gaussiano Branco;
<i>VA</i>	Variável Aleatória;
<i>WSS</i>	Wide Sense Stationary;

## Operadores

$B(y, z)$	função Beta com parâmetros $y$ e $z$ ;
$E\{ \}$	expectância, esperança matemática ou média de uma variável aleatória;
$\mathcal{F}_{CTFT}\{ \}$	operador da equação de análise da <i>CTFT</i> ;
$\mathcal{F}_{DTFT}\{ \}$	operador da equação de análise da <i>DTFT</i> ;
$\mathcal{F}_{DTFS}\{ \}$	operador da equação de análise da <i>DTFS</i> ;
$\mathcal{IF}_{CTFT}\{ \}$	operador da equação de síntese da <i>CTFT</i> ;
$\mathcal{IF}_{DTFT}\{ \}$	operador da equação de síntese da <i>DTFT</i> ;
$\mathcal{IF}_{DTFS}\{ \}$	operador da equação de síntese da <i>DTFS</i> ;

## Operadores (continuação)

$\Im\{ \}$	componente Imaginária de um número complexo;
$\Re\{ \}$	componente Real de um número complexo;
$\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	atribui distribuição de probabilidade Gaussiana, com uma média $\mu$ e variância $\sigma^2$ ;
$\sim \mathcal{U}(a, b)$	atribui distribuição de probabilidade Uniforme no intervalo $[a, b]$ ;

## Variáveis

$A$	amplitude de funções harmônicas determinísticas;
$\hat{A}$	variável aleatória da estimativa da amplitude $A$ da componente determinística $y_{(n)}$ ;
$\dot{A}$	realização de uma estimativa da amplitude $A$ da componente determinística $y_{(n)}$ ;
$A_h$	amplitude do harmônico de ordem $h$ da função determinística $x_{(h)}$ ;
$A_{FL}$	realização de uma estimativa da amplitude da frequência síncrona na corrente do motor;
$A_{LSB_1}$	realização de uma estimativa da amplitude da frequência $LSB_1$ na corrente do motor;
$c$	quantidade de componentes espectrais em $\alpha_{y_{(n)}}$ ;
$F$	frequência contínua (em [Hz]);
$\hat{F}$	variável aleatória da estimativa da frequência $F$ da componente determinística $y_{(n)}$ ;
$\dot{F}$	realização de uma estimativa da frequência $F$ da componente determinística $y_{(n)}$ ;
$F_{bb}$	frequência afetada pelas falhas estruturais do rotor de motores de indução (em [Hz]);
$F_F$	frequência fundamental da função periódica $x_{(t)}$ (em [Hz]);
$F_H$	frequência da maior ordem harmônica na função periódica $x_{(t)}$ (em [Hz]);
$F_s$	frequência de amostragem (em [Hz]);
$F_{sr}$	taxa de amostragem (em [amostra/s]);
$f$	ordem espectral da componente determinística $y_{(n)}$ ([adimensional]) ;
$f_h$	ordem espectral do harmônico $h$ (frequência $F_h$ ) da função determinística $x$ ([adimensional]);
$f(\xi)$	<i>pdf</i> da variável aleatória $\xi$ do Teste do Hipóteses;
$H$	índice da maior ordem harmônica presente na função determinística $x$ ;

## Variáveis (continuação)

$h$	índice de ordem harmônica da função determinística $x$ ;
$\dot{I}_k$	componente imaginária de $\dot{Y}_{(k)}$ ;
$j$	número imaginário $\sqrt{-1}$ ;
$j$	índice da janela de amostragem para a função $y_{(j,\tau)}$ ;
$\mathbf{K}$	vetor de ordens espectrais selecionadas para a estimação de $\hat{\Theta}_{FDC}$ ;
$k$	ordem do espectro de frequência discreta ([adimensional]);
$LSB_1$	primeira frequência da Banda Lateral Inferior (Lower Side Band);
$M$	quantidade de amostras processadas pelo estimador da FAC;
$m$	ordem de amostragem do espectro de frequência contínua obtido pela DTFT (em [1/amostra]);
$N$	quantidade de amostras processadas por batelada da DTFS (em [amostra]);
$n$	tempo discreto (em [amostra]);
$n_1$	parâmetro de $f(\xi)$ definido como grau de liberdade da frequência $LSB_1$ ;
$n_2$	parâmetro de $f(\xi)$ definido como grau de liberdade da frequência $F_L$ ;
$n_s$	velocidade de rotação síncrona (em rpm);
$n_r$	velocidade de rotação do rotor (em rpm);
$P_{FA0}$	Probabilidade de falsos alarmes da Hipótese $H_0$ ;
$P_{M1}$	Probabilidade de perdas da Hipótese $H_1$ ;
$P_{xx[F_a, F_b]}$	potência no intervalo entre as frequências do espectro discreto $F_a$ e $F_b$ calculada a partir de $S_{xx(F)}$ ;
$P_{xx[\omega_a, \omega_b]}$	potência no intervalo entre as frequências $\omega_a$ e $\omega_b$ calculada a partir de $S_{xx(\omega)}$ ;
$P(b \leq B)$	probabilidade cumulativa da variável aleatória $b$ no intervalo $[-\infty, B]$ ;
$pp$	par de pólos do motor de indução;
$p_{(x(t))}$	densidade de probabilidade da variável aleatória $x_{(t)}$ ;
$\dot{R}_k$	componente real de $\dot{Y}_{(k)}$ ;
$R_{xx(r)}$	Função de Autocorrelação da função WSS $x_{(n)}$ ;
$R_{xx(t_1, t_2)}$	Função de Autocorrelação da função $x_{(t)}$ ;
$R_{xx(\tau)}$	Função de Autocorrelação da função WSS $x_{(t)}$ ;
$Resere$	variável usada para quantificar o parâmetro RESERE;
$r$	intervalo de atraso para a o cálculo da FAC da função WSS $x_{(n)}$ ;
$rgb_{(n)}$	vetor do ruído gaussiano branco;
$rgb_{(j,\tau)}$	vetor do ruído gaussiano branco, indexado pelo número da janela de amostragem $j$ e amostra $\tau$ ;

## Variáveis (continuação)

$S_{xx(F)}$	“Densidade Espectral de Potência” (ou Potência Espectral) da função $x_{(n)}$ ;
$S_{xx(\omega)}$	Densidade Espectral de Potência da função $x_{(t)}$ ;
$s$	escorregamento do motor $\left(\frac{n_s - n_r}{n_s}\right)$ ;
$t$	tempo contínuo (em [s]);
$USB_1$	primeira freqüência da Banda Lateral Superior (Upper Side Band);
$X_{(F)}$	representação de $x_{(t)}$ no domínio da freqüência contínua;
$X_h$	representação de $x_h$ no domínio da freqüência discreta;
$X_{h(k)}$	parcela de contribuição de $x_h$ à função $X_{(k)}$ ;
$X_{(k)}$	representação de $x_{(n)}$ no domínio da freqüência discreta;
$X_{(\omega)}$	representação de $x_{(n)}$ no domínio da freqüência contínua;
$x_h$	função harmônica do tipo $A_h \cos(2\pi F_h / F_s n + \phi_h)$ no domínio do tempo discreto;
$x_{(n)}$	função periódica determinística $x$ no domínio do tempo discreto;
$x_{(t)}$	função periódica determinística $x$ no domínio do tempo contínuo;
$Y$	um valor que a realização de $Y_{\Re(f)}$ ou $Y_{\Im(f)}$ pode assumir;
$Y_{(k)}$	representação da função corrompida $y_{(n)}$ no domínio da freqüência discreta;
$Y_{(K)}$	vetor das variáveis aleatórias da função $Y_{(k)}$ , nas freqüências discretas de $K$ ;
$\hat{Y}_{(k)}$	representação do sinal estimado $\hat{y}_{(n)}$ no domínio da freqüência discreta;
$Y_{\Im(f)}$	variável aleatória da componente imaginária de $Y_{(f)}$ ;
$Y_{\Re(f)}$	variável aleatória da componente real de $Y_{(f)}$ ;
$y_{(n)}$	função periódica corrompida por ruído aditivo gaussiano branco;
$Y_{(n)}$	componente harmônica determinística do sinal corrompido $y_{(n)}$ ;
$\hat{Y}_{(n)}$	um realização da estimativa da componente harmônica determinística $Y_{(n)}$ ;
$y_{(j,\tau)}$	função periódica corrompida, indexada pelo número da janela de amostragem $j$ e amostra $\tau$ ;
$\alpha_{y_{(n)}}$	vetor de realizações de $Y_{(K)}$ ;
$\Delta_e$	um valor que uma realização de $\delta_e$ pode assumir;
$\delta_e$	variável aleatória do erro de estimação dos parâmetros de $\hat{\Theta}_{FDC}$ ;
$\delta_f$	taxa de amostragem do espectro de freqüência contínuo para exibição do gráfico da <i>DTFT normalizada</i> (em [1/amostra]);
$\gamma_{M1}$	valor do limiar de perdas para a Hipótese $H_1$ ;

## Variáveis (continuação)

$\gamma_{FA0}$	valor do limiar de falsos alarmes para a Hipótese $H_0$ ;
$\Lambda_{rgb(k)}$	representação de $rgb_{(n)}$ no domínio da frequência discreta;
$\lambda_1$	parâmetro de $f(\xi)$ definido como parâmetro de não centralidade da frequência $LSB_1$ ;
$\lambda_2$	parâmetro de $f(\xi)$ definido como parâmetro de não centralidade da frequência $F_L$ ;
$\mu_{\delta_e}$	diferença entre o parâmetro determinístico de $y_{(n)}$ e a média do seu respectivo desvio $\delta_e$ ;
$\omega$	frequência angular contínua para sinais no tempo discreto (em [rad/amostra]);
$\Psi_{(m)}$	(amostra da) representação de $x_{(n)}$ no domínio da frequência contínua;
$\phi$	ângulo de fase de funções harmônicas determinísticas;
$\hat{\phi}$	variável aleatória da estimativa da fase $\phi$ da componente determinística $y_{(n)}$ ;
$\dot{\phi}$	realização de uma estimativa da fase $\phi$ da componente determinística $y_{(n)}$ ;
$\phi_h$	ângulo de fase do harmônico de ordem $h$ da função determinística $x_{(n)}$ ;
$\phi_{(j)}$	ângulo de fase observado na janela de amostragem $j$ da função corrompida $y$ ;
$\rho_0$	valor da média da distribuição de probabilidade da Hipótese $H_0$ ;
$\rho_1$	valor da média da distribuição de probabilidade da Hipótese $H_1$ ;
$\sigma_t^2$	variância de $rgb_{(n)}$ no domínio do tempo;
$\sigma_f^2$	variância do ruído espectral ( $\Lambda_{rgb(k)}$ ) no domínio da frequência discreta;
$\Theta$	vetor de parâmetros $\theta$ a ser estimado;
$\dot{\Theta}$	realização de uma estimativa do vetor $\Theta$ ;
$\hat{\Theta}_{FDC}$	estimador de amplitude, ângulo de fase e frequência para sinais corrompidos, a partir da <i>DTFS</i> desse sinal;
$\theta$	um parâmetro genérico a ser estimado;
$\tau$	índice de amostras dentro de uma janela da função corrompida $y_{(j,\tau)}$ ;
$\xi$	variável aleatória do Teste de Hipóteses, definida pela Razão das Energias entre as frequências $LSB_1$ e $F_L$ ;
$\check{\xi}$	uma realização da variável aleatória $\xi$ ;





# Sumário

Dedicatória	iii
Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
Lista de Símbolos e Abreviaturas	xi
Sumário	xvii
Lista de Figuras	xxi
Lista de Tabelas	xxv
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	1
1.2 Estado da Arte . . . . .	2
1.3 Estrutura da Dissertação . . . . .	3
<b>2 Transformada de Fourier</b>	<b>5</b>
2.1 As Variantes da “Transformada de Fourier” . . . . .	5
2.2 Equações da “Transformada de Fourier” . . . . .	6
2.3 A DTFS de um Sinal Determinístico . . . . .	7
2.4 A DTFS de um Ruído Gaussiano Branco . . . . .	10
2.5 DTFS de um Sinal Corrompido por Ruído . . . . .	12
2.6 Um Adendo Sobre a DTFT . . . . .	13
2.7 Conclusão . . . . .	18
<b>3 DTFS de Sinais Corrompidos</b>	<b>21</b>
3.1 Introdução . . . . .	21

3.2	Amostragem Múltipla Classe 1	25
3.3	Amostragem Múltipla Classe 2	26
3.4	Amostragem Múltipla Classe 3	28
3.5	Amostragem Múltipla Classe 4	30
3.6	Um adendo sobre a <i>Power Spectral Density - PSD</i>	31
3.7	Conclusão	35
<b>4</b>	<b>Estimação da Amplitude de Uma Amostragem Classe 4</b>	<b>39</b>
4.1	Introdução	39
4.2	Equacionamento do Estimador	40
4.3	Estimação de Sinais Determinísticos	44
4.4	Propriedades Estocásticas do Estimador	45
4.5	Comparação de Desempenhos	48
4.6	Conclusão	53
<b>5</b>	<b>O Motor de Indução</b>	<b>57</b>
5.1	A Importância do Motor de Indução	57
5.2	Quebra de Barras do Rotor	57
5.3	Restrições do Motor Utilizado	59
<b>6</b>	<b>Teste de Hipóteses</b>	<b>61</b>
6.1	Introdução	61
6.2	A Variável Aleatória	62
6.3	As Hipóteses	64
6.4	Conclusão	67
<b>7</b>	<b>Análise Decisória</b>	<b>69</b>
7.1	Panorama Geral	69
7.2	O processo de análise	71
7.3	Características do Processo de Diagnóstico	72
7.3.1	Tratamento do Ruído	72
7.3.2	Parâmetros de Desempenho e suas Relações de Compromisso	73
7.4	As Hipóteses	75
<b>8</b>	<b>Testes e Resultados</b>	<b>79</b>
8.1	Procedimentos do Teste de Hipóteses	80
8.2	Teste de Hipóteses na Detecção de Falhas	82
8.2.1	Uma Comparação Entre a Análise Tradicional e a Metodologia Proposta	82

8.2.2	A influência de distúrbios no Teste de Hipóteses . . . . .	89
8.2.3	A influência da potência nominal sobre a Razão das Energias . . . . .	97
8.3	Conclusão . . . . .	98
<b>9</b>	<b>Conclusão</b>	<b>101</b>
9.1	Sobre a Metodologia Proposta . . . . .	101
9.2	Sobre a Aplicação Proposta . . . . .	102
9.3	Resultados do Projeto . . . . .	102
9.4	Trabalhos Futuros . . . . .	104
<b>A</b>	<b>O Motor de Indução</b>	<b>107</b>
<b>B</b>	<b>Teorema de Neyman-Pearson</b>	<b>109</b>
B.1	Detecção de nível DC . . . . .	109
B.2	A Razão das Energias . . . . .	113
<b>C</b>	<b>Algumas Importantes pdf's</b>	<b>115</b>
C.1	Gaussiana . . . . .	115
C.2	Chi-squared . . . . .	116
C.3	Rician (ou Generalized Rayleigh) . . . . .	117
C.4	Central, Noncentral e Doubly Noncentral F (Fisher) . . . . .	117
	<b>Bibliografia</b>	<b>119</b>



# Lista de Figuras

2.1	Sinal $S_{1(t)} = 1 + 2 \sum_{k=1}^5 2^{1-k} \cos(2000\pi kt + \pi/k)$ e as $N = 10$ amostras do sinal $S_{1(n)}$ processadas pela <i>DTFS</i> . . . . .	15
2.2	Espectro de frequência discreta de $S_{1(n)} = 1 + 2 \sum_{f=1}^5 2^{1-f} \cos(2\pi fn/10 + \pi/f)$ com $n \in (0, 9)$ . . . . .	15
2.3	Sinal $S_{1(t)} = 1 + 2 \sum_{k=1}^5 2^{1-k} \cos(2\pi(1000k)t + \pi/k)$ ; as 10 amostras processadas de $S_{1(n)} = 1 + 2 \sum_{f=1}^5 2^{1-f} \cos(2\pi fn/10 + \pi/f)$ e sua síntese conforme equação 2.22 . . . . .	16
2.4	Sinal $S_{2(t)}$ e as $N=11$ amostras do sinal $S_{2(n)}$ processadas pela <i>DTFT</i> . . . . .	17
2.5	Amostras do espectro de frequência do sinal $S_{2(n)}$ : Discreta, Contínua conforme equação 2.24 e Contínua analítica. . . . .	18
3.1	Sinal $x_{(t)} = \sin(2\pi Ft)$ , com $F = 31.25 \cdot 10^{-3}$ Hz, e as $N = 40$ amostras de $x_{(n)}$ observado sob frequência de amostragem $F_s = 1$ Hz. . . . .	23
3.2	Tentativa de síntese, pela <i>DTFS</i> , de $x_{(t)} = \sin(2\pi Ft)$ , com $F = 31.25 \cdot 10^{-3}$ Hz, observado sob frequência de amostragem $F_s = 1$ Hz, a partir das $N = 40$ amostras de $x_{(n)}$ . . . . .	23
3.3	Uma janela da Amostragem Múltipla Classe 1 com $N = 32$ amostras do sinal corrompido $y_{(n)} = 2 \cos\left(2\pi \frac{7}{32}n - \frac{\pi}{4}\right) + rgb_{(n)}$ , com $rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(1, 1)$ , e da sua parte determinística. . . . .	26
3.4	Propriedades estocásticas da Amostragem Múltipla Classe 1, na ordem espectral $f = 7$ do sinal $y_{(n)} = 2 \cos\left(2\pi \frac{7}{32}n - \frac{\pi}{4}\right) + rgb_{(n)}$ , com $rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(1, 1)$ , obtida pelo Método Monte Carlo com $4 \cdot 10^5$ realizações. . . . .	26
3.5	Propriedades estocásticas da Amostragem Múltipla Classe 2, na ordem espectral $f = 7$ do sinal $y_{(n)} = 2 \cos\left(2\pi \frac{7}{32}n + \phi_{(j)}\right) + rgb_{(n)}$ , com $rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(1, 1)$ e $\phi_{(j)} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$ , obtida pelo Método Monte Carlo com $2 \cdot 10^5$ realizações. . . . .	27
3.6	Espectro de frequência da parte determinística de uma janela da Amostragem Múltipla Classe 3, $w_{3(j=1,\tau)} = 2 \cos\left(2\pi \frac{7 \cdot 25}{32}\tau + \phi_{j=1}\right)$ , e da Classe 2, $w_{2(j=1,\tau)} = 2 \cos\left(2\pi \frac{7}{32}\tau + \phi_{j=1}\right)$ , com $\phi_{j=1} = -\frac{\pi}{4}$ . . . . .	29

3.7	Relação entre o módulo da $DTFS$ na ordem espectral $f = 6$ do sinal determinístico $2 \cos\left(2\pi\frac{6.5}{32}\tau + \phi_{(j)}\right)$ e o ângulo de fase $\phi_{(j)}$ , sob Amostragem Múltipla Classe 4. . . . .	30
3.8	Potência Espectral do sinal $x_{(t)} = 3 \cos\left(2\pi 60t + \phi\right)$ sob Amostragem Múltipla Classe 1 ou 2, frequência de amostragem $F_s=2.0\text{kHz}$ , $FAC$ estimada com $M = 4000$ amostras e sua $DTFS$ estimada com $N = 1000$ amostras. . . . .	33
3.9	Potência Espectral do sinal $x_{(t)} = 3 \cos\left(2\pi 61t + \phi\right)$ sob Amostragem Múltipla Classe 3 ou 4, frequência de amostragem $F_s=2.0\text{kHz}$ , $FAC$ estimada com $M = 4000$ amostras e sua $DTFS$ estimada com $N = 1000$ amostras. . . . .	33
3.10	$PDF$ da Potência Espectral $P_{xx(60)}$ da função $w_{(t)} = 3 \cos\left(2\pi 60t + \phi\right) + r_{gb_{(t)}}$ sob Amostragem Múltipla Classe 1 ou 2, com $5 \cdot 10^4$ realizações sendo $r_{gb_{(t)}} \sim \mathcal{N}(1, 90)$ , frequência de amostragem $F_s=2.0\text{kHz}$ , $FAC$ estimada com $M = 4000$ amostras e sua $DTFS$ estimada com $N = 1000$ amostras. . . . .	35
3.11	$PDF$ da Potência Espectral $P_{xx(60)}$ de um ruído gaussiano branco ergódico $r_{gb_{(n)}} \sim \mathcal{N}(1, 90)$ , frequência de amostragem $F_s=2.0\text{kHz}$ , $FAC$ estimada com $M = 4000$ amostras e sua $DTFS$ estimada com $N = 1000$ amostras. . . . .	36
4.1	Amplitude estimada sob o efeito de espalhamento de energia . . . . .	41
4.2	$PDF$ do erro percentual das estimativas de $\hat{A}$ sobre o sinal corrompido $y_{(n)} = A \cos\left(2\pi fn/N + \phi\right) + r_{gb_{(n)}}$ , sendo $A \sim \mathcal{U}(1, 101)$ , $f \sim \mathcal{U}(5, 405)$ , $N=1050$ e $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ . . . . .	47
4.3	$PDF$ do erro percentual das estimativas de $\hat{F}$ sobre o sinal corrompido $y_{(n)} = A \cos\left(2\pi fn/N + \phi\right) + r_{gb_{(n)}}$ , sendo $A \sim \mathcal{U}(1, 101)$ , $f \sim \mathcal{U}(5, 405)$ , $N=1050$ e $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ . . . . .	47
4.4	$PDF$ do erro percentual das estimativas de $\hat{\phi}$ sobre o sinal corrompido $y_{(n)} = A \cos\left(2\pi fn/N + \phi\right) + r_{gb_{(n)}}$ , sendo $A \sim \mathcal{U}(1, 101)$ , $f \sim \mathcal{U}(5, 405)$ , $N=1050$ e $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ . . . . .	48
4.5	$pdf$ do erro normalizado percentual dos estimadores $DTFS$ e $\hat{\Theta}_{FDC}$ , com $1 \cdot 10^5$ realizações de $y_{(n)} = A \cos\left(2\pi fn/N + \phi\right) + r_{gb_{(n)}}$ , sendo $A \sim \mathcal{U}(1, 1001)$ , $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ , $N = 512$ , $f \sim \mathcal{U}_D[5, 251]$ e $r_{gb_{(n)}} \sim \mathcal{N}(0, 0.0011A^2)$ . . . . .	50
4.6	$pdf$ do erro normalizado percentual de $\hat{A}$ dos estimadores $DTFS$ e $\hat{\Theta}_{FDC}$ , com $1 \cdot 10^5$ realizações de $y_{(n)} = A \cos\left(2\pi fn/N + \phi\right) + r_{gb_{(n)}}$ , sendo $A \sim \mathcal{U}(1, 1001)$ , $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ , $N = 512$ , $f \sim \mathcal{U}_C(5, 251)$ e $r_{gb_{(n)}} \sim \mathcal{N}(0, 0.0011A^2)$ . . . . .	51
4.7	$pdf$ do erro normalizado percentual de $\hat{\phi}$ dos estimadores $DTFS$ e $\hat{\Theta}_{FDC}$ , com $1 \cdot 10^5$ realizações de $y_{(n)} = A \cos\left(2\pi fn/N + \phi\right) + r_{gb_{(n)}}$ , sendo $A \sim \mathcal{U}(1, 1001)$ , $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ , $N = 512$ , $f \sim \mathcal{U}_C(5, 251)$ e $r_{gb_{(n)}} \sim \mathcal{N}(0, 0.0011A^2)$ . . . . .	52

4.8	<i>pdf</i> do erro normalizado percentual dos estimadores <i>DTFS</i> e $\hat{\Theta}_{FDC}$ , com $2 \cdot 10^5$ realizações de $y_{(n)} = A \cos(2\pi fn/N + \phi) + rgb_{(n)}$ , sendo $A \sim \mathcal{U}(1, 1001)$ , $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ , $N = 512$ , $f \sim \mathcal{U}_D[5, 251]$ e $rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(0, 2.748A^2)$ . . . . .	53
4.9	<i>pdf</i> do erro normalizado percentual dos estimadores <i>DTFS</i> e $\hat{\Theta}_{FDC}$ , com $3.4 \cdot 10^5$ realizações de $y_{(n)} = A \cos(2\pi fn/N + \phi) + rgb_{(n)}$ , com $A \sim \mathcal{U}(1, 1001)$ , $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ , $N = 512$ , $f \sim \mathcal{U}_C(5, 251)$ e $rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(0, 2.748A^2)$ . . . . .	54
5.1	Frequências afetadas pela quebra de barras . . . . .	60
6.1	Influência de <i>RESERE</i> sobre as Hipóteses, definidas pelos parâmetros: $A_{LSB_1} = 1.5 \cdot 10^{-3}$ , $A_{FL} = 1.0 \cdot 10^0$ , $\sigma_{LSB_1}^2 = \sigma_{FL}^2$ e $n_1 = n_2 = 10$ . . . . .	65
6.2	Influência da Razão das Energias sobre as Hipóteses, definidas pelos parâmetros: $A_{FL} = 1.0 \cdot 10^0$ , $\sigma_{LSB_1}^2 = \sigma_{FL}^2 = 2.25 \cdot 10^{-9}$ e $n_1 = n_2 = 10$ . . . . .	66
6.3	Influência da quantidade de estimativas sobre as Hipóteses, definidas pelos parâmetros: $A_{LSB_1} = 1.5 \cdot 10^{-3}$ , $A_{FL} = 1.0 \cdot 10^0$ , $\sigma_{LSB_1}^2 = \sigma_{FL}^2 = 2.25 \cdot 10^{-9}$ e $n_1 = n_2$ . . . . .	66
8.1	Teste de Hipóteses e Análise Tradicional do motor <b>S03</b> sem barra quebrada. . . . .	83
8.2	Teste de Hipóteses e Análise Tradicional do motor <b>S03</b> com uma barra quebrada. . . . .	84
8.3	Teste de Hipóteses e Análise Tradicional do motor <b>S03</b> com duas barras quebradas. . . . .	84
8.4	Teste de Hipóteses e Análise Tradicional do motor <b>S04</b> sem barra quebrada. . . . .	87
8.5	Teste de Hipóteses e Análise Tradicional do motor <b>S04</b> com uma barra quebrada. . . . .	88
8.6	Teste de Hipóteses e Análise Tradicional do motor <b>S04</b> com duas barras quebradas . . . . .	88
8.7	Hipóteses de Diferentes Fases do Motor sob a Mesma Severidade da Falha. . . . .	90
8.8	Hipóteses da fase C com diferentes severidade da falha. . . . .	91
8.9	Influência de <i>RESERE</i> sobre as Hipóteses. . . . .	92
8.10	Influência da Razão das Energias sobre as Hipóteses. . . . .	94
8.11	Efeito do Desequilíbrio das Tensões de Alimentação Sobre as Hipóteses. . . . .	95
8.12	Influência da Carga Mecânica Sobre as Hipóteses. . . . .	96
B.1	Hipóteses $H_0, H_1$ e a Área de $P_{FA}$ . . . . .	110
B.2	Hipóteses $H_0, H_1$ e a Área de $P_D$ . . . . .	111





# Lista de Tabelas

7.1	Tabela de diagnóstico de falha de rotor pela MCSA da Análise Tradicional. .	70
8.1	Parâmetros dos Modelos de Motores Simulados . . . . .	82
8.2	Resultados dos testes para as três fases do motor S01 operando em condições nominais. . . . .	89
8.3	Influência de <i>RESERE</i> sobre as Hipóteses. . . . .	92
8.4	O efeito da Razão das Energias sobre as Hipóteses de uma mesma severidade de falha. . . . .	93
8.5	Efeito do Desequilíbrio de Tensão sobre as Hipóteses. . . . .	94
8.6	Influência da Carga sobre as Hipóteses de um mesmo grau de severidade da falha. . . . .	96
8.7	Influência da Carga sobre as Hipóteses de um mesmo grau de severidade da falha. . . . .	97



# Capítulo 1

## Introdução

Este projeto se iniciou a partir da idéia de desenvolver uma metodologia baseada em técnicas de *Processamento Estocástico* para a análise e detecção de falhas incipientes em motores elétricos. O motor de indução foi escolhido para ser o foco do projeto, devido à sua ampla utilização, seja essa utilização medida em consumo de energia, quantidade instalada ou diversidade de aplicações. Objetivando a simplicidade e a redução de custos da implantação de um sistema de monitoração “*on line*”, definiu-se pela técnica denominada *Motor Current Signature Analysis - MCSA*. Tendo em vista que os efeitos de falhas incipientes podem ser facilmente distorcidos por ruído, optou-se por técnicas estocásticas. Há de se ressaltar que a imposição da análise de falhas *incipientes* justifica-se pelo caráter econômico, que reside em minimizar os prejuízos decorrentes de interrupções no processo de produção, em função de falha em motores elétricos; uma necessidade cada vez maior neste mundo “globalizado” em que a concorrência aguça-se cada vez mais contundente.

### 1.1 Objetivos

Esta dissertação tem por objetivo a proposição de um método de estimação do espectro de frequência e uma aplicação desse método no Teste de Hipóteses de componentes espectrais, especificamente para a manutenção preditiva de motores de indução trifásicos do tipo gaiola de esquilo.

O método é uma técnica de análise espectral que utiliza um Estimador de Máxima Verossimilhança (*Maximum Likelihood Estimator - MLE*), desenvolvido no intuito de eliminar o efeito de espalhamento da energia (*Leakage Effect*). Tal estimador é capaz de gerar estimativas não tendenciosas<sup>1</sup> de um sinal discreto corrompido por ruído aditivo gaussiano branco estacionário no sentido estrito, a partir de sua Serie de Fourier para o Tempo

---

<sup>1</sup> *biased*, do inglês, também é traduzido como polarizado ou enviesado, por outros autores.

Discreto (*Discrete Time Fourier Series - DTFS*).

Esse método pode ser usado para a aplicação do Teste de Hipóteses sobre análise da resposta de componentes do espectro de frequência da saída de um sistema (linear ou não) à componentes do seu espectro de entrada. Pode também ser aplicado na análise de influência de parâmetros ou eventos desse sistema sobre a relação entre as componentes do espectro de frequência, sejam as variáveis do espectro de entrada e saída grandezas de uma mesma natureza ou de naturezas diferentes. Outra característica a ser ressaltada é que esta metodologia não se limita exclusivamente à análise da amplitude (e energia), podendo também ser aplicada sobre: o ângulo de fase, o deslocamento de frequência dos sinais analisados e na relação entre duas dessas propriedades.

Esta dissertação implementa, especificamente, a aplicação desse método no Teste de Hipóteses da análise preditiva de falhas no rotor de motores de indução, através da análise do perfil (assinatura) da corrente do motor - MCSA. A essa aplicação, acrescenta-se a elaboração de uma heurística, para detecção das frequências que caracterizam a falha, capaz de propiciar à detecção da falha ou monitoração da sua progressão uma característica autônoma, dispensando o auxílio de especialistas na execução do diagnóstico.

## 1.2 Estado da Arte

Em [Acocella & Tierra-Criollo \(1995\)](#) algumas deficiências da utilização da *DTFS* para a análise espectral são apresentadas e abordagens para minimizar seus efeitos são relatadas. Em [Stanley Lawrence Marple & Kay \(1981\)](#), vários métodos de análise espectral (*Periodograma, AR, MA, ARMA, Prony, PHD, MLM*) são apresentados e suas características explanadas (incluindo deficiências da *DTFS*). Em função das deficiências da *DTFS*, técnicas estocásticas de análise espectral são geralmente utilizadas para a realização do Teste de Hipóteses sobre a resposta em frequência de sistemas biológicos. Em [Simpson et al. \(2000\)](#) o uso de três técnicas são comparadas: *Magnitude-Squared Coherence - MCS, Phase Synchrony Measure - PSM* e Teste Espectral F (*Spectral F Test - SFT*). Em [Infantosi et al. \(2005\)](#) e [de Sá et al. \(2006\)](#), a análise da resposta em frequência de Eletroencefalogramas devido à estimulação sensorial é avaliada pelo Teste de Hipóteses sendo, sua variável aleatória, o resultado do *SFT*. Em [Infantosi et al. \(2006\)](#), a técnica de *MSC* é usada sobre a resposta em frequência de Eletroencefalogramas para o diagnóstico de problemas baseado no Teste de Hipóteses. De forma semelhante, em [Ferreira & de Sá \(2005\)](#), [de Sá \(2005\)](#), [Infantosi & de Sá \(2007\)](#), [Felix et al. \(2007\)](#), e [de Sá et al. \(2002\)](#), técnicas como *Coerência Simples, Múltipla e Parcial* e *Component Synchrony Measure - CSM* são utilizadas para o mesmo propósito.

Em Thomson & Gilmore (2003) e Nandi & Toliyat (1999) encontra-se uma revisão sobre os tipos de falhas mais comuns em motores elétricos (incluindo falhas estruturais no rotor de motores de indução), suas técnicas de detecção baseadas no espectro de frequência das vibrações e perfil de correntes do motor (MCSA), e a utilização de inteligência artificial para melhorar a detecção de falhas. Em Ayhan *et al.* (2005b) e em Ayhan (2005), a técnica conhecida como “*Linear Discriminant Analysis - LDA*” é utilizada para a detecção de quebra de barras do rotor, em Ayhan (2005) Redes Neurais Artificiais e dois Sistemas de Inferência Nebulosos (“*Fuzzy Inference System - FIS*”), com diferentes métodos para geração de suas regras, são utilizados para a detecção dessas falhas e seus resultados comparados com LDA. Em Kokko (2003), Belkhatat *et al.* (2003) e Brito *et al.* (2004) falhas estruturais do rotor e outras mais são analisadas através do espectro de frequência do fluxo magnético axial do motor. Em Pöyhönen (2004), a técnica de inteligência computacional “*Support Vector Machine - SVM*” é utilizada para análise dessas falhas através dos dados de vibração do eixo do rotor. Em Niu *et al.* (2007), vários métodos de classificação (LDA, SVM, *k*-Nearest Neighbors, Random Forest, Adaptive Resonance Theory-Kohonen Neural Network) têm seus desempenhos comparados sobre vários tipos de dados: valor eficaz (*root mean square - RMS*) das correntes, Média, Skewness, Kurtosis, Estimação de Entropia, Estimação espectral por modelo AR.

Em Wieser *et al.* (1999), Kral *et al.* (2002), Kral *et al.* (2005) e Kral *et al.* (2008) é abordado o método Viena (*Vienna Monitoring Method*), que utiliza dois modelos (um de tensão e outro de corrente) para o cálculo do conjugado do motor e a diferença entre esses conjugados (seus resíduos) é a referência para o diagnóstico da falha estrutural de rotor. Em Baccarini (2005), para se evitar a sensibilidade do Método Viena à variação dos parâmetros do motor e das condições iniciais dos estimadores de fluxo, dois outros modelos (observador de modos deslizantes e um modelo discreto do motor de indução) são usados para a geração dos resíduos de conjugado, que indica não somente a quebra de barras mas também a posição em que ela se encontra. Em Cunha (2006), é proposto um método de detecção de quebras de barras do rotor através da análise dos sinais de erro próprios dos reguladores presentes nos inversores através de bancos de filtros digitais tipo passa-faixa.

### 1.3 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está dividida em 9 capítulos. Os capítulos 2, 3 e 4 dedicam-se à técnica proposta para a estimação do espectro de frequência de sinais harmônicos corrompidos por ruído aditivo gaussiano branco. No capítulo 2 são desenvolvidos os fundamentos e a

base teórica para a análise das propriedades estocásticas da *DTFS*. No capítulo 3, algumas deficiências do uso da *DTFS* sobre sinais cuja frequência não é previamente conhecida são apresentadas (“*leakage effect*”, propriedades estocásticas dependentes do ângulo de fase em cada janela do sinal amostrado, dependência da amplitude estimada em função do ângulo de fase e do número de amostras na janela) e suas propriedades estocásticas, determinadas. No capítulo 4 é desenvolvido um estimador para tratar tais deficiências e são apresentados resultados de testes sobre este estimador.

O capítulo 5 descreve as características do sistema (tema e técnica) para o qual essa dissertação desenvolve a aplicação da técnica de estimação para a realização do Teste de Hipóteses sobre as componentes do espectro de frequência.

O capítulo 6 determina os parâmetros do Teste de Hipóteses e sua utilização sobre as amplitudes de frequências específicas do espectro da corrente do motor de indução. O capítulo 7 descreve a metodologia proposta para a análise de componentes espectrais, o procedimento e suas justificativas, seu desempenho e o de outros métodos e a relação de compromisso dos parâmetros das técnicas empregadas para o Teste de Hipóteses. O capítulo 8 sintetiza os resultados dos testes realizados para verificar a eficiência da metodologia e suas possibilidades sobre o efeito de distúrbios no motor em teste. E por fim, o capítulo 9 reúne as conclusões sobre o trabalho apresentado nessa dissertação.

# Capítulo 2

## Transformada de Fourier

Este capítulo estabelece os fundamentos e a base teórica para a análise das propriedades estocásticas da “Transformada de Fourier” de um sinal discreto corrompido por ruído aditivo gaussiano branco. Demonstra-se que, sob certas condições, o espectro desse sinal será composto por variáveis aleatórias também gaussianas, com média e variância previamente determináveis.

O capítulo apresenta a nomenclatura utilizada para as quatro variantes da “Transformada de Fourier” que surgem em função da discretização e da periodicidade do sinal ou do seu espectro. Apresentam-se também as equações resultantes da análise espectral de: um sinal determinístico, um ruído gaussiano e um sinal corrompido. Por fim, apresenta-se uma abordagem numérica para a Transformada de Fourier para o Tempo Discreto.

### 2.1 As Variantes da “Transformada de Fourier”

Os autores [Stanley Lawrence Marple \(1987\)](#), [Proakis & Manolakis \(1996\)](#) e [Oppenheim et al. \(1996\)](#) apresentam em seus livros quatro variantes da “Transformada de Fourier”. Tais variantes resultam das quatro possíveis combinações entre duas características do sinal no domínio do tempo: contínuo/discreto e periódico/aperiódico.

Se um sinal for contínuo e periódico no tempo, seu espectro será discreto com perfil aperiódico. As equações para sua análise espectral e síntese são denominadas como Série de Fourier para o Tempo Contínuo (*Continuous-time Fourier Series - CTFS*), popularmente conhecidas como “Série de Fourier”.

Se um sinal for contínuo e aperiódico no tempo, seu espectro também será contínuo com perfil periódico. As equações para sua análise espectral e síntese são denominadas

como Transformada de Fourier para o Tempo Contínuo (*Continuous-time Fourier Transform - CTFT*), popularmente conhecidas como “Transformada de Fourier”.

Se um sinal for discreto e periódico no tempo, seu espectro também será discreto com perfil periódico. As equações para sua análise espectral e síntese são denominadas como Série de Fourier para o Tempo Discreto (*Discrete-time Fourier Series - DTFS*), popularmente conhecidas como Transformada Discreta de Fourier. Os famosos algoritmos de *FFT* são abordagens numéricas, computacionalmente eficientes, da *DTFS*.

Se um sinal for discreto e aperiódico no tempo, seu espectro será contínuo com perfil periódico. As equações para sua análise espectral e síntese são denominadas como Transformada de Fourier para o Tempo Discreto (*Discrete-time Fourier Transform - DTFT*).

Para evitar confusão com a denominação popular, serão utilizadas apenas as denominações definidas pelos autores indicados no início desta seção. [Stanley Lawrence Marple \(1987\)](#) define as equações da *DTFS* ligeiramente diferente dos demais autores, inserindo um fator de normalização para obter uma correta unidade de potência/energia para as estimativas da Densidade Espectral de Potência.

## 2.2 Equações da “Transformada de Fourier”

Conforme [Proakis & Manolakis \(1996\)](#), [Stanley Lawrence Marple \(1987\)](#) e [Oppenheim et al. \(1996\)](#), a “Transformada de Fourier” de um sinal contínuo aperiódico e sua inversa são dadas, respectivamente, pelo par de equações da *CTFT*:

$$X_{(F)} = \mathcal{F}_{CTFT}\{x_{(t)}\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi Ft} dt \quad (2.1)$$

$$x_{(t)} = \mathcal{I}\mathcal{F}_{CTFT}\{X_{(F)}\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} X_{(F)} e^{j2\pi Ft} dF \quad (2.2)$$

e para sinais discretos aperiódicos, pelo par de equações da *DTFT*:

$$X_{(\omega)} = \mathcal{F}_{DTFT}\{x_{(n)}\} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(n)} e^{-j\omega n} \quad (2.3)$$

$$x_{(n)} = \mathcal{I}\mathcal{F}_{DTFT}\{X_{(\omega)}\} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_{(\omega)} e^{j\omega n} d\omega \quad (2.4)$$

Para fins práticos, na análise espectral de sinais reais discretos no tempo e com um número finito de amostras, esse conjunto de equações (2.3 e 2.4) não é utilizado. O espec-



tro obtido por essas equações tem a característica de ser contínuo, como será observado na seção 2.6, e sua análise é limitada dentro do intervalo  $[0, F_s]$ , ou  $\left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right]$ , sendo  $F_s$  a frequência de amostragem (em [Hz]). É justamente a consequência da discretização no tempo, o efeito de *aliasing*, que impõe a necessidade dos filtros *anti-aliasing* num pré-processamento analógico do sinal antes de sua amostragem.

Na prática, uma análise espectral correta de sinais reais, discretos no tempo pode ser realizada apenas quando esses são periódicos. Nesses casos, aplicam-se as equações da Série de Fourier para Tempo Discreto (*DTFS*), com um custo computacional minimizado pela utilização dos algoritmos de *Fast Fourier Transform - FFT*.

Ainda conforme Proakis & Manolakis (1996) e Oppenheim *et al.* (1996), as equações para a *DTFS*, são:

$$X_{(k)} = \mathcal{F}_{DTFS}\{x_{(n)}\} \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_{(n)} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.5)$$

$$x_{(n)} = \mathcal{I}\mathcal{F}_{DTFS}\{X_{(k)}\} \equiv \sum_{k=0}^{N-1} X_{(k)} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.6)$$

com as variáveis  $n \in (0, N - 1)$  e  $k \in (0, N - 1)$ .

O cálculo da *DTFS* de sinais reais, periódicos e discretos no tempo é obtido pela simples aplicação da *FFT* e posterior normalização dos resultados pela quantidade  $N$  de amostras processadas em uma mesma batelada da *FFT*.

A título de informação, as equações 2.1, 2.3 e 2.5 são conhecidas como equações de análise, ou de transformada direta, enquanto as equações 2.2, 2.4 e 2.6 são conhecidas como equações de síntese, ou de transformada inversa.

## 2.3 A DTFS de um Sinal Determinístico

Seja  $x_{(n)}$  um sinal periódico e discreto no tempo, composto por um valor médio mais  $H$  frequências harmônicas distintas, conforme  $x_{(n)} = x_{h_0} + x_{h_1} + x_{h_2} + \dots + x_{h_H}$ .

Seja também:  $N$  a quantidade de amostras observadas em um (ou mais) ciclo(s) completo(s) de  $x_{(n)}$ ,  $F_{sr}$  a taxa de amostragem (em [amostra/s]) usada para esse sinal,  $F_h$  a frequência (em [Hz]) do harmônico  $h$  presente em  $x_{(n)}$ . O parâmetro  $f_h$  ([adimensional]),

doravante denominado *ordem espectral* do harmônico  $h$ , é definido para todos os harmônicos presentes em  $x_{(n)}$  conforme equação:

$$f_h = \frac{F_h}{F_{sr}/N} \quad (2.7)$$

Conhecendo-se a ordem espectral de  $x_{h_1}, x_{h_2}, \dots, x_{h_H}$ , e considerando o ângulo de fase  $\phi_0$  e a ordem espectral  $f_0$ , ambos da componente contínua  $x_{h_0}$ , iguais a zero, o sinal  $x_{(n)}$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{(n)} &= \sum_{h=0}^H A_h \cos\left(\frac{2\pi}{N} f_h n + \phi_h\right) \\ x_{(n)} &= \sum_{h=0}^H \left( A_h \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{N} f_h n\right) \cos(\phi_h) - \sin\left(\frac{2\pi}{N} f_h n\right) \sin(\phi_h) \right] \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Então, sendo  $F_F$  a frequência fundamental em  $x_{(t)}$  e  $F_H$  seu harmônico de maior frequência, para garantir uma adequada amostragem e uma correta análise espectral pela *DTFS*,  $x_{(t)}$  deve ser processado por um filtro anti-aliasing antes da amostragem e os parâmetros  $N$  e  $F_s$  (frequência de amostragem em [Hz]) devem atender às seguintes condições de restrição:

- $F_s = 2F_H + cF_F$  para um valor qualquer de  $c = 1, 2, 3, \dots$
- $N = F_{sr}/F_F$

Deste modo, a frequência de Nyquist ( $F_s/2$ ) torna-se: superior à maior frequência  $F_H$  em  $x_{(t)}$  e múltipla da fundamental  $F_F$  e de todas as frequências desse sinal. Essas restrições acarretam em  $f_h$  ser sempre um valor inteiro e na resolução do espectro ser igual a  $F_F$ . Cabe ressaltar que o filtro anti-aliasing deve estar ajustado para uma frequência de corte maior que  $F_H$  e menor ou igual à de Nyquist.

Usando a fórmula de Euler<sup>1</sup>, a *DTFS* de  $x_{(n)}$  será, sob tal condição:

$$\begin{aligned} X_{(k)} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( x_{(n)} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right] \right) \\ X_{(k)} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( (x_{h_0} + x_{h_1} + \dots + x_{h_H}) \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right] \right) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>  $e^{-j\omega} = \cos(\omega) - j \sin(\omega)$

$$\begin{aligned}
 X_{(k)} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( x_{h_0} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] \right) \\
 &+ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( x_{h_1} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] \right) \\
 &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 &+ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( x_{h_H} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] \right)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

A partir da equação 2.9, pode-se analisar a influência de cada frequência de  $x_{(n)}$  sobre as componentes real e imaginária da ordem harmônica  $k$  do espectro de frequência discreto. Assim, a partir das equações 2.8 e 2.9, observa-se que a influência de  $x_h$  em  $X_{(k)}$  é dada por:

$$\begin{aligned}
 X_{h(k)} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( A_h \left[ \cos(\phi_h) \cos\left(\frac{2\pi}{N}f_h n\right) \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] \right) \\
 &+ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( A_h \left[ j \sin(\phi_h) \sin\left(\frac{2\pi}{N}f_h n\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] \right) \\
 &- \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( A_h \left[ \sin(\phi_h) \sin\left(\frac{2\pi}{N}f_h n\right) \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] \right) \\
 &- \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( A_h \left[ j \cos(\phi_h) \cos\left(\frac{2\pi}{N}f_h n\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] \right)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

No terceiro e quarto termo da equação 2.10 os produtos do tipo  $\cos(\alpha n) \cdot \sin(\beta n)$  podem ser reescritos na forma  $\frac{1}{2} \cdot [\sin((\beta + \alpha)n) + \sin((\beta - \alpha)n)]$ . Com um total exato de  $N$  amostras por ciclo de  $x_{(n)}$ , ambos os termos resultarão em 0 (zero), pois devido à simetria das funções harmônicas:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi c}{N}n\right) = 0 \quad \forall c = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Estendendo a análise anterior, no primeiro termo a equação 2.10 o produto do tipo  $\cos(\alpha n) \cdot \cos(\beta n)$  pode ser reescrito na forma  $\frac{1}{2} \cdot [\cos((\beta + \alpha)n) + \cos((\beta - \alpha)n)]$ . E no segundo termo o produto do tipo  $\sin(\alpha n) \cdot \sin(\beta n)$  pode ser reescrito na forma  $\frac{1}{2} \cdot [\cos((\beta - \alpha)n) - \cos((\beta + \alpha)n)]$ . Novamente, com um total exato de  $N$  amostras por ciclo de  $x_{(n)}$ ,  $\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}cn\right)$  resultará em:

- $N$  se  $c = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$

- 0 (zero) para demais valores inteiros de  $c$

Portanto, para valores de  $k$  maiores que 0 e menores que  $N/2$  (ou seja, excluindo a componente contínua e as frequências maiores ou igual à de Nyquist), e valores de  $f_h$  inteiros, a influência de  $x_h$  em  $X_{(k)}$  resume-se a:

$$X_{h(k)} = \begin{cases} \frac{A_h}{2} (\cos(\phi_h) + j \sin(\phi_h)) & \text{se } k = f_h \\ 0 & \text{se } k \neq f_h \end{cases} \quad (2.11)$$

Por fim, expandindo esta análise para os outros harmônicos de  $x_{(n)}$  tem-se:

$$X_{(k)} = X_{h(k=f_h)} = \frac{A_h}{2} (\cos(\phi_h) + j \sin(\phi_h)) \quad (2.12)$$

Duas características devem ser observadas sobre esse resultado: seu significado e suas restrições de validade. As restrições de validade são:

- $x_{(n)}$  deve ser periódico e todas as suas frequências, múltiplas da sua fundamental  $F_F$ ;
- sendo  $F_H$  a maior frequência em  $x_{(n)}$ , a frequência de amostragem deve ser  $F_s = (2F_H + cF_F)$  para um valor qualquer de  $c = 1, 2, 3, \dots$ , tornando  $F_H$  menor que a frequência de Nyquist ( $F_s/2$ );
- a quantidade de amostras processada pela DTFS deve ser  $N = (F_{sr}/F_F)$ , tornando a resolução do espectro discreto igual a  $F_F$ ;
- $k$  deve estar no intervalo  $1 \leq k \leq (N - 1)/2$ ; <sup>2 3</sup>;
- a frequência de corte  $F_c$  do filtro anti-aliasing deve atender a  $F_H < F_c < (F_s/2)$ .

Neste contexto, a expressão 2.12 indica que metade da amplitude do harmônico  $h$  está distribuída pelas componentes de  $X_{(k=f_h)}$ , de forma que:  $\sqrt{\Re\{X_{(f_h)}\}^2 + \Im\{X_{(f_h)}\}^2} = A_h/2$ .

## 2.4 A DTFS de um Ruído Gaussiano Branco

Seja  $rgb_{(n)}$  uma seqüência de observações de uma variável aleatória (VA) gaussiana de média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , que representa um ruído aditivo gaussiano branco, estacionário

<sup>2</sup>Para valores de  $k$  iguais a 0 ou  $N/2$  não existe a componente imaginária de  $X_k$  e sua componente real é, respectivamente,  $A_0$  e  $A_{N/2} \cos(\phi_{N/2})$ . Como consequência da perda de um grau de liberdade (ausência da componente imaginária), não é possível identificar o ângulo de fase na frequência de Nyquist e sua amplitude mensurada depende do instante em que foi amostrado o sinal.

<sup>3</sup>Com  $k$  no intervalo  $(N + 1)/2 \leq k \leq (N - 1)$  tem-se  $X_k = \frac{A_{(N-k)}}{2} (\cos(\phi_{(N-k)}) - j \sin(\phi_{(N-k)}))$ .

no sentido estrito (*Strict-sense Stationary*):

$$rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \forall n$$

Aplicando a DTFS sobre  $rgb_{(n)}$  tem-se:

$$\begin{aligned} \Lambda_{rgb(k)} &= \mathcal{F}_{DTFS}\{rgb_{(n)}\} \\ \Lambda_{rgb(k)} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( rgb_{(n)} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] \right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left( rgb_{(n)} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)}{N} \right) - j \sum_{n=0}^{N-1} \left( rgb_{(n)} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)}{N} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Evoluindo a parte real (primeira parcela) da equação 2.13, tem-se:

$$\Re\{\Lambda_{rgb(k)}\} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( rgb_{(n)} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)}{N} \right) = \sum_{n=0}^{N-1} T_{rgb(n)} \quad (2.14)$$

sendo:

$$T_{rgb(n)} \sim \mathcal{N}\left(\mu \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)}{N}, \sigma^2 \left(\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)}{N}\right)^2\right)$$

Conforme [Peyton Z. Peebles \(1980\)](#), sabe-se que a soma de VA's gaussianas estatisticamente independentes resulta numa VA também gaussiana. Pela definição de ruído branco,  $T_{rgb(n)}$  é estatisticamente independente de  $T_{rgb(n+m)}$  para qualquer valor de  $m$  diferente de zero. Então, para a VA gaussiana resultante da equação 2.14, a sua média é obtida com a soma das médias individuais e a sua variância, pela soma das variâncias individuais. Assim:

$$\Re\{\Lambda_{rgb(k)}\} \sim \mathcal{N}\left(\mu_{\Re\{\Lambda_{rgb(k)}\}}, \sigma_{\Re\{\Lambda_{rgb(k)}\}}^2\right)$$

sendo sua média obtida pela equação:

$$\mu_{\Re\{\Lambda_{rgb(k)}\}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( \mu \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)}{N} \right) = \frac{\mu}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

Sendo  $N$  um número inteiro e estando  $k$  limitado no intervalo  $1 \leq k \leq (N-1)/2$ , o somatório resultará em 0 (zero). Quanto à variância, esta pode ser obtida pela equação:

$$\sigma_{\Re\{\Lambda_{rgb(k)}\}}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{\sigma^2}{N^2} \cos^2\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] = \frac{\sigma^2}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{1 + \cos\left(\frac{4\pi}{N}kn\right)}{2} \right)$$

que se resume a:

$$\sigma_{\Re\{\Lambda_{rgb(k)}\}}^2 = \frac{\sigma^2}{N^2} \left( \frac{N}{2} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\cos(\frac{4\pi}{N}kn)}{2} \right)$$

Sendo  $N$  um número inteiro e estando  $k$  limitado no intervalo  $1 \leq k \leq (N-1)/2$ , o somatório resultará em zero. Portanto:

$$\Re\{\Lambda_{rgb(k)}\} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2N}\right) \quad (2.15)$$

A aplicação do mesmo procedimento sobre a parte imaginária de  $\Lambda_{rgb(k)}$  resultará em:

$$\Im\{\Lambda_{rgb(k)}\} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2N}\right) \quad (2.16)$$

Assim, das equações 2.15 e 2.16, conclui-se que:

$$\Lambda_{rgb(k)} = \mathcal{F}_{DTFS}\{rgb_{(n)}\} = \Re\{\Lambda_{rgb(k)}\} + j\Im\{\Lambda_{rgb(k)}\} \quad (2.17)$$

É importante notar que todas as componentes do espectro de 2.17 são variáveis aleatórias gaussianas e, pela característica intrínseca à  $DTFS$ , ortogonais. Conforme Papoulis (1991) e Peyton Z. Peebles (1980), variáveis aleatórias com essas características assumem a condição de serem estatisticamente independentes. Portanto, o espectro resultante da  $DTFS$  de um ruído gaussiano branco estacionário no sentido estrito, excetuando-se a componente contínua e a frequência de Nyquist, é composto por variáveis aleatórias gaussianas independentes e identicamente distribuídas.

## 2.5 DTFS de um Sinal Corrompido por Ruído

Seja  $y_{(n)}$  um sinal corrompido por ruído aditivo, definido pela equação  $y_{(n)} = x_{(n)} + rgb_{(n)}$ , sendo:  $x_{(n)}$  um sinal determinístico e periódico, que atenda às restrições de validade da equação 2.12, e  $rgb_{(n)}$  um ruído gaussiano branco estacionário no sentido estrito. A  $DTFS$  de  $y$  é dada por:

$$Y_{(k)} = \mathcal{F}_{DTFS}\{x_{(n)} + rgb_{(n)}\} = \mathcal{F}_{DTFS}\{x_{(n)}\} + \mathcal{F}_{DTFS}\{rgb_{(n)}\} \quad (2.18)$$

Das equações 2.12 e 2.17 observa-se que cada componente do espectro é a soma de um termo constante (determinado por 2.12) com uma VA (determinada por 2.17). Pelo fato de 2.17 ser uma VA gaussiana, essa soma produz outra VA gaussiana com a média deslocada

pelo termo constante. Logo:

$$Y_{(k)} = \mathcal{F}_{DTFS}\{y_{(n)}\} = \Re\{Y_{(k)}\} + j\Im\{Y_{(k)}\} \quad (2.19)$$

que, atendendo às mesmas restrições de validade da equação 2.12, obtém-se:

$$\Re\{Y_{(k)}\} \sim \mathcal{N}\left(\frac{A_h}{2} \cos(\phi_h), \frac{\sigma^2}{2N}\right) \quad (2.20)$$

$$\Im\{Y_{(k)}\} \sim \mathcal{N}\left(\frac{A_h}{2} \sin(\phi_h), \frac{\sigma^2}{2N}\right) \quad (2.21)$$

Cabe ressaltar que, excetuando-se a componente contínua do sinal, a média do ruído não afeta a média das componentes retornadas pela *DTFS*.

## 2.6 Um Adendo Sobre a DTFT

A rigor, a *DTFT* de um sinal exige uma quantidade de amostras infinitas desse sinal. Entretanto, a prática normalmente não nos permite tal rigor. Há, contudo, um modo para se abordar tal questão.

Na prática nenhum sinal é teoricamente senoidal, pois seu intervalo de relevância, período em que o sinal contém valores diferentes de zero, está limitado em um intervalo de tempo finito. Assim, interpretar um sinal como senoidal puro dependerá do contexto em que este sinal está sendo trabalhado.

No que se refere à aplicação, a diferença básica entre *DTFS* e a *DTFT* reside em como compreender o sinal amostrado no domínio do tempo. Se todo o intervalo de relevância do sinal aperiódico  $x_{(t)}$  estiver no intervalo em que este sinal foi amostrado, aplica-se a *DTFT*. Se a *DTFS* for aplicada a esse sinal, resultará em um espectro discreto igual ao que se obteria amostrando-se o espectro contínuo (resultante da *DTFT*) em intervalos de frequência iguais a  $F_{sr}/N$  (em [Hz]). Neste caso, sintetizando a equação do sinal  $x_{(n)}$ , a partir do espectro discreto, será obtido um sinal periódico de frequência fundamental igual a  $F_{sr}/N$ . Então, para excluir tal periodicidade, originalmente não presente, deve-se multiplicar o sinal sintetizado por uma janela de tempo retangular  $(u_{(n-n_0)} - u_{(n-n_f-1)})$ <sup>4</sup>, sendo  $n_0$  o primeiro instante amostrado e  $n_f$  o último.

<sup>4</sup>A função  $u_{(n)}$ , popularmente conhecida como degrau unitário, assume o valor 1 quando  $n \geq 0$ , caso contrário assume o valor 0.

Se o sinal for periódico, de período igual a  $N$  amostras, aplica-se a *DTFS*, sabendo que se  $x(t)$  possuir apenas frequências múltiplas de  $F_{sr}/N$  e inferiores a  $F_s/2$  o espectro discreto representará com exatidão o conteúdo harmônico do sinal. Caso contrário, possuindo frequências diferentes dessas, apesar de numericamente correto, o espectro não possibilitará a correta interpretação do sinal.

Conforme as restrições impostas pela metodologia descrita na seção 2.3, a *DTFS* deve ser aplicada quando as amostras obtidas a partir do sinal  $x(t)$  constituem um único e completo ciclo de  $x(n)$  e quando todas as frequências em  $x(t)$  são múltiplas de  $F_{sr}/N$  e inferiores a  $F_s/2$ . Sob essa condição, a síntese de um sinal real  $x(n)$  pela equação 2.6, com alguma simplificação, é dada por<sup>5</sup>:

$$x(n) = \Re\{X_{(0)}\} + 2 \sum_{k=1}^{\lfloor (N-1)/2 \rfloor} \left[ \Re\{X_{(k)}\} \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - \Im\{X_{(k)}\} \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] \dots \\ \dots + \Re\{X_{(N/2)}\} \cos(\pi n) \quad (2.22)$$

sendo que o último termo da equação 2.22, trata-se de um complemento que só deve ser utilizado quando  $N$  for par.

Na figura 2.1 é apresentado o sinal  $S_{1(t)}$  e seu correspondente no tempo discreto,  $S_{1(n)}$ . O sinal discreto foi obtido sob frequência de amostragem  $F_s = 10,0\text{kHz}$  e  $N = 10$  amostras durante um ciclo completo de  $S_{1(t)}$ .

$$S_{1(t)} = 1 + 2 \sum_{k=1}^5 2^{1-k} \cos(2\pi(1000k)t + \theta_k) \quad \theta_k = \pi/k$$

$$S_{1(n)} = 1 + 2 \sum_{f=1}^5 2^{1-f} \cos\left(\frac{2\pi}{10}fn + \theta_f\right) \quad \theta_f = \pi/f$$

Na figura 2.2, é apresentado o espectro de frequência discreto de  $S_{1(n)}$ . Na figura 2.3, tem-se o mesmo sinal  $S_{1(n)}$  amostrado e sua síntese a partir do espectro discreto, conforme equação 2.22.

<sup>5</sup>O operador matemático “floor” ( $\lfloor \ ]$ ) retorna o maior número inteiro cujo valor seja menor ou igual à expressão contida entre seus símbolos.



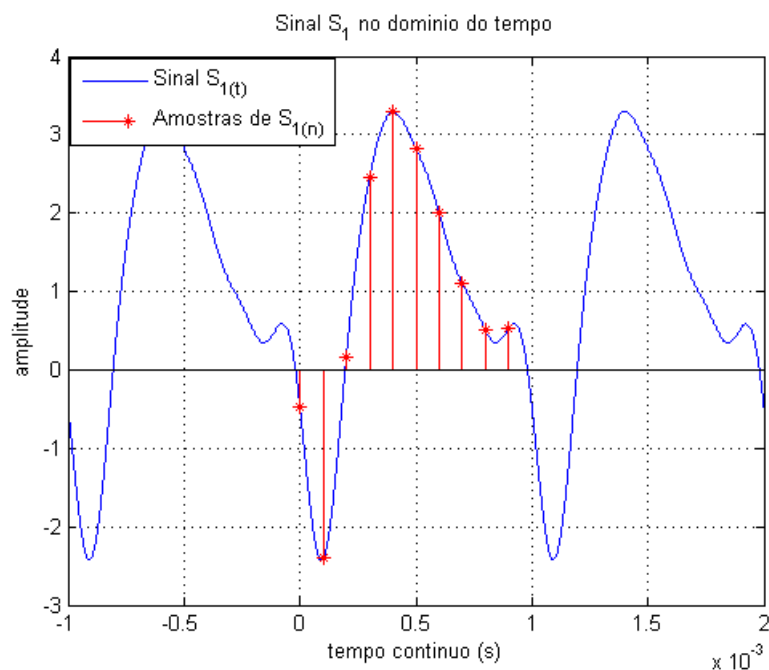


Figura 2.1: Sinal  $S_{1(t)} = 1 + 2 \sum_{k=1}^5 2^{1-k} \cos(2000\pi kt + \pi/k)$  e as  $N = 10$  amostras do sinal  $S_{1(n)}$  processadas pela DTFS.

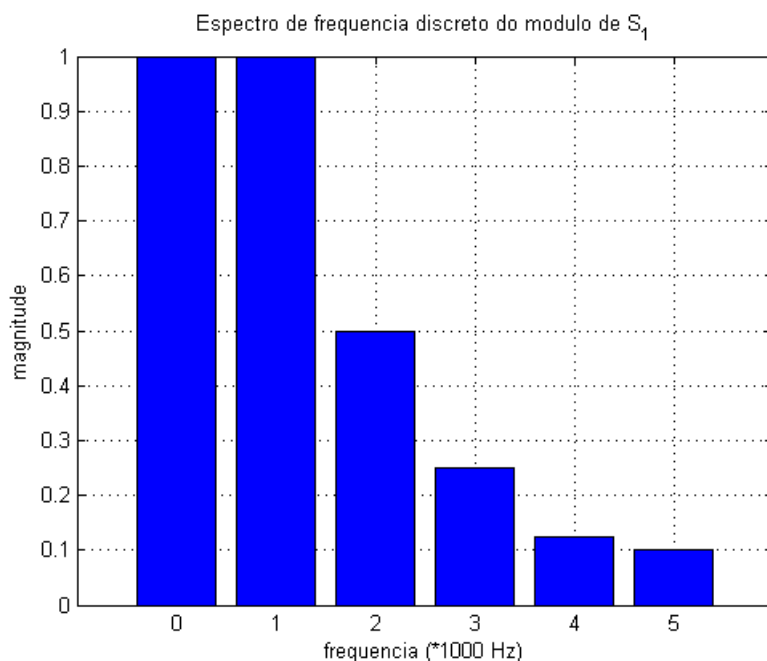


Figura 2.2: Espectro de freqüência discreta de  $S_{1(n)} = 1 + 2 \sum_{f=1}^5 2^{1-f} \cos(2\pi fn/10 + \pi/f)$  com  $n \in (0, 9)$ .

Como se pode observar na figura 2.3, a síntese pela equação 2.22 faz com que as amostras do sinal  $S_{1(n)}$  sejam replicadas, a cada  $N = 10$  intervalos de amostragem, mesmo fora

do intervalo amostrado.

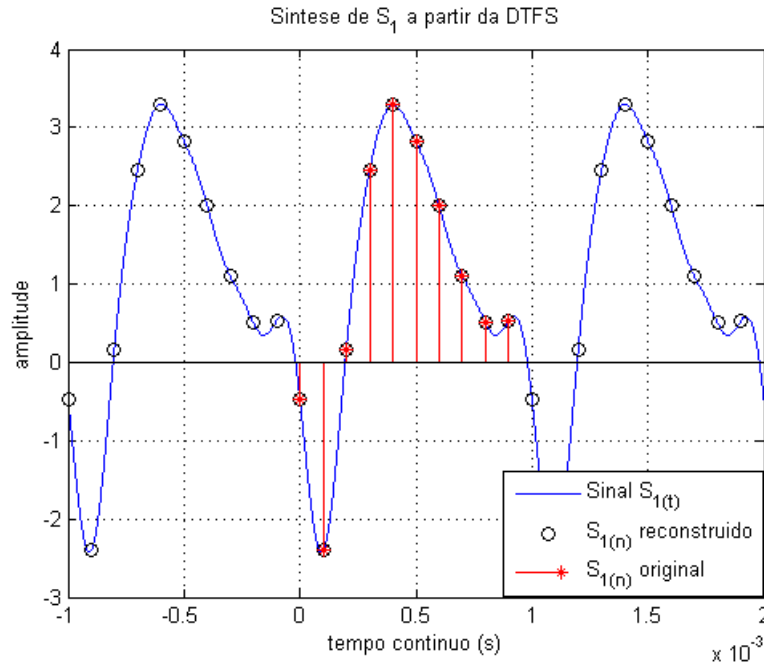


Figura 2.3: Sinal  $S_{1(t)} = 1 + 2 \sum_{k=1}^5 2^{1-k} \cos(2\pi(1000k)t + \pi/k)$ ; as 10 amostras processadas de  $S_{1(n)} = 1 + 2 \sum_{f=1}^5 2^{1-f} \cos(2\pi fn/10 + \pi/f)$  e sua síntese conforme equação 2.22

A *DTFT* de sinais com duração finita pode ser obtida por meio de métodos numéricos. Para isso, uma estratégia consiste, inicialmente, em definir uma resolução para o processo de amostragem do espectro contínuo, que é determinada pela seguinte equação:

$$\delta_f = \frac{F_{sr}}{N} \frac{1}{\delta_k} \quad (2.23)$$

sendo  $\delta_k$ , a razão entre a resolução do espectro discreto (que se obteria com a *DTFS*) e a “resolução da amostragem do espectro contínuo”, um valor inteiro maior que 1 e adimensional. Objetivando uma comparação gráfica entre os espectros da *DTFT* e da *DTFS*, pode-se normalizar os resultados da *DTFT* pela quantidade de amostras do sinal  $x_{(n)}$ . Assim a *DTFT normalizada* será obtida pela equação:

$$\Psi_{(m)} = \frac{\mathcal{F}_{DTFT}\{x_{(n)}\}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_{(n)} e^{-j \frac{2\pi}{N} \frac{m}{\delta_k} n} \quad (2.24)$$

com a variável  $m$ , ordem de amostragem espectral do espectro contínuo, relacionada à frequência  $F$  (em Hz) dada pela equação  $F = m\delta_f$ , no intervalo  $0 \leq m \leq [(\delta_k N)/2]$

A figura 2.4 apresenta o sinal  $S_{2(t)}$  em azul e suas amostras,  $S_{2(n)}$ , em vermelho. Para esta figura:  $N=11$ ,  $F_s=1000$  Hz e  $\delta_k=10$ .

$$S_{2(n)} = \begin{cases} 1 & \text{se } |n| \leq q = 2 \\ 0 & \text{se } |n| > q = 2 \end{cases}$$

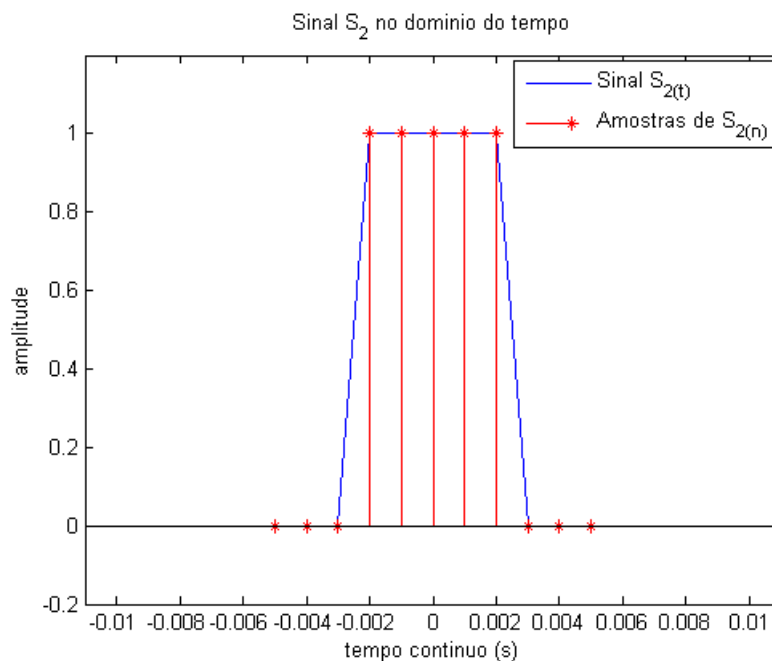


Figura 2.4: Sinal  $S_{2(t)}$  e as  $N=11$  amostras do sinal  $S_{2(n)}$  processadas pela DTFT.

Na figura 2.5 tem-se o espectro de frequência contínua determinado pela equação 2.24 em círculos vermelhos e, em azul, determinado de forma analítica

$$|X_{S_{2(n)}}| = \left| \frac{\sin((q + 1/2)\omega)}{\sin(\omega/2)} \right|$$

Uma síntese do sinal  $x(n)$ , a partir do espectro obtido pela equação 2.24, pode ser realizada pela equação:

$$\begin{aligned} x(n) = & \frac{\Re\{\Psi_{(0)}\}}{\delta_k} + \frac{2}{\delta_k} \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{\delta_k N - 1}{2} \rfloor} \left[ \Re\{\Psi_{(m)}\} \cos\left(\frac{2\pi m}{N\delta_k} n\right) - \Im\{\Psi_{(m)}\} \sin\left(\frac{2\pi m}{N\delta_k} n\right) \right] \dots \\ & \dots + \frac{1}{\delta_k} \Re\left\{ \Psi_{\left(\frac{\delta_k N}{2}\right)} \right\} \cos(\pi n) \end{aligned} \quad (2.25)$$

entretanto, esta aproximação trata-se de um sinal periódico, com período igual a  $N\delta_k$

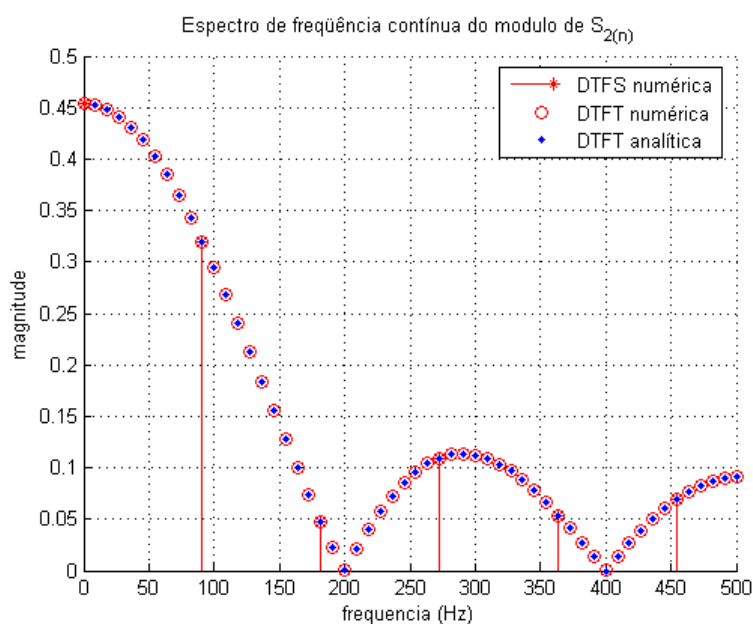


Figura 2.5: Amostras do espectro de frequência do sinal  $S_{2(n)}$ : Discreta, Contínua conforme equação 2.24 e Contínua analítica.

amostras e o último termo da equação 2.25 somente deve ser utilizado quando a frequência de Nyquist ( $F_s/2$ ) for múltipla de  $\delta_f$ .

## 2.7 Conclusão

Na seção 2.3 estabeleceram-se as condições na qual o espectro resultante da *DTFS* de um sinal periódico é capaz de fornecer uma correta interpretação das propriedades desse sinal. Também foi definida a relação entre as propriedades (amplitudes, frequências e ângulos de fase) do sinal no domínio do tempo contínuo e os respectivos valores das componentes do espectro, pela equação 2.11.

Na seção 2.4 demonstrou-se que todas as componentes do espectro resultante da *DTFS* de um ruído gaussiano branco estacionário no sentido estrito são variáveis aleatórias gaussianas independentes e identicamente distribuídas, de média zero e variância determinável em função do número de amostras  $N$  processadas pela *DTFS* e da variância do ruído no domínio do tempo.

Na seção 2.5 conclui-se que as componentes do espectro da *DTFS* de um sinal determinístico, periódico, que atenda às restrições de validade da equação 2.12, e corrompido por um ruído aditivo gaussiano branco estacionário no sentido estrito, são variáveis aleatórias

gaussianas independentes. Essas componentes possuem a mesma variância, determinável em função da variância do ruído no domínio do tempo e pelo número de amostras  $N$  do sinal, enquanto suas médias são determináveis em função da amplitude e do ângulo de fase das frequências contidas na parte determinística do sinal, conforme equações [2.20](#) e [2.21](#).



# Capítulo 3

## *DTFS* de Sinais Corrompidos

Este capítulo dedica-se à análise espectral de sinais periódicos cuja frequência exata é desconhecida e que, por estarem corrompidos por ruído, deverão ser estimados a partir da *DTFS* de várias janelas de amostragem. Essa metodologia recebe aqui a denominação de *Amostragem Múltipla*.

Nessa análise, quatro classes de amostragem múltipla são definidas para se avaliar as deficiências do uso da *DTFS* na estimação da amplitude de sinais periódicos cujos parâmetros não são bem conhecidos. As propriedades estocásticas da *DTFS* de cada classe de amostragem são estabelecidas.

Em função das deficiências da *DTFS*, uma comparação entre suas estimativas espectrais e as da Densidade de Potência Espectral (“*Power Spectral Density - PSD*”) é apresentada para justificar a preferência pela *DTFS* numa posterior aplicação de um Teste de Hipóteses.

### 3.1 Introdução

No capítulo 2, as propriedades estocásticas da *DTFS* de um sinal periódico corrompido por ruído aditivo gaussiano branco foram analisadas sob rígidas condições restritivas. Neste capítulo tais propriedades serão novamente analisadas, porém, sob restrições mais brandas.

A título de facilidade, as restrições impostas na análise do capítulo 2 estão aqui reescritas:

1.  $x_{(n)}$  deve ser periódico e todas as suas frequências, múltiplas da sua fundamental  $F_F$ ;

2. sendo  $F_H$  a maior frequência em  $x_{(n)}$ , a taxa de amostragem deve ser  $F_s = (2F_H + cF_F)$  para qualquer  $c = 1, 2, 3, \dots$  e a quantidade de amostras processada pela DTFS deve ser  $N = (F_s/F_F)$ ;
3.  $k$  deve estar no intervalo  $1 \leq k \leq (N - 1)/2$ ;
4. a frequência de corte  $F_c$  do filtro *anti-aliasing* deve atender a  $F_H < F_c < (F_s/2)$ .

Para a nova análise as restrições de número 3 e 4 são mantidas. Quanto à restrição de número 1, no intuito de facilitar a interpretação dos resultados, o sinal  $x_{(x)}$  deve ser constituído de uma única frequência. Logo,  $F_F = F_H$ . Quanto à restrição de número 2, a relação entre  $F_s$  e a frequência do sinal  $x_{(t)}$  passa a ser:  $F_s > 4F_F$ . Assim, permitindo que  $F_s$  assumira qualquer valor superior a  $4F_F$ , o sinal sintetizado pela DTFS de  $x_{(n)}$  pode não refletir corretamente o sinal original.

A perda da equivalência entre  $x_{(n)}$  e sua síntese a partir da DTFS ocorrerá se  $F_F$  não for um múltiplo inteiro de  $F_s/N$ . Essa situação é apresentada nas figuras 3.1 e 3.2, em que  $x_{(t)}$  não pode ser reconstruído pela simples repetição de  $x_{(n)}$ . A figura 3.1 apresenta (em azul) o sinal  $x_{(t)} = \sin(2\pi Ft)$  no tempo contínuo, sendo  $F = 31.25 \cdot 10^{-3}$  Hz, e as amostras que compõe  $x_{(n)}$  (em asterisco vermelho), sendo  $F_s = 1$  Hz e  $N = 40$  amostras. A figura 3.2 apresenta o sinal  $x_{(t)}$  (em azul) e sua síntese (em traço-bola preto) a partir da DTFS, ambos deslocados sobre o eixo das ordenadas apenas para facilitar a visualização. Nessa figura nota-se claramente que a síntese não equivale ao sinal original.

Os efeitos das novas restrições sobre as propriedades estocásticas das componentes (real e imaginária) no espectro de frequência discreto serão percebidos em função das seguintes condições:

- sincronismo dos ângulos de fase das frequências do sinal, definidos sobre a primeira das  $N$  amostras, entre todas as janelas de amostragem processadas pela DTFS;
- razão entre as quantidades de: amostras contidas num período do sinal e amostras processadas numa única batelada da DTFS;

Tais condições criam quatro classes de amostragem múltipla de sinais que são abordadas nas seções que se seguem e requerem a definição de dois termos: “JFFS” e “FHRE”.



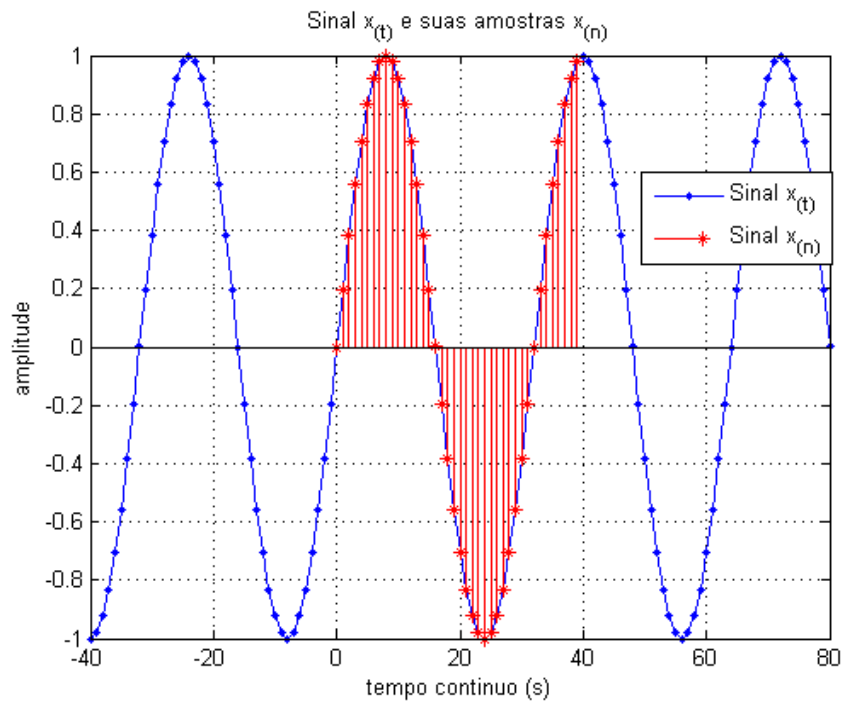


Figura 3.1: Sinal  $x(t) = \sin(2\pi Ft)$ , com  $F = 31.25 \cdot 10^{-3}$  Hz, e as  $N = 40$  amostras de  $x(n)$  observado sob frequência de amostragem  $F_s = 1$  Hz.

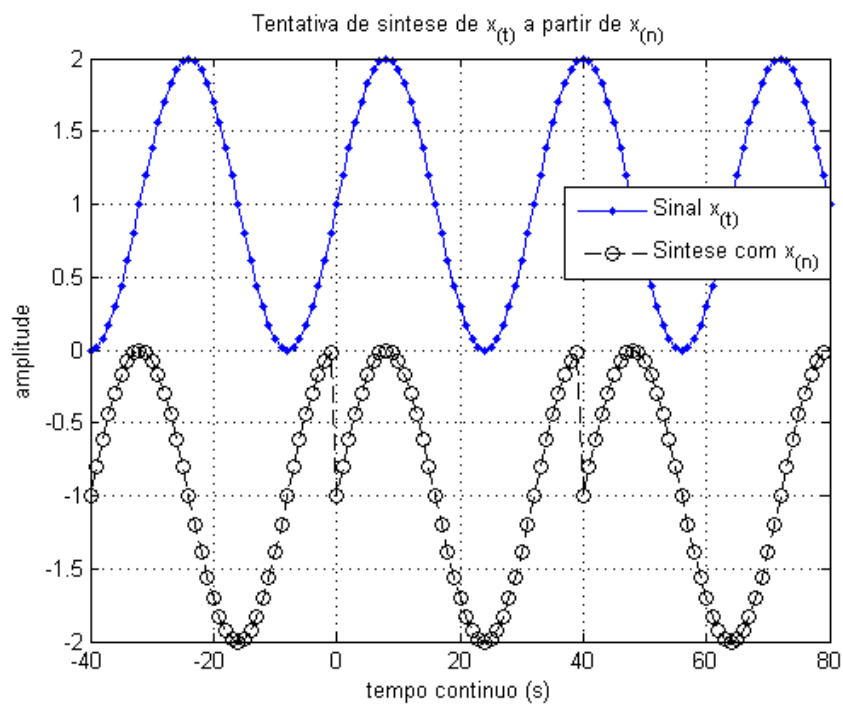


Figura 3.2: Tentativa de síntese, pela *DTFS*, de  $x(t) = \sin(2\pi Ft)$ , com  $F = 31.25 \cdot 10^{-3}$  Hz, observado sob frequência de amostragem  $F_s = 1$  Hz, a partir das  $N = 40$  amostras de  $x(n)$ .

Amostragem com característica “*Janelas de Fourier com Fases Sincronizadas - JFFS*” é aquela na qual os ângulos de fase definidos em todas as janelas processadas pela DTFS são sempre os mesmos.<sup>1</sup>

Amostragem com característica “*Frequências Harmonicamente relacionadas à Resolução Espectral - FHRE*” é aquela em as frequências do sinal são múltiplas inteiras da resolução do espectro discreto<sup>2</sup>,  $F_s/N$ .

Como mencionado, os sinais analisados neste capítulo têm apenas uma frequência determinística, sendo descritos pela equação 3.1:

$$y_{(n)} = A \cos\left(2\pi \frac{f}{N}n + \phi\right) + r g b_{(n)} \quad (3.1)$$

Contudo, por se tratar de amostragem múltipla, faz-se necessário reescrever a equação 3.1 em função do número da janela de amostragem  $j$  e da variável de tempo discreto  $\tau$ . Essa necessidade decorre de uma característica dos algoritmos de FFT, nos quais o valor zero da variável de tempo discreto é sempre referenciado à primeira amostra dentro de cada janela.<sup>3</sup> Nesses casos, sendo o número  $N$  de amostras em uma janela igual ao de todas as demais e  $f$  a ordem espectral da parte determinística do sinal, deve-se limitar  $\tau$  ao intervalo  $0 \leq \tau < N$ , obtendo-se a equação 3.2:

$$y_{(j,\tau)} = A \cos\left(2\pi \frac{f}{N}\tau + \phi_{(j)}\right) + r g b_{(j,\tau)} \quad (3.2)$$

Deve-se ressaltar que entre a última amostra de uma janela e a primeira da janela consecutiva pode haver uma descontinuidade na amostragem, seja por um intervalo qualquer de amostras ou por uma defasagem temporal entre os instantes de amostragem da janela atual e o da janela anterior. Contudo, durante a amostragem de uma janela não pode haver descontinuidade, defasagem nem alteração no sinal definido pela equação 3.2. Na ausência de descontinuidade, sendo  $j = 0$  na primeira janela, tem-se a seguinte relação:  $n = jN + \tau$ .

<sup>1</sup>O ângulos de fase de cada frequência do sinal é definido, a cada janela de amostragem, considerando a variável de tempo discreto  $n = 1$  na ocorrência da sua primeira amostra dentro de cada janela.

<sup>2</sup>Resolução do espectro de frequência discreto é a diferença, em frequência, entre duas ordens harmônicas consecutivas.

<sup>3</sup>A diferença entre as variáveis de tempo discreto “ $n$ ” e “ $\tau$ ” é que a primeira tem uma única referência absoluta para o tempo, enquanto a segunda, uma referência para cada janela de amostragem. Por exemplo: uma janela com  $N = 10$  amostras,  $\tau$  estará sempre limitado entre 0 e 9; assim, se  $n = 0$ ,  $\tau = 0$ ; se  $n = 9$ ,  $\tau = 9$ ; se  $n = 10$ ,  $\tau = 0$ ; se  $n = 19$ ,  $\tau = 9$ ; se  $n = 109$ ,  $\tau = 9$ ; ...

## 3.2 Amostragem Múltipla Classe 1

Essa classe de amostragem múltipla é definida por ter simultaneamente ambas características *JFFS* e *FHRE*. Nem todos os sinais são capazes de proporcionar uma amostragem pertencente a essa classe e para que isso seja possível, tal sinal deve atender às restrições definidas no capítulo 2, ao fim da seção 2.3. As propriedades estocásticas do espectro discreto dos sinais periódicos capazes de propiciar uma amostragem dessa classe encontram-se definidas nas equações 2.20 e 2.21.

Um exemplo de um sinal capaz de proporcionar um Amostragem Múltipla Classe 1 é:

$$y_{(j,\tau)} = A \cos\left(2\pi\frac{f}{N}\tau + \phi\right) + rgb_{(j,\tau)} \quad (3.3)$$

desde que  $f$  seja um número inteiro, sendo  $N$  a quantidade de amostras processada numa única batelada da *DTFS* e  $\phi$  uma constante.

Com  $f = 7$  e  $N = 32$ , teremos uma janela de dados processada pela *DTFS* com 32 amostras e 7 ciclos completos do sinal. Este sinal é *FHRE* porque o número de ciclos completos do sinal contido numa janela de amostragem é um número inteiro. Este sinal é *JSSF* porque o ângulo de fase  $\phi$  é constante para todas as janelas de amostragem.

A figura 3.3 apresenta a imagem de uma janela de amostragem do sinal

$$y_{(n)} = 2 \cos\left(2\pi\frac{7}{32}n - \frac{\pi}{4}\right) + rgb_{(n)} \quad \text{sendo} \quad rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(1, 1)$$

A curva contínua corresponde à amostragem do sinal corrompido, enquanto a segmentada trata-se da sua componente determinística.

As figuras 3.4(a) e 3.4(b) apresentam a *pdf* da componente Real e Imaginária, respectivamente, da ordem espectral 7 da *DTFS* do sinal  $y_{(n)}$ . Tais gráficos foram obtidos com  $4 \cdot 10^5$  realizações (janelas de amostragem processadas pela *DTFS*). A curva contínua trata-se da *pdf* obtida por meio do método Monte Carlo de simulação, enquanto a curva segmentada por círculos foi gerada a partir das equações 2.20 e 2.21.

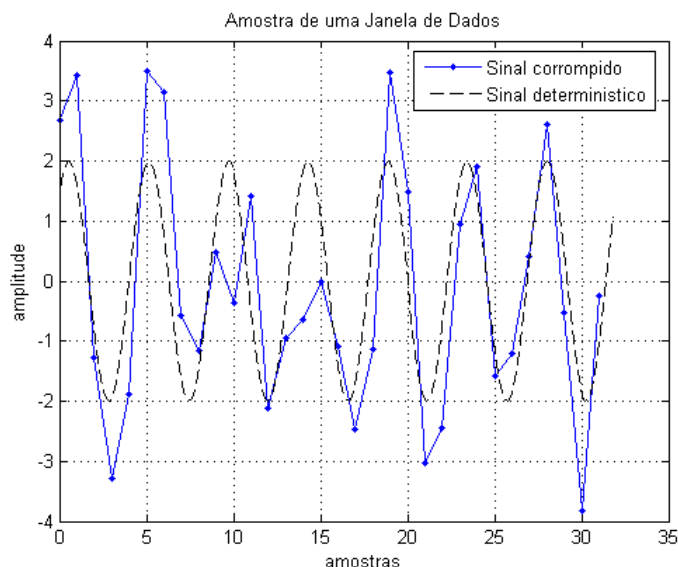
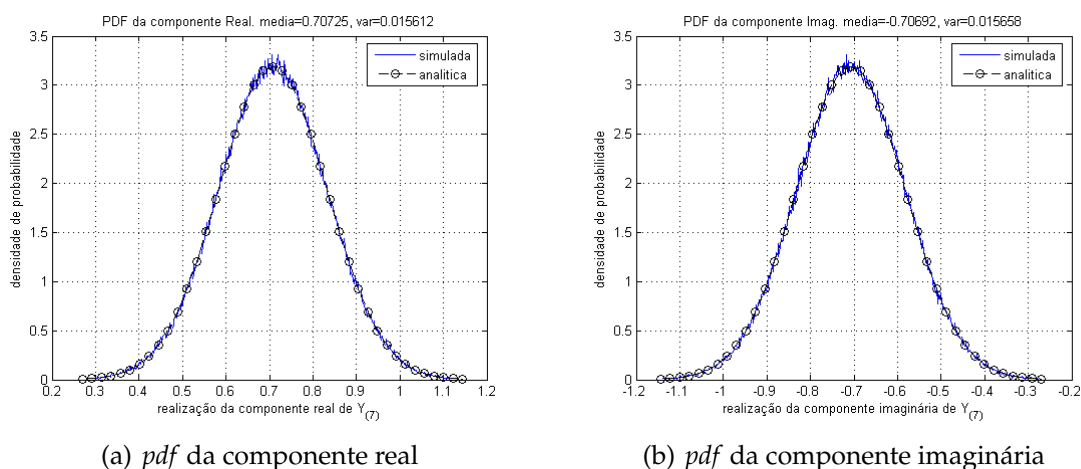


Figura 3.3: Uma janela da Amostragem Múltipla Classe 1 com  $N = 32$  amostras do sinal corrompido  $y(n) = 2 \cos\left(2\pi\frac{7}{32}n - \frac{\pi}{4}\right) + rgn(n)$ , com  $rgn(n) \sim \mathcal{N}(1,1)$ , e da sua parte determinística.



(a) pdf da componente real

(b) pdf da componente imaginária

Figura 3.4: Propriedades estocásticas da Amostragem Múltipla Classe 1, na ordem espectral  $f = 7$  do sinal  $y(n) = 2 \cos\left(2\pi\frac{7}{32}n - \frac{\pi}{4}\right) + rgn(n)$ , com  $rgn(n) \sim \mathcal{N}(1,1)$ , obtida pelo Método Monte Carlo com  $4 \cdot 10^5$  realizações.

### 3.3 Amostragem Múltipla Classe 2

Se a frequência de amostragem  $F_s$  for múltipla da frequência  $F$  da componente determinística de  $y(n)$  e a quantidade de amostras  $N$  em cada janela for definida de forma que a ordem espectral  $f = F/(F_s/N)$  do sinal seja um número inteiro, então a amostragem desse

signal apresentará característica *FHRE*.

Entretanto, sob a ocorrência de descontinuidade da amostragem entre as janelas, o parâmetro  $\phi$ , do sinal descrito pela equação 3.3 pode deixar de ser uma constante. Se esse for o caso, o ângulo de fase passa a assumir um valor diferente do anterior a cada janela amostrada e tal amostragem perde a característica *JFFS*.

A Amostragem Múltipla Classe 2 é definida por apresentar exclusivamente a característica *FHRE*.

A figura 3.5 apresenta a *pdf* do módulo da ordem espectral 7 da *DTFS* do sinal

$$y_{(j,\tau)} = 2 \cos\left(2\pi\frac{7}{32}\tau + \phi_{(j)}\right) + rgb_{(j,\tau)} \quad \text{sendo } rgb_{(j,\tau)} \sim \mathcal{N}(1,10) \quad \text{e} \quad \phi_{(j)} \sim \mathcal{U}(0,2\pi)$$

obtido com  $2 \cdot 10^5$  realizações. Sendo as componentes do espectro variáveis aleatórias gaussianas, independentes e de mesma variância, a *pdf* do módulo segue uma distribuição Rician.<sup>4</sup>

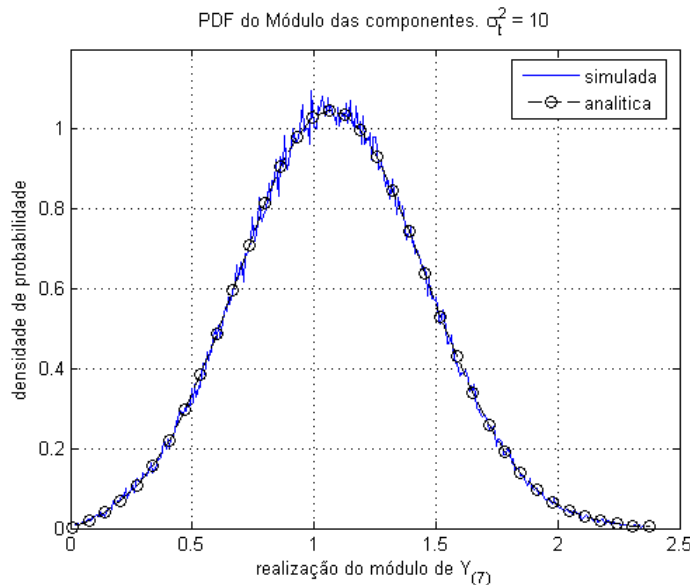


Figura 3.5: Propriedades estocásticas da Amostragem Múltipla Classe 2, na ordem espectral  $f = 7$  do sinal  $y_{(n)} = 2 \cos\left(2\pi\frac{7}{32}n + \phi_{(j)}\right) + rgb_{(n)}$ , com  $rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(1,1)$  e  $\phi_{(j)} \sim \mathcal{U}(0,2\pi)$ , obtida pelo Método Monte Carlo com  $2 \cdot 10^5$  realizações.

Assim como sinais com amostragem Classe 1, sinais com amostragem Classe 2 também

<sup>4</sup>Uma descrição desta distribuição de probabilidade está disponível no apêndice C.

têm suas propriedades estocásticas definidas pelas equações 2.20 e 2.21. Porém, ao se observar diferentes janelas, a alteração do ângulo de fase  $\phi_{(j)}$  promove a alteração nos valores das propriedades estocásticas (especificamente na média das componentes).

### 3.4 Amostragem Múltipla Classe 3

Sem conhecer previamente a frequência do sinal amostrado não é possível escolher um número de amostras  $N$  nem ajustar a frequência de amostragem  $F_s$  para que as janelas de amostragem contenham uma quantidade inteira de ciclos completos deste sinal. Se esse for o caso, a amostragem desse sinal poderá não possuir a característica *FHRE*. Se algum evento, que inicie a ocorrência deste sinal, define também o início das janelas de amostragem, então tal amostragem terá características *JFFS*.

A Amostragem Múltipla Classe 3 é definida por apresentar exclusivamente a característica *JFFS*.

No exemplo do sinal

$$w_{(j,\tau)} = 2 \cos\left(2\pi \frac{7.25}{32} \tau + \phi\right) + rgb_{(j,\tau)} \quad \text{sendo} \quad rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(1, 1)$$

ao observar tal equação, sabendo que o número de amostras  $N$  é igual a 32, pode-se afirmar que a amostragem não apresenta a característica *FHRE* porque não possui uma ordem espectral  $f$  cujo valor seja um inteiro. E pode-se afirmar também que apresenta a característica *JFFS* pelo fato do ângulo de fase ser constante em todas as janelas.

Sinais dessa classe possuem a característica de distribuir sua energia pelas ordens espectrais próximas a  $f$ , fenômeno conhecido como "*leakage effect*".

A figura 3.6 apresenta uma comparação entre possíveis perfis de distribuição de energia de amostragens com características *FHRE* (sinal  $w_2$ ) e *JFFS* (sinal  $w_3$ ). A curva contínua apresenta a *DTFT normalizada* da parcela determinística do sinal  $y_{(n)}$ , enquanto o asterisco refere-se à sua *DTFS*.

$$w_{2(j,\tau)} = 2 \cos\left(2\pi \frac{7}{32} \tau + \phi_{j=1}\right) + rgb_{(n)} \quad \text{sendo} \quad \phi_{j=1} = -\frac{\pi}{4}$$

$$w_{3(j,\tau)} = 2 \cos\left(2\pi \frac{7.25}{32} \tau + \phi_{j=1}\right) + rgb_{(n)}$$

Uma revisão nas bases teóricas apresentadas no capítulo 2 indica que a *pdf* das componentes do espectro da *DTFS* dessa classe de amostragem mantém a mesma variância das equações 2.15 e 2.16. Indica também que a média  $\mu$  do ruído  $rgb_{(n)}$  não altera a média das componentes e que a média das componentes deve ser calculada pela equação 2.10, ou seja, pela *DTFS* da parte determinística do sinal.<sup>5</sup>

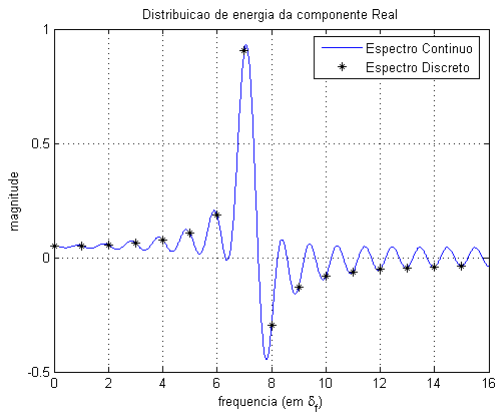
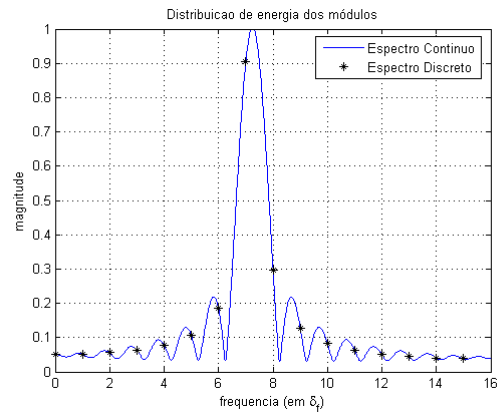
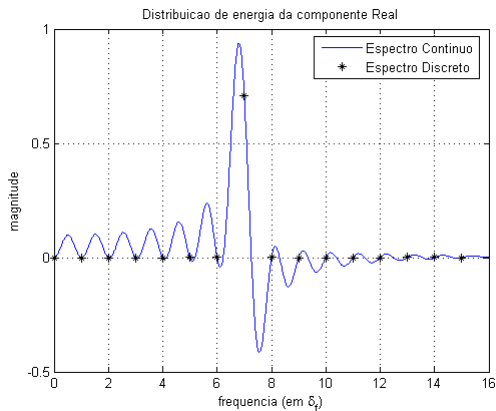
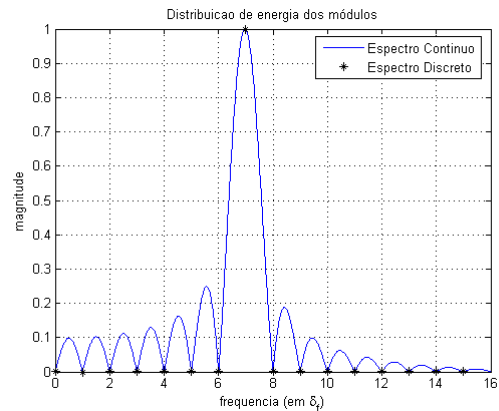
(a) Espectro da Componente Real de  $w_{3(j=1,\tau)}$ (b) Espectro do Módulo de  $w_{3(j=1,\tau)}$ (c) Espectro da Componente Real de  $w_{2(j=1,\tau)}$ (d) Espectro do Módulo de  $w_{2(j=1,\tau)}$ 

Figura 3.6: Espectro de frequência da parte determinística de uma janela da Amostragem Múltipla Classe 3,  $w_{3(j=1,\tau)} = 2 \cos\left(2\pi \frac{7.25}{32} \tau + \phi_{j=1}\right)$ , e da Classe 2,  $w_{2(j=1,\tau)} = 2 \cos\left(2\pi \frac{7}{32} \tau + \phi_{j=1}\right)$ , com  $\phi_{j=1} = -\frac{\pi}{4}$ .

<sup>5</sup>O fato da janela de amostragem não conter uma quantidade inteira de ciclos completos rompe as restrições que simplificam a equação 2.10 na equação 2.11, que define a média das componentes do espectro da *DTFS* de amostragens *FHRE*.

### 3.5 Amostragem Múltipla Classe 4

Esta é a principal classe dos sinais trabalhados nesta dissertação. São sinais que não possuem a característica *JFFS* nem a *FHRE*. Portanto, sofrem do espalhamento de energia pelas ordens espectrais próximas à frequência do sinal e, a cada janela de amostragem, a média das componentes do espectro assume um novo valor em função do novo ângulo de fase  $\phi_{(j)}$ . Além disso, um novo efeito surge, a *pdf* do módulo torna-se levemente dependente de  $\phi_{(j)}$  e assume uma nova forma a cada janela de amostragem.

A figura 3.7, baseada na parte determinística do sinal

$$x_{(j,\tau)} = 2 \cos\left(2\pi \frac{6.5}{32} \tau + \phi_{(j)}\right) + r g b_{(n)}$$

apresenta o gráfico do módulo da *DTFS* da ordem espectral  $f = 6$  (ordem espectral mais próxima à frequência do sinal) em função do ângulo de fase  $\phi_{(j)}$ . Nele, observa-se uma variação de 10% entre os valores máximo e mínimo da magnitude. E sendo o módulo da parte determinística do sinal o parâmetro de não centralidade da distribuição Rician do sinal corrompido, logo fica evidenciada a dependência da *pdf* do módulo em função de  $\phi$ .

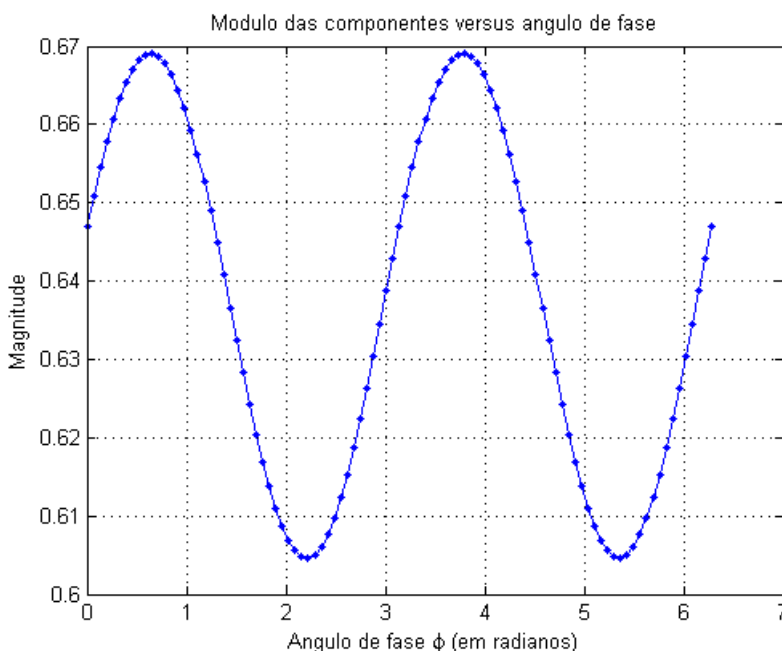


Figura 3.7: Relação entre o módulo da *DTFS* na ordem espectral  $f = 6$  do sinal determinístico  $2 \cos\left(2\pi \frac{6.5}{32} \tau + \phi_{(j)}\right)$  e o ângulo de fase  $\phi_{(j)}$ , sob Amostragem Múltipla Classe 4.



Assim como a amostragem Classe 3, pode-se observar que: a *pdf* das componentes do espectro da *DTFS* da amostragem Classe 4 mantém a mesma variância das equações 2.15 e 2.16, a média do ruído não altera a média das componentes e que a média das componentes deve ser calculada pela equação 2.10. E, assim como a amostragem Classe 2, os valores das médias das componentes podem variar de uma janela para outra.

### 3.6 Um adendo sobre a *Power Spectral Density* - PSD

Diante das dificuldades apresentadas pela *DTFS* na estimação dos sinais que serão abordados nesta dissertação (sinais cuja frequência não é exatamente conhecida) surge uma dúvida: “por que usar a *DTFS* em vez da PSD - Power Spectral Density” ?

Conforme Papoulis (1991) a *Função de Autocorrelação* - FAC de uma função  $\mathbf{x}(t)$  é:

$$R_{xx(t_1, t_2)} = E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (3.4)$$

que pode ser representada para sinais do tipo “*Wide Sense Stationary* - WSS”<sup>6</sup> por:

$$R_{xx(\tau)} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)p(x(t), x(t+\tau); t, \tau) dx(t) dx(t+\tau) \quad (3.5)$$

Para sinais WSS a densidade espectral de potência, conforme Peyton Z. Peebles (1980) e Papoulis (1991), é:

$$S_{xx(\omega)} = \mathcal{F}\{R_{xx(\tau)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx(\tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.6)$$

A potência contida no intervalo de frequência  $[\omega_a, \omega_b]$  do sinal  $x(t)$  pode ser obtido pela equação:

$$P_{xx[\omega_a, \omega_b]} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_a}^{\omega_b} S_{xx(\omega)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{-\omega_a} S_{xx(\omega)} d\omega \quad (3.7)$$

Para sinais reais, no tempo discreto, com uma quantidade de amostras finitas, faz-se necessário o uso de outras equações. Para esses sinais, a Função de Autocorrelação de um sinal periódico requer uma quantidade total de amostras  $M$  superior ao número de amostras  $N$  que se deseja processar numa única batelada da *DTFS*. O valor de  $M$  deve ser, no mínimo, superior ao dobro de  $N$ . A equação utilizada nesse caso é, conforme apresentada em Stanley Lawrence Marple & Kay (1981), o estimador da Função de Autocorrelação

<sup>6</sup>Um sinal  $x(t)$  estacionário no sentido amplo, WSS, é um processo estocástico cuja média é constante ao longo do tempo,  $E\{x(t)\} = k \quad \forall t$ ; e sua FAC depende apenas da diferença entre  $t_1$  e  $t_2$ .

para sinais ergódicos:

$$\hat{R}_{xx(r)} = \frac{1}{M-r} \sum_{n=0}^{M-1-r} x_{(n+r)} x_{(n)}^* \quad (3.8)$$

com as seguintes limitações:  $M \geq 2N$  e  $1 \leq r \leq N$ .

Pelas razões tratadas na seção 2.1 a CTFT é substituída pela DTFS, para sinais reais no tempo discreto e a densidade espectral é obtida pela equação:

$$S_{xx(F)} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} R_{xx(r)} e^{-j2\pi \frac{F}{F_s} r} \quad (3.9)$$

lembrando que  $F$  assumirá apenas os valores discretos determinados por  $F = n * F_s / N$  com  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

Devido ao caráter discreto do espectro da DTFS e à presença do fator de normalização  $1/N$ , a utilização da DTFS em vez da CTFT no cálculo de  $S_{xx(f)}$  faz, com que a interpretação de “densidade de potência espectral” perca o sentido, tornando-se mais apropriado o termo “potência espectral”. Assim a potência contida no intervalo  $[F_a, F_b]$  das frequências discretas pertencentes ao espectro do sinal  $x_{(t)}$  pode ser obtido pela equação:

$$P_{xx[F_a, F_b]} = 2 \sum_{F=F_a}^{F_b} S_{xx(F)} \quad (3.10)$$

A figura 3.8 apresenta a potência espectral  $P_{xx(F)}$  do sinal  $x_{(t)} = 3 \cos(2\pi 60t + \phi)$  amostrado a uma frequência  $F_s = 2.0\text{kHz}$ . Sua FAC foi processada com  $M=4000$  amostras, sendo a quantidade de amostras  $N$  processadas pela DTFS igual a 1000.<sup>7</sup> Em preto (traço bola) está o módulo do espectro, em azul (traço ponto) a componente real e em vermelho (traço triângulo) a imaginária. Como se percebe, a frequência de  $x_{(t)}$  é múltipla da resolução espectral  $F_{sr}/N = 2\text{Hz}$ , portanto, a relação entre tais parâmetros de análise pela DTFS para com essa frequência conduzem apenas a uma Amostragem Múltipla Classe 1 ou 2. Mesmo assim, ainda há algum espalhamento de energia (*Spectral Leakage Effect*).

A figura 3.9 apresenta a potência espectral  $P_{xx(F)}$  do sinal  $y_{(t)} = 3 \cos(2\pi 61t + \phi)$  amostrado a uma frequência  $F_s = 2,0\text{kHz}$ . Sua FAC foi processada com  $M=4000$  amostras, sendo a quantidade de amostras processadas pela DTFS  $N=1000$ . Em preto (traço bola) está o módulo do espectro, em azul (traço ponto) a componente real e em vermelho (traço

<sup>7</sup>O parâmetro  $\phi$  da função  $x_{(t)}$  não apresenta influência perceptível na FAC para os valores de  $M$  e  $N$  utilizados na simulação que gerou a figura 3.8.

triângulo) a imaginária. Como se observa, a frequência de  $y(t)$  não é múltipla da resolução espectral  $F_{sr}/N = 2\text{Hz}$ , portanto, a relação entre tais parâmetros de análise pela *DTFS* para com essa frequência conduzem apenas a uma Amostragem Múltipla Classe 3 ou 4. A comparação dessa figura com a figura 3.8 indica claramente que neste caso houve um grande espalhamento de energia.

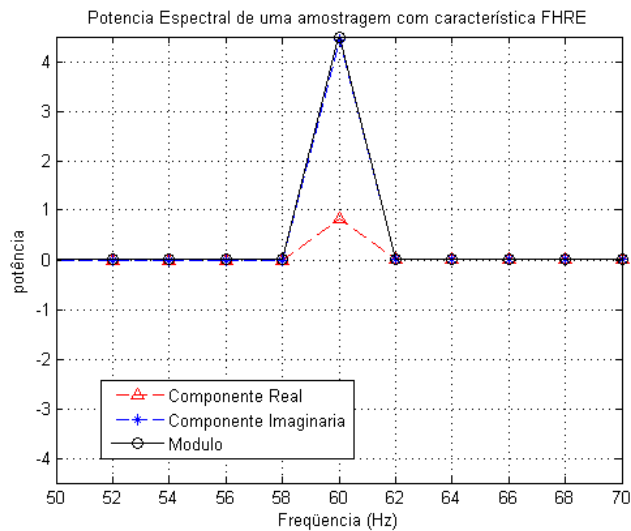


Figura 3.8: Potência Espectral do sinal  $x(t) = 3 \cos(2\pi 60t + \phi)$  sob Amostragem Múltipla Classe 1 ou 2, frequência de amostragem  $F_s=2.0\text{kHz}$ , *FAC* estimada com  $M = 4000$  amostras e sua *DTFS* estimada com  $N = 1000$  amostras.

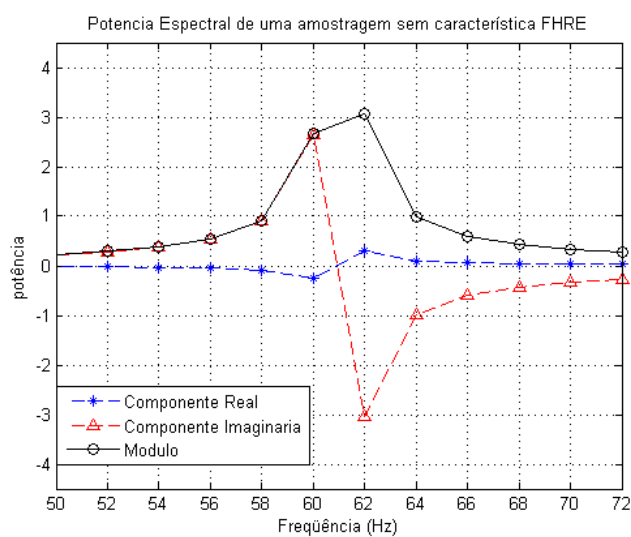


Figura 3.9: Potência Espectral do sinal  $x(t) = 3 \cos(2\pi 61t + \phi)$  sob Amostragem Múltipla Classe 3 ou 4, frequência de amostragem  $F_s=2.0\text{kHz}$ , *FAC* estimada com  $M = 4000$  amostras e sua *DTFS* estimada com  $N = 1000$  amostras.

As relações entre a frequência de amostragem  $F_s$  e a frequência do sinal  $F$ , a quantidade de amostras  $M$  usadas na Função de Autocorrelação e a quantidade de amostras  $N$  processadas pela *DTFS* irão determinar o nível de espalhamento da energia do sinal, que pode ser muito significativo (atingindo valores próximos a 30% de perda na frequência  $F$ ). Em suma, todo o acréscimo ao custo computacional, quando comparado à *DTFS*, não será produtivo sem uma precisa análise e ajuste desses quatro parâmetros, o que não pode ser feito quando se desconhece o valor exato de  $F$ .

Outros aspectos a serem analisados são as propriedades estocásticas da *PSD*. Com um ruído aditivo gaussiano branco a variável aleatória - VA obtida pela Função de Autocorrelação será o resultado da: soma de produtos entre gaussianas de média não nula. Já a sua *DTFS* resultará em soma ponderada das variáveis aleatórias provenientes da Função de Autocorrelação. Se, na equação 3.8, o número de variáveis aleatórias  $M - r$  somadas no cálculo da *FAC* com intervalo de atraso  $r$  for maior que 60 é possível aproximar, para efeito prático, sua distribuição de probabilidade à distribuição gaussiana, conforme o Teorema do Limite Central. Entretanto, a variância dessa distribuição é função tanto das propriedades estocásticas (média e variância) quanto das determinísticas (amplitude) do sinal e dos parâmetros ( $M$  e  $r$ ) da *FAC*. Além disso, na equação 3.8, a variância da *FAC* aumenta na medida que  $r$  aumenta em módulo e, portanto, se  $M$  não for muito maior que  $N$ , a aplicação da *DTFS* na etapa final do cálculo da *DSP* ocorrerá sobre um sinal cuja variância não poderá ser considerada constante. Claramente, mesmo quando a relação sinal/ruído é suficiente para garantir que a *pdf* da *PSD* possa ser aproximada a uma distribuição gaussiana, nenhuma propriedade estocástica do sinal no domínio do tempo pode ser inferida, a partir da variância dessa distribuição, por meio de uma relação simples e direta, como ocorre na análise espectral pela simples utilização da *DTFS*.

Na figura 3.10 é apresentada a *pdf* da potência espectral  $P_{xx(60)}$  da função corrompida  $w_{(t)} = 3 \cos(2\pi 60t + \phi) + r g b_{(t)}$ , sendo  $r g b_{(t)} \sim \mathcal{N}(1, 90)$ . Para tanto, foram geradas  $5 \cdot 10^4$  amostras e observada a Potência espectral na frequência  $F = 60\text{Hz}$ . A sua *FAC* foi obtida a partir de  $M = 4000$  amostras e sua *DTFS*, a partir de  $N = 1000$  amostras. Na cor azul (traço contínuo) está a *pdf* obtida pelo método Monte Carlo; em preto (ponto traço), a gaussiana obtida com a média e variância amostral da *pdf* em azul.

Observa-se que a variável aleatória da componente real  $\Re\{P_{xx(60)}\}$ , figura 3.10(a), apresenta um perfil praticamente gaussiano. O mesmo ocorre com a variável aleatória do módulo da *PSD*  $|P_{xx(60)}|$ , figura 3.10(b).

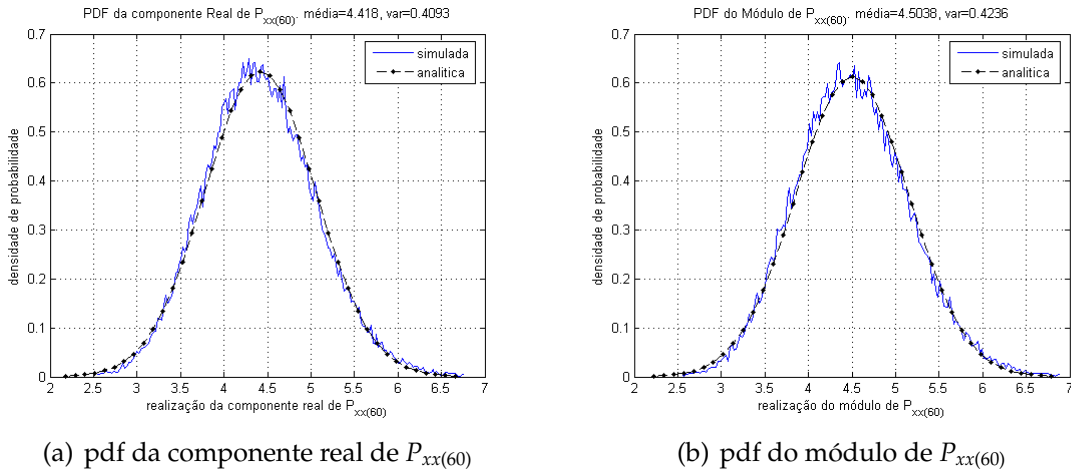


Figura 3.10: *PDF* da Potência Espectral  $P_{xx}(60)$  da função  $w(t) = 3 \cos(2\pi 60t + \phi) + rgb(t)$  sob Amostragem Múltipla Classe 1 ou 2, com  $5 \cdot 10^4$  realizações sendo  $rgb(t) \sim \mathcal{N}(1, 90)$ , frequência de amostragem  $F_s=2.0\text{kHz}$ , *FAC* estimada com  $M = 4000$  amostras e sua *DTFS* estimada com  $N = 1000$  amostras.

Na figura 3.11 é apresentada a *pdf* da potência espectral  $P_{xx}(60)$  da função  $z(n) = rgb(n)$ , sendo  $rgb(n) \sim \mathcal{N}(1, 90)$ . Foram geradas  $5 \cdot 10^4$  amostras e observada a Potência espectral na frequência  $F = 60\text{Hz}$ . Na figura 3.11(a) está a VA da componente real, enquanto na figura 3.11(b) está o módulo de  $P_{xx}(60)$ . Na cor azul (traço contínuo) está a *pdf* obtida pelo método Monte Carlo; em preto (ponto traço), a gaussiana obtida com a média e variância amostral da *pdf* em azul. É muito evidente que a VA obtida por este processo de análise espectral não se trata nem pode ser aproximada a uma gaussiana, estando intimamente relacionada à distribuição de probabilidade *Chi-squared*.

Por último, o sinal  $z(n) = A \cos(2\pi F/F_s n + \phi) + rgb(n)$  não se trata de um processo *WSS*, pois sua esperança matemática é dependente de  $n$ , não sendo constante.

### 3.7 Conclusão

O desconhecimento da frequência exata dos sinais processados pela *DTFS* provoca o rompimento das restrições estabelecidas na seção 2.3 que tornam o espectro discreto na representação exata do fenômeno físico. Essa ruptura cria quatro classes de amostragem múltipla de sinais, definidas pela presença ou ausência de duas características: *JFFS* e *FHRE*.

A ausência da *FHRE* pode provocar o espalhamento da energia de uma frequência pelas ordens espectrais próximas a ela. A ausência da *JFFS* pode fazer com que as com-

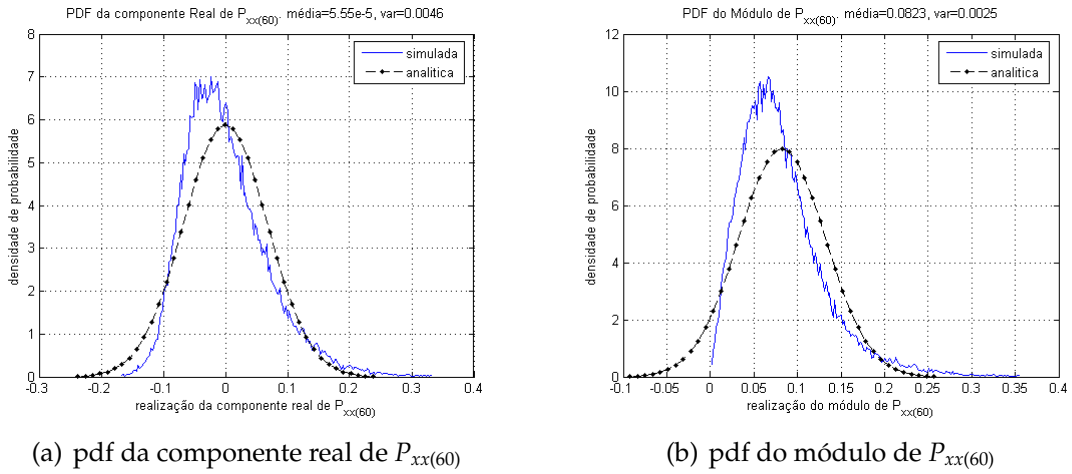


Figura 3.11: *PDF* da Potência Espectral  $P_{xx(60)}$  de um ruído gaussiano branco ergódico  $rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(1, 90)$ , frequência de amostragem  $F_s=2.0\text{kHz}$ , *FAC* estimada com  $M = 4000$  amostras e sua *DTFS* estimada com  $N = 1000$  amostras.

ponentes real e imaginária, de uma mesma ordem espectral, tenham uma distribuição de energia diferente a cada janela de amostragem. A ausência de ambas, pode promover ambas deficiências, além de criar uma dependência entre o módulo das componentes de uma ordem espectral e o ângulo de fase da frequência correspondente a essa ordem.

As propriedades estocásticas das quatro classes de amostragem foram analisadas e constatou-se que em todas as classes, as componentes do espectro da *DTFS* das janelas de amostragem são variáveis aleatórias gaussianas independentes e ainda determináveis. Sua variância permanece sendo definida pelo ruído no domínio do tempo e pelo número de amostras  $N$  de uma janela. Sua média permanece sendo uma função da amplitude e do ângulo de fase, mas também passam a depender da quantidade de amostras  $N$  de cada janela e da relação entre a frequência de amostragem  $F_s$  e a frequência do sinal  $F$ . Além disso, sob o efeito de espalhamento de energia, uma frequência pode influenciar a média das componentes das ordens espectrais próximas a si e, sob uma inadequada relação entre  $F_s$ ,  $F$  e  $N$ , a média dessas componentes pode se alterar de uma janela para a outra.

O desconhecimento da frequência exata do sinal sob análise, característica determinante nos sinais trabalhados por esta dissertação, impõe propriedades estocásticas que dificultam a estimação correta da amplitude, ou potência, desse sinal tanto pela *DTFS* quanto pela *PSD*. Com esse fenômeno, o fator decisivo para a seleção do método mais adequado para uma análise espectral sob a qual ocorrerá um Teste de Hipóteses seria o custo computacional. Entretanto, sendo o custo da *PSD* pouco significativo em relação à *DTFS*, o custo do Teste de Hipóteses é que define a escolha do método de análise espectral

decidindo pela variável aleatória mais simples. Sob essas condições, a análise espectral dos sinais pelo simples processamento direto da *DTFS* torna-se a decisão mais plausível, tendo em vista a complexidade da distribuição de probabilidade da *PSD*.





# Capítulo 4

## Estimação da Amplitude de Uma Amostragem Classe 4

Neste capítulo é proposta uma contribuição à teoria de processamento estocástico de sinais discretos: um estimador de máxima verossimilhança para amplitude, ângulo de fase e frequência de sinais corrompidos por ruído aditivo gaussiano branco sob qualquer classe de amostragem. Esse estimador utiliza-se do efeito de espalhamento de energia da *DTFS* para mapear suas estimativas não mais no espectro discreto, mas no espectro contínuo. O seu desenvolvimento foi necessário para que o Teste de Hipóteses, abordado nesta dissertação, possa trabalhar com os parâmetros mais precisos na definição de suas Hipóteses.

Na seção 4.1 é exemplificado o efeito do espalhamento de energia sobre as estimações de amplitude pela *DTFS*. Na seção 4.2 é desenvolvido o Estimador, capaz de funcionar com sinais sob qualquer classe de amostragem. E, na seção 4.4, as propriedades estocásticas do Estimador para sinais corrompidos por ruído aditivo gaussiano branco são analisadas.

### 4.1 Introdução

O alvo da análise desta dissertação são sinais cuja frequência é definida pelo escorregamento do motor de indução, conforme equação 5.1. Em um motor de indução, o escorregamento é uma função da tensão e frequência de alimentação, da curva de conjugado versus velocidade de rotação da carga e dos próprios parâmetros construtivos do motor. Pressupondo que tais dados e mesmo a própria rotação do motor não estariam disponíveis, o máximo de informação que se poderia ter sobre a frequência desses sinais seria uma faixa de valores, válida apenas quando o motor estivesse em regime permanente de operação. E mesmo sob essa condição, a frequência dos sinais que estarão sob

análise nunca será conhecida com exatidão e esses sinais estarão quase sempre sujeitos ao efeito de espalhamento de energia.

Tais sinais podem não apresentar corretas estimativas de suas propriedades (amplitude, frequência e ângulo de fase) quando processados pela *DTFS*. Para esses casos, apesar da *DTFS*<sup>1</sup> manter a equivalência numérica entre o espectro de frequência discreto e a janela de amostragem, a amplitude do sinal observada no espectro, importante parâmetro para a execução do Teste de Hipóteses abordado nessa dissertação, pode não condizer com o fenômeno físico real. Assim, uma solução capaz de corrigir esse efeito é necessária para que o Teste de Hipóteses possa trabalhar com os parâmetros mais precisos na definição de suas Hipóteses.

Para compreender melhor a necessidade do estimador na correção dos parâmetros das Hipóteses, a figura 4.1 apresenta um gráfico com a amplitude de sinais sob amostragem sem a característica *FHRE* classe 3 e 4 estimadas pela *DTFS*. Para cada valor inteiro associado à ordem espectral  $f$  (eixo das abscissas), foi gerado um sinal

$$x_{(n)} = A \cos\left(2\pi \frac{(f + 0.5)}{N} n + \frac{\pi}{8}\right)$$

Tal sinal foi processado pela *DTFS*, com uma quantidade de amostras  $N = 1000$ , e o módulo das componentes da ordem espectral  $f$  foi registrado no gráfico, em valores percentuais da amplitude esperada de um sinal classe 1 (módulo igual a  $A/2$ ). A figura 4.1 é um caso extremo e demonstra que, em média, a amplitude de sinais cuja frequência não pode ser representada por uma ordem espectral de valor inteiro apresenta uma estimativa, pela *DTFS*, na ordem espectral mais próxima, que pode atingir 36% a menos do valor esperado  $A/2$ .

## 4.2 Equacionamento do Estimador

Seja a função  $y_{(n)}$ , equação 4.1, um sinal corrompido por ruído aditivo gaussiano branco estacionário no sentido estrito:

$$y_{(n)} = y_{(n)} + r g b_{(n)} \quad (4.1)$$

$$y_{(n)} = A \cos\left(\frac{2\pi F}{F_{sr}} n + \phi\right) \quad (4.2)$$

<sup>1</sup>Em síntese a *DTFS* executa uma transformação entre sistemas de bases (ou eixos) ortogonais. A “transformada direta” transforma os dados do sistema de bases ortogonais temporais ( $t_0, t_1, t_2, \dots$ ) para o sistema de bases ortogonais da frequência ( $f_0, f_1, f_2, \dots$ ) e sua inversa faz a recíproca.

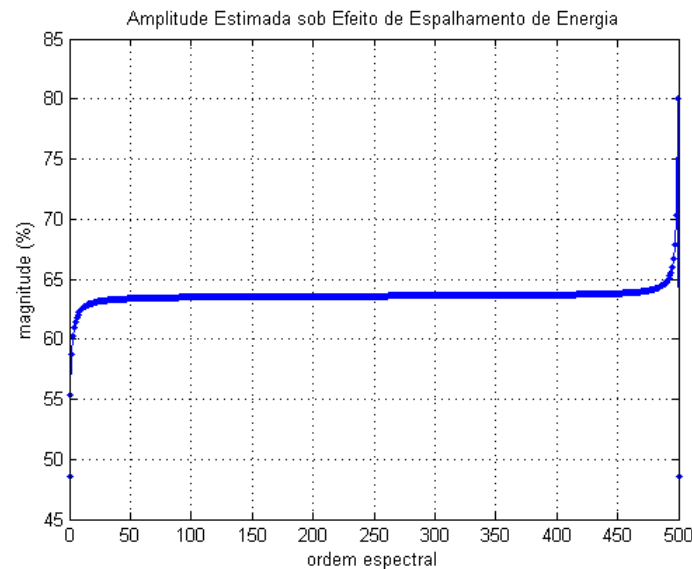


Figura 4.1: Amplitude estimada sob o efeito de espalhamento de energia

sendo:

- $y_{(n)}$  sinal corrompido;
- $Y_{(n)}$  componente determinística do sinal  $y_{(n)}$ ;
- $A$  amplitude do sinal determinístico  $y_{(n)}$ ;
- $F_{sr}$  taxa (em [amostra/s]) na qual fora amostrado o sinal  $y_{(n)}$ ;
- $F$  frequência (em [Hz]) do sinal  $y_{(n)}$ ;
- $n$  variável de tempo discreto (em [amostra]);
- $\phi$  ângulo de fase do sinal  $y_{(n)}$ ;
- $rgb_{(n)}$  ruído aditivo gaussiano branco:  $rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_t^2)$ .

Em amostragens classe 3 e 4, conforme demonstrado na seção 3.4 e na figura 3.6, todas as frequências do espectro possuirão alguma magnitude. Tal magnitude será tão significativa quanto for a proximidade entre a frequência discreta observada e a ordem espectral correspondente a  $F$ .

A partir da análise do capítulo 2, pode se afirmar que a *pdf* das componentes de todo o espectro da DTFS da função  $y_{(n)}$  é também gaussiana, de variância  $\sigma_f^2 = \sigma_t^2/(2N)$  e que são todas estatisticamente independentes. Cabe lembrar que a média dessas componentes é exatamente a DTFS da componente determinística da função  $y_{(n)}$ .

Para a componente real de  $Y_{(f)} = \mathcal{F}_{DTFS} \{y_{(n)}\}$  na ordem espectral  $f$ , tem-se:

$$\Re \{Y_{(f)}\} = Y_{\Re(f)} \sim \mathcal{N}(\mu_{\Re(f)}, \sigma_f^2)$$

$$p(Y_{\Re(f)} = Y) = (2\pi\sigma_f^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(Y - \mu_{\Re(f)})^2}{2\sigma_f^2}\right\}$$

sendo:

- $Y_{\Re(f)}$  variável aleatória da componente real de  $\mathcal{F}_{DTFS} \{y_{(n)}\}$  na ordem espectral  $f$ ;
- $Y$  um possível valor (realização) que  $Y_{\Re(f)}$  poderia assumir;

Para a componente imaginária de  $Y_{(f)} = \mathcal{F}_{DTFS} \{y_{(n)}\}$  na ordem espectral  $f$ , tem-se:

$$\Im \{Y_{(f)}\} = Y_{\Im(f)} \sim \mathcal{N}(\mu_{\Im(f)}, \sigma_f^2)$$

$$p(Y_{\Im(f)} = Y) = (2\pi\sigma_f^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(Y - \mu_{\Im(f)})^2}{2\sigma_f^2}\right\}$$

sendo:

- $Y_{\Im(f)}$  variável aleatória da componente imaginária de  $\mathcal{F}_{DTFS} \{y_{(n)}\}$  na ordem espectral  $f$ ;
- $Y$  um possível valor (realização) que  $Y_{\Im(f)}$  poderia assumir;

A teoria dos estimadores mostra como determinar um procedimento ou equação para se estimar um parâmetro de uma função ou de um sistema a partir da *pdf* do processo estocástico e de suas saídas. Um dos estimadores mais implementados para fins práticos é o Estimador de Máxima Verossimilhança (Maximum Likelihood Estimator - MLE).

De acordo com [Kay \(1993a\)](#), um MLE é um procedimento para definir o valor do parâmetro  $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \dots]^T$ , a ser estimado, que maximiza a probabilidade das saídas observadas num processo estocástico dependente de tal parâmetro, ou seja, a função de verossimilhança  $p(Y = Y_0; \Theta)$ . Matematicamente:

$$\hat{\Theta}_{FDC} = \arg_{\Theta} \max\{p(Y = Y_0; \Theta)\} \quad (4.3)$$

Caso a função de verossimilhança satisfaça a condição de regularidade

$$E \left\{ \frac{\delta \ln(p(Y; \theta))}{\delta \theta} \right\} = \int \frac{\delta \ln(p(Y; \theta))}{\delta \theta} p(Y; \theta) d\theta = 0 \quad \forall \theta$$

o MLE pode ser encontrado pela equação:

$$\frac{\delta \ln(p(Y = Y_0; \Theta))}{\delta \Theta} = 0 \quad (4.4)$$

Se existem múltiplas soluções, então, dentre aquelas que pertencem ao intervalo factível de  $\Theta$ , a que maximiza a função de verossimilhança é a estimativa do MLE.

Para se estimar o parâmetro  $\Theta = [A, F, \phi]$  do sinal  $y_{(n)}$ , faz-se  $Y_{(f)} = \mathcal{F}_{DTFS}\{y_{(n)}\}$  o sistema a partir do qual se obtém a função de verossimilhança. Para tanto, deve-se escolher um conjunto de ordens espectrais  $\mathbf{K} = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$  para compor o processo estocástico  $\mathbf{Y}_{(\mathbf{K})} = \{Y_{(f_1)}, Y_{(f_2)}, Y_{(f_3)}, \dots\}$ .

Sendo  $\alpha_{y_{(n)}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}$  o conjunto dos valores da *DTFS* do sinal  $y_{(n)}$  nas ordens espectrais selecionadas pelo conjunto  $\mathbf{K}$ , a probabilidade de  $\alpha_{y_{(n)}}$  ter sido obtida a partir do parâmetro  $\dot{\Theta} = [\dot{A}, \dot{F}, \dot{\phi}]$  é definida, levando-se em consideração a independência estatística entre as componentes da *DTFS*, pela equação 4.5:

$$p(\mathbf{Y}_{(\mathbf{K})} = \alpha_{y_{(n)}}; \dot{\Theta}) = \prod_k p(\Re\{\alpha_k\}; \dot{\Theta}) \prod_k p(\Im\{\alpha_k\}; \dot{\Theta}) \quad (4.5)$$

Sabendo que as componentes de  $\alpha_{y_{(n)}}$  tratam-se de variáveis aleatórias independentes e gaussianas, a equação 4.5, após algumas simplificações, torna-se:

$$p(\mathbf{Y}_{(\mathbf{K})} = \alpha_{y_{(n)}}; \dot{\Theta}) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma_f^2} \right)^{\frac{c}{2}} \exp\left( \frac{-1}{2\sigma_f^2} \sum_k (\Re\{\alpha_k\} - \dot{R}_k)^2 \right) \exp\left( \frac{-1}{2\sigma_f^2} \sum_k (\Im\{\alpha_k\} - \dot{I}_k)^2 \right) \quad (4.6)$$

sendo:

$$\begin{aligned} c &= \text{quantidade de variáveis aleatórias em } \alpha_{y_{(n)}} \\ \dot{Y}_{(k)} &= \mathcal{F}_{DTFS} \left\{ \dot{A} \cos(2\pi\dot{F}n/F_s + \dot{\phi}) \right\} \\ \dot{R}_k &= \Re \left\{ \dot{Y}_{(k)} \right\} \\ \dot{I}_k &= \Im \left\{ \dot{Y}_{(k)} \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Aplicando-se a equação 4.3, o MLE para a função de verossimilhança 4.6 é descrito pela expressão:

$$\hat{\Theta}_{FDC} = \arg_{\Theta} \min \left\{ \sum_k (\Re\{\alpha_k\} - \hat{R}_k)^2 + (\Im\{\alpha_k\} - \hat{I}_k)^2 \right\} \quad (4.8)$$

e é obtido pela simples minimização do “erro quadrático médio” entre as componentes de  $\mathbf{Y}_{(K)}$  e suas correspondentes no espectro da *DTFS* do sinal determinístico estimado  $\dot{y}_{(n)}$ :

$$\dot{y}_{(n)} = \mathcal{I}\mathcal{F}_{DTFS} \{ \dot{Y}_{(k)} \} = \dot{A} \cos(2\pi \dot{F}n/F_s + \dot{\phi}).$$

Devido à complexidade, essa dissertação não propõe nenhum método determinístico para a solução da equação 4.8. Contudo, valores de  $\hat{\Theta}$  que atendem ao estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$  podem ser encontrados por meio de: *grid inspection*, algoritmos genéticos, ou uma mistura destes.

### 4.3 Estimação de Sinais Determinísticos

A aplicação do estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$  na determinação da amplitude de uma frequência em sinais puramente determinísticos resulta sempre em um valor determinístico. Com isso, o erro das estimativas torna-se exclusivamente dependente do método de otimização implementado, do ajuste nos parâmetros de controle do algoritmo e do limite de precisão da solução.

Em problemas de estimação de parâmetros de sistemas, algumas das técnicas utilizadas finalizam o processo de otimização somente quando o erro entre a função do sistema real e a função do sistema estimado estiver abaixo do limite de precisão da solução. Então, ajustando o limite de precisão da solução para um valor inferior à precisão requerida para a aplicação, possibilita desprezar o erro das estimativas e considerá-los “praticamente nulos”.

Em função dessa característica de erros práticos nulos, torna-se desinteressante a apresentação de gráficos ou tabelas para exibir os resultados dos testes que comprovam o primeiro grau de eficiência do otimizador desenvolvido.

Considerando o caso de sinais determinísticos descrito na figura 4.1, o erro de estimação, sob o uso da *DTFS*, pode atingir, no caso mais crítico, 36% (em média) do valor da amplitude a ser estimada. Isto implica em um erro de  $10 \log(1 - 0.36) = -3.876\text{dB}$  na

energia estimada para esse sinal. Fato esse que não ocorre com o estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$ .

A comprovação desse primeiro grau de eficiência faz-se necessária, uma vez que essa característica também está presente na estimação de sinais corrompidos, mas o desempenho do algoritmo de otimização somente pode ser validado sobre a influência de ruídos.

## 4.4 Propriedades Estocásticas do Estimador

Com a utilização de técnicas de otimização para solucionar o estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , a determinação de suas propriedades estocásticas deverá se realizar por meio de métodos como simulação Monte Carlo.

Uma primeira e importante observação é que a relação sinal/ruído (*Signal to Noise Ratio* - *SNR*) no domínio do tempo não traduz, “de forma direta”, o parâmetro de referência para se determinar o desempenho de  $\hat{\Theta}_{FDC}$ . O motivo para isso é que o sinal e o ruído sob interesse são aqueles observados no domínio da frequência. E, conforme equações 2.15 e 2.16, a energia  $\sigma_f^2$  do ruído no domínio da frequência é uma função do número de amostras  $N$  processadas pela *DTFS*. Dessa forma, um sinal com *SNR* constante, apresentará uma energia  $\sigma_f^2$  diferente para cada comprimento (quantidade de amostras  $N$ ) da janela de amostragem processada pela *DTFS*.

Na medição do desempenho do Estimador, o parâmetro de referência é a relação entre: a energia  $\frac{(A/2)^2}{2}$  do sinal  $y_{(n)}$  na ordem espectral da frequência  $F$  (no espectro discreto) e a energia  $\sigma_f^2$  do ruído no domínio da frequência. Tal parâmetro passa a ser designado por: “Razão da Energia do Sinal Espectral pelo Ruído Espectral” - *RESERE*:<sup>2</sup>

$$Resere = \frac{A^2}{8\sigma_f^2}$$

Uma segunda observação é como se interpretar tal parâmetro do teste de desempenho do Estimador. Sabe-se que o ruído espectral (ruído observado em uma frequência do espectro discreto) tem uma distribuição gaussiana de média zero. Este ruído sobrepõe-se ao espectro do sinal determinístico, criando um desvio  $\delta$  entre as componentes do sinal determinístico e os valores observados em uma realização do processo  $Y_{(f)}$ . Por se tratar de uma distribuição de probabilidades contínua e não limitada, teoricamente, o desvio  $\delta$  poderia assumir qualquer valor no intervalo aberto  $(-\infty, +\infty)$ . Para um sinal com  $A$  e  $\sigma_f^2$

<sup>2</sup>Ao longo desta dissertação o termo em letras maiúsculas *RESERE* é usado como sigla de expressão “Razão da Energia do Sinal Espectral pelo Ruído Espectral”, enquanto o símbolo *Resere* é a sua variável.

constantes o desvio  $\delta$  observado em janelas de amostragem diferentes poderia apresentar amplitudes muito diferentes. Com isso a interpretação do parâmetro *RESERE* não pode se dar em termos de amplitude do desvio, mas sim de uma probabilidade do desvio superar certa amplitude. Em suma, o parâmetro *RESERE* representa uma medida indireta (não linear) da probabilidade do desvio sobre as componentes do espectro de  $Y_{(f)}$  não superar uma fração da magnitude espectral  $A/2$ .

Sendo  $K_A = kA/2$  a fração da magnitude espectral (com  $k > 0$ ) e  $\mu_{\delta_e}$  a média do desvio, a probabilidade do módulo do desvio  $\delta_e$  não ultrapassar o valor  $K_A$  é obtida pela equação:

$$P(|\delta_e| \leq K_A) = P(-K_A \leq \delta_e \leq K_A) = \int_{-K_A}^{+K_A} \frac{1}{2\pi\sigma_f^2} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma_f^2}(\Delta_e - \mu_{\delta_e})^2\right\} d\Delta_e$$

$$P(|\delta_e| \leq K_A) = 1 - 2 \int_{-K_A}^{-\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_f^2} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma_f^2}(\Delta_e - \mu_{\delta_e})^2\right\} d\Delta_e \quad (4.9)$$

sendo  $\mu_{\delta_e} = 0$  e  $\Delta_e$  um valor qualquer que o desvio  $\delta_e$  pode assumir.

A equação 4.9 pode ser calculada no *MATLAB* pelo comando:

- `1-2*(normcdf(-K_A, 0, sqrt(sigma_f^2)));` ou
- `1-2*(0.5*erfc(K_A/sqrt(2*sigma_f^2))).`

Reescrevendo a equação 4.9 em função do parâmetro *RESERE* tem-se:

$$P(|\delta_e| \leq K_A) = 1 - 2 \int_{-K_A}^{-\infty} \frac{1}{2\pi \frac{A^2}{8 \cdot Resere}} \exp\left\{\frac{-1}{2 \frac{A^2}{8 \cdot Resere}}(\Delta_e - \mu_{\delta_e})^2\right\} d\Delta_e$$

que pode ser calculado no *MATLAB* pelo comando:

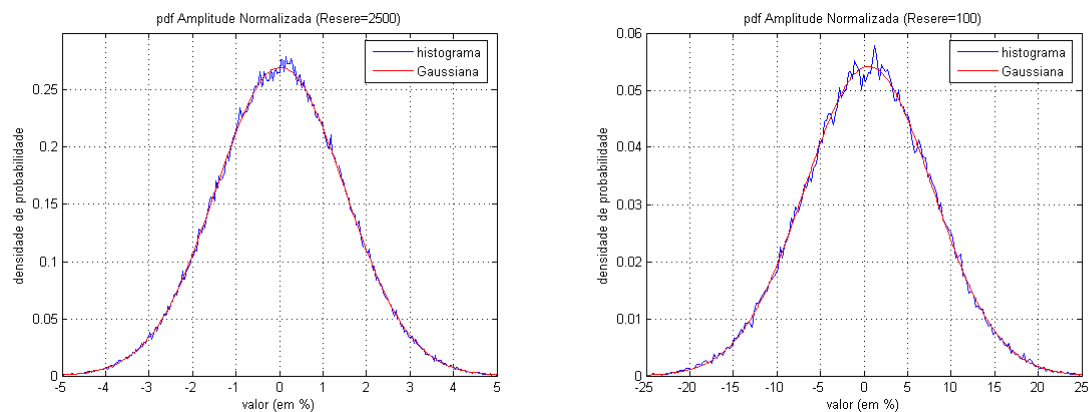
- `1-2*(normcdf(-K_A, 0, A/sqrt(8*Resere)));` ou
- `1-2*(0.5*erfc(k*sqrt(Resere))).`

As figuras 4.2, 4.3, 4.4 apresentam o resultado de simulações Monte Carlo na verificação das propriedades estocásticas do Estimador. Em cada figura, a *pdf* do erro de estimação normalizado de uma das variáveis estimadas é exibida. Para a obtenção das figuras 4.2(a), 4.3(a) e 4.4(a) foram estimadas  $3 \cdot 10^5$  realizações do processo  $Y_{(f)}$  com *RESERE*=2500 (52,05% de probabilidade do módulo do desvio não ultrapassar 1% de  $A/2$ ). Para as figuras 4.2(b), 4.3(b) e 4.4(b) foram estimadas  $1 \cdot 10^5$  realizações do processo  $Y_{(f)}$  com *RESERE*=100 (52,05% de probabilidade do módulo do desvio não ultrapassar



5% de  $A/2$ ). Em todas as realizações  $N = 1050$  e os valores das variáveis  $A$ ,  $F$  e  $\phi$  foram gerados aleatoriamente.

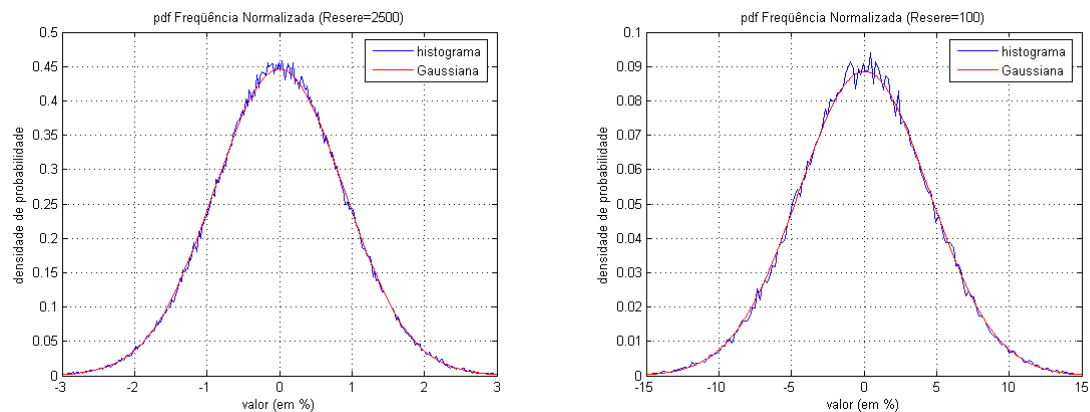
A normalização aplicada às estimativas obtidas por  $\hat{A}$  é:  $(\hat{A} - A)/A \cdot 100\%$



(a)  $P(|\delta_e| \leq 0.01A/2) = 52\%$  ( $RESERE = 2500$ ) com  $3 \cdot 10^5$  realizações de  $Y_{(f)}$  (b)  $P(|\delta_e| \leq 0.05A/2) = 52\%$  ( $RESERE = 100$ ) com  $1 \cdot 10^5$  realizações de  $Y_{(f)}$

Figura 4.2: PDF do erro percentual das estimativas de  $\hat{A}$  sobre o sinal corrompido  $y_{(n)} = A \cos(2\pi fn/N + \phi) + rgb_{(n)}$ , sendo  $A \sim \mathcal{U}(1, 101)$ ,  $f \sim \mathcal{U}(5, 405)$ ,  $N=1050$  e  $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ .

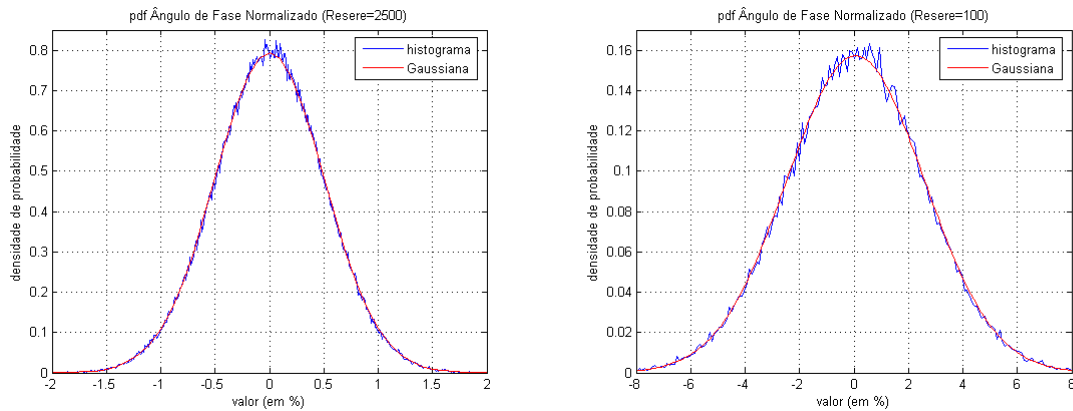
A normalização aplicada às estimativas obtidas por  $\hat{F}$  é:  $(\hat{F} - F)/(F_s/N) \cdot 100\%$



(a)  $P(|\delta_e| \leq 0.01A/2) = 52\%$  ( $RESERE = 2500$ ) com  $3 \cdot 10^5$  realizações de  $Y_{(f)}$  (b)  $P(|\delta_e| \leq 0.05A/2) = 52\%$  ( $RESERE = 100$ ) com  $1 \cdot 10^5$  realizações de  $Y_{(f)}$

Figura 4.3: PDF do erro percentual das estimativas de  $\hat{F}$  sobre o sinal corrompido  $y_{(n)} = A \cos(2\pi fn/N + \phi) + rgb_{(n)}$ , sendo  $A \sim \mathcal{U}(1, 101)$ ,  $f \sim \mathcal{U}(5, 405)$ ,  $N=1050$  e  $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ .

A normalização aplicada às estimativas obtidas por  $\hat{\phi}$  é:  $(\hat{\phi} - \phi)/(2\pi) \cdot 100\%$



(a)  $P(|\delta_e| \leq 0.01A/2) = 52\%$  ((RESERE = 2500) com  $3 \cdot 10^5$  realizações de  $Y_{(f)}$ ) (b)  $P(|\delta_e| \leq 0.05A/2) = 52\%$  ((RESERE = 100) com  $1 \cdot 10^5$  realizações de  $Y_{(f)}$ )

Figura 4.4: PDF do erro percentual das estimativas de  $\hat{\phi}$  sobre o sinal corrompido  $y_{(n)} = A \cos(2\pi f n/N + \phi) + r g b_{(n)}$ , sendo  $A \sim \mathcal{U}(1, 101)$ ,  $f \sim \mathcal{U}(5, 405)$ ,  $N=1050$  e  $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ .

O objetivo desses gráficos é apresentar uma idéia do “erro percentual” das estimativas. Por isso, como mencionado, os valores das variáveis  $A$ ,  $F$  e  $\phi$  do sinal simulado foram gerados aleatoriamente e o gráfico, obtido sobre o erro das estimações.

Analisando o perfil da *pdf* de cada figura, observa-se que as estimativas podem perfeitamente ser aproximadas pela distribuição de probabilidades gaussianas. Todas as simulações indicaram que o desvio padrão  $\sigma_{\hat{A}}$  do estimador  $\hat{A}$  pode ser considerado o dobro do desvio padrão  $\sigma_f$  do ruído espectral e que sua média é nula.

Uma vantagem que pode ser obtida com o Estimador é a redução da quantidade de amostras  $N$  em uma janela de amostragem. Essa redução diminui o custo computacional na estimação do sinal, porém, com a desvantagem de diminuir o desempenho das estimativas, que é provocado pelo aumento da energia do ruído espectral observado em  $\sigma_f^2$ . Obviamente, parâmetros como: a frequência de Nyquist, a quantidade de ordens espectrais selecionadas e a relação entre as amplitudes observadas em cada grau de severidade que se deseja distinguir na falha, irão limitar a capacidade de diminuição de  $N$ .

## 4.5 Comparação de Desempenhos

A influência do ruído sobre as estimativas de amplitude e ângulo de fase provenientes da simples utilização da DTFS pode ser totalmente parametrizada por um único

parâmetro: *RESERE*. Entretanto, para se compreender melhor essa influência é necessário o auxílio de simulações. Outro aspecto intrinsecamente relacionado ao desempenho da *DTFS* é a razão  $f/N$ , que define o perfil da distribuição de probabilidade das estimativas. Assim, para se compreender a influência dos parâmetros *RESERE* e  $f/N$  sobre o desempenho das estimativas da *DTFS*, esta dissertação apresenta quatro testes. Neles, duas classes de Amostragem Múltipla, Classe 2 e 4, foram abordadas sob duas condições: sinais semi-determinísticos<sup>3</sup> e corrompidos.

A característica *JFFS*, presente apenas nas Amostragens Múltiplas Classe 1 e 3, tem influência direta sobre a distribuição de probabilidade das estimativas dos estimadores *DTFS* e  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , podendo alterar a média da distribuição observada entre diferentes janelas de amostragem. Contudo, o processo de normalização utilizado para o erro das estimativas, na seção 4.4, torna essa variável aleatória imune ao deslocamento da média. Com isso, a distribuição de probabilidade dos erros de estimativa normalizados provenientes da Classe 1 tem o mesmo perfil observado que a da Classe 2, assim como a distribuição da Classe 3 também tem o mesmo perfil que a da Classe 4. A característica *FHRE*, presente apenas nas Amostragens Múltiplas Classe 1 e 2, é definida pela razão  $f/N$  e também tem influência direta sobre a distribuição de probabilidade das estimativas da *DTFS*. A sua ausência, percebida pelo efeito de espalhamento de energia, pode alterar a média, a variância e o tipo de distribuição observada sobre os erros de estimativa normalizados da *DTFS*. A amostragem Classe 4 apresenta todas as deficiências abordadas no capítulo 3 e, por isso, dentre as demais classes, é a que mais justifica a utilização do estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$ . Por essas razões, apenas os testes das Classes 2 e 4 são suficientes para caracterizarem o desempenho dos estimadores *DTFS* e  $\hat{\Theta}_{FDC}$ .

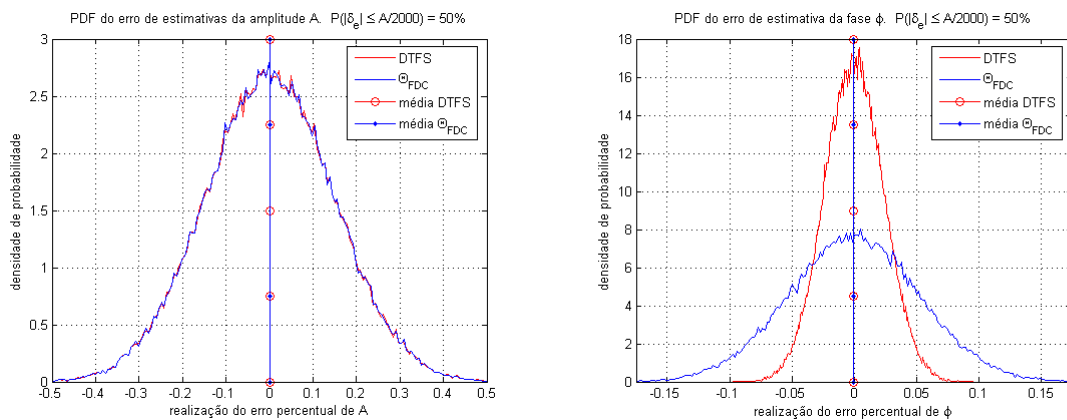
Os sinais corrompidos foram obtidos com *RESERE* igual a 90.99, conforme equação  $P(|\delta_e| \leq 0.05A/2) = 50\%$ , enquanto os sinais considerados semi-determinísticos foram obtidos com *RESERE* igual a  $2.275 \cdot 10^5$ , conforme equação  $P(|\delta_e| \leq 0.001A/2) = 50\%$ . Todos os testes apresentam os resultados de simulações Monte Carlo das estimativas da *DTFS* e do estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$  sobre as mesmas realizações do sinal.

Uma caracterização “generalizada” do desempenho desses estimadores ao longo de uma ampla faixa de valores para os parâmetros semi-determinísticos do sinal corrompido requer uma abordagem Bayesiana, na qual a amplitude, frequência e fase são variáveis aleatórias. Por isso, o sinal processado é  $y_{(n)} = A \cos(2\pi fn/N + \phi) + r g b_{(n)}$ , sendo

<sup>3</sup>Nesta dissertação, o termo semi-determinístico é utilizado para sinais determinísticos cujo ruído aditivo que o corrompe tem uma energia inexpressiva para efeitos práticos da aplicação em questão e, por isso, podem ser utilizados para simular sinais determinísticos.

$A \sim \mathcal{U}(1, 1001)$ ,  $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ ,  $N = 512$  e  $f$  dependente da classe de amostragem. Para amostragem Classe 4, tem-se  $f \sim \mathcal{U}_C(5, 251)$  uma distribuição contínua e uniforme. Para amostragem Classe 2, tem-se  $f \sim \mathcal{U}_D[5, 251]$  uma distribuição discreta e uniforme entre os elementos do conjunto  $u = \{5, 6, 7, \dots, 249, 250, 251\}$ . Para sinais semi-determinísticos  $rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(0, 0.0011A^2)$  e para sinais corrompidos,  $rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(0, 2.748A^2)$ .

A figura 4.5 apresenta a *pdf* do erro normalizado para um sinal semi-determinístico pertencente à Classe 2. A *pdf* do estimador *DTFS* é apresentada em vermelho, enquanto a do estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , em azul. A figura 4.5(a) apresenta a *pdf* do erro normalizado percentual da estimativa de amplitude  $\hat{A}$  e seu valor médio. Observa-se que os desempenhos dos estimadores *DTFS* e  $\hat{\Theta}_{FDC}$  são similares, pois tanto o perfil da *pdf* quanto sua média e variância são praticamente iguais. Na figura 4.5(b) é apresentada a *pdf* do erro normalizado percentual da estimativa do ângulo de fase  $\hat{\phi}$  e o seu valor médio. Nitidamente, o desempenho da *DTFS* é superior ao de  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , pois apesar de ambos apresentarem um perfil gaussiano de média zero, a variância da *DTFS* é inferior, indicando que a “média” do seu erro quadrático é inferior à de  $\hat{\Theta}_{FDC}$ .

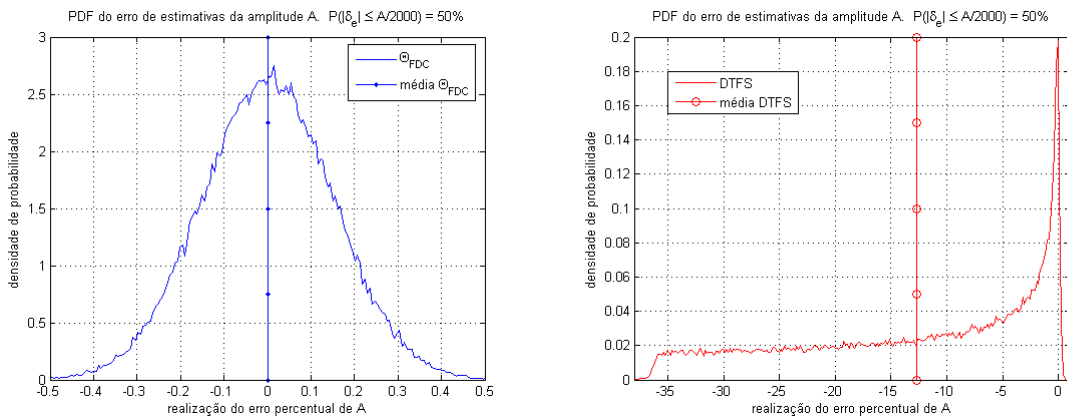


(a) *pdf* do erro normalizado percentual de  $\hat{A}$  para um sinal semi-determinístico sob Amostragem Múltipla Classe 2 (b) *pdf* do erro normalizado percentual de  $\hat{\phi}$  para um sinal semi-determinístico sob Amostragem Múltipla Classe 2

Figura 4.5: *pdf* do erro normalizado percentual dos estimadores *DTFS* e  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , com  $1 \cdot 10^5$  realizações de  $y_{(n)} = A \cos(2\pi fn/N + \phi) + rgb_{(n)}$ , sendo  $A \sim \mathcal{U}(1, 1001)$ ,  $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ ,  $N = 512$ ,  $f \sim \mathcal{U}_D[5, 251]$  e  $rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(0, 0.0011A^2)$

A figura 4.6 apresenta a *pdf* do erro normalizado da estimativa de amplitude  $\hat{A}$  para um sinal semi-determinístico pertencente à Classe 4. Esta classe de amostragem é susceptível ao efeito de espalhamento de energia e, como consequência, as distribuições de probabilidade dos estimadores *DTFS* e  $\hat{\Theta}_{FDC}$  tornam-se muito diferentes uma da outra, de forma que suas propriedades não ficam nítidas quando ambas são apresentadas em um

mesmo gráfico. Por isso, cada *pdf* é apresentada separadamente. A figura 4.6(a) apresenta a *pdf* do erro normalizado percentual da estimativa de amplitude  $\hat{A}$  do estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$  e seu valor médio. Por comparação com a figura 4.5(a), nota-se que o perfil dessa distribuição, sua média e sua variância permanecem similares, indicando um desempenho praticamente igual e imunidade ao efeito de espalhamento de energia para o estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$ . A figura 4.6(b) apresenta a *pdf* do erro normalizado percentual da estimativa de amplitude  $\hat{A}$  da *DTFS* e seu valor médio. Comparando-a com a figura 4.5(a), nota-se que o desempenho da *DTFS* é extremamente susceptível ao efeito de espalhamento de energia. Seu valor médio deixou de ser nulo, passando para  $-12.7\%$ . O perfil dessa distribuição de probabilidade não mais se assemelha a uma gaussiana e, com a simples comparação entre o “range” de ambas figuras (que saltou de 1% para 38%), ressalta-se que sua variância tornou-se muito superior.

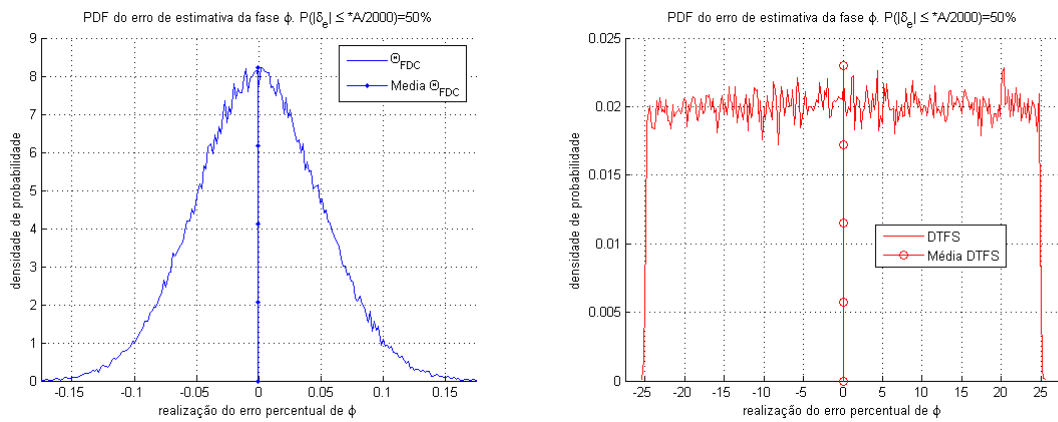


(a) *pdf* do erro normalizado percentual de  $\hat{A}$  para um sinal semi-determinístico sob Amostragem Múltipla Classe 4 (b) *pdf* do erro normalizado percentual de  $\hat{A}$  para um sinal semi-determinístico sob Amostragem Múltipla Classe 4

Figura 4.6: *pdf* do erro normalizado percentual de  $\hat{A}$  dos estimadores *DTFS* e  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , com  $1 \cdot 10^5$  realizações de  $y_{(n)} = A \cos(2\pi fn/N + \phi) + rgb_{(n)}$ , sendo  $A \sim \mathcal{U}(1, 1001)$ ,  $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ ,  $N = 512$ ,  $f \sim \mathcal{U}_C(5, 251)$  e  $rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(0, 0.0011A^2)$

A figura 4.7 apresenta a *pdf* do erro normalizado da estimativa do ângulo de fase  $\hat{\phi}$  para um sinal semi-determinístico pertencente à Classe 4. Assim como ocorre para o erro da estimativa de amplitude  $\hat{A}$ , devido ao efeito de espalhamento de energia, a distribuição de probabilidade dos estimadores *DTFS* e  $\hat{\Theta}_{FDC}$  mais uma vez tornam-se muito diferentes uma da outra e suas propriedades não ficam nítidas quando expostas em um mesmo gráfico. Por isso, cada *pdf* é apresentada separadamente. A figura 4.7(a) apresenta a *pdf* do erro normalizado percentual da estimativa do ângulo de fase  $\hat{\phi}$  do estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$  e seu valor médio. Assim como ocorre para o erro da estimativa de amplitude  $\hat{A}$ , por comparação com a figura 4.5(b), nota-se um desempenho praticamente igual e imunidade

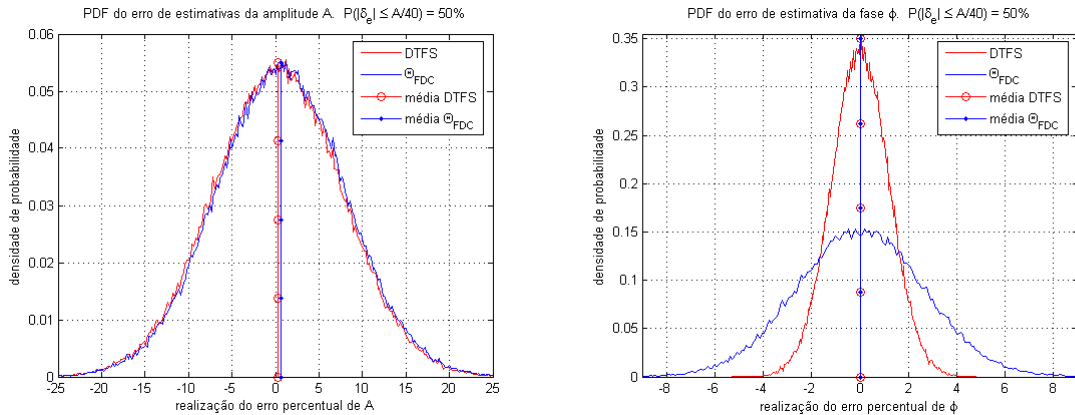
ao efeito de espalhamento de energia para o estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$ . A figura 4.7(b) apresenta a *pdf* do erro normalizado percentual da estimativa do ângulo de fase  $\hat{\phi}$  da *DTFS* e seu valor médio. Comparando-a com o figura 4.5(b), nota-se que o desempenho da *DTFS* também é extremamente susceptível ao efeito de espalhamento de energia. Seu valor médio continua sendo nulo, porém, o perfil dessa distribuição de probabilidade assemelha-se a uma distribuição uniforme e, com a simples comparação entre o “*range*” de ambas figuras (que saltou de 0.15% para 50.0%), ressalta-se também que sua variância tornou-se muito superior.



(a) *pdf* do erro normalizado percentual de  $\hat{\phi}$  para um sinal semi-determinístico sob Amostragem Múltipla Classe 4 (b) *pdf* do erro normalizado percentual de  $\hat{\phi}$  para um sinal semi-determinístico sob Amostragem Múltipla Classe 4

Figura 4.7: *pdf* do erro normalizado percentual de  $\hat{\phi}$  dos estimadores *DTFS* e  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , com  $1 \cdot 10^5$  realizações de  $y_{(n)} = A \cos(2\pi fn/N + \phi) + rgb_{(n)}$ , sendo  $A \sim \mathcal{U}(1, 1001)$ ,  $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ ,  $N = 512$ ,  $f \sim \mathcal{U}_C(5, 251)$  e  $rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(0, 0.0011A^2)$

A figura 4.8 apresenta a *pdf* do erro normalizado para um sinal corrompido pertencente à Classe 2. A *pdf* do estimador *DTFS* é apresentada em vermelho, enquanto a do estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , em azul. A figura 4.8(a) apresenta a *pdf* do erro normalizado percentual da estimativa de amplitude  $\hat{A}$  e seu valor médio. Observa-se que tanto o perfil da *pdf* quanto a média e variância dos estimadores *DTFS* e  $\hat{\Theta}_{FDC}$  são praticamente iguais. Portanto, a presença do ruído não alterou o desempenho de um estimador em relação ao outro e, por comparação com a figura 4.5(a), percebe-se que houve apenas um aumento na variância. Na figura 4.8(b) é apresentada a *pdf* do erro normalizado percentual da estimativa do ângulo de fase  $\hat{\phi}$  e o seu valor médio. Novamente, o desempenho da *DTFS* é superior ao de  $\hat{\Theta}_{FDC}$  e, comparado com a figura 4.5(b), nota-se que o efeito do ruído apenas aumenta a variância dos estimadores, mas não altera o desempenho relativo entre eles.



(a) *pdf* do erro normalizado percentual de  $\hat{A}$  para um sinal corrompido sob Amostragem Múltipla Classe 2 (b) *pdf* do erro normalizado percentual de  $\hat{\phi}$  para um sinal corrompido sob Amostragem Múltipla Classe 2

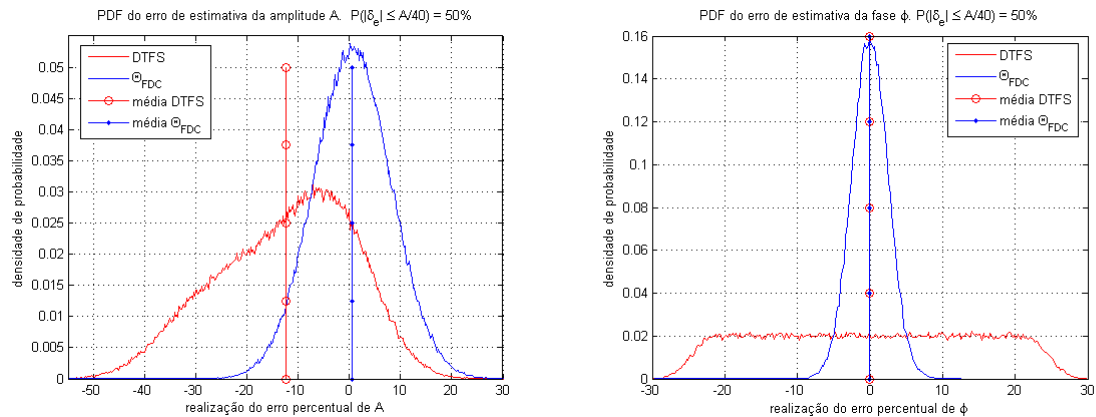
Figura 4.8: *pdf* do erro normalizado percentual dos estimadores  $DTFS$  e  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , com  $2 \cdot 10^5$  realizações de  $y_{(n)} = A \cos(2\pi fn/N + \phi) + rgn_{(n)}$ , sendo  $A \sim \mathcal{U}(1, 1001)$ ,  $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ ,  $N = 512$ ,  $f \sim \mathcal{U}_D[5, 251]$  e  $rgn_{(n)} \sim \mathcal{N}(0, 2.748A^2)$

A figura 4.9 apresenta a *pdf* do erro normalizado para um sinal corrompido pertencente à Classe 4. A *pdf* do estimador  $DTFS$  é apresentada em vermelho, enquanto a do estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , em azul. A figura 4.9(a) apresenta a *pdf* do erro normalizado percentual da estimativa de amplitude  $\hat{A}$  e seu valor médio. Comparando essa figura com a 4.8(a) observa-se que o efeito de espalhamento de energia praticamente não afeta o desempenho de  $\hat{\Theta}_{FDC}$ . Entretanto o mesmo não ocorre com o desempenho da  $DTFS$  cuja média de sua *pdf* passou de 0% para  $-12.3\%$ , seu perfil não se aproxima ao de uma gaussiana e sua variância nitidamente aumentou. Na figura 4.8(b) é apresentada a *pdf* do erro normalizado percentual da estimativa do ângulo de fase  $\hat{\phi}$  e o seu valor médio. Quando comparada à figura 4.8(b), o desempenho da  $\hat{\Theta}_{FDC}$  praticamente não se altera. E quanto à  $DTFS$ , apesar da sua média permanecer nula, a variância é superior à do estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$  e o perfil de distribuição de probabilidade lembra o de uma distribuição uniforme, o que a leva a um desempenho inferior.

## 4.6 Conclusão

Um sinal determinístico sob amostragem classe 3 ou 4 pode apresentar estimativas de amplitude, pela  $DTFS$ , na ordem espectral mais próxima à sua frequência, até 36% inferiores ao valor real, o que equivale a  $-3.876$  dB na estimação de energia. E isso pode distorcer os resultados de um posterior Teste de Hipóteses que utilize tais estimativas.





(a) *pdf* do erro normalizado percentual de  $\hat{A}$  para um sinal corrompido sob Amostragem Múltipla Classe 4 (b) *pdf* do erro normalizado percentual de  $\hat{\phi}$  para um sinal corrompido sob Amostragem Múltipla Classe 4

Figura 4.9: *pdf* do erro normalizado percentual dos estimadores  $DTFS$  e  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , com  $3.4 \cdot 10^5$  realizações de  $y_{(n)} = A \cos(2\pi fn/N + \phi) + rgb_{(n)}$ , com  $A \sim \mathcal{U}(1, 1001)$ ,  $\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ ,  $N = 512$ ,  $f \sim \mathcal{U}_C(5, 251)$  e  $rgb_{(n)} \sim \mathcal{N}(0, 2.748A^2)$

Para se evitar tal problema, para sinais corrompidos por ruído aditivo gaussiano branco estacionário no sentido estrito, esta Dissertação de Mestrado propõe um novo método de estimação baseado em um Estimador de Máxima Verossimilhança que analisa as componentes das frequências discretas e gera uma estimativa no domínio da frequência contínua. Tal procedimento de estimação consiste na escolha adequada dos valores dos parâmetros  $\hat{A}$ ,  $\hat{F}$  e  $\hat{\phi}$  que minimizam o erro médio quadrático entre as componentes da  $DTFS$  do sinal determinístico  $\hat{A} \cos(2\pi \hat{F}n + \hat{\phi})$  e as componentes do sinal real amostrado. Matematicamente, este procedimento é descrito pela equação 4.8.

A implementação do algoritmo do Estimador utilizado na dissertação revelou através de simulações Monte-Carlo que a amplitude estimada pode ser aproximada por uma distribuição gaussiana cuja média é o próprio valor  $A$  e cujo desvio padrão é o dobro do desvio padrão do ruído espectral. Comparando-se o desempenho do estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$  com a  $DTFS$ , apenas quando a variável de interesse é o ângulo de fase  $\phi$  e, simultaneamente, tanto a taxa de amostragem  $F_{sr}$  quanto o número de amostras  $N$  (em cada janela) podem ser ajustados para propiciar uma característica  $FHRE$  ao sinal amostrado é que a  $DTFS$  apresenta um melhor desempenho. Em todas as demais condições, o estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$  tem desempenho igual ou superior.

Dos resultados apresentados neste capítulo observa-se que a utilização do Estimador é capaz de conformar as propriedades estatísticas da  $DTFS$ , adequando os parâmetros das hipóteses no Teste de Hipóteses. O estimador também pode minimizar a quantidade de



amostras  $N$  requeridas na janela de amostragem, diminuindo o custo computacional de todo o processo de análise.



# Capítulo 5

## O Motor de Indução

Salvo o caso em que se explicitar o contrário, por toda a dissertação o termo “motor de indução” é usado como referência ao motor de indução trifásico do tipo gaiola de esquilo. Uma breve explanação sobre os princípios de funcionamento do motor de indução está disponível no apêndice [A](#).

### 5.1 A Importância do Motor de Indução

O motor de indução é o tipo de motor mais utilizado na indústria devido a sua robustez e a facilidade de controle de velocidade (devido ao avanço na tecnologia dos inversores e das técnicas de controle). Motores de Indução podem ser encontrados em uma vasta gama de aplicações: sistema de resfriamento de usinas nucleares, tração de veículos ferroviários e rodoviários, submarinos, bombeamento de petróleo, acionamento de portão de garagem e outra infinidade de pequenas aplicações não críticas. Sua faixa de potência vai de 120W a 19MW.

### 5.2 Quebra de Barras do Rotor

[Nandi & Toliyat \(1999\)](#), relatam que aproximadamente de 5 a 10% dos problemas de motores de indução estão relacionados à quebra de barras do rotor. Geralmente a falha inicia-se com uma única barra, mas com o tempo pode se ampliar com a ruptura de outras. Pequenas falhas normalmente não interrompem imediatamente o funcionamento do motor, mas com o tempo, partes quebradas podem entrar em contato com o estator ou mesmo se desprenderem causando graves problemas e prejuízos econômicos.

A quebra de barras do rotor pode ocorrer por várias razões. [Nandi & Toliyat \(1999\)](#) citam: estresse térmico devido a sobrecargas e desbalanceamento de fases, estresse mag-

nético causado por vibrações e força magnética desbalanceada (Unbalanced Magnetic Pull), problemas residuais de fabricação, estresse dinâmico decorrente dos ciclos de operação e efeito “centrífugo”, estresse proveniente de ambientes hostis (contaminação por abrasivos, químicos e umidade), e estresse mecânico devido a fadiga de componentes e falha dos rolamentos.

Sob regime permanente de operação, o campo criado pelas bobinas do estator gira em torno do eixo do rotor a uma velocidade  $n_s$ , chamada velocidade síncrona. O rotor gira no mesmo sentido a uma velocidade  $n_r$ . A diferença entre a velocidade do estator e do rotor induz uma corrente no último. O campo magnético gerado por esta corrente induzida também gira no mesmo sentido do campo do estator à velocidade  $(n_s - n_r)$ , em relação ao rotor.

De acordo com Thomson & Gilmore (2003), Kokko (2003) e Loránd *et al.* (2004), num motor de indução trifásico do tipo gaiola de esquilo perfeitamente balanceado o fluxo induzido no rotor, teoricamente, só possui componentes de seqüência positiva. Quando a resistência de uma barra aumenta (devido ao desenvolvimento de fissuras ou a própria quebra de barras), parte da corrente que circularia por tal barra é redistribuída, principalmente para as duas barras imediatamente adjacentes. Esta redistribuição provoca uma alteração na distribuição espacial do campo induzido no rotor criando componentes de seqüência negativa que giram, sob a referência do rotor, com a velocidade igual a  $(n_s - n_r)$ , porém, no sentido oposto ao campo do estator.

Estas componentes de seqüência negativa, induzem uma flutuação na corrente de fase do estator. O conjunto das freqüências em que se observa este efeito é chamado de Banda Lateral Inferior e estas freqüências distam-se a partir da freqüência síncrona (freqüência da linha)  $F_L$  em intervalos de  $-2sF_L$  Hz. Como consequência da distorção na distribuição do campo induzido, haverá uma pulsação no conjugado e na velocidade do rotor. Esta pulsação provoca o aparecimento da Banda Lateral Superior, cujas freqüências distam-se a partir da freqüência síncrona  $F_L$  em intervalos de  $+2sF_L$  Hz.

Conforme Nandi & Toliyat (1999), Baccarini (2005), Ayhan *et al.* (2005b) e Ayhan *et al.* (2005a) as freqüências afetadas pela quebra de uma ou mais barras do rotor podem ser determinadas pela seguinte equação:

$$F_{bb} = (1 + 2ks) F_L \quad (5.1)$$

sendo  $s$  o escorregamento<sup>1</sup> do motor (dependente do ponto de operação),  $F_L$  a frequência de linha e  $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Dentre os principais valores de  $F_{bb}$  o mais importante é aquele que se refere à primeira harmônica de seqüência negativa do campo induzido:

$$LSB_1 = (1 - 2s)F_L \quad (5.2)$$

Além disso, a primeira frequência da Banda Lateral Superior, definida pela equação

$$USB_1 = (1 + 2s)F_L \quad (5.3)$$

também recebe uma atenção especial, uma vez que ambas,  $LSB_1$  e  $USB_1$ , são as frequências de maior magnitude.

A figura 5.1 apresenta o gráfico do espectro de frequência da corrente de fase de um motor trifásico de 4 pólos, 2HP, uma barra quebrada, utilizado para a Análise Tradicional de quebra de barras.

Em qualquer motor de indução real, mesmo sob perfeito estado, seu espectro apresentará algum nível de energia na Banda Lateral, mesmo que seja muito menos expressivo que o apresentado na figura exemplificativa 5.1. Isso decorre do fato que em motores reais as barras do rotor e suas juntas com os anéis de curto-circuito nunca são perfeitamente idênticas entre si.

### 5.3 Restrições do Motor Utilizado

Todas as análises apresentadas nesta dissertação baseiam-se no motor de indução trifásico, do tipo gaiola de esquilo, com quatro ou mais pólos, operando em regime permanente.

A escolha do motor do tipo gaiola de esquilo deve-se ao fato de ser o tipo mais utilizado industrialmente. A limitação de não utilizar motores de dois pólos tem o objetivo de evitar que falhas de excentricidade venham a influenciar frequências do espectro de corrente que possam ser confundidas com aquelas afetadas pela quebra de barras do rotor. A imposição de se trabalhar em regime permanente é justificada pela imprecisão inerente ou ausência de informações sobre os parâmetros do motor, sua alimentação

---

<sup>1</sup>O escorregamento é definido pela equação  $s = \frac{n_s - n_r}{n_s}$  sendo:  $n_s = 60F_L/pp$ , a velocidade de rotação síncrona (em [rpm]),  $F_L$  a frequência síncrona (ou frequência de linha),  $pp$  par de pólos de uma fase do motor e  $n_r$  a velocidade de rotação do rotor (em [rpm]).

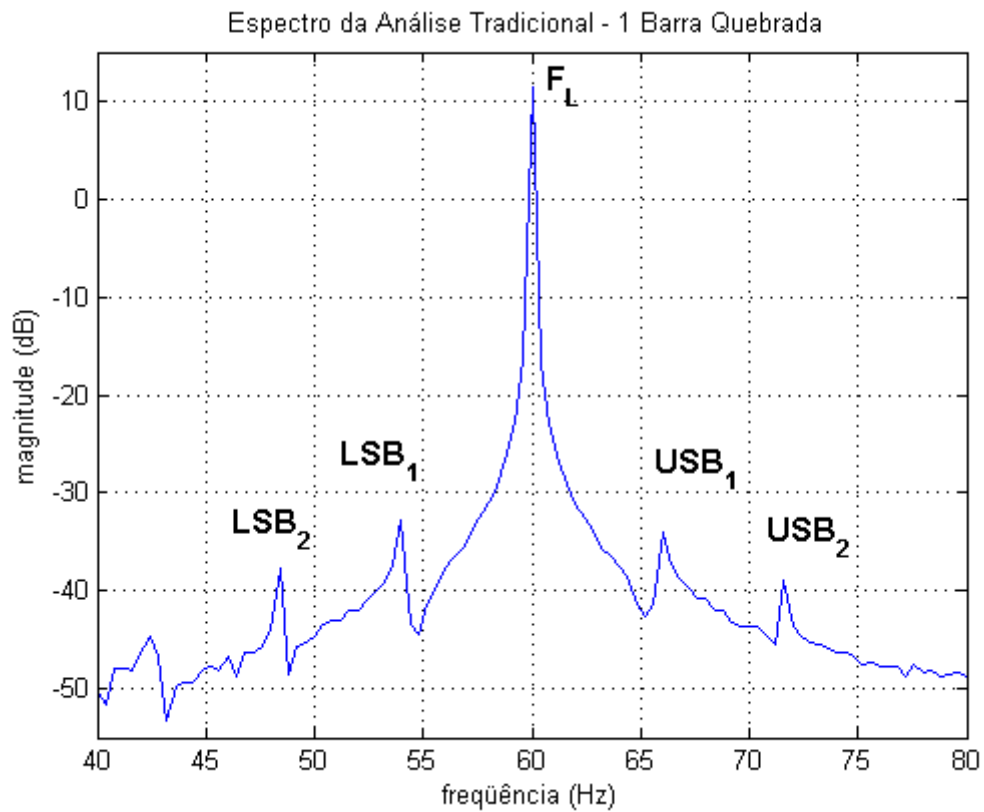


Figura 5.1: Frequências afetadas pela quebra de barras

e sua carga e pelo processo de identificação das frequências afetadas pela quebra de barras.

# Capítulo 6

## Teste de Hipóteses

Este capítulo descreve como utilizar o Teste de Hipóteses para caracterizar falhas estruturais no rotor baseando-se nas estimativas de amplitude das harmônicas da seqüência negativa do rotor induzidas na corrente de fase do motor de indução. Além disso, objetiva fomentar uma noção sobre a relação entre o fenômeno físico (sinal e ruído), a estimativa espectral e o efeito resultante (esperado) nas Hipóteses do Teste que será utilizado para o diagnóstico preditivo das falhas nas barras do rotor de motores de indução.

Na seção 6.2 é definida a variável aleatória do Teste de Hipóteses, a função matemática que a descreve é justificada e a equação de sua *pdf*, apresentada. Na seção 6.3 simulações Monte Carlo são utilizadas para se avaliar a influência dos parâmetros provenientes da análise espectral sobre o perfil da *pdf* das Hipóteses.

### 6.1 Introdução

Se um processo estocástico pode ser realizado sob duas, ou mais, distintas distribuições de probabilidade e existe a necessidade de se decidir sobre qual das distribuições determinadas realizações foram geradas, uma das possíveis abordagens é o Teste de Hipóteses.

Num Teste de Hipóteses, cada uma das distribuições de probabilidade, sob a qual as realizações do processo estocástico possam ser geradas, são denominadas Hipóteses. O processo de decisão sobre qual Hipótese a realização do processo foi gerada é o próprio Teste de Hipóteses. E o mecanismo pelo qual se maximiza a probabilidade de detecção do Teste é fornecido pelo teorema de Neyman-Pearson. Noções básicas sobre o Teste de Hipóteses e o Teorema de Neyman-Pearson podem ser obtidas no apêndice B.

## 6.2 A Variável Aleatória

A severidade da falha das barras de um rotor é determinada pelo grau de diferença entre as propriedades das barras: resistência elétrica, existência e tamanho das fissuras, temperatura, fluxos magnéticos concatenados.<sup>1</sup> Assim, quanto maior a diferença, maior será a amplitude da componente de seqüência negativa na corrente que circula pelas barras do rotor.

Ainda que os parâmetros construtivos do motor não se modifiquem, vários parâmetros operacionais podem influenciar a amplitude da corrente de seqüência negativa no rotor: tensão e freqüência de alimentação, carga mecânica e escorregamento. Pois, a amplitude nas freqüências das Bandas Laterais é proporcional à corrente do estator, que por sua vez, é diretamente dependente da tensão e freqüência de alimentação e da carga mecânica.

Então, objetivando possibilitar uma comparação dos resultados apresentados por essa dissertação com os apresentados pela Análise Tradicional, amplamente conhecidos, a variável aleatória do Teste de Hipóteses, de modo semelhante à variável de diagnóstico da Análise Tradicional, será dada pela Razão das Energias entre a freqüência da Banda Lateral e a freqüência síncrona  $F_L$ .

Ressalta-se que a Banda Lateral é composta não apenas por uma, mas por várias freqüências afetadas pelas falhas nas barras do rotor. Cada freqüência poderia ser processada para o Teste de Hipóteses resultando num teste multivariável, porém, duas são as justificativas para que isso não seja implementado:

- complexidade na determinação dos limites de integração nos cálculos de probabilidade em distribuições multivariáveis contínuas, necessárias para definir o limiar de comparação  $\gamma$ , correspondente à região da Probabilidade de Falsos Alarmes  $P_{FA}$ , do Teste de Hipóteses;
- elevado custo computacional inerente às simulações Monte Carlo, necessárias na obtenção de *pdf* multivariáveis contínuas sobre a qual serão realizados os cálculos de probabilidades.

A simplicidade e o custo computacional são características de suma relevância para algoritmos que se proponham a trabalhar “em tempo real”. E justamente com esse objetivo é que se limita o Teste de Hipóteses a se realizar apenas sobre a freqüência  $LSB_1$ ,

---

<sup>1</sup>Problemas de excentricidade ocorrem quando o eixo de acoplamento da carga mecânica não está corretamente centrado com o rotor e/ou o estator. Este desvio na concentricidade do motor pode causar pequenas diferenças no fluxo concatenado entre as barras do rotor e conseqüente aumento de temperatura.



aquela que detém a maior energia observada pela corrente de seqüência negativa do rotor.<sup>2</sup>

A amplitude resultante do estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , equação 4.8, refere-se a uma única realização da DTFS sobre as  $N$  amostras da corrente do motor. E, por se tratar de uma variável aleatória, várias janelas de amostragem devem ser processadas para que, a partir de suas estimações, possa-se implementar um mecanismo que minimize a variância de uma estimativa final de energia. O teorema de Neyman-Pearson para a realização de um Teste de Hipóteses é capaz de indiretamente realizar este procedimento.

A aplicação do teorema de Neyman-Pearson requer que os parâmetros que definem as Hipóteses sob Teste sejam previamente conhecidos. Entretanto, para o Teste em questão tais parâmetros não estão disponíveis pelos fabricantes de motores e os parâmetros, que por ventura viessem a ser determinados, em um motor padrão, a rigor não poderiam ser usados em motores com diferentes características construtivas. Resumindo, a necessidade e a atual inexistência de ensaios normatizados, para cada grau de severidade da falha, com a qual se determinaria os parâmetros em cada modelo de motor fabricado dificultam a aplicação do Teorema de Neyman-Pearson. Contudo, definindo a Razão das Energias como a variável original do Teste de Hipóteses, o fato que realmente inviabiliza a aplicação do teorema de Neyman-Pearson é o custo computacional decorrente da nova variável aleatória obtida pelo teorema, vide apêndice B, seção B.2.

Uma alternativa é usar o resultado de uma primeira análise espectral realizada em um motor como parâmetro para definição da Hipótese  $H_0$  e fazer do Teste a detecção dos dados (estimativas da razão das energias) que não condigam à essa distribuição de probabilidade obtida com os parâmetros da primeira análise,  $H_0$ . Apesar de não ser possível identificar a existência de pequenas falhas no instante da determinação da Hipótese  $H_0$ , as vantagens desta alternativa são: a “personalização” automática dos parâmetros da Hipótese para cada tipo/modelo de motor e ausência de acréscimo de custo e trabalho para um motor no qual se deseje monitorar as falhas em tempo real.

Do que já foi relatado, conclui-se que a variável aleatória do Teste de Hipóteses  $\xi$  deve ser a Razão das Energias entre a freqüência  $LSB_1$  e a freqüência síncrona (freqüência de linha)  $F_L$ . A energia deve ser estimada a partir do estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , sendo definida como a metade do quadrado da amplitude estimada. Para minimizar a variância das estimativas, a energia das freqüências que compõem  $\xi$  deve ser na verdade a energia média entre

---

<sup>2</sup> $LSB_1$ , conforme capítulo 5, é a primeira freqüência da Banda Lateral Inferior (Lower Side Band), definida pela equação  $LSB_1 = (1 - 2s)f_s$ .

todas as janelas de amostragem. Portanto,  $\xi$  é uma função do processo estocástico  $\zeta_{(m)}$  composto por  $M$  realizações do processo de estimação descrito no capítulo 4. Cada estimativa é proveniente de uma janela de amostragem processada pela DTFS e para evitar qualquer correlação entre as realizações e garantir suas independências estatísticas, não se utiliza a sobreposição entre as janelas. A distribuição de probabilidades de  $\xi$  é do tipo “Doubly Noncentral F (Fisher)” e, de acordo com Walck (2001), é descrita pela equação 6.1:

$$f(\xi) = \frac{n_1}{n_2} e^{-\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)^r \left(\frac{\lambda_2}{2}\right)^s}{r! s!} \frac{\left(\frac{n_1 \xi}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2} + r - 1}}{\left(1 + \frac{n_1 \xi}{n_2}\right)^{\frac{n_1 + n_2}{2} + r + s}} \frac{1}{B\left(\frac{n_1}{2} + r, \frac{n_2}{2} + s\right)} \quad (6.1)$$

sendo:

- $\xi$  a Razão das Energias:  $\sum_{m=1}^{n_1} (A_{LSB_1,m})^2 / \sum_{m=1}^{n_2} (A_{F_L,m})^2 \cdot n_2 / n_1$ ;
- $n_1$  graus de liberdade da frequência  $LSB_1$ ;
- $n_2$  graus de liberdade da frequência síncrona  $F_L$ ;
- $\lambda_1$  o parâmetro de não centralidade da frequência  $LSB_1$ ;
- $\lambda_2$  o parâmetro de não centralidade da frequência  $F_L$ ;
- $B(y, z)$  função Beta com parâmetros  $y$  e  $z$ ;

$$\lambda_1 = \sum_{m=1}^{n_1} \frac{(\bar{A}_{LSB_1,m})^2}{\sigma_{LSB_1,m}^2} \quad \lambda_2 = \sum_{m=1}^{n_2} \frac{(\bar{A}_{F_L,m})^2}{\sigma_{F_L,m}^2}$$

### 6.3 As Hipóteses

A equação 6.1 apresenta a *pdf* da variável aleatória  $\xi$ , porém, devido a sua complexidade, não é possível compreender, a partir da simples análise de seus termos, o perfil da distribuição e a influência de cada parâmetro sobre essa. Para auxiliar o processo de compreensão é necessária a obtenção de gráficos. Assim, a indisponibilidade de um algoritmo que execute tal cálculo exige uma abordagem do tipo simulação Monte Carlo.

De forma simplificada, três são os parâmetros que influenciam a distribuição de probabilidade da variável aleatória  $\xi$ : *RESERE*, a Razão das Energias ( $A_{LSB_1}^2 / A_{F_L}^2$ ) e a quantidade de estimativas de amplitude  $n_1$  e  $n_2$ . O parâmetro *RESERE*, que no contexto desta dissertação estará sempre referenciado à amplitude da  $LSB_1$ , é função da energia do ruído, a Razão das Energias é função da severidade da falha e a quantidade de estimativas de amplitude

afeta o custo computacional e o desempenho do Teste de Hipóteses. Cada distinta configuração desses parâmetros irá resultar numa Hipótese diferente para a variável  $\xi$  do Teste.

Para se avaliar a influência de *RESERE* sobre a distribuição de  $\xi$ , a figura 6.1 apresenta duas Hipóteses baseadas nos seguintes parâmetros: 1 milhão de realizações, Razão das Energias igual a -56.48dB e um total de 10 estimativas de amplitude por realização de  $\xi$ . Na primeira Hipótese (curva em azul), *RESERE* é igual a 125. Na segunda Hipótese (em vermelho), *RESERE* é igual a 500.

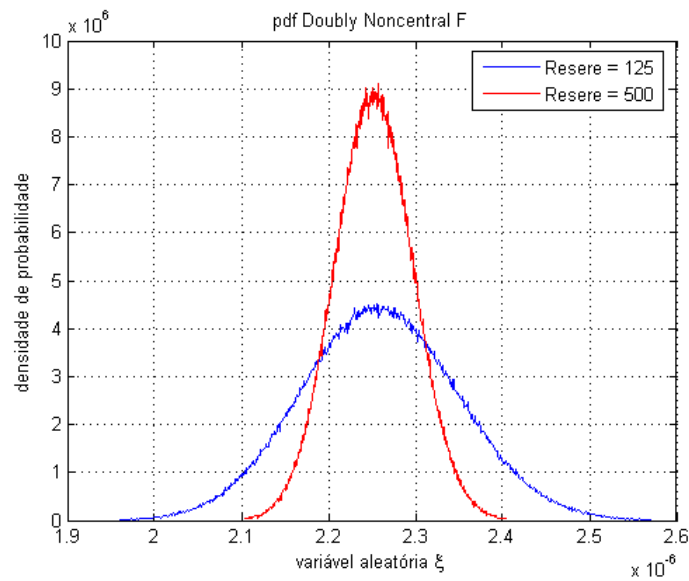


Figura 6.1: Influência de *RESERE* sobre as Hipóteses, definidas pelos parâmetros:  $A_{LSB_1} = 1.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $A_{FL} = 1.0 \cdot 10^0$ ,  $\sigma_{LSB_1}^2 = \sigma_{FL}^2$  e  $n_1 = n_2 = 10$ .

Como se pode observar, o aumento do parâmetro *RESERE* promove a diminuição da variância das Hipóteses.

Para se avaliar a influência da Razão das Energias sobre a distribuição de  $\xi$ , a figura 6.2 apresenta duas Hipóteses baseadas nos seguintes parâmetros: 1 milhão de realizações, *RESERE* é igual a 125 e um total de 10 estimativas de amplitude por realização de  $\xi$ . Na primeira Hipótese (curva em azul), a Razão das Energias é igual a -56.48dB. Na segunda Hipótese (em vermelho), Razão das Energias é igual a -55.65dB.

Como se pode observar, o aumento na Razão das Energias promove o aumento da média e da variância entre as Hipóteses.

Para se avaliar a influência da quantidade de estimativas  $n$  de amplitude sobre a distribuição de  $\xi$ , a figura 6.3 apresenta duas Hipóteses baseadas nos seguintes parâmetros: 1

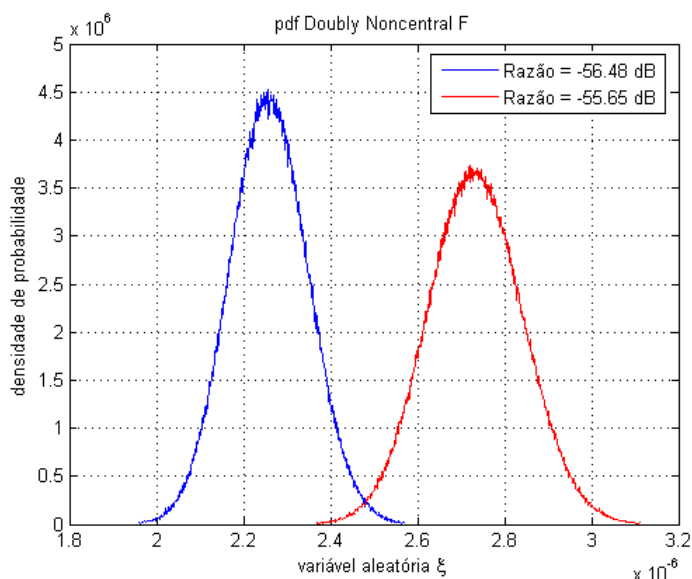


Figura 6.2: Influência da Razão das Energias sobre as Hipóteses, definidas pelos parâmetros:  $A_{FL} = 1.0 \cdot 10^0$ ,  $\sigma_{LSB_1}^2 = \sigma_{FL}^2 = 2.25 \cdot 10^{-9}$  e  $n_1 = n_2 = 10$ .

milhão de realizações, a Razão das Energias é igual a -56.48dB e  $RESERE$  é igual a 125. Na primeira Hipótese (curva em azul), uma quantidade total de 10 estimativas de amplitude por realização de  $\xi$ . Na segunda Hipótese (em vermelho), uma quantidade total de 20 estimativas de amplitude por realização de  $\xi$ .

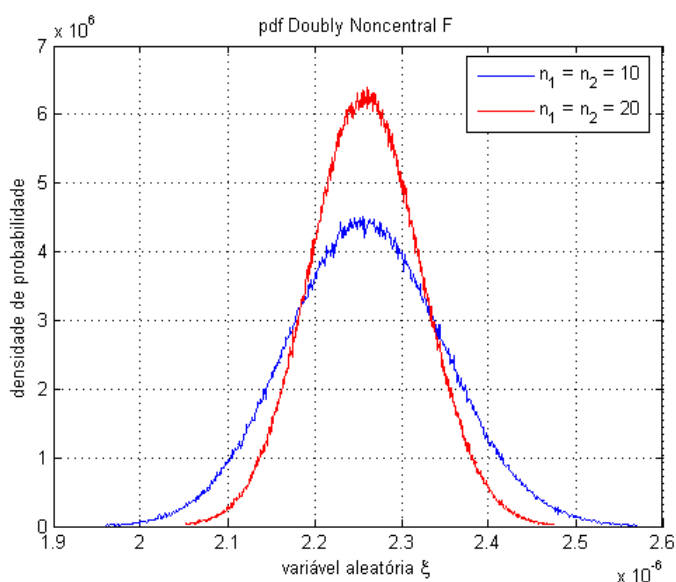


Figura 6.3: Influência da quantidade de estimativas sobre as Hipóteses, definidas pelos parâmetros:  $A_{LSB_1} = 1.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $A_{FL} = 1.0 \cdot 10^0$ ,  $\sigma_{LSB_1}^2 = \sigma_{FL}^2 = 2.25 \cdot 10^{-9}$  e  $n_1 = n_2$ .

Como se pode observar, o aumento na quantidade de estimativas  $n$  promove a dimi-

nuição da variância entre as Hipóteses.

## 6.4 Conclusão

Para minimizar: o custo computacional a variável aleatória na qual o Teste se baseia deve ser a Razão das Energias entre frequência  $LSB_1$  e a  $F_L$ . Como resultado dessa escolha, as Hipóteses do Teste apresentam uma distribuição do tipo “*Doubly Noncentral F (Fisher)*”, definida pela equação 6.1.

Três são os parâmetros da análise espectral que resumem a influência do processo de amostragem e das características do sinal sobre as propriedades estocásticas das Hipóteses: *RESERE*, a quantidade de estimativas de amplitude e a Razão das Energias entre as frequências  $LSB_1$  e  $F_L$ . *RESERE* é uma função da relação entre a energia do ruído aditivo gaussiano branco sobre as componentes de seqüência negativa da corrente do rotor, quanto maior for o ruído, menor será *RESERE*; quanto menor for *RESERE*, maior será a variância da Hipótese. A Razão das Energias é uma função da severidade da falha, quanto maior for a severidade, maior será a Razão; quanto maior for a Razão, maior será a média e menor será a variância da Hipótese. Por fim, quanto maior for a quantidade de estimações de amplitude menor será a variância da Hipótese e maior será o custo computacional.



# Capítulo 7

## Análise Decisória

Este capítulo contextualiza os capítulos 2, 3, 4, 5 e 6 no procedimento da Análise Decisória proposto por essa dissertação para a detecção de falhas estruturais em rotor de motores de indução. Para isso, relaciona e descreve: as dificuldades do processo de diagnóstico, as deficiências dos métodos existentes e as soluções propostas.

### 7.1 Panorama Geral

“Motor Current Signature Analysis” - MCSA - é uma das principais técnicas de manutenção preditiva utilizadas no diagnóstico de quebra de barras do rotor de motores de indução. Vários são os métodos empregados no diagnóstico. A análise Tradicional, como se observa em [Thomson & Gilmore \(2003\)](#), baseia-se no espectro de potência da corrente de fase do motor e numa tabela de referência padrão para a diferença de potência (em dB) entre as frequências de alimentação  $F_L$  e a  $LSB_1$ . Essa referência padrão, utilizada pela *Liberty Technologies Inc.* e reproduzida a partir de [Baccarini \(2005\)](#) na tabela 7.1, é utilizada na análise de qualquer motor de indução. O diagnóstico é obtido sob faixa de valores em vez de limiares mais precisos e apresenta um caráter mais orientativo do que, propriamente, decisivo. Com essa característica três deficiências evidenciam-se: o fato de não serem consideradas as especificidades de cada motor em teste, a relativa baixa precisão da tabela e a inexistência de um tratamento para o efeito do ruído sobre os dados amostrados.

Outros métodos de abordagem utilizam-se de inteligência artificial na análise do espectro da corrente, são alguns deles:

- Redes Neurais Artificiais (Multilayer Perceptron) e Lógica Neblosa, em: [Ayhan \(2005\)](#);
- Support Vector Machine, em: [Pöyhönen \(2004\)](#) e [Niu et al. \(2007\)](#);

Tabela 7.1: Tabela de diagnóstico de falha de rotor pela MCSA da Análise Tradicional.

<i>Diferença de Potência</i> $10 \log_{10} \left( A_{F_L}^2 / A_{LSB_1}^2 \right)$	<i>Avaliação da condição</i>	<i>Ações Recomendadas</i>
>50 dB	excelente	nenhuma
44 a 50 dB	boa	nenhuma
39 a 44 dB	moderada	continuar a inspeção e analisar a tendência
35 a 39 dB	desenvolvendo trinca na barra do rotor ou juntas com alta resistência	reduzir intervalo de inspeção e observar a curva de tendência
30 a 35 dB	provavelmente duas barras trincadas ou quebradas, ou juntas com alta resistência	fazer análise espectral de vibrações para detectar a fonte do problema
25 a 30 dB	muitas barras trincadas ou quebradas, várias trincas nos anéis e falhas severas por toda a gaiola	desmontar o motor para inspeção
< 25 dB	severa	desmontar o rotor para inspeção ou substituí-lo

- *Linear Discriminant Analysis*, em: [Ayhan et al. \(2005b\)](#)
- Classificador Bayesiano de Máxima Verossimilhança, em [Yeh et al. \(2005\)](#);

Esses métodos requerem amostras da corrente de um motor sem e com falha para o treinamento do algoritmo, exigindo assim a destruição de um motor. Além disso, para respeitar as especificidades de cada modelo de motor, as amostras para o treinamento do algoritmo devem ser provenientes de motores com características construtivas semelhantes àqueles que estarão sob teste. Contudo, apesar de um desempenho mais preciso que o método tradicional, em geral, esses métodos não apresentam facilidade para lidar, de modo mais realístico, com o efeito do ruído sobre os dados de treinamento nem sobre os de teste. E, mesmo com desempenho superior, esses métodos apresentam dificuldades na monitoração de progressão de falhas pois, assim como o método tradicional, têm de lidar com regiões discretas de decisão em vez de limiares definidos para variáveis contínuas.

Com o intuito de minimizar tais deficiências, a metodologia proposta nesta dissertação sugere o uso de um estimador de máxima verossimilhança na análise espectral, uma pré-análise para cada modelo de motor e um Teste de Hipóteses para a tomada de decisão. De uma forma simplificada, pode-se dizer que: o estimador de máxima verossimilhança objetiva aumentar a precisão nas estimativas do espectro de frequência, dando mais segurança e precisão no diagnóstico; a pré-análise possibilita a incorporação das especificidades do modelo do motor e o teste de hipóteses inclui a influência do ruído nos



dados da pré-análise e nos dados do motor em teste, além de disponibilizar uma variável contínua para a monitoração da progressão de falhas.

## 7.2 O processo de análise

O processo decisório pode ser dividido em cinco etapas de processamento: amostragem da corrente, decomposição no espectro de frequência, estimação não tendenciosa das amplitudes do espectro, determinação das componentes da Banda Lateral e o Teste de Hipóteses.

A primeira etapa consiste na simples amostragem da corrente de fase do motor. Nessa etapa a única preocupação é o ajuste da frequência de Nyquist que deve ser definida além da Banda Lateral Superior. Como sugestão pode-se trabalhar com uma frequência de amostragem superior a 3.0 vezes a frequência de alimentação do motor.<sup>1</sup> O custo computacional e os requisitos mínimos do hardware que processará o sinal são dependentes da frequência de amostragem.

A segunda etapa consiste na decomposição do sinal amostrado em seu espectro de frequência por meio da *DTFS*. Nessa etapa a principal preocupação é a escolha adequada do tamanho da janela de amostragem. Esta escolha definirá a resolução do espectro. Quanto maior o tamanho da janela, maior o tempo requerido no processo de diagnóstico.

A terceira etapa utiliza o estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$  (equação 4.8) para conformar as propriedades estocásticas do espectro da *DTFS*. É essa a etapa responsável pelo aumento da precisão e segurança do método proposto e que possibilita:

- o adequado tratamento do ruído;
- o embasamento da decisão sobre uma variável contínua; e
- a utilização de limiares mais precisos para a variável contínua do diagnóstico.

A quarta etapa, compara as frequências estimadas na terceira e determina quais delas compõem a Banda Lateral, conforme equação 5.1. Assim, esta etapa é responsável pela identificação do escorregamento e pela autonomia da metodologia proposta nesta dissertação.

---

<sup>1</sup>Considerando-se a possibilidade de um escorregamento máximo, em um motor de pequeno porte, próximo a 10% ( $s = 0.1$ ) e a intenção de se analisar pelo menos duas frequências da Banda Lateral Superior ( $k = +2$ ), a frequência máxima a ser analisada no espectro será:  $F_{max} = (1 + 2ks)F_L = 1.4F_L$ . Portanto,  $F_s$  deve ser superior ao dobro de  $F_{max}$ , ou seja,  $F_s > 2.8F_L$ .

A quinta etapa requer o processamento de várias janelas de amostragem pelas etapas anteriores. A quantidade de janelas dependerá do desempenho requerido no Teste de Hipóteses e do nível do ruído no sinal. Os resultados de todas as janelas de amostragem são processados em conjunto e o Teste de Hipóteses decide pela presença ou ausência de falha. É nessa etapa que ocorre a sintetização de uma variável contínua para o diagnóstico e monitoração da progressão de falhas.

## 7.3 Características do Processo de Diagnóstico

A decisão pela existência ou não de falhas no rotor de um motor de indução pode realizar-se com análise da sua corrente de fase. Esta corrente tem uma componente na frequência de alimentação e várias outras (que, em conjunto, são chamadas de Banda Lateral) em frequências dependentes da velocidade de rotação do motor, ou seja, dependentes da tensão e frequência de alimentação e da carga mecânica. Uma primeira dificuldade na análise da Banda Lateral é que a energia de suas frequências é muito baixa comparada à da alimentação do motor, o que poderá ser observado nas amostras dos gráficos da análise tradicional apresentadas no capítulo 8, tornando sua análise espectral muito sensível a ruídos. Além disso, na possibilidade de pequenas alterações na carga ou na alimentação, pequenas alterações na velocidade do motor irão ocorrer, fazendo com que as frequências exatas<sup>2</sup> da Banda Lateral não possam ser determinadas previamente.

### 7.3.1 Tratamento do Ruído

O método mais simples e eficaz na estimação de sinais corrompidos por ruído aditivo gaussiano branco estacionário no sentido estrito é a promediação. A promediação, obtida com a média aritmética das realizações de um processo estocástico gaussiano branco, pode ser demonstrada como a estimativa não tendenciosa de menor variância possível, conforme Kay (1993a). Para sinais discretos no domínio do tempo, cada janela de amostragem é uma realização do processo estocástico. A promediação, calculada independentemente para cada instante (amostras do sinal em uma realização), é obtida pela média desse mesmo instante entre todas as diferentes realizações. Mas, existe uma exigência: a parte determinística de uma janela de amostragem deve ser idêntica à de todas as outras envolvidas na promediação. Assim, cada frequência contida na parte determinística do sinal corrompido deve apresentar o mesmo ângulo de fase em todas as janelas de amostra-

---

<sup>2</sup>O nível de exatidão referido é uma margem de tolerância na qual, em uma tentativa de se estabelecer uma frequência de amostragem e se determinar a quantidade mínima de amostras a uma janela que propicie uma característica *FHRE*, os erros de estimação da amplitude dos sinais, devido ao efeito de espelhamento da energia, não superem o valor de 1%.

gem, caracterizando-o como um sinal de amostragem múltipla com característica *JFFS*. Com isso, na análise de falha nas barras do rotor de um motor de indução, tal técnica de estimação não pode ser implementada por dois motivos:

- as frequências exatas da Banda Lateral podem ser desconhecidas, tornando quase impossível a persistência do ângulo de fase entre duas ou mais janelas de amostragem;
- ainda que todas as frequências determinísticas fossem conhecidas, a relação de valor entre essas e a frequência de amostragem poderia ser tal que o comprimento (em número inteiro de amostras) da janela de amostragem, para atender à exigência de persistência no ângulo de fase, elevaria excessivamente o custo computacional.<sup>3</sup>

Com as dificuldades do uso da promediação no domínio do tempo uma alternativa seria a promediação no domínio da frequência. Essa promediação seria possível, pois as componentes do espectro discreto de um sinal corrompido por ruído aditivo branco, quando processado pela *DTFS*, são variáveis aleatórias gaussianas brancas. Nesta situação cada realização seria uma janela do espectro de frequência e cada amostra, uma frequência discreta. Todavia, só seria possível para sinais de amostragem múltipla com característica *JFFS*. E essa é a mesma exigência requerida no domínio do tempo. Portanto, também não se aplica para as amostras da corrente de fase de um motor de indução.

Diante da impossibilidade do uso da promediação sobre a corrente de fase do motor de indução, uma alternativa razoável está na utilização do  $\hat{\Theta}_{FDC}$  (equação 4.8). Após a decomposição de cada janela de amostragem da corrente em seu espectro de frequência discreto e a estimação das amplitudes observadas, as estimativas de todas as janelas poderiam ser promediadas sem que fosse necessário atender a qualquer exigência no domínio do tempo, se não aquelas necessárias à correta amostragem de qualquer tipo de sinal.<sup>4</sup>

### 7.3.2 Parâmetros de Desempenho e suas Relações de Compromisso

O processo decisório inicia-se com a definição do tamanho da janela de amostragem, ou seja, a quantidade  $N$  de amostras processadas a cada batelada da *DTFS*. Para isso, é necessário conhecer o escorregamento mínimo  $s_{min}$  no qual o motor estará sujeito quando

<sup>3</sup>Um sinal composto por duas frequências, 60.0Hz e 58.8Hz, quando amostrado por uma frequência de 122.4Hz exige um comprimento de janela de  $N = 102$  amostras para manter a persistência do ângulo de fase entre diferentes janelas de amostragem, mas quando amostrado por uma frequência de 144.65454...Hz exige um comprimento de janela de  $N = 1326$  amostras, que é proporcionalmente muito superior à 102.

<sup>4</sup>A maior frequência no sinal amostrado deve ser inferior à frequência de Nyquist (ou seja, inferior à metade da Taxa de Nyquist, ou Taxa de Amostragem).

em regime permanente. Conhecendo-se tal valor, a resolução  $\delta_f$  do espectro de frequência discreto pode ser estipulada pela expressão  $\delta_f \leq 2s_{min}F_L$ . Logo, tendo definido  $\delta_f$ , a quantidade de amostras  $N$  pode ser definida conforme equação  $N = \lceil F_s/\delta_f \rceil$ .<sup>5</sup> Com isso evita-se que a (maior parte da) energia das frequências  $LSB_1$  e  $USB_1$  sejam alocadas na ordem espectral correspondente à  $F_L$ , devido à discretização do espectro. Caso isso ocorra o desempenho do Teste poderá estar comprometido.

Definido o tamanho da janela de amostragem, dá-se início à análise espectral da corrente de fase. A amostragem da corrente deve ocorrer apenas sob regime permanente e a decomposição do espectro de frequências deve ocorrer sem sobreposição de amostras entre diferentes janelas. A inexistência de sobreposição das janelas de amostragem sobre as amostras da corrente objetiva compatibilizar a variável aleatória do Teste de Hipóteses a uma distribuição de probabilidade conhecida (*Doubly Noncentral F*). A necessidade do motor estar em regime permanente se deve a dois motivos. O primeiro é pela impossibilidade de se conhecer previamente sua velocidade de rotação com exatidão. Por conseqüência, não se pode determinar com precisão as amplitudes da Banda Lateral pela simples decomposição espectral com a *DTFS*. O segundo motivo ocorre quando o motor muda o ponto de operação, pois considerando que a variância do ruído permaneça constante, na medida que a corrente vai sendo amostrada dentro de uma janela de amostragem sua amplitude irá variar. Com isso, tanto a estimativa da amplitude, quanto a variável do Teste de Hipótese estarão imprecisas.<sup>6</sup>

A cada janela processada pela *DTFS*, o espectro resultante é analisado com o auxílio do estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$ . As frequências na qual foram identificados possíveis sinais determinísticos são confrontadas com o perfil multi-frequencial característico da diferença dos parâmetros entre as barras do rotor, descrito pela equação 5.1. Apenas aquelas frequências que, em conjunto, refletem tal característica são selecionadas. Dessa forma, a frequência  $LSB_1$  pode ser encontrada, mesmo que se desconheça o valor exato do escorregamento. Essa etapa, designada como filtragem heurística, propicia uma característica autônoma ao método proposto.

A quantidade de janelas de amostragem processadas para a realização do Teste de Hipóteses é definida pela relação de compromisso entre desempenho do Teste e o custo

<sup>5</sup>O operador "ceil" ( $\lceil \cdot \rceil$ ) retorna o menor número inteiro cujo valor seja maior ou igual à expressão contida entre seus símbolos.

<sup>6</sup>Os Teste realizados para o capítulo 8 indicam que se o conjugado da carga variar a Razão das Energias também irá. O que reforça a necessidade do motor estar em regime permanente de operação durante o Teste.

computacional. Quanto maior a quantidade de janelas menor a variância das Hipóteses e, conseqüentemente, maior a Probabilidade de Detecção da Hipótese Alternativa para um valor pré-determinado de Probabilidade de Falsos Alarmes. Em outras palavras, quanto maior a quantidade de janelas de amostragem, maior a segurança conferida ao processo decisório e à monitoração da progressão de falhas. Entretanto, o processo de cálculo das probabilidades e do limiar do Teste é encontrado através de simulações do tipo Monte Carlo. Logo, quanto maior a quantidade de janelas, maior será o custo computacional das simulações Monte Carlo e da decomposição de todas as janelas pela *DTFS*.

Ressalta-se que o desempenho das simulações Monte Carlo não depende da energia das freqüências do Teste, do ruído nem da quantidade de amostras  $N$  em uma janela de amostragem. Depende apenas da quantidade  $M$  de janelas processadas e dos valores pré-definidos para a Probabilidade de Falsos Alarmes<sup>7</sup>  $P_{FA_0}$  da Hipótese  $H_0$  e Probabilidade de Perdas<sup>8</sup>  $P_{M_1}$  da Hipótese  $H_1$ , que determinam o desempenho do Teste.

## 7.4 As Hipóteses

O Teste de Hipóteses só poderá ser utilizado no processo decisório se os parâmetros da Hipótese Nula forem definidos. Esta definição ocorre em um primeiro teste, denominado *Pré-análise*, no qual são levantados os parâmetros da Hipótese do estado em que o motor se encontra. A Hipótese observada em uma Pré-análise será também chamada de *Hipótese de Referência*, pois, a partir de sua comparação com outras hipóteses se infere a progressão de falhas no motor. Essa possibilidade de inferência existe mesmo não havendo uma Hipótese previamente definida para o motor em boas condições, fato que se deve à incorporação das características construtivas de cada motor pela Hipótese de Referência. Com isso, ela pode ser usada na análise de progressão de falhas de motores em qualquer estado de conservação, independentemente da existência ou não de análises em motores de modelos semelhantes.

Com a definição da Hipótese Nula e a imposição de uma Probabilidade de Falsos Alarmes, o processo decisório consiste em dizer quando as amostras da corrente do motor, em testes subseqüentes, não correspondem à distribuição observada na Hipótese Nula. Desta

---

<sup>7</sup>A Probabilidade de Falsos Alarmes Positivos  $P_{FA}$  é a referência para a decisão do Teste de Hipóteses, obtido a partir das amostras da Hipótese Nula. Se a variável aleatória do teste apresentar uma realização inferior ao limiar determinado pela  $P_{FA}$ , a Hipótese Nula é aceita como aquela que gerou os dados.

<sup>8</sup>A Probabilidade de Perdas (do inglês *Probability of Miss*) é uma referência para o desempenho do Teste de Hipóteses, obtido a partir da Hipótese Alternativa. Se a variável aleatória do teste apresentar uma realização superior ao limiar determinado pela  $P_M$ , a Hipótese Alternativa é aceita como aquela que gerou os dados.

forma, os parâmetros levantados nesta primeira avaliação incorporam ao Teste o efeito conjunto de todos os parâmetros construtivos do (modelo do) motor e as especificidades do conjunto motor-carga mecânica.

Em análises posteriores, uma nova hipótese é estimada para o motor sob teste. O diagnóstico do Teste é realizado comparando a distribuição de probabilidade das amostras sob teste com a distribuição de probabilidade das amostras de referência. Nessa comparação, dois limiares são utilizados;  $\gamma_{FA0}$  e  $\gamma_{M1}$ . O limiar  $\gamma_{FA0}$  é o valor da variável aleatória  $\xi$  (do Teste de Hipóteses) definida pela Probabilidade de Falsos Alarmes  $P_{FA0}$  da Hipótese de Referência conforme expressão  $P(\xi > \gamma_{FA0}; H_0) = P_{FA0}$ . O limiar  $\gamma_{M1}$  é o valor de  $\xi$  definida pela Probabilidade de Perdas  $P_{M1}$  da Hipótese sob teste conforme expressão  $P(\xi < \gamma_{M1}; H_1) = P_{M1}$ . Se  $\gamma_{FA0} < \gamma_{M1}$ , para efeito de diagnóstico, aceita-se que as amostras sob análise não condizem com a Hipótese de Referência e, portanto, o motor apresenta-se fora das condições da Pré-análise.

Esse procedimento de diagnóstico não é, por si só, capaz de determinar qualitativamente o grau de severidade da falha, ainda que o mensure quantitativamente. Em uma primeira avaliação, poderia-se entender a ruptura de uma barra como o primeiro grau de severidade, a de duas barras como o segundo grau e assim por diante. Entretanto, essa avaliação não reflete as reais possibilidades. A quebra de uma barra pode se dar de modo completo, com o seccionamento total da barra, ou de modo parcial, com fissuras que não abrangem toda a área da seção transversal da barra, além disso, ainda sob a quebra parcial, pode haver mais de uma fissura pela barra. E essa é uma das principais razões “não técnicas” de impedimento para um diagnóstico qualitativo e requer uma normatização de termos ou, pelo menos, uma definição padronizada sobre os graus de severidade.

Assim como os métodos baseados em Inteligência Artificial, a identificação de qualquer grau de severidade para um modelo de motor requer, pelo método proposto, amostras da corrente de um motor com tal falha. Contudo, diferentemente da abordagem desses outros métodos, o método proposto não requer amostra nenhuma para identificar condições de anormalidade em motores que já passaram por uma Pré-análise ou naqueles que uma unidade do mesmo modelo já tenha passado pela Pré-análise. Nesses casos, a monitoração da curva de tendência ou da progressão da falha pode ser realizada mensurando a diferença entre a média da Hipótese obtida a cada novo teste e a média da Hipótese de Referência. Quanto maior esta diferença maior será a severidade da falha. Outro aspecto relevante é que o limiar para vários graus de severidade poderia ser definido (aproxima-

damente) com a simples aplicação de simuladores<sup>9</sup>. Já nos outros métodos, este recurso é limitado pois a definição das “classes” de severidade estaria atrelada ao nível de ruído utilizado nas simulações, de forma que níveis de ruído superiores poderiam reduzir o desempenho do diagnóstico.

A decisão pela falha ou sua progressão é baseada na distância entre a média  $\rho_0$  da distribuição de probabilidade da Hipótese de Referência e a média  $\rho_1$  da distribuição de Probabilidades da Hipótese sob teste. Entretanto, a condição  $\gamma_{FA0} < \gamma_{M1}$  deve ser satisfeita para se respeitar o desempenho predefinido para o Teste de Hipóteses.

O método proposto pode ser aplicado a qualquer motor, esteja ele inicialmente em perfeito estado de conservação ou com falha. Na ausência de uma Pré-análise em outros motores do mesmo modelo, não se pode, pela simples comparação dos resultados dos teste em motores considerados bons, estipular uma referência padronizada para o perfeito estado desse modelo. Ainda assim, a monitoração da progressão de falha tem pleno desempenho, tendo como referência a condição que o motor se encontrava em sua Pré-análise.

---

<sup>9</sup> Cunha (2006), Baccharini (2005) e Yeh *et al.* (2005) abordam simuladores de motores de indução capazes de incluir os efeitos de falhas nas barras do rotor.





# Capítulo 8

## Testes e Resultados

Este capítulo dedica-se à apresentação de um resumo dos resultados e conclusões referentes aos testes efetuados com dois objetivos iniciais: verificar a eficiência da metodologia proposta e explorar a influência de diversos distúrbios sobre o resultado dos testes.

Todos os testes apresentados foram realizados com dados provenientes de simulações. O simulador e as características das simulações usadas nos testes são apresentados na seção 8.1. Nela também consta a descrição do procedimento utilizado para a realização dos testes.

Na seção 8.2 é apresentada, graficamente, a diferença entre os parâmetros de diagnósticos de cada metodologia. Nos testes apresentados, ambas as metodologias mostraram-se eficientes mesmo sob a presença de distúrbios sobre as condições de operação nominal do motor.

A eficiência da metodologia proposta é confrontada com a referência da Análise Tradicional em testes no qual o motor opera em condições próximas às nominais (como ocorre na grande maioria das publicações sobre o tema), mostrando uma maior riqueza de detalhes para o diagnóstico. Além disso, vários distúrbios são simulados nos testes revelando características pouco exploradas e que podem influenciar nas condições de validade do diagnóstico de tais testes, sobre ambos os métodos.

Cabe ressaltar que essas simulações, e respectivos testes, não têm o objetivo de esgotar as possibilidades de análise sobre o tema, mas apenas de explorar, inicialmente, a eficiência da metodologia proposta e suas possibilidades.

## 8.1 Procedimentos do Teste de Hipóteses

Os testes de diagnóstico de falha em rotor de motores de indução foram elaborados sobre o resultado de 310 simulações de cinco modelos de motores de indução (62 simulações por modelo) obtidos com o simulador desenvolvido em [Baccarini \(2005\)](#). Tal simulador, sob taxa de amostragem definida pelo usuário, gera amostras (ausentes de ruídos) das tensões e correntes de fase, conjugado e velocidade de rotação de motores de indução trifásicos, sob diversas condições de operação: condições nominais, subtensões e sobretensões de alimentação, subcargas e sobrecargas mecânicas, desequilíbrio das tensões e ângulos de fase da alimentação, falhas mecânicas (referentes à excentricidade do rotor), curto-circuitos entre espiras de uma fase e barras do rotor quebradas.

Cada modelo foi simulado sob condições que podem incluir: até 3 barras quebradas, diferentes níveis de carga mecânica acionada, desequilíbrio de tensão, falhas mecânicas (excentricidade), curto circuito entre espiras de uma mesma fase, tensões de alimentação diferentes da nominal ou um conjunto de algumas dessas condições.

Todas as simulações foram obtidas com uma taxa de amostragem de 2.0k Hz, por um período de 120 segundos. Pelo fato do simulador iniciar a amostragem desde a partida do motor, algumas amostras tiveram que ser excluídas para que somente a corrente sob regime de operação permanente fosse analisada.

Para os testes, a cada simulação foi adicionado ruído gaussiano branco em diferentes níveis de energia e analisadas uma das três fases do motor. No total, foram analisados 782 testes.

O processo de teste ocorreu conforme descrição a seguir:

1. seleção da fase cuja corrente será analisada;
2. inserção de ruído nos dados das simulações;
3. exclusão das amostras obtidas sob regime transitório de operação (partida);
4. inserção da faixa de escorregamento próxima ao ponto de operação na qual o motor está condicionado pelas suas características construtivas e carga mecânica acionada, sob regime permanente;
5. cálculo da quantidade de amostras  $N$  necessárias à composição das janelas de amostragem;

6. análise espectral das amostras de cada janela pela *DTFS* e pelo estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$  (equação 4.8);
7. filtragem heurística das frequências, dentro da faixa determinada pelo escorregamento do motor, que em conjunto atendem à equação 5.1;
8. seleção da  $LSB_1$  dentre as frequências filtradas e cálculo do escorregamento do motor;
9. cálculo dos parâmetros da Hipótese sob análise, avaliados sob os resultados da análise espectral e filtragem heurística de todas as janelas de amostragem;
10. simulação Monte Carlo da Hipótese sob teste;
11. cálculo dos limiares  $\gamma_M$  e  $\gamma_{FA}$ , definidos pelas expressões  $P_{(\xi < \gamma_M)} = P_M = 0.5\%$  e  $P_{(\xi > \gamma_{FA})} = P_{FA} = 0.5\%$ ; <sup>1</sup>
12. exibição do gráfico da Hipótese com: a distribuição de probabilidades da Hipótese, o valor da realização da variável aleatória do Teste  $\xi$  (Razão das Energias entre a frequência  $LSB_1$  e a frequência síncrona  $F_L$ ) e os limiares  $\gamma_M$  e  $\gamma_{FA}$ ;
13. comparação entre os limiares da Hipótese sob análise e os de uma Hipótese de referência (previamente processada pelos itens 1 a 12) para elaboração de um diagnóstico.

A título de comparação entre a metodologia Tradicional e a proposta, etapas complementares foram implementadas nos testes:

1. análise espectral usada no diagnóstico pelo Teste Tradicional (*DTFS* de uma única janela contendo todas as amostras da corrente em regime permanente);
2. exclusão da frequência de alimentação do motor  $F_L$ , com o auxílio do estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , no espectro do Teste Tradicional;
3. exibição de um gráfico contendo: o espectro da Análise Tradicional, o espectro na qual fora excluída a frequência de alimentação do motor e as estimativas de amplitude (de cada janela) das frequências da Banda Lateral filtradas pela heurística.

A tabela 8.1 apresenta os parâmetros de simulação dos cinco modelos de motor trabalhados: S01, S02, S03, S04 e S05.

<sup>1</sup>O valor de 0.5% para  $P_M$  e  $P_{FA}$  foi escolhido de forma arbitrária objetivando um desempenho razoável para o Teste de Hipóteses. Este valores indicam que a cada 1000 realizações, aproximadamente 50 deverão estar fora dos limites de confiança de cada Hipótese.

Tabela 8.1: Parâmetros dos Modelos de Motores Simulados

Parâmetro	Unidade	S01	S02	S03	S04	S05
potência	$HP$	1.5	2	50	2250	500
tensão de linha	$V(ca)$	220	220	460	2800	2800
resistência do estator	$\Omega$	2.79	3.85	0.261	0.087	0.786
resistência do rotor	$\Omega$	4.66	3.77	0.684	0.066	0.561
indutância do estator	$H$	9.0m	8.53m	2.4m	1.8m	9.6m
indutância do rotor	$H$	9.0m	12.7m	2.4m	1.8m	9.6m
indutância mútua	$H$	166m	237m	104m	104m	430m
pólos	adim.	4	4	4	4	4
total de barras no rotor	adim.	32	32	32	96	58
conjugado nominal	$Nm$	7	8	50	2250	500
momento de inércia	$Nms^2/rad$	6.73m	6.73m	6.73m	63	11
coeficiente de atrito	$Nms/rad$	668 $\mu$	668 $\mu$	4.0m	0.6	0.13

## 8.2 Teste de Hipóteses na Detecção de Falhas

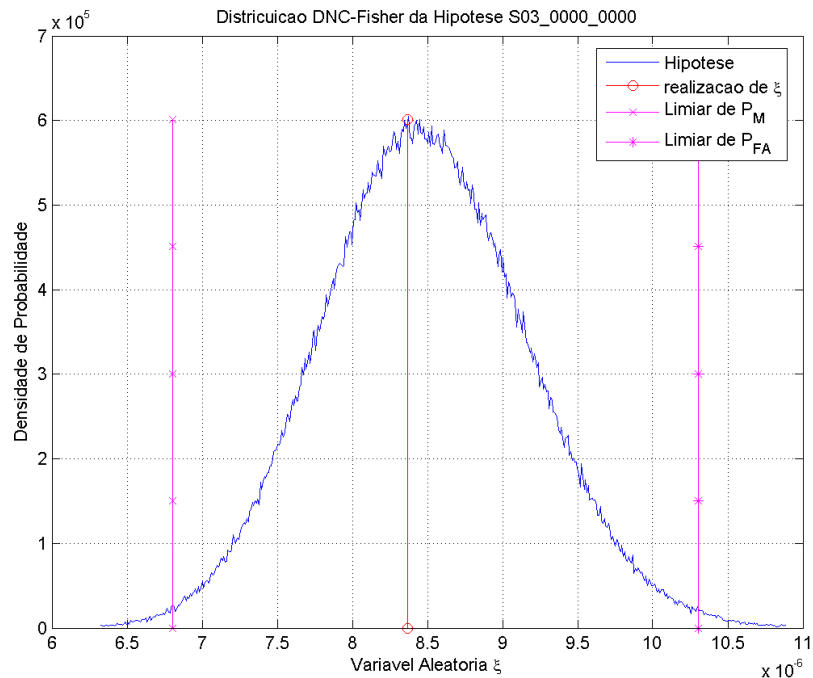
### 8.2.1 Uma Comparação Entre a Análise Tradicional e a Metodologia Proposta

Na análise dos resultados pela metodologia proposta devem ser observados prioritariamente dois parâmetros: a diferença entre os limiares  $\gamma_M$  e  $\gamma_{FA}$  e a Razão das Energias entre as frequências  $LSB_1$  e  $F_L$ . De forma indireta, a diferença entre os limiares da Probabilidade de Perdas  $P_M$  e da Probabilidade de Falsos Alarmes  $P_{FA}$  de uma Hipótese, ou seja  $\gamma_{FA} - \gamma_M$ , fornece uma idéia de sua variância, assim como a realização da Razão das Energias  $\xi$  fornece uma idéia da média dessa Hipótese. Esses parâmetros são suficientes para transformar a análise gráfica da distribuição de probabilidades das Hipóteses em análise numérica, simplificando o diagnóstico do Teste de Hipóteses e possibilitando uma representação na forma de tabelas.

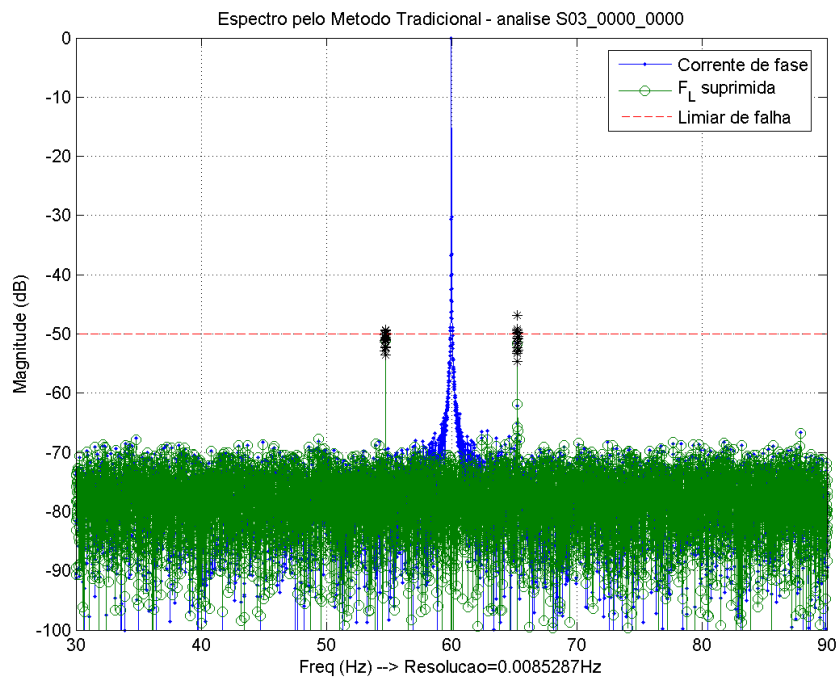
Na Análise Tradicional, o parâmetro de diagnóstico é dado pela diferença da energia entre  $F_L$  e  $LSB_1$ , determinado pela expressão  $10 \log_{10}(A_{F_L}^2/A_{LSB_1}^2)$ . Esse parâmetro difere da Razão das Energias do Teste de Hipóteses  $\xi$  não apenas pela expressão do logaritmo do inverso da Razão das Energias, mas também pelo fato de tais energias serem estimadas através de métodos diferentes.

As figuras 8.1, 8.2 e 8.3, apresentam o resultado da análise, pelo Teste de Hipóteses e pela Análise Tradicional, do motor S03, operando com tensões nominais (e sem desequilíbrio de fases), com carga e escorregamento nominais, sem curto-circuito nem falha

mecânica (excentricidades). Essa é, geralmente, a condição exclusiva na qual a maioria dos autores têm publicado seus resultados.

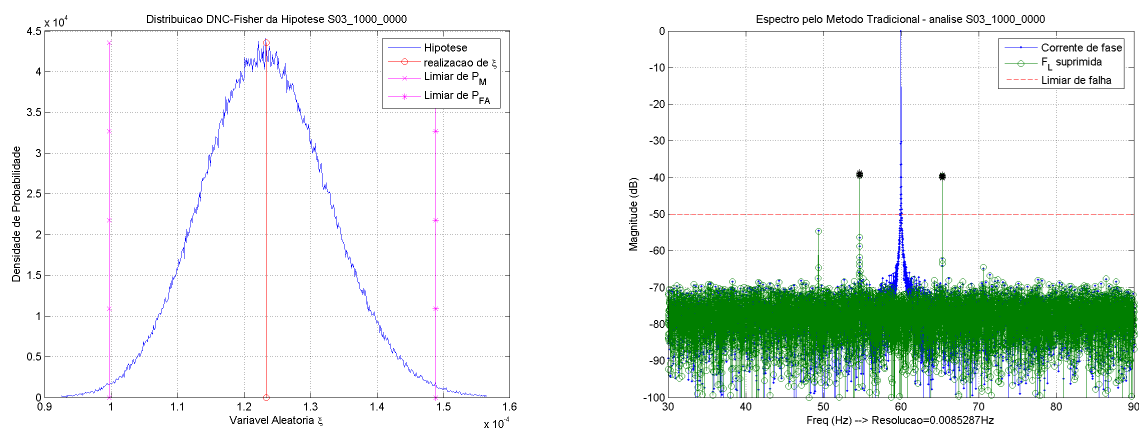


(a) Hipótese sem barra quebrada:  $\xi = 8.37 \cdot 10^{-6}$ ,  $\gamma_M = 6.81 \cdot 10^{-6}$  e  $\gamma_{FA} = 10.3 \cdot 10^{-6}$ .



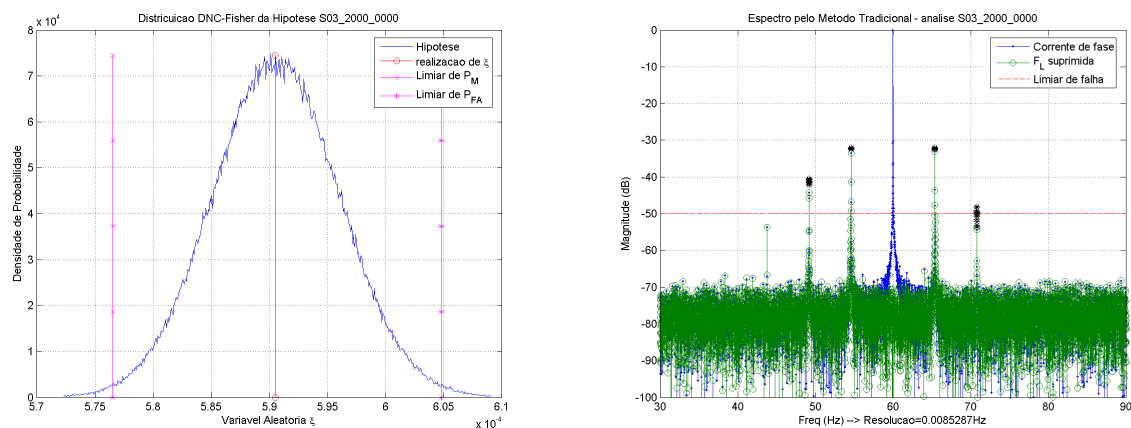
(b) Análise Tradicional sem barra quebrada.

Figura 8.1: Teste de Hipóteses e Análise Tradicional do motor S03 sem barra quebrada.



(a) Hipótese com uma barra quebrada:  $\xi = 1.23 \cdot 10^{-4}$ ,  $\gamma_M = 0.997 \cdot 10^{-4}$  e  $\gamma_{FA} = 1.49 \cdot 10^{-4}$ . (b) Análise Tradicional com uma barra quebrada.

Figura 8.2: Teste de Hipóteses e Análise Tradicional do motor S03 com uma barra quebrada.



(a) Hipótese com duas barras quebradas:  $\xi = 5.91 \cdot 10^{-4}$ ,  $\gamma_M = 5.77 \cdot 10^{-4}$  e  $\gamma_{FA} = 6.05 \cdot 10^{-4}$ . (b) Análise Tradicional com duas barras quebradas.

Figura 8.3: Teste de Hipóteses e Análise Tradicional do motor S03 com duas barras quebradas.

A figura 8.1 resulta do teste com o rotor sem barra quebrada. A figura 8.2, do teste com uma barra quebrada. E a figura 8.3, do teste com duas barras quebradas. As figuras 8.1(a), 8.2(a) e 8.3(a) tratam-se do Teste de Hipóteses, enquanto as figuras 8.1(b), 8.2(b) e 8.3(b), da Análise Tradicional.

Na Análise Tradicional vê-se o espectro da frequência obtido pela *DTFS* de uma única janela com todas as amostras da corrente da fase A em azul. Em verde, vê-se o resultado da exclusão da frequência síncrona  $F_L$  (aquela de maior amplitude no espectro) pelo

estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , (equação 4.8). Nesse gráfico os picos localizados ao redor de  $F_L$  são as frequências da Banda Lateral. O primeiro pico à esquerda de  $F_L$  é a  $LSB_1$ , e a diferença da energia (em dB) entre essas frequências é o parâmetro de diagnóstico da Análise Tradicional. Para facilitar o processo de análise, os módulos do espectro estão normalizados pelo módulo de  $F_L$ . Os pontos pretos são as estimativas das amplitudes da Banda Lateral das várias janelas processadas pelo Teste de Hipótese. Obviamente, pelo fato dos métodos apresentarem abordagens diferentes, suas estimativas podem ser diferentes.

No Teste de Hipóteses vê-se a *pdf* em azul, o valor da realização da Razão das Energias  $\check{\xi}$  em vermelho. No lado esquerdo da *pdf* encontra-se o limiar  $\gamma_M$  e no lado direito, o limiar  $\gamma_{FA}$ .

Na figura 8.1(b), motor sem barra quebrada, a diferença de energia entre  $F_L$  e  $LSB_1$  é de 50.9 dB. De acordo com a tabela 7.1 tal valor indica uma excelente condição. Na figura 8.2(b), motor com uma barra quebrada, tal diferença de energia é de 39.6 dB, o que reflete uma condição moderada. Esse resultado não traduz a real situação, mas a diferença entre os dois resultados da variável de diagnóstico, 11.3 dB, indica perfeitamente uma alteração no rotor. Uma inspeção da tabela de referência 7.1, sugere que a cada 5 dB, entre diferentes realizações da variável de diagnóstico, possa se aceitar uma alteração na estrutura do rotor. Desta forma o nível de 5 dB funciona como uma margem de segurança para o diagnóstico. Na figura 8.3(b), motor com duas barras quebradas, a diferença de energia é de 34.0 dB, o que já indica a possível existência de duas barras quebradas.

Na figura 8.1(a), motor sem barra quebrada, a realização da variável aleatória do Teste de Hipóteses  $\check{\xi}$  é  $8.37 \cdot 10^{-6}$ . A título de compreensão do significado quantitativo da variável de diagnóstico do Teste de Hipóteses, uma comparação direta, com valores aproximados, entre as realizações dessa e da variável de diagnóstico da Análise Tradicional pode ser estabelecida pela expressão: “ $-10 \log_{10}(\check{\xi})$ ”.<sup>2</sup> Com esta expressão, a realização da variável aleatória do Teste de Hipóteses  $\check{\xi} = 8.37 \cdot 10^{-6}$  compara-se a uma diferença de 50.8 dB entre as energias de  $F_L$  e  $LSB_1$ . Esta comparação pode ser utilizada para um primeiro “diagnóstico” da condição de qualquer motor, com base na tabela de referência 7.1. Nessa mesma figura, vê-se os limiares  $\gamma_{M0} = 6.81 \cdot 10^{-6}$  e  $\gamma_{FA0} = 10.3 \cdot 10^{-6}$ . Ambos dão uma idéia clara da influência do ruído. Usando a expressão de comparação das variáveis

<sup>2</sup>Essa expressão não pode ser referenciada como uma equação de equivalência entre as variáveis de diagnósticos dos dois testes. De fato, nem mesmo para sinais puramente determinísticos essa expressão poderia definir uma igualdade entre tais variáveis. Dois, são os motivos para isso: o efeito de Espalhamento de Energia presente na variável de diagnóstico da Análise Tradicional e minimizado na do Teste de Hipóteses e a diferença entre os métodos de estimação. Portanto, esta é uma expressão de aproximação na qual a diferença entre as estimativas de razão das energias se torna melhor na medida que *RESERE* diminui.

$-10 \log_{10}(\xi)$ , os limiares indicam que a cada 1000 realizações, aproximadamente 50 resultarão numa diferença superior a 51.67 dB e outras 50, numa diferença inferior a 49.87 dB. É essa percepção da influência do ruído sobre a realização da variável de diagnóstico que não pode ser observada pela Análise Tradicional, nem ser quantificada por métodos de inteligência artificial (*MLP, SVM*).

Na figura 8.2(a), motor com uma barra quebrada,  $\xi$  é  $1.23 \cdot 10^{-4}$ , o que equivale a uma diferença de energia de 39.1 dB. Seus limiares  $\gamma_{M1} = 0.997 \cdot 10^{-4}$  e  $\gamma_{FA1} = 1.49 \cdot 10^{-4}$  equivalem, respectivamente, à diferença de energia de 40.01 dB e 38.29 dB. Para uma primeira avaliação, na ausência de uma pré-análise, pode-se usar estes parâmetros para observar a condição em que o motor se encontra, conforme a tabela 7.1. Nesse caso, chegar-se-ia a um prognóstico de condição entre boa e moderada para o motor. Com a existência de uma pré-análise, o diagnóstico pelo método proposto seria a de alteração estrutural do rotor pois  $\gamma_{FA0}$  da Hipótese de Referência (figura 8.1(a)) é inferior a  $\gamma_{M1}$  da Hipótese sob teste (motor com uma barra quebrada).

Na figura 8.3(a), motor com duas barras quebradas,  $\xi$  é  $5.91 \cdot 10^{-4}$ , o que equivale a uma diferença de energia de 32.28 dB. Seus limiares  $\gamma_{M2} = 5.77 \cdot 10^{-4}$  e  $\gamma_{FA2} = 6.05 \cdot 10^{-4}$  equivalem, respectivamente, à diferença de energia de 32.39 dB e 32.18 dB. Com esses valores o prognóstico pela tabela de referência é a possibilidade de existência de duas barras com problemas. Obviamente, a metodologia proposta também decide pelo diagnóstico de alteração estrutural do rotor, pois  $\gamma_{FA1} < \gamma_{M2}$ .

A diferença entre os limiares de confiança de uma Hipótese ( $\gamma_{FA} - \gamma_M$ ) pode ser considerada como uma margem de erro, aproximada, para o diagnóstico da alteração estrutural no rotor.<sup>3</sup> No caso do motor sem barra quebrada, tem-se o equivalente a 1.8 dB de margem para a metodologia proposta, que é bem inferior aos 5 dB sugerido pela tabela de referência. A margem da metodologia proposta depende diretamente da energia do ruído. Quanto maior for a energia do ruído, maior será a margem e menor a confiabilidade do diagnóstico. Porém, a flexibilidade da metodologia proposta permite ampliar a confiabilidade do diagnóstico de progressão de falhas pelo aumento do número de janelas amostradas. Conforme demonstrado na simulação do capítulo 6, figura 6.3, aumentando-se o número de janelas de amostragem diminui-se a diferença  $\gamma_{FA} - \gamma_M$ , diminuindo a margem. Na Análise Tradicional, não se pode mensurar uma margem em função do ruído.

---

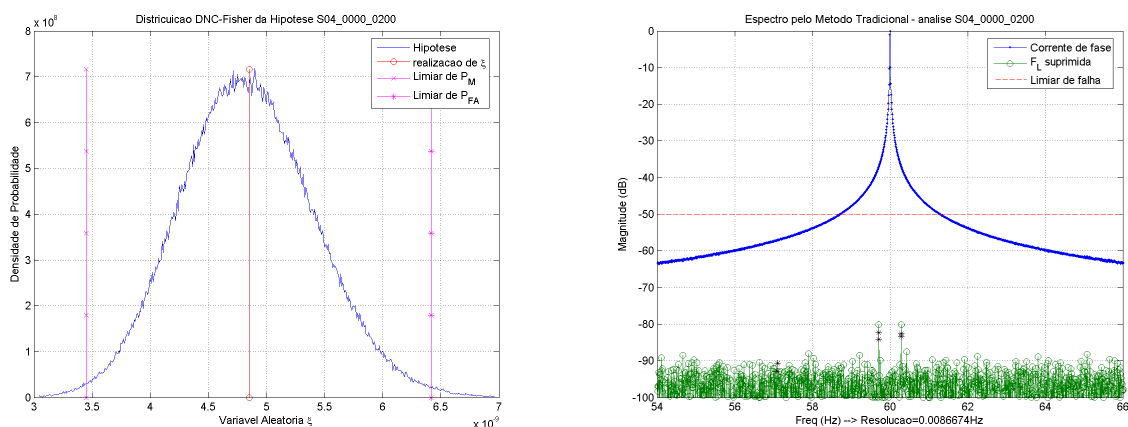
<sup>3</sup>A margem de segurança real é função do parâmetro *RESERE*. Para um mesmo nível de *RESERE* a margem de erro é a diferença de valor entre a média de duas Hipóteses  $\rho_0$  e  $\rho_1$  na qual  $\gamma_{FA0} = \gamma_{M1}$ .



Em todos os testes realizados, quando a Hipótese de Referência de uma fase do motor era comparada com outra Hipótese (com diferente quantidade de barras quebradas) da mesma fase o diagnóstico sempre apontou se tratarem de distintas severidades da falha, ou seja, Hipóteses diferentes. O mesmo era verdade quando o motor estava sob a influência de outros distúrbios (desequilíbrio de tensão, curto-circuito, falha relativa à excentricidade do rotor). Todavia, há de se garantir que a Hipótese de uma fase seja comparada somente com outra Hipótese da mesma fase, ambas observadas com o motor sob a mesma influência de distúrbios e mesmo ponto de operação. É este o resultado que valida a aplicabilidade da metodologia proposta, quando comparada à Análise Tradicional.

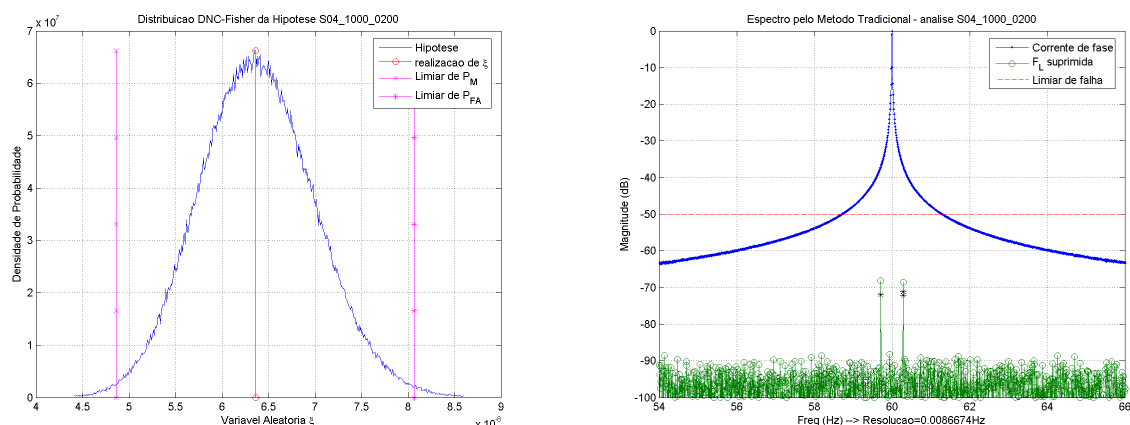
As figuras 8.4, 8.5 e 8.6, correspondem ao resultado da análise, pelo Teste de Hipóteses e pela Análise Tradicional, do motor S04, operando com tensões nominais (e sem desequilíbrio de fases), carga e escorregamento nominais, sem curto-circuito, porém, com falha mecânica (excentricidade).

Para o motor S04, pode-se observar que  $\gamma_{FA0} = 6.42 \cdot 10^{-9} < \gamma_{M1} = 4.86 \cdot 10^{-8}$  e que  $\gamma_{FA1} = 8.06 \cdot 10^{-8} < \gamma_{M2} = 3.86 \cdot 10^{-7}$ , garantindo o diagnóstico de mudança estrutural do rotor, com uma margem de erro aproximada de 2.69 dB na Hipótese de Referência (motor sem barra quebrada). Deve ser atentado o fato da margem diminuir em função da severidade da falha, se a energia do ruído for mantida constante, pois para a Hipótese de uma barra quebrada a margem é de 2.19 dB e para duas barras quebradas, 0.25 dB .



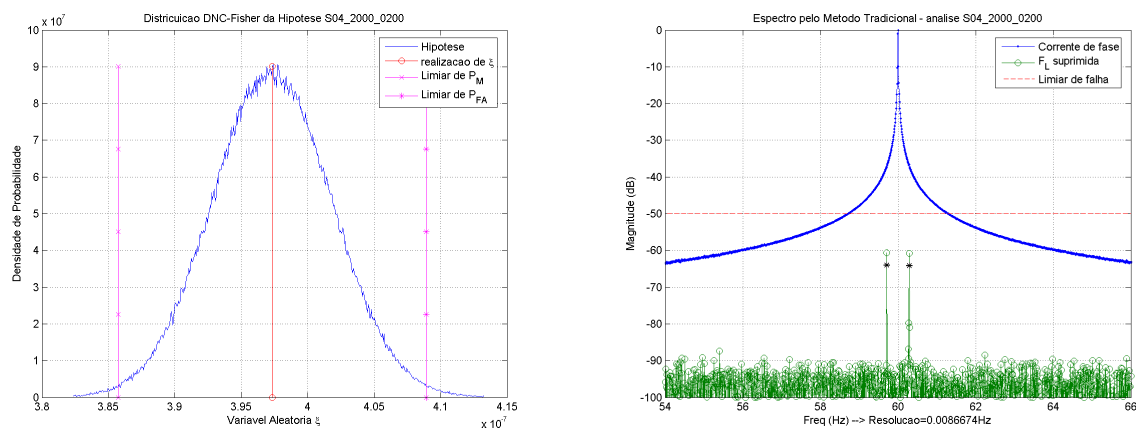
(a) Hipótese sem barra quebrada:  $\xi = 4.85 \cdot 10^{-9}$ ,  $\gamma_M = 3.45 \cdot 10^{-9}$  e  $\gamma_{FA} = 6.42 \cdot 10^{-9}$ . (b) Análise Tradicional sem barra quebrada.

Figura 8.4: Teste de Hipóteses e Análise Tradicional do motor S04 sem barra quebrada.



(a) Hipótese com uma barra quebrada:  $\xi = 6.36 \cdot 10^{-8}$ ,  $\gamma_M = 4.86 \cdot 10^{-8}$  e  $\gamma_{FA} = 8.06 \cdot 10^{-8}$ . (b) Análise Tradicional com uma barra quebrada.

Figura 8.5: Teste de Hipóteses e Análise Tradicional do motor S04 com uma barra quebrada.



(a) Hipótese com duas barras quebradas:  $\xi = 3.97 \cdot 10^{-7}$ ,  $\gamma_M = 3.86 \cdot 10^{-7}$  e  $\gamma_{FA} = 4.09 \cdot 10^{-7}$ . (b) Análise Tradicional com duas barras quebradas.

Figura 8.6: Teste de Hipóteses e Análise Tradicional do motor S04 com duas barras quebradas

Como era de se esperar, a existência da falha mecânica (excentricidade) não afetou o resultado de nenhum teste, pois, para motores com quatro ou mais pólos, as frequências afetadas são distintas daquelas analisadas, seja pela Análise Tradicional ou pelo Teste de Hipóteses.

### 8.2.2 A influência de distúrbios no Teste de Hipóteses

Os resultados dessa seção são apresentados, de forma sintetizada, em tabelas nas quais apenas alguns testes são exibidos objetivando exemplificar as conclusões obtidas a partir da análise de todos os 782 testes. Em outras palavras as características observadas nos exemplos expostos nessas tabelas também foram verificadas nos demais motores, em outros graus de severidade da falha das barras do rotor, em outras fases do motor e sob outro ou conjunto de outros distúrbios além daquele mencionado pelo exemplo.

Grande parte dos testes realizados para essa dissertação envolve dois ou três distúrbios simultâneos, incluindo a quebra de barras no motor. Tais situações aparentam ser pouco exploradas por outros autores e quando são, sob advento de ferramentas de inteligência artificial do tipo “caixa preta”, seus resultados não expõem características aqui evidenciadas graças à existência de limiares de confiança do Teste de Hipóteses.

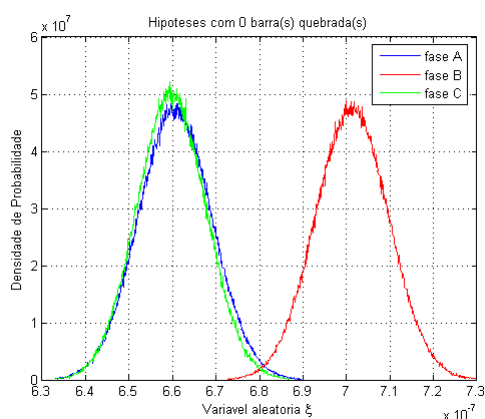
A título de aumentar a proximidade entre os testes e a realidade, em todos os testes foi introduzido um mínimo de desequilíbrio de 0.2% sobre as tensões de alimentação do motor, que passa a ser considerado como “tensão nominal” de alimentação do motor. Essa “tensão nominal” é definida pela seguinte condição:  $V_N$  é a tensão nominal do motor,  $|V_B| = 0.998V_N$ ,  $|V_C| = 1.002V_N$  e  $V_A = -(V_B + V_C)$ .

A tabela 8.2 apresenta Hipóteses das três fases do motor S01 sob a condição de: bom estado (sem barra quebrada), uma e duas barras quebradas, todas na ausência de qualquer outro distúrbio.

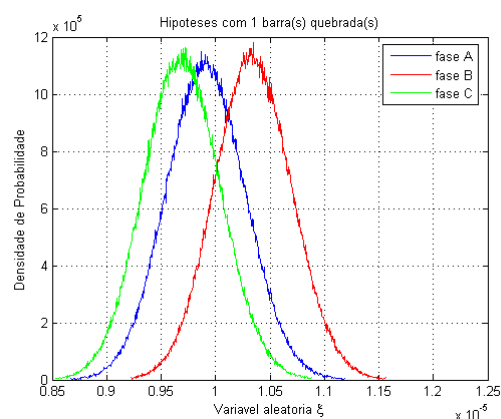
Tabela 8.2: Resultados dos testes para as três fases do motor S01 operando em condições nominais.

fase	barras quebradas	$\gamma_M$	$\xi$	$\gamma_{FA}$	$10 \log_{10}(A_{LSB_1}^2/A_L^2)$
a	0	$6.39 \cdot 10^{-7}$	$6.61 \cdot 10^{-7}$	$7.43 \cdot 10^{-7}$	-61.8dB
b	0	$6.79 \cdot 10^{-7}$	$7.01 \cdot 10^{-7}$	$7.23 \cdot 10^{-7}$	-61.6dB
c	0	$6.39 \cdot 10^{-7}$	$6.59 \cdot 10^{-7}$	$6.80 \cdot 10^{-7}$	-61.8dB
a	1	$8.99 \cdot 10^{-6}$	$9.91 \cdot 10^{-6}$	$10.9 \cdot 10^{-6}$	-50.0dB
b	1	$9.45 \cdot 10^{-6}$	$10.3 \cdot 10^{-6}$	$11.3 \cdot 10^{-6}$	-49.9dB
c	1	$8.80 \cdot 10^{-6}$	$9.69 \cdot 10^{-6}$	$10.6 \cdot 10^{-6}$	-50.1dB
a	2	$5.56 \cdot 10^{-5}$	$5.60 \cdot 10^{-5}$	$5.63 \cdot 10^{-5}$	-42.5dB
b	2	$5.76 \cdot 10^{-5}$	$5.79 \cdot 10^{-5}$	$5.83 \cdot 10^{-5}$	-42.4dB
c	2	$5.44 \cdot 10^{-5}$	$5.48 \cdot 10^{-5}$	$5.51 \cdot 10^{-5}$	-42.6dB

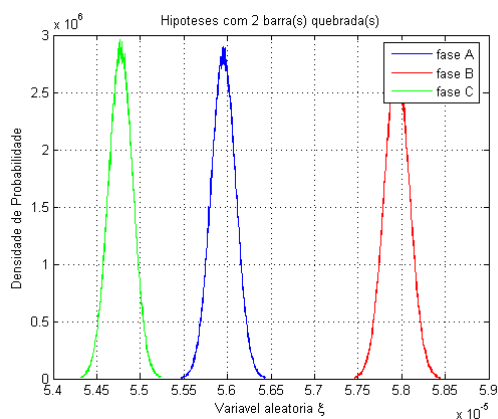
Na tabela 8.2 observa-se que: entre as Hipóteses de diferentes fases que possuem o mesmo número de barras quebradas, existe apenas pequenas diferenças entre suas distribuições de probabilidade, que se devem ao pequeno desequilíbrio de tensão. Entre as Hipóteses de uma mesma fase, com diferentes números de barras quebradas, quanto maior o número de barras quebradas maior será o valor da realização da Razão das Energias  $\xi$  e da média  $\rho$  das Hipóteses. Esses resultados podem ser observados nas figuras 8.7 e 8.8.



(a) Hipóteses do motor em bom estado.



(b) Hipóteses do motor com uma barra quebrada.



(c) Hipóteses do motor com duas barras quebradas.

Figura 8.7: Hipóteses de Diferentes Fases do Motor sob a Mesma Severidade da Falha.

Na figura 8.8 apenas o gráfico das Hipóteses da fase C foi apresentado, pois os gráficos das outras fases são muito semelhantes a esse. Ressalta-se que o gráfico no formato “semi-log” distorce o perfil das distribuições de probabilidade, impossibilitando uma estimativa visual da variância de cada Hipótese. Ainda assim, salta aos olhos a possibilidade de distinção entre essas Hipóteses.

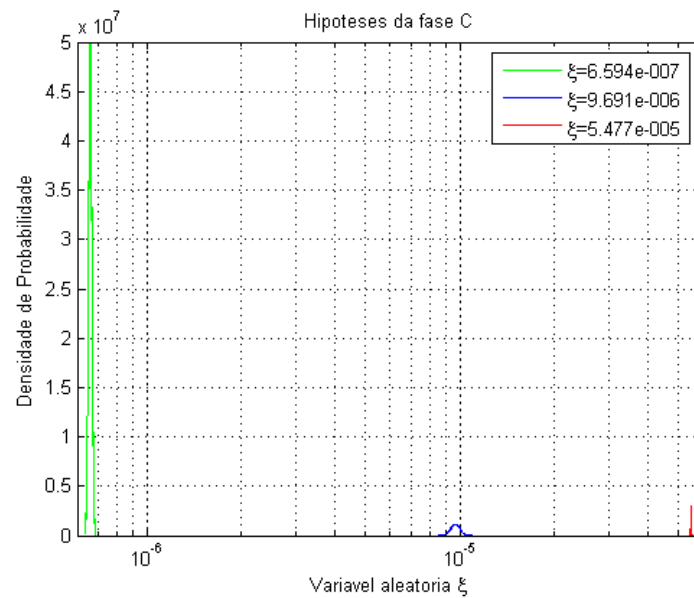


Figura 8.8: Hipóteses da fase C com diferentes severidade da falha.

Ainda sobre a figura 8.8, se uma Hipótese com determinado grau de severidade da falha (número de barras quebradas) for comparada a outra de grau de severidade distinto, tanto a média das Hipóteses ( $\rho_0$  e  $\rho_1$ ) quanto seus limiares ( $\gamma_{FA0}$  e  $\gamma_{M1}$ ) irão diagnosticar a falha, ou sua progressão. Entretanto, os demais testes realizados indicam que essa afirmativa permanece válida somente se a comparação ocorrer entre Hipóteses de uma mesma fase, estando o motor sob as mesmas condições de: nível das tensões de alimentação, nível de desequilíbrio de fases, carga mecânica e nível de curto-circuito entre espiras. Em suma, monitorando-se continuamente as fases de um motor, a divergência entre as Hipóteses das fases ou a divergência entre Hipóteses de uma mesma fase em momentos diferentes indica: a presença de distúrbios, evolução de falhas ou a mudança do ponto de operação do motor.

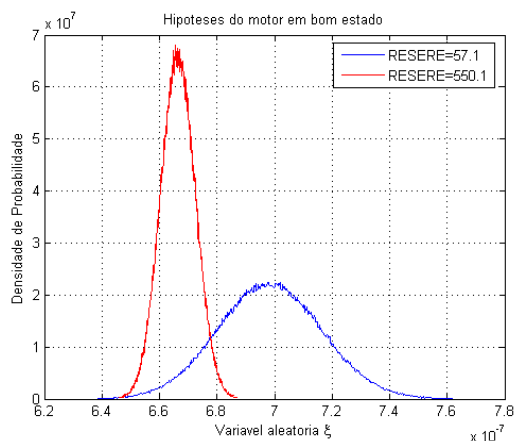
A tabela 8.3 relata o efeito de dois níveis de *RESERE* em  $LSB_1$ , para o motor S01 em bom estado, com uma e com duas barras quebradas, na ausência de qualquer outro distúrbio. Para obter estes dados, uma mesma simulação foi testada duas vezes, mantendo-se o número de amostras por janela ( $N = 4168$ ) e alterando-se a variância do ruído.

Os resultados dos testes da tabela 8.3 podem ser vistos na figura 8.9. Na figura 8.9(a) tem-se as Hipóteses da primeira e segunda linhas da tabela, na figura 8.9(b) tem-se as Hipóteses da terceira e quarta linhas, na figura 8.9(c), da quinta e sexta linhas. Os gráficos dessas figuras confirmam o que se esperava da análise do capítulo 6, figura 6.1. Apesar das realizações  $\tilde{\xi}$  da variável aleatória  $\xi$ , para a mesma severidade da falha, não serem

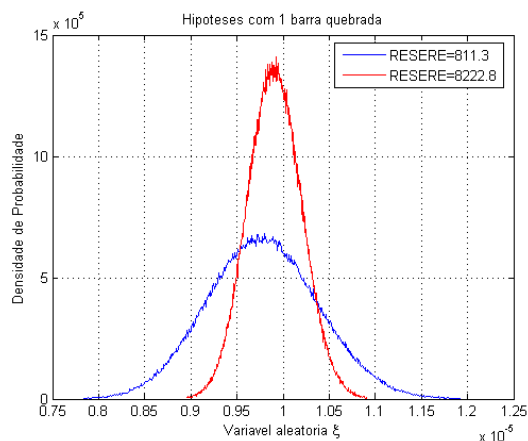
Tabela 8.3: Influência de *RESERE* sobre as Hipóteses.

fase	barras quebradas	<i>RESERE</i>	$\gamma_M$	$\xi$	$\gamma_{FA}$	$10 \log_{10}(A_{LSB1}^2/A_L^2)$
a	0	57.15	$6.53 \cdot 10^{-7}$	$6.98 \cdot 10^{-7}$	$7.45 \cdot 10^{-7}$	-61.6 dB
a	0	550.0	$6.51 \cdot 10^{-7}$	$6.66 \cdot 10^{-7}$	$6.82 \cdot 10^{-7}$	-61.8 dB
a	1	811.5	$8.28 \cdot 10^{-6}$	$9.78 \cdot 10^{-6}$	$11.38 \cdot 10^{-6}$	-50.1 dB
a	1	9226	$9.16 \cdot 10^{-6}$	$9.91 \cdot 10^{-6}$	$10.67 \cdot 10^{-6}$	-50.0 dB
a	2	4661	$5.52 \cdot 10^{-5}$	$5.57 \cdot 10^{-5}$	$5.61 \cdot 10^{-5}$	-42.5 dB
a	2	46655	$5.54 \cdot 10^{-5}$	$5.57 \cdot 10^{-5}$	$5.60 \cdot 10^{-5}$	-42.5 dB

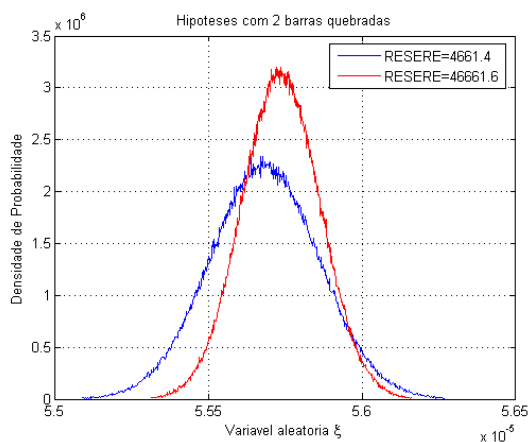
exatamente as mesmas, pois são construídas a partir de estimativas, as hipóteses de menor variância (maior *RESERE*) estão sempre contidas nas de maior variância (menor *RESERE*). Desta forma, evidencia-se que trata-se de um mesmo grau de severidade de falha.



(a) Hipóteses do motor sem barra quebrada.



(b) Hipóteses do motor com uma barra quebrada.



(c) Hipóteses do motor com duas barras quebradas.

Figura 8.9: Influência de *RESERE* sobre as Hipóteses.

A tabela 8.4 relata o efeito de diferentes níveis da Razão das Energias  $\xi$ . Os dados foram obtidos em condições de curto-circuito entre espiras, o que faz com que as correntes tenham amplitudes diferentes de uma fase para outra, assim como a Razão das Energias. Portanto, a comparação é feita entre diferentes fases do motor S05 operando com 5% de espiras em curto-circuito em uma de suas fases, nas seguintes condições: sem barra quebrada, com 1 e com 2 barras quebradas.

Tabela 8.4: O efeito da Razão das Energias sobre as Hipóteses de uma mesma severidade de falha.

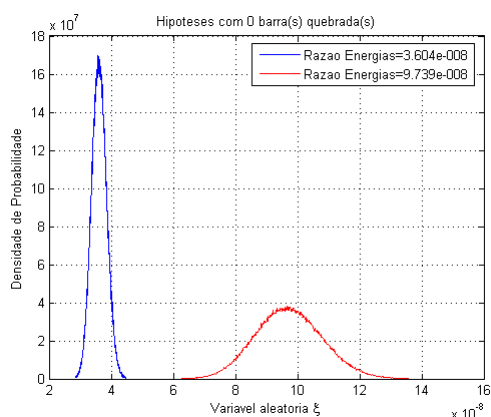
motor	fase	barras quebradas	$\gamma_M$	$\xi$	$\gamma_{FA}$	$10 \log_{10}(A_{LSB1}^2/A_L^2)$
S05	a	0	$3.10 \cdot 10^{-8}$	$3.60 \cdot 10^{-8}$	$4.25 \cdot 10^{-8}$	-74.4 dB
S05	b	0	$7.11 \cdot 10^{-8}$	$9.74 \cdot 10^{-8}$	$12.68 \cdot 10^{-8}$	-70.1 dB
S05	a	1	$3.35 \cdot 10^{-7}$	$4.26 \cdot 10^{-7}$	$5.26 \cdot 10^{-7}$	-63.7 dB
S05	b	1	$14.8 \cdot 10^{-7}$	$17.4 \cdot 10^{-7}$	$20.2 \cdot 10^{-7}$	-57.6 dB
S05	a	2	$2.43 \cdot 10^{-6}$	$2.54 \cdot 10^{-6}$	$2.65 \cdot 10^{-6}$	-56.0 dB
S05	b	2	$9.97 \cdot 10^{-6}$	$10.8 \cdot 10^{-6}$	$11.7 \cdot 10^{-6}$	-49.7 dB

Os resultados dos testes da tabela 8.4 podem ser vistos na figura 8.10. Na figura 8.10(a) tem-se as Hipóteses da primeira e segunda linhas da tabela, na figura 8.10(b) tem-se as Hipóteses da terceira e quarta linhas, na figura 8.10(c), da quinta e sexta linhas. Os gráficos dessas figuras confirmam o que se esperava da análise do capítulo 6, figura 6.2. Quanto maior a realização da Razão das Energias  $\xi$ , maior o valor da média  $\rho$  e da variância da Hipótese.

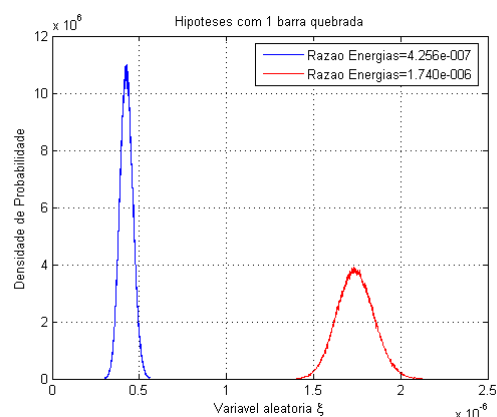
Na ausência de distúrbios diferentes da quebra de barras do rotor, conforme exemplos da tabela 8.2, as Hipóteses de diferentes fases do motor, para um mesmo grau de severidade da quebra de barras, devem ser quase as mesmas. Entretanto, isso não é válido para o caso de curto-circuito entre espiras de uma fase (tabela 8.4) ou de desequilíbrio das tensões de alimentação do motor, como pode ser visto na tabela 8.5.

A tabela 8.5 relata o efeito de diferentes níveis de desequilíbrio das tensões de alimentação sobre as Hipóteses do motor S05 com duas barras quebradas. O primeiro nível de desequilíbrio é de 0.2% ( $|V_B| = 0.998V_N$  e  $|V_C| = 1.002V_N$ ) e o segundo nível, 5.0% ( $|V_B| = 0.95V_N$  e  $|V_C| = 1.05V_N$ ).

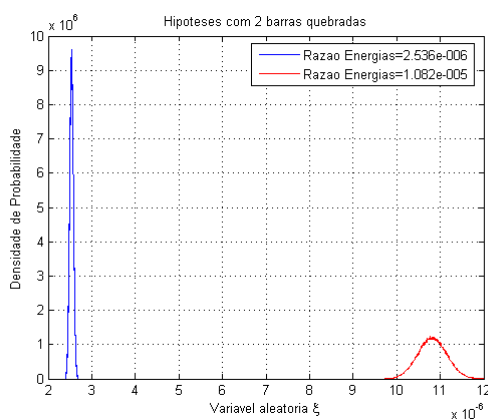
Os resultados dos testes da tabela 8.5 podem ser vistos na figura 8.11. Na figura 8.11(a) tem-se as Hipóteses da primeira e segunda linhas da tabela, na figura 8.11(b), da terceira e da quarta linhas da tabela. No primeiro gráfico, pode-se observar que as Hipóteses



(a) Hipóteses do motor em bom estado.



(b) Hipóteses do motor com uma barra quebrada.



(c) Hipóteses do motor com duas barras quebradas.

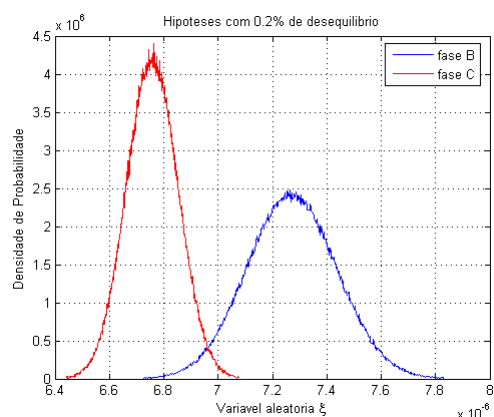
Figura 8.10: Influência da Razão das Energias sobre as Hipóteses.

das duas fases do motor são muito próximas, enquanto no segundo, torna-se nítida a distinção entre as Hipóteses, ainda que se trate do mesmo grau de severidade da falha de quebra de barras. Na figura 8.11(c) e 8.11(d) tem-se as duas Hipóteses da mesma fase com diferentes níveis de desequilíbrio, respectivamente para as fases B e C. Nesses gráficos observa-se que apesar da Hipótese da fase B pouco se altera com o desequilíbrio de fases, as Hipóteses da fase C se tornaram bem distintas.

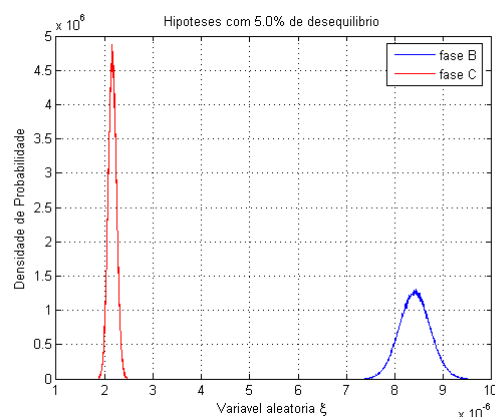
Tabela 8.5: Efeito do Desequilíbrio de Tensão sobre as Hipóteses.

fase	desequilíbrio	$\gamma_M$	$\xi$	$\gamma_{FA}$	$10 \log_{10}(A_{LSB_1}^2/A_L^2)$
b	0.2%	$6.85 \cdot 10^{-6}$	$7.27 \cdot 10^{-6}$	$7.70 \cdot 10^{-6}$	-51.4dB
c	0.2%	$6.51 \cdot 10^{-6}$	$6.76 \cdot 10^{-6}$	$7.01 \cdot 10^{-6}$	-51.7dB
b	5.0%	$7.61 \cdot 10^{-6}$	$8.41 \cdot 10^{-6}$	$9.24 \cdot 10^{-6}$	-50.8dB
c	5.0%	$1.95 \cdot 10^{-6}$	$2.16 \cdot 10^{-6}$	$2.38 \cdot 10^{-6}$	-56.7dB

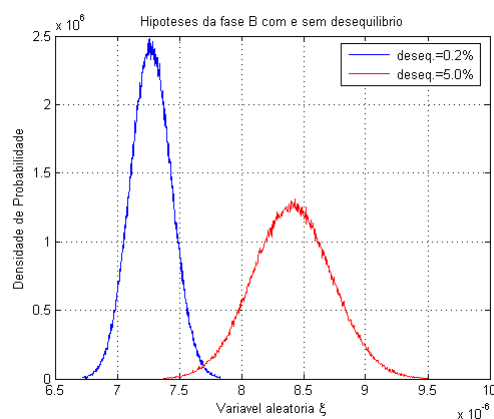




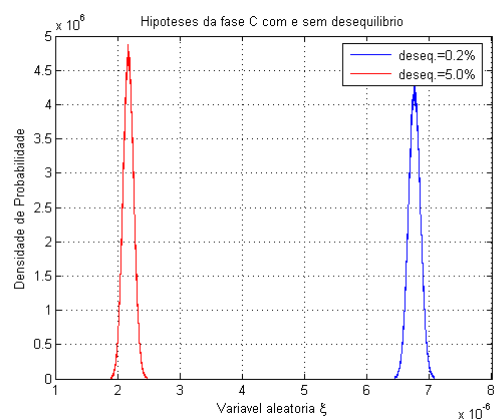
(a) Hipóteses “sem” desequilíbrio de fases.



(b) Hipóteses com desequilíbrio de fases.



(c) Hipóteses da fase B.



(d) Hipóteses da fase C.

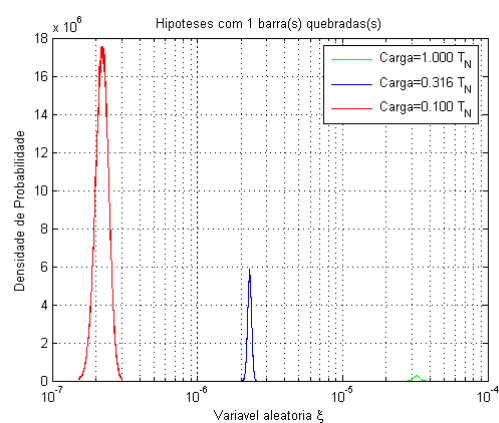
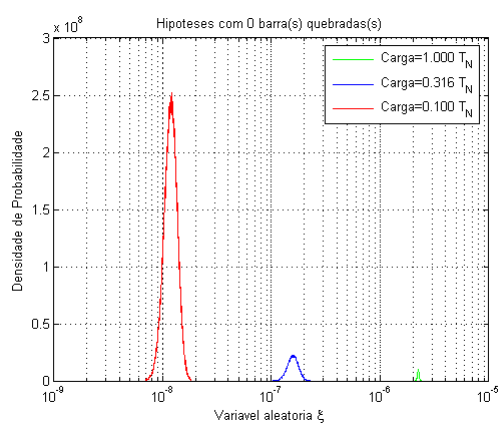
Figura 8.11: Efeito do Desequilíbrio das Tensões de Alimentação Sobre as Hipóteses.

A tabela 8.6 relata o efeito de diferentes níveis de cargas mecânicas sobre as Hipóteses da fase A do motor S02 sem barra quebrada, com uma e com duas barras quebradas. Três níveis são abordados: carga mecânica equivalente ao conjugado nominal  $T_N$  do motor, equivalente a 10% do conjugado nominal e equivalente a 31.6% do conjugado nominal.

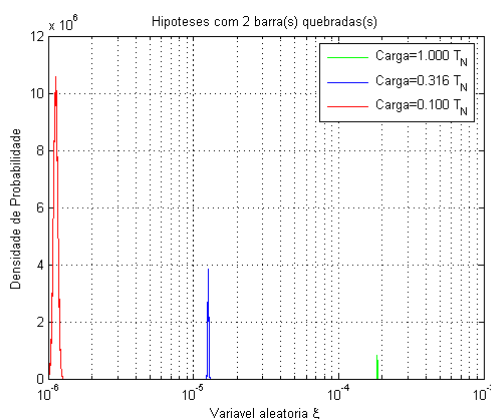
A figura 8.12 apresenta os resultados da tabela 8.6. Cada gráfico refere-se a um grau de severidade da falha de quebra de barras em que as três condições de carga são abordadas. Ressalta-se que o gráfico “semilog” distorce o perfil das distribuições de probabilidade, impossibilitando uma estimativa visual da variância de cada Hipótese. Em todos os gráficos é nítida a influência da carga sobre as Hipóteses de mesmo grau de severidade da falha.

Tabela 8.6: Influência da Carga sobre as Hipóteses de um mesmo grau de severidade da falha.

barras quebradas	carga	$\gamma_M$	$\xi$	$\gamma_{FA}$	$10 \log_{10}(A_{LSB_1}^2/A_L^2)$
0	$0.1T_N$	$8.17 \cdot 10^{-9}$	$12.0 \cdot 10^{-9}$	$16.7 \cdot 10^{-9}$	$-79.2dB$
1	$0.1T_N$	$1.67 \cdot 10^{-7}$	$2.22 \cdot 10^{-7}$	$2.86 \cdot 10^{-7}$	$-66.5dB$
2	$0.1T_N$	$1.03 \cdot 10^{-6}$	$1.13 \cdot 10^{-6}$	$1.23 \cdot 10^{-6}$	$-59.5dB$
0	$0.316T_N$	$1.16 \cdot 10^{-7}$	$1.59 \cdot 10^{-7}$	$2.09 \cdot 10^{-7}$	$-68.0dB$
1	$0.316T_N$	$2.11 \cdot 10^{-6}$	$2.29 \cdot 10^{-6}$	$2.49 \cdot 10^{-6}$	$-56.4dB$
2	$0.316T_N$	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$1.265 \cdot 10^{-5}$	$1.29 \cdot 10^{-5}$	$-49.0dB$
0	$T_N$	$2.14 \cdot 10^{-6}$	$2.24 \cdot 10^{-6}$	$2.35 \cdot 10^{-6}$	$-56.5dB$
1	$T_N$	$2.91 \cdot 10^{-5}$	$3.26 \cdot 10^{-5}$	$3.62 \cdot 10^{-5}$	$-44.9dB$
2	$T_N$	$1.834 \cdot 10^{-4}$	$1.847 \cdot 10^{-4}$	$1.86 \cdot 10^{-4}$	$-37.3dB$



(a) Hipóteses do motor sem barra quebrada. (b) Hipóteses do motor com uma barra quebrada.



(c) Hipóteses do motor com duas barras quebradas.

Figura 8.12: Influência da Carga Mecânica Sobre as Hipóteses.

Os testes indicam que, sendo  $T_L$  o conjugado da carga e  $T_N$  o conjugado nominal do motor, a variável de diagnóstico da Análise Tradicional será deslocada do seu valor de referência (motor sem distúrbios e sob condições nominais de alimentação e carga) por um valor aproximadamente igual a  $10 \log_{10}(T_L^2/T_N^2)$ .

### 8.2.3 A influência da potência nominal sobre a Razão das Energias

A tabela 8.7, apresenta valores das variáveis de diagnóstico de motores com diferentes potências nominais, operando sob tensão de alimentação e carga nominais, ausência de curto-circuitos e desequilíbrio de tensão entre fases e sob um “mesmo nível de severidade da falha”. Nela observa-se que quanto maior é a potência nominal do motor, menor é a sua Razão das Energias.

Tabela 8.7: Influência da Carga sobre as Hipóteses de um mesmo grau de severidade da falha.

motor	potência nominal	fase	total de barras	barras quebradas	$\xi$	$10 \log_{10}(A_{LSB1}^2/A_L^2)$
S01	1.5	a	32	2	$5.60 \cdot 10^{-5}$	-42.5dB
S05	500	b	58	2	$6.76 \cdot 10^{-6}$	-51.7dB
S04	2250	a	96	2	$5.60 \cdot 10^{-5}$	-64.1dB

A análise de influência da potência nominal de um motor sobre a Razão das Energias tem uma característica especial: todos os motores analisados possuem inúmeras propriedades diferentes (tensão de alimentação, resistências, indutâncias, total de barras no rotor, escorregamento nominal, etc.). A própria definição de severidade da falha não é um procedimento óbvio. Num motor cujo rotor possui 96 barras, a quebra de duas barras provoca uma redistribuição espacial em seu campo induzido menos proeminente que aquela observada num rotor de apenas 56 barras. Entretanto, tal situação não descaracteriza as observações que podem ser obtidas de tal comparação, mas, pelo contrário, justificam as conclusões.

Em função das características construtivas dos motores, quanto maior for a potência nominal de um motor, menor será seu escorregamento nominal e, conseqüentemente, menor a tensão (*per-unit*) induzida no circuito do rotor. O resultado é a redução da razão entre a corrente induzida no rotor e a corrente síncrona do estator que a induziu. Como se pode observar na tabela 8.7, mesmo com todos os motores operando sob suas condições nominais, com o “mesmo grau de severidade de falha” e na ausência de outros distúrbios, a diferença entre a Razão das Energias de quaisquer dois motores tem módulo sempre

superior a 9 dB. Essa diferença é significativamente superior à margem de 5 dB sugerida pela inspeção da tabela de valores de referência da Análise Tradicional que caracteriza diferentes níveis de severidade da falha. Em suma, a utilização exclusiva da diferença da energia (em dB) entre as frequências  $F_L$  e  $LSB_1$ , utilizada na tabela de valores de referência, não é capaz de proporcionar um padrão eficaz único para o diagnóstico de motores de qualquer potência.

### 8.3 Conclusão

Assim como na Análise Tradicional, quando a Hipótese de uma fase do motor é comparada a outra Hipótese da mesma fase, com diferentes graus de severidade da falha das barras do rotor, ambas observadas sob as mesmas condições operacionais e mesmos distúrbios do motor e de sua alimentação, o método proposto é capaz de identificar claramente a distinção entre as Hipóteses.

A possibilidade de definição de limiares de confiança permite à metodologia proposta maior segurança na avaliação da progressão de falhas. Além disso, o desenvolvimento teórico apresentado nos capítulos 2, 3, 4 e 6 fornece mecanismos para se adequar os limites do intervalo de confiança dentro de valores desejados. São essas características que tornam a metodologia proposta mais eficiente que a simples Análise Tradicional.

Os testes revelaram uma grande dependência da Razão das Energias  $\xi$  pelo ponto de operação do motor, determinado por suas características construtivas e pela carga mecânica. Essa dependência torna necessário o estabelecimento de um ponto fixo de operação ou de múltiplas referências ao longo da curva de conjugado do motor para que seja possível o seu correto diagnóstico.

Outra característica identificada está na relação entre a potência nominal de um motor e o valor da sua Razão das Energias para um mesmo nível de severidade da falha de quebra de barras. Quanto maior for a potência do motor, menor será a Razão das Energias. Fato que vem a reforçar a característica orientativa da tabela de valores de referência da Análise Tradicional e enfatizar a importância da capacidade de distinção entre diferentes níveis de severidade da falha a partir da evolução nos valores da variável de diagnóstico, específicos para cada motor.

Outras possibilidades de aplicação da metodologia, sobre a detecção de falhas estruturais de rotor, foram percebidas nos testes realizados: detecção de curto-circuito entre

espiras de uma fase ou desequilíbrio das tensões de alimentação, sobre e subtensão.

Excetuando-se situações catastróficas (falhas que podem levar um motor a destruição em poucos segundos como: o travamento do eixo ou inversão do sentido de rotação com carga) e partindo da premissa que a quebra de barras do rotor ocorre de modo gradativo (iniciando com pequenas fissuras e progredindo até o seccionamento completo da face da seção transversal da barra), tem-se que o intervalo de transição no qual ocorrem as variações nas tensões de alimentação do motor, decorrentes de mudança na demanda de energia em ambientes industriais ao longo do ciclo de produção, são muito inferiores ao intervalo necessário para se configurar uma progressão da quebra de barras. Com isso, distúrbios provenientes de subtensão ou sobretensão da alimentação do motor, poderiam ser detectados pelo “súbito” deslocamento da média  $\rho$  da Hipótese das três fases, ocorrido no mesmo sentido e com amplitudes semelhantes.

Com a mesma premissa, distúrbios como desequilíbrio das tensões de alimentação ou curto-circuito entre espiras de uma fase poderiam ser detectados, mas não distinguidos, pelo “súbito” deslocamento da média  $\rho$  da Hipótese das três fases. O deslocamento de  $\rho$  pode ocorrer no mesmo sentido (no caso de curto-circuito), mas com amplitude diferente em pelo menos uma das três fases.

Essas possibilidades, apontadas pelas análises como teoricamente factíveis, requerem uma avaliação sob situação real em ambiente industrial para uma validação de uso prático. Contudo o custo dessas possibilidades é que diferentes condições de operação do motor, que promovem alterações na Razão das Energias, poderiam conduzir a diagnósticos equivocados sobre a progressão de falhas. Esse fenômeno é uma característica intrínseca do diagnóstico baseado na Razão das Energias entre as frequências  $LSB_1$  e  $F_L$ . Portanto, está presente na Análise Tradicional e na metodologia proposta. Infelizmente, tais condições (diferentes cargas mecânicas, sobre e subtensão, desequilíbrio de fases) ocorrem facilmente em situações reais. Então, para evitar falsos alarmes, medidas de correção devem ser adotadas na metodologia proposta. Duas medidas poderiam ser:

- a execução de uma pré-análise para diferentes combinações de distúrbios e pontos de operação. Por exemplo: de 0.0% a 0.5% de desequilíbrio com 95% a 100% da carga nominal, de 0.0% a 1.0% de sobretensão com 100% a 105% da carga nominal, etc. ;
- a adoção de um segundo nível de limites de confiança, não mais para avaliar o efeito do ruído, mas para preservar as características de operação do motor na presença de distúrbios.

A utilização de classificadores baseados em técnicas de inteligência computacional (*MLP*, *SVM*) é capaz de resolver (em parte) o problema de mapeamento das realizações da variável de diagnóstico da Análise Tradicional no diagnóstico de falhas, sob diferentes condições de operação do motor. Mas, para que isso ocorra é necessário fornecer informações adicionais à análise, como: conjugado, escorregamento, etc. Conforme [Ayhan et al. \(2005b\)](#), essa capacidade se deve à característica de mapeamento não linear dessas técnicas. Mesmo assim, tanto em [Ayhan et al. \(2005b\)](#) como em [Niu et al. \(2007\)](#), os métodos de inteligência artificial não foram capazes de eliminar por completo os falsos alarmes. A característica desses sistemas de decisão, do tipo “caixa preta”, não possibilitam uma abordagem informativa sobre o fenômeno trabalhado. Conseqüentemente, os erros de decisão dessas técnicas são apresentados sem a devida interpretação, apenas um número: “Taxa de Erro”.

Comparada às técnicas de inteligência computacional, a metodologia proposta, com o advento da maior precisão nas estimativas das energias da variável de diagnóstico e maior segurança proporcionada pelo uso de intervalos de confiança, estabeleceu uma ferramenta de análise capaz de identificar fenômenos físicos que influenciam, de modo determinístico, o comportamento da variável de diagnóstico baseada na razão (ou diferença em dB) de energias. Com a utilização dessa metodologia, pôde-se ampliar o conhecimento sobre a relação entre o regime de operação do motor e o comportamento da variável de diagnóstico. Assim, indica-se o monitoramento dos fenômenos físicos influentes para minimizar a incidência de falsos alarmes, não decorrentes de fatores exclusivamente estocásticos, observada nas outras metodologias.

# Capítulo 9

## Conclusão

Esse projeto propunha-se, com a aplicação do Teste de Hipóteses sobre as componentes do espectro de frequência da corrente de motores de indução trifásicos, detectar falhas estruturais no rotor desses motores, minimizando as desvantagens de outros métodos. Pelo método de Análise Tradicional, tem-se as seguintes desvantagens: não são consideradas as especificidades de cada motor em teste, baixa precisão da tabela de diagnóstico e inexistência de um tratamento para o efeito do ruído sobre os dados amostrados. Pelos métodos de Inteligência Computacional, tem-se: (em geral) uma dificuldade de lidar com o efeito do ruído sobre os dados de treinamento e de teste; dificuldades na monitoração de progressão de falhas pois têm de lidar com regiões discretas de decisão em vez de limiares definidos para variáveis contínuas; é necessária a destruição de motores para obter os dados de treinamento (o que, em situações reais, nem sempre seria factível).

### 9.1 Sobre a Metodologia Proposta

A metodologia apresentada foi desenvolvida para a utilização do método estocástico do Teste de Hipóteses na análise da influência de diferentes eventos ou valores de parâmetros de um sistema (linear ou não) sobre a resposta de componentes do seu espectro de frequência de saída em função das componentes do seu espectro de entrada. Essa metodologia pode ser aplicada sobre grandezas de diferentes naturezas, não se limitando apenas à análise da amplitude (ou energia), mas também à análise do ângulo de fase, do deslocamento de frequência e da relação entre duas dessas propriedades dos sinais amostrados.

## 9.2 Sobre a Aplicação Proposta

A metodologia proposta é um aprimoramento da Análise Tradicional, no qual as amostras da corrente de fase são particionadas em várias janelas, cujas estimativas de amplitude das frequências envolvidas na falha são utilizadas para se determinar a distribuição de probabilidades da variável do diagnóstico  $\xi$  e, sobre essa distribuição, seus limiares de confiança  $\gamma_M$  e  $\gamma_{FA}$ . Com isso, a metodologia proposta adquire uma maior segurança para o diagnóstico.

A própria estimação das amplitudes do espectro da corrente do motor, que constituem a variável aleatória do Teste de Hipóteses, é baseada no estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$ , descrito no capítulo 4, que possui uma precisão maior que a simples utilização da *DTFS*, uma vez que não é susceptível a várias de suas deficiências.

A abordagem pelo Teste de Hipóteses, com os parâmetros da Hipótese de Referência (ou Hipótese Nula, na ausência de falha) sendo obtidos com uma Pré-análise, é o que possibilita a “personalização” dos parâmetros do Teste a cada motor, quantifica o efeito do ruído presente nos dados e fornece (através dos limiares de confiança  $\gamma_{M1}$  e  $\gamma_{FA0}$ ) maior segurança no diagnóstico da progressão de uma falha, que é realizada sobre uma variável contínua (a diferença entre a média  $\rho_1$  da distribuição de probabilidade obtida no Teste mais recente e a média  $\rho_0$  da Hipótese de Referência). Assim, a metodologia pode ser aplicada às máquinas novas ou mesmo àquelas que possuam falhas. E isso, sem a necessidade de se fazer ensaios com intervenções destrutivas no motor.

## 9.3 Resultados do Projeto

Através das análises das propriedades estocásticas da *DTFS* conclui-se que um sinal periódico corrompido por ruído aditivo gaussiano branco estacionário no sentido estrito, de variância  $\sigma_t^2$ , amostrado por um período maior ou igual ao de sua frequência fundamental, apresenta componentes (reais e imaginárias) no espectro de frequência discreto, que se tratam de variáveis aleatórias gaussianas, independentes, de média determinada pela *DTFS* da parte determinística desse sinal e variância igual a  $\sigma_t^2/(2N)$ .

As análises demonstraram que se a taxa de amostragem e a quantidade de amostras não forem definidas em função dos valores exatos das frequências do sinal amostrado, a *DTFS* poderá apresentar os seguintes problemas: “leakage effect” ou alteração da média das componentes espectrais de uma janela de amostragem para outra ou, além de ambos



problemas, criar uma dependência entre o módulo das componentes de uma ordem espectral e seu respectivo ângulo de fase.

Tais deficiências da *DTFS* podem ser minimizadas pelo estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\Theta}_{FDC}$  que consiste na escolha das estimativas de amplitude, de fase e de frequência (contínua) que minimizam o erro médio quadrático entre as componentes do espectro do sinal determinístico estimado e as componentes do espectro do sinal real corrompido. Tal estimador, desenvolvido para uma única frequência, é descrito pela equação 4.8 e pode evitar um erro na estimação de energia de sinais determinísticos, intrínseco à *DTFS*, de até -3.876 dB.

Os resultados dos testes simulados indicaram que o método proposto é totalmente coerente com os resultados da Análise Tradicional de detecção de quebra de barras em rotor de motores de indução. Indicaram também que é possível comparar com segurança Hipóteses observadas sobre diferentes níveis de ruído e diferentes quantidades de amostras  $N$  processadas pela *DTFS*, sem perda do desempenho.

Os resultados de testes com diferentes cargas mecânicas acionadas pelo motor mostraram que a variável de diagnóstico é muito dependente do ponto de operação. Com isso, para cada ponto de operação que um motor trabalhe, uma Hipótese de Referência deverá ser obtida. Para facilitar esse processo, a autonomia da metodologia proposta na detecção das frequências da Banda Lateral pode identificar o escorregamento e assim oferecer um parâmetro para identificar o ponto de operação do motor.

A escolha da Razão das Energias como variável aleatória do Teste de Hipóteses foi baseada na variável de diagnóstico da Análise Tradicional. A definição dessa variável de diagnóstico parece estar relacionada a uma tentativa de se padronizar um resultado para diferentes motores com a mesma severidade de falha em seu rotor, como se sugere a utilização de uma tabela de referência (7.1). Entretanto, as simulações mostraram que com a utilização da tabela para motores de grande potência não se obtém bons resultados. Assim, uma vez que não há vantagem, em termos de eficiência do diagnóstico, em tentar padronizar os valores da variável de diagnóstico entre diferentes modelos de motores ou mesmo entre um modelo sob diferentes influências de distúrbios e cargas mecânicas, não se justifica trabalhar com uma variável aleatória de distribuição de probabilidade tão complexa (*Doubly Noncentral F*). Principalmente se for levado em conta a capacidade de “personalização” do Teste com as propriedades de cada motor, característica intrínseca da metodologia proposta.

Ao se comparar o resultado dos testes entre as três fases de um mesmo motor, o método proposto mostra-se mais rico em informações, gerando diagnóstico mais precisos e seguros. Com a comparação simultânea das Hipóteses das três fases do motor e com a introdução de distúrbios e diferentes condições operacionais nos testes, foi possível vislumbrar novas possibilidades para a metodologia proposta: detecção de desequilíbrio de tensão ou curto-circuito, detecção de falhas de excentricidade do rotor, detecção de sobre e subtensão e detecção da mudança do ponto de operação. Entretanto, os mesmos testes revelam que a ocorrência desses distúrbios sobre o motor em funcionamento pode gerar falsos alarmes, se não forem tomadas medidas de precaução.

Uma desvantagem da abordagem de falhas pela *MCSA* é que para grandes motores, que geralmente operam com pequenos escorregamentos, o período de uma única janela de amostragem torna-se grande (20s ou mais) e isso dificulta uma aplicação “em tempo real”. Porém, a grande vantagem está no fato de que esta metodologia dispensa o conhecimento dos parâmetros construtivos do motor, sendo apenas necessário o conhecimento da faixa de escorregamento e da energia do ruído para se ajustar os parâmetros do algoritmo.

A obtenção e utilização de limites de confiança (representados pelos limiares  $\gamma_M$  e  $\gamma_{FA}$ ) de cada Hipóteses torna muito mais objetiva e segura a avaliação da progressão de falhas. Desta forma, é possível precisar até mesmo a velocidade de progressão de uma falha. Informação vital para a interrupção do funcionamento de um equipamento antes que um evento de maior magnitude ocorra.

## 9.4 Trabalhos Futuros

Tendo, os testes simulados, um caráter apenas exploratório, várias questões levantadas possibilitam a continuação da pesquisa, abordando os seguintes temas para trabalhos futuros:

- comprovar se o desvio padrão da estimativa de amplitude do estimador  $\hat{\Theta}_{FDC}$  é realmente o dobro do desvio padrão observado no ruído espectral (nas componentes do espectro da *DTFS*);
- verificar a sensibilidade do Teste de Hipóteses à alteração das condições operacionais do motor;
- definir um segundo nível de "margem de segurança" que seja compatível com as alterações da Razão das Energias, decorrentes dos distúrbios de alimentação do

motor, dentro dos limites de tolerância estabelecidos pelas normas de instalações elétricas;

- comprovar, com dados de medições reais, a eficiência da metodologia proposta sobre as novas possibilidades observadas nos testes simulados;
- testar a metodologia com uma variável aleatória do teste de Hipóteses que tenha uma distribuição de probabilidade menos complexa, por exemplo: a energia na frequência  $LSB_1$  que possui distribuição *Noncentral Chi-squared*.



# Apêndice A

## O Motor de Indução

O motor de indução trifásico do tipo gaiola de esquilo é constituído de uma parte rotativa, chamada rotor, e outra fixa, chamada estator.

O estator é basicamente um cilindro onde as bobinas das fases são instaladas na superfície interna. Tais bobinas são sempre dispostas intercalando-se as fases. A quantidade de bobinas de uma fase do estator é sempre igual a de qualquer outra e corresponde exatamente ao número de pólos do motor.

O rotor, também de forma cilíndrica, é feito de material ferro-magnético e sobre sua superfície há um conjunto de barras condutoras. Estas barras são dispostas paralelamente à barra do eixo de rotação na qual se acopla a carga mecânica. E, para fechar o circuito elétrico do rotor, tais barras são curto-circuitadas entre si por um “anel” em cada uma de suas duas extremidades.

Ao ligar a tensão nas fases do motor, as correntes nas bobinas do estator criam um fluxo magnético cuja distribuição espacial pode ser descrita por uma função senoidal ao longo de direção de rotação do rotor. Esta distribuição do fluxo magnético gira em torno da superfície do estator a uma velocidade diretamente proporcional à frequência elétrica da tensão de alimentação e inversamente proporcional à quantidade de pares de pólos. A variação do campo magnético, percebida pelas barras do rotor, induz uma corrente que, por sua vez, cria no rotor um campo magnético induzido. A interação entre o fluxo girante do estator e o fluxo induzido no rotor, impõe um conjugado ao rotor, imprimindo uma velocidade de rotação que tende à do campo girante do estator.

A velocidade de rotação do campo girante, ou também chamada de velocidade sín-

crona e:

$$n_s = \frac{60f_s}{pp}$$

sendo:  $n_s$  a velocidade de rotação em rpm,  $f_s$  a frequência de alimentação do motor.

A velocidade de rotação do rotor não pode atingir a do campo girante sob pena do rotor não perceber variação do fluxo magnético do estator e, por conseqüência, não haver: corrente induzida, interação entre campos e conjugado. O principal parâmetro relacionado à velocidade do rotor é o escorregamento, conforme equação a baixo:

$$s = \frac{n_s - n_r}{n_s}$$

sendo  $n_r$  a velocidade de rotação do rotor (em rpm). De outra forma, conhecendo-se o escorregamento, a frequência de alimentação e o número de pares de pólos, pode-se calcular a velocidade de rotação do motor:

$$n_r = \frac{f_s(1 - s)}{pp}$$

# Apêndice B

## Teorema de Neyman-Pearson

Em suma, o teorema de Neyman-Pearson traduz-se em um procedimento capaz de determinar uma nova variável aleatória que maximiza a Probabilidade de Detecção  $P_D$  do Teste de Hipóteses. A nova variável aleatória é uma função das várias realizações da variável aleatória original e sua utilização pode refletir em uma nova distribuição de probabilidades para cada Hipótese originalmente existente. Assim, o Teste de Hipóteses passa a ser realizado sobre essas novas Hipóteses definidas pela nova variável aleatória obtida pelo Teorema de Neyman-Pearson.

Para exemplificar o Teorema de Neyman-Pearson, conforme apresentado em [Kay \(1993b\)](#), a seção [B.1](#) apresenta um exemplo de aplicação para o Teste de Hipóteses: detecção de um sinal “contínuo” (durante o período de amostragem) sob ruído aditivo gaussiano.

### B.1 Detecção de nível DC

Seja o sinal  $x_{(n)}$  um nível DC corrompido por ruído aditivo gaussiano branco:

$$x_{(n)} = A + r g b_{(n)}$$

$$r g b_{(n)} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

O nível DC do sinal  $x_{(n)}$ , descrito pela variável determinística  $A$ , pode assumir, aleatoriamente, um valor dentre as seguintes possibilidades:  $A_0$  ou  $A_1$ ; sendo  $A_0 < A_1$ . Logo, tem-se duas Hipóteses a respeito da distribuição de probabilidades das realizações do processo estocástico  $x_{(n)}$ :

$$H_0 \quad : \quad x_{(n)} = A_0 + r g b_{(n)}$$

$$H_1 \quad : \quad x_{(n)} = A_1 + r g b_{(n)}$$

Em síntese, o Teste de Hipóteses desse exemplo consiste em decidir se uma realização do processo foi gerada sobre a Hipótese  $H_0$  ou  $H_1$ . A Hipótese que se pressupõe ter gerado as realizações de  $x_{(n)}$  recebe o nome de Hipótese Nula,  $H_0$ , enquanto a outra é chamada de Hipótese Alternativa,  $H_1$ . O processo de tomada de decisão consiste em arbitrar uma Probabilidade de Falsos Alarmes (positivos)  $P_{FA}$  e determinar o limiar  $\gamma$  tal que  $P(x > \gamma; H_0) = P_{FA}$ . As realizações de  $x_{(n)}$  são comparadas com esse limiar e a Hipótese Nula é rejeitada caso as realizações sejam superiores. Sob tal condição, aceita-se que tais realizações tenham sido geradas sob a Hipótese Alternativa, sendo a sua Probabilidade de Detecção  $P_D$  encontrada pela expressão:  $P(x > \gamma; H_1) = P_D$ .

Nas figuras B.1 e B.2 são ilustradas as *pdf*'s das Hipóteses deste exemplo, sendo  $A_0 = 2$ ,  $A_1 = 6$  e  $\gamma = 4$ .

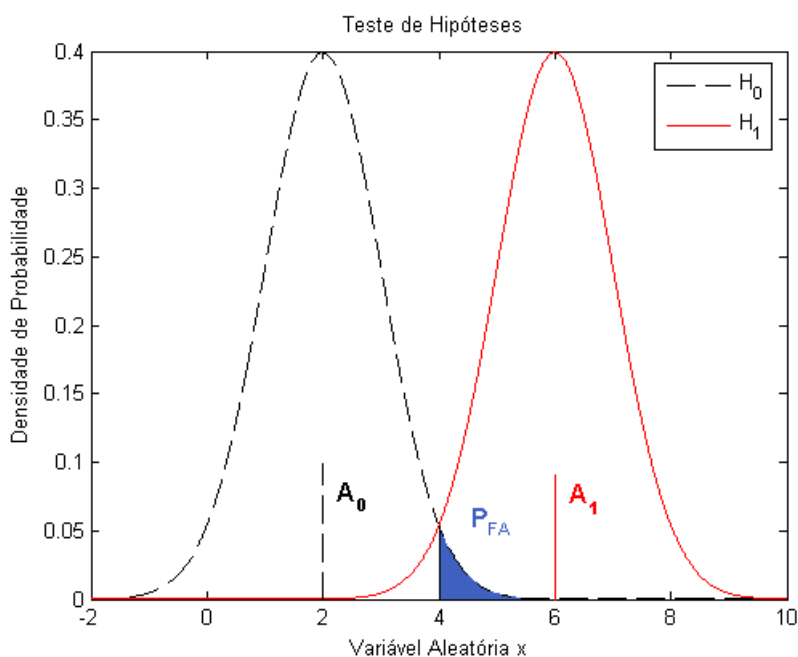


Figura B.1: Hipóteses  $H_0$ ,  $H_1$  e a Área de  $P_{FA}$

Conforme o Teorema de Neyman-Pearson, para maximizar  $P_D$  dado um valor para  $P_{FA}$ , decido por  $H_1$  se:

$$L(x) = \frac{p(x; H_1)}{p(x; H_0)} > \gamma$$



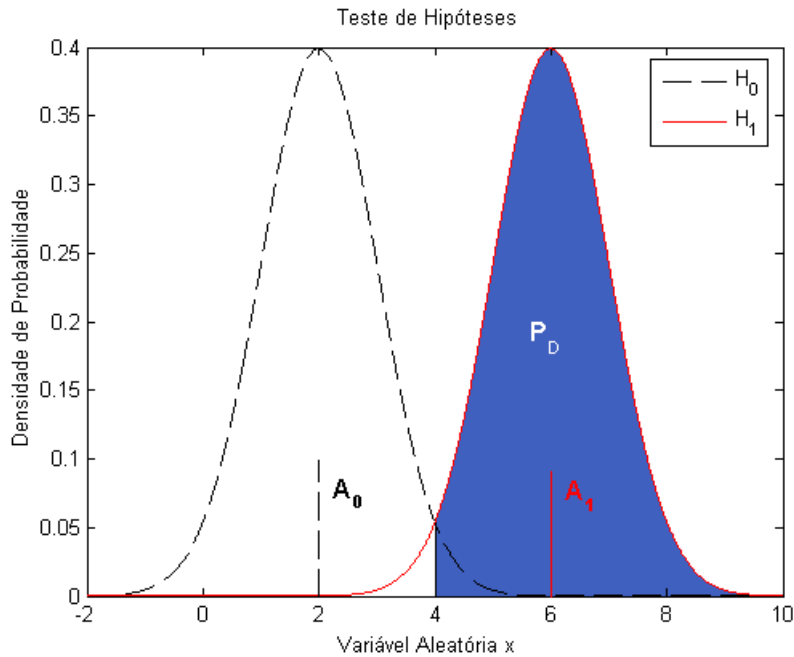


Figura B.2: Hipóteses  $H_0$ ,  $H_1$  e a Área de  $P_D$

Substituindo os termos de probabilidade pelas suas respectivas equações tem-se:

$$L(\mathbf{x}) = \frac{(2\pi\sigma^2)^{-N/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^{N-1} (x_{(n)} - A_1)^2\right\}}{(2\pi\sigma^2)^{-N/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^{N-1} (x_{(n)} - A_0)^2\right\}} > \gamma$$

Aplicando o logaritmo natural tem-se:

$$\ln(L(\mathbf{x})) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} (x_{(n)} - A_1)^2 - \sum_{n=1}^{N-1} (x_{(n)} - A_0)^2 \right\} > \ln(\gamma)$$

$$\ln(L(\mathbf{x})) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} (x_{(n)}^2 - 2x_{(n)}A_1 + A_1^2) - \sum_{n=1}^{N-1} (x_{(n)}^2 - 2x_{(n)}A_0 + A_0^2) \right\} > \ln(\gamma)$$

Evoluindo-se a inequação anterior:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} \{2x_{(n)}(A_1 - A_0) - (A_1^2 - A_0^2)\} &> 2\sigma^2 \ln(\gamma) \\ 2(A_1 - A_0) \sum_{n=1}^{N-1} x_{(n)} &> 2\sigma^2 \ln(\gamma) + N(A_1^2 - A_0^2) \\ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} x_{(n)} &> \frac{\sigma^2 \ln(\gamma)}{N(A_1 - A_0)} + \frac{(A_1^2 - A_0^2)}{2(A_1 - A_0)} = \gamma' \end{aligned}$$

A estatística de teste  $T(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} x_{(n)}$  é gaussiana com as seguintes características:

$$\begin{aligned} E\{T(\mathbf{x}); H_1\} &= E\left\{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} A_1 + r g b_{(n)}\right\} = A_1 \\ E\{T(\mathbf{x}); H_0\} &= E\left\{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} A_0 + r g b_{(n)}\right\} = A_0 \\ \text{var}\{T(\mathbf{x}); H_1\} &= \text{var}\left\{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} (A_1 + r g b_{(n)})\right\} \\ \text{var}\{T(\mathbf{x}); H_1\} &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N-1} \text{var}\{r g b_{(n)}\} = \frac{\sigma^2}{N} \\ \text{var}\{T(\mathbf{x}); H_0\} &= \text{var}\{T(\mathbf{x}); H_1\} \end{aligned}$$

Então tem-se:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &\sim \mathcal{N}\left(A_1, \frac{\sigma^2}{N}\right) \quad \text{sob } H_1 \\ T(\mathbf{x}) &\sim \mathcal{N}\left(A_0, \frac{\sigma^2}{N}\right) \quad \text{sob } H_0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Deve-se ressaltar que a variância da estatística de teste é menor que a variância de uma única observação ( $x_{(0)}$ ).

Sendo  $\Phi(x)$  a Função de Probabilidade Cumulativa da distribuição Normal padronizada<sup>1</sup> pode-se calcular  $P_D$  e  $P_{FA}$ , do seguinte modo:

$$P_{FA} = P\{T(\mathbf{x}) > \gamma'; H_0\} = 1 - \Phi\left(\frac{\gamma' - A_0}{\sigma/\sqrt{N}}\right)$$

<sup>1</sup>se  $x \sim \mathcal{N}(0, 1)$  então  $\Phi(\gamma) = P(x < \gamma)$ .

$$P_D = P\{T(\mathbf{x}) > \gamma'; H_1\} = 1 - \Phi\left(\frac{\gamma' - A_1}{\sigma/\sqrt{N}}\right)$$

De outra forma, a relação entre  $P_D$  e  $P_{FA}$  pode ser obtida pela expressão:

$$P_D = 1 - \Phi\left(\Phi^{-1}(1 - P_{FA}) - \sqrt{\frac{N(A_1 - A_0)^2}{\sigma^2}}\right) \quad (\text{B.2})$$

Sendo o coeficiente de deflexão  $d^2$  definido como:

$$d^2 = \frac{(E\{T(\mathbf{x}); H_1\} - E\{T(\mathbf{x}); H_0\})^2}{\text{var}\{T(\mathbf{x}); H_1\}} = \frac{N(A_1 - A_0)^2}{\sigma^2}$$

a expressão B.2 também pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P_D = 1 - \Phi\left(\Phi^{-1}(1 - P_{FA}) - \sqrt{d^2}\right)$$

## B.2 A Razão das Energias

Aqui é apresentada a estatística de teste que se obtém ao aplicar o Teorema de Neyman-Pearson sobre a Razão das Energias entre a  $LSB_1$  e a frequência síncrona  $F_L$ , utilizada no teste de Hipóteses da detecção de falha nas barras do rotor de um motor de indução.

$$T(\mathbf{x}) = \frac{e^{-M\left(\frac{\lambda_{1H_1} + \lambda_{2H_1}}{2}\right)} \prod_{m=1}^M \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda_{1H_1}}{2}\right)^r \left(\frac{\lambda_{2H_1}}{2}\right)^s (x_m)^{\frac{1}{2}+r-1}}{r! s! (1+x_m)^{1+r+s}} \frac{1}{B\left(\frac{1}{2} + r, \frac{1}{2} + s\right)} \quad (\text{B.3})}{e^{-M\left(\frac{\lambda_{1H_0} + \lambda_{2H_0}}{2}\right)} \prod_{m=1}^M \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda_{1H_0}}{2}\right)^r \left(\frac{\lambda_{2H_0}}{2}\right)^s (x_m)^{\frac{1}{2}+r-1}}{r! s! (1+x_m)^{1+r+s}} \frac{1}{B\left(\frac{1}{2} + r, \frac{1}{2} + s\right)}}$$

sendo:

- $M$  = a quantidade de estimações de amplitude da frequência  $LSB_1$  (igual à da frequência  $F_L$ ) obtidas para o Teste de Hipóteses;
- $x_m$  = a razão das energias:  $(A_{LSB_1,m}/A_{f_L,m})^2$ ;
- $\lambda_{1H_1}$  o parâmetro de não centralidade da frequência  $LSB_1$ , sob a Hipótese  $H_1$ ;
- $\lambda_{2H_1}$  o parâmetro de não centralidade da frequência  $F_L$ , sob a Hipótese  $H_1$ ;
- $\lambda_{1H_0}$  o parâmetro de não centralidade da frequência  $LSB_1$ , sob a Hipótese  $H_0$ ;

- $\lambda_{2H_0}$  o parâmetro de não centralidade da frequência  $F_L$ , sob a Hipótese  $H_0$ ;
- $B(y, z)$  função Beta com parâmetros  $y$  e  $z$ ;

$$\lambda_1 = \frac{(\bar{A}_{LSB_1})^2}{\sigma_{LSB_1}^2} \quad \lambda_2 = \frac{(\bar{A}_{FL})^2}{\sigma_{FL}^2}$$

# Apêndice C

## Algumas Importantes *pdf*'s

### C.1 Gaussiana

A distribuição de probabilidades *Gaussiana*, também conhecida como distribuição *Normal*, é a distribuição de probabilidades mais utilizada para variáveis aleatórias contínuas. Um dos grandes fatores para isso é o Teorema do Limite Central, que afirma que o resultado da soma de uma grande quantidade de variáveis aleatórias de qualquer distribuição aproxima-se assintoticamente à distribuição Gaussiana.

A Função de Densidade de Probabilidade - *pdf* - Gaussiana para uma única variável aleatória é definida totalmente pela média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  (primeiro e segundo momentos da VA), conforme equação:

$$p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (\text{C.1})$$

A função de densidade de probabilidade conjunta de  $n$  variáveis aleatórias conjuntamente *Gaussianas*, conforme *Peebles* (Peyton Z. Peebles, 1980, chap. 5, pág. 127, eq. 5.3.12) é:

$$p_{(x)} = p_{(x_1, \dots, x_n)} = \frac{|\det|\mathbf{C}_x^{-1}||^{1/2}}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{x} - \mu_x)^T \mathbf{C}_x^{-1} (\mathbf{x} - \mu_x)}{2}\right\} \quad (\text{C.2})$$

sendo:

- $\mathbf{x}$  vetor coluna das variáveis aleatórias gaussianas  $(x_1, \dots, x_n)$ ;
- $\mu_x$  vetor coluna com a média das variáveis aleatórias  $(x_1, \dots, x_n)$ ;
- $(\mathbf{x} - \mu_x)^T$  vetor (linha) transposto de  $(\mathbf{x} - \mu_x)$ ;
- $\mathbf{C}_x$  matriz de covariância, definida como  $E\{(\mathbf{x} - \mu_x)(\mathbf{x} - \mu_x)^T\}$ ;
- $|\det|\mathbf{C}_x^{-1}||$  módulo do determinante da matriz inversa de  $\mathbf{C}_x$ ;

## C.2 Chi-squared

A variável aleatória com distribuição *Chi-squared* surge quando uma variável aleatória gaussiana é, primeiramente, dividida pelo seu desvio padrão e, posteriormente, elevada ao quadrado. Assim, seja

$$\begin{aligned}x &\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ \frac{x}{\sigma} &\sim \mathcal{N}\left(\frac{\mu}{\sigma}, 1\right) \\ \left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 &\sim \text{Chi-squared}\end{aligned}$$

Se a média  $\mu$  da VA  $x$  for igual a zero, então tem-se uma variável Central Chi-squared:

$$\begin{aligned}x &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ y = \left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 &\sim \chi_1^2\end{aligned}$$

O número 1 no sub-índice é um parâmetro designado por “grau de liberdade” da VA. A soma de duas VA's chi-squared, constituídas a partir de gaussianas estatisticamente independentes, resulta numa VA também chi-squared. Entretanto, o grau de liberdade da VA resultante é igual a soma dos graus de liberdade das VA's somadas. Ex:

$$\begin{aligned}y_a &\sim \chi_a^2 \quad e \quad y_b \sim \chi_b^2 \\ y_a + y_b &= y_c \sim \chi_{(a+b)}^2\end{aligned}$$

Se a média  $\mu$  da VA  $x$  for diferente de zero, então tem-se uma variável Noncentral Chi-squared:

$$\begin{aligned}x &\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ y = \left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 &\sim \chi_1'^2(\lambda)\end{aligned}$$

sendo  $\lambda = \mu^2$  o parâmetro designado por “parâmetro de não centralidade” de um VA noncentral chi-squared. Para uma VA noncentral chi-squared com  $a$  graus de liberdade (constituída pela soma de  $a$  VA chi-squared geradas a partir de VA's gaussianas estatisticamente independentes),  $\lambda$  é definido por:

$$\lambda = \sum_{s=1}^a \mu_s^2$$

sendo  $\mu_s$  a média de cada uma das  $a$  gaussianas  $x_s$ .

A *pdf* de uma VA chi-squared pode ser obtida, conforme Kay (1993b), pela seguinte expressão:

$$pdf_{(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{\nu-2}{4}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y + \lambda)\right] I_{\frac{\nu-2}{2}}(\sqrt{\lambda y}) & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

sendo  $I_r(u)$  a função modificada de Bessel de primeiro tipo e ordem  $r$ :

$$I_r(u) = \frac{\left(\frac{u}{2}\right)^r}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \exp[u \cos(\theta)] \sin^{2r}(\theta) d\theta$$

e

$$\Gamma_{(\alpha)} = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t) dt$$

### C.3 Rician (ou Generalized Rayleigh)

A variável aleatória com distribuição *Rician* surge como resultado do raiz quadrada da soma dos quadrados de duas variáveis aleatórias gaussianas estatisticamente independentes e com a mesma variância. Assim, seja

$$\begin{aligned} x_1 &\sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_x^2) \\ x_2 &\sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_x^2) \\ y &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sim \text{Rician} \end{aligned}$$

Se a média das duas VAs gaussianas ( $\mu_1$  e  $\mu_2$ ) for igual a zero, então, essa distribuição também é conhecida simplesmente por *Rayleigh*.

A *pdf* de uma VA Rician pode ser obtida, conforme Kay (1993b), pela seguinte expressão:

$$pdf_{(y)} = \begin{cases} \frac{y}{\sigma_x^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_x^2}(y^2 + \alpha^2)\right] I_0\left(\frac{\alpha y}{\sigma_x^2}\right) & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

sendo  $\alpha = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$  e  $I_0(u)$  a função modificada de Bessel de primeiro tipo e ordem 0.

### C.4 Central, Noncentral e Doubly Noncentral F (Fisher)

A distribuição de probabilidades *Fisher*, ou simplesmente distribuição de probabilidades *F*, resulta da razão entre duas variáveis aleatórias Noncentral Chi-squared indepen-

dentemente distribuídas, normalizadas pelos seus respectivos graus de liberdade.

$$\begin{aligned}x &\sim \chi_{n_x}^2 & y &\sim \chi_{n_y}^2 \\z &= \frac{x/n_x}{y/n_y} \\z &\sim F_{n_x, n_y}\end{aligned}$$

Se o numerador e o denominador tiverem uma distribuição Central Chi-squared a distribuição resultante é chamada Central F. Se apenas o numerador tiver uma distribuição Noncentral Chi-squared, o resultado da razão é chamado Noncentral F. Porém, quando numerador e denominador forem distribuídos conforme uma Noncentral Chi-squared, a razão será conhecida como Doubly Noncentral F.

A *pdf* da distribuição Doubly Noncentral F é:

$$f(\xi) = \frac{n_x}{n_y} e^{-\left(\frac{\lambda_x + \lambda_y}{2}\right)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda_x}{2}\right)^r}{r!} \frac{\left(\frac{\lambda_y}{2}\right)^s}{s!} \frac{\left(\frac{n_x \xi}{n_y}\right)^{\frac{n_x}{2} + r - 1}}{\left(1 + \frac{n_x \xi}{n_y}\right)^{\frac{n_x + n_y}{2} + r + s}} \frac{1}{B\left(\frac{n_x}{2} + r, \frac{n_y}{2} + s\right)} \quad (\text{C.3})$$

sendo:

- $\xi$  a Razão das variáveis Chi-squared:  $x/y \cdot n_y/n_x$ ;
- $n_x$  graus de liberdade da variável aleatória  $x$ ;
- $n_y$  graus de liberdade da variável aleatória  $y$ ;
- $\lambda_x$  o parâmetro de não centralidade da variável aleatória  $x$ ;
- $\lambda_y$  o parâmetro de não centralidade da variável aleatória  $y$ ;
- $B(a, b)$  função Beta com parâmetros  $a$  e  $b$ ;



# Referências Bibliográficas

- Acocella, Emilio C., & Tierra-Criollo, Carlos Julio. 1995. Problemas en la Interpretacion de la FFT. *Pages 298–303 of: XVI Jornadas en Ingeniería Eléctrica y Electrónica*. Escuela Politécnica Nacional, Quito Ecuador.
- Ayhan, Bulent. 2005. *Linguistic Rule Generation for Broken Rotor Bar Detection in Squirrel-cage Induction Motors*. Ph.D. thesis, North Caroline State University.
- Ayhan, Bulent, Chow, Mo-Yuen, & Song, Myung-Hyun. 2005a. Application of Notch Filtering under Low Sampling Rate for Broken Rotor Bar Detection with DTFT and AR based Spectrum Methods. *Industrial Electronics Society, 2005. IECON 2005. 31st Annual Conference of IEEE*, Nov, 6–10.
- Ayhan, Bulent, Chow, Mo-Yuen, & Song, Myung-Hyun. 2005b. Multiple Signature Processing-Based Fault Detection Schemes for Broken Rotor Bar in Induction Motors. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, **20**(2), 336–343.
- Baccarini, Lane Maria Rabelo. 2005. *Detecção e Diagnóstico de Falhas em Motores de Indução*. Ph.D. thesis, Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG.
- Belkhatat, D., Romary, R., Adnani, M. El, Corton, R., & Brudny, J. F. 2003. Fault diagnosis in induction motors using radial magnetic field measurement with an antenna. *Measurement Science and Technology*, **14**(9), 1695 – 1700.
- Brito, Jorge Nei, Filho, Paulo César Monteiro Lamim, & Pederiva, Robson. 2004. Detecção de Falhas em Motores Elétricos Através da Análise de Corrente e Análise de Fluxo Magnético. *In: X Seminário Brasileiro de Manutenção Preditiva e Inspeção de Equipamentos*.
- Cunha, Carla César Martins. 2006. *Modelagem, Análise e Detecção de Assimetrias de Rotor em Máquinas de Indução*. M.Phil. thesis, Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, Belo Horizonte - MG - Brasil.
- de Sá, Antonio Mauricio Ferreira Leite Miranda. 2005. Evaluating Spectral Relationships between Signals by Removing the Contribution of a Common Periodic Source - A Partial Coherence-based Approach. *International Journal of Biomedical Sciences*, **1**(1), 15 – 18.

- de Sá, Antonio Mauricio Ferreira Leite Miranda, Infantosi, Antônio Fernando Catelli, & Simpson, David M. 2002. Coherence between one random and one periodic signal for measuring the strength of responses in the electro-encephalogram during sensory stimulation. *Medical and Biological Engineering and Computing*, **40**, 99 – 104.
- de Sá, Antonio Mauricio Ferreira Leite Miranda, Cagy, Mauricio, Lazarev, Vladimir V., & Infantosi, Antonio Fernando Catelli. 2006. Spectral F-Test Power Evaluation in the EEG During Intermittent Photic Stimulation. *Arq Neuropsiquiatr*, **64**(2-A), 228 – 232.
- Felix, Leonardo Bonato, de Sá, Antonio Mauricio Ferreira Leite Miranda, Infantosi, Antônio Fernando Catelli, & Yehia, Hani Camille. 2007. Multivariate Objective Response Detectors (MORD): Statistical Tools for Multichannel EEG Analysis During Rhythmic Stimulation. *Annals of Biomedical Engineering*, **35**(3), 443 – 452.
- Ferreira, Danton Diego, & de Sá, Antonio Mauricio Ferreira Leite Miranda. 2005. Análise do EEG durante Estimulação Sensorial baseada nas Funções de Coerência Simples, Múltipla e Parcial. *Revista Brasileira de Engenharia Biomédica*, **21**(1), 5 – 14.
- Infantosi, Antônio Fernando Catelli, Melges, D. B., & Tierra-Criollo, Carlos Julio. 2006. Use of magnitude-squared coherence to identify the maximum driving response band of the somatosensory evoked potential. *Brazilian Journal of Medical and Biological Research*, **39**, 1593–1603.
- Infantosi, Antonio Fernando Catelli, & de Sá, Antonio Mauricio Ferreira Leite Miranda. 2007. Evaluating the relationship of non-phase locked activities in the electroencephalogram during intermittent stimulation: a partial coherence-based approach. *International Federation for Medical and Biological Engineering*, July, 635 – 642.
- Infantosi, Antonio Fernando Catelli, Lazarev, Vladimir V., & de Campos, Denir Valencio. 2005. Detecção de resposta a fotoestimulação intermitente no eletroencefalograma utilizando o teste F-Espectral. *Revista Brasileira de Engenharia Biomédica*, **21**(1), 25 – 36. ISSN 1517-3151.
- Kay, Steven M. 1993a. *Fundamentals of Statistical Signal Processing*. 3rd edn. Vol. Volume I - Estimation Theory. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.
- Kay, Steven M. 1993b. *Fundamentals of Statistical Signal Processing - Volume II - Detection Theory*. 3rd edn. Vol. 2. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.
- Kokko, Voitto. 2003. *Condition Monitoring Of Squirrel-Cage Motors By Axial Magnetic Flux Measurements*. M.Phil. thesis, University of Oulu, Faculty of Technology, Finlândia.

- Kral, Christian, Pirker, Franz, & Pascoli, Gert. 2002. Detection of Rotor Faults in Squirrel-Cage Induction Machines at Standstill for Batch Tests by Means of the Vienna Monitoring Method. *IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRY APPLICATIONS*, **38**(3), 618 – 624.
- Kral, Christian, Kapeller, H., Pirker, F., & Pascoli, G. 2005. Discrimination of Rotor Faults and Low Frequency Load Torque Modulations of Squirrel Cage Induction Machines by means of the Vienna Monitoring Method. *Power Electronics Specialists Conference, 2005. PESC '05. IEEE 36th*, 2861 – 2866.
- Kral, Christian, Pirker, Franz, , & Pascoli, Gert. 2008. The Impact of Inertia on Rotor Fault Effects. Theoretical Aspects of the Vienna Monitoring Method. *IEEE Transactions on Power Electronics*, **23**(4), 2136 – 2142.
- Loránd, Szabó, Barna, Dobai Jenő, & Ágoston, Biró Károly. 2004 (Maio). Rotor Faults Detection In Squirrel-Cage Induction Motors By Current Signature Analysis. In: *IEEE-TTTC - International Conference on Automation, Quality and Testing, Robotics*.
- Nandi, Subhasis, & Toliyat, Hamid A. 1999. *Conditioning Monitoring and Fault Diagnosis of Electrical Machines - A Review*. Texas A and M University, URL:[http://www.ece.tamu.edu/empelab/papers/ias'99-nandi review.pdf](http://www.ece.tamu.edu/empelab/papers/ias'99-nandi%20review.pdf).
- Niu, Gang, Son, Jong-Duk, Widodo, Achmad, Yang, Bo-Suk, Hwang, Don-Ha, & Kang, Dong-Sik. 2007. *A Comparison of Classifier Performance for Fault Diagnosis of Induction Motor using Multi-type Signals*. Tech. rept. Structural Health Monitoring.
- Oppenheim, Alan V., Willsky, Alan S., & Nawab, Hamid. 1996. *Signals & Systems*. 2nd edn. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall. ISBN 0-13-814757-4.
- Papoulis, Athanasios. 1991. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. 3rd edn. McGraw Hill, Inc.
- Peyton Z. Peebles, Jr. 1980. *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*. 2nd edn. McGraw Hill, Inc.
- Proakis, John G., & Manolakis, Dimitris G. 1996. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*. 3rd edn. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall. ISBN 0-13-373762-4.
- Pöyhönen, Sanna. 2004. *Support Vector Machine Based Classification in Condition Monitoring of Induction Motors*. Ph.D. thesis, Helsinki University of Technology, P.O. BOX 1000, FIN-02015 HUT.

- Simpson, David M., Tierra-Criollo, Carlos Julio, Leite, Renato T., Zayen, Eduardo J. B., & Infantosi, Antônio Fernando Catelli. 2000. Objective Response Detection in an Electroencephalogram During Somatosensory Stimulation. *Annals of Biomedical Engineering*, **28**, 691–698.
- Stanley Lawrence Marple, Jr. 1987. *Digital Spectral Analysis With Applications*. Alan V. Oppenheim Signal Processing Series. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall. ISBN 0-13-214149-3.
- Stanley Lawrence Marple, Jr., & Kay, Steven M. 1981. Spectrum Analysis-A Modern Perspective. *Proceedings of the IEEE*, **69**(11), 1380 – 1419.
- Thomson, William T, & Gilmore, Ronald J. 2003. Motor Current Signature Analysis To Detect Faults In Induction Motor Drives-Fundamentals Data Interpretation and Industrial Cases Histories. *Proceedings Of The Thirty-Second Turbomachinery Symposium*, 145–156.
- Walck, Christian. 2001. *Hand-book on Statistical Distributions for Experimentalists*. University of Stockholm.
- Wieser, Rudolf, Kral, Christian, Pirker, Franz, & Schagginger, Matthias. 1999. On-Line Rotor Cage Monitoring of Inverter-Fed Induction Machines by Means of an Improved Method. *IEEE Transactions on Power Electronics*, **14**(5), 858 – 865.
- Yeh, Chia-Chou, Mirafzal, Behrooz, Povinelli, Richard J., & Demerdash, Nabeel A. O. 2005. A Condition Monitoring Vector Database Approach for Broken Bar Fault Diagnostics of Induction Machines. *Pages 29–34 of: IEEE International Electric Machines and Drives Conference (IEMDC2005)*.