

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Minas

Dissertação de Mestrado

**"OTIMIZAÇÃO DE CARGA MOEDORA  
UTILIZANDO FERRAMENTAS DE MODELAMENTO  
MATEMÁTICO E SIMULAÇÃO DE MOAGEM"**

Autor: Vladimir Kronemberger Alves  
Orientador: Prof. Antônio Eduardo Clark Peres  
Co-orientador: Prof. Roberto Galéry

Janeiro/06

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Minas

Vladmir Kronemberger Alves

OTIMIZAÇÃO DE CARGA MOEDORA  
UTILIZANDO FERRAMENTAS DE MODELAMENTO  
MATEMÁTICO E SIMULAÇÃO DE MOAGEM

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Minas da Universidade Federal de Minas Gerais

Área de concentração: Tecnologia Mineral  
Orientador: Prof. Antônio Eduardo Clark Peres  
Co-orientador: Prof. Roberto Galéry

Belo Horizonte  
Escola de Engenharia da UFMG  
2006

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus.

E depois a todos que colaboraram na execução deste trabalho, em especial:

Aos meus pais: Dauro Alves e Nadir Thereza Kronemberger Alves pela formação, apoio e incentivo que sempre me deram;

Ao meu Irmão: Alex Kronemberger Alves, meu grande amigo nas horas mais difíceis e por estar sempre ao meu lado;

À Companhia Vale do Rio Doce pela oportunidade de realizar este trabalho, em especial a Keila Lane Carvalho, Maria Cristina Valadares, Paulo Roberto Nogueira, Geraldo Maia, Karina Lima, Airton Fonseca, Roberto Resende, Carlos Alberto Silva, Camilo Carlos da Silva e Rita Virginia;

Ao doutor Cláudio Schneider pelo apoio e ensinamentos;

Ao meu Orientador Antônio Eduardo Clark Peres;

Aos professores Roberto Galéry e Luis Cláudio Montenegro;

Aos Doutores Leonard G. Austin pelos ensinamentos em Carajás e Jaime E. Sepúlveda pela troca de experiências no Chile;

Aos universitários José Fabiano Martins Assunção e Felipe Leonardo de Aguiar.

## Sumário

Lista de Figuras .....	v
Lista de Tabelas .....	vi
Lista de Símbolos .....	vii
Resumo .....	viii
Abstract .....	ix
1. Introdução.....	1
2. Objetivo .....	2
3. Revisão da Literatura .....	2
3.1. Terminologia e Conceitos Básicos .....	2
3.2. Distribuição Granulométrica.....	3
3.3. Circuitos Alternativos de Processamento .....	5
3.4. Condições de Operação de Moinho de Bolas .....	7
3.5. Corpos Moedores.....	9
3.6. Teorias Clássicas de Cominuição .....	9
3.6.1. A primeira lei da cominuição.....	10
3.6.2. A segunda lei da cominuição .....	10
3.6.3. A terceira lei da cominuição .....	11
3.6.3.1. Fatores de Rowland .....	12
3.6.3.2. Cálculo de potência de moinhos de bolas.....	16
3.7. Limitações e Deficiências da Lei de Bond .....	17
3.8. Modelos Fenomenológicos de Processo de Cominuição.....	18
3.8.1. Formulação de modelos .....	19
3.8.1.1. Moinho de batelada.....	19
3.8.1.2. Moagem contínua .....	26
3.8.1.3. A Energia específica como variável de controle do processo. ....	30
3.8.1.4. Um modelo simplificado. ....	33
3.8.1.5. Um caso particular: lei de Bond. ....	36
3.8.1.6. Estimação de parâmetros .....	38
3.8.1.7. Ensaio em laboratório.....	38
3.8.1.7.1. Moinho de torque.....	38
3.8.1.7.2. Estimação de parâmetros por regressão não linear.....	44
3.8.1.7.3. Estimação de parâmetros com o modelo simplificado .....	47
3.9. Modelos Empíricos de Classificação em Hidrociclones.....	48
3.9.1. Eficiência de classificação .....	51
3.9.2. Modelos empíricos de classificação .....	53
3.9.2.1. Modelo de Lynch .....	53
3.9.2.2. Modelo de Plitt.....	58
3.9.2.3. Modelo CIMM.....	61
4. Metodologia .....	63
4.1. Testes Laboratoriais, Piloto e Amostragem Industrial.....	63
4.1.1. Balanço de Massas em circuito industrial.....	65
4.1.2. Ensaio em planta piloto. ....	66
4.1.3. Testes em moinho de torque .....	68
5. Resultados e Discussão .....	70
5.1. Resultados dos Testes de Moagem de Batelada .....	70

5.2. Resultados dos Testes de Moagem em Escala Piloto .....	74
5.3. Resultados da Moagem Industrial com Cylpebs.....	74
5.4. Resultados da Moagem Industrial com Bolas.....	77
6. Conclusões .....	80
7. Referências Bibliográficas .....	81
8. Anexos.....	86

## Lista de Figuras

Figura 3.1 – Representação gráfica dos resultados da análise granulométrica contidos na tabela 3.1.....	4
Figura 3.2 – Circuitos alternativos de moagem.....	6
Figura 3.3 – Corpos moedores mais empregados.....	9
Figura 3.4 – Representação esquemática dos eventos de fratura e geração de fragmentos durante um instante $\Delta t$ , em um moinho de batelada.....	20
Figura 3.5 – Representação gráfica da função distribuição de tempo de residência, $E(t)$ em função de $t$ , segundo o modelo dos misturadores em série (Herbst et al., 1968; Herbst et al., 1973; Herbst et al., 1980; Herbst et al., 1984).....	28
Figura 3.6 – Representação esquemática do comportamento da equação 3.68 em função de seus parâmetros (Sepúlveda, 2001).....	42
Figura 3.7 – Função quebra acumulada versus tamanho para três frações diferentes (Rojas, 1985).....	43
Figura 3.8 – Função quebra acumulada versus tamanho relativo da partícula. Ensaio de moagem em batelada com três monotamanhos diferentes (Sepúlveda, 2001). .....	43
Figura 3.9 – Estrutura lógica da rotina de estimação de parâmetros por regressão não linear (Sepúlveda, 2001). .....	45
Figura 3.10 – Representação gráfica da dependência da função seleção específica e o tamanho de partícula correspondente a partir de cálculos apresentados na tabela 3.2 (Sepúlveda, 2001). .....	48
Figura 3.11 – Exemplo de curvas de eficiência de classificação global e corrigida (Sepúlveda, 2001). .....	51
Figura 3.12 – Representação esquemática dos fluxos de um hidrociclone. ....	57
Figura 4.1 – Fluxograma do circuito industrial Moinho 5M5A – Usina Nibrasco. ....	66
Figura 4.2 – Moinho de torque CDM - CVRD.....	69
Figura 5.1 – Resultados dos ensaios em moinho de torque com carga de bolas. ....	71
Figura 5.2 – Resultados dos ensaios em moinho de torque com carga de cylpebs. ....	72
Figura 5.3 – Função Seleção para bolas e cylpebs. ....	73
Figura 5.4 – Função Quebra para bolas e cylpebs. ....	73
Figura 5.5 – Resultados do escalonamento para os testes piloto. Os gráficos mostram a distribuição de tamanhos no produto do moinho piloto, medida (símbolos) e prevista (linhas contínuas). a) bolas e b) cylpebs .....	74
Figura 5.6 – Simulação do moinho industrial com carga de cylpebs. ....	75
Figura 5.7 – Distribuições de tamanhos medidas (símbolos) e simuladas para o moinho industrial com cylpebs (linhas contínuas).....	77
Figura 5.8 – Simulação do moinho industrial com carga de bolas. ....	78

## Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Exemplo de análise granulométrica .....	4
Tabela 3.2 – Fator de conversão de circuito fechado para circuito aberto. ....	13
Tabela 3.3 – Resultados de ensaios de moagem em moinho de torque.....	40
Tabela 3.4 – Exemplo de estimação de parâmetros por regressão não linear. ....	46
Tabela 4.1 – Balanço de massas do circuito industrial Usina 5, Nibrasco, CVRD – ES Os dados de condições operacionais também foram levantados durante a amostragem e são apresentados na figura 4.1.....	65
Tabela 4.2 – Configurações dos circuitos de moagem piloto para ensaios com carga de cylpebs e bolas.....	66
Tabela 4.3 – Carga de bolas / cylpebs utilizadas nos ensaios de moagem piloto.....	66
Tabela 4.4 – Balanço de massas moinho piloto com carga de cylpebs.....	67
Tabela 4.5 – Balanço de massas moinho piloto com carga de bolas.....	68
Tabela 5.1 – Parâmetros calculados para as funções quebra e seleção do minério de ferro com carga de bolas e cylpebs.....	70
Tabela 5.2 – Simulação do moinho industrial com carga de cylpebs.....	76
Tabela 5.3 – Simulação do moinho industrial com carga de bolas.....	79

## Lista de Símbolos

$V_c$	Velocidade crítica do moinho (RPM)
$\varphi_c$	Fração da velocidade crítica do moinho
$J$	Enchimento do moinho (%)
$f_c$	Fração do volume do moinho ocupada por partículas
$U$	Preenchimento intersticial ocupado por partículas no moinho
$W$	Potência consumida (kWh/st)
$WI$	Work Index( kWh/st)
$R_r$	Relação de Redução
$F_o$	Tamanho Ótimo da Alimentação ( $\mu\text{m}$ )
$F80$	Abertura da peneira por onde passam 80% da massa da alimentação ( $\mu\text{m}$ )
$P80$	Abertura da peneira por onde passam 80% da massa do produto ( $\mu\text{m}$ )
$R_{ro}$	Relação de Redução Ótima
$S_i$	Função Seleção
$B_{ij}$	Função Quebra
$\tau$	Tempo médio de residência da polpa no interior do moinho
$\Gamma(N)$	Função Gama
$\%S_{ALotm}$	Porcentagem de sólidos ótima na alimentação do ciclone
$\%S_{ufmax}$	Porcentagem de sólidos máxima em peso no underflow do ciclone (%)
$\%S_{ofmin}$	Porcentagem de sólidos mínima em peso no overflow do ciclone (%)
$CCotm$	Carga circulante ótima
$WOF$	Vazão de Água no Overflow ( $\text{m}^3/\text{h}$ )
$WF$	Vazão de água na alimentação ( $\text{m}^3/\text{h}$ )
$DO$	Diâmetro do vórtex (pol)
$DU$	Diâmetro do ápex (pol)
$DC$	Diâmetro interno do ciclone (pol)
$DI$	Diâmetro inlet do ciclone (pol)
$Mo$	Recuperação de sólidos no overflow
$Mu$	Recuperação de sólidos no underflow
$Qu$	Vazão volumétrica de polpa no UF ( $\text{m}^3/\text{h}$ )
$Qo$	Vazão volumétrica de polpa no OF ( $\text{m}^3/\text{h}$ )
$\alpha l$	Constante empírica do ciclone
$d_{50c}$	Tamanho de corte corrigido ( $\mu\text{m}$ )
$Q$	Vazão Volumétrica da polpa de alimentação do ciclone ( $\text{m}^3/\text{h}$ )
$P$	Pressão do ciclone (Psi)
$\rho_s$	Densidade do Minério ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )
$\phi$	Porcentagem de sólidos, em volume, da alimentação (%)
$b$	Tamanho da bola de reposição (pol)
$K_w$	Potência líquida demandada pelo moinho (Kw)

## **Resumo**

O objetivo deste trabalho é utilizar ferramentas de modelamento matemático e simulação de moagem na avaliação de diferentes cargas moedoras e otimização do moinho 5M5A da usina 5 – Nibrasco da CVRD.

Inicialmente fez-se uma amostragem completa da usina industrial, operando com carga de cylpebs, para fechamento de balanço de massas, cujos dados foram utilizados para calibração do modelo de ciclonagem.

A amostra coletada na alimentação da usina foi utilizada em testes de bancada em moinho de torque utilizando cargas de bolas e cylpebs para levantamento dos parâmetros de quebra que foram posteriormente confirmados em escala piloto.

Como o circuito industrial estava operando com cylpebs, o modelo pôde ser também validado para esta escala, comprovando a robustez do mesmo. Em seguida foram utilizados os parâmetros de quebra com bolas para simulação do circuito industrial de moagem. Com isso foi possível perceber que a carga de bolas proporcionava um melhor desempenho na moagem.

**Abstract**

This work aims at the use of grinding mathematical modelling tools and simulation for the assessment of different mill charges and for the optimization of the 5M5A mill at plant 5 – Nibrasco CVRD.

At first, a complete sampling procedure was performed at the industrial plant, operating with a cylpebs charge, for the material balance adjustment, which data were used for the hydrocyclone model calibration.

The sample collected at the industrial plant feed was used in torque mill test using balls and cylpebs charges to estimate breakage parameters which were confirmed in the pilot plant.

As the industrial plant was operating with cylpebs, the model was also validated in this scale, confirming its accuracy. Then the breakage parameters for balls were utilized for the simulation of the grinding industrial circuit. Therefore it was possible to verify that the balls charge provided a better grinding performance.

## 1. Introdução

O processo de cominuição constitui uma etapa importante na recuperação de bens minerais. Tanto da parte econômica como da adequação de suas propriedades físicas e mineralógicas, o produto do moinho determina a eficiência das etapas de separação, concentração ou adequação da granulometria de produtos subsequentes.

O elevado consumo de energia, característico de todas as distintas metodologias de fragmentação atualmente em prática, constitui-se, sem dúvida, num dos principais itens de custo do processo extrativo. Tal situação permite concluir que existe a necessidade de pesquisa e desenvolvimento de novas alternativas operacionais que agreguem melhorias concretas na eficiência global do processo de moagem, utilizando para isso as mais avançadas metodologias de avaliação.

Nesse contexto, a formulação de modelos matemáticos e sua posterior incorporação a um simulador serve como uma poderosa ferramenta para avaliação das mais diversas alternativas operacionais.

Nos capítulos seguintes é descrita em detalhes uma aplicação específica dessa metodologia de análise, em um caso particular de um circuito de moagem e classificação com moinho de bolas e hidrociclone. Primeiramente, será apresentada uma breve revisão da teoria clássica de cominuição, cuja formulação iniciou-se durante a segunda metade do século XIX. Em continuação, são descritas as equações fundamentais de um modelo fenomenológico de sistemas de cominuição de crescente aceitação e aplicação durante as últimas décadas, além de uma síntese dos diversos modelos empíricos de hidrociclones propostos na literatura. Para concluir, será apresentado um exemplo de aplicação destes modelos a um sistema prático de moagem da usina Nibrasco em Vitória, no porto de Tubarão da CVRD, cujo produto é utilizado no processo de pelotização de minério de ferro.

## **2. Objetivo**

Este trabalho visa avaliar a possibilidade de otimização da carga moedora de um moinho industrial, utilizando ferramentas de modelamento matemático e simulação de moagem e classificação.

## **3. Revisão da Literatura**

### **3.1. Terminologia e Conceitos Básicos**

Nas diversas etapas de cominuição e concentração de minerais, o tamanho das partículas é sem dúvida a variável de maior relevância operacional. O comportamento do mineral nas etapas de britagem, moagem, flotação e separação sólido/líquido depende do tamanho das partículas tratadas, variável que requer definição e quantificação.

O tamanho de uma partícula é a dimensão representativa de sua extensão no espaço. Esta pode ser caracterizada por uma dimensão linear, tal como o comprimento de uma reta que cruza a seção projetada pela partícula a partir de uma posição predeterminada. Dependendo da técnica de medição utilizada, é possível também caracterizar o tamanho de uma partícula sobre a base de sua área superficial, seu volume ou seu peso e se possível também definir relações matemáticas de equivalência entre distintas metodologias.

Na área mineral, a técnica predominante é a utilização de malhas de peneiras de abertura padrão calibrada. Nesse caso, o tamanho da partícula fica caracterizado pela máxima abertura da malha pela qual a partícula é retida.

### 3.2. Distribuição Granulométrica

Nas diversas etapas de cominuição, objetiva-se liberação das espécies valiosas e produção de partículas de vários tamanhos. A fim de se caracterizar o comportamento metalúrgico de cada operação individual, surge então a necessidade de se quantificar as partículas de um dado tamanho relativo ao total de partículas de uma amostra, propriedades normalmente referidas como “distribuição granulométrica”, ou simplesmente “granulometria”.

A metodologia normalmente utilizada em plantas concentradoras de minerais consiste em se fazer passar a amostra por uma série de peneiras ordenadas seqüencialmente da maior para a menor abertura. A tabela 3.1 apresenta um exemplo desse procedimento. Com esses dados constrói-se um gráfico, em papel logarítmico, onde a porcentagem passante acumulada fica no eixo da ordenada enquanto a abertura da malha em micrometros fica na abscissa, conforme figura 3.1. Costuma-se também definir o tamanho  $d_{80}$  como a abertura da malha através da qual passa 80 % do material em peso. Para o caso particular, representado na figura 3.1, o valor de  $d_{80}$  é  $290\mu\text{m}$ .

Tabela 3.1 – Exemplo de análise granulométrica

Análise granulométrica				
Malha Tyler	Abertura $\mu\text{m}$	Massa Retida (g)	% Retida	%Passante Acumulado
28	600	14,2	3,33	96,70
35	425	27,8	6,45	90,25
48	300	37,7	8,74	81,51
65	212	47,3	10,96	70,55
100	150	40,6	9,41	61,14
150	106	38,2	8,86	52,28
200	74	33,4	7,75	44,53
270	53	26,7	6,20	38,33
400	37	16,3	3,79	34,56
-400	0	149,1	34,56	-
Total		431.3	100.00	

### Distribuição Granulométrica

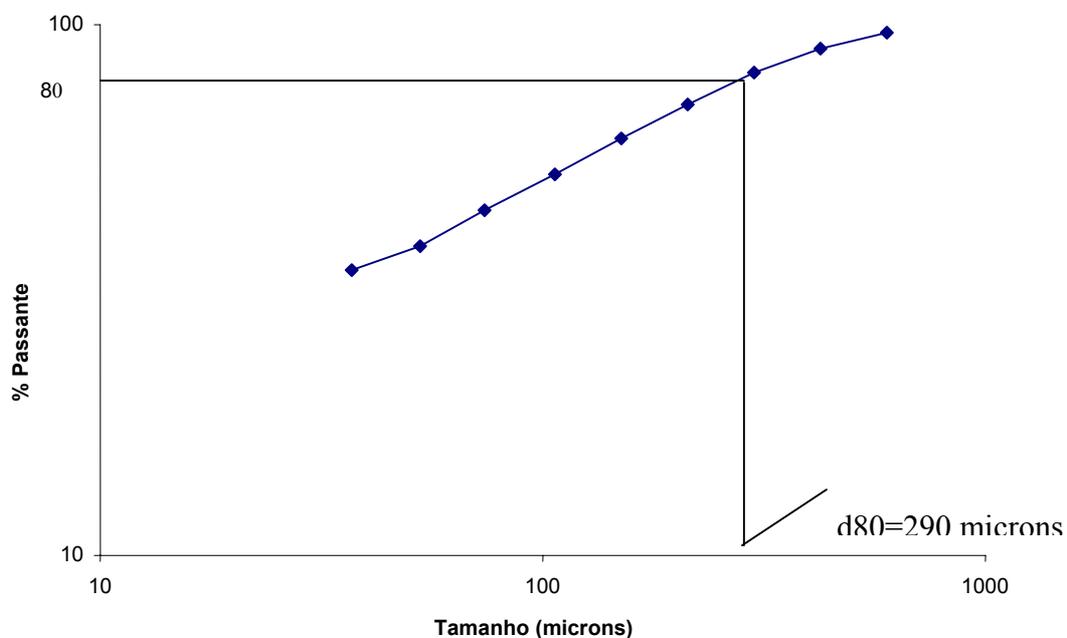


Figura 3.1 – Representação gráfica dos resultados da análise granulométrica contidos na tabela 3.1.

### 3.3. Circuitos Alternativos de Processamento

Existem duas configurações básicas de processamento para circuitos de moagem/classificação, normalmente referidas como circuito direto e circuito reverso. Tal como se indica esquematicamente na figura 3.2, o circuito direto se caracteriza pela alimentação do mineral fresco diretamente no moinho, juntamente com o fluxo do *underflow* do classificador. Ao contrário, o circuito reverso é caracterizado por alimentar o mineral fresco primeiramente nos classificadores, onde o *underflow* da classificação alimenta o moinho. Em ambos os casos o *overflow* do classificador é o produto final.

Em termos gerais, pode-se afirmar que o circuito reverso será mais vantajoso nas aplicações onde a alimentação nova do circuito contenha uma proporção importante de material fino, ou seja, dentro da especificação granulométrica do produto. É o caso de instalações com duas etapas de moagem em que um moinho de barras ou SAG / AG precede o moinho de bolas em circuito fechado. Reciprocamente, quando a alimentação vem de um circuito de britagem, é mais comum se adotar o circuito direto para diminuir o desgaste excessivo das bombas, produzido pelas partículas mais grosseiras. Como é de se esperar, o comportamento metalúrgico de ambas as configurações será tão diferente quanto maior for a proporção de finos na alimentação nova.

Independentemente de qual seja a configuração, os valores que se deseja conhecer e controlar são:

- Consumo específico de energia (E), expresso em kWh/t, que representa o consumo líquido de energia (kWh) por cada tonelada de alimentação nova processada, o equivalente à potência demandada (kW) por t/h processada.
- Carga circulante (CC), definida como a razão entre a tonelada seca de descarga do *underflow* e do *overflow* do classificador.

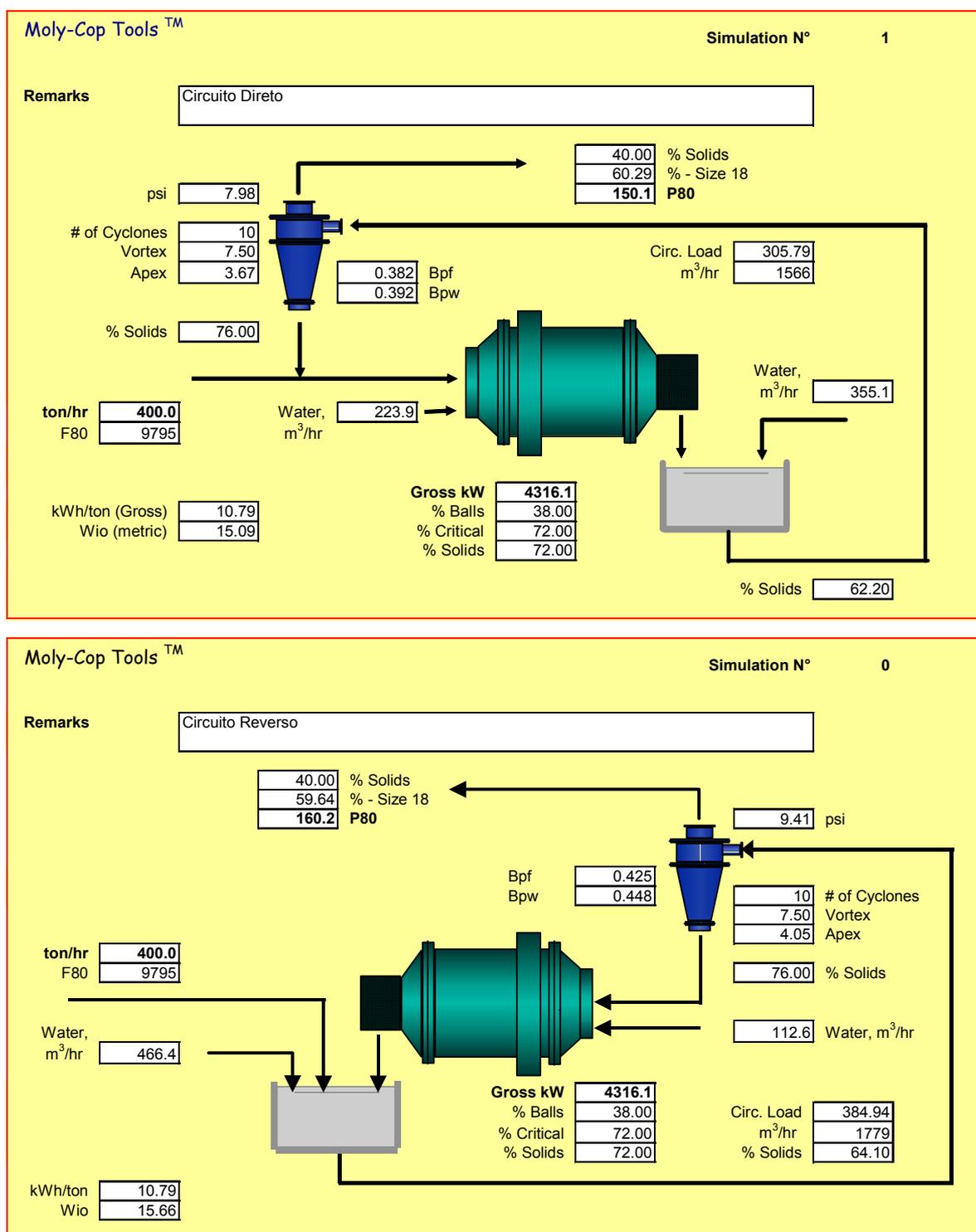


Figura 3.2 – Circuitos alternativos de moagem.

Esses indicadores, em conjunto com o balanço de massas do circuito, proporcionam a base empírica sobre a qual deverá sustentar-se qualquer análise posterior.

### 3.4. Condições de Operação de Moinho de Bolas

O moinho de bolas contém uma massa de partículas que está sendo fraturada, cuja finura depende do tempo que o material permanece retido no interior do mesmo. O produto se torna mais grosso quando se aumenta o fluxo de alimentação no moinho.

Define-se como velocidade crítica do moinho a velocidade de rotação na qual as bolas começam a centrifugar nas paredes do moinho. Fazendo-se um balanço entre força da gravidade e força centrífuga sobre uma bola na parede do moinho, a velocidade crítica é determinada por:

$$V_c = \frac{76,6}{\sqrt{D-d}} \text{ RPM} ; D \text{ e } d \text{ em pés} \quad (3.1)$$

$$V_c = \frac{42,2}{\sqrt{D-d}} \text{ RPM} ; D \text{ e } d \text{ em metros} \quad (3.2)$$

Onde  $V_c$  é velocidade crítica em RPM,  $D$  é o diâmetro interno do moinho e  $d$  é o diâmetro máximo das bolas. É racional esperar que o movimento da carga no interior do moinho dependa da velocidade de operação do moinho, dessa maneira a velocidade de rotação é normalmente definida de  $\varphi_c$ , fração da velocidade crítica.

A ação do movimento da carga depende do enchimento do moinho. O enchimento do moinho é determinado pela expressão abaixo:

$$J(\%) = 113 - 126 \frac{H_c}{D_m} \quad (3.3)$$

onde  $H_c$  é a distância entre o topo da carga em repouso até o topo da carcaça interna (considerando o revestimento) em metros;  $D_m$  é o diâmetro interno do moinho em metros e  $J$  é o volume percentual ocupado pela carga moedora.

Para converter o volume de carga em massa total de bolas, ou vice-versa, é necessário conhecer a densidade aparente da carga de bolas. A porosidade da carga varia ligeiramente com a mistura de tamanhos de bolas. Para facilitar os cálculos, define-se uma porosidade nominal constante. Diferentes indústrias usam valores com uma pequena diferença para a porosidade. Por definição, será usado um valor de 0,4 para a porosidade nominal da carga de bolas no exemplo a seguir.

$$J = \frac{\text{massa total de bolas} / \text{densidade aparente do leito de bolas}}{\text{volume do moinho}} \quad (3.4)$$

ou

$$J = \frac{\text{massa total de bolas} / \text{densidade das bolas}}{\text{volume do moinho}} \cdot \frac{1}{1 - \text{porosidade do leito de bolas}} \quad (3.5)$$

ou

$$J = \frac{\text{massa total de bolas} / \text{densidade das bolas}}{\text{volume do moinho}} \cdot \frac{1}{0.6} \quad (3.6)$$

Similarmente, a carga de partículas é expressa como uma fração do volume do moinho:

$$f_c = \frac{\text{massa total das partículas} / \text{densidade do material}}{\text{volume do moinho}} \cdot \frac{1}{0.6} \quad (3.7)$$

O preenchimento intersticial  $U$ , é calculado por:

$$U = \frac{f_c}{0.4J} \quad (3.8)$$

### 3.5. Corpos Moedores

Os moinhos são carregados com partículas metálicas denominadas corpos moedores, cujo tipo identifica os moinhos como moinho de bolas, moinho de cylpebs, etc. Certos minérios apresentam características especiais de formar corpos moedores. Neste caso, o próprio minério é utilizado com meio moedor e o moinho é carregado com uma pequena quantidade de bolas ou totalmente isento delas. São os chamados moinho semi-autógeno ou autógeno, respectivamente.

Nos moinhos tubulares convencionais, cerca de 40% do volume interno do moinho é ocupado pela carga moedora e pelo mineral a ser moído.

Os corpos moedores mais freqüentemente empregados no setor mineral são cilindros, cylpebs e bolas, podendo ser usados entre-seixos ou fragmentos do próprio mineral a ser moído. Na figura 3.3 são mostrados esses corpos.

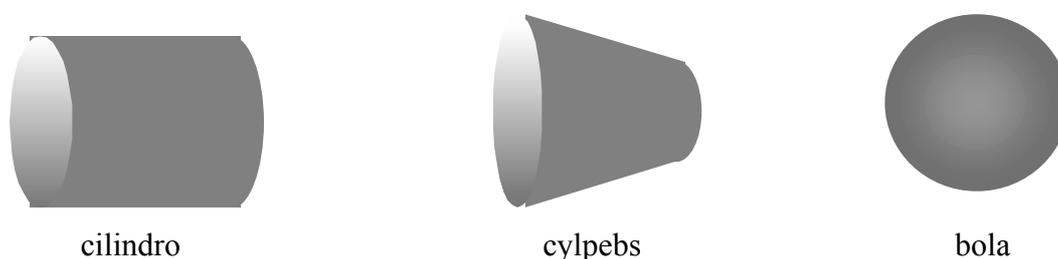


Figura 3.3 – Corpos moedores mais empregados.

Existem atualmente estudos de aplicação de outros tipos de corpos moedores em moinhos tubulares, os quais não serão descritos neste trabalho por ainda terem uma aplicação muito pequena ou por ainda não estar consolidada sua aplicação no meio mineral.

### 3.6. Teorias Clássicas de Cominuição

Na metade do século XIX surgiu a necessidade de estabelecer condições padrão de operação de equipamentos de moagem devido à crescente produção de minerais. Distintos grupos de pesquisadores gastaram bastante esforço tentando a formulação e verificação empírica de relações matemáticas que caracterizassem os diversos

mecanismos de fratura que ocorrem nos moinhos de bolas. Esses pesquisadores definiram vários postulados que serão descritos abaixo, sem o objetivo de entrar em detalhes.

### **3.6.1. A primeira lei da cominuição**

A primeira lei de redução de tamanho foi de von Rittinger (von Rittinger, 1867), que determinou que a relação entre a energia específica consumida e o incremento de superfície específica gerada por redução de tamanho no moinho é diretamente proporcional à nova superfície gerada. A superfície específica de uma tonelada de partículas uniformes de diâmetro  $d$  é proporcional a  $1/d$ , e segundo Rittinger a energia útil consumida por tonelada é também proporcional a  $1/d$ . Quase toda energia aparece como calor depois da fratura das partículas.

Esta teoria considera somente a energia necessária para produzir a ruptura de corpos sólidos ideais (homogêneos, isotrópicos e sem falhas), uma vez que o material tenha alcançado sua deformação crítica do limite de ruptura.

### **3.6.2. A segunda lei da cominuição**

A segunda lei foi proposta por Kick (Kick, 1885). Ela considera que a energia requerida é proporcional à redução do volume das partículas, que significa que iguais quantidades de energia produzirão iguais mudanças geométricas no tamanho de um sólido. Nessa teoria Kick considerou que a energia utilizada na fratura de um corpo sólido ideal (homogêneo, isotrópico e sem falhas) era só aquela necessária para deformar o sólido até seu limite de ruptura, desprendendo a energia adicional para produzir a ruptura do mesmo. Assim, por exemplo, se para romper um corpo em duas partes iguais é necessária uma unidade de energia, então, para romper essas duas partes em quatro, é necessária outra unidade de energia e assim por diante. Dessa maneira, o segundo postulado de Kick considera que a energia consumida por tonelada de material é

proporcional à razão  $\log(Rr)/\log(2)$ , onde  $Rr$  é a razão de redução definida por  $f/p$ , onde  $f$  é o tamanho máximo da alimentação e  $p$  é o tamanho máximo do produto (em micrometros).

### 3.6.3. A terceira lei da cominuição

Em 1952, Bond (Bond, 1952) postulou a Terceira Lei ou Teoria da Cominuição, como resultado de uma extensa pesquisa em escalas de laboratório, piloto e industrial. Fixou pontos específicos a respeito do dimensionamento de moinhos requeridos para alcançar um determinado objetivo, em termos de capacidade de tratamento e finura do produto moído. Sem pretender desconsiderar ou diminuir tal valioso estudo, cabe sim informar que Bond não considerou, pelo menos explicitamente, a importância das opções do processo de classificação e da eficiência global da operação. Especificamente, em caso de circuitos tradicionais de moagem, como os mostrados na figura 3.2, esta terceira lei não permite solucionar as diversas discrepâncias descritas acima. Onde enunciou:

“O consumo específico de energia do processo de redução de tamanho é inversamente proporcional à raiz quadrada do tamanho”.

A potência consumida é dada por:

$$W = 10WI \left( \frac{1}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{1}{\sqrt{A_{80}}} \right) \quad (3.9)$$

onde:

$W$  = potência consumida;

$F_{80}$  e  $P_{80}$  são os  $d_{80}$  do produto e da alimentação, respectivamente.

$WI$  = Work Index (kWh/st).

### 3.6.3.1. Fatores de Rowland

Esta equação de Bond dá o consumo de potência  $W$  em kWh/st para moagem por via úmida num moinho que tenha diâmetro interno de 8' (2438 mm).

A fórmula é válida para moinhos de barras, se operarem em circuito aberto e para moinhos de bolas, em circuito fechado.

Para se obter os valores de consumo de potência relativos a outras condições de trabalho diferentes das consideradas acima, o valor  $W$  deverá ser multiplicado pelos fatores de eficiência de Rowland (Rowland, 1973) EF aplicáveis ao caso em consideração. Até a presente data são usados 8 fatores de eficiência (EF1 a EF8).

EF1 – Moagem a seco.

Se a moagem for feita a seco, multiplicar o valor de  $W$  por 1,3 (moagem a seco consome 30% de energia a mais que a moagem via úmida).

EF2 – Moinho de bolas em circuito aberto.

A equação 3.9. foi desenvolvida para circuitos de moagem fechado. Para utilizar circuito aberto é necessário introduzir um fator de correção EF2, conforme mostrado na tabela 3.2, onde  $p_1$  é a malha de separação do teste de Bond e  $P(p_1)$  é a porcentagem menor que a malha  $p_1$  desejado no produto do circuito aberto de moagem industrial.

Tabela 3.2 – Fator de conversão de circuito fechado para circuito aberto.

P(p1)	EF2
50	1,035
60	1,05
70	1,10
80	1,20
90	1,40
92	1,46
95	1,57
98	1,70

EF3 – Diâmetro interno do moinho

Se o diâmetro interno do moinho for diferente de 8', multiplique por:

$EF3 = (8/D)^{0,2}$ , se D (diâmetro interno do moinho) estiver em pés, ou

$EF3 = (2,44/D)^{0,2}$ , Se D for em metros.

EF4 – Alimentação muito grossa

O tamanho ótimo de alimentação para moinhos de bolas e de barras é estabelecido pelo tamanho de alimentação que a carga mais eficiente distribuída possa moer.

Um moinho alimentado com tamanhos maiores requer corpos moedores maiores, resultado numa maior dispersão dos tamanhos desses corpos moedores, o que reduz a eficiência da ação de moagem.

O tamanho máximo ótimo de alimentação é também função do “Work Index” do minério. O tamanho máximo ótimo de alimentação corresponde a 80% passante e é dado pelas seguintes equações:

$$\text{Para moinhos de barras: } F_0 = \sqrt{\frac{13}{WI}} \times 16.000(\mu m) \quad (3.10)$$

Para moinhos de bolas:  $F_0 = \sqrt{\frac{13}{WI}} \times 4.000(\mu m)$  (3.11)

O fator EF4 é calculado pela equação abaixo

$$EF = \frac{Rr + (WI - 7)(F_{80} - F_0) / F_0}{Rr} \quad (3.12)$$

Onde:  $R_r = \frac{F_{80}}{P_{80}}$  = relação de redução.

EF5 – Moagem extremamente fina

Quando a moagem é fina, tal que  $P_{80} < 75 \mu m$  em moagem a úmido e  $15 \mu m \leq 75 \mu m$  em moagem seca, o valor do consumo energético deve ser corrigido por:

$$EF5 = \frac{P_{80} + 10,3}{1,145 \times P_{80}} \quad (3.13)$$

EF6: Fator de taxa de redução – moinho de barras

A taxa de redução ótima é dada por:

$$Rr_0 = 8 + \frac{5L}{D}$$

Onde: L = comprimento das barras em pés

D = diâmetro do moinho em pés, medido internamente ao revestimento.

Para moinhos de barras de descarga central periférica, a taxa de redução ótima será metade do valor  $Rr_0$  calculado.

O fator EF6 é calculado pela seguinte fórmula:

$$EF6 = 1 + \frac{(Rr - Rr_0)^2}{150} \quad (3.14)$$

Peres (Peres, 1988) verificou um erro de super dimensionamento quando ocorrem concomitantemente valores de WI inferiores a 7 kWh/st e a aplicação de EF6. Nesta situação, ou seja,  $WI < 7,0$  e  $RR \geq RR_0 + 2$  ou  $RR \leq RR_0 - 2$ , usar  $EF6 = 1,2$ .

EF7 – Relação de redução de um moinho de bolas inferior a 6'.

Para relações de redução em moinhos de bolas inferior a 6', se deve corrigir o consumo energético com o fator EF7.

$$EF7 = \frac{(Rr - 1,35) + 0,26}{2 \times (Rr - 1,35)} \quad (3.15)$$

EF8 – Ineficiência dos moinhos de barras.

Fator de ineficiência dos moinhos de barras serve para compensar a diferença entre as potências calculadas pela fórmula e as potências consumidas na realidade:

- Moinho de barras sozinho no circuito de moagem:

$EF8 = 1,4$  , se a alimentação vem de um circuito aberto de britagem.

$EF8 = 1,2$  , se a alimentação vem de um circuito fechado de britagem.

- Moinho de barras operando em conjunto com moinho de bolas, sem classificação entre ambos:

EF8 = 1,2 , se a alimentação vem de um circuito aberto de britagem.

EF8 = 1,0 , se a alimentação vem de um circuito fechado de britagem e se ela tiver  $F_{80} \leq 1/2''$  .

### 3.6.3.2. Cálculo de potência de moinhos de bolas

Para dimensionamento do moinho é necessário saber o valor de potência consumida pelo equipamento a seguir serão apresentadas as equações de cálculo de potência mais utilizadas no mercado.

Equação de Bond (Bond, 1960)

$$KW = 7.33AJ\varphi_c(1 - 0,937J)\left(1 - \frac{0,1}{2^{9-10\varphi_c}}\right)\rho_b LD^{2,3} \quad (3.16)$$

onde:

A = 1 para moagem a úmido em moinho por *over flow*;

A = 1,16 para moinho a úmido com grelha;

A = 1,08 para moagem a seco

D = diâmetro em metros

L = comprimento em metros

J = fração de enchimento de carga do moinho

$\varphi_c$  = fração da velocidade crítica do moinho

Equação de Rowland (Rowland, 1969)

$$KW / t \text{ bolas} = 4.879D^{0,3} (3,2 - 3J)\varphi_c \left(1 - \frac{0,1}{2^{9-10\varphi_c}}\right) + S \quad (3.17)$$

onde

$$S = 1,102 \times \left( \frac{b - 12,5 \times D}{50,8} \right) \quad (3.18)$$

b = tamanho da bola de reposição em polegadas

Rowland recomenda multiplicar o valor da potência por:

1,16 – moagem a seco, diafragma no nível mais baixo.

1,08 – moagem a seco, diafragma no nível mais alto.

### 3.7. Limitações e Deficiências da Lei de Bond

As três primeiras leis da cominuição, particularmente a terceira postulada por Bond (Bond, 1952), têm sido extensivamente aplicadas para dimensionamento de novas instalações nas últimas décadas. Assim, pode-se afirmar que a metodologia de dimensionamento proposta por Bond é a metodologia padrão adotada por todas as empresas especializadas de engenharia, sem exceção.

Para a evolução de alternativas operacionais com fins otimizações, a relação de Bond, com uma precisão estimada em +/- 20%, tem-se demonstrado claramente insatisfatória. Apesar de reconhecer a relação existente entre consumo específico de energia e tamanho de produto, ela é demasiadamente sucinta em sua descrição de processo. Assim, por exemplo, a lei de Bond não considera a importância da água no sistema de moagem a úmido operando em circuito fechado com hidrociclones onde a eficiência desses últimos como classificadores é fortemente dependente da capacidade específica de água dosada no circuito. Tão pouco é possível, a partir da equação 3.9 proposta por Bond, ou em qualquer uma das teorias anteriores, prever a razão de carga circulante a desenvolver para o sistema, cujo impacto no comportamento operacional do circuito não pode ser ignorado.

Essas sérias limitações e outras, tais como a geração de finos no circuito, motivaram o interesse de diversos grupos de pesquisadores sobre a maneira de desenvolver novas

metodologias de análise, apoiadas em uma caracterização matemática significativamente mais detalhada dos distintos mecanismos básicos operacionais do processo. Nos capítulos seguintes está resumido o avanço alcançado até o momento nesta metodologia.

### **3.8. Modelos Fenomenológicos de Processo de Cominuição**

Durante os últimos anos, distintos grupos de pesquisadores (Bond et al., 1949; Bond et al., 1954; Kelsall et al., 1965; Herbst et al., 1968; Herbst et al., 1973; Herbst et al., 1980; Austin et al., 1984; Lynch, 1977) têm empregado grande esforço na formulação e verificação empírica de relações matemáticas teóricas que caracterizem os diversos mecanismos de fratura que ocorrem na moagem de bolas e outros equipamentos afins. Afortunadamente, tem-se alcançado níveis de precisão e detalhe satisfatórios para um número de aplicações de relevância prática:

- Na evolução de circuitos alternativos de processamento
- Na otimização operacional de instalações existentes
- No dimensionamento adequado de novas instalações
- No controle de processos

No presente capítulo é feita uma síntese do avanço alcançado até o momento na formulação de modelos matemáticos de processo de moagem, as diversas metodologias propostas para a estimação de parâmetros característicos e dos critérios de escalonamento de laboratório / planta sugeridos para o dimensionamento de instalações industriais, centrando a atenção no enfoque dado por Herbst (Herbst et al., 1968; Herbst et al., 1973; Herbst et al., 1980).

### 3.8.1. Formulação de modelos

#### 3.8.1.1. Moinho de batelada

Das distintas operações no processo clássico de concentração de minerais, a moagem se destaca como aquela que tem o maior avanço na caracterização e modelamento matemático, superando os limites inerentes da metodologia proposta por Bond (Bond, 1952; Bond, 1949; Bond, 1954).

O novo enfoque, baseado na equação do balanço populacional (Herbst et al., 1973), aponta novos conceitos: Função Seleção (S) e a Função Quebra (B). A primeira tem relação com a cinética ou a velocidade de fratura de cada partícula e a segunda tem relação com a distribuição granulométrica dos fragmentos produzidos como consequência do evento de fratura.

A Figura 3.4 ajuda a definir com maior clareza esses conceitos. Considere que em um instante  $t$  qualquer, a distribuição granulométrica da carga do moinho ( $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) fique representada pelo conteúdo das distintas peneiras no setor esquerdo dessa figura e que após um tempo  $\Delta t$  de moagem ela se distribui nos intervalos inferiores representados no setor direito da figura e receba material proveniente dos intervalos superiores, desse modo, está sendo representado o nascimento e morte de uma determinada população de partículas.

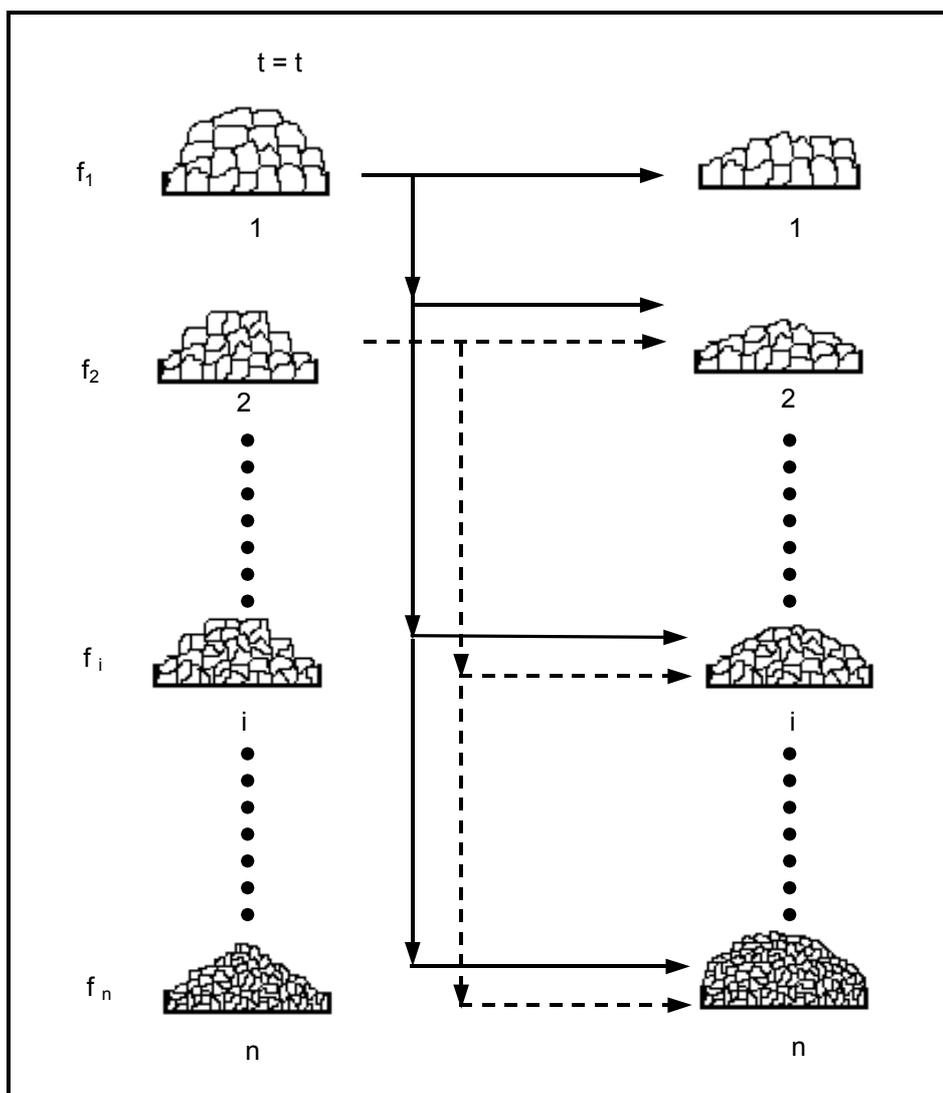


Figura 3.4 – Representação esquemática dos eventos de fratura e geração de fragmentos durante um instante  $\Delta t$ , em um moinho de batelada.

Assim, transcorrido um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a granulometria resultante ficará representada pela série de peneiras do lado direito da Figura 3.4. Durante esse intervalo, algumas partículas serão fragmentadas e seus fragmentos redistribuídos entre as malhas inferiores segundo a distribuição resultante. Para os sólidos retidos em uma malha “i” qualquer, a função seleção  $S_i$  ( $\text{min}^{-1}$ ) representa a velocidade de fragmentação, ou seja, a fração das partículas que se fraturam por unidade de tempo. O produto  $(S_i \Delta t)$  representa a fração, em peso, do material retido na malha “i”, no instante  $t$ , que é quebrado ou fragmentado pela ação do meio moedor durante o período  $\Delta t$  imediatamente posterior. A função quebra  $b_{ij}$  representa a fração, em peso, dos fragmentos provenientes da fratura de partículas retidas na malha “j” que serão retidos

na malha “i” inferior. Arbitrariamente, se define a malha “i” como a mais grossa e “n” a mais fina.

Em consequência, se H representa a massa total de sólidos contidos no interior do moinho, é possível definir, para cada malha “i”, o seguinte balanço populacional de partículas:

$$\begin{aligned}
 f_i(t + \Delta t) \cdot H &= f_i(t) \cdot H && \{\text{Quantidade de sólidos retida na malha “i” no tempo } t\} \\
 - S_i \Delta t f_i(t) \cdot H &&& \{\text{Quantidade de sólidos que saíram da malha “i” por fratura}\} \\
 + b_{i1} S_1 \Delta t f_1(t) \cdot H &&& \{\text{Quantidade de novos fragmentos retidos na malha “i”} \\
 &&& \text{originados pela quebra de partículas da malha “1”}\} \\
 + b_{i2} S_2 \Delta t f_2(t) \cdot H &&& \{\text{idem anterior, porém provenientes da malha “2”}\} \\
 + b_{i,i-1} S_{i-1} \Delta t f_{i-1}(t) \cdot H &&& \{\text{idem anterior, porém provenientes da malha “i-1”}\}
 \end{aligned}$$

o que equivale:

$$\frac{f_i(t + \Delta t) - f_i(t)}{\Delta t} = -S_i f_i(t) + \sum_{j=1}^{j=i-1} b_{ij} S_j f_j(t); i = 1, 2, \dots, n \quad (3.19)$$

e no limite, quando  $\Delta t \rightarrow 0$  se obtém:

$$\frac{df_i}{dt} = -S_i f_i + \sum_{j=1}^{j=i-1} b_{ij} S_j f_j; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.20)$$

A equação 3.20 define um sistema de n equações diferenciais que pode ser representado por uma única equação matricial. Seja:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} S_1 & & & & & \\ & S_2 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & S_{n-1} \\ & & & & & & S_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ b_{21} & 0 & & & & \\ b_{31} & b_{32} & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & & & 0 \end{pmatrix}$$

então a equação 3.20 pode ser escrita como:

$$\frac{df}{dt} = -(I - B)Sm \quad (3.21)$$

Onde I representa a matriz inversa, B matriz triangular inferior da função quebra e S a matriz diagonal da função seleção.

Uma solução analítica da equação acima é possível se S e B são constantes, isso é, formalmente não variam com o tempo:

$$f(t) = \exp(-(I - B)St)f^0 \quad (3.22)$$

onde  $f^0$  é o vetor da granulometria inicial ( $t=0$ ).

A solução da equação 3.22 é normalmente simples, mas computacionalmente ambígua, porque compõe-se de um exponencial matricial. Existem muitos métodos (pelo menos 19) (Sepúlveda et al., 1983) para calcular essa exponencial.

Seja T a matriz dos vetores de  $[-(I-B)S]$  e J a matriz diagonal que contém a dependência temporal da solução. Então a solução pode ser escrita como (Herbst et al., 1968; Herbst et al., 1973; Herbst et al., 1980) :

$$f(t) = T_{ij} J_{ij} T_{ij}^{-1} f^o \quad (3.23)$$

onde:

$$J_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ \exp(-S_i t), & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$T_{ij} = \begin{cases} 0; & \text{se } i < j \\ 1; & \text{se } i = j \\ \sum_{k=i}^{k=j} \frac{b_{ik} S_k}{S_i - S_j} T_{kj}; & \text{se } i > j \end{cases}$$

Nota-se que a matriz J é diagonal e a matriz T é triangular inferior.

Dessa maneira, a equação 3.21, normalmente referida como o modelo “linear” do moinho de batelada ou descontínuo, permite calcular a granulometria dos sólidos resultantes após um tempo de moagem t, a partir de sua granulometria inicial, sempre que se tenha levantado os parâmetros cinéticos S e B, característicos do mineral e das condições do ensaio.

Uma forma equivalente da equação 3.20, de utilidade para algumas derivações posteriores, é obtida a partir da combinação por soma de termo a termo das primeiras “i” equações:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_1^{k=i} f_k \right) = - \sum_1^{k=i} S_k f_k + \sum_1^{k=i} \sum_1^{j=k-1} b_{kj} S_j f_j \quad (3.24)$$

e definindo:

$$R_i = \sum_1^{k=i} f_k = \text{fração acumulada retida na malha "i"}.$$

então a equação 3.24 se reduz a:

$$\frac{d}{dt} R_i = - \sum_1^{k=j} S_k f_k + \sum_1^{k=j} \sum_1^{j=k} b_{kj} S_j f_j \quad (3.25)$$

onde o duplo somatório foi agregado aos termos  $b_{kk} S_k f_k$  corresponde a  $j = k$ , afirmando que  $b_{kk} = 0$ , para todo  $k$ . Afirmando também que:

$$\sum_1^{k=i} \sum_1^{j=k} b_{kj} S_j f_j = \sum_1^{j=i} \sum_j^{k=i} b_{kj} S_j f_j \quad (3.26)$$

obtém-se:

$$\frac{dR_i}{dt} = - \sum_1^{k=i} S_k f_k + \sum_1^{j=i} \left( \sum_1^{k=i} b_{kj} \right) S_j f_j \quad (3.27)$$

definindo:

$B_{ij} = \sum_{i+1}^{k=n} b_{kj} = \text{fração acumulada de fragmentos passantes na malha "i", provenientes da}$   
 fração de partículas retidas na malha "j".

$$B_{ij} = 1 - \sum_j^{k=i} b_{kj}$$

logo:

$$\frac{dR_i}{dt} = -\sum_1^{k=i} S_k f_k + \sum_1^{j=i} (1 - B_{ij}) S_j f_j \quad (3.28)$$

e finalmente:

$$\frac{dR_i}{dt} = -\sum_1^{j=i} B_{ij} S_j f_j \quad (3.29)$$

o que equivale:

$$\frac{dF_i}{dt} = \sum_1^{j=i} B_{ij} S_j f_j \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.30)$$

onde  $F_i$  representa a fração acumulada passante na malha “i”. A equação 3.30 é absolutamente equivalente à equação 3.20, logo a equação 3.23 é também uma solução desta última.

A seguir serão apresentadas as soluções da equação de moagem de batelada proposta por Reid (Reid, 1965):

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^i a_{ij} \exp(-S_j t) \quad ; \quad n \geq i \geq j \geq 1 \quad (3.31)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} f_i(0) - \sum_{\substack{k=1 \\ i>j}}^{i-1} a_{ik} & ; \quad i = j \\ \frac{1}{S_i - S_j} \sum_{k=j}^{i-1} S_k b_{ik} a_{kj} & ; \quad i > j \end{cases}$$

Reagrupando os termos em forma diferente, Luckie e Austin (Luckie et al., 1972) mostraram que a solução de Reid pode ser expressa na forma:

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^i d_{ij} f_j(0) ; \quad n \geq i \geq 1 \quad (3.32)$$

onde  $d_{ij}$  é dado por:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & ; \quad i < j \\ e^{-S_i t} & ; \quad i = j \\ \sum_{k=j}^{i-1} c_{ik} c_{jk} (e^{-S_k t} - e^{-S_i t}) & ; \quad i > j \end{cases}$$

e  $c_{ij}$  é:

$$c_{ij} = \begin{cases} -\sum_{k=i}^{j-1} c_{ik} c_{jk} & ; \quad i < j \\ 1 & ; \quad i = j \\ \left( \frac{1}{S_i - S_j} \right) \sum_{k=j}^{i-1} S_k b_{ik} c_{kj} & ; \quad i > j \end{cases}$$

### 3.8.1.2. Moagem contínua

Até este ponto, a formulação de um modelo matemático de processo de moagem só considerou o caso de moagem descontínua (moagem de batelada) onde não existem fluxos de entrada e nem de saída no sistema.

A representação matemática do processo real de moagem contínua é complicada pelo fato das partículas não terem o mesmo tempo de residência dentro do moinho. Dessa maneira existem várias técnicas experimentais para se determinar a distribuição probabilística do tempo de residência, a qual é caracterizada por uma função  $E(t)$ , tal que:

$E(t)dt$  = fração, em peso, dos elementos da polpa cujo tempo de residência no interior do moinho está no intervalo diferencial  $t$  até  $t+dt$ .

Até o momento, a experiência acumulada (Herbst et al., 1968; Herbst et al., 1973; Herbst et al., 1980; Herbst et al., 1984) tem demonstrado que a seguinte expressão, entre outras (Herbst et al., 1984), proporciona uma adequada representação matemática da função  $E(t)$ :

$$E(t) = \frac{N^N (t/\tau)^{N-1}}{\tau \Gamma(N)} \exp\left(\frac{-Nt}{\tau}\right) \quad (3.33)$$

onde:

$\tau$  = tempo médio de residência da polpa no interior do moinho

$t$  = tempo de residência

$N$  = parâmetro da distribuição

$\Gamma(N)$  = função gama

A equação 3.33 é reconhecida como o “Modelo dos  $N$  misturadores em série” no qual se postula que o equipamento estudado se comporta na forma equivalente de  $N$  reatores misturadores perfeitos e em série; ou seja, cada um recebendo o fluxo de descarga do anterior em linha. A figura 3.4 representa a variação da forma da distribuição do tempo de residência  $E(t)$ , definida pela equação 3.33, em função do valor de  $N$ , passando desde a situação de mistura perfeita ( $N=1$ ), em que a distribuição ou variância da distribuição é máxima, até o caso de fluxo pistão ( $N \rightarrow \infty$ ) matematicamente equivalente ao sistema de batelada, em que todas as partículas têm o mesmo tempo de residência dentro do moinho. Para efeito prático, a aplicação desse modelo não requer que o número de misturadores equivalentes a  $N$  seja inteiro; recomenda-se que, na falta de um valor experimental, seja aproximado pela razão  $(L/D)$  comprimento / diâmetro do moinho.

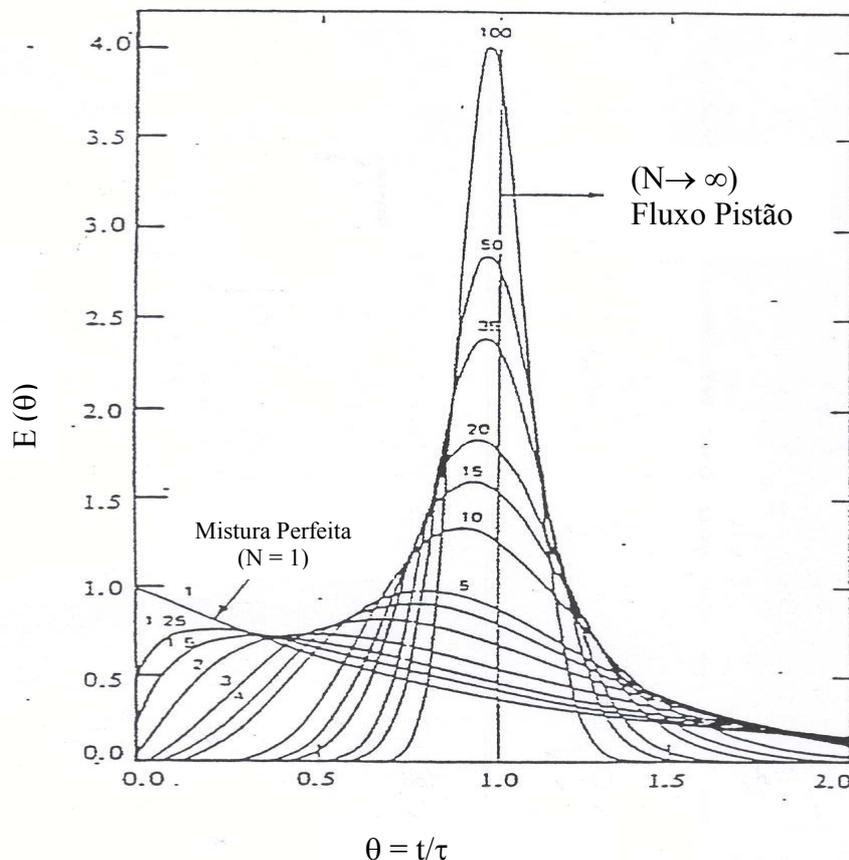


Figura 3.5 – Representação gráfica da função distribuição de tempo de residência,  $E(t)$  em função de  $t$ , segundo o modelo dos misturadores em série (Herbst et al., 1968; Herbst et al., 1973; Herbst et al., 1980; Herbst et al., 1984).

Retornando ao tema de formulação de um modelo matemático para moagem contínua, pode-se sugerir que a distribuição granulométrica da descarga do moinho, em estado contínuo, corresponde à média ponderada da granulometria do produto resultante de uma infinidade de processos em batelada operando por distintos intervalos de tempo  $t$ , em um intervalo  $[0, \infty]$ . Logicamente, os fatores de ponderação respectivos estavam fixados pela probabilidade de que os tempos de residência realmente ocorram, ou seja,  $E(t)dt$ . Supondo-se que a distribuição de tempo de residência de todas as partículas,

independentemente de seu tamanho, fica caracterizada pelo mesmo parâmetro  $N$  e  $\tau$  na equação 3.33, se obtém:

$$f^{OUT} = \int_0^{\infty} f^{BATCH}(t) \cdot E(t) dt \quad (3.34)$$

onde:

$f^{OUT}$  = vetor granulometria da descarga do moinho.

$f^{BATCH}(t)$  = vetor granulometria do produto de um processo de moagem em batelada em um tempo  $t$ .

A representação de batelada de um sistema é dada pela equação 3.23, de modo que:

$$f^{OUT} = \int_0^{\infty} T J T^{-1} f^{IN} E(t) dt \quad (3.35)$$

onde:

$f^{IN}$  = vetor granulometria da alimentação do moinho.

Logo, reconhecendo que  $T$  e  $f^{IN}$  são independentes do valor de  $t$ , a equação 3.35 se reduz a:

$$f^{OUT} = T J^C T^{-1} f^{IN} \quad (3.36)$$

onde  $J^C$  é a matriz diagonal dos elementos  $J^C_{ij}$  dados por:

$$J^C_{ij} = \begin{cases} 0 & ; se \ i \neq j \\ \int_0^{\infty} \exp(-S_i t) \cdot E(t) dt; & se \ i = j \end{cases} \quad (3.37)$$

Finalmente da expressão sugerida pela equação 3.35 para E(t) se obtém:

$$J^C_{ij} = \begin{cases} 0 & ; se \ i \neq j \\ \left(1 + \frac{S_i \tau}{N}\right)^{-N} & ; se \ i = j \end{cases} \quad (3.38)$$

A equação 3.34 constitui assim o modelo linear de moagem contínua, dado que permite calcular a granulometria dos sólidos da descarga de um moinho a partir da granulometria de alimentação e dos parâmetros característicos do sistema: S, b, N e  $\tau$ .

### 3.8.1.3. A Energia específica como variável de controle do processo.

Nos capítulos onde se descreveu a teoria clássica de cominuição, o consumo específico de energia era o principal fator levantado no moinho de batelada e contínuo. Agora será descrito como ele exerce efeito na nova metodologia levantada.

O modelo geral de moagem, para um processo de batelada, está representado, em sua forma diferencial acumulada, pela equação 3.30:

$$\frac{dF_i}{dt} = \sum_1^{j=i} B_{ij} S_j f_j \ ; \ i = 1, 2, \dots, n \quad (3.30)$$

Reconhecendo que existe uma relação direta entre o tempo de moagem e o consumo específico de energia E, dada por:

$$E = \frac{Kwt}{H}$$

(3.39)

onde:

Kw = potência líquida demandada pelo moinho;

H = quantidade de sólidos na carga (t);

Obtém-se, para P e H constantes no tempo:

$$\frac{dF_i}{dE} = \frac{dF_i}{dt} \cdot \frac{dt}{dE} = \sum_1^{j=i} B_{ij} \left( \frac{S_j H}{P} \right) f_j \quad (3.40)$$

e definindo:

$$S_j^E = S_j \frac{H}{P} \quad (3.41)$$

resulta:

$$\frac{dF_i}{dE} = \sum_{j=i}^1 B_{ij} S_j^E f_j ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.42)$$

de modo que a velocidade de produção de finos com respeito à energia específica consumida ( $dF_i / dE$ ) fica expressa em função do novo conjunto de parâmetros  $S^E$ , denominado Função Seleção Específica. Nota-se que a forma algébrica da equação 3.42 é idêntica à forma da equação 3.30 original, portanto, a solução linear obtida para essa última (ver equação 3.23) é também válida para esta nova equação 3.40, sempre mudando t por E e S por  $S^E$  em cada uma delas. Assim,

$$f = T_{ij} J_{ij} T_{ij}^{-1} f^o \quad (3.23)$$

onde:

$$J_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ \exp(-S_i^E E), & \text{se } i = j \end{cases} \quad (3.43)$$

$$T_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i < j \\ 1, & \text{se } i = j \\ \sum_{k=i}^{k=j} \frac{b_{ik} S_k^E}{(S_i^E - S_j^E)} T_{kj}, & \text{se } i > j \end{cases} \quad (3.44)$$

Por simples analogia, é fácil demonstrar que para um sistema contínuo, a solução linear representada pela equação 3.36 é novamente válida sempre e quando se substitui  $\tau$  por E e S por  $S^E$ . Se M representa o fluxo mássico da alimentação no moinho (t/h),

$$S_i \tau = \frac{S_i H}{M} = \frac{S_i H}{P/E} = \left( \frac{S_i H}{P} \right) E = S_i^E E \quad (3.45)$$

então a equação 3.36:

$$J_{ij}^C = \begin{cases} 0; & \text{se } i \neq j \\ \left( 1 + \frac{S_i^E E}{N} \right)^{-N}; & \text{se } i = j \end{cases} \quad (3.46)$$

Em síntese, as equações do modelo tanto de batelada como contínuo são expressas em função da energia específica de processo consumida. Dessa maneira, cabe esperar que a função seleção específica  $S^E$  definida pela equação 3.42 seja fundamentalmente

dependente das características do mineral e das condições operacionais de moagem e que o efeito desta última se refletirá no valor de E somente.

Por último, cabe destacar que o uso de E, como alternativa ao uso de  $\tau$ , nas distintas equações do modelo, facilita consideravelmente sua aplicação em sistemas reais de interesse, e que o consumo específico E é diretamente determinado a partir dos registros dos instrumentos básicos de um circuito industrial de moagem / classificação.

Nesse contexto, a função seleção específica  $S^E$  é o índice de eficiência energética do processo que converte a energia mecânica em ação de cominuição.

#### 3.8.1.4. Um modelo simplificado.

Uma primeira aproximação, com o propósito de simplificar a estrutura matemática do modelo, supõe que a velocidade de produção de fragmentos de tamanho inferior a uma malha “i” qualquer é proporcional à quantidade de material no interior do moinho que ficaria retida sobre a mesma malha, ou seja, a quantidade de “matéria prima” disponível para a geração de tamanho inferior. Matematicamente é expressa por:

$$\frac{dF_i}{dt} = k_i(1 - F_i^0) ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.47)$$

Se, mais uma vez, assume-se a condição do parâmetro  $k_i$  no tempo (modelo linear), a equação 3.45 é facilmente integrada para se obter:

$$(1 - F_i) = (1 - F_i^0) \exp(-k_i t) ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.48)$$

Essa equação postula uma relação significativamente mais sensível que a anterior na granulometria inicial mais fina, no processo *batch*. Similarmente, para um processo de moagem contínua é possível derivar a relação:

$$(1 - F_i^{OUT}) = \frac{(1 - F_i^{IN})}{\left(1 + \frac{i^r}{N}\right)^N} ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.49)$$

onde está implícita a suposição de que a distribuição de tempo de residência da polpa no interior do moinho é matematicamente representada por uma função  $E(t)$ , como definida na equação 3.30:

$$\frac{dF_i}{dt} = \sum_1^{j=i} B_{ij} S_j f_j ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.30)$$

Nessa equação, o produto  $B_{ij}S_j$  representa a contribuição da malha “j” na geração de fragmentos passantes na malha “i”. Observou-se experimentalmente (Herbst et al., 1968) que, em um considerável número de ocasiões de interesse prático, desse produto tem se caracterizado o tamanho da abertura da malha “i” independente do tamanho associado à malha “j” original. Algebricamente essa observação se expressa da seguinte forma:

$$B_{ij}S_j \approx k_i ; j \leq i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.50)$$

A equação 3.30 se reduz a

$$\frac{dF_i}{dt} = \sum_1^{j=i} k_i f_j = k_i \sum_1^{j=i} f_j = k_i (1 - F_i) \quad (3.51)$$

Essa equação é equivalente à equação 3.47 antes descrita.

Dado que a equação 3.50 é válida para todo  $j \leq i$ ; em particular para  $j=i$ :

$$B_{ii}S_i = k_i \quad (3.52)$$

e posto que  $B_{ii} \equiv 1$ , por definição, conclui-se que a constante cinética de proporcionalidade  $k_i$  é igual à função seleção  $S_i$  da fração granulométrica respectiva:

$$k_i = S_i \quad (3.53)$$

com a qual, as equações do modelo simplificado são expressas como:

- Moinho de batelada:

$$(1 - F_i) = (1 - F_i^0) \exp(-S_i t) ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.54)$$

- Moinho contínuo

$$(1 - F_i^{OUT}) = \frac{(1 - F_i^{IN})}{\left(1 + \frac{S_i \tau}{N}\right)^N} ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.55)$$

Por último, recordando a definição da função seleção específica  $S_i^E$  definida na equação 3.39, podem-se definir os modelos como:

- Moinho de batelada:

$$(1 - F_i) = (1 - F_i^0) \exp(-S_i^E E) ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.56)$$

Moinho contínuo

$$(1 - F_i^{OUT}) = \frac{(1 - F_i^{IN})}{\left(1 + \frac{S_i^E E}{N}\right)^N} ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.57)$$

Este modelo simplificado tem demonstrado ser de grande utilidade prática na análise preliminar de resultados operacionais em escala industrial. As diversas suposições de simplificação necessárias para a derivação do modelo podem parecer em primeira instância bem restritivas, mas deve-se reconhecer que serve de ponto de partida para a derivação teórica de uma série de casos particulares.

### 3.8.1.5. Um caso particular: lei de Bond.

As distintas leis de cominuição analisadas nos capítulos anteriores, a lei de Bond (Bond, 1952; Bond, 1949; Bond, 1954) em particular, permitem estimar o consumo específico de energia requerido para alcançar um determinado grau de redução de tamanho de uma população de partículas.

De acordo com a equação 3.56, a energia específica, requerida para que uma certa fração  $F_1$  de material moído resulte em tamanho a uma certa dimensão  $d_1$ , é dada por:

$$E_1 = \frac{1}{S_1^E} \ln \left( \frac{1 - F_1^0}{1 - F_1} \right) \quad (3.58)$$

Supondo que o tamanho inicial das partículas é consideravelmente maior que  $d_1$  ( $F_1^0 \rightarrow 0$ ), então:

$$E_1 = \frac{1}{S_1^E} \ln \left( \frac{1}{1 - F_1} \right) \quad (3.59)$$

Similarmente, para uma certa dimensão  $d_2$  menor que  $d_1$ , a partir da mesma alimentação grossa:

$$E_2 = \frac{1}{S_1^E} \ln \left( \frac{1}{1 - F_2} \right) \quad (3.60)$$

Logo, se  $F_1 = F_2 = 0,8$ , a energia específica requerida para reduzir uma alimentação de tamanho característico  $F_{80} = d_1$  a um produto de tamanho característico  $P_{80} = d_2$  resulta em:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \ln 5 \left( \frac{1}{S_2^E} - \frac{1}{S_1^E} \right) \quad (3.61)$$

Como se discute mais adiante, observa-se que a relação existente entre a função seleção  $S_i$  e seu correspondente tamanho  $d_i$  pode ser:

$$S_i^E = \alpha_0 d_i^{\alpha_1} \quad (3.62)$$

sendo  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$ , parâmetros característicos do mineral. Desse modo a equação 3.61 se reduz a:

$$\Delta E = \frac{\ln 5}{\alpha_0} \left( \frac{1}{P_{80}^{\alpha_1}} - \frac{1}{F_{80}^{\alpha_1}} \right) \quad (3.63)$$

definindo  $10 \text{ WI} \equiv \frac{\ln 5}{\alpha_0}$  e tomando o caso mais particular  $\alpha_1 = 0,5$ , obtém-se finalmente:

$$\Delta E = 10 \text{ WI} \left( \frac{1}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{80}}} \right) \quad (3.64)$$

que é a expressão matemática normalmente utilizada para se representar a Lei de Bond (Bond, 1952; Bond, 1949; Bond, 1954).

Considerando a grande utilidade prática e a simples relação empírica proposta por Bond, inclui-se a demonstração anterior com o propósito de dar mais confiança para os utilitários da metodologia proposta por Bond a utilizarem modelos mais elaborados e

que descrevem o processo de moagem de uma maneira mais completa e estruturada, capaz de melhorar a capacidade descritiva do processo e que contém implícita a relação de Bond como um caso muito particular de aplicação.

### **3.8.1.6. Estimação de parâmetros**

Os modelos cinéticos descritos anteriormente são, em princípio, aplicáveis numa grande variedade de sistemas de cominuição, entre eles moinho / classificação convencional, moinho autógeno e diversas etapas de britagem (Gutiérrez et al., 1986). Em cada caso, é preciso recorrer as técnicas de experimentação e análise dos dados que permitem estimar valores dos correspondentes parâmetros envolvidos no modelo e também escalonar estes valores a outras condições operacionais e dimensionamentos.

A seguir será feita uma breve descrição de três metodologias de estimação, particularmente aplicáveis a sistemas de moagem / classificação:

- Realização de ensaios em laboratório com moinho de torque.
- Estimação de parâmetros por regressão não linear.
- Estimação de parâmetros com modelo simplificado.

### **3.8.1.7. Ensaios em laboratório.**

#### **3.8.1.7.1. Moinho de torque**

Considerando a equação geral do modelo cinético linear de cominuição para um processo de batelada, em termos do consumo específico de energia, E:

$$\frac{df_i}{dE} = -S_i^E f_i + \sum_1^{j=i-1} b_{ij} S_j^E f_j \quad (3.65)$$

a qual, para a malha grossa se reduz a:

$$\frac{df_1}{dE} = -S_1^E f_1 \quad (3.66)$$

Supondo que  $S_1^E$  é constante no tempo, é possível integrar a equação 3.66 para obter:

$$f_1 = f_1^0 \exp(-S_1^E E) \quad (3.67)$$

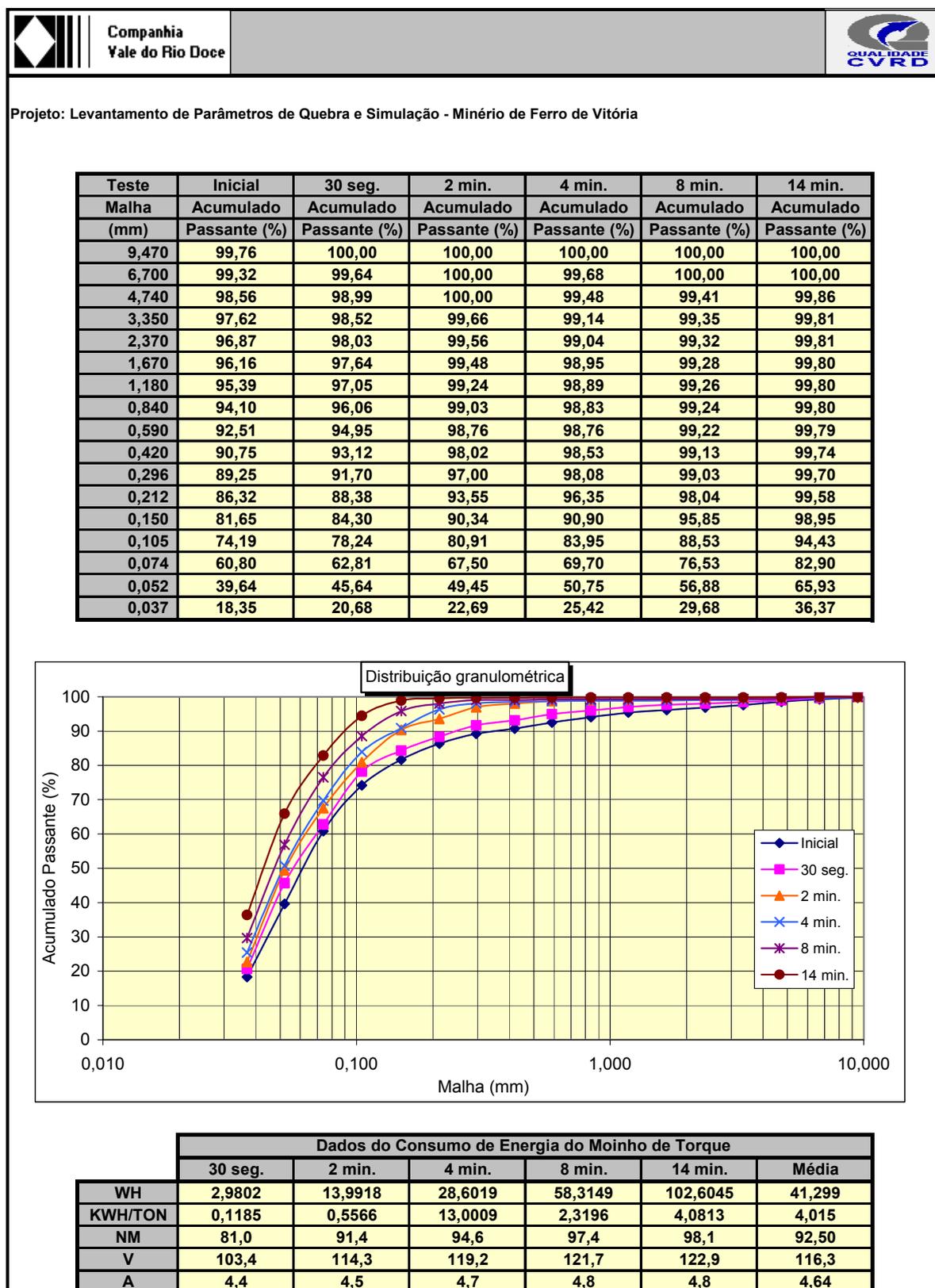
o equivalente:

$$\ln\left(\frac{f_1}{f_1^0}\right) = -S_1^E E \quad (3.68)$$

onde  $f_1^0$  representa a fração inicial retida na malha 1. Logo, a partir dos resultados de uma série de ensaios em moinho de torque a diferentes tempos de moagem, como os presentes na Tabela 3.1, pode-se estimar, por retrocálculo, os valores de S.

A rigor, para estimação de  $S_1$  não é necessário que a alimentação inicial seja um “monotamanho” (todas as partículas retidas entre duas malhas com um fator de  $\sqrt{2}$ ).

Tabela 3.3 – Resultados de ensaios de moagem em moinho de torque



Estudos sobre o tema (Austin et al., 1984; Rajamani et al., 1984) têm permitido postular uma relação empírica de aplicação geral da função seleção e do tamanho da partícula correspondentes:

$$S_i^E = \alpha_0 d_i^{\alpha_1} \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad (3.69)$$

onde  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  são parâmetros cujos valores dependem do mineral ensaiado e de algumas condições de operação, especialmente da distribuição da carga de bolas do moinho (Menacho, 1985). Se forem observados casos em que a razão diâmetro de bola / diâmetro de partícula não é suficientemente alta, a equação 3.69 não se aplica e deve ser substituída por outra do tipo (Austin et al., 1984; Menacho, 1985):

$$S_i^E = \frac{\alpha_0 d_i^{\alpha_1}}{1 + \left( \frac{d_i}{d_{crit}} \right)^{\alpha_2}} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.70)$$

Essa equação indica que, para cada malha, o  $\ln S_i^E$  aumenta seu valor com  $\alpha_1$ , até um máximo:

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{dF_i}{dE} = B_{i1} S_i^E \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.71)$$

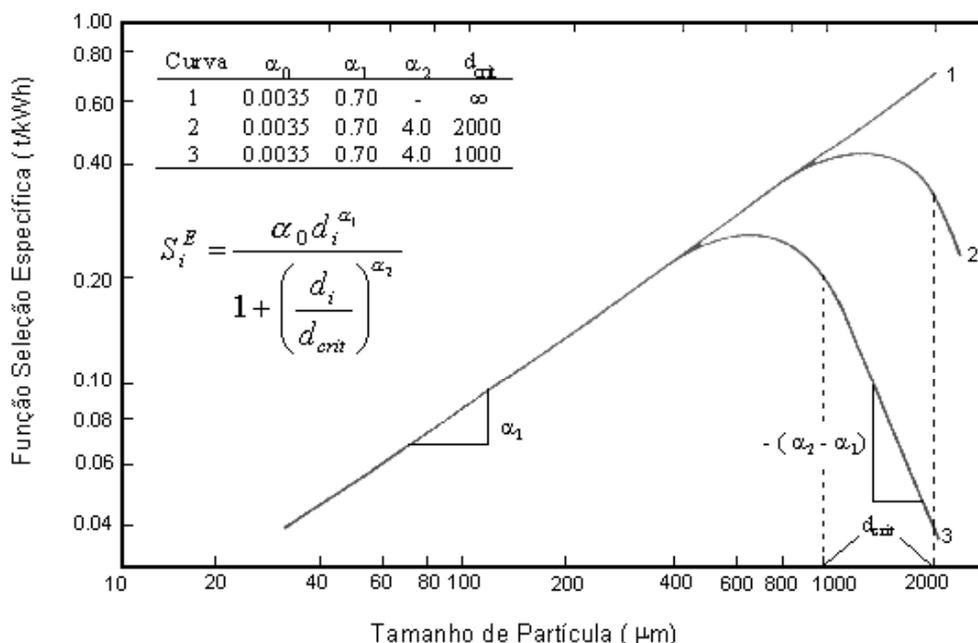


Figura 3.6 – Representação esquemática do comportamento da equação 3.68 em função de seus parâmetros (Sepúlveda, 2001)

Existe uma relação entre a função quebra  $B_{ij}$  e os tamanhos de partículas  $d_i$  e  $d_j$ . Esta relação é apresentada na equação 3.72:

$$B_{ij} = \beta_0 \left(\frac{d_i}{d_j}\right)^{\beta_1} + (1 - \beta_0) \left(\frac{d_i}{d_j}\right)^{\beta_2} ; i=1,2,\dots,n ; j \leq i \quad (3.72)$$

Nota-se que nessa expressão,  $B_{ij}$  não depende de  $d_i$  ou  $d_j$  separadamente, mas sim da razão  $d_i/d_j$ . Por isso, basta obter experimentalmente  $B_{ij}$  para  $j=1$  e logo, baseado na equação 3.72, estima-se  $B_{ij}$  para  $j>1$ . Esta propriedade da função quebra se conhece como “normalização de  $B_{ij}$ ” com respeito ao tamanho da partícula. As figuras 3.7 e 3.8 apresentam um gráfico prático dessas propriedades.

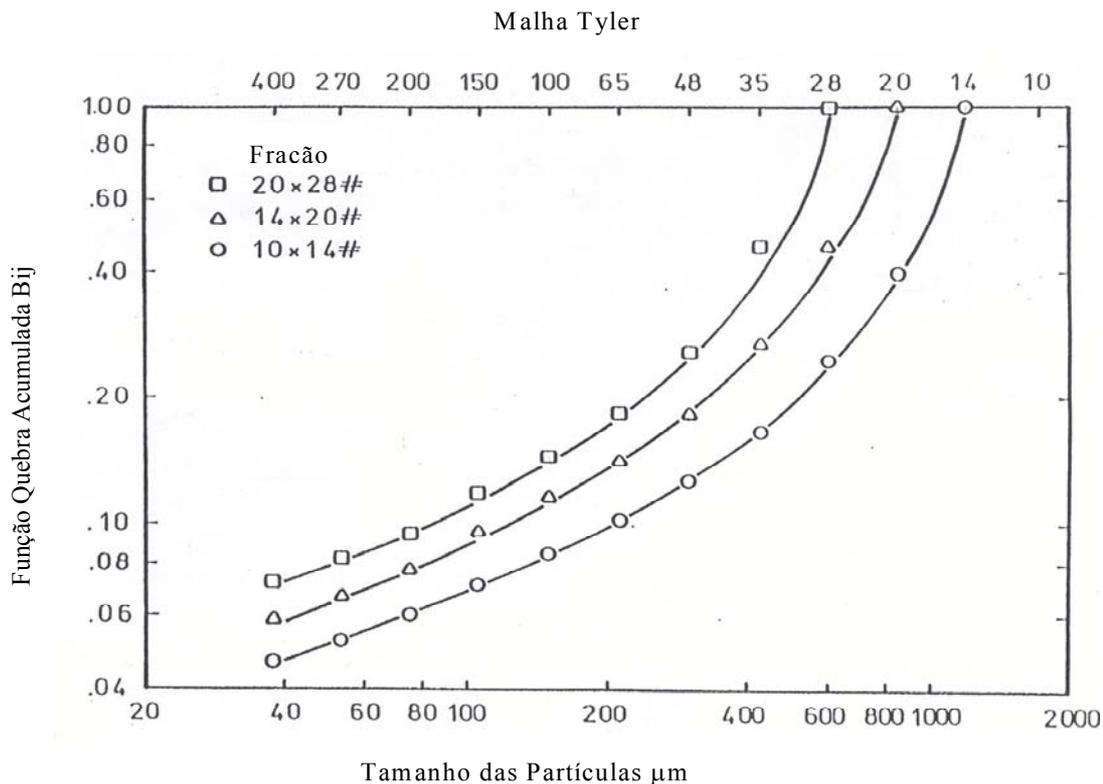


Figura 3.7 – Função quebra acumulada versus tamanho para três frações diferentes (Rojas, 1985).

A figura 3.8 permite estimar graficamente os valores dos parâmetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  na equação 3.62.

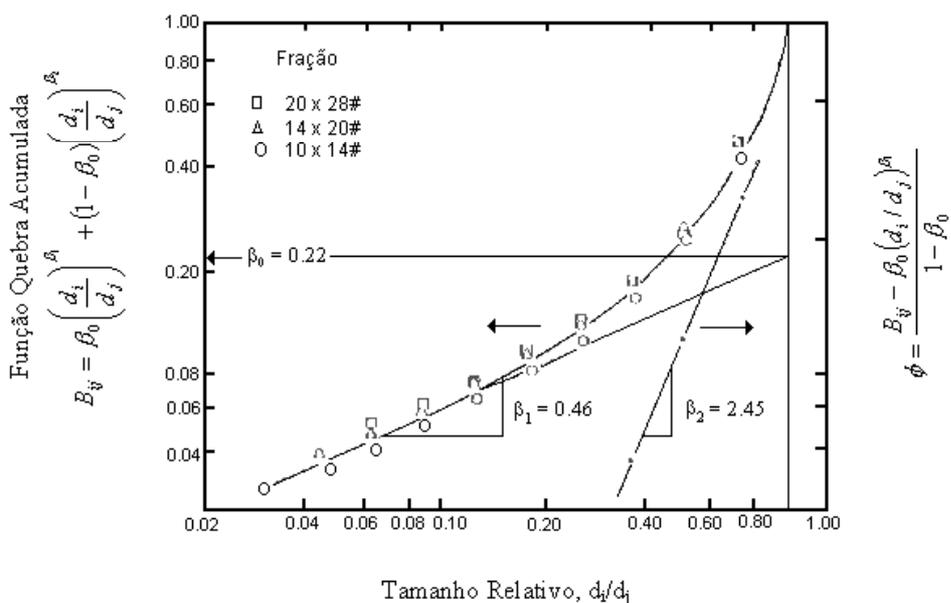


Figura 3.8 – Função quebra acumulada versus tamanho relativo da partícula. Ensaio de moagem em batelada com três monotamanhos diferentes (Sepúlveda, 2001).

### 3.8.1.7.2. Estimação de parâmetros por regressão não linear

Aceitando a validade da relação proposta nas equações 3.70 e 3.72 para as funções seleção e quebra, respectivamente, é possível estimar esses parâmetros a partir de resultados em escala industrial, mediante técnicas de regressão não linear.

Determinando-se os valores de  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, d_{\text{crit}})$  e  $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$  de forma tal que a função objetivo seja mínima.

$$\phi = \sum_{i=1}^n w_i (F_i - \hat{F}_i)^2 \quad (3.73)$$

Na expressão anterior,  $F_i$  representa a granulometria da descarga do moinho medida experimentalmente,  $\hat{F}_i$  representa a mesma granulometria segundo a previsão do modelo e  $w_i$  representa um fator de ponderação relativo das distintas medidas.

A figura 3.9 ilustra a estrutura lógica da rotina de estimação requerida, a qual é inicialmente alimentada com um conjunto de estimações preliminares dos parâmetros envolvidos, que são recalculados medidos mediante a aplicação de um algoritmo adequado de minimização da função objetivo.

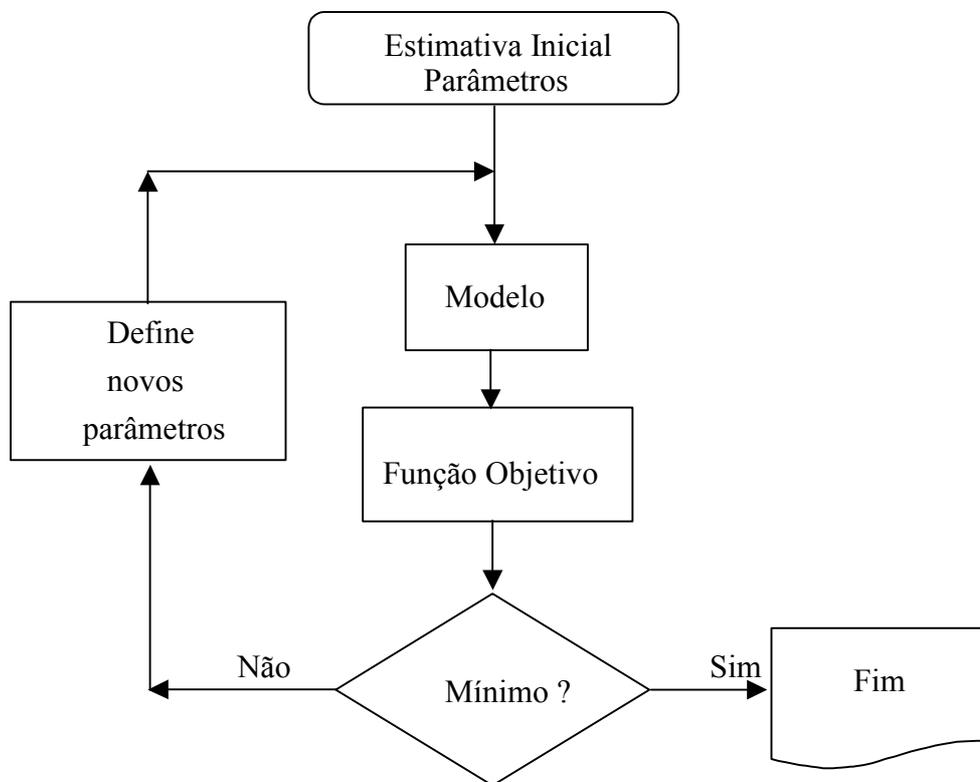


Figura 3.9 – Estrutura lógica da rotina de estimação de parâmetros por regressão não linear (Sepúlveda, 2001).

Existe uma grande diversidade de algoritmos numéricos utilizados para solução de um problema de minimização como este. A seleção final dependerá da disponibilidade de rotinas computacionais que agilizem sua implementação em cada aplicação em particular. Um dos mais adequados é o de Gauss-Newton (Herbst et al., 1977). A tabela 3.2 apresenta um exemplo de aplicação deste método para a estimação de parâmetros característicos de um mineral particular.

Tabela 3.4 – Exemplo de estimação de parâmetros por regressão não linear.

**Exemplo de Estimação de Parâmetros por Regressão Não Linear**

Interação	Convergência				
	C <sub>0</sub>	C <sub>1</sub>	S <sub>0</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>
0	0.0004	1.000	0.500	0.670	5.00
1	0.0112	0.528	0.500	0.705	2.23
2	0.0151	0.491	0.372	0.613	2.57
3	0.0178	0.469	0.391	0.621	2.57
4	0.0179	0.468	0.392	0.621	2.57

Fração	Qualidade do Ajuste			
	Função Seleção Si (min <sup>-1</sup> )		Função Quebra Bi2	
	Estimada	Experimental	Estimada	Experimental
8 x 10 #	0.63	0.62	-	-
10 x 14 #	0.53	0.51	1.000	1.000
28 x 35 #	0.26	0.24	0.248	0.272
48 x 65 #	0.14	0.13	0.141	0.159

Para uma maior estabilidade dos algoritmos recomenda-se proceder da seguinte maneira:

1. Determinar os parâmetros de fratura  $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$  em escala de laboratório.
2. Mantendo fixos estes parâmetros, minimizar a função objetivo para determinar os valores de  $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$  e  $\hat{d}_{crit}$ .

3. Reestimar  $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$  com os novos valores de  $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$  e  $\hat{d}_{crit}$  determinados no passo anterior.
4. Repetir os dois últimos passos até a função convergir.

### 3.8.1.7.3. Estimação de parâmetros com o modelo simplificado

Aceita a validade do modelo simplificado (equação 3.57) para o caso particular em estudo, a estimação de  $S_i^E$  a partir de resultados industriais se reduz à simples avaliação da expressão:

$$S_i^E = \frac{N}{\bar{E}} \left[ \left( \frac{1 - F_i^{IN}}{1 - F_i^{out}} \right)^{1/N} - 1 \right] ; i=1,2,\dots,n \quad (3.74)$$

Nota-se que com o modelo simplificado não é necessário o cálculo da função quebra  $B_{ij}$ , pois seu valor é implícito e é obtido a partir das equações 3.50 e 3.53:

$$B_{ij} = S_i^E / S_j^E ; i=1,2,\dots,n ; j \leq I \quad (3.75)$$

A linearidade da relação  $\log S_i^E$  versus  $d_i$  é ilustrada na figura 3.9 a partir dos cálculos apresentados na Tabela 3.2, em uma condição suficiente para demonstrar a aplicação do modelo simplificado para este minério em particular.

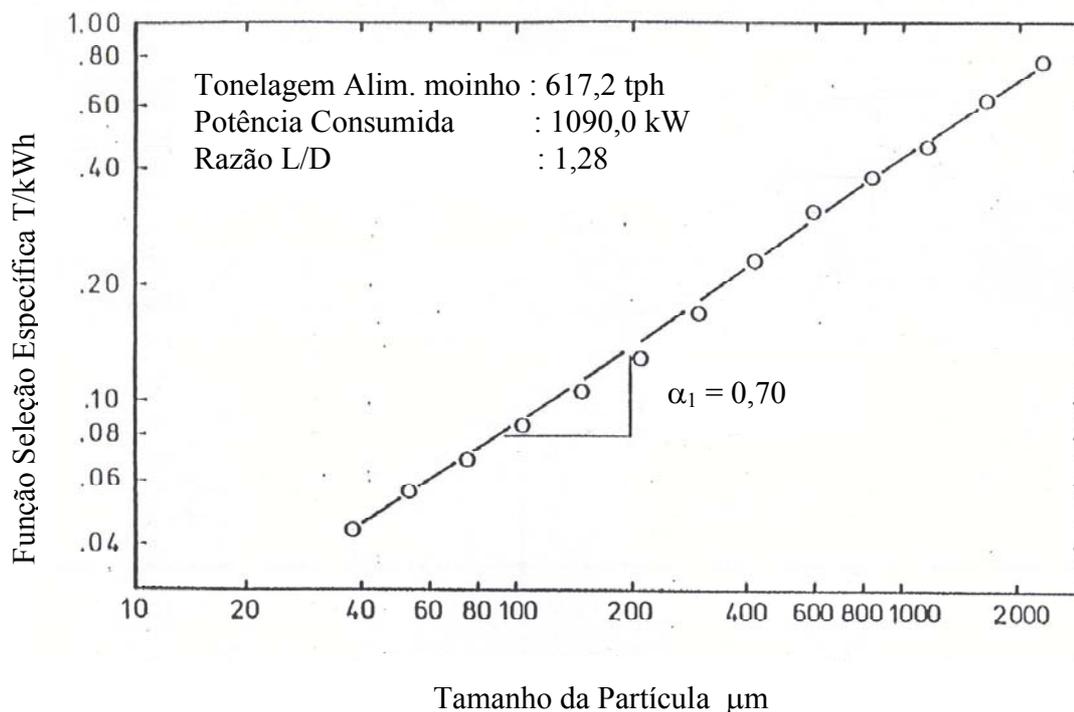


Figura 3.10 – Representação gráfica da dependência da função seleção específica e o tamanho de partícula correspondente a partir de cálculos apresentados na tabela 3.2 (Sepúlveda, 2001).

### 3.9. Modelos Empíricos de Classificação em Hidrociclones

Durante as últimas décadas, a introdução massiva de hidrociclones em circuitos de moagem e classificação gerou uma intensa polêmica com relação às premissas básicas das quais esses circuitos devem ser projetados e quais condições deveriam ser operadas a fim de garantir a máxima eficiência global do sistema. Aqueles que persistem na busca de eficiência de classificação pregam a necessidade de manter os fluxos de alimentação relativamente diluídos (~ 55% de sólidos em massa). Por outro lado, aqueles operadores interessados em alcançar uma maior taxa de tratamento para sua instalação têm detectado a necessidade de diminuir a adição de água no ciclone operando com uma alimentação do ciclone mais densa (~ 65% de sólidos em massa).

Do mesmo modo, existem também discrepâncias com respeito à percentagem de sólidos no *overflow* dos ciclones. Aqueles que reconhecem o curto-circuito de água no *underflow* como a principal fonte de ineficiência da classificação postulam que a percentagem de sólidos no *underflow* do ciclone deve ser a mais alta possível (normalmente na ordem de 80% de sólidos). Em contrapartida, existem os que recomendam manter o fluxo mais diluído (65 – 70% de sólidos) a fim de evitar o “acordonamento” e possível obstrução do ápex. Finalmente, a carga circulante é a variável sobre a qual recai maior incerteza. Em geral, uma alta carga circulante é considerada negativa posto que, se fosse diminuída, seria possível alimentar uma maior proporção de material no moinho, em outras palavras, trocar carga circulante por alimentação nova. Frente a isso é lógico argumentar que uma alta tonelagem alimentando o moinho permite eliminar rapidamente os finos produzidos e evitar a sua sobremagem. Desse ponto de vista, uma alta carga circulante seria desejável. Resumindo, não existe uniformidade de critérios a respeito de como operar um circuito de moagem. Sepúlveda (Sepúlveda, 1984) postula que:

“A ótima percentagem de sólidos na alimentação dos ciclones, assim como a ótima carga circulante, são as que necessariamente resultem em operar com:

- A mínima percentagem de sólidos no *overflow* dos ciclones.
- A máxima percentagem de sólidos no *underflow* dos ciclones, operacionalmente factível de se implantar”.

Matematicamente, a relação entre variáveis está governada pela expressão (3.76)

$$\%S_{ALotm} = \frac{1 + CCotm}{\frac{CCotm}{\%S_{UF\ max}} + \frac{1}{\%S_{OF\ min}}} \quad (3.76)$$

onde:

$\%S_{ALotm}$  = percentagem de sólidos em peso na alimentação do ciclone;

$\%S_{UF\ max}$  = percentagem de sólidos em peso no *underflow* do ciclone;

$\%S_{OFmin}$  = porcentagem de sólidos em peso no *overflow* do ciclone;

$CC_{otm}$  = carga circulante, definida como a razão entre a tonelagem seca do *underflow* e *overflow* do classificador.

A primeira condição, referente à diluição do *overflow*, está limitada somente pela disponibilidade de água da instalação e dos requisitos dos processos subsequentes na cadeia operacional. A segunda condição, referente à diluição do *underflow*, é alcançada por meio de uma adequada geometria e do número de ciclones na bateria.

A aplicação global do critério proposto normalmente implica operar a carga circulante e porcentagem de sólidos na alimentação relativamente altos. Assim, por exemplo, se uma determinada instalação opera com 40% de sólidos no *overflow*, 75% de sólidos no *underflow* e carga circulante de 3,0, valores típicos de moagem/flotação, a porcentagem de sólidos na alimentação dos ciclones é necessariamente de 61,5% de acordo com a equação 3.19. Por outro lado, se adicionar uma maior quantidade de água no circuito para diluir o *overflow* para 35% de sólidos e se modificar o dimensionamento da bateria de ciclones para manter a porcentagem de sólidos do *underflow* para 78% de sólidos e carga circulante de 4,5, a porcentagem de sólidos na alimentação dos ciclones subirá para 63,8% e se obterá assim um melhor aproveitamento dos equipamentos disponíveis.

O hidrociclone é, sem sombra de dúvidas, o tipo de classificador mais amplamente utilizado em circuitos industriais de moagem.

A complexidade dos mecanismos básicos de classificação operantes no interior de um hidrociclone e a grande diversidade de variáveis que afetam seu comportamento têm impedido até o momento a formulação de modelos fenomenológicos de utilidade prática.

Neste capítulo é incluída uma breve descrição das particularidades dos principais modelos de classificação propostos na literatura (Lynch, 1977; Gutiérrez et al., 1986; Plitt, 1976; Sepúlveda, 1983) e sua metodologia de aplicação.

### 3.9.1. Eficiência de classificação

A resposta de um hidrociclone fica totalmente caracterizada por sua curva de Eficiência de Classificação ( $E_i$ ,  $i=1, \dots, n$ ), definida para cada tamanho na alimentação que se recupera na descarga. Dessa forma, espera-se que a eficiência de classificação assim definida alcance seus mais altos valores (próximos e inferiores a 1) para as partículas mais grossas na alimentação e que, contrariamente, esses valores sejam mínimos para as partículas de tamanho inferior ao tamanho de corte desejado.

A figura 3.11 ilustra o comportamento típico de um hidrociclone incorporado a um circuito fechado de moagem / classificação. Nela se observa um fenômeno que é característico de todos os sistemas de classificação hidráulica sem exceção: a eficiência de classificação. Tem sido postulado que somente uma parte da alimentação participa do processo de classificação de partículas no interior do hidrociclone, a fração restante da polpa sofre “curto-circuito” ou “by-pass” direto para o fluxo de descarga (Lynch, 1977; Gutiérrez et al., 1986; Plitt, 1976; Sepúlveda, 1983).

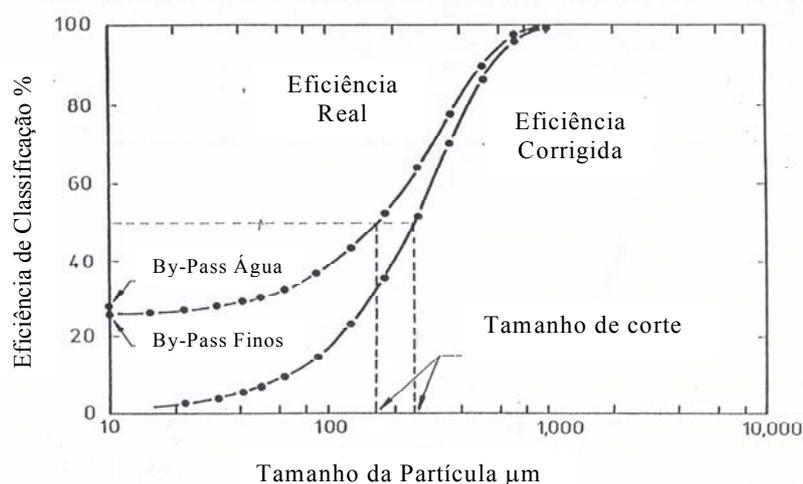


Figura 3.11 – Exemplo de curvas de eficiência de classificação global e corrigida (Sepúlveda, 2001).

Esta concepção racional do fenômeno observado fica esquematicamente representada na figura 3.11, a partir da qual é possível definir uma nova Eficiência Corrigida de Classificação ( $E_i^C$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) como a razão entre os fluxos mássicos de sólidos, por fração granulométrica, na descarga e alimentação do hidrociclone, respectivamente, descontando o efeito de curto circuito ( $B_{pf}$ ):

$$E_i^C = \frac{(m_i^c)_U}{(m_i^c)_F} = \frac{(m_i)_U - B_{pf}(m_i)_F}{(m_i)_F(1 - B_{pf})} \quad ; i=1, 2, \dots, n \quad (3.77)$$

logo:

$$E_i^C = \frac{(m_i)_U / (m_i)_F - B_{pf}}{(1 - B_{pf})} \quad ; i=1, 2, \dots, n \quad (3.78)$$

e, portanto, recordando a definição da Eficiência “Real” de Classificação:

$$E_i^C = \frac{E_i - B_{pf}}{1 - B_{pf}} \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.79)$$

o equivalente,

$$E_i = B_{pf} + (1 - B_{pf})E_i^C \quad ; \quad (3.80)$$

Por definição:

$$E_i^C \rightarrow 0 \text{ para } d_i \rightarrow 0 \quad (3.81)$$

então:

$$E_i^C \rightarrow B_{pf} \text{ para } d_i \rightarrow 0 \quad (3.82)$$

de maneira que o curto-circuito  $B_{pf}$  corresponda ao valor assintótico da curva de eficiência real de classificação sobre o eixo de ordenadas na figura 3.11 para  $d_i \rightarrow 0$ .

Nesse contexto, nos diversos estudos sobre a matéria (Lynch, 1977; Gutiérrez et al., 1986; Plitt, 1976; Sepúlveda, 1983) são apontadas características separadamente da eficiência corrigida de classificação ( $E_i^C, i = 1, \dots, n$ ) e o curto-circuito de finos ( $B_{pf}$ ) para, posteriormente, sobre a base da equação 3.80, propor metodologia de estimação da eficiência real de classificação ( $E_i^C, i = 1, \dots, n$ ).

### 3.9.2. Modelos empíricos de classificação

Até o momento, o desenvolvimento na área de modelamento matemático de classificação com hidrociclones tem sido feito fundamentalmente de dois grupos de pesquisadores liderados por Lynch (Lynch, 1977) e Plitt (Plitt, 1976). Este último incluiu em sua análise os resultados das 123 experiências realizadas pelo primeiro grupo chegando assim a um total de 297 provas. O Centro de Investigación Minera y Metalúrgica (CIMM) realizou um total de 77 ensaios de classificação com ciclones de 6", 10", 15" e 20" de diâmetro, de cujos resultados desenvolveu um modelo empírico de classificação (Sepúlveda et al., 1973), muito similar em sua forma ao proposto por Plitt.

A seguir é apresentada uma breve descrição de cada modelo.

#### 3.9.2.1. Modelo de Lynch

Este pesquisador (Lynch, 1977) propôs um modelo empírico composto por quatro correlações básicas:

- Equação de vazão

$$Q = a_1(DO)(P)^{0,5} (100 - PS)^{0,125} \quad (3.83)$$

onde:

Q = Vazão volumétrica da polpa de alimentação do ciclone, m<sup>3</sup>/h.

DO = Diâmetro do vortex, polegadas.

P = Pressão de alimentação, psi

PS = Porcentagem de sólidos, em peso, da alimentação.

a<sub>1</sub> = constante empírica característica do mineral.

- Equação de partição de água

$$WOF = a_2 + 1,1(WF) - 10(DU) \quad (3.84)$$

onde:

WOF = Vazão de água no overflow, m<sup>3</sup>/h.

WF = Vazão de água na alimentação, m<sup>3</sup>/h.

DU = Diâmetro do apex, polegadas.

a<sub>2</sub> = constante empírica característica do mineral.

- Equação do tamanho de corte corrigido

$$d_{50}^c = a_3 \frac{(DO)^{0,385} P^{0,0935}}{(DU)^{0,286} (WOF)^{0,0192}} \quad (3.85)$$

onde:

$d_{50c}$  = tamanho de corte corrigido, microns. (Ver figura 3.1).

$a_3$  = constante empírica característica do mineral.

- Equação da eficiência de classificação.

$$E_i = B_{pw} + (1 - B_{pw}) E_i^C ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.86)$$

onde:

$$E_i^C = \frac{\exp(\alpha x_i) - 1}{\exp(\alpha x_i) + \exp(\alpha) - 2} ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.87)$$

$$x_i = d_i / d_{50}^c$$

$\alpha$  = constante empírica característica do mineral.

e o curto-circuito de água:

$$B_{pw} = 1 - \frac{WOF}{WF} \quad (3.88)$$

substituindo  $B_{pf}$  na equação 3.80 anterior.

Segundo Lynch (Lynch , 1977), cada uma das constantes empíricas  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $\alpha$  são obtidas a partir de um único ensaio de classificação com o mineral pertinente. Conhecidas essas constantes, as quatro correlações básicas propostas por Lynch permitem a resposta de um hidrociclone frente a uma alimentação de característica definida. A seguir é proposta a rotina para simulação de hidrociclones seguindo o modelamento proposto por Lynch:

- A partir da equação 3.83, avaliar a pressão de alimentação P requerida pelo ciclone para o cálculo da vazão Q especificada.
- Calcular a vazão de água no OF WOF com a equação 3.84 e estimar  $B_{pw}$  segundo a equação 3.88.
- Calcular o tamanho de corte corrigido  $d_{50}^c$  com a equação 3.85.
- Calcular a eficiência corrigida de classificação  $E_i^c$  para cada fração granulométrica considerada, segundo a equação 3.87.
- Calcular a eficiência real de classificação  $E_i$  para cada fração granulométrica considerada, segundo a equação 3.86.
- Determinar a partição de sólidos por fração granulométrica entre fluxos do OF e UF do ciclone:

$$(m_i)_0 = (1 - E_i)(m_i)_F \quad (3.89)$$

$$(m_i)_U = E_i(m_i)_F ;$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

(ver figura 3.2)

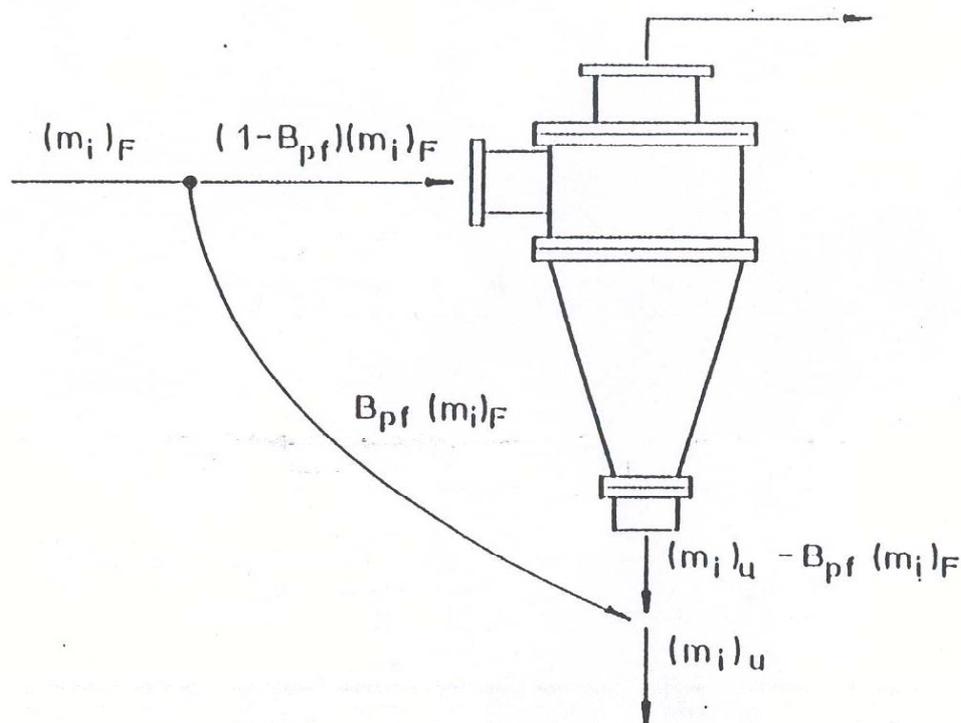


Figura 3.12 – Representação esquemática dos fluxos de um hidrociclone.

- Determinar a recuperação total de sólidos no OF e UF:

$$M_O = \sum_{i=1}^n (m_i)_O \quad (3.90)$$

$$M_U = M_F - M_O$$

Definir também a carga circulante:

$$CC = M_U / M_O \quad (3.91)$$

e as porcentagens de sólidos e as demais características dos fluxos resultantes .

- Finalmente, definir a distribuição granulométrica em cada fluxo resultante:

$$(f_i)_0 = (m_i)_0 / M_o \quad (3.92)$$

$$(f_i)_U = (m_i)_U / M_U$$

e calcular estes valores como porcentagem passante na malha indicada.

### 3.9.2.2. Modelo de Plitt

Como Lynch, Plitt (Plitt, 1976) propôs um conjunto de quatro correlações básicas, que inclui um número maior de variáveis em cada uma delas:

- Equação da pressão de alimentação

$$P = \frac{a_1 Q^{1.78} \exp(0,0055PSV)}{(DC)^{0,37} (DI)^{0,94} h^{0,28} (DU^2 + DO^2)^{0,87}} \quad (3.93)$$

onde:

PSV = porcentagem de sólidos em volume, na alimentação do ciclone.

DC = diâmetro interno do ciclone, polegadas

DI = diâmetro interno do *inlet*, polegadas

h = altura livre do ciclone (distância entre o extremo inferior do vortex e o superior do apex), polegadas.

$a_1$  = constante empírica característica do mineral.

- Equação do tamanho de corte corrigido

$$d_{50}^c = \frac{a_2 (DC)^{0,46} (DI)^{0,60} (DO)^{1,21} \exp(0,063PSV)}{(DU)^{0,71} h^{0,38} Q^{0,45} (\rho_s - 1)^{0,5}} \quad (3.94)$$

onde:

$\rho_s$  = densidade do mineral, g/cm<sup>3</sup>

$a_2$  = constante empírica característica do mineral.

- Equação de partição de polpa

$$S = \frac{Q_u}{Q_o} = \frac{a_3 (DU/DO)^{3,31} h^{0,54} (DU^2 + DO^2)^{0,36} \exp(0,0054PSV)}{H^{0,24} (DC)^{1,11}} \quad (3.95)$$

onde:

$Q_U$  = vazão volumétrica de polpa no UF, m<sup>3</sup>/h.

$Q_O$  = vazão volumétrica de polpa no OF, m<sup>3</sup>/h.

$H$  = pressão da alimentação, expressa em pés de polpa = 2,31 P/ $\rho_p$ .

$\rho_p$  = densidade de polpa de alimentação, g/cm<sup>3</sup>.

$a_3$  = constante empírica característica do mineral.

- Equação da eficiência de classificação

$$E_i = B_{pw} + (1 - B_{pw}) E_i^C ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.96)$$

onde:

$$E_i^C = 1 - \exp[-0,693(d_i/d_{50}^c)^m] \quad (3.97)$$

$$m = \exp(a_4 - 1,58R_v) \left( \frac{DC^2h}{Q} \right)^{0,15} \quad (3.98)$$

$$B_{pw} = \frac{R_v - \phi R_{sc}}{1 - \phi R_{sc}} \quad (3.99)$$

$$R_v = S/S + 1 = \text{fração volumétrica de polpa da alimentação recuperada no UF.} \quad (3.100)$$

$$R_{sc} = \sum_{i=1}^n f_i E_i^C = \text{fração de sólidos a ser recuperado no UF em caso teórico} \quad (3.101)$$

de não existir curto circuito.

$a_4$  = constante empírica característica do mineral.

Como Lynch , Plitt propõe o cálculo das constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , e  $a_4$  a partir de um único ensaio de classificação com o mineral em estudo. Para utilização desse modelo recomenda-se a seguinte rotina de cálculo:

- A partir da equação 3.93, calcular a pressão de alimentação (P) e expressar esta em pés de polpa (H).
- Calcular a partição de polpa S com a equação 3.95 e logo  $R_v$  com a equação 3.100.
- Calcular o parâmetro de Plitt, m, com a equação 3.93.

- Calcular o tamanho de corte corrigido  $d_{50c}$  com a equação 3.94.
- Calcular a eficiência corrigida de classificação  $E_i^C$  para cada fração granulométrica considerada, segundo a equação 3.97.
- Calcular  $R_{sc}$  com a equação 3.101 e logo  $B_{PW}$  com a equação 3.99.
- Prosseguir a forma análoga ao procedimento recomendado para o modelo anterior.

### 3.9.2.3. Modelo CIMM

O modelo desenvolvido pela equipe do CIMM (Sepúlveda, 1983) é similar ao proposto por Plitt, exceto no curto-circuito de água ( $B_{pw}$ ) e o curto circuito de finos ( $B_{pf}$ ) no *underflow*. O modelo de Plitt considera os dois valores iguais, já o modelo proposto pelo CIMM consta de fatores diferentes para o curto-circuito de água e de finos como pode ser observado abaixo:

- Equação da Pressão de Alimentação

$$H = a_1 \frac{Q^{1,46} \exp(-7,63\phi + 10,79\phi^2)}{(DC)^{0,20} h^{0,15} (DI)^{0,51} (DO)^{1,65} (DU)^{0,53}} \quad (3.102)$$

Onde:

$\phi$  = porcentagem de sólidos, em volume, da alimentação.

$a_1$  = constante empírica característica do mineral.

- Equação do tamanho de corte corrigido

$$d_{50}^c = a_2 \frac{(DC)^{0,40} (DI)^{0,58} (DO)^{1,91} \exp(11,12\phi)}{(DU)^{0,80} h^{0,37} Q^{0,44} (\rho_s - 1)^{0,5}} \quad (3.103)$$

Onde:

$a_2$  = constante empírica característica do mineral.

- Equação de partição de polpa

$$S = \frac{Q_u}{Q_o} = a_3 \frac{h^{0,19} (DU/DO)^{2,64} \exp(-4,33\phi + 8,77\phi^2)}{H^{0,54} (DC)^{0,38}} \quad (3.104)$$

Onde:

$a_3$  = constante empírica característica do mineral.

- Equação da Eficiência de Classificação

$$E_i = B_{pf} + (1 - B_{pf})E_i^c \quad ; i=1, 2, \dots, n \quad (3.105)$$

Onde:

$$E_i^c = 1 - \exp\left[-0,693(d_i / d_{50}^c)^m\right] \quad (3.106)$$

$$m = \exp(a_4 - 1,58R_v) \left(\frac{DC^2 h}{Q}\right)^{0,15} \quad (3.107)$$

$$B_{pf} = \lambda B_{pw} \quad (\text{Quinta equação}) \quad (3.108)$$

$$B_{pw} = \frac{R_v - \phi R_{sc}}{1 - \phi[1 - \lambda(1 - R_{sc})]} \quad (3.109)$$

$$R_v = S/(S + 1) \quad (3.110)$$

$$R_{sc} = \sum_{i=1}^n f_i E_i^c \quad (3.111)$$

Segundo a equipe que desenvolveu esse modelo, as constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  e  $\lambda$  são calculadas a partir de um único ensaio de classificação. A rotina de cálculo recomendada para a utilização do modelo é análoga à utilizada pelo modelo de Plitt, com a inclusão da equação 3.108 que permite o cálculo de  $B_{pf}$  a partir do valor estimado para  $B_{pw}$ , segundo a equação 3.109.

Para cada circuito estudado recomenda-se avaliar qual modelo de ciclonagem se adequa e adaptá-lo em conjunto com o modelo de moagem para se realizar estudos de otimização, dimensionamento e avaliação de desempenho de circuitos industriais.

No presente trabalho o modelo utilizado foi o modelo proposto pelo CIMM adaptado ao Software Moly Cop Tools.

## 4. Metodologia

### 4.1. Testes Laboratoriais, Piloto e Amostragem Industrial

Amostras da alimentação da moagem do circuito industrial da Usina 5 (Nibrasco-CVRD-Vitória) foram obtidas para testes piloto e ensaios de moagem em batelada. Nesta planta, os moinhos operavam com cyprebs. Uma campanha de amostragem detalhada foi executada em uma linha de moagem (Moinho 5M5A). Amostras foram obtidas em todos os fluxos para análise de densidade de polpa e análise granulométrica. Taxas de fluxo foram devidamente monitoradas durante a amostragem, verificando-se a condição de estado estacionário dos processos. Todas as variáveis relevantes de

processo foram medidas, tais como a pressão na alimentação dos ciclones, número de ciclones em operação e potência no motor do moinho. Os parâmetros de processo também foram medidos, tais como diâmetro e comprimento interno (entre revestimentos) do moinho, carga de corpos moedores e geometria dos ciclones. Estes dados constituem na base para comparação com os resultados das simulações baseadas no modelo de escalonamento.

As amostras de alimentação obtidas na planta industrial foram utilizadas para dois testes piloto na usina de moagem piloto do Centro Desenvolvimento Mineral (CDM), em Santa Luzia, sob condições controladas e conhecidas. Um teste foi realizado com uma carga de cylpebs no moinho piloto e o outro com uma carga de bolas. Todos os dados relevantes foram cuidadosamente catalogados, a exemplo da campanha de amostragem na planta industrial. Estes dados são aparentemente redundantes em relação aos dados obtidos a partir da campanha de amostragem na planta industrial. No entanto, testes piloto são fortemente recomendados em qualquer projeto de circuito de moagem. Assim, sempre que um moinho de escala industrial é projetado com base na técnica de escalonamento, testes piloto são realizados para o estudo dos efeitos extralaboratoriais. Na verdade, seja qual for a técnica de escalonamento utilizada, é praxe realizar-se testes em escala piloto, com o objetivo de, no mínimo, testar os dados obtidos em laboratório e, enfim, obter-se dados que assegurem a acurácia da técnica de escalonamento empregada.

Finalmente, as amostras de alimentação obtidas na planta industrial foram submetidas ao teste em moinho de torque para o levantamento das funções quebra e seleção para o minério de ferro em questão. Presume-se que os parâmetros das funções quebra e seleção sejam diferentes para bolas e cylpebs, sob condições de moagem similares. Portanto, testes com bolas e cylpebs foram executados mantendo-se todas as outras condições o mais próximo possível dos valores industriais. Assim, foram obtidos dois jogos de parâmetros distintos para o mesmo minério, um para cargas de bolas e outro específico para cargas de cylpebs. Cada jogo de parâmetros é utilizado em separado para as simulações correspondentes, ou seja, os parâmetros obtidos com cylpebs foram utilizados para as simulações das plantas piloto e industrial e os parâmetros obtidos com

bolas utilizados para a simulação da planta piloto com bolas bem como para uma simulação do comportamento da planta industrial se os moinhos utilizassem cargas de bolas. Esta última simulação permite uma avaliação econômica mais realista da utilização de bolas versus cylpebs em moinhos industriais. Esta comparação foi feita através de simulação.

#### 4.1.1. Balanço de Massas em circuito industrial.

Com a amostra coletada no moinho 5M5A da usina Nibrasco em Vitória foi fechado um balanço de massas cujos dados são apresentados na tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Balanço de massas do circuito industrial Usina 5, Nibrasco, CVRD – ES

	Fresh Feed	Mill Feed	Mill Discharge	Sump Water	Cyclone Feed	Cyclone U'flow	Cyclone O'flow
Ore, ton/hr	245.5	1055.2	1055.2	0.0	1055.2	809.7	245.5
Water, m3/hr	12.9	244.2	250.4	1354.1	1604.6	231.3	1373.3
Slurry, ton/hr	258.4	1299.4	1305.6	1354.1	2659.7	1041.0	1618.8
Slurry, m3/hr	62.8	458.7	464.9	1354.1	1819.0	395.8	1423.2
Slurry Dens., ton/m3	4.114	2.833	2.808	1.000	1.462	2.630	1.137
% Solids (by volume)	79.4	46.8	46.1	0.0	11.8	41.6	3.5
% Solids (by weight)	95.00	81.21	80.82	0.00	39.67	77.78	15.17

#### Particle Size Distributions (Cumulative % Passing)

Mesh	Opening							
4	4700	100.00	100.00	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00
6	3360	95.58	98.97	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00
8	2360	93.76	98.55	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00
10	1700	92.66	98.29	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00
14	1180	91.48	98.02	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00
20	840	88.91	97.42	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00
28	600	86.74	96.90	99.99	0.00	99.99	99.99	100.00
35	425	84.10	96.25	99.95	0.00	99.95	99.94	100.00
48	300	81.03	95.41	99.82	0.00	99.82	99.77	100.00
65	212	77.06	94.05	99.39	0.00	99.39	99.20	100.00
100	150	72.03	91.59	98.10	0.00	98.10	97.53	100.00
150	105	64.66	86.23	94.45	0.00	94.45	92.77	100.00
200	75	51.01	72.61	83.95	0.00	83.95	79.16	99.73
270	53	40.95	50.83	63.38	0.00	63.38	53.83	94.86
400	37	21.66	22.16	33.60	0.00	33.60	22.31	70.82
24	24	7.94	7.04	14.23	0.00	14.23	6.77	38.85
17	17	4.26	3.76	9.04	0.00	9.04	3.61	26.96
13	13	2.02	2.25	6.47	0.00	6.47	2.32	20.13
9	9	1.45	1.69	5.16	0.00	5.16	1.76	16.36
7	7	1.27	1.43	4.44	0.00	4.44	1.48	14.19
D80, microns		275	91	71	0	71	77	43.0

Os dados de condições operacionais também foram levantados durante a amostragem e são apresentados na figura 4.1.

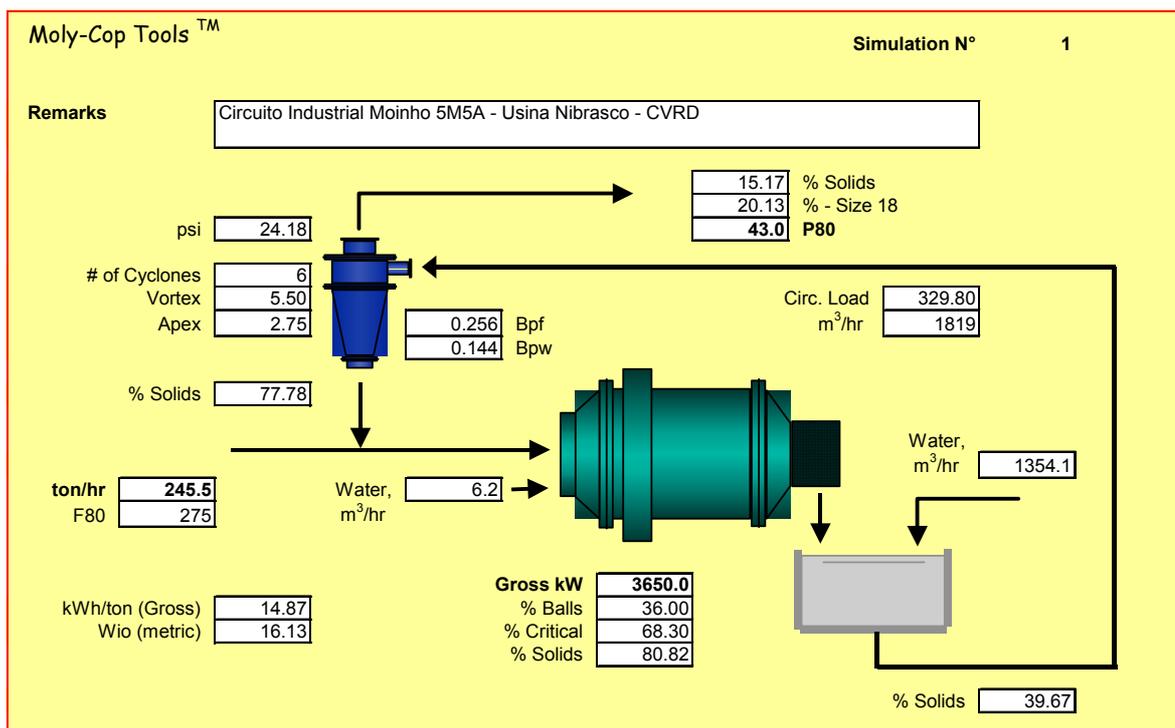


Figura 4.1 – Fluxograma do circuito industrial Moinho 5M5A – Usina Nibrasco.

O tamanho do cylpebs de reposição era de 28 mm. Além das amostras para fechamento de balanço de massas, foi coletada uma amostra de 40 t para ensaios em moinho de torque e planta piloto com duas cargas diferentes cylpebs e bolas, cujos resultados serão apresentados a seguir.

#### 4.1.2. Ensaios em planta piloto.

Com as 40 t de minério coletadas no circuito foram feitos dois ensaios em planta piloto no CDM – CVRD nas configurações de circuito apresentadas nas tabelas 4.2 e 4.3.

Tabela 4.2 – Configurações dos circuitos de moagem piloto para ensaios com carga de cylpebs e bolas.

Moinho	
Diâmetro (pés)	2
Comprimento (pés)	3
% Enchimento	36
% Velocidade Crítica	68,3

Tabela 4.3 – Carga de bolas / cylpebs utilizadas nos ensaios de moagem piloto

mm	%
28	19,37
25	29,64
22	50,99

A carga de bolas utilizada foi calculada simulando uma carga estabilizada de Bond.

A seguir são apresentados os balanços de massas dos dois ensaios piloto. Foi feito balanço somente da alimentação e produto do moinho de bolas, pois somente estes dados foram utilizados para simular o circuito piloto.

Tabela 4.4 – Balanço de massas moinho piloto com carga de cylpebs.

	Mill Feed	Mill Discharge
Ore, ton/hr	0.265	0.265
Water, m3/hr	0.070	0.070
Slurry, ton/hr	0.335	0.335
Slurry, m3/hr	0.124	0.124
Slurry Dens., ton/m3	2.702	2.699
% Solids (by volume)	43.416	43.347
% Solids (by weight)	79.058	79.011
<b>Size Distributions - Cum. % Pass.</b>		
Opening		
25400	100.00	100.00
19050	100.00	100.00
17000	100.00	100.00
1188	99.98	100.00
840	99.78	100.00
600	98.76	100.00
425	97.37	100.00
296	95.96	99.97
212	94.23	99.88
150	91.12	99.56
106	87.52	98.65
74	77.04	93.48
53	67.46	87.40
44	50.07	73.07
38	27.49	51.13
23	6.94	23.64
17	3.68	16.38
12	2.00	10.28
9	1.47	7.25
7	1.29	6.08
D80, microns	82.30	48.34

Tabela 4.5 – Balanço de massas moinho piloto com carga de bolas.

	Mill Feed	Mill Discharge
Ore, ton/hr	0.378	0.378
Water, m3/hr	0.100	0.100
Slurry, ton/hr	0.478	0.479
Slurry, m3/hr	0.177	0.177
Slurry Dens., ton/m3	2.701	2.699
% Solids (by volume)	43.400	43.347
% Solids (by weight)	79.047	79.011
<b>Size Distributions - Cum. % Pass.</b>		
Opening		
25400	100.00	100.00
19050	100.00	100.00
17000	100.00	100.00
1188	100.00	100.00
840	99.77	100.00
600	99.14	100.00
425	98.30	100.00
296	97.43	100.00
212	96.28	99.92
150	94.78	99.68
106	91.29	98.69
74	82.07	93.20
53	67.51	81.37
44	52.61	68.86
38	28.76	46.46
23	7.30	20.46
17	4.07	13.69
12	2.19	7.92
9	1.51	5.14
7	1.25	3.99
D80, microns	70.84	52.01

#### 4.1.3. Testes em moinho de torque

O moinho de torque do CDM tem diâmetro e comprimento internos de 0,46 e 0,38 cm, respectivamente, revestido com 8 aletas igualmente espaçadas (figura 4.2). As aletas fazem o papel de levantadores da carga (*lifters*). O teste em moinho de torque requer amostras de material com a mesma distribuição granulométrica da alimentação do moinho industrial. As bolas ou cylpebs devem ter a mesma distribuição de tamanho do moinho que se deseja simular. No caso em questão, utilizou-se 19,37 % de cylpebs ou bolas de 28 mm, 29,64 % de cylpebs ou bolas de 25 mm e 50,99 % de cylpebs ou bolas

de 22 mm, simulando uma distribuição de carga balanceada de Bond. Neste trabalho, foram preparadas 2 amostras com a mesma distribuição granulométrica do moinho industrial. Cada amostra foi moída a úmido com 80% de sólidos em massa, nos seguintes tempos: 0,5; 2,0; 4,0; 8,0 e 14,0 minutos. A rotina de trabalho foi organizada de forma que, ao término de cada moagem, uma alíquota representativa do conteúdo do moinho de aproximadamente 100 g fosse peneirada a úmido e retornada ao moinho para a continuação do teste, após secagem. O teste foi feito com carregamento  $J = 36\%$ , enchimento  $U = 100\%$  e velocidade de 68,3% da velocidade crítica. Como os resultados de cada tempo de moagem são obtidos rapidamente, o erro experimental é minimizado no laboratório.



Figura 4.2 – Moinho de torque CDM - CVRD

## 5. Resultados e Discussão

A seguir serão apresentados os resultados obtidos após levantamento dos parâmetros de quebra em laboratório e posterior escalonamento do circuito piloto para carga de cylpebs e bolas e finalmente avaliação das duas cargas em escala industrial.

### 5.1. Resultados dos Testes de Moagem de Batelada

Os resultados dos testes em batelada com o moinho de torque são mostrados na Figura 5.1, para carga de bolas e na Figura 5.2 para carga de cylpebs. O cálculo dos parâmetros da função quebra foi feito com ajuda do aplicativo Moly Cop Tools. Os resultados são mostrados na Tabela 5.1. Os gráficos de função seleção e função quebra para bolas e cylpebs são apresentados nas figuras 5.3 e 5.4, pode-se observar que a função seleção é praticamente igual para as duas cargas na faixa de material menor que 600 micrometros onde se encontra a maioria das partículas da alimentação do circuito de moagem, já a função quebra está indicando que a carga de bolas gera uma distribuição granulométrica mais fina ou seja favorecendo a moagem nesta faixa utilizando carga de bolas.

Tabela 5.1 – Parâmetros calculados para as funções quebra e seleção do minério de ferro com carga de bolas e cylpebs.

Modelo	Parâmetro	Teste com Bolas	Teste com Cylpebs
<b>Função seleção com região de quebra anormal</b>	$\alpha_0$	0,000042	0,000111
	$\alpha_1$	1,948	1,860
	$\alpha_2$	2,3	0,1
	<b>Dcrit</b>	744	1059
<b>Função quebra normalizável</b>	$\beta_0$	0,39523	0,25121
	$\beta_1$	0,627	0,500
	$\beta_2$	2,5	5,0
<b>Função Objetivo</b>		0,42	0,62

Os valores de função seleção estimados para a faixa granulométrica superior a 600 micrometros são menos acurados devido a pequena quantidade de massa nesta faixa granulométrica, ou seja, os valores de Dcrit para as duas cargas pode ser diferente do estimado pelo software Moly Cop Tools. Mas este valor não tem influencia significativa nos resultados, justamente devida a pequena quantidade de material superior a 600 micrometros na amostra estudada.

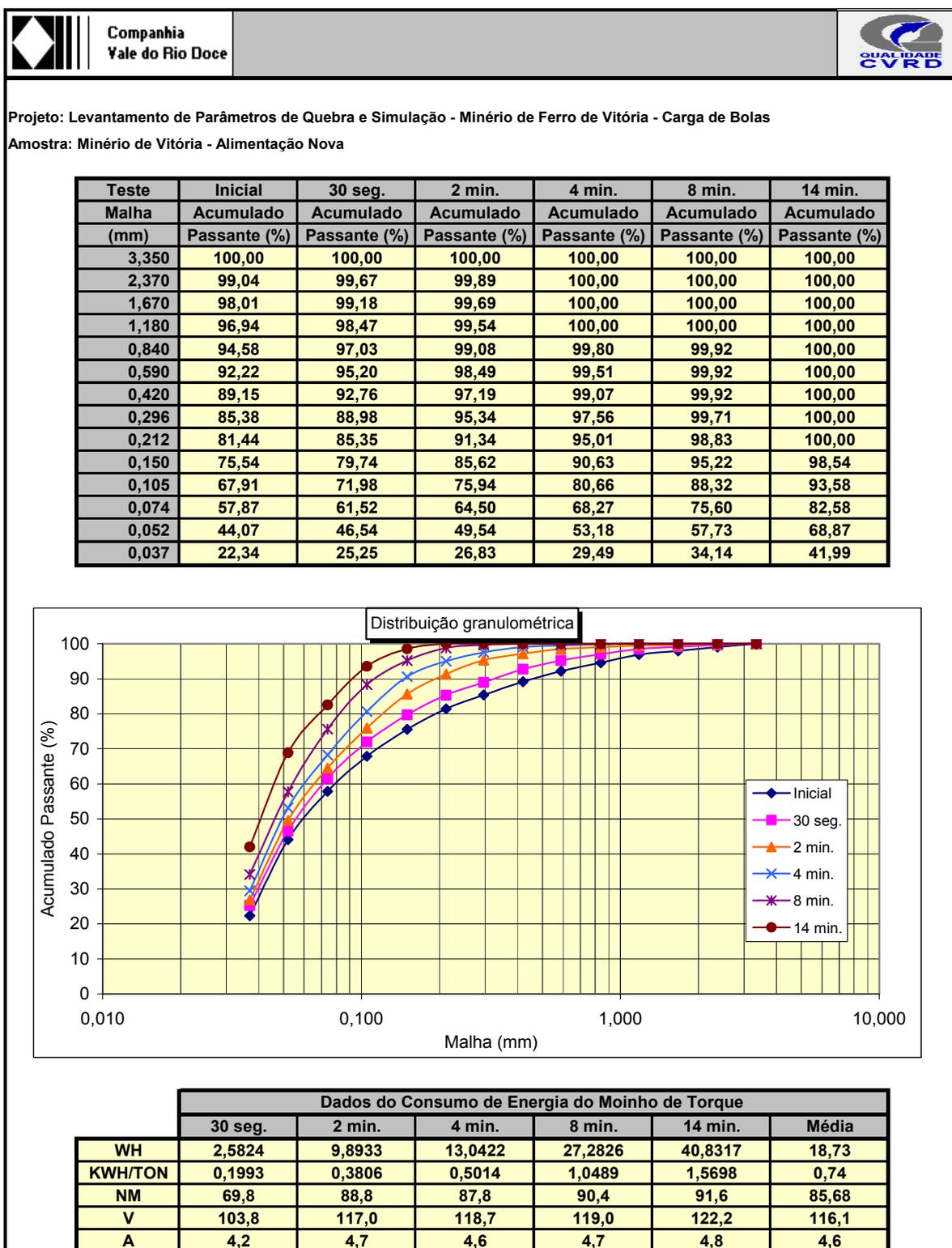


Figura 5.1 – Resultados dos ensaios em moinho de torque com carga de bolas.

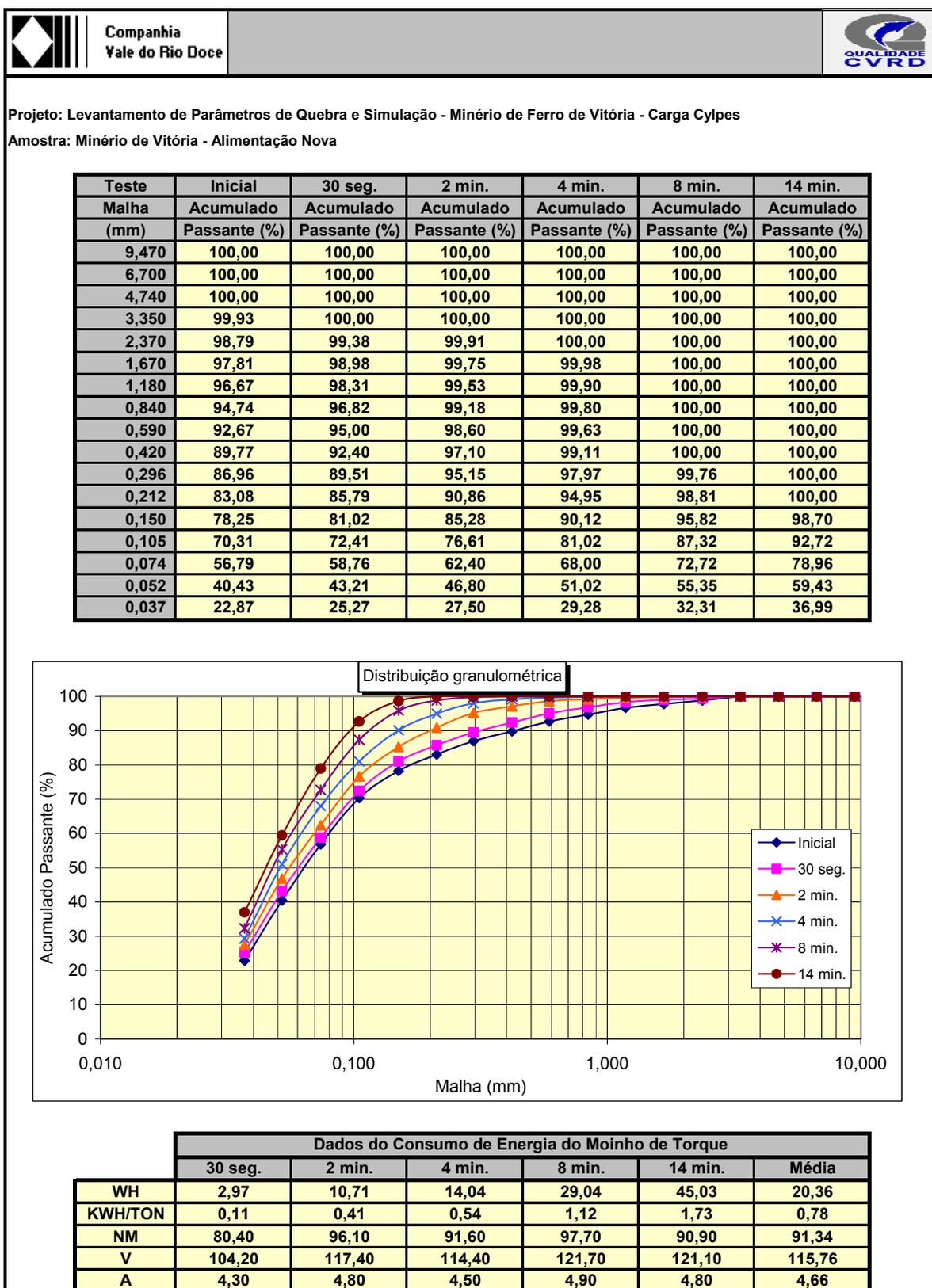


Figura 5.2 – Resultados dos ensaios em moinho de torque com carga de cylpebs.

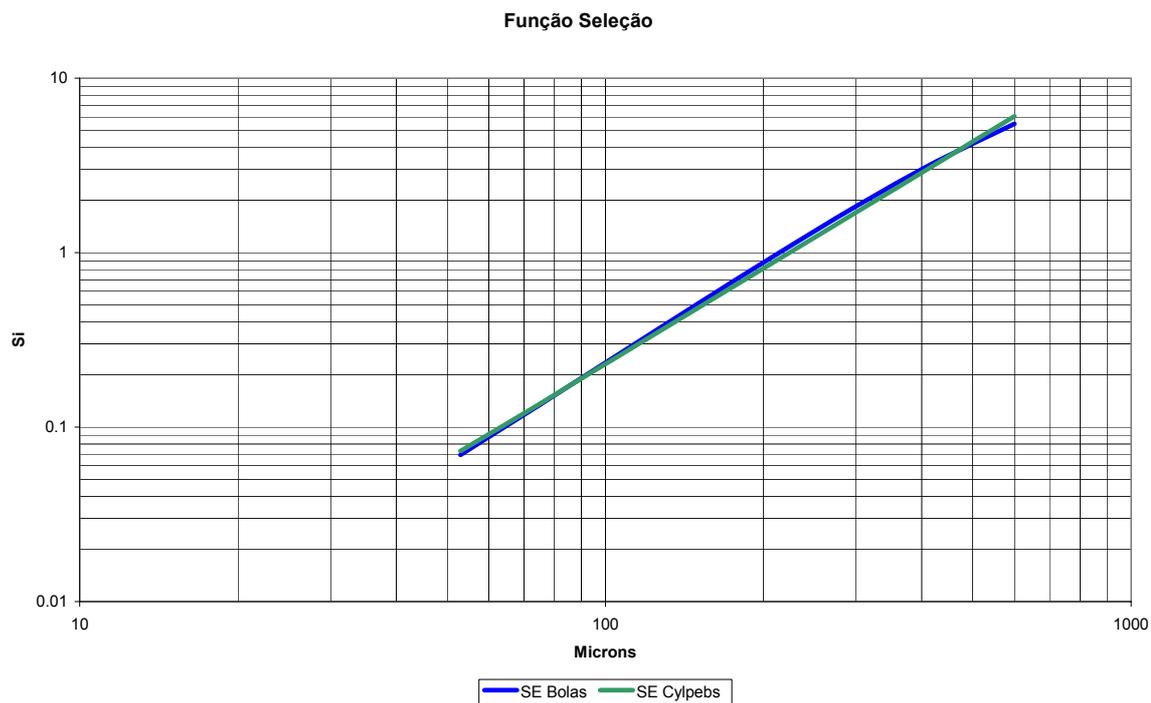


Figura 5.3 – Função Seleção para bolas e cylpebs.

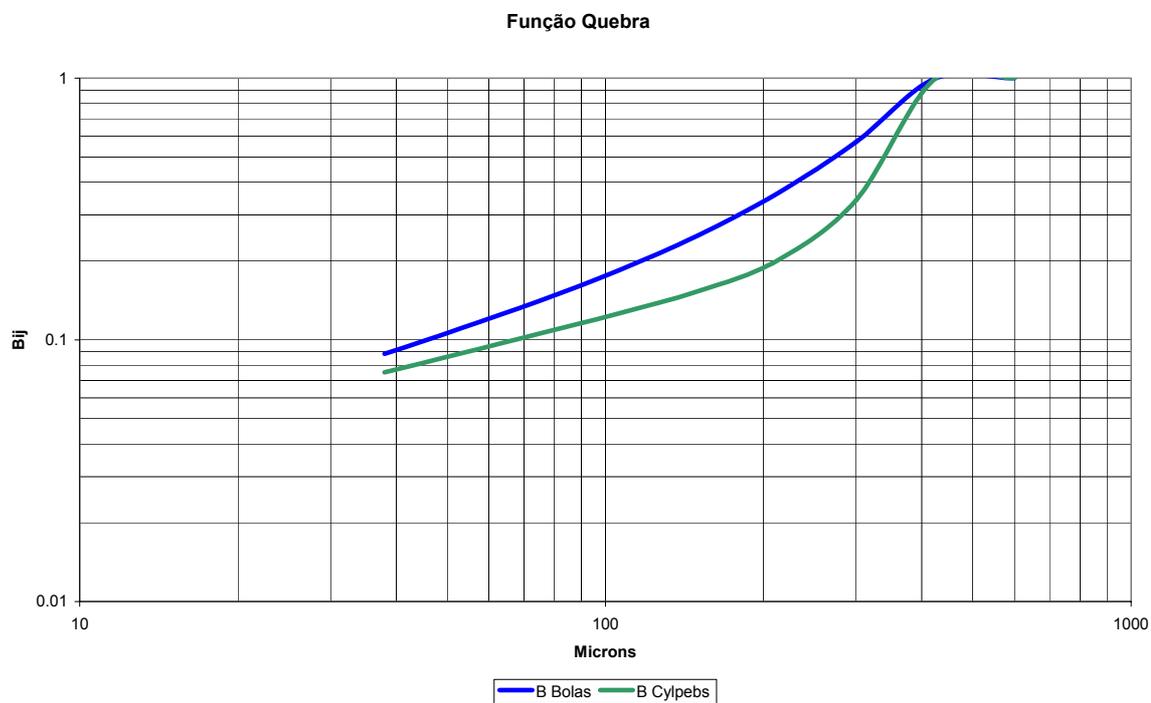


Figura 5.4 – Função Quebra para bolas e cylpebs.

## 5.2. Resultados dos Testes de Moagem em Escala Piloto

Os testes de moagem em escala piloto foram realizados para cada tipo de carga, bolas e cylpebs. Todas as variáveis operacionais foram medidas, o balanço de massas fechado e os resultados dos testes confirmados. Os testes foram realizados em um moinho de descarga por *overflow* com diâmetro interno, entre revestimentos, de 60.96 cm e comprimento interno, entre revestimentos, de 91.44 cm. Os testes com bolas e cylpebs foram feitos com carga  $J = 36\%$ , porcentagem de velocidade crítica  $\phi_c = 68,3\%$  e com 19,37 % de cylpebs/bolas de 28 mm, 29,64 % de cylpebs/bolas de 25 mm e 50,99 % de cylpebs/bolas de 22 mm.

O objetivo dos testes piloto é, essencialmente, testar a rotina de escalonamento, e os parâmetros obtidos nos testes de batelada. Dessa forma, é mais eficiente simular o moinho em circuito aberto, retirando-se assim os efeitos e as imprecisões decorrentes do modelamento da etapa de classificação. Assim, a distribuição de tamanhos e a taxa de alimentação do moinho são obtidas a partir do fechamento do balanço de massas e das distribuições de tamanhos medidas no circuito.

Na Figura 5.5, são mostradas as distribuições granulométricas medidas e previstas no produto do moinho, para as duas cargas analisadas.

Na Figura 5.5 pode-se observar, tanto para bolas como para cylpebs, que o escalonamento dos dados de laboratório para piloto foi muito bom.

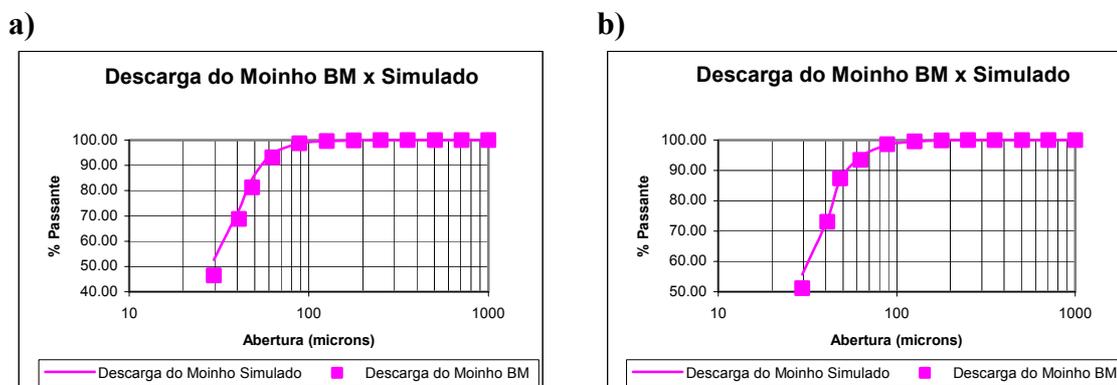


Figura 5.5 – Resultados do escalonamento para os testes piloto. Os gráficos mostram a distribuição de tamanhos no produto do moinho piloto, medida (símbolos) e prevista (linhas contínuas). a) bolas e b) cylpebs

## 5.3. Resultados da Moagem Industrial com Cylpebs

O moinho amostrado tem 4,95 metros de diâmetro interno, entre revestimentos, e 10,95 metros de comprimento interno, entre revestimentos. O moinho operava com uma carga de cylpebs com  $J = 36\%$ , e porcentagem de velocidade crítica  $\phi_c = 68,3\%$ . A alimentação nova de cylpebs é de 28 mm, e foi assumido que a distribuição de tamanhos da carga segue a distribuição de equilíbrio de Bond (Bond, 1960), para bolas.

O circuito é fechado por uma bateria de 6 hidrociclones de 50 cm de diâmetro, operando com uma pressão na alimentação de 1,7 kgf/cm<sup>2</sup>.

O balanço de massas e água foi fechado pelo método de Lagrange, implementado no Moly-Cop Tools (Sepúlveda, 2001), com as distribuições de tamanhos medidas nos diversos fluxos. A simulação, na Figura 5.6 e Tabela 5.2, foi feita com os parâmetros da Tabela 5.1, para o moinho com cylpebs, considerando-se o ajuste no modelo dos parâmetros do hidrociclone utilizando o modelo do CIMM.

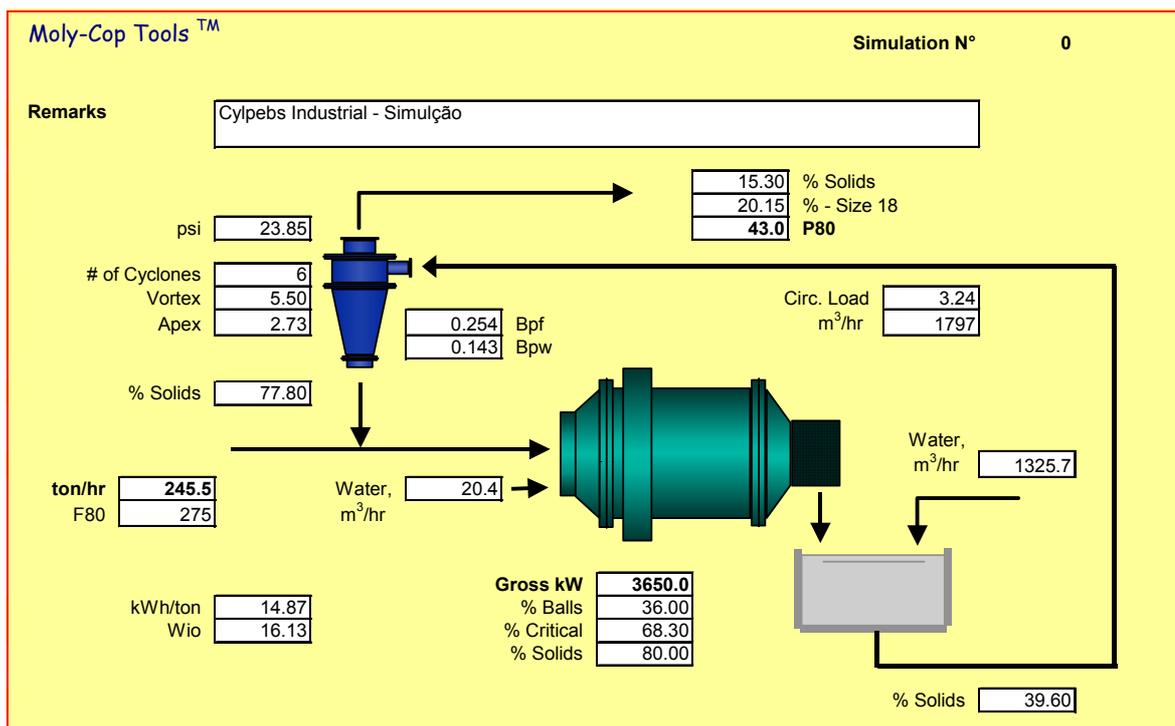


Figura 5.6 – Simulação do moinho industrial com carga de cylpebs.

O balanço de massas e água da simulação está de acordo com o balanço de massas e água medidos com resultados praticamente exatos. As distribuições de tamanho medidas e simuladas são mostradas na Figura 5.7, e mostram-se absolutamente consistentes, com desvios praticamente insignificantes. Com isto, o simulador do circuito de moagem pode ser considerado plenamente calibrado.

Tabela 5.2 – Simulação do moinho industrial com carga de cylpebs.

**CIRCUIT MASS BALANCE***Configuration : DIRECT*

	Fresh Feed	Mill Feed	Mill Discharge	Sump Water	Cyclone Feed	Cyclone U'flow	Cyclone O'flow
Ore, ton/hr	245.5	1039.7	1039.7	0.0	1039.7	794.2	245.5
Water, m3/hr	12.9	239.5	259.9	1325.7	1585.6	226.6	1359.1
Slurry, ton/hr	258.4	1279.2	1299.6	1325.7	2625.3	1020.8	1604.6
Slurry, m3/hr	62.8	450.8	471.2	1325.7	1797.0	388.0	1409.0
Slurry Dens., ton/m3	4.114	2.837	2.758	1.000	1.461	2.631	1.139
% Solids (by volume)	79.4	46.9	44.8	0.0	11.8	41.6	3.5
% Solids (by weight)	95.00	81.28	80.00	0.00	39.60	77.80	15.30

**Particle Size Distributions** (*Cummulative % Passing*)

Mesh	Opening								
4	4700	100.00	100.00	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00	100.00
6	3360	95.58	98.96	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00	100.00
8	2360	93.76	98.53	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00	100.00
10	1700	92.66	98.27	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00	100.00
14	1180	91.48	97.99	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00	100.00
20	840	88.91	97.38	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00	100.00
28	600	86.74	96.86	99.99	0.00	99.99	99.99	100.00	100.00
35	425	84.10	96.20	99.95	0.00	99.95	99.94	100.00	100.00
48	300	81.03	95.34	99.82	0.00	99.82	99.77	100.00	100.00
65	212	77.06	93.97	99.39	0.00	99.39	99.20	100.00	100.00
100	150	72.03	91.51	98.11	0.00	98.11	97.53	100.00	100.00
150	105	64.66	86.14	94.49	0.00	94.49	92.78	100.00	100.00
200	75	51.01	72.53	84.03	0.00	84.03	79.18	99.73	99.73
270	53	40.95	50.81	63.54	0.00	63.54	53.86	94.85	94.85
400	37	21.66	22.23	33.84	0.00	33.84	22.41	70.83	70.83
24	23.52987	7.94	7.13	14.43	0.00	14.43	6.87	38.90	38.90
17	17.301375	4.26	3.84	9.21	0.00	9.21	3.71	26.99	26.99
13	12.514661	2.02	2.32	6.60	0.00	6.60	2.41	20.15	20.15
9	8.8813725	1.45	1.76	5.28	0.00	5.28	1.85	16.37	16.37
7	6.7475363	1.27	1.50	4.55	0.00	4.55	1.57	14.20	14.20
D80, microns		275	91	71	0	71	77	43.0	43.0

Specific Energy Consumption : 14.87 kWh/ton (Gross)  
Operational Work Index : 16.13 kWh/ton

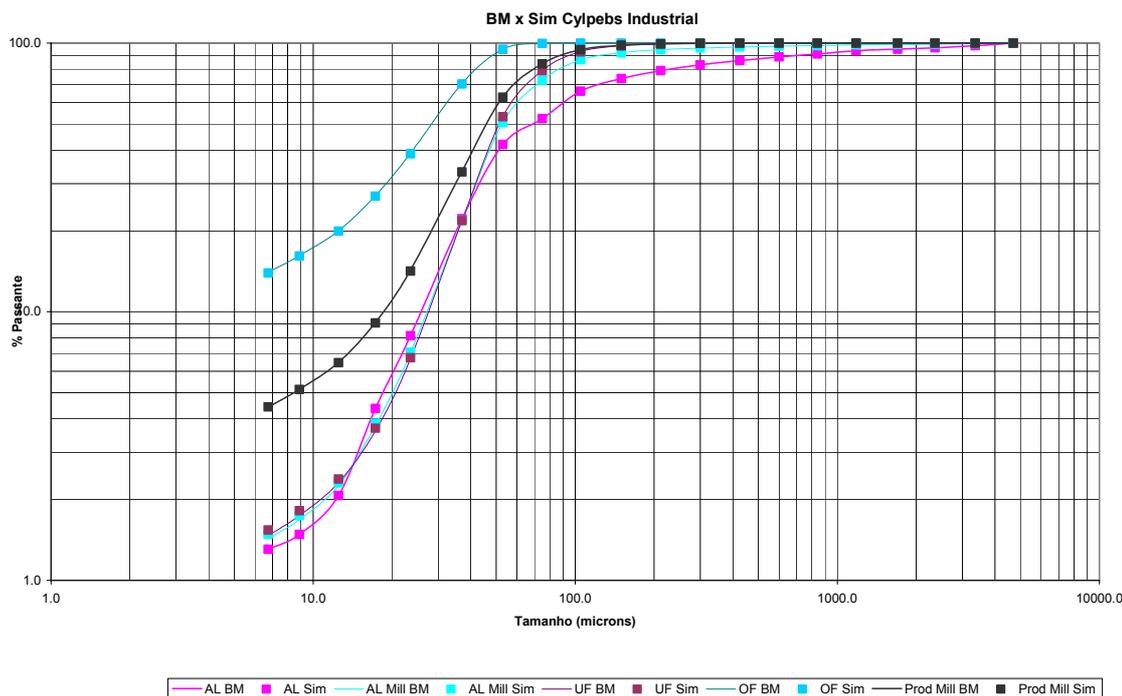


Figura 5.7 – Distribuições de tamanhos medidas (símbolos) e simuladas para o moinho industrial com cylpebs (linhas contínuas).

#### 5.4. Resultados da Moagem Industrial com Bolas

Com o simulador calibrado, a simulação do circuito de moagem para uma carga de bolas é uma simples questão de substituir os parâmetros para cylpebs pelos parâmetros para bolas. A comparação da performance pode ser feita de várias formas. Uma forma eficaz é fixar a taxa de alimentação do moinho e achar a taxa de alimentação nova que produz este valor, neste caso 1039,76 t/h. Assim, chega-se a uma taxa de alimentação de 255,7 t/h, maior do que a taxa de 245,5 t/h na moagem com cylpebs. Os resultados da simulação com carga de bolas são apresentados na figura 5.6 e tabela 5.3. Estes números representam um ganho de capacidade em torno de 4,2% para carga de bolas em relação à carga de cylpebs. Embora este número pareça definitivo, existe um outro parâmetro importante que é a demanda energética. A densidade específica do cylpebs deste trabalho é de 7.68 enquanto a das bolas é 7.18. A densidade dos corpos moedores multiplica a potência líquida de moagem diretamente. Portanto, a potência líquida para bolas, a partir da fórmula de Hogg e Fuerstenau (1972), é de 3458 kW enquanto para cylpebs é de 3650 kW. As potências específicas, por sua vez, são de 13,52 kWh/t para bolas e 14,87 kWh/t para cylpebs. Finalmente, o produto simulado do moinho de bolas foi um pouco mais fino do que para cylpebs, com P80 de 40,1  $\mu\text{m}$  contra 43,0  $\mu\text{m}$ . Com estes valores, pode-se calcular o WI operacional para os dois casos, e os valores calculados são de 16,13 kWh/t para cylpebs e de 13,86 kWh/t para bolas.

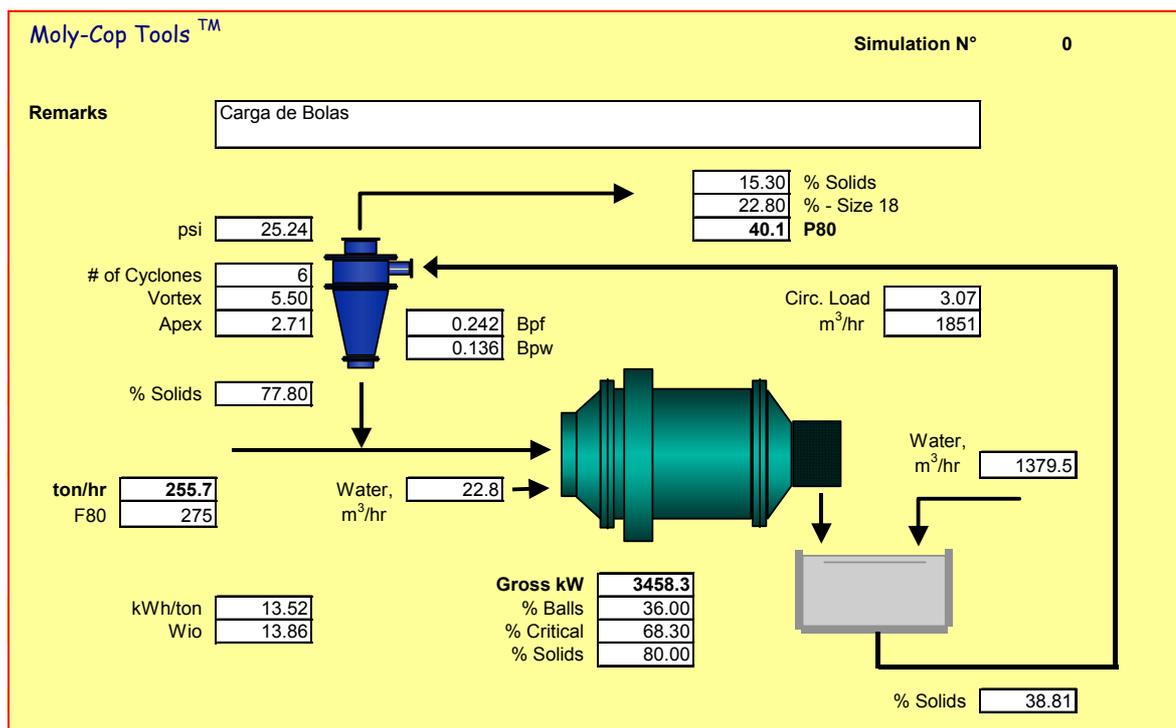


Figura 5.8 – Simulação do moinho industrial com carga de bolas.

Tabela 5.3 – Simulação do moinho industrial com carga de bolas.

**CIRCUIT MASS BALANCE***Configuration : DIRECT*

	Fresh Feed	Mill Feed	Mill Discharge	Sump Water	Cyclone Feed	Cyclone U'flow	Cyclone O'flow
Ore, ton/hr	255.7	1039.7	1039.7	0.0	1039.7	783.9	255.7
Water, m3/hr	13.5	237.1	259.9	1379.5	1639.4	223.7	1415.7
Slurry, ton/hr	269.2	1276.8	1299.6	1379.5	2679.1	1007.6	1671.5
Slurry, m3/hr	65.4	448.4	471.2	1379.5	1850.7	383.0	1467.7
Slurry Dens., ton/m3	4.114	2.847	2.758	1.000	1.448	2.631	1.139
% Solids (by volume)	79.4	47.1	44.8	0.0	11.4	41.6	3.5
% Solids (by weight)	95.00	81.43	80.00	0.00	38.81	77.80	15.30

**Particle Size Distributions** (*Cummulative % Passing*)

Mesh	Opening							
4	4700	100.00	100.00	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00
6	3360	95.58	98.91	99.99	0.00	99.99	99.99	100.00
8	2360	93.76	98.45	99.99	0.00	99.99	99.98	100.00
10	1700	92.66	98.18	99.98	0.00	99.98	99.98	100.00
14	1180	91.48	97.88	99.97	0.00	99.97	99.96	100.00
20	840	88.91	97.23	99.96	0.00	99.96	99.95	100.00
28	600	86.74	96.68	99.94	0.00	99.94	99.92	100.00
35	425	84.10	95.98	99.89	0.00	99.89	99.86	100.00
48	300	81.03	95.11	99.77	0.00	99.77	99.70	100.00
65	212	77.06	93.78	99.42	0.00	99.42	99.23	100.00
100	150	72.03	91.52	98.40	0.00	98.40	97.88	100.00
150	105	64.66	86.65	95.34	0.00	95.34	93.82	100.00
200	75	51.01	73.88	85.89	0.00	85.89	81.33	99.85
270	53	40.95	53.60	67.26	0.00	67.26	57.73	96.48
400	37	21.66	24.30	37.62	0.00	37.62	25.16	75.79
24	23.52987	7.94	8.27	17.39	0.00	17.39	8.37	45.03
17	17.301375	4.26	4.52	11.30	0.00	11.30	4.60	31.84
13	12.514661	2.02	2.62	7.73	0.00	7.73	2.81	22.80
9	8.8813725	1.45	1.84	5.74	0.00	5.74	1.97	17.31
7	6.7475363	1.27	1.50	4.69	0.00	4.69	1.57	14.27
D80, microns		275	89	68	0	68	74	40.1

Specific Energy Consumption : 13.52 kWh/ton (Gross)  
Operational Work Index : 13.86 kWh/ton

## 6. Conclusões

A metodologia de escalonamento utilizando modelamento matemático se mostrou adequada para dimensionamento de circuitos de moagem e otimização de cargas moedoras.

Um ponto que merece destaque: é que com pequenas quantidades de minério pode ser feito um escalonamento confiável de um moinho industrial. Já para se ter uma avaliação e posterior otimização de um circuito de ciclonagem, via simulação, é necessária à realização de uma amostragem do circuito industrial ou operar uma planta piloto com ciclone de mesma dimensão do equipamento que se deseja estudar, para obtenção de parâmetros do modelo.

A metodologia de modelamento matemático e simulação de moinhos com dados de laboratório se mostrou acurada, entretanto, é recomendável a operação de um circuito de moagem piloto para a confirmação dos resultados em escala contínua.

Com este trabalho foi desenvolvida uma metodologia para CVRD de dimensionamento e otimização de circuitos de moagem, com utilização de dados de laboratório e modelos matemáticos.

Outra conclusão importante do trabalho foi poder afirmar que as bolas têm um melhor desempenho do que os cylpebs para a moagem de pellet feed em Vitória, sendo que os valores obtidos neste trabalho foram confirmados em escala industrial.

## 7. Referências Bibliográficas

- Alves, V.K., Galéry, R., Peres, A.E.C., Schneider C.L. (2004) “Estudo de otimização de Carga de Moinho Utilizando Tecnologia de Simulação.”, Anais XX ENTMMME – Encontro Nacional de Tratamento de Minérios e Metalurgia Extrativa, Florianópolis, p. 227-234.
- Alves, V.K., Silva, R.V.G., Ribeiro, M. (CVRD), Galéry, R., Peres, A.E.C. (UFMG), Schneider, C.L., (2003) Brazil “Mill charge optimization by simulation: a case study” Anais 1<sup>st</sup> International Symposium on Iron Ore – Vitória, E.S. Brazil.
- Austin, L.G., Klimpel, R.R., Luckie, P.T.(1984), “Process Engineering of Size Reduction: Ball Milling”. SME AIME.
- Austin, L.G., Menacho, J.M., Percy, F., (1987) Proc. 20th Int. Symposium on the Application of Computers and Mathematics in the Mineral Industries, S. Afr. Inst. Min. Metall., Johannesburg, pp. 107-126
- Austin L.G., Kimpel R.R. and Luckie P.T., (1984) Process Engineering of Size Reduction: Ball Milling, SME AIME.
- Bond, F.C., (1952) “The Third Theory of Comminution”, AIME Trans., Vol. 193, p. 484. Também em Mining Engineering, Mayo.
- Bond, F.C., (1949) “Standard Grindability Tests Tabulated”, AIME Trans., Vol. 183, p. 313.
- Bond, F.C., (1954) “Crushing and Grindability Calculations”, Can. Mining and Metall. Bulletin, Vol. 47, N<sup>o</sup> 507, p. 466, July.
- Bond, F.C. (1960) Crushing and grinding Calculations, Brit. Chem, Eng, 6, 378-391, 543-548.

- Galéry, R., Andrade, D.G., Alves, V.K., (1994) “Simulação de Circuitos de Moagem: Determinação de Parâmetros de Quebra”, Anais XV CILAMCE, Belo Horizonte, 2, p. 1005-1014.
- Galéry, R., Montenegro, L.C.M., (1997) “Aplicação de métodos numéricos na modelagem do processo de moagem de sistemas particulados”, Anais do XXIV Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados, Eds. M. A. S. Barrozo, J.J.R. Damasceno, Uberlândia, p. 619-624.
- Galéry, R., (2002) “Moagem: Modelagem de Parâmetros de Quebra Através da Análise da Energia de Fragmentação”, Tese de Doutorado, CPGEM, Universidade Federal de Minas Gerais .
- Gutiérrez, L., Sepúlveda, J.E., (1986) “Dimensionamiento y Optimización de Plantas Concentradoras mediante Técnicas de Modelación Matemática”, Publicación CIMM.
- Herbst, J.A., Grandy, G.A., Mika, T.S., (1968) “On the Development and Use of Lumped Parameters Models for an Open and Closed-Circuit Grinding”, Trans. IMM, Section C, Vol. 77, p. 193.
- Herbst, J.A. et al., (1973) “Population Balance models for Design of Continuous Grinding Mills”, 10 th IMPC, London, p. 23-45.
- Herbst, J.A., Fuersteneau, D.W., (1980) “Scale-up Procedures for Continuous Grinding Mill Design Using Population Balance Models”, Int. J. of Min. Proc., Vol. 7, p. 1-31.
- Herbst, J.A., Fuerstenau, D.W., (1968) “The Zero Order Production of Fine Sizes in Comminution and its Implications in Simulation”, AIME Trans., Vol. 241, p. 538-548, December.

- Herbst, J.A., Rajamani, K., Kinneberg, D., (1977)“ESTIMILL: A Computer Program for the Simulation of Grinding Circuits”, University of Utha, USA.
- Herbst, J.A. & Fuerstenau, D.W. (1980) “Scale-up procedure for continuous grinding mill design using population balance models,” Int. Jnl. Mineral Processing, Vol. 7, pp. 1-31.
- Herbst, J.A., Lo, Y.C., and Rajamani, K., (1985) “Population Balance Model Predictions of the Performance of Large-Diameter Mills”, Minerals and Metallurgical Processing, p. 114, Mayo .
- Hogg, R. & Fuerstenau, D.W. (1972) “Power Relations for Tumbling Mills”, Trnas. SME-AIME, Vol. 252, pp. 418-432
- Kelsall, D.F. and Reid, K.J., (1965) “The Derivation of a Mathematical Model for Breakage in Small Continuous Wet Ball Mill”, paper 4.2, Joint AICHE-Inst. Of Chem. Engng. Meeting, London, p. 13.
- Kick, F., (1885) “Das Gesetz der Proportionalen Widerstande und Seine Anwendung”, A. Felix, Leipzig.
- Klimpel, R.R., Austin, L.G., (1984) ”The Back-Calculation of Specific Rates of Breakage from Continuous Mill Data,” Powder Technology, Vol. 38, pp. 77-91.
- Korpi, P.A., Dopson, G.W., (1981) “New Ball Mill Lining Cuts Costs”, E & MJ, p. 78, Fevereiro 1981.
- Lapidus, L., (1962) “Digital Computation for Chemical Engineers, Mc Graw-Hill book Co., .
- Luckie, P.T., Austin ,L.G., (1972) Mineral Science and Engineering, 4, 24-51.

- Lynch, A.J., (1977) "Mineral Crushing and Grinding Circuits", Elsevier, New York.
- Malghan, S.G., (1976) "The Scale-up of Ball Mills Using Population Balance Models", Ph. D. Tese, University of California, Berkeley.
- Menacho, J. M., (1985) "Modelo de Desgaste de Bolas y Optimización de su Perfil de Tamaño en Molinos Rotatorios Continuos", Tesis de Doctorado, U. De Concepción – CIMM.
- Moler, C., Loan, C.V. Loan, (1978) "Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of Matrix". Society of Industrial and Applied Mathematic Review, Vol. 20, 801-836.
- Peres, A.E.C.; Machado, I. C., (1988) Altas razões de redução em moinhos de barras: um fator crítico de dimensionamento. *Mineração Metalurgia*, n. 511, p. 60-2.
- Plitt, L.R., (1976) "A Mathematical Model for the Hydrocyclone Classifier", CIM Bulletin, p. 114, Dezembro.
- Rajamani, K, and Herbst, J.A., (1984) "Simultaneous Estimation of Selection and breakage Functions from Batch and Continuous Grinding data", *Trans. Inst. Min. Metall.*, Vol. 93, p. C74.
- Reid, K.J., (1965), "A Solution to the Batch Grinding Equation," *Chemical Engineering Science*, Vol. 20, pp. 953-963.
- von Rittinger, P.R., (1867) "Lehrbuch der Aufbereitungskunde", Berlín.
- Rojas, J., (1985) "Determinación del Consumo de Energía en la Molienda Utilizando un Molino de torque de Laboratorio", Memoria de Título, Dpto. Ingeniería Metalúrgica, Universidad de Santiago de Chile.

Rowland, C.A., Jr., (1973) Comparison of Work Indices Calculated From Operation Data with Those from Laboratory Test Data, IMM (London), Proc. 10<sup>th</sup> IMPC, ed. M.J. Jones, ed., 47-61.

Rowland, C.A.; Kjos, D.M., (1969) Rod and ball mills, in Mineral processing plant design, cap. 12, SME, N. York, p. 239-78.

Sepúlveda, J.E., (1984) “Una “Cuarta Ley” para la Molienda / Clasificación”. IV Simposium sobre Molienda, ARMCO, Chile, p. 49, Noviembre.

Sepúlveda, J.E., Souyris, R., Reyes, J., (1983) Proyecto P1183, CIMM, Mayo.

Sepúlveda, J.M. (2001), Manual do usuário do Moly-Cop Tools, Moly-Cop Chile S.A.

Wegstein, J. H., (1958) Comm. Assoc. Computing Machinery 1, N° 6, P. 9.

## **8. Anexos**

Anexo 1 – Dados completos do levantamento dos parâmetros de quebra para carga de Cylpebs.

Anexo 2 – Dados completos do levantamento dos parâmetros de quebra para carga de Bolas.

Anexo 3 – Dados de calibração do ciclone industrial.

Anexo 4 – Dados completos da Simulação do circuito de moagem piloto com carga de Cylpebs.

Anexo 5 – Dados completos da Simulação do circuito de moagem piloto com carga de Bolas.

Anexo 6 – Dados completos da Simulação do circuito de moagem Industrial com carga de Cylpebs.

Anexo 7 – Dados completos da Simulação do circuito de moagem Industrial com carga de Bolas.

Anexo 1 – Dados completos do levantamento dos parâmetros de quebra para carga de Cylpebs.

Remarks: Amostra 1

**DESIGN AND OPERATING CONDITIONS**

*Configuration: BATCH*

Ore, Kg	26.0	Diameter, ft	1.59
Water, lt	6.5	Length, ft	1.25
Slurry, Kg	32.5	Balls Filling, %	32.4
Slurry, lt	11.8	Speed, % Critical	68.3
Slurry Dens., Kg/lt	2.745	App. Dens., ton/m3	5.429
% Solids (by weight)	80.0	Power, kW	0.46
<b>Grinding Time, min</b>	<b>2.0</b>	<b>Energy, kWh/ton</b>	<b>0.59</b>

**Particle Size Distributions (Cumm. % Passing)**

i	Mesh	Opening	Feed	Discharge	
				Exp.	Adj.
1	1.05	25400	100.00	100.00	/ 100.00
2	0.742	19050	100.00	100.00	/ 100.00
3	0.525	12700	100.00	100.00	/ 100.00
4	0.371	9500	100.00	100.00	/ 100.00
5	3	6700	100.00	100.00	/ 100.00
6	4	4750	100.00	100.00	/ 100.00
7	6	3350	99.93	100.00	/ 100.00
8	8	2360	98.79	99.91	/ 100.00
9	10	1700	97.81	99.75	/ 100.00
10	14	1180	96.67	99.53	/ 100.00
11	20	850	94.74	99.18	/ 100.00
12	28	600	92.67	98.60	/ 99.95
13	35	425	89.77	97.10	/ 99.18
14	48	300	86.96	95.15	/ 96.39
15	65	212	83.08	90.86	/ 91.43
16	100	150	78.25	85.28	/ 85.28
17	150	106	70.31	76.61	/ 76.49
18	200	75	56.79	62.40	/ 62.40
19	270	53	10.43	46.80	/ 45.17
20	400	38	22.87	27.50	/ 26.79
D80, microns			170	122	/ 122

**MODEL PARAMETERS**

Selection		Breakage	
alpha01	0.000111	beta00	0.25121
alpha02	0.0000000	beta01	0.000
alpha11	1.860	beta1	0.500
alpha12	1.000	beta2	5.000
alpha2	0.076		
Dcrit	1059	<b>Obj. Function</b>	<b>0.67</b>

Remarks: Amostra 1

**DESIGN AND OPERATING CONDITIONS**  
*Configuration: BATCH*

Ore, Kg	26.0	Diameter, ft	1.59
Water, lt	6.5	Length, ft	1.25
Slurry, Kg	32.5	Balls Filling, %	32.4
Slurry, lt	11.8	Speed, % Critical	68.3
Slurry Dens., Kg/lt	2.745	App. Dens., ton/m3	5.429
% Solids (by weight)	80.0	Power, kW	0.46
<b>Grinding Time, min</b>	<b>4.0</b>	<b>Energy, kWh/ton</b>	<b>1.08</b>

**Particle Size Distributions (Cumm. % Passing)**

i	Mesh	Opening	Feed	Discharge	
				Exp.	Adj.
1	1.05	25400	100.00	100.00	/ 100.00
2	0.742	19050	100.00	100.00	/ 100.00
3	0.525	12700	100.00	100.00	/ 100.00
4	0.371	9500	100.00	100.00	/ 100.00
5	3	6700	100.00	100.00	/ 100.00
6	4	4750	100.00	100.00	/ 100.00
7	6	3350	99.93	100.00	/ 100.00
8	8	2360	98.79	100.00	/ 100.00
9	10	1700	97.81	99.98	/ 100.00
10	14	1180	96.67	99.90	/ 100.00
11	20	850	94.74	99.80	/ 100.00
12	28	600	92.67	99.63	/ 100.00
13	35	425	89.77	99.11	/ 99.91
14	48	300	86.96	97.97	/ 98.83
15	65	212	83.08	94.95	/ 95.14
16	100	150	78.25	90.12	/ 88.89
17	150	106	70.31	81.02	/ 79.79
18	200	75	56.79	68.00	/ 65.49
19	270	53	10.43	51.02	/ 47.80
20	400	38	22.87	29.28	/ 28.94
D80, microns			170	122	/ 122

MODEL PARAMETERS			
Selection			Breakage
alpha01	0.000111		beta00 0.25121
alpha02	0.0000000		beta01 0.000
alpha11	1.860		beta1 0.500
alpha12	1.000		beta2 5.000
alpha2	0.076		
Dcrit	1059		<b>Obj. Function 0.86</b>

Remarks: Amostra 1

**DESIGN AND OPERATING CONDITIONS**

*Configuration: BATCH*

Ore, Kg	26.0	Diameter, ft	1.59
Water, lt	6.5	Length, ft	1.25
Slurry, Kg	32.5	Balls Filling, %	32.4
Slurry, lt	11.8	Speed, % Critical	68.3
Slurry Dens., Kg/lt	2.745	App. Dens., ton/m3	5.429
% Solids (by weight)	80.0	Power, kW	0.46
<b>Grinding Time, min</b>	<b>8.0</b>	<b>Energy, kWh/ton</b>	<b>2.29</b>

**Particle Size Distributions (Cumm. % Passing)**

i	Mesh	Opening	Feed	Discharge	
				Exp.	Adj.
1	1.05	25400	100.00	100.00	/ 100.00
2	0.742	19050	100.00	100.00	/ 100.00
3	0.525	12700	100.00	100.00	/ 100.00
4	0.371	9500	100.00	100.00	/ 100.00
5	3	6700	100.00	100.00	/ 100.00
6	4	4750	100.00	100.00	/ 100.00
7	6	3350	99.93	100.00	/ 100.00
8	8	2360	98.79	100.00	/ 100.00
9	10	1700	97.81	100.00	/ 100.00
10	14	1180	96.67	100.00	/ 100.00
11	20	850	94.74	100.00	/ 100.00
12	28	600	92.67	100.00	/ 100.00
13	35	425	89.77	100.00	/ 100.00
14	48	300	86.96	99.76	/ 99.94
15	65	212	83.08	98.81	/ 98.93
16	100	150	78.25	95.82	/ 94.76
17	150	106	70.31	87.32	/ 86.19
18	200	75	56.79	72.72	/ 71.84
19	270	53	10.43	55.35	/ 53.30
20	400	38	22.87	32.31	/ 33.41
D80, microns			170	90	/ 92

**MODEL PARAMETERS**

Selection		Breakage	
alpha01	0.000111	beta00	0.25121
alpha02	0.0000000	beta01	0.000
alpha11	1.860	beta1	0.500
alpha12	1.000	beta2	5.000
alpha2	0.076		
Dcrit	1059	<b>Obj. Function</b>	<b>0.55</b>

Remarks: Amostra 1

**DESIGN AND OPERATING CONDITIONS**  
*Configuration: BATCH*

Ore, Kg	26.0	Diameter, ft	1.59
Water, lt	6.5	Length, ft	1.25
Slurry, Kg	32.5	Balls Filling, %	32.4
Slurry, lt	11.8	Speed, % Critical	68.3
Slurry Dens., Kg/lt	2.745	App. Dens., ton/m3	5.429
% Solids (by weight)	80.0	Power, kW	0.46
<b>Grinding Time, min</b>	<b>14.0</b>	<b>Energy, kWh/ton</b>	<b>4.03</b>

**Particle Size Distributions (Cumm. % Passing)**

i	Mesh	Opening	Feed	Discharge	
				Exp.	Adj.
1	1.05	25400	100.00	100.00	/ 100.00
2	0.742	19050	100.00	100.00	/ 100.00
3	0.525	12700	100.00	100.00	/ 100.00
4	0.371	9500	100.00	100.00	/ 100.00
5	3	6700	100.00	100.00	/ 100.00
6	4	4750	100.00	100.00	/ 100.00
7	6	3350	99.93	100.00	/ 100.00
8	8	2360	98.79	100.00	/ 100.00
9	10	1700	97.81	100.00	/ 100.00
10	14	1180	96.67	100.00	/ 100.00
11	20	850	94.74	100.00	/ 100.00
12	28	600	92.67	100.00	/ 100.00
13	35	425	89.77	100.00	/ 100.00
14	48	300	86.96	100.00	/ 100.00
15	65	212	83.08	100.00	/ 99.98
16	100	150	78.25	98.70	/ 98.36
17	150	106	70.31	92.72	/ 92.27
18	200	75	56.79	78.96	/ 79.05
19	270	53	10.43	59.43	/ 59.95
20	400	38	22.87	36.99	/ 38.86
D80, microns			170	77	/ 77

MODEL PARAMETERS			
Selection		Breakage	
alpha01	0.000111	beta00	0.25121
alpha02	0.0000000	beta01	0.000
alpha11	1.860	beta1	0.500
alpha12	1.000	beta2	5.000
alpha2	0.076		
Dcrit	1059	<b>Obj. Function</b>	<b>0.34</b>

Remarks: Amostra 1

**DESIGN AND OPERATING CONDITIONS**

*Configuration: BATCH*

Ore, Kg	26.0	Diameter, ft	1.59
Water, lt	6.5	Length, ft	1.25
Slurry, Kg	32.5	Balls Filling, %	32.4
Slurry, lt	11.8	Speed, % Critical	68.3
Slurry Dens., Kg/lt	2.745	App. Dens., ton/m3	5.429
% Solids (by weight)	80.0	Power, kW	0.52
<b>Grinding Time, min</b>	<b>0.5</b>	<b>Energy, kWh/ton</b>	<b>0.17</b>

**Particle Size Distributions (Cumm. % Passing)**

i	Mesh	Opening	Feed	Discharge	
				Exp.	Adj.
1	1.05	25400	100.00	100.00	/ 100.00
2	0.742	19050	100.00	100.00	/ 100.00
3	0.525	12700	100.00	100.00	/ 100.00
4	0.371	9500	100.00	100.00	/ 100.00
5	3	6700	100.00	100.00	/ 100.00
6	4	4750	100.00	100.00	/ 100.00
7	6	3350	99.93	100.00	/ 100.00
8	8	2360	98.79	98.38	/ 100.00
9	10	1700	97.81	98.98	/ 100.00
10	14	1180	96.67	98.31	/ 99.97
11	20	850	94.74	96.82	/ 99.57
12	28	600	92.67	95.00	/ 97.95
13	35	425	89.77	92.4	/ 94.79
14	48	300	86.96	89.51	/ 90.99
15	65	212	83.08	85.79	/ 86.43
16	100	150	78.25	81.02	/ 81.03
17	150	106	70.31	72.41	/ 72.74
18	200	75	56.79	58.76	/ 58.95
19	270	53	10.43	43.21	/ 42.26
20	400	38	22.87	25.27	/ 24.39
D80, microns			170	144	/ 144

MODEL PARAMETERS			
Selection		Breakage	
alpha01	0.000111	beta00	0.25121
alpha02	0.0000000	beta01	0.000
alpha11	1.860	beta1	0.500
alpha12	1.000	beta2	5.000
alpha2	0.076		
Dcrit	1059	<b>Obj. Function</b>	<b>1.03</b>

Anexo 2 – Dados completos do levantamento dos parâmetros de quebra para carga de Bolas.

Remarks: Amostra 4

**DESIGN AND OPERATING CONDITIONS**  
*Configuration: BATCH*

Ore, Kg	26.0	Diameter, ft	1.59
Water, lt	6.5	Length, ft	1.25
Slurry, Kg	32.5	Balls Filling, %	32.4
Slurry, lt	11.8	Speed, % Critical	68.3
Slurry Dens., Kg/lt	2.745	App. Dens., ton/m3	5.389
% Solids (by weight)	80.0	Power, kW	0.39
<b>Grinding Time, min</b>	<b>0.5</b>	<b>Energy, kWh/ton</b>	<b>0.12</b>

**Particle Size Distributions (Cumm. % Passing)**

i	Mesh	Opening	Feed	Discharge	
				Exp.	Adj.
1	1.05	25400	100.00	100.00	/ 100.00
2	0.742	19050	100.00	100.00	/ 100.00
3	0.525	12700	100.00	100.00	/ 100.00
4	0.371	9500	100.00	100.00	/ 100.00
5	3	6700	100.00	100.00	/ 100.00
6	4	4750	100.00	100.00	/ 100.00
7	6	3350	100.00	100.00	/ 100.00
8	8	2360	99.04	99.67	/ 99.64
9	10	1700	98.01	99.18	/ 99.13
10	14	1180	96.94	98.47	/ 98.47
11	20	850	94.58	97.03	/ 97.18
12	28	600	92.22	95.20	/ 95.37
13	35	425	89.15	92.76	/ 92.61
14	48	300	85.38	88.98	/ 88.77
15	65	212	81.44	85.35	/ 84.36
16	100	150	75.54	79.74	/ 78.06
17	150	106	67.91	71.89	/ 70.02
18	200	75	57.87	61.52	/ 59.61
19	270	53	44.07	46.54	/ 45.50
20	400	38	22.34	25.25	/ 23.54
D80, microns			195	152	/ 167

**MODEL PARAMETERS**

Selection		Breakage	
alpha01	0.000042	beta00	0.39523
alpha02	0.0000000	beta01	0.000
alpha11	1.948	beta1	0.627
alpha12	1.000	beta2	2.500
alpha2	2.262		
Dcrit	744	<b>Obj. Function</b>	<b>0.98</b>

Remarks: Amostra 4

**DESIGN AND OPERATING CONDITIONS**  
*Configuration: BATCH*

Ore, Kg	26.0	Diameter, ft	1.59
Water, lt	6.5	Length, ft	1.25
Slurry, Kg	32.5	Balls Filling, %	31.4
Slurry, lt	11.8	Speed, % Critical	68.3
Slurry Dens., Kg/lt	2.745	App. Dens., ton/m3	5.389
% Solids (by weight)	80.0	Power, kW	0.42
<b>Grinding Time, min</b>	<b>2.0</b>	<b>Energy, kWh/ton</b>	<b>0.54</b>

**Particle Size Distributions (Cumm. % Passing)**

i	Mesh	Opening	Feed	Discharge	
				Exp.	Adj.
1	1.05	25400	100.00	100.00	/ 100.00
2	0.742	19050	100.00	100.00	/ 100.00
3	0.525	12700	100.00	100.00	/ 100.00
4	0.371	9500	100.00	100.00	/ 100.00
5	3	6700	100.00	100.00	/ 100.00
6	4	4750	100.00	100.00	/ 100.00
7	6	3350	100.00	100.00	/ 100.00
8	8	2360	99.04	99.89	/ 99.99
9	10	1700	98.01	99.69	/ 99.95
10	14	1180	96.94	99.54	/ 99.88
11	20	850	94.58	99.08	/ 99.73
12	28	600	92.22	98.49	/ 99.34
13	35	425	89.15	97.19	/ 98.26
14	48	300	85.38	95.34	/ 95.68
15	65	212	81.44	91.34	/ 91.29
16	100	150	75.54	85.62	/ 84.55
17	150	106	67.91	75.94	/ 75.65
18	200	75	57.87	64.50	/ 64.32
19	270	53	44.07	49.54	/ 49.38
20	400	38	22.34	26.83	/ 26.83
D80, microns			195	123	/ 126

**MODEL PARAMETERS**

Selection		Breakage	
alpha01	0.000042	beta00	0.39523
alpha02	0.0000000	beta01	0.000
alpha11	1.948	beta1	0.627
alpha12	1.000	beta2	2.500
alpha2	2.262		
Dcrit	744	<b>Obj. Function</b>	<b>0.30</b>

Remarks: Amostra 4

**DESIGN AND OPERATING CONDITIONS**

*Configuration: BATCH*

Ore, Kg	26.0	Diameter, ft	1.59
Water, lt	6.5	Length, ft	1.25
Slurry, Kg	32.5	Balls Filling, %	31.4
Slurry, lt	11.8	Speed, % Critical	68.3
Slurry Dens., Kg/lt	2.745	App. Dens., ton/m3	5.389
% Solids (by weight)	80.0	Power, kW	0.41
<b>Grinding Time, min</b>	<b>4.0</b>	<b>Energy, kWh/ton</b>	<b>1.06</b>

**Particle Size Distributions (Cumm. % Passing)**

i	Mesh	Opening	Feed	Discharge	
				Exp.	Adj.
1	1.05	25400	100.00	100.00	/ 100.00
2	0.742	19050	100.00	100.00	/ 100.00
3	0.525	12700	100.00	100.00	/ 100.00
4	0.371	9500	100.00	100.00	/ 100.00
5	3	6700	100.00	100.00	/ 100.00
6	4	4750	100.00	100.00	/ 100.00
7	6	3350	100.00	100.00	/ 100.00
8	8	2360	99.04	100.00	/ 100.00
9	10	1700	98.01	100.00	/ 100.00
10	14	1180	96.94	100.00	/ 100.00
11	20	850	94.58	99.80	/ 99.99
12	28	600	92.22	99.51	/ 99.96
13	35	425	89.15	99.07	/ 99.77
14	48	300	85.38	97.56	/ 98.80
15	65	212	81.44	95.01	/ 95.86
16	100	150	75.54	90.63	/ 89.83
17	150	106	67.91	80.66	/ 80.77
18	200	75	57.87	68.27	/ 68.83
19	270	53	44.07	53.18	/ 53.19
20	400	38	22.34	29.49	/ 30.11
D80, microns			195	104	/ 104

MODEL PARAMETERS			
Selection		Breakage	
alpha01	0.000042	beta00	0.39523
alpha02	0.0000000	beta01	0.000
alpha11	1.948	beta1	0.627
alpha12	1.000	beta2	2.500
alpha2	2.262		
Dcrit	744	<b>Obj. Function</b>	<b>0.37</b>

Remarks: Amostra 4

**DESIGN AND OPERATING CONDITIONS**

*Configuration: BATCH*

Ore, Kg	26.0	Diameter, ft	1.59
Water, lt	6.5	Length, ft	1.25
Slurry, Kg	32.5	Balls Filling, %	31.4
Slurry, lt	11.8	Speed, % Critical	68.3
Slurry Dens., Kg/lt	2.745	App. Dens., ton/m3	5.389
% Solids (by weight)	80.0	Power, kW	0.43
<b>Grinding Time, min</b>	<b>8.0</b>	<b>Energy, kWh/ton</b>	<b>2.21</b>

**Particle Size Distributions (Cumm. % Passing)**

i	Mesh	Opening	Feed	Discharge	
				Exp.	Adj.
1	1.05	25400	100.00	100.00	/ 100.00
2	0.742	19050	100.00	100.00	/ 100.00
3	0.525	12700	100.00	100.00	/ 100.00
4	0.371	9500	100.00	100.00	/ 100.00
5	3	6700	100.00	100.00	/ 100.00
6	4	4750	100.00	100.00	/ 100.00
7	6	3350	100.00	100.00	/ 100.00
8	8	2360	99.04	100.00	/ 100.00
9	10	1700	98.01	100.00	/ 100.00
10	14	1180	96.94	100.00	/ 100.00
11	20	850	94.58	99.92	/ 100.00
12	28	600	92.22	99.92	/ 100.00
13	35	425	89.15	99.92	/ 100.00
14	48	300	85.38	99.71	/ 99.93
15	65	212	81.44	98.83	/ 99.18
16	100	150	75.54	95.22	/ 95.80
17	150	106	67.91	88.32	/ 88.11
18	200	75	57.87	75.60	/ 76.11
19	270	53	44.07	57.73	/ 59.70
20	400	38	22.34	34.14	/ 35.88
D80, microns			195	85	/ 84

<b>MODEL PARAMETERS</b>			
Selection		Breakage	
alpha01	0.000042	beta00	0.39523
alpha02	0.0000000	beta01	0.000
alpha11	1.948	beta1	0.627
alpha12	1.000	beta2	2.500
alpha2	2.262		
Dcrit	744	<b>Obj. Function</b>	<b>0.52</b>

Remarks: Amostra 4

**DESIGN AND OPERATING CONDITIONS**  
*Configuration: BATCH*

Ore, Kg	26.0	Diameter, ft	1.59
Water, lt	6.5	Length, ft	1.25
Slurry, Kg	32.5	Balls Filling, %	31.4
Slurry, lt	11.8	Speed, % Critical	68.3
Slurry Dens., Kg/lt	2.745	App. Dens., ton/m3	5.389
% Solids (by weight)	80.0	Power, kW	0.41
<b>Grinding Time, min</b>	<b>14.0</b>	<b>Energy, kWh/ton</b>	<b>3.70</b>

**Particle Size Distributions (Cumm. % Passing)**

i	Mesh	Opening	Feed	Discharge	
				Exp.	Adj.
1	1.05	25400	100.00	100.00	/ 100.00
2	0.742	19050	100.00	100.00	/ 100.00
3	0.525	12700	100.00	100.00	/ 100.00
4	0.371	9500	100.00	100.00	/ 100.00
5	3	6700	100.00	100.00	/ 100.00
6	4	4750	100.00	100.00	/ 100.00
7	6	3350	100.00	100.00	/ 100.00
8	8	2360	99.04	100.00	/ 100.00
9	10	1700	98.01	100.00	/ 100.00
10	14	1180	96.94	100.00	/ 100.00
11	20	850	94.58	100.00	/ 100.00
12	28	600	92.22	100.00	/ 100.00
13	35	425	89.15	100.00	/ 100.00
14	48	300	85.38	100.00	/ 100.00
15	65	212	81.44	100.00	/ 99.90
16	100	150	75.54	98.54	/ 98.63
17	150	106	67.91	93.58	/ 93.46
18	200	75	57.87	82.58	/ 82.70
19	270	53	44.07	68.87	/ 66.24
20	400	38	22.34	41.99	/ 41.98
D80, microns			195	71	/ 71

<b>MODEL PARAMETERS</b>			
Selection		Breakage	
alpha01	0.000042	beta00	0.39523
alpha02	0.0000000	beta01	0.000
alpha11	1.948	beta1	0.627
alpha12	1.000	beta2	2.500
alpha2	2.262		
Dcrit	744	<b>Obj. Function</b>	<b>0.22</b>

Anexo 3 – Dados de calibração do ciclone industrial.

Remarks: Cylpebs Industrial - Simulação

**CLASSIFIERS PERFORMANCE**

Number of Cyclones:	6	Operating Conditions:	
Cyclone Dimensions, in:		Feed Flowrate, m3/hr	1797.0
Diameter	19.70	Pressure, psi	23.9
Height	51.17	D50 (corr.), microns	30.5
Inlet	6.00	Water By-Pass, %	14.3
Vortex	5.50	Solids By-Pass, %	25.4
Apex	2.73	Plitt's Parameter	1.81
Ore Density, ton/m3	4.92	Circulating Load, %	324

**Mass Balance around the Classifiers**

Mesh	Opening	Mid-Size	Size Distributions, %Passing			Classifier Efficiency	
			Feed	U'flow	O'flow	Actual	Corrected
4	4700	3974	100.00	100.00	100.00	1.000	1.000
6	3360	2816	100.00	100.00	100.00	1.000	1.000
8	2360	2003	100.00	100.00	100.00	1.000	1.000
10	1700	1416	100.00	100.00	100.00	1.000	1.000
14	1180	996	100.00	100.00	100.00	1.000	1.000
20	840	710	100.00	100.00	100.00	1.000	1.000
28	600	505	99.99	99.99	100.00	1.000	1.000
35	425	357	99.95	99.94	100.00	1.000	1.000
48	300	252	99.82	99.77	100.00	1.000	1.000
65	212	178	99.39	99.20	100.00	1.000	1.000
100	150	125	98.11	97.53	100.00	1.000	1.000
150	106	89	94.49	92.78	100.00	0.994	0.992
200	75	63	84.03	79.18	99.73	0.944	0.925
270	53	44	63.54	53.86	94.85	0.809	0.744
400	37	30	33.84	22.41	70.83	0.611	0.479
24	23.52987	20	14.43	6.87	38.90	0.462	0.279
17	17.301375	15	9.21	3.71	26.99	0.380	0.169
13	12.514661	11	6.60	2.41	20.15	0.325	0.096
9	8.8813725	8	5.28	1.85	16.37	0.296	0.056
7	6.7475363	3	4.55	1.57	14.20	0.263	0.013
Ore, ton/hr			1039.7	794.2	245.5	<b>Classifier Constants</b>	
Water, m3/hr			1585.6	226.6	1359.1	a1	4.4750812
Slurry, ton/hr			2625.3	1020.8	1604.6	a2	7.0657792
Slurry, m3/hr			1797.0	388.0	1409.0	a3	26.866309
Slurry Dens., ton/m3			1.461	2.631	1.139	a4	0.3071804
% Solids (by volume)			11.8	41.6	3.5	$\lambda$	1.7758724
% Solids (by weight)			39.6	77.8	15.3		

Anexo 4 – Dados completos da Simulação do circuito de moagem piloto com carga de Cylpebs.

Remarks: Base Case Example

**BALL MILL PERFORMANCE**

Diameter, ft	2.0	Mill Power, kW (Gross)	2.6984
Length, ft	3.0	Mill Power, kW (Net)	2.4286
Speed, %Critical	68.3	Feed, ton/hr	0.2650
App. Density, ton/m3	5.69	% Solids (by weight)	79.4
Charge Level, %	36.0	Sp. Energy, kWh/ton	10.18
Balls Filling, %	36.0	Reduction Ratio	1.70
Lift Angle, (°)	44.2		

i	Mesh	Opening	Mid-Size	Size Distributions		BM	
				Mill	Mill	Mill	Diferença
				Feed	Discharge	Discharge	
1		25400	21997	100.00	100.00	100.00	0.00
2		19050	17996	100.00	100.00	100.00	0.00
3		17000	4494	100.00	100.00	100.00	0.00
4		1188	999	99.98	100.00	100.00	0.00
5	20	840	710	99.78	100.00	100.00	0.00
6	28	600	505	98.76	100.00	100.00	0.00
7	35	425	357	97.37	99.99	100.00	0.01
8	48	300	252	95.96	99.96	99.97	0.02
9	65	212	178	94.23	99.85	99.88	0.03
10	100	150	125	91.12	99.47	99.56	0.09
11	150	106	89	87.52	98.41	98.65	0.24
12	200	75	63	77.04	94.46	93.48	0.98
13	270	53	48	67.46	86.73	87.40	0.66
14	325	44	41	50.07	73.84	73.07	0.77
15	400	38	30	27.49	55.69	51.13	4.56

D80, microns

82

48

48

Selection Function Parameters						Breakage Function Parameters			
$\alpha_0$	$\alpha_{02}$	$\alpha_1$	$\alpha_{12}$	$\alpha_2$	$\alpha_{crit}$	$\beta_0$	$\beta_{01}$	$\beta_1$	$\beta_2$
0.00011016	0.0000000	1.860	1.000	0.08	1059	0.251	0.000	0.50	5.00

Anexo 5 – Dados completos da Simulação do circuito de moagem piloto com carga de Bolas.

Remarks: Base Case Example

**BALL MILL PERFORMANCE**

Diameter, ft	2.0	Mill Power, kW (Gross)	2.4903
Length, ft	3.0	Mill Power, kW (Net)	2.2413
Speed, %Critical	68.3	Feed, ton/hr	0.3781
App. Density, ton/m3	5.39	% Solids (by weight)	79.0
Charge Level, %	36.0	Sp. Energy, kWh/ton	6.59
Balls Filling, %	36.0	Reduction Ratio	1.43
Lift Angle, (°)	42.8		

i	Mesh	Opening	Mid-Size	Size Distributions		BM	
				Mill	Mill	Mill	Diferença
				Feed	Discharge	Discharge	
1		25400	21997	100.00	100.00	100.00	0.00
2		19050	17996	100.00	100.00	100.00	0.00
3		17000	4494	100.00	100.00	100.00	0.00
4		1188	999	100.00	100.00	100.00	0.00
5	20	840	710	99.77	100.00	100.00	0.00
6	28	600	505	99.14	100.00	100.00	0.00
7	35	425	357	98.30	99.99	100.00	0.01
8	48	300	252	97.43	99.96	100.00	0.04
9	65	212	178	96.28	99.87	99.92	0.05
10	100	150	125	94.78	99.60	99.68	0.07
11	150	106	89	91.29	98.63	98.69	0.06
12	200	75	63	82.07	94.62	93.20	1.42
13	270	53	48	67.51	84.68	81.37	3.31
14	325	44	41	52.61	72.40	68.86	3.54
15	400	38	30	28.76	52.57	46.46	6.1

D80, microns

71

50

48

Selection Function Parameters						Breakage Function Parameters			
$\alpha_0$	$\alpha_{02}$	$\alpha_1$	$\alpha_{12}$	$\alpha_2$	$\alpha_{crit}$	$\beta_0$	$\beta_{01}$	$\beta_1$	$\beta_2$
0.0000421	0.0000000	1.948	1.000	2.26	744	0.395	0.000	0.63	2.50

Anexo 6 – Dados completos da Simulação do circuito de moagem Industrial com carga de Cylpebs.

Remarks: Cylpebs Industrial - Simulação

**CIRCUIT MASS BALANCE***Configuration: DIRECT*

	Fresh Feed	Mill Feed	Mill Discharge	Sump Water	Cyclone Feed	Cyclone U'flow	Cyclone O'flow
Ore, Ton/hr	245.5	1039.7	1039.7	0.0	1039.7	794.2	245.5
Water, m3/hr	12.9	239.5	259.9	1325.7	1585.6	226.6	1359.1
Slurry, ton/hr	258.4	1279.2	1299.6	1325.7	2625.3	1020.8	1604.6
Slurry, m3/hr	62.8	450.8	471.2	1325.7	1797.0	388.0	1409.0
Slurry Dens., ton/m3	4.114	2.837	2.758	1.000	1.461	2.631	1.139
% Solids (by volume)	79.4	46.9	44.8	0.0	11.8	41.6	3.5
% Solids (by weight)	95.00	81.28	80.00	0.00	39.60	77.80	15.30

**Particle Size Distributions (Cumm. % Passing)**

i	Mesh	Opening							
1	4	4750	100.00	100.00	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00
2	6	3350	95.58	98.96	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00
3	8	2360	93.76	98.53	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00
4	10	1700	92.66	98.27	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00
5	14	1180	91.48	97.99	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00
6	20	850	88.91	97.38	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00
7	28	600	86.74	96.86	99.99	0.00	99.99	99.99	100.00
8	35	425	84.10	96.20	99.95	0.00	99.95	99.94	100.00
9	48	300	81.03	95.34	99.82	0.00	99.82	99.77	100.00
10	65	212	77.06	93.97	99.39	0.00	99.39	99.20	100.00
11	100	150	72.03	91.51	98.11	0.00	98.11	97.53	100.00
12	150	106	64.66	86.14	94.49	0.00	94.49	92.78	100.00
13	200	75	51.01	72.53	84.03	0.00	84.03	79.18	99.73
14	270	53	40.95	50.81	63.54	0.00	63.54	53.86	94.85
15	400	38	21.66	22.23	33.84	0.00	33.84	22.41	70.83
16	24	23.52987	7.94	7.13	14.43	0.00	14.43	6.87	38.90
17	17	17.301375	4.26	3.84	9.21	0.00	9.21	3.71	26.99
18	13	12.514661	2.02	2.32	6.60	0.00	6.60	2.41	20.15
19	9	8.8813725	1.45	1.76	5.28	0.00	5.28	1.85	16.37
20	7	6.7475363	1.27	1.50	4.55	0.00	4.55	1.57	14.20
D80, microns			275	91	71	0	71	77	43.0

Specific Energy Consumption :

14.87 kWh/ton (Gross)

Operational Work Index :

16.13 kWh/ton

Remarks: Cylpebs Industrial - Simulação

**CLASSIFIERS PERFORMANCE**

Number of Cyclones:	6	Operating Conditions:	
Cyclone Dimensions, in:		Feed Flowrate, m3/hr	1797.0
Diameter	19.70	Pressure, psi	23.9
Height	51.17	D50 (corr.), microns	30.5
Inlet	6.00	Water By-Pass, %	14.3
Vortex	5.50	Solids By-Pass, %	25.4
Apex	2.73	Plitt's Parameter	1.81
Ore Density, ton/m3	4.92	Circulating Load, %	324

**Mass Balance around the Classifiers**

Mesh	Opening	Mid-Size	Size Distributions, %Passing			Classifier Efficiency	
			Feed	U'flow	O'flow	Actual	Corrected
4	4700	3974	100.00	100.00	100.00	1.000	1.000
6	3360	2816	100.00	100.00	100.00	1.000	1.000
8	2360	2003	100.00	100.00	100.00	1.000	1.000
10	1700	1416	100.00	100.00	100.00	1.000	1.000
14	1180	996	100.00	100.00	100.00	1.000	1.000
20	840	710	100.00	100.00	100.00	1.000	1.000
28	600	505	99.99	99.99	100.00	1.000	1.000
35	425	357	99.95	99.94	100.00	1.000	1.000
48	300	252	99.82	99.77	100.00	1.000	1.000
65	212	178	99.39	99.20	100.00	1.000	1.000
100	150	125	98.11	97.53	100.00	1.000	1.000
150	106	89	94.49	92.78	100.00	0.994	0.992
200	75	63	84.03	79.18	99.73	0.944	0.925
270	53	44	63.54	53.86	94.85	0.809	0.744
400	37	30	33.84	22.41	70.83	0.611	0.479
24	23.52987	20	14.43	6.87	38.90	0.462	0.279
17	17.301375	15	9.21	3.71	26.99	0.380	0.169
13	12.514661	11	6.60	2.41	20.15	0.325	0.096
9	8.8813725	8	5.28	1.85	16.37	0.296	0.056
7	6.7475363	3	4.55	1.57	14.20	0.263	0.013
Ore, ton/hr			1039.7	794.2	245.5	<b>Classifier Constants</b>	
Water, m3/hr			1585.6	226.6	1359.1	a1	4.4750812
Slurry, ton/hr			2625.3	1020.8	1604.6	a2	7.0657792
Slurry, m3/hr			1797.0	388.0	1409.0	a3	26.866309
Slurry Dens., ton/m3			1.461	2.631	1.139	a4	0.3071804
% Solids (by volume)			11.8	41.6	3.5	$\lambda$	1.7758724
% Solids (by weight)			39.6	77.8	15.3		

Remarks: Cylpebs Industrial - Simulação

**BALL MILL PERFORMANCE**

Diameter, ft	16.3	Mill Power, kW (Gross)	3650
Length, ft	35.6	Mill Power, kW (Net)	3285
Speed, %Critical	68.3	Feed, ton/hr	1039.7
App. Density, ton/m <sup>3</sup>	5.71	% Solids (by weight)	80.0
Charge Level, %	36.0	Sp. Energy, kWh/ton	3.51
Balls Filling, %	36.0	Reduction Ratio	1.29
Lift Angle, (°)	24.7		

i	Mesh	Opening	Mid-Size	Size Distributions	
				Mill	Mill
				Feed	Discharge
1	4	4700	3974	100.00	100.00
2	6	3360	2816	98.96	100.00
3	8	2360	2003	98.53	100.00
4	10	1700	1416	98.27	100.00
5	14	1180	996	97.99	100.00
6	20	840	710	97.38	100.00
7	28	600	505	96.86	99.99
8	35	425	357	96.20	99.95
9	48	300	252	95.34	99.82
10	65	212	178	93.97	99.39
11	100	150	125	91.51	98.11
12	150	106	89	86.14	94.49
13	200	75	63	72.53	84.03
14	270	53	48	50.81	63.54
15	400	37	30	22.23	33.84
16	24	23.52987	20	7.13	14.43
17	17	17.301375	15	3.84	9.21
18	13	12.514661	11	2.32	6.60
19	9	8.8813725	8	1.76	5.28
20	7	6.7475363	3	1.50	4.55
D80, microns				91	71

Selection Function Parameters						Breakage Function Parameters			
$\alpha_0$	$\alpha_{02}$	$\alpha_1$	$\alpha_{12}$	$\alpha_2$	$\alpha_{crit}$	$\beta_0$	$\beta_{01}$	$\beta_1$	$\beta_2$
0.00011	0.0000000	1.860	1.000	0.08	1059	0.251	0.000	0.50	5.00

Anexo 7 – Dados completos da Simulação do circuito de moagem Industrial com carga de Bolas.

Remarks: Cylpebs Industrial - Simulação

**CIRCUIT MASS BALANCE***Configuration: DIRECT*

	Fresh Feed	Mill Feed	Mill Discharge	Sump Water	Cyclone Feed	Cyclone U'flow	Cyclone O'flow
Ore, Ton/hr	255.7	1039.7	1039.7	0.0	1039.7	783.9	255.7
Water, m3/hr	13.5	237.1	259.9	1379.5	1639.4	223.7	1415.7
Slurry, ton/hr	269.2	1276.8	1299.6	1379.5	2679.1	1007.6	1671.5
Slurry, m3/hr	65.4	448.4	471.2	1379.5	1850.7	383.0	1467.7
Slurry Dens., ton/m3	4.114	2.847	2.758	1.000	1.448	2.631	1.139
% Solids (by volume)	79.4	47.1	44.8	0.0	11.4	41.6	3.5
% Solids (by weight)	95.00	81.43	80.00	0.00	38.81	77.80	15.30

**Particle Size Distributions (Cumm. % Passing)**

i	Mesh	Opening	Fresh Feed	Mill Feed	Mill Discharge	Sump Water	Cyclone Feed	Cyclone U'flow	Cyclone O'flow
1	4	4750	100.00	100.00	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00
2	6	3350	95.58	98.91	99.99	0.00	99.99	99.99	100.00
3	8	2360	93.76	98.45	99.99	0.00	99.99	99.98	100.00
4	10	1700	92.66	98.18	99.98	0.00	99.98	99.98	100.00
5	14	1180	91.48	97.88	99.97	0.00	99.97	99.96	100.00
6	20	850	88.91	97.23	99.96	0.00	99.96	99.95	100.00
7	28	600	86.74	96.68	99.94	0.00	99.94	99.92	100.00
8	35	425	84.10	95.98	99.89	0.00	99.89	99.86	100.00
9	48	300	81.03	95.11	99.77	0.00	99.77	99.70	100.00
10	65	212	77.06	93.78	99.42	0.00	99.42	99.23	100.00
11	100	150	72.03	91.52	98.40	0.00	98.40	97.88	100.00
12	150	106	64.66	86.65	95.34	0.00	95.34	93.82	100.00
13	200	75	51.01	73.88	85.89	0.00	85.89	81.33	99.85
14	270	53	40.95	53.60	67.26	0.00	67.26	57.73	96.48
15	400	38	21.66	24.30	37.62	0.00	37.62	25.16	75.79
16	24	23.52987	7.94	8.27	17.39	0.00	17.39	8.37	45.03
17	17	17.301375	4.26	4.52	11.30	0.00	11.30	4.60	31.84
18	13	12.514661	2.02	2.62	7.73	0.00	7.73	2.81	22.80
19	9	8.8813725	1.45	1.84	5.74	0.00	5.74	1.97	17.31
20	7	6.7475363	1.27	1.50	4.69	0.00	4.69	1.57	14.27
D80, microns			275	89	68	0	68	74	40.1

Specific Energy Consumption :

13.52 kWh/ton (Gross)

Operational Work Index :

13.86 kWh/ton

Remarks: Carga de Bolas**CLASSIFIERS PERFORMANCE**

Number of Cyclones:	6	Operating Conditions:	
Cyclone Dimensions, in:		Feed Flowrate, m3/hr	1850.7
Diameter	19.70	Pressure, psi	25.2
Height	51.17	D50 (corr.), microns	29.2
Inlet	6.00	Water By-Pass, %	13.6
Vortex	5.50	Solids By-Pass, %	24.2
Apex	2.71	Plitt's Parameter	1.33
Ore Density, ton/m3	4.92	Circulating Load, %	307

**Mass Balance around the Classifiers**

i	Mesh	Opening	Mid-Size	Size Distributions, %Passing			Classifier Efficiency	
				Feed	U'flow	O'flow	Actual	Corrected
1	4	4700	3974	100.00	100.00	100.00	1.000	1.000
2	6	3360	2816	99.99	99.99	100.00	1.000	1.000
3	8	2360	2003	99.99	99.98	100.00	1.000	1.000
4	10	1700	1416	99.98	99.98	100.00	1.000	1.000
5	14	1180	996	99.97	99.96	100.00	1.000	1.000
6	20	840	710	99.96	99.95	100.00	1.000	1.000
7	28	600	505	99.94	99.92	100.00	1.000	1.000
8	35	425	357	99.89	99.86	100.00	1.000	1.000
9	48	300	252	99.77	99.70	100.00	1.000	1.000
10	65	212	178	99.42	99.23	100.00	1.000	1.000
11	100	150	125	98.40	97.88	100.00	1.000	1.000
12	150	106	89	95.34	93.82	100.00	0.996	0.995
13	200	75	63	85.89	81.33	99.85	0.956	0.941
14	270	53	44	67.26	57.73	96.48	0.828	0.773
15	400	37	30	37.62	25.16	75.79	0.626	0.506
16	24	23.52987	20	17.39	8.37	45.03	0.467	0.297
17	17	17.301375	15	11.30	4.60	31.84	0.378	0.173
18	13	12.514661	11	7.73	2.81	22.80	0.319	0.102
19	9	8.8813725	8	5.74	1.97	17.31	0.287	0.059
20	7	6.7475363	3	4.69	1.57	14.27	0.252	0.013

				Classifier Constants	
Ore, ton/hr			1039.7	783.9	255.7
Water, m3/hr			1639.4	223.7	1415.7
Slurry, ton/hr			2679.1	1007.6	1671.5
Slurry, m3/hr			1850.7	383.0	1467.7
Slurry Dens., ton/m3			1.448	2.631	1.139
% Solids (by volume)			11.4	41.6	3.5
% Solids (by weight)			38.8	77.8	15.3
				a1	4.4750812
				a2	7.0657792
				a3	26.866309
				a4	0.3071804
				$\lambda$	1.7758724

Remarks: Cargas de Bolas

**BALL MILL PERFORMANCE**

Diameter, ft	16.3	Mill Power, kW (Gross)	3458
Length, ft	35.6	Mill Power, kW (Net)	3112
Speed, %Critical	68.3	Feed, ton/hr	1039.7
App. Density, ton/m3	5.41	% Solids (by weight)	80.0
Charge Level, %	36.0	Sp. Energy, kWh/ton	3.33
Balls Filling, %	36.0	Reduction Ratio	1.31
Lift Angle, (°)	24.7		

i	Mesh	Opening	Mid-Size	Size Distributions	
				Mill	Mill
				Feed	Discharge
1	4	4700	3974	100.00	100.00
2	6	3360	2816	98.91	99.99
3	8	2360	2003	98.45	99.99
4	10	1700	1416	98.18	99.98
5	14	1180	996	97.88	99.97
6	20	840	710	97.23	99.96
7	28	600	505	96.68	99.94
8	35	425	357	95.98	99.89
9	48	300	252	95.11	99.77
10	65	212	178	93.78	99.42
11	100	150	125	91.52	98.40
12	150	106	89	86.65	95.34
13	200	75	63	73.88	85.89
14	270	53	48	53.60	67.26
15	400	37	30	24.30	37.62
16	24	23.52987	20	8.27	17.39
17	17	17.301375	15	4.52	11.30
18	13	12.514661	11	2.62	7.73
19	9	8.8813725	8	1.84	5.74
20	7	6.7475363	3	1.50	4.69
<b>D80, microns</b>				<b>89</b>	<b>68</b>

Selection Function Parameters						Breakage Function Parameters			
$\alpha_0$	$\alpha_{02}$	$\alpha_1$	$\alpha_{12}$	$\alpha_2$	$\alpha_{crit}$	$\beta_0$	$\beta_{01}$	$\beta_1$	$\beta_2$
0.00004	0.0000000	1.948	1.000	2.26	744	0.395	0.000	0.63	2.50