

**ANÁLISE DE COMPÓSITOS DE MADEIRA  
LAMINADA COLADA E VIDRO/EPOXI,  
UTILIZANDO UM ELEMENTO FINITO DE  
ALTA ORDEM**

Carlos Alberto Bones

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO	01
Capítulo 1	
GENERALIDADES E TRABALHOS ANTERIORES	
1.1. Introdução .....	02
1.2. Revisão Bibliográfica .....	05
Capítulo 2	
FORMULAÇÃO TEÓRICA	
2.1. Introdução .....	10
2.2. Propriedades Mecânicas de Materiais Ortotrópicos .....	10
2.2.1. Relações Tensão-deformação e Propriedades Elásticas nas Direções Principais .....	10
2.3. Formulação do Elemento de Viga Utilizando a Teoria de Timoshenko .....	14
2.4. Formulação do Elemento de Viga Utilizando Teoria de Alta Ordem .....	21
2.4.1. Campo de Deslocamento .....	21
2.4.2. Formulação do Elemento Finito .....	29
Capítulo 3	
O PROGRAMA EPTD	
3.1. Introdução .....	38
3.2. Implementação do Programa .....	38

3.3. Entrada de Dados .....	39
3.4. Módulo de Análise .....	40
3.4.1. Freqüências Naturais .....	40
3.4.2. Análise Estática .....	41
3.5. Saída de Resultados .....	41

## Capítulo 4

### EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1. Introdução .....	42
4.2. Análise Estática de Viga de Madeira Laminada Colada .....	43
4.2.1. Análise dos Resultados .....	46
4.3. Análise Estática e de Freqüências Naturais de Vigas Isotrópicas .....	46
4.3.1. Tensão de Cisalhamento pela Teoria da Elasticidade ..	46
4.3.1.1. Flexão de uma Viga em Balanço Carregada na Extremidade .....	47
4.3.1.2. Flexão de uma Viga Uniformemente Carregada .....	47
4.3.2. Freqüências Naturais pela Teoria Clássica de Vigas ...	49
4.3.2.1. Freqüências Naturais para uma Viga em Balanço .....	49
4.3.2.2. Freqüências Naturais para uma Viga Simplesmente Apoiada .....	49
4.3.2.3. Freqüências Naturais para uma Viga Engastada nas Extremidades .....	49
4.3.3. Resultados Obtidos para Viga em Balanço .....	50
4.3.3.1. Resultados Obtidos para os Deslocamentos na Ponta da Viga .....	50
4.3.3.2. Resultados Obtidos para a Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{xz}$ ) .....	53
4.3.3.3. Resultados Obtidos para as Freqüências Naturais .....	57
4.3.4. Resultados Obtidos para Viga Bi-apoiada .....	59
4.3.4.1. Resultados Obtidos para os Deslocamentos no Centro da Viga .....	59

4.3.4.2. Resultados Obtidos da Tensão de Cisalhamento $\tau_{xz}(0,z)$ .....	61
4.3.4.3. Resultados Obtidos para as Frequências Naturais .....	65
4.3.5. Resultados Obtidos para Viga Bi-engastada .....	67
4.3.6. Análise dos Resultados .....	69
4.4. Análise Estática de Vigas Ortotrópicas .....	69
4.4.1. Frequências naturais pela Teoria Clássica de Laminados .....	70
4.4.2. Viga com uma Lâmina com Fibras Orientadas Longitudinalmente .....	70
4.4.3. Viga com duas Lâminas sendo a Superior com Fibras Orientadas na Direção Transversal e a Inferior com Fibras na direção Longitudinal .....	75
4.4.4. Viga com três Lâminas, sendo as externas com Fibras Orientadas Longitudinalmente e a Interna com Fibras Orientadas Transversalmente .....	79
4.4.5. Análise dos Resultados .....	83
 Capítulo 5	
CARACTERIZAÇÃO DOS MATERIAIS PARA FABRICAÇÃO DO PROTÓTIPO DE UMA VIGA CAIXÃO EM MADEIRA LAMINADA COLADA E VIDRO/EPOXI	
5.1. Introdução .....	84
5.2. Materiais e Métodos .....	84
5.2.1. A Madeira .....	84
5.2.2. O Adesivo .....	84
5.2.3. A Fibra de Vidro .....	85
5.2.4. Equipamentos Utilizados .....	85
5.3. Caracterização da Madeira .....	86
5.3.1. Cisalhamento da Madeira, Umidade, Densidade Aparente e Retração .....	86
5.3.2. Compressão Paralela às Fibras .....	89
5.3.3. Flexão Estática .....	90

5.4. Caracterização da Ligação Adesiva .....	93
5.4.1. Determinação da Resistência ao Cisalhamento na Ligação Adesiva .....	93
5.4.2. Ligação Adesiva Solicitada ao Cisalhamento na Torção .....	94
5.5. Caracterização das Lâminas de Vidro/Epoxi .....	97
5.5.1. Determinação das Propriedades Mecânicas das Lâminas de Fibra de Vidro/Epoxi .....	97
 Capítulo 6	
FABRICAÇÃO DO PROTÓTIPO E ANÁLISE EXPERIMENTAL	
6.1. Introdução .....	101
6.2. Determinação das Dimensões da Viga .....	102
6.3. Fabricação da Viga .....	103
6.4. Ensaio Preliminares .....	105
6.5. Medida de Deformação .....	106
6.5.1. Deformação de um Extensômetro .....	106
6.5.2. Deformação de uma Roseta Trevo .....	109
6.6. Instrumentação da Viga .....	110
6.7. Ensaio da Viga .....	111
6.8. Análise e Interpretação dos Resultados dos ensaios .....	112
 Capítulo 7	
CONSIDERAÇÕES GERAIS	
7.1. Conclusões .....	118
7.2. Recomendações .....	120
7.2. Propostas para Trabalhos Futuros .....	121
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	 122
 Apêndice A	
FORMULAÇÃO DA TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO ...	128

Apêndice B	
FORMULAÇÃO SEGUNDO A TEORIA DA ELASTICIDADE	136
Apêndice C	
SOLUÇÃO SEGUNDO A TEORIA CPT .....	142
Apêndice D	
MATRIZ DE RIGIDEZ E MASSA PARA ELEMENTO DE ALTA ORDEM .....	144

## LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal
b	Largura da viga
$E_{11}$	Módulo de Elasticidade Longitudinal
$E_{22}$	Módulo de Elasticidade Transversal
$E_{11c}, E_{22c}$	Módulo de Elasticidade conhecidos de uma lâmina com uma dada proporção fibra-resina
$E_C$	Energia cinética
$E_f$	Módulo de Elasticidade da Fibra
$E_m$	Módulo de Elasticidade da Matriz
$E_P$	Energia Potencial Total
[F]	Vetor das Forças Nodais
$G_{12}$	Módulo de Cisalhamento
$G_{12c}$	Módulo de Cisalhamento conhecido para uma dada proporção fibra-resina
Inc	Momento de Inércia
[K]	Matriz de Rigidez
L	Comprimento do Elemento
Mst	Momento Estático
MPRF	Material Plástico Reforçado por Fibra
[M]	Matriz de Massa
$M_x, M_x^*, M_z^*$	Momentos por unidade de largura solicitando o "laminado"
$N_x, N_x^*, N_z^*$	Forças normais por unidade de largura solicitando o "laminado"
[ $N_n$ ]	Matriz da função de forma para o elemento de alta ordem
[ $\bar{Q}$ ]	Matriz das Constantes Elásticas Reduzidas
V, $V^*$	Força Cortante por unidade de largura solicitando o "laminado"
{s}	Vetor dos deslocamentos generalizados
T	Momento transversal por unidade de largura solicitando o "laminado"
[T]	Matriz Rotação
$U_E$	Energia Externa
$U_I$	Energia Interna
$u(x,z)$	Incógnitas de deslocamento longitudinal

$V_f$	Fração em volume de fibras
$V_m$	Fração em volume da matriz
$w(x,z)$	Incógnitas de deslocamento transversal
$W_{NC}$	Trabalho das forças não conservativas
$\{\alpha\}$	Vetor dos coeficientes de expansão térmica
$\{\epsilon\}$	Vetor das deformações
$[\phi]$	Matriz da Função de forma para o elemento de Timoshenko
$\{\varphi\}$	Vetor das incógnitas de deslocamento Nodal
$\nu_{12}, \nu_{21}$	Coefficientes de Poisson
$\nu_f$	Coefficiente de Poisson da fibra
$\nu_m$	Coefficiente de Poisson da matriz
$\rho$	Densidade do material
$\{\sigma\}$	Vetor de Tensões
$\omega$	Frequência Natural
$\xi$	Relação $x/L$



## RESUMO

Um elemento finito de classe  $C^0$ , com base numa teoria de alta ordem, é utilizado na análise de vigas laminadas. Essa teoria incorpora uma variação não linear dos deslocamentos longitudinais através da espessura da viga eliminando a necessidade de um coeficiente de correção de cisalhamento. O elemento considerado é cúbico de quatro nós, tendo sete graus de liberdade por nó. O método de fabricação e a análise experimental de uma longarina caixão são apresentados. As mesas são de madeira laminada colada e as almas de lâminas de vidro/epoxi. Os resultados numéricos são comparados com as soluções da teoria da elasticidade e com os resultados obtidos pelo elemento de viga de Timoshenko. Resultados da simulação numérica são comparados aos obtidos experimentalmente.

## ABSTRACT

A class of  $C^0$  finite element based on the high order theory is used in the numerical analysis of laminated beams. In order to eliminate the necessity of a shear correction coefficient, this theory incorporates a non-linear variation of the longitudinal displacements through the beam thickness. The element considered is four-noded cubic with seven degrees of freedom per node. A manufacturing methodology of box-beam made of bond laminated wood and glass/epoxy laminae is also introduced. Numerical solutions are compared with some experimental results, as well as with Elasticity and Timoshenko theory solution.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmãos, pelo incentivo e confiança

Aos professores Edgar Vladimiro Mantilla Carrasco e Marco Antônio de Mendonça Vecci pela indispensável orientação e alto padrão dos ensinamentos transmitidos.

Ao eng. Boris da Tubolit S.A pelo fornecimento do adesivo.

Aos colegas do Departamento de Estrutura pelo apoio.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para esta realização.

A meus pais, "Seu" Geraldo e "Dona" Iracema.

## INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo caracterizar e verificar a possibilidade da construção de longarinas na forma caixão, utilizando madeira laminada colada para as mesas e lâminas de vidro/epoxi\* para as almas, bem como a utilização de um elemento finito de viga de alta ordem para o seu modelamento matemático.

Na primeira parte deste trabalho, os modelamentos dos elementos finitos de alta ordem e de Timoshenko são apresentados. Procura-se, através de exemplos numéricos, avaliar as duas formulações apresentadas.

Na segunda parte, desenvolve-se o método utilizado na confecção do protótipo ( longarina ), a descrição dos ensaios preliminares para a caracterização dos materiais utilizados, e os resultados obtidos do ensaio da longarina.

---

\* No texto utilizará o termo vidro/epoxi em substituição ao termo: fibra de vidro/epoxi.

## Capítulo 1

### GENERALIDADES E TRABALHOS ANTERIORES

#### 1.1. Introdução

Pesquisas na área de materiais compostos tem sido bastante intensas, nas últimas décadas. Este fato, decorre da necessidade, cada vez maior, de se obter materiais com propriedades de alta rigidez e resistência em direções definidas, como também estruturas de menor peso. Essas características aumentaram significativamente as opções de projetos de estruturas aeronáuticas, garantindo melhor desempenho em aviões e veículos aeroespaciais.

Material conjugado, ou compósito, é um termo geral usado para designar um conjunto de materiais heterogêneos, associados para realizarem uma função que os materiais isoladamente não poderiam exercer.

Os materiais conjugados avançados são formados por uma matriz plástica ou metálica reforçada por fibras de altíssima resistência específica ( resistência mecânica em relação ao peso ). As fibras têm resistência e rigidez específicas geralmente superiores à dos metais e a matriz tem a função de aglutinar, proteger e possibilitar que as fibras trabalhem mecanicamente como um todo, servindo de meio de transferência de carregamentos entre elas, sendo ainda responsável pela ductilidade do conjunto.

As fibras são, em geral, constituídas por filamentos contínuos não metálicos, tais como os de: vidro, carbono e Kevlar. Esses materiais ficam imersos num composto orgânico polimerizado, denominado matriz, onde pode-se destacar as resinas tipo epoxi, fenólicas e poliéster.

Por serem as fibras responsáveis pela resistência e rigidez do conjunto, suas proporções em relação à resina devem ser maximizadas nos "laminados". Outro fator importante é que a alocação das fibras em direções preferenciais mais solicitadas mecanicamente, fornecem ao laminado propriedades anisotrópicas, as quais se propriamente exploradas contribuem para a redução de peso estrutural.

Os filamentos das fibras possuem diâmetros da mesma ordem de grandeza que as dimensões de suas moléculas e portanto possuem uma excelente ordenação molecular e conseqüentemente possuem resistência e rigidez específicas muito maiores que a dos materiais tradicionalmente usados em engenharia.

Na tabela 1.1, pode-se comparar quantitativamente alguns materiais e filamentos utilizando os seguintes critérios de eficiência (rigidez/peso).

- $E / \rho$  , para barras em tração;
- $\sqrt{E} / \rho$  , flambagem de colunas e cascas esféricas;
- $\sqrt[3]{E} / \rho$  , flexão de vigas e flambagem de placas

Tabela 1.1. Comparação entre Materiais Utilizando Critérios de Eficiência

material	$E / \rho$	$\sqrt{E} / \rho$	$\sqrt[3]{E} / \rho$
Carb. H.S.	13,3	0,88	0,35
Carb./ep.	4,53	0,56	0,27
Vidro E	2,88	0,34	0,17
Madeira	2,86	0,76	0,49
Liga Al	2,68	0,32	0,16
Aço Inox	2,58	0,18	0,08
Vidro/ep.	1,32	0,26	0,16
Resina epoxy	0,26	0,15	0,13

Apesar da utilização dos materiais plásticos reforçados por fibras (MPRF) ser recente, o conceito de material conjugado é utilizado desde os tempos antigos, já que os israelitas, em 800 A.C, usavam adobos reforçados com palha ou outros vegetais fibrosos; os arcos e flechas mongóis eram construídos com madeira, tendões de animais e seda artificial ligados por meio de adesivos. Podemos também classificar como material conjugado os concretos armado e protendido.

A madeira por si só, é uma substância orgânica composta de cadeias de celulose embebidas numa matriz de lignina, possuindo propriedades mecânicas anisotrópicas. Macroscopicamente, as cadeias de celulose constituem fibras de orientação definida cuja coesão provém da lignina que é amorfa e faz o papel de matriz. Quanto maior for a proporção

de lignina, maior será a resiliência do conjunto que se torna mais elástico. Sendo que as excelentes propriedades de rigidez e resistência da madeira provêm da união das suas fibras trabalhando conjugadamente numa matriz aglutinante.

A madeira foi largamente utilizada na construção de aeronaves, por apresentar uma ótima relação resistência/peso, mas atualmente este material está sendo usado apenas em aviação experimental. Este fato é devido a falta de melhor conhecimento para aplicação e desenvolvimento deste material na construção aeronáutica, pois o último trabalho a respeito é da década de 40, realizado pelo IPT em São Paulo, IPT ( 1941 ).

No Brasil usa-se a madeira freijó [ *Cordia Goeldiana* ] nas estruturas aeronáuticas, tendo as ligações coladas com epoxi.

Uma forma construtiva típica, nas estruturas aeronáuticas de madeira, é a longarina na forma caixão. Este elemento estrutural é basicamente uma viga localizada nas asas, que tem a função de suportar o momento fletor atuante. A construção em caixão, usual, consiste basicamente de duas mesas, de madeira freijó: uma de tração e outra de compressão. O conjunto é revestido de cada lado com chapas de contraplacado de Pinho do Paraná [ *Araucária Brasiliense* ], solidárias às mesas, com a função de resistir ao cisalhamento na alma da longarina. A figura 1.1 mostra a seção transversal de uma viga deste tipo.

No Boletim 29, do IPT (1941), é apresentado uma maneira prática de calcular as longarinas tipo caixão.

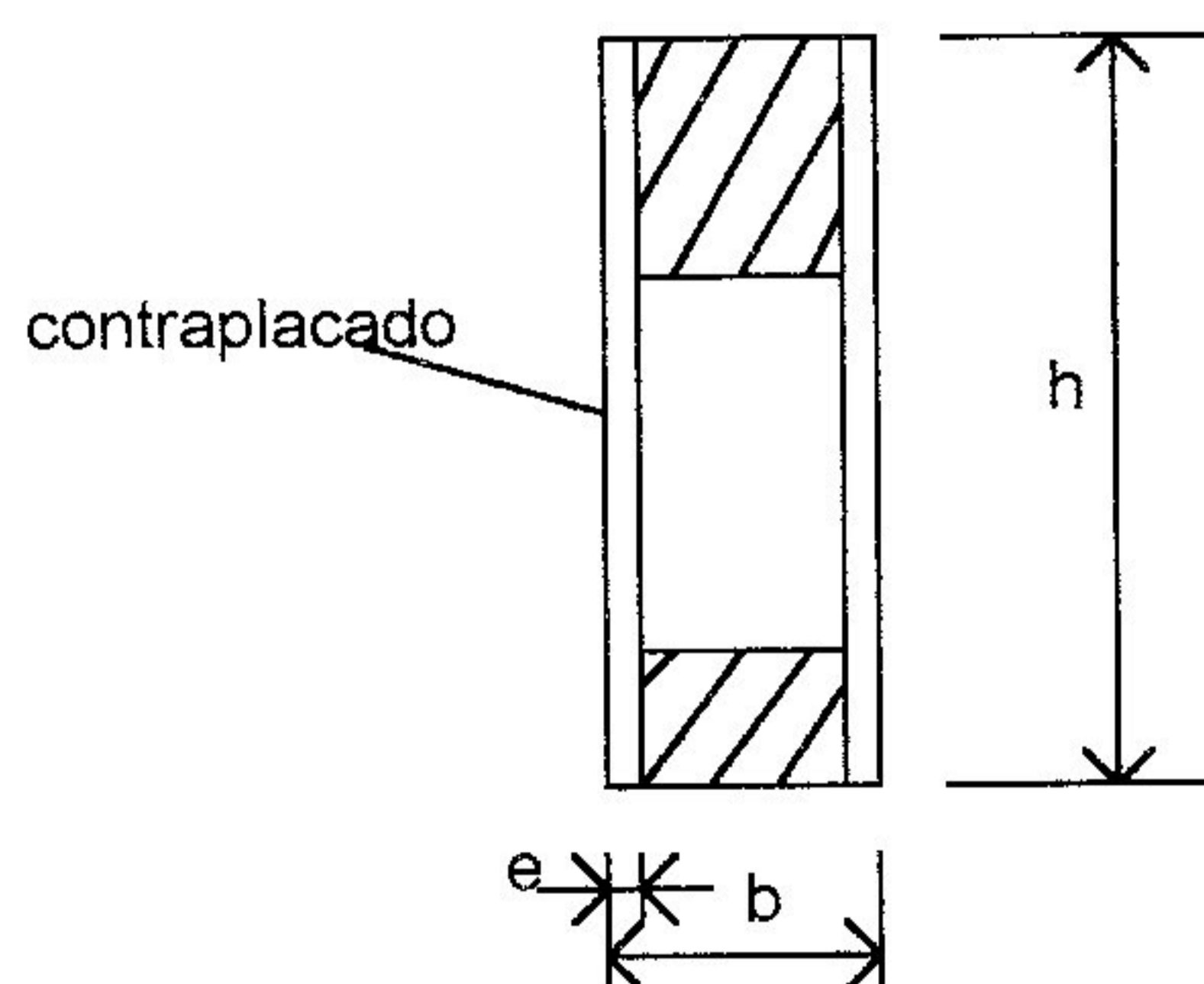


Fig. 1.1. Seção Transversal de uma Viga de Madeira Tipo Caixão



Neste trabalho analisa-se uma longarina tipo caixão, tendo as mesas construídas de madeira laminada colada e as almas de lâminas de vidro/epoxi. A concepção teórica de estudo desta viga toma como base uma teoria de deformação de alta ordem. É apresentado um modelo de elemento finito de classe  $C^0$ . A formulação consiste em expandir, em série de Taylor, o deslocamento longitudinal até a terceira ordem e o deslocamento transversal até a segunda ordem. Para o desenvolvimento do elemento, utilizou-se uma interpolação cúbica, portanto a necessidade de quatro nós. Cada nó possui sete graus de liberdade: um deslocamento longitudinal, um deslocamento transversal, uma rotação, um deslocamento longitudinal de segunda ordem, um deslocamento transversal de segunda ordem e duas rotações de segunda ordem. Um programa de computador foi desenvolvido para poder analisar a contribuição do modelo adotado, na análise estática e de vibração livre. Resultados são apresentados e comparados com às teorias de Timoshenko, Elasticidade e Euler. Também é apresentada uma análise experimental de tensões de uma viga caixão, construída em madeira e vidro/epoxi. Os valores obtidos são comparados aos resultados da análise por elementos finitos, na qual é utilizado o elemento de alta ordem discutido neste trabalho.

## 1.2. Revisão Bibliográfica

Em geral, a análise estrutural de vigas é satisfatoriamente aproximada pela teoria elementar de flexão de Euler-Bernoulli, como pode-se verificar no texto de DYM AND SHAMES (1973). A principal consideração nessa teoria é que a normal transversal ao plano médio permanece assim durante a flexão, implicando em deformação de cisalhamento transversal igual a zero. Deste modo, rotação devido a flexão torna-se uma derivada primeira do deslocamento transversal  $w$  e conseqüentemente requer um campo de deslocamento transversal de continuidade  $C^1$ .

Espera-se que a teoria de Euler não seja apropriada para os casos de vigas com pequena razão de esbeltez ( $L/h$ ), onde os efeitos de cisalhamento são significantes. A importância da deformação de

cisalhamento na análise dinâmica de vigas elásticas foi primeiro demonstrada por Timoshenko numa breve nota publicada em 1921, TIMOSHENKO (1921). Todas as considerações da teoria de viga de Euler-Bernoulli foram mantidas, salvo a exigência de que a normal à seção transversal da viga na superfície neutra indeformada permanecesse normal na superfície neutra deformada. A relaxação dessa consideração clássica conduz a contradições, resultando em campo de tensões que de modo algum são satisfeitos pela usual condição de contorno de cisalhamento livre sobre a superfície lateral da viga. Essas inerentes contradições levaram à introdução de um fator de correção de cisalhamento. COWPER (1966) e MURTY (1970) propuseram expressões desses coeficientes para diferentes seções transversais de vigas, mas a discrepância entre os resultados obtidos e a solução da elasticidade tem sido grande nos casos desenvolvidos para vigas.

STEPHEN AND LEVINSON (1981) utilizam uma teoria de alta ordem que incorpora os efeitos da tensão de cisalhamento através da especificação de dois coeficientes independentes. Na teoria de viga de alta ordem, as hipóteses de simplificação a respeito da distribuição de tensões ou de deslocamentos não são mais necessárias.

Dois procedimentos de investigação para incorporar termos de ordem superior são em geral utilizados: No caso de expansão assintótica, tensão ou deslocamento são expressos em série de potência, em termos de um parâmetro de esbeltez, geralmente definido como a razão de uma dimensão típica da seção transversal pelo comprimento da viga. Assim, os coeficientes da série são funções somente das coordenadas da seção transversal. Substituindo essas séries nas equações da elasticidade e agrupando os coeficientes de cada potência do parâmetro requerido, obtém-se conjuntos de equações que conduzem a possíveis soluções. Nesse método a importância relativa dos efeitos de alta ordem devem ser imediatamente avaliados. O segundo método faz considerações de simplificação do campo de deslocamento, com subsequente minimização do erro dessa aproximação. Apesar de exigir informações sobre o campo de deslocamento, o método tem a vantagem de fornecer equações diferenciais consistentes, juntamente com as condições de contorno naturais. A aplicação desse método na formulação de uma teoria de viga, para aplicação em dinâmica, ainda requer a inserção de coeficientes de correção de cisalhamento.

Uma das primeiras aplicações do procedimento de expansão assintótica, para problemas estáticos de vigas, foi feito por GOODIER

(1938) que utiliza uma expansão de tensão. Embora essa aproximação não garanta a existência dos deslocamentos correspondentes, algumas conclusões a respeito da importância dos efeitos secundários, fornecem consideráveis introspecções dentro de prévia investigação da resposta dinâmica de vigas, junto com uma óbvia indicação da direção a seguir afim de favorecer refinamentos. Goodier mostra que desprezando todas as contribuições de ordem um e superior no parâmetro de esbeltes  $\zeta^{**}$ , equivalente ao estudo da hipotética elástica, conduz a momento de curvatura de Euler-Bernoulli. Incluindo termos envolvendo  $\zeta^1$ , admite empenamento na seção transversal, e para vigas sujeitas a carregamento terminal resulta nas equações de torção e flexão de Saint-Venant. Considerações de termos  $\zeta^2$  para vigas sujeitas a carregamento contínuo indicam que a correção  $\zeta^2$  é, em parte, dada pela "curva adicional devido ao cisalhamento". Portanto, a teoria de viga de Timoshenko e as correções devido à tensão de cisalhamento são da mesma ordem de grandeza. A análise de termos de ordem superior a  $\zeta^2$  não conduz a qualquer simplificação significativa nas equações gerais da elasticidade.

Durante as três últimas décadas, o método dos elementos finitos vem revolucionando os métodos de análise estrutural. Tal desenvolvimento está documentado nos textos de BATHE (1982), ZIENKIEWICZ (1982) e STASA (1985). Paralelamente, o uso de estruturas compostas laminadas tem crescido a passos largos. O fundamento da mecânica de materiais compostos está documentada nos textos de TSAI (1980) e JONES (1985).

Muitas teorias foram propostas afim de melhorar o modelamento de placas laminadas; grande parte delas segue uma aproximação baseada no deslocamento. Primeiramente, WHITNEY e PAGANO (1970) propuseram assumir as hipóteses de Mindlin sobre o deslocamento para placa laminada. Dessa maneira as seções são livres para girar em relação ao plano médio da estrutura, e assim consegue-se obter uma deformação transversal de cisalhamento. É bem conhecido que, também para estruturas isotrópicas, essa aproximação necessita de considerar um fator de cisalhamento afim de se ter o valor de cisalhamento zero nas superfícies da placa.

REISSNER (1945) e MINDLIN (1951) foram os primeiros a fornecer uma teoria de deformação de cisalhamento de primeira Ordem

---

\*\*  $\zeta = h/L$

baseando em considerações na placa fina para a variação de tensão e deslocamento através da espessura da placa. Ambas teorias conduzem a um sistema de diferenciação parcial de sexta ordem da equação de equilíbrio e permite satisfazer três condições de contorno em cada bordo. MEDWADOWSKI (1958) estende a teoria de Reissner ( baseada em assumir campos de tensão ) para placas ortotrópicas. YANG ET AL (1966), por outro lado, estenderam a teoria de Mindlin ( baseada em assumir campos de deslocamentos ) para placas heterogêneas.

As teorias precedentes fornecem, com base em formulação de primeira ordem, os efeitos da deformação de cisalhamento transversal, para placas isotrópicas, ortotrópicas e heterogêneas. Essas teorias produzem uma formulação de elemento finito de continuidade  $C^0$ , mas tem certas limitações, como: a deformação de cisalhamento transversal (e com isso tensões) é assumida constante através da espessura da placa e um coeficiente de correção de cisalhamento fictício é introduzido; a contradição clássica pelo que a tensão normal transversal ( $\sigma_z$ ) e a deformação normal transversal ( $\varepsilon_z$ ) são desprezadas, permanece não resolvido. LO ET AL (1977) e REDDY (1984) propuseram assumir um deslocamento no plano como função cúbica das coordenadas da espessura. O trabalho de Lo et Al difere de Reddy em dois aspectos: Primeiro Lo et Al usa uma expressão fora do plano de deslocamento a qual inclui os termos quadráticos; Reddy assume que o deslocamento fora do plano é constante com  $z$ . Segundo, Reddy impõe que a tensão de cisalhamento transversal é nula nos contornos do plano da placa, desta forma reduzindo o número das incógnitas de deslocamento do problema. A teoria de alta ordem, baseada em deslocamento cúbico no plano e deslocamento normal parabólico, foi recentemente examinada por KRISHNA MURTY e VELLAICHMY (1987). Eles assumem que a teoria linear do deslocamento no plano é igual ao da teoria de Kirchhoff. Seguindo essa aproximação eles obtiveram uma solução de forma fechada para problemas de flexão simples. Comparando aquelas soluções com as obtidas da elasticidade tri-dimensional, eles afirmam que: essa teoria prediz exatamente a deflexão, tensões e deformações no plano; e a estimativa, estaticamente equivalente da tensão normal, tem boa concordância com a solução exata.

Vários autores desenvolveram teorias que utilizam deslocamentos de alta ordem baseando-os em modelos de elementos finitos. Primeiro KANT AND GUPTA (1988) para placa isotrópica; e mais

recentemente, PANDYA E KANT (1988) desenvolveram, para a placa ortotrópica, um modelo de continuidade  $C^0$  isoparamétrica para problemas de flexão, com uma expressão de deslocamento na qual considera somente termos cúbicos e lineares para deslocamento no plano, e termos constante e quadrático para o deslocamento transversal. PHAN E REDDY (1985) desenvolveram um modelo de continuidade  $C^1$  baseado nas aproximações de Reddy. Kant e Pandya propuseram um elemento de continuidade  $C^0$ , o qual assume a mesma expansão de deslocamento de Reddy, mas impondo no modelo de deslocamento somente uma parte das condições para anular as tensões de cisalhamento transversal nos planos de contorno da placa. As condições de contorno foram introduzidas anteriormente na expressão da matriz de rigidez. Desse modo, um modelo de continuidade  $C^0$  pode ser utilizado fora da função de interpolação que exige continuidade  $C^1$ . A teoria de alta ordem utilizada neste trabalho é baseada no trabalho de BARBONI e GAUDENZI (1992) que desenvolveram um simples elemento finito de alta ordem de continuidade  $C^0$  utilizando a teoria de deformação de alta ordem para laminados compostos. A formulação apresentada por eles é baseada na expansão em série de potência dos deslocamentos em função da coordenada de espessura. Eles desenvolveram vários elementos finitos, cada um correspondendo a uma expansão interrompida na ordem prescrita. Esta aproximação difere da de Phan e Reddy e da de Kant e Pandya porque não impõe condição adicional sobre o cisalhamento transversal, e o deslocamento transversal pode ser expandido na ordem necessária para uma suficiente aproximação da solução exata.

## Capítulo 2

### FORMULAÇÃO TEÓRICA

#### 2.1. Introdução

É bem conhecido que o método de elementos finitos, devido a sua alta versatilidade para analisar problemas com diferentes geometrias e condições de contorno, tornou-se uma poderosa ferramenta no campo de análise estrutural.

Além disto, uma série de vantagens deram a este método maiores condições de difusão nas áreas de ciência e tecnologia, e por conseguinte, uma maior divulgação através de muitos "softwares" comerciais.

Neste capítulo apresenta-se uma formulação de elementos finitos para vigas, utilizando as teorias de Timoshenko e de alta ordem, com o propósito de estudar problemas estáticos e dinâmicos em modelos bi-dimensionais. O desempenho numérico de cada elemento será avaliado nos capítulos subsequentes.

#### 2.2. Propriedades Mecânicas de Materiais Ortotrópicos

##### 2.2.1. Relações Tensão-deformação e Propriedades Elásticas nas Direções Principais.

Os materiais constituídos por fibras ou filamentos unidirecionais numa matriz de resina epóxi, formam uma lâmina ortotrópica, representada na figura 2.1, onde pode-se escrever as relações tensão-deformação, JONES (1975), como:

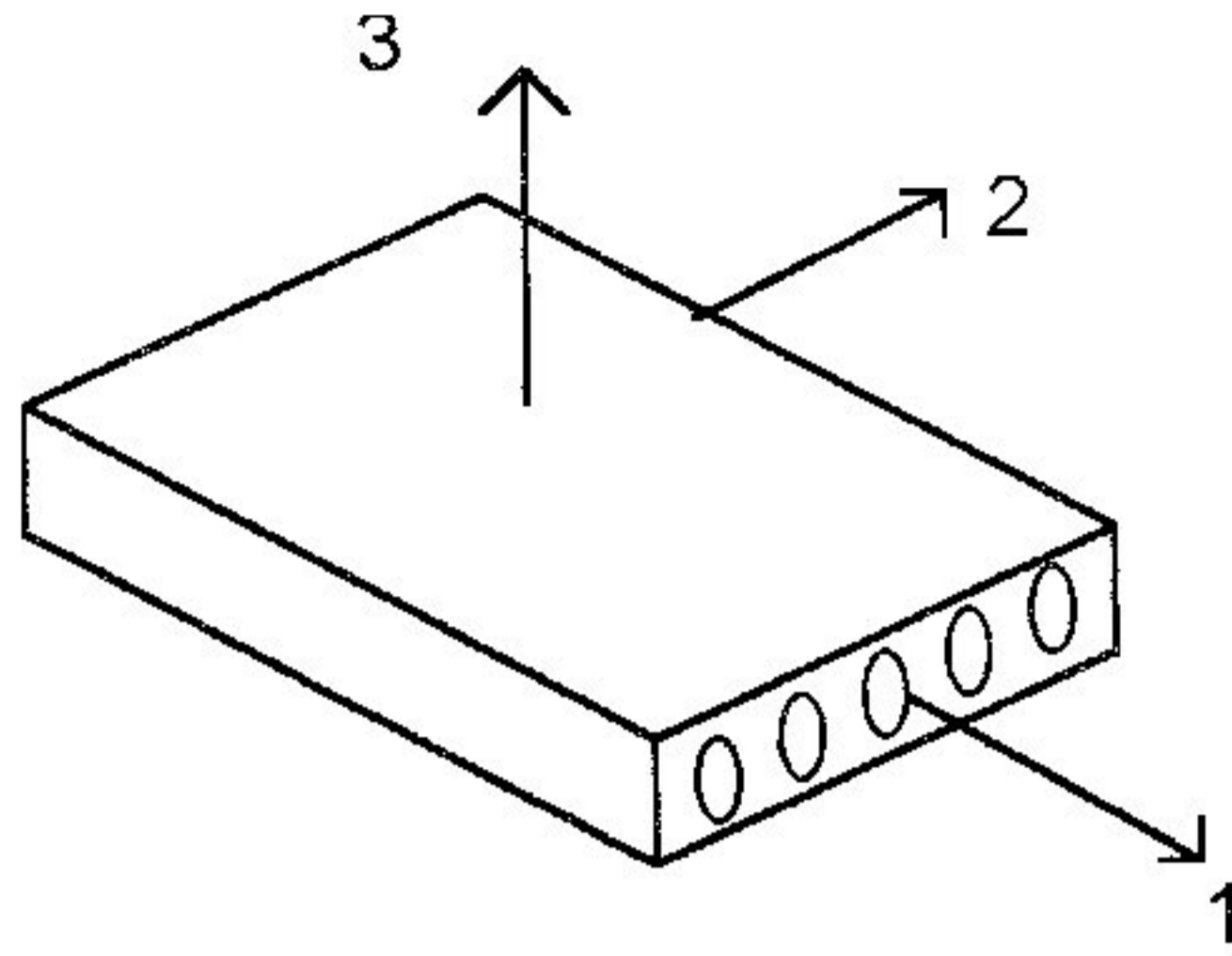


Fig. 2.1. Representação de uma lâmina com reforço unidirecional em relação aos eixos ortogonais 1,2 e 3

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\} - \Delta T\{\alpha\} \quad (2.1)$$

Onde:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}$$

e,

$$[Q] = [T]^{-1}[\bar{Q}][R][T][R]^{-1} \quad (2.2)$$

Onde:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ devido a REUTER (1971)}$$

$$T = \begin{bmatrix} (1 + \cos 2\theta) / 2 & (1 - \cos 2\theta) / 2 & \sin 2\theta \\ (1 - \cos 2\theta) / 2 & (1 + \cos 2\theta) / 2 & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta / 2 & \sin 2\theta / 2 & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

e,  $[\bar{Q}]$  a matriz das constantes elásticas reduzidas, para o estado plano de tensões, expressas no sistema de coordenadas naturais do material.

$[\bar{Q}]$  pode ser expressa por:

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}$$

Tal que,

$$\bar{Q}_{11} = E_{11} / (1 - \nu_{12} \nu_{21})$$

$$\bar{Q}_{22} = E_{22} / (1 - \nu_{12} \nu_{21})$$

$$\bar{Q}_{12} = \nu_{21} E_{11} / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) = \nu_{12} E_{22} / (1 - \nu_{12} \nu_{21})$$

$$\bar{Q}_{66} = G_{12}$$

(2.3)

onde,  $E_{11}$  e  $E_{22}$  são módulos de elasticidade nas direções 1 e 2,  $G_{12}$  é o módulo de deformação transversal e  $\nu_{12}$  e  $\nu_{21}$  são coeficientes de Poisson, ou seja o negativo do módulo do quociente entre as deformações transversal e longitudinal respectivamente, isto é:

$$\nu_{12} = -\left| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right| \text{ e } \nu_{21} = -\left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right| \quad (2.4)$$

Nas relações (2.3) está implícita a equação (2.4), de forma que das cinco constantes de engenharia apenas quatro são independentes, pois:

$$\nu_{21} E_{11} = \nu_{12} E_{22} \quad (2.5)$$

Efetuada a multiplicação matricial da equação (2.2), obtém-se:



$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \bar{Q}_{11} \cos^4 \theta + 2(\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \bar{Q}_{22} \sin^4 \theta \\
Q_{22} &= \bar{Q}_{11} \sin^4 \theta + 2(\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \bar{Q}_{22} \cos^4 \theta \\
Q_{12} &= (\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} - 4\bar{Q}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \bar{Q}_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
Q_{66} &= (\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} - 2\bar{Q}_{12} - 2\bar{Q}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \bar{Q}_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
Q_{16} &= (\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12} - 2\bar{Q}_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (\bar{Q}_{12} - \bar{Q}_{22} + 2\bar{Q}_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
Q_{26} &= (\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12} - 2\bar{Q}_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (\bar{Q}_{12} - \bar{Q}_{22} + 2\bar{Q}_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Também tem-se:

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{zz} \\ \frac{1}{2}\alpha_{xz} \end{Bmatrix}$$

Assim, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\alpha_{xx} &= \alpha_{11} \cos^2 \theta + \alpha_{22} \sin^2 \theta \\
\alpha_{zz} &= \alpha_{11} \sin^2 \theta + \alpha_{22} \cos^2 \theta \\
\alpha_{xz} &= (\alpha_{11} - \alpha_{22}) \sin 2\theta
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Portanto,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{zz} \\ \frac{1}{2}\alpha_{xz} \end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

Onde,  $Q_{ij}$  são fornecidos pelas equações (2.6) e  $\alpha_{ij}$  pelas equações (2.7), no caso da lâmina estar disposta verticalmente. Para o caso de vigas e das lâminas estarem dispostas horizontalmente, tem-se

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \bar{Q}_{11} \cos^4 \theta + 2(\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \bar{Q}_{22} \sin^4 \theta \\ Q_{12} &= \bar{Q}_{12} \\ Q_{22} &= \bar{Q}_{22} \\ Q_{66} &= \bar{Q}_{66} \end{aligned}$$

Devido a natureza unidimensional da viga, pois neste caso interessa apenas a componente longitudinal das constante elásticas.

### 2.3. Formulação do Elemento de Viga Utilizando a Teoria de Timoshenko

A formulação do elemento de viga utilizando a teoria de Timoshenko é apresentado nesta seção. Uma sucinta descrição desta teoria é apresentada no apêndice A.

Deve ser enfatizado que a teoria unidimensional de Euler-Bernoulli do movimento de flexão de vigas elásticas considera somente a inércia lateral e forças elásticas causadas pelo deslocamento devido somente à flexão. Os efeitos secundários tais como o deslocamento devido a rotação e inércia rotacional tem seus efeitos desprezados sobre os poucos modos fundamentais de uma barra fina, mas esses efeitos devem ser considerados em barras espessas. Eles devem também causar perturbações apreciáveis quando a teoria de viga é aplicada em estudos de estruturas mais complexas, tais como edificios altos, pontes suspensas, asas de aeronaves, estrutura de mísseis e vigas sanduíches ou/e construção composta.

A seguir formula-se o elemento de viga considerando o cisalhamento, onde, na figura 2.2(a) estão representados os deslocamentos nodais devido à flexão; e na figura 2.2(b) estão indicados os deslocamentos nodais de deformação de cisalhamento.

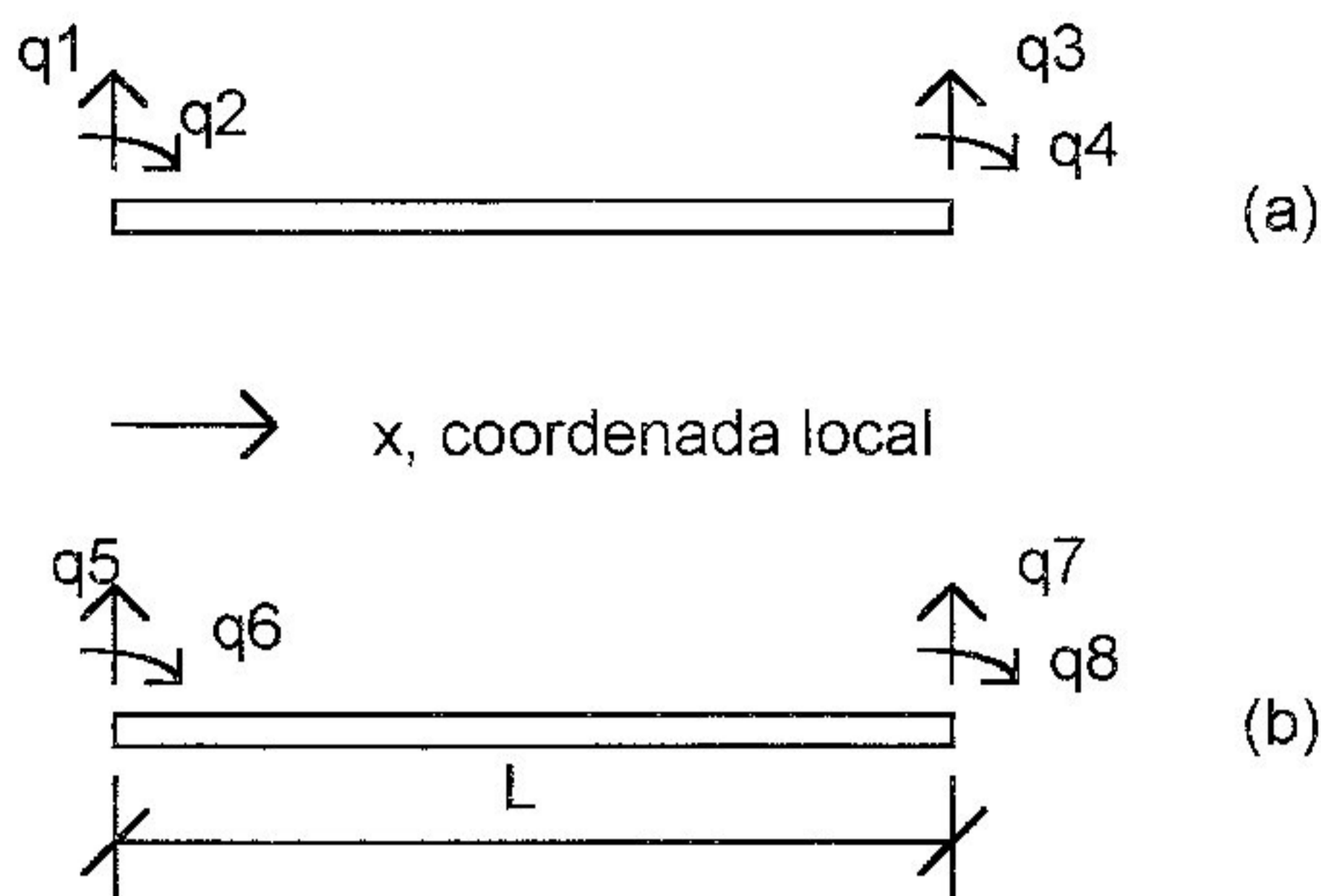


Fig. 2.2. Representação dos Graus de Liberdade da Teoria de Viga de Timoshenko

Os efeitos de cisalhamento e inércia rotacional podem ser incluídos. Assumindo que  $w_b$  é o deslocamento causado pela flexão e  $w_s$  é o deslocamento causado pelo cisalhamento, pode-se escrever:

$$w = w_b + w_s$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \beta(x) + \psi(x) \quad , \quad \beta = \frac{\partial w_s}{\partial x}; \quad \psi = \frac{\partial w_b}{\partial x}$$

As condições de contorno nos pontos da extremidade da barra estão relacionadas com os graus de liberdade do elemento pelas relações a seguir:

$$w_b = q_1 \quad \text{em } x = 0 \quad \quad -\frac{\partial w_b}{\partial x} = q_2 \quad \text{em } x = 0 \quad (2.9)$$

$$w_b = q_3 \quad \text{em } x = L \quad \quad -\frac{\partial w_b}{\partial x} = q_4 \quad \text{em } x = L$$

O campo de deslocamento devido a flexão é interpolado pela expressão cúbica:

$$w_b = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (2.10)$$

Dessa forma:

$$w_b = \frac{1}{L^3}(2q_1 - 2q_3 - Lq_2 - Lq_4)x^3 + \frac{1}{L^2}(-3q_1 + 3q_3 + 2Lq_2 + Lq_4)x^2 - q_2x + q_1 \quad (2.11)$$

Uma interpolação similar pode ser usada para o campo de deslocamento devido ao cisalhamento,  $w_s$ , ou seja:

$$w_s = \frac{1}{L^3}(2q_5 - 2q_7 - Lq_6 - Lq_8)x^3 + \frac{1}{L^2}(-3q_5 + 3q_7 + 2Lq_6 + Lq_8)x^2 - q_6x + q_5 \quad (2.12)$$

Onde  $q_5$ ,  $q_7$  representam o deslocamento lateral devido ao cisalhamento sobre a linha de centro da viga e  $q_6$ ,  $q_8$  representam ângulos de deformação de cisalhamento.

A energia de deformação pode ser escrita, como indicado por TESSLER E DONG (1961):

$$U = \int_0^L \left[ \frac{EI}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{kGA}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right)^2 \right] dx \quad (2.13)$$

Onde,  $k$  é um fator de correção para levar em conta o fato de  $\beta(x)$  ser constante na seção.

Tem-se:

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \psi = \beta(x) = \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}$$

Substituindo a equação (2.14) na equação (2.13), tem-se:

$$U = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} kGA \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2.15)$$

Para a energia cinética, tem-se:

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho I \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho I \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} \right)^2 + \rho A \left( \frac{\partial w_b}{\partial t} + \frac{\partial w_s}{\partial t} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (2.16)$$

Onde o primeiro termo representa a energia devido a inércia rotacional e o segundo a energia de translação.

As equações (2.11) e (2.12), podem ser expressas em termos das coordenadas nodais, como:

$$w_b = \{\phi\}^T \{q_b\} \quad (2.17)$$

$$w_s = \{\phi\}^T \{q_s\}$$

Onde:

$$\phi_1 = 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + 1$$

$$\phi_2 = -\frac{x^3}{L^2} + 2 \frac{x^2}{L} - x$$

$$\phi_3 = -2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2$$

$$\phi_4 = -\frac{x^3}{L^2} + \frac{x^2}{L}$$

(2.18)

e,

$$\mathbf{q}_b^T = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4] \quad (2.19)$$

$$\mathbf{q}_s^T = [\mathbf{q}_5, \mathbf{q}_6, \mathbf{q}_7, \mathbf{q}_8]$$

Com essas relações, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} &= \{\phi''\}^T \{\mathbf{q}_b\} \\ \frac{\partial w_b}{\partial t} &= \{\phi\}^T \{\dot{\mathbf{q}}_b\} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} &= \{\phi'\}^T \{\mathbf{q}_s\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial t} = \{\phi\}^T \{\dot{\mathbf{q}}_s\}$$

$$\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} = \{\phi'\}^T \{\dot{\mathbf{q}}_b\}$$

Usando essas relações, pode-se obter as expressões para as propriedades de massa e rigidez, do elemento, como segue:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \{\mathbf{q}_b\}^T \{\phi''\} \{\phi''\}^T \{\mathbf{q}_b\} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \{\mathbf{q}_s\}^T \int_0^L kGA \{\phi'\} \{\phi'\}^T \{\mathbf{q}_s\} dx \end{aligned} \quad (2.21)$$

Pode-se definir:

$$[K_b] = \int_0^L EI \{\phi''\} \{\phi''\}^T dx \quad (2.22)$$

$$[K_s] = \int_0^L kGA \{\phi'\} \{\phi'\}^T dx \quad (2.23)$$

Então,

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [k] \{q\} \quad \text{onde,} \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} q_b \\ q_s \end{Bmatrix}$$

A matriz de rigidez do elemento pode ser representada por:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_b] & 0 \\ 0 & [K_s] \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

que também pode ser escrita como:

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 6L & 12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36S & -3SL & -36S & -3SL \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3SL & 4SL^2 & 3SL & -SL^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -36S & 3SL & 36S & 3SL \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3SL & -SL^2 & 3SL & 4SL^2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Onde:

$$S = \frac{kAGL^2}{30EI}$$

Para a energia cinética, tem-se:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L m \left\{ \left[ \left( \frac{\partial w_b}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_s}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_b}{\partial t} \frac{\partial w_s}{\partial t} \right] + m r_G^2 \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} \right)^2 \right\} dx =$$





$$H = 14r_G^2 / L^2$$

## 2.4. Formulação do Elemento de Viga Utilizando Teoria de Alta Ordem

A formulação apresentada é baseada na expansão em série de potência da coordenada de espessura, onde o deslocamento no plano é expandido até a terceira ordem e o deslocamento transversal é expandido até segunda ordem, em  $z$  respectivamente.

Esta teoria inclui os efeitos da tensão de cisalhamento transversal, das deformações de cisalhamento e suas variações através da espessura.

Este modelo teórico usa um elemento finito de classe  $C^0$  e polinômios cúbicos como funções de interpolação, havendo, portanto, a necessidade de se ter quatro nós. A convenção indicada na figura 2.3 foi utilizada na formulação do elemento.

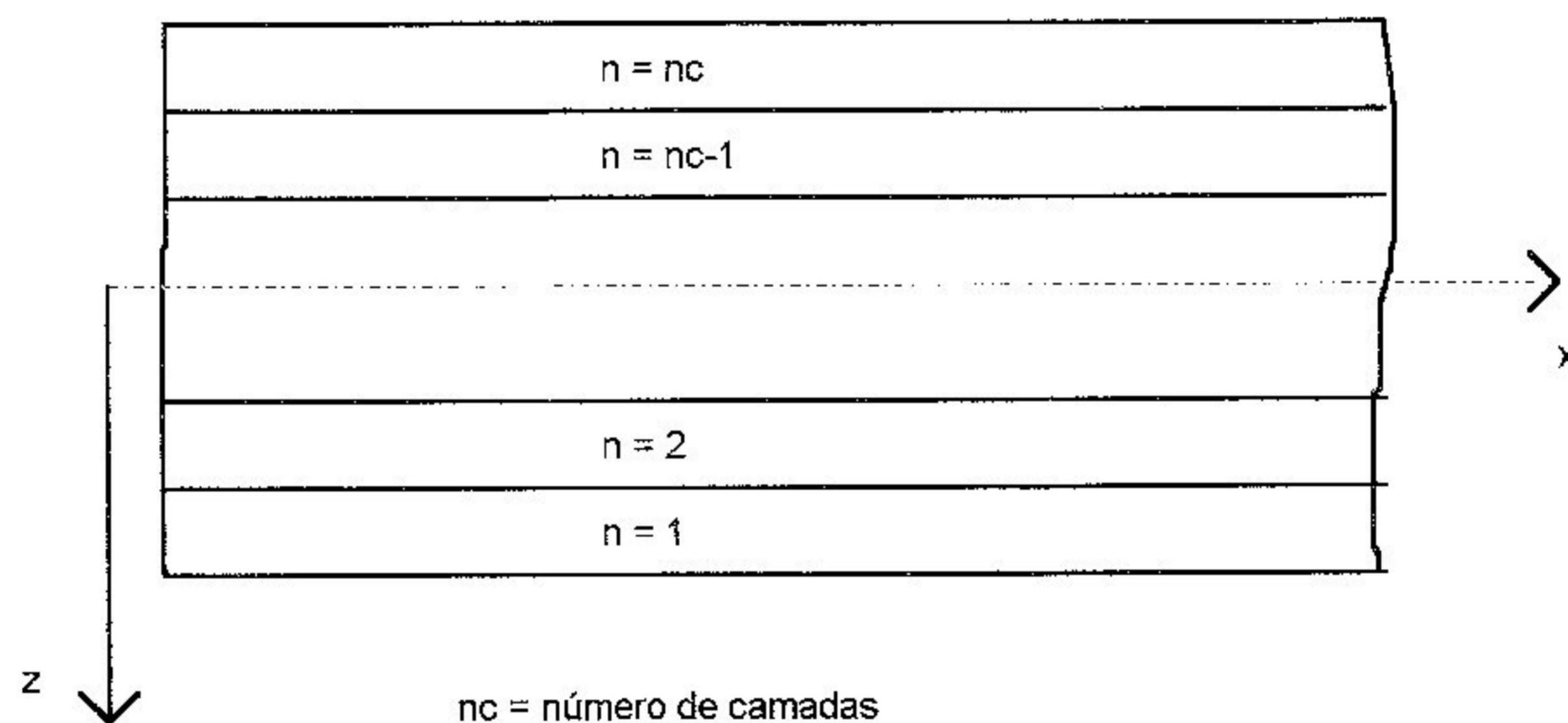


Fig. 2.3. Geometria do Laminado indicando a Direção Positiva

### 2.4.1. Campo de deslocamento

As incógnitas de deslocamento são expandidas em série de potência ao longo da direção da espessura:

$$u(x,z) = \sum_{m=0}^m z^m u_m(x) \quad (2.30)$$

$$w(x,z) = \sum_{k=0}^k z^k w_k(x)$$

Neste trabalho serão adotadas expansão de terceira ordem em  $z$ , para os deslocamentos longitudinais  $u$ , e expansão de segunda ordem para os deslocamentos transversais  $w$ , como segue:

$$u(x,z) = u_0(x) + z u_1(x) + z^2 u_2(x) + z^3 u_3(x) \quad (2.31-a)$$

$$w(x,z) = w_0(x) + z w_1(x) + z^2 w_2(x)$$

O deslocamento  $u(x,z)$  foi expandido até a potência em  $z^3$  possibilitando uma expressão parabólica para a deformação de cisalhamento.

Pode-se escrever:

$$\{S(x,z)\} = \begin{bmatrix} u(x,z) \\ w(x,z) \end{bmatrix}$$

Onde:  $\{S(x,z)\}$  é o vetor das componentes de deslocamento.

Pode-se escrever:

$$\{S(x,z)\} = [Z(z)]\{s(x)\} \quad (2.32)$$

Onde:

$$[Z(z)] = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z & z^2 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

e

$$\{s(x)\} = [u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), w_0(x), w_1(x), w_2(x)]^T \quad (2.34-a)$$

Utilizando outra notação, onde :  $u_1(x) = \theta_x(x)$ ;  $u_2(x) = u^*(x)$ ;  $u_3(x) = \theta_x^*(x)$ ;  $w_1(x) = \theta_z(x)$  e  $w_2(x) = w^*(x)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} u(x,z) &= u_0(x) + z\theta_x(x) + z^2 u^*(x) + z^3 \theta_x^*(x) \\ w(x,z) &= w_0(x) + z\theta_z(x) + z^2 w^*(x) \end{aligned} \quad (2.31-b)$$

Observe que  $u_0(x)$  representa o deslocamento longitudinal,  $u_1(x)$  a rotação no plano x-z,  $u_2(x)$  o deslocamento longitudinal de 2º ordem,  $u_3(x)$  a rotação de 2º ordem no plano x-z,  $w_0(x)$  o deslocamento transversal,  $w_1(x)$  outra rotação de 2º ordem e  $w_2(x)$  o deslocamento transversal de 2º ordem.

Pela teoria da elasticidade,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + z^2 \frac{\partial u^*}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \\ \varepsilon_{zz} &= \theta_z + 2.z.w^* \end{aligned} \quad (2.35-a)$$

$$\gamma_{xz} = \theta_x + 2.z.u^* + 3.z^2.\theta_x^* + \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} + z^2 \frac{\partial w^*}{\partial x}$$

fazendo:

$$\begin{aligned} \phi &= \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}; & \varepsilon_{x_0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ k_{xz} &= 2u^* + \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x}; & k_x &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\phi^* = 3\theta_x^* + \frac{\partial w^*}{\partial x}; \quad \varepsilon_{x0}^* = \frac{\partial u^*}{\partial x}$$

$$k_x^* = \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x},$$

tem-se:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{x0} + z k_x + z^2 \varepsilon_{x0}^* + z^3 k_x^*$$

$$\varepsilon_{zz} = \theta_z + 2 z w^* \quad (2.35-b)$$

$$\gamma_{xz} = \phi + z k_{xz} + z^2 \phi^*$$

Utilizando a nova notação, pode-se escrever:

$$\{s(x)\} = [u_0(x), \theta_x(x), u^*(x), \theta_x^*(x), w_0(x), \theta_z(x), w^*(x)]^T \quad (2.34-b)$$

Onde:  $\{s(x)\}$  é o vetor das incógnitas generalizadas dos deslocamentos.

A deformação pode ser expressa em termos dos deslocamentos generalizados, como abaixo:

$$\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{x0}, k_x, \varepsilon_{x0}^*, k_x^*, \theta_z, w^*, \phi, k_{xz}, \phi^*]^T$$

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ k_x \\ \varepsilon_{x0}^* \\ k_x^* \\ \theta_z \\ 2 w^* \\ \phi \\ k_{xz} \\ \phi^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \theta_x \\ u^* \\ \theta_x^* \\ w_0 \\ \theta_z \\ w^* \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

ou,

$$\bar{\varepsilon} = L\{s\} \quad (2.37)$$

As tensões variam de lâmina para lâmina no laminado. A relação entre tensão e deformação, considerando efeito térmico, é dada pela equação (2.8). Assim, para a  $i$ -ésima camada, tem-se:

$$\{\sigma\}_i = [Q]_i (\{\varepsilon\}_i - \Delta T \{\alpha\}_i) \quad (2.38)$$

As resultantes dos esforços mecânicos são obtidas pela integração das tensões em cada camada ao longo da espessura.

$$\begin{aligned} N_x &= \sum_{L=1}^{NL} \int_{h_L}^{h_{L+1}} \sigma_x dz \\ M_x &= \sum_{L=1}^{NL} \int_{h_L}^{h_{L+1}} \sigma_x z dz \\ N_x^* &= \sum_{L=1}^{NL} \int_{h_L}^{h_{L+1}} \sigma_x z^2 dz \\ N_z^* &= \sum_{L=1}^{NL} \int_{h_L}^{h_{L+1}} \sigma_z dz \\ M_z^* &= \sum_{L=1}^{NL} \int_{h_L}^{h_{L+1}} \sigma_z z dz \\ M_x^* &= \sum_{L=1}^{NL} \int_{h_L}^{h_{L+1}} \sigma_x z^3 dz \\ V &= \sum_{L=1}^{NL} \int_{h_L}^{h_{L+1}} \tau_{xz} dz \\ T &= \sum_{L=1}^{NL} \int_{h_L}^{h_{L+1}} \tau_{xz} z dz \\ V^* &= \sum_{L=1}^{NL} \int_{h_L}^{h_{L+1}} \tau_{xz} z^2 dz \end{aligned} \quad (2.39)$$

NL = número de lâminas

Onde:  $N_x$  fisicamente representa a força normal atuando na seção transversal,  $M_x$  representa o momento fletor,  $V$  representa a força cortante,  $S$  representa o momento de torção,  $N_z^*$  representa a força ao longo da espessura e os outros termos com asterisco representam forças e momentos de segunda ordem.

A Energia Potencial Total pode ser expressa por, KANT E MAJUNATH (1992):

$$E_p = \frac{b}{2} \int_{z_1} \int \varepsilon^t \sigma \, dx \, dz - b \int_{z_1} \int s^t p \, dx \, dz \quad (2.40)$$

Onde,  $s^t$  é o vetor dos deslocamentos generalizados definido na equação (2.34-b).

Substituindo as expressões para as componentes da deformação, equações (2.35-b), e de deslocamentos, equações (2.31-b), na equação (2.40) e integrando em relação a  $z$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} E_p = & \frac{b}{2} \int_1 (\varepsilon_{x_0} N_x + k_x M_x + \varepsilon_{x_0}^* N_x^* + k_x^* M_x^*) \, dx + \\ & + \frac{b}{2} \int_1 (\theta_z N_z^* + 2 w^* M_z^*) \, dx + \\ & + \frac{b}{2} \int_1 (\phi V + k_{xz} S + \phi^* V^*) \, dx - b \int_1 s^T p \, dx \end{aligned} \quad (2.41)$$

Similarmente, substituindo as expressões das componentes de deformação nas equações constitutivas, equação (2.8), e integrando, vem que:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ M_x \\ N_x^* \\ M_x^* \\ N_z \\ M_z \\ V \\ T \\ V^* \end{bmatrix} = \sum_{L=1}^{NL} \begin{bmatrix} Q_{11}h_1 & Q_{11}h_2 & Q_{11}h_3 & Q_{11}h_4 & Q_{12}h_1 & Q_{12}h_2 & Q_{13}h_1 & Q_{13}h_2 & Q_{13}h_3 \\ Q_{11}h_2 & Q_{11}h_3 & Q_{11}h_4 & Q_{11}h_5 & Q_{12}h_2 & Q_{12}h_3 & Q_{13}h_2 & Q_{13}h_3 & Q_{13}h_4 \\ Q_{11}h_3 & Q_{11}h_4 & Q_{11}h_5 & Q_{11}h_6 & Q_{12}h_3 & Q_{12}h_4 & Q_{13}h_3 & Q_{13}h_4 & Q_{13}h_5 \\ Q_{11}h_4 & Q_{11}h_5 & Q_{11}h_6 & Q_{11}h_7 & Q_{12}h_4 & Q_{12}h_5 & Q_{13}h_4 & Q_{13}h_5 & Q_{13}h_6 \\ Q_{12}h_1 & Q_{12}h_2 & Q_{12}h_3 & Q_{12}h_4 & Q_{22}h_1 & Q_{22}h_2 & Q_{23}h_1 & Q_{23}h_2 & Q_{23}h_3 \\ Q_{12}h_2 & Q_{12}h_3 & Q_{12}h_4 & Q_{12}h_5 & Q_{22}h_2 & Q_{22}h_3 & Q_{23}h_2 & Q_{23}h_3 & Q_{23}h_4 \\ Q_{13}h_1 & Q_{13}h_2 & Q_{13}h_3 & Q_{13}h_4 & Q_{23}h_1 & Q_{23}h_2 & Q_{33}h_1 & Q_{33}h_2 & Q_{33}h_3 \\ Q_{13}h_2 & Q_{13}h_3 & Q_{13}h_4 & Q_{13}h_5 & Q_{23}h_2 & Q_{23}h_3 & Q_{33}h_2 & Q_{33}h_3 & Q_{33}h_4 \\ Q_{13}h_3 & Q_{13}h_4 & Q_{13}h_5 & Q_{13}h_6 & Q_{23}h_3 & Q_{23}h_4 & Q_{33}h_3 & Q_{33}h_4 & Q_{33}h_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{x0} \\ k_x \\ \epsilon_{x0}^* \\ k_x^* \\ \theta_z \\ 2w^* \\ \phi \\ k_{xz} \\ \phi \end{bmatrix}$$

(2.42)

$$- \sum_{L=1}^{NL} \Delta t \begin{bmatrix} Q_{11}h_1 & Q_{12}h_1 & Q_{13}h_1 \\ Q_{11}h_2 & Q_{12}h_2 & Q_{13}h_2 \\ Q_{11}h_3 & Q_{12}h_3 & Q_{13}h_3 \\ Q_{11}h_4 & Q_{12}h_4 & Q_{13}h_4 \\ Q_{12}h_1 & Q_{22}h_1 & Q_{23}h_1 \\ Q_{12}h_2 & Q_{22}h_2 & Q_{23}h_2 \\ Q_{13}h_1 & Q_{23}h_1 & Q_{33}h_1 \\ Q_{13}h_2 & Q_{23}h_2 & Q_{33}h_2 \\ Q_{13}h_3 & Q_{23}h_3 & Q_{33}h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_z \\ \alpha_{xz} \end{bmatrix}$$

Onde,

$$h_1 = \int_{h_L}^{h_{L+1}} dz \quad , \quad h_2 = \int_{h_L}^{h_{L+1}} z dz \quad , \quad h_3 = \int_{h_L}^{h_{L+1}} z^2 dz$$

$$h_4 = \int_{h_L}^{h_{L+1}} z^3 dz \quad , \quad h_5 = \int_{h_L}^{h_{L+1}} z^4 dz \quad , \quad h_6 = \int_{h_L}^{h_{L+1}} z^5 dz$$

$$h_7 = \int_{h_L}^{h_{L+1}} z^6 dz$$

Observe que:

$$A = bh_1 \quad Mst = bh_2 \quad Inc = bh_3$$

$$Mst2 = bh_4 \quad Inc2 = bh_5 \quad Mst3 = bh_6 \quad (2.43)$$

$$Inc3 = bh_7$$

Onde,  $A$  representa a área da seção transversal,  $Mst$  o momento estático,  $Inc$  o momento de inércia e os outros termos representam momentos estáticos e de inércia de alta ordem.

Definindo o vetor de esforços generalizados  $\{\bar{\sigma}\}$ ,

$$\{\bar{\sigma}\} = \{N_x, M_x, N_x^*, M_x^*, N_z, M_z, V, S, V^*\}^T \quad (2.44)$$

A equação (2.42) pode ser escrita em forma compacta, como segue:

$$\{\bar{\sigma}\} = [D]\{\bar{\varepsilon}\} - [D^*]\{\alpha\} \quad (2.45)$$

E, a equação (2.41) pode ser rescrita como:

$$E_p = \frac{b}{2} \int_1 \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} dx - b \int_1 s^T p dx$$

ou,

$$E_p = \frac{b}{2} \int_1 \bar{\varepsilon}^T D \bar{\varepsilon} dx - \frac{b}{2} \int_1 \bar{\varepsilon}^T D^* \alpha dx - b \int_1 s^T p dx \quad (2.46)$$

$$E_p = \frac{b}{2} \int_1 [L\{s\}]^T D [L\{s\}] dx - \frac{b}{2} \int_1 \bar{\varepsilon}^T D^* \alpha dx - b \int_1 \{s\}^T p dx$$

As tensões transversais interlaminares ( $\tau_{xz}$ ,  $\sigma_z$ ) não podem ser obtidas diretamente da equação (2.38). Isso se deve ao fato das leis constitutivas serem descontínuas e as tensões interlaminares requererem continuidade através das interfaces. Uma análise tri/bi-dimensional vem a ser muito complexa devido ao fato das leis constitutivas variarem ao longo da espessura e ser requerido continuidade através da interface. Por essas razões, as tensões interlaminares entre as camadas  $L$  e  $L+1$  em  $z$ , são obtidas por integração das equações de equilíbrio da elasticidade bi-dimensional.

As equações de equilíbrio podem ser escritas como:



$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

Tem-se:

$$\sigma_{xz}(x, z) = - \int_{-h/2}^z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial x} \left( - \int_{-h/2}^z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz \right)$$

#### 2.4.2. Formulação do Elemento Finito

Considerando um domínio  $\Omega$  subdividido em subespaços (elemento finitos)  $\Omega^e$ , cada um de dimensão característica  $h$ , a função de forma, definida em cada subdomínio do elemento, pode ser representada por um polinômio de grau  $p$ .

Se a solução para uma função de forma ( ou funções )  $\phi$  é um polinômio de grau menor ou igual a  $p$ , então a aproximação fornecerá a resposta exata do problema.

Em geral, a solução para  $\phi$  não é um polinômio exato, mas se a solução não contém singularidades, ao fazer-se algumas ou todas as derivadas infinitesimais, então pode-se expandi-la localmente como uma série de Taylor. Por exemplo, com duas dimensões independentes, pode-se escrever na vizinhança de um ponto  $O$

$$\phi(\Delta x, \Delta y) = \phi|_o + \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x}|_o + \Delta y \frac{\partial \phi}{\partial y}|_o + \dots$$

Onde  $\Delta x$  e  $\Delta y$  são as diferenças entre as coordenadas do ponto considerado e a origem  $O$ . Se for usado uma aproximação polinomial de grau  $p$ , neste caso pode ser a série de Taylor expandida até o grau  $p$ , então

dentro dos limites de um elemento  $h$ , o máximo erro  $E$  na aproximação deverá satisfazer a equação:

$$E = O(h^{p+1})$$

De maneira similar nota-se que a aproximação para a primeira derivada de  $\phi$  será exata para  $O(h^p)$  e a aproximação para a  $d$ -ésima derivada será exata para  $O(h^{p+1-d})$ .

As observações são importantes para explicar os bons resultados obtidos ao utilizar-se aproximações de alta ordem, e também para estabelecer a condição necessária de integridade requerida no processo de resíduo ponderado.

Para descrever o problema, pode-se escrever a equação diferencial, como:

$$A(\phi) = \ell\phi + p = 0 \quad \text{em } \Omega$$

Com a condição de contorno,

$$B(\phi) = \wp\phi + r = 0 \quad \text{em } \Gamma$$

Pode-se escrever a função tentativa, como:

$$\hat{\phi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m \tag{2.49}$$

E, através de Resíduos Ponderados, tem-se:

$$\int_{\Omega} W_i[\ell\hat{\phi} + p]d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_i[\wp\hat{\phi} + r]d\Gamma = 0$$

Observe-se que para a convergência de  $\phi$  e todas as derivadas que ocorrem nos operadores  $\ell$  e  $\wp$ , estes devem estar corretamente representados no limite de  $h \rightarrow 0$ . Se a ordem de tais derivadas é  $d$ , claramente o menor grau da expansão que pode ser usada para  $\hat{\phi}$  deve ser tal que o erro na representação seja menor que  $O(h)$ . Desta forma, tem-se:

$$p-d \geq 0$$

A redução da ordem  $d$  dos operadores envolvidos reduz a continuidade necessária bem como o grau mínimo  $p$  do polinômio a ser usado na função tentativa.

Em um elemento unidimensional, de dois nós, associa-se a cada nó uma função de forma linear, como ilustrado na figura 2.4. O uso de tal função de forma assegura que:

1 - A aproximação  $\phi$  é uma função linear em  $x$  sobre cada elemento.

2 - O parâmetro  $a_m$ , associado com a função de forma  $N_m$  na expansão para  $\phi$  é simplesmente a aproximação para o valor de  $\phi$  naquele nó.

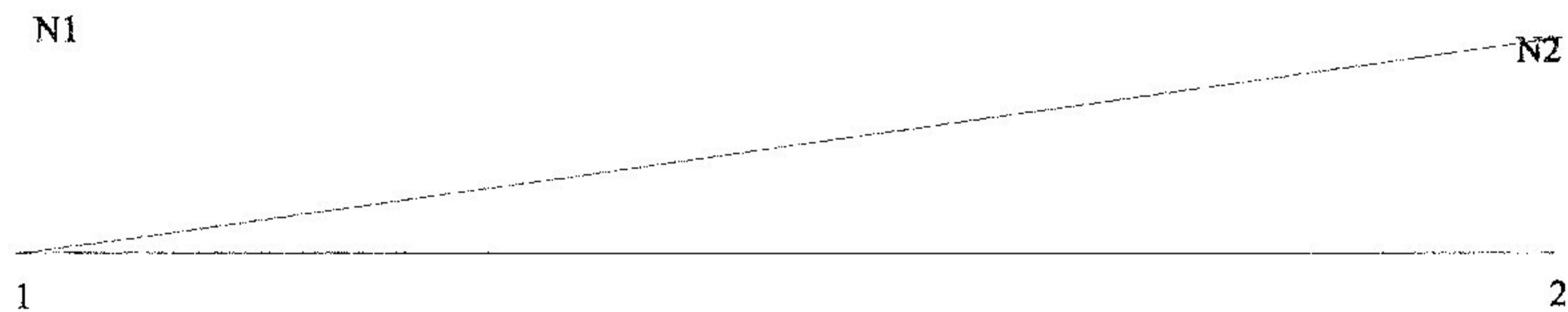


Fig. 2.4. Representação da Função de Forma Linear

A continuidade de classe  $C^0$  do domínio  $\Omega$  é automaticamente assegurada se as funções de forma dos elementos tiverem continuidade  $C^0$ .

Esse processo pode ser estendido para funções de forma de alta ordem em um elemento unidimensional. Sobre o elemento de quatro nós da figura 2.4, uma representação cúbica para  $\phi$  é possível, e isso pode ser efetivado pela associação de uma função de forma cúbica a cada nó do elemento. Se a função de forma do elemento, associada a um nó em particular, for de valor unitário neste nó e zero nos outros três nós, então a condição 2 permanece satisfeita. Para tal elemento a posição exata dos nós no interior não altera a qualidade da aproximação, e observa-se que a função de forma associada a esses nós do interior do elemento não estende para os outros elementos adjacentes

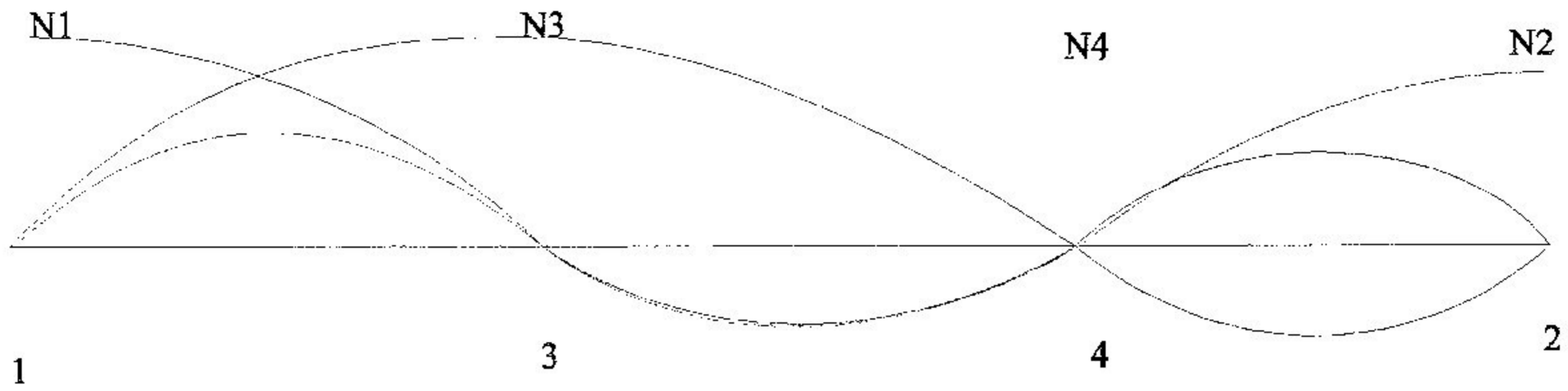


Fig. 2.5. Representação da Função de Forma para o Elemento

Pode-se expandir cada incógnita do deslocamento generalizado.

$$u_m(\mathbf{x}) = \sum_{h=1}^N N_h(\mathbf{x}) u_{m_h} \quad (2.50)$$

$$w_k(\mathbf{x}) = \sum_{h=1}^N N_h(\mathbf{x}) w_{k_h}$$

Neste trabalho utiliza-se uma interpolação cúbica. Portanto, a função de forma associada ao nó  $i$  será um polinômio de grau 3, ou seja:

$$N_h(\mathbf{x}) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Devido às condições de contorno, tem-se:

$$x = 0 \rightarrow N_1 = 1, N_2 = 0, N_3 = 0, N_4 = 0,$$

$$x = \frac{L}{3} \rightarrow N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 1, N_4 = 0$$

$$x = \frac{2L}{3} \rightarrow N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 0, N_4 = 1$$

$$x = L \rightarrow N_1 = 0, N_2 = 1, N_3 = 0, N_4 = 0$$

Assim, obtém-se:

$$N_1 = -\left(\frac{9}{2}\xi^3 - 9\xi^2 + \frac{11}{2}\xi - 1\right)$$

$$N_2 = \left(\frac{9}{2}\xi^3 - \frac{9}{2}\xi^2 + \xi\right)$$
(2.51)

$$N_3 = \frac{9}{2}(3\xi^3 - 5\xi^2 + 2\xi)$$

$$N_4 = -\frac{9}{2}(3\xi^3 - 4\xi^2 + \xi)$$

Onde,  $\xi = \frac{x}{L}$

Como já visto anteriormente, a expressão da energia potencial total pode ser escrita como:

$$E_P = U_I + U_E$$

Pelo princípio da Energia Potencial Mínima:

$$\delta E_P = \delta U_I + \delta U_E = 0$$
(2.52)

Onde,

$$\delta U_I = \int_V \{\delta \bar{\epsilon}\}^T \{\bar{\sigma}\} dV$$

$$\delta U_E = \int_V \{\delta S\}^T \{B\} dv + \int_A \{\delta S\}^T \{f\} dA$$

Sendo,  $\{B\}$  = forças de corpo  
 $\{f\}$  = forças de superfície

Portanto, tem-se:

$$\int_V \{\delta \bar{\epsilon}\}^T \{\bar{\sigma}\} dV = \int_V \{\delta S\}^T \{B\} dV + \int_A \{\delta S\}^T \{f\} dA$$
(2.53)

Denominando o vetor das incógnitas de deslocamento nodal de  $\{\varphi\}$ , vem que:

$$\{\varphi\}^T = [\{\varphi_1\}^T \{\varphi_2\}^T \{\varphi_3\}^T \{\varphi_4\}^T], \text{ com:}$$

$$\{\varphi_1\}^T = [u_{0_1} \theta_{x_1} u_{x_1}^* \theta_{x_1}^* w_{0_1} \theta_{z_1} w_{z_1}^*]$$

$$\{\varphi_2\}^T = [u_{0_2} \theta_{x_2} u_{x_2}^* \theta_{x_2}^* w_{0_2} \theta_{z_2} w_{z_2}^*]$$

$$\{\varphi_3\}^T = [u_{0_3} \theta_{x_3} u_{x_3}^* \theta_{x_3}^* w_{0_3} \theta_{z_3} w_{z_3}^*]$$

$$\{\varphi_4\}^T = [u_{0_4} \theta_{x_4} u_{x_4}^* \theta_{x_4}^* w_{0_4} \theta_{z_4} w_{z_4}^*]$$

(2.54)



Fig. 2.6. Representação Simbólica das Incógnitas de Deslocamento Nodal

Desta forma:

$$\{s(x)\} = [N(x)]\{\varphi\} \text{ ou } \{S(x,z)\} = [Z][N(x)]\{\varphi\}$$

Então:

$$\{\varepsilon\} = [L][N(x)]\{\varphi\}$$

$$\{\delta\varepsilon\} = [L][N(x)]\{\delta\varphi\} \quad (2.55)$$

$$\{\delta S(x,z)\} = [Z][N(x)]\{\delta\varphi\} \quad (2.56)$$

Substituindo as equações (2.55) e (2.56) na equação (2.53),  
tem-se:

$$\int_V \{\delta\varphi\}^T ([L][N(x)])^T \bar{\sigma} dV = \int_V \{\delta\varphi\}^T ([Z][N(x)])^T \{B\} dV + \int_A \{\delta\varphi\}^T ([Z][N(x)])^T \{f\} dA \quad (2.57)$$

Como,  $\{\delta\varphi\}$  é arbitrário, não nulo, vem que:

$$\int_V ([L][N(x)])^T \bar{\sigma} dV = \int_V ([Z][N(x)])^T \{B\} dV + \int_A ([Z][N(x)])^T \{f\} dA \quad (2.58)$$

Substituindo as equações (2.45) e (2.37) na equação (2.58),  
tem-se:

$$\begin{aligned} \int_V ([L][N(x)])^T [D]([L][N(x)]) dV \{\varphi\} &= \\ &= \Delta t \int_V ([L][N(x)])^T [D^*] \{\alpha\} dV + \int_V ([Z][N(x)])^T \{B\} dV + \\ &+ \int_A ([Z][N(x)])^T \{f\} dA \end{aligned} \quad (2.59)$$

Então, pode-se escrever:

$$[K^e] \{\varphi\} = \{F^e\}, \text{ onde:}$$

$$[K^e] = \text{matriz de rigidez}$$

$$\{\varphi\} = \text{vetor de incógnitas dos deslocamentos nodais}$$

$$\{F^e\} = \text{vetor das forças nodais}$$

Assim,

$$[K^e] = \int_V ([L][N(x)])^T [D]([L][N(x)]) dV \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned}
[F^e] &= \Delta t \int_V ([L][N(x)])^T [D^*] \{\alpha\} dV + \int_V ([Z][N(x)])^T \{B\} dv + \\
&+ \int_A ([Z][N(x)])^T \{f\} dA
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Pode-se escrever para a energia cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{S}(x, z))^2 dV \tag{2.62}$$

Pelo Princípio de Hamilton, tem-se

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(E_c - E_p) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{NC} dt = 0 \tag{2.63}$$

Para este caso específico, tem-se:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} \delta W_{NC} dt = 0 \\
\delta E_c &= \int_V \rho \dot{S}(x, z) \delta \dot{S}(x, z) dV \\
\delta \int_{t_1}^{t_2} E_c dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \dot{S}(x, z) \delta \dot{S}(x, z) dV dt
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Integrando por partes:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} E_c dt = \int_V \rho \dot{S}(x, z) \delta S(x, z) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \ddot{S}(x, z) \delta S(x, z) dV dt \tag{2.65}$$

Supondo:  $\delta S(x, z) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$ , e considerando que

$$\begin{aligned}
\{\ddot{S}(x, z)\} &= ([Z][N(x)]) \{\ddot{\phi}\} \\
\{\delta S(x, z)\} &= ([Z][N(x)]) \{\delta \phi\}
\end{aligned}$$

Vem que:



$$\delta \int_{t_1}^{t_2} E_c dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \delta \{\varphi\}^T ([Z][N(x)])^T ([Z][N(x)]) dV \{\ddot{\varphi}\} dt \quad (2.66)$$

$\delta E_p$  foi calculado anteriormente, equações (2.52) e (2.53).

Pelo princípio de Hamilton, obtém-se a equação de movimento, como:

$$[M]\{\ddot{\varphi}\} + [K]\{\varphi\} = \{P\}$$

Tal que,

$$[M^e] = - \int_V \rho ([Z][N(x)])^T ([Z][N(x)]) dV \quad (2.67)$$

Onde:  $[M^e]$  é a matriz de massa consistente do elemento  
 $[K^e]$  é a matriz de rigidez, equação (2.60).

Os elementos da matriz de rigidez e de massa estão mostrados no apêndice D.

## Capítulo 3

### O PROGRAMA EPTD

#### 3.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados alguns aspectos relativos à implementação do programa EPTD, cujas formulações dos elementos de viga de Timoshenko e de alta ordem estão detalhados no capítulo 2.

Basicamente o programa possui três módulos principais independentes, que podem ser classificados em: entrada de dados, módulo de análise e módulo de saída de resultados.

O módulo de análise consiste na obtenção de autovalores, para a determinação das frequências naturais, e no cálculo de deslocamentos, deformações e tensões nas camadas do laminado, na análise estática.

#### 3.2. Implementação do Programa

O programa EPTD foi implementado em linguagem Pascal. Contendo, aproximadamente 10.000 linhas de código, foi compilado em turbo pascal 5.5, para ser utilizado com base no sistema operacional DOS.

A programação é feita em módulos, de modo que o programa nada mais é do que um conjunto de subrotinas dispostas estruturadamente. Devido a esta programação modular, é possível criar um conjunto de soluções seqüenciais, na qual o usuário especifica qual o tipo de análise a ser utilizada, bem como permite a introdução de outros elementos unidimensionais ou bi-dimensionais.

Buscando obter uma boa eficiência computacional, grande parte das matrizes e vetores foram alocados dinamicamente na memória.

Na determinação das frequências da estrutura obtém-se os autovalores e os respectivos autovetores dos primeiros modos de vibração.

Para isso, a estratégia de iteração por subespaços na solução do problema de autovalor é utilizado juntamente com o método de solução de Jacobi.

Esta estratégia consiste, basicamente, na projeção do espaço de solução inicial, cuja dimensão é igual ao número de graus de liberdade da estrutura, em um subespaço de dimensão menor que o original. A dimensão do subespaço depende do número de pares de autovalores e autovetores requeridos (NEIG), que segundo BATHE (1982) é tomado como o mínimo entre  $2 \cdot \text{NEIG}$  e  $\text{NEIG} + 8$ .

A análise estática, é realizada usando-se o método de Gauss na decomposição da matriz  $[K]$ .

$$[K]\{\phi\} = \{P\} \quad (3.1)$$

As matrizes são armazenadas na forma de matriz retangular  $NB \times N$ . Onde,  $NB$  é a largura da semi-banda e  $N$  é o numero de graus de liberdade do sistema de equações.

### 3.3. Entrada de dados

Os dados necessários, para a execução do programa podem ser fornecidos via teclado ou via arquivo. Na entrada de dados via teclado, o usuário conta com menus auto-explicativos e seqüenciais, onde inicialmente deve-se especificar o tipo de análise desejada e fornecer o  $n^\circ$  de elementos,  $n^\circ$  de nós,  $n^\circ$  de restrições,  $n^\circ$  de nós com restrições,  $n^\circ$  de materiais,  $n^\circ$  de lâminas e no caso de análise dinâmica deve-se ainda fornecer o  $n^\circ$  de autovalores desejados. Na fase seguinte, o programa irá pedir as coordenadas nodais, os dados das lâminas, os dados dos elementos, a lista de materiais, os dados das restrições de apoio e os dados dos carregamentos.

As coordenadas nodais podem ser fornecidas nó a nó ou geradas automaticamente, sendo, neste caso, necessário apenas especificar o comprimento da viga. Os dados dos elementos também podem ser gerados automaticamente, sendo necessário fornecer apenas os dados do  $1^\circ$  elemento.

Após a entrada de dados o usuário volta ao menu principal, onde pode visualizar os dados fornecidos e guardá-los em arquivo.

### 3.4. Módulo de Análise

No capítulo 2 foram apresentadas duas formulações de elementos de vigas. A formulação baseada na teoria de Timoshenko pode ser utilizada na análise dinâmica e estática de vigas isotrópicas; e a formulação de alta ordem permite a análise dinâmica e estática de vigas isotrópicas e laminadas.

Para a viga de Timoshenko foi desenvolvido um elemento de 2 nós com quatro graus de liberdade por nó.

Para a formulação de alta ordem foi desenvolvido um elemento de 4 nós com sete graus de liberdade por nó, sendo dois deslocamentos transversais, um de primeira ordem e outro de segunda ordem; dois deslocamentos axiais, um de primeira ordem e outro de segunda ordem; e três rotações no plano, duas de segunda ordem e uma de primeira.

#### 3.4.1. Frequências Naturais

A determinação das frequências naturais esta restrita à obtenção dos modos de vibração de um sistema não amortecido sem tensões iniciais, cuja equação do movimento é dada por:

$$[M]\{\ddot{\phi}\} + [K]\{\phi\} = \{0\} \quad (3.2)$$

Desta forma, o problema de autovalor resolvido pelo programa EPTD, pode ser expresso na forma

$$[[K] - \lambda_i[M]]\{\phi_i\} = \{0\} \quad (3.3)$$

onde o par  $(\lambda_i, \phi_i)$  é o autovalor e seu correspondente autovetor do  $i$ -ésimo modo de vibração.

O programa está implementado de forma a permitir que o usuário especifique quantos pares  $(\lambda_i, \phi_i)$  deseja.

### 3.4.2. Análise Estática

Na análise estática, o seguinte problema é resolvido:

$$[K]\{\phi\} = \{P\} \quad (3.1)$$

Onde a matriz  $[K]$  e o vetor  $\{P\}$  estão dados no Apêndice E.

O programa calcula os deslocamentos correspondentes ao graus de liberdade de cada nó. No cálculo da tensão  $\sigma_{xx}$  o programa utiliza a equação (2.36) e para o cálculo da tensão de cisalhamento e da tensão  $\sigma_{zz}$  utiliza as equações de equilíbrio. O usuário especifica os pontos em que ele deseja obter as tensões na direção z.

### 3.5. Saída de Resultados

O usuário pode escolher a saída de resultados via tela, arquivo ou impressora. Os resultados fornecidos são os deslocamentos nodais, as tensões normais e de cisalhamento, e as frequências naturais.

## Capítulo 4

### EXEMPLOS NUMÉRICOS

#### 4.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos numéricos com o objetivo de avaliar as formulações implementadas numericamente, para a solução de vigas laminadas, utilizando a teoria de alta ordem, no contexto de elementos finitos de classe  $C^0$ .

Foram analisados os seguintes problemas:

##### a) Análise estática de vigas de madeira laminada colada

Neste exemplo o resultado obtido, da análise estática, utilizando o elemento de alta ordem é comparado com resultados obtidos experimentalmente, por MANTILLA CARRASCO (1989).

##### b) Análise estática e de frequências naturais de vigas isotrópicas

Tensão de cisalhamento e frequências naturais são calculadas usando a formulação de alta ordem. Esses resultados são comparados aos obtidos por um elemento finito formulado através da teoria de viga de Timoshenko. Neste caso, tensões médias,  $\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz$ , obtidas de resultados da teoria da elasticidade e da teoria de alta ordem, são comparadas à obtida pela teoria de viga de Timoshenko.

Resultados numéricos são apresentados para vigas em balanço com carga na ponta, vigas simplesmente apoiada com carga distribuída, e vigas com extremidades engastadas.

##### c) Análise estática e de frequências naturais de vigas ortotrópicas

Nesse exemplo foram obtidos os deslocamentos máximos e as tensões para uma viga simplesmente apoiada, submetida a um carregamento senoidal, da forma :  $q = q_0 \sin \frac{n\pi x}{L}$  . Também foi obtida a frequência fundamental.

Três configurações geométricas foram consideradas:

1) viga construída com fibras orientadas somente na direção longitudinal;

2) viga construída com duas lâminas, sendo a superior com as fibras orientadas transversalmente e a inferior com as fibras orientadas longitudinalmente;

3) viga construída com três lâminas, sendo as externas com fibras orientadas longitudinalmente e a central com fibras orientadas transversalmente.

Os resultados obtidos, para as tensões e deslocamentos, são comparados aos obtidos por Pagano ( apêndice B) e CPT (Classical Laminated Plate Theory), e os resultados obtidos para as frequências naturais são comparados aos obtidos pela Teoria Clássica dos Laminados.

Nos três casos, foi considerado  $n=1$ .

#### 4.2. Análise Estática de Viga de Madeira Laminada Colada

Este exemplo foi analisado por MANTILLA, CARRASCO (1989), onde foram determinados experimentalmente as constantes elásticas e as deformações de cada lamina em quatro linhas de extensômetros. A viga é composta de 11 lâminas de madeira de Pinho do Paraná, de espessura de 0,0355 m, e coladas com Resorcinol, como indicado na figura 4.1. Os resultados numéricos são comparados aos obtidos experimentalmente na linha de extensômetro nº 4.

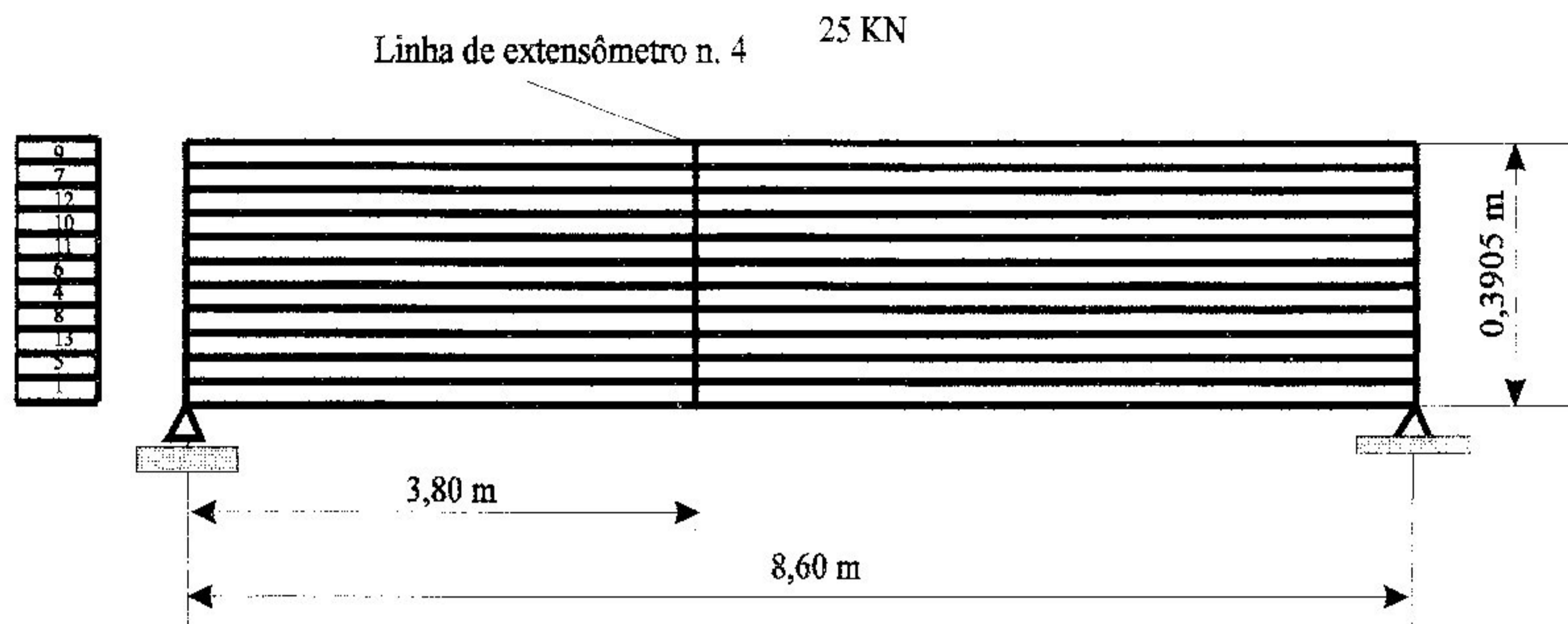


Fig. 4.1. Desenho Esquemático da Viga Analisada

Na análise por elementos finitos, foram utilizados valores médios para as constantes elásticas de cada lâmina, obtidas experimentalmente, os quais são mostrados na tabela 4.1. Na simulação numérica desta viga foram utilizados 14 elementos de alta ordem, e 294 deslocamentos nodais independentes.

Tabela 4.1. Valores médios das constantes elásticas obtidas experimentalmente, MANTILLA, CARRASCO (1989)

Lâmina	E long. (MPa)	E norm. (Mpa)	G (MPa)	$\nu_{21}$	dens (KN/m <sup>3</sup> )
1	19823	1300	1106	0,53	6,1
4	12392	1190	1190	0,33	6,3
5	19272	1297	1105	0,52	4,8
6	10266	1130	1200	0,33	6,2
7	18054	1429	981	0,46	6,1
8	16807	1154	1004	0,42	5,6
9	19592	1440	980	0,46	5,6
10	15581	1178	953	0,36	6,9
11	11309	946	835	0,23	4,5
12	17100	1300	970	0,40	6,0
13	17293	1200	1050	0,44	5,9



Os resultados obtidos, da análise estática, estão mostrados nos gráficos a seguir:

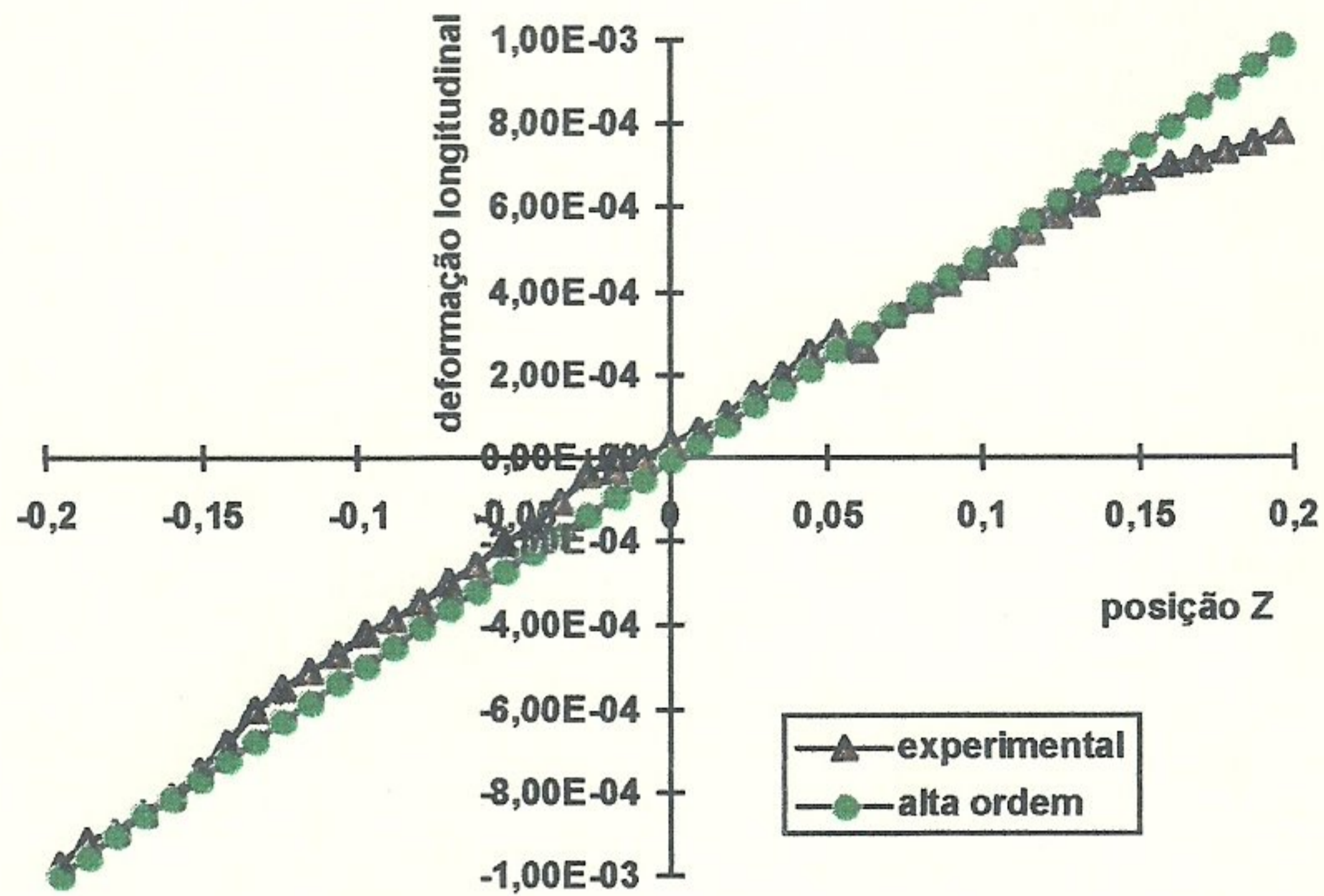


Fig. 4.2. Deformação Longitudinal versus Posição Z

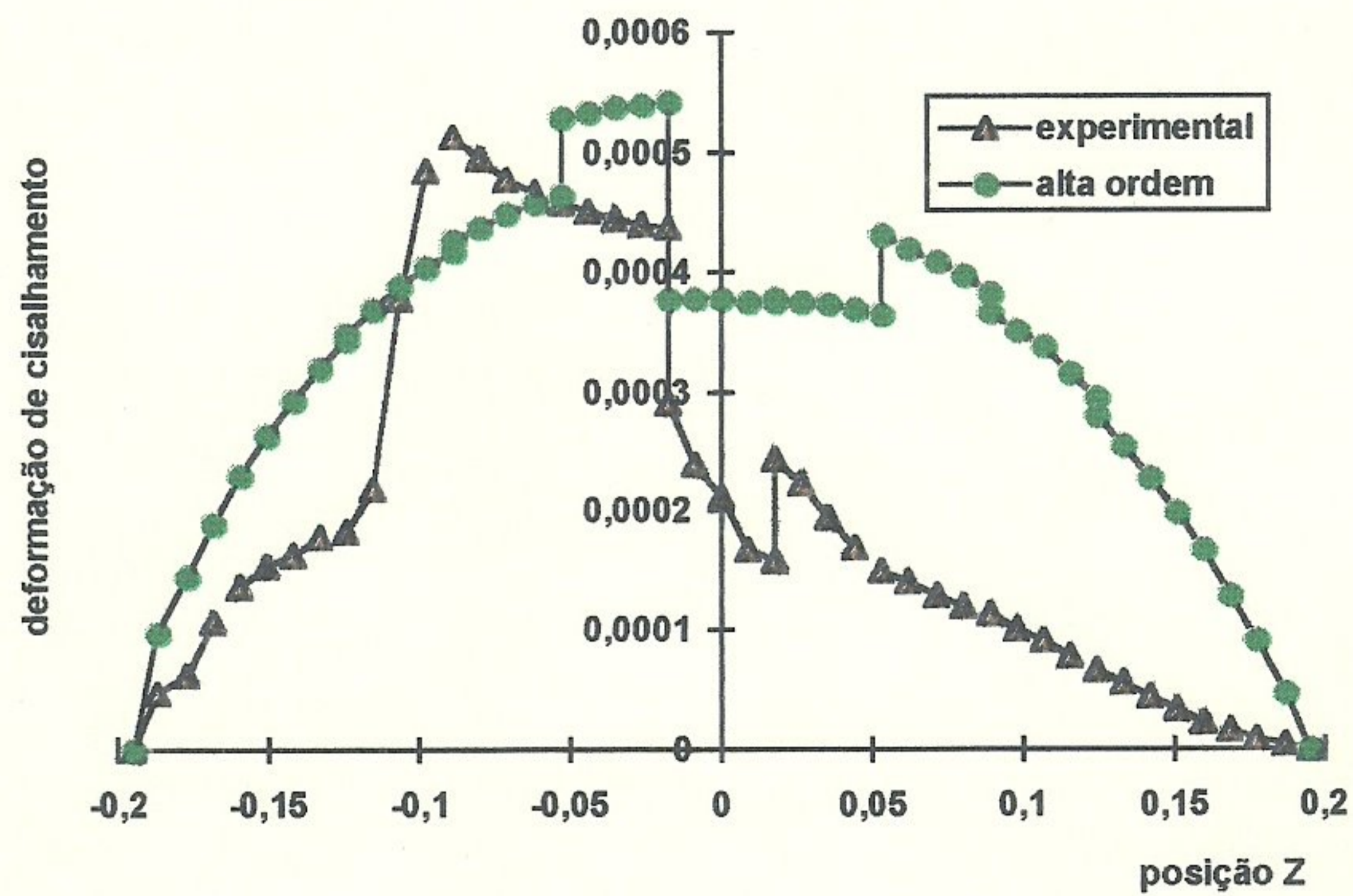


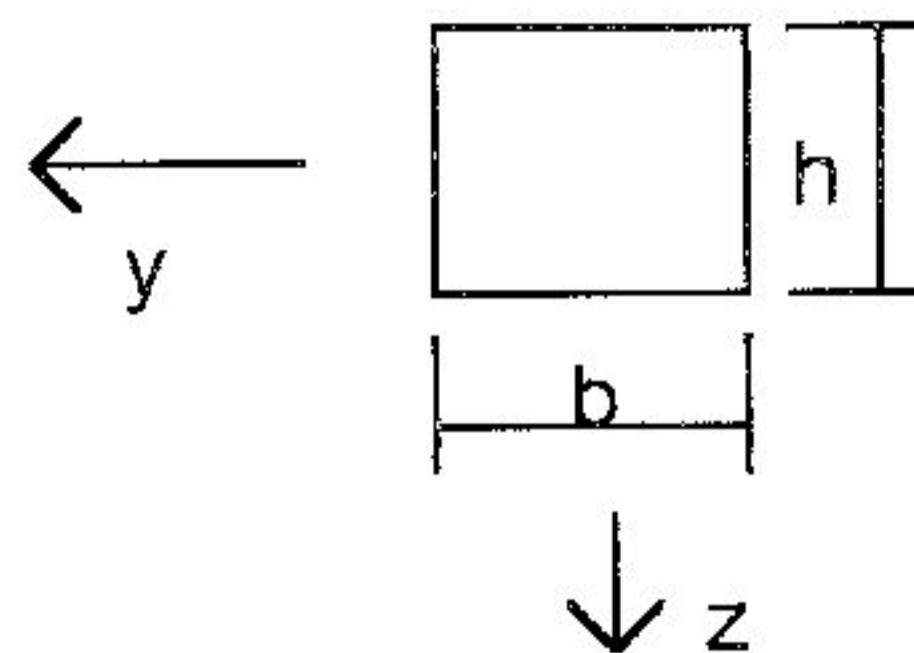
Fig. 4.3. Deformação de Cisalhamento versus Posição Z

#### 4.2.1. Análise dos Resultados

Valores obtidos numericamente se aproximam satisfatoriamente dos resultados experimentais, embora, na simulação numérica tenha sido utilizado um valor médio de constantes elásticas para a madeira, já que estas constantes são diferentes para as diversas seções transversais da viga.

#### 4.3. Análise Estática e de Frequências Naturais de Vigas Isotrópicas

As dimensões e propriedades mecânicas da viga analisada estão indicadas abaixo:



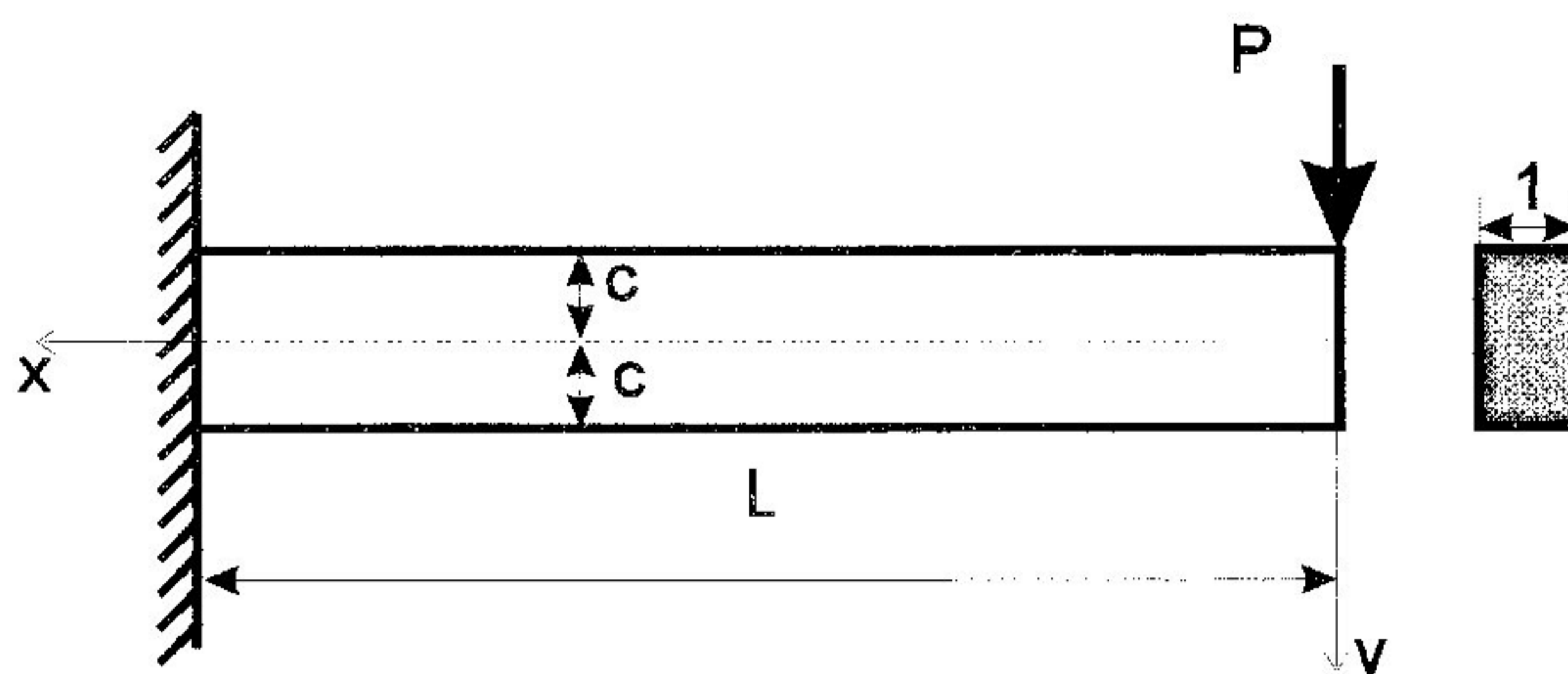
$$\begin{aligned} E &= 210 \text{ GPa} \\ b &= 0,020 \text{ m} \\ \rho &= 0,77E4 \text{ kg/m}^3 \\ \nu &= 0,3 \\ L &= 1\text{m} \end{aligned}$$

No cálculo das tensões médias foi utilizada a equação

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz.$$

##### 4.3.1. Tensão de Cisalhamento pela Teoria da Elasticidade, TIMOSHENKO (1985)

#### 4.3.1.1. Flexão de uma Viga em Balanço Carregada na Extremidade



Para uma viga em balanço com seção transversal retangular de largura unitária, solicitada por uma força  $P$ , aplicada na extremidade livre, tem-se:

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2c^3}xy$$

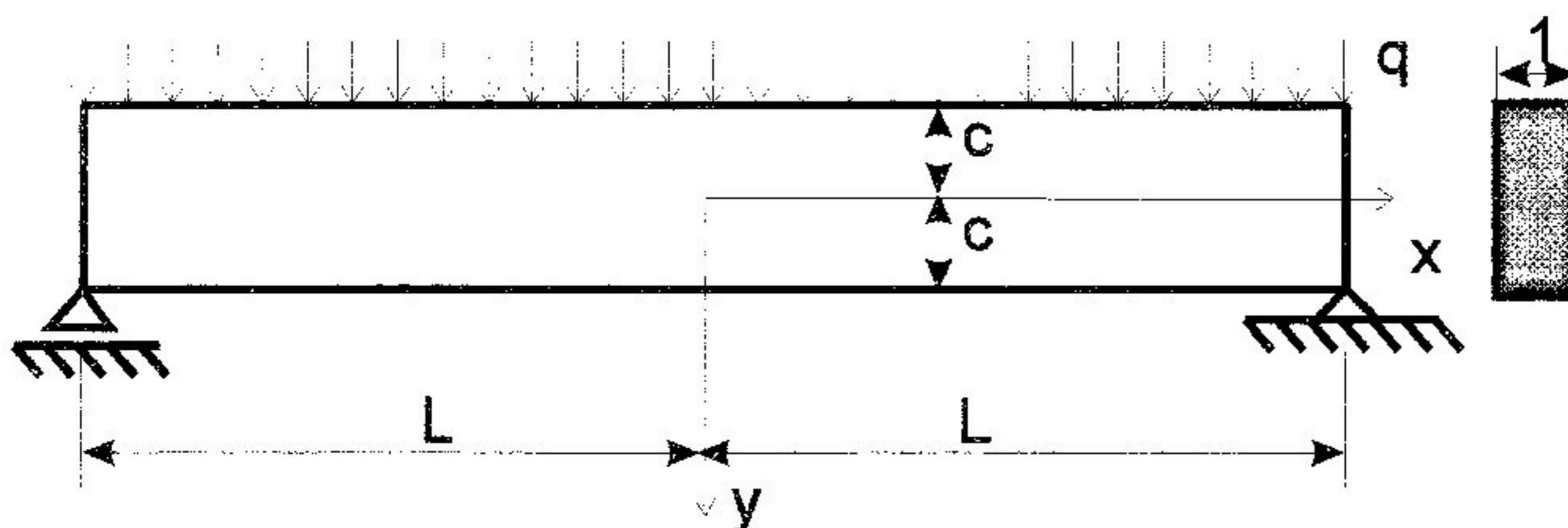
$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1P}{2I}(c^2 - y^2)$$

Os deslocamentos transversais do eixo da viga, considerando a distorção das seções transversais produzidas pelas tensões de cisalhamento, são:

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{PL^2x}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI} + \frac{Pc^3}{2IG}(L-x)$$

#### 4.3.1.2. Flexão de uma Viga Uniformemente Carregada



Para uma viga de seção retangular e de largura unitária, apoiada nas extremidades, solicitada por uma carga uniformemente distribuída de intensidade  $q$ , tem-se:

$$\sigma_x = -\frac{q}{2I} \left( x^2 y - \frac{2}{3} y^2 \right)$$

$$\sigma_y = -\frac{q}{2I} \left( \frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{2I} (c^2 - y^2) x$$

O deslocamento  $v(x)$  é dado por:

$$(v)_{y=0} = \delta - \frac{q}{2EI} \left[ \frac{L^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left( 1 + \frac{1}{2} v \right) c^2 x^2 \right]$$

Considerando que a flecha nas extremidades ( $x=\pm L$ ), do eixo da viga, seja nula, vem:

$$\delta = \frac{5}{24} \frac{qL^4}{EI} \left[ 1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{L^2} \left( \frac{4}{5} + \frac{v}{2} \right) \right]$$

O fator que precede o termo entre colchetes é o valor da flecha obtida da teoria elementar, considerando-se que as seções se mantêm planas durante a flexão. O segundo termo dentro dos colchetes representa a

correção da teoria elementar, comumente chamado de efeito da força cortante.

#### 4.3.2. Freqüências Naturais pela Teoria Clássica de Vigas, ROY CRAYG (1981)

##### 4.3.2.1. Freqüências Naturais para uma Viga em Balanço

Para uma viga isotrópica, em balanço, as três primeiras freqüências naturais são dadas por:

$$\omega_1 = \frac{3,516}{L^2} \left( \frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2}$$

$$\omega_2 = \frac{22,03}{L^2} \left( \frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2}$$

$$\omega_3 = \frac{61,70}{L^2} \left( \frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2}$$

##### 4.3.2.2. Freqüências Naturais para uma Viga Simplesmente Apoiada

As freqüências naturais de uma viga isotrópica simplesmente apoiada são obtidas pela equação:

$$\omega_r = \left( \frac{r\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2}$$

##### 4.3.2.3. Freqüências Naturais para uma Viga Engastada nas Extremidades

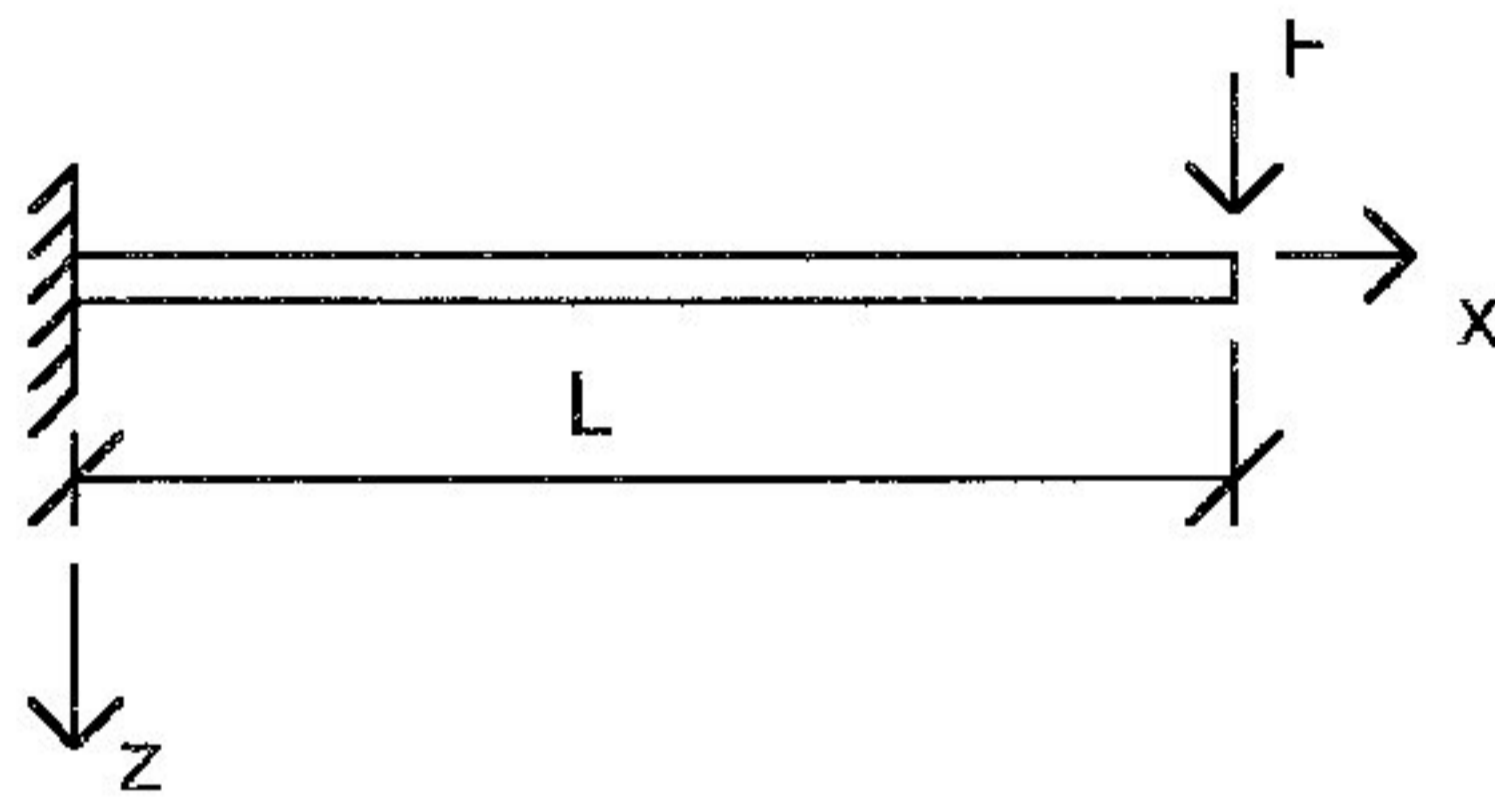
As freqüências naturais de uma viga isotrópica, com as extremidades engastada, são obtidas pelas equações:

$$\omega_1 = \frac{22,3729}{L^2} \left( \frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2}$$

$$\omega_2 = \frac{61,6254}{L^2} \left( \frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2}$$

$$\omega_3 = \frac{120,8536}{L^2} \left( \frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2}$$

#### 4.3.3. Resultados Obtidos para Viga em Balanço



##### 4.3.3.1. Resultados Obtidos para os Deslocamento na Ponta da Viga

Para comparações serão utilizados os seguintes graus de liberdade para cada elemento:

Elemento de alta ordem  $\rightarrow$  grau de liberdade =  $w_0$

Elemento de viga de Timoshenko  $\rightarrow$  grau de liberdade =  $q_1$

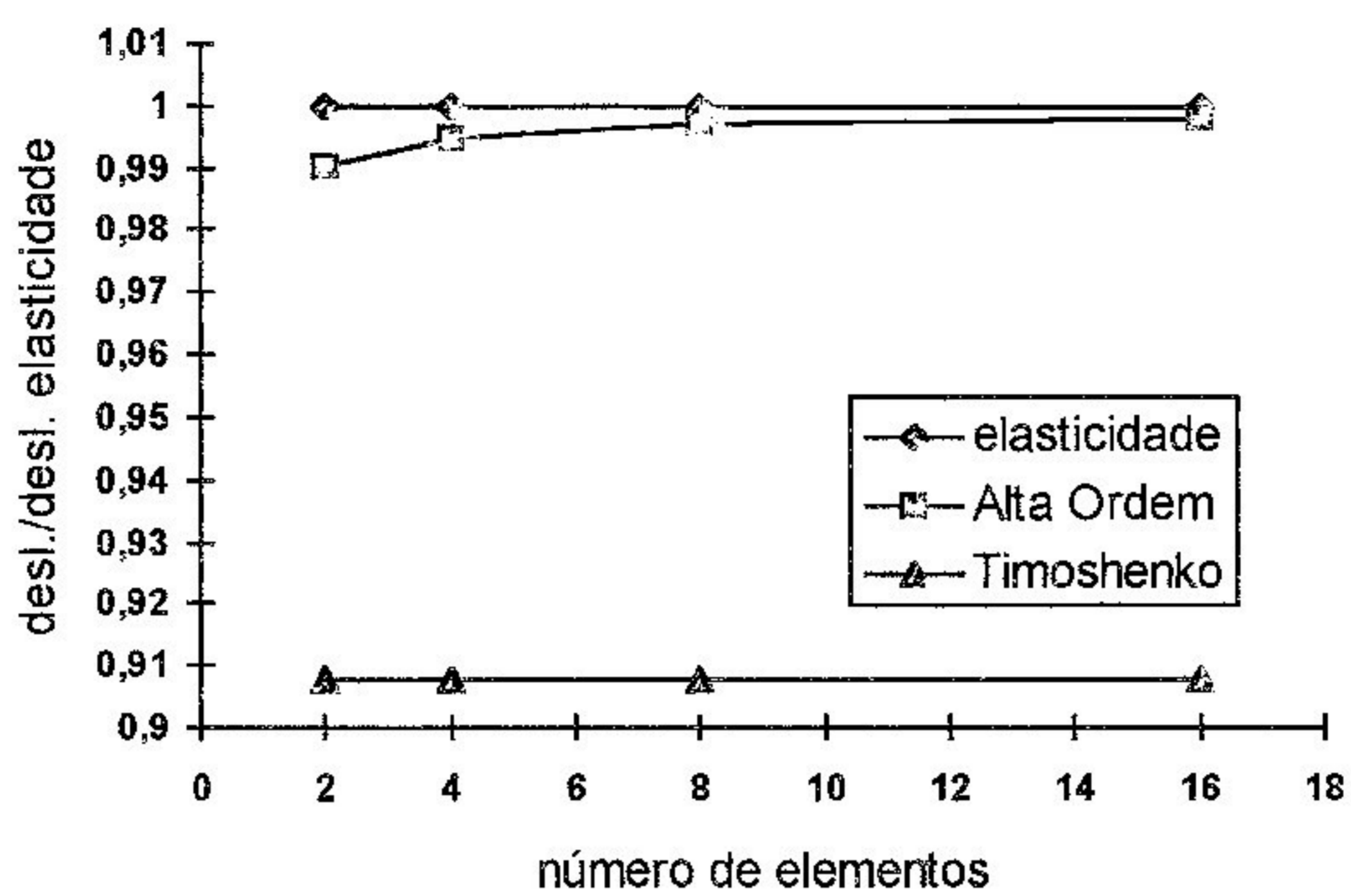


Fig. 4.4. Relação entre os Deslocamentos e Número de Elementos para ( $L/h = 20$ )

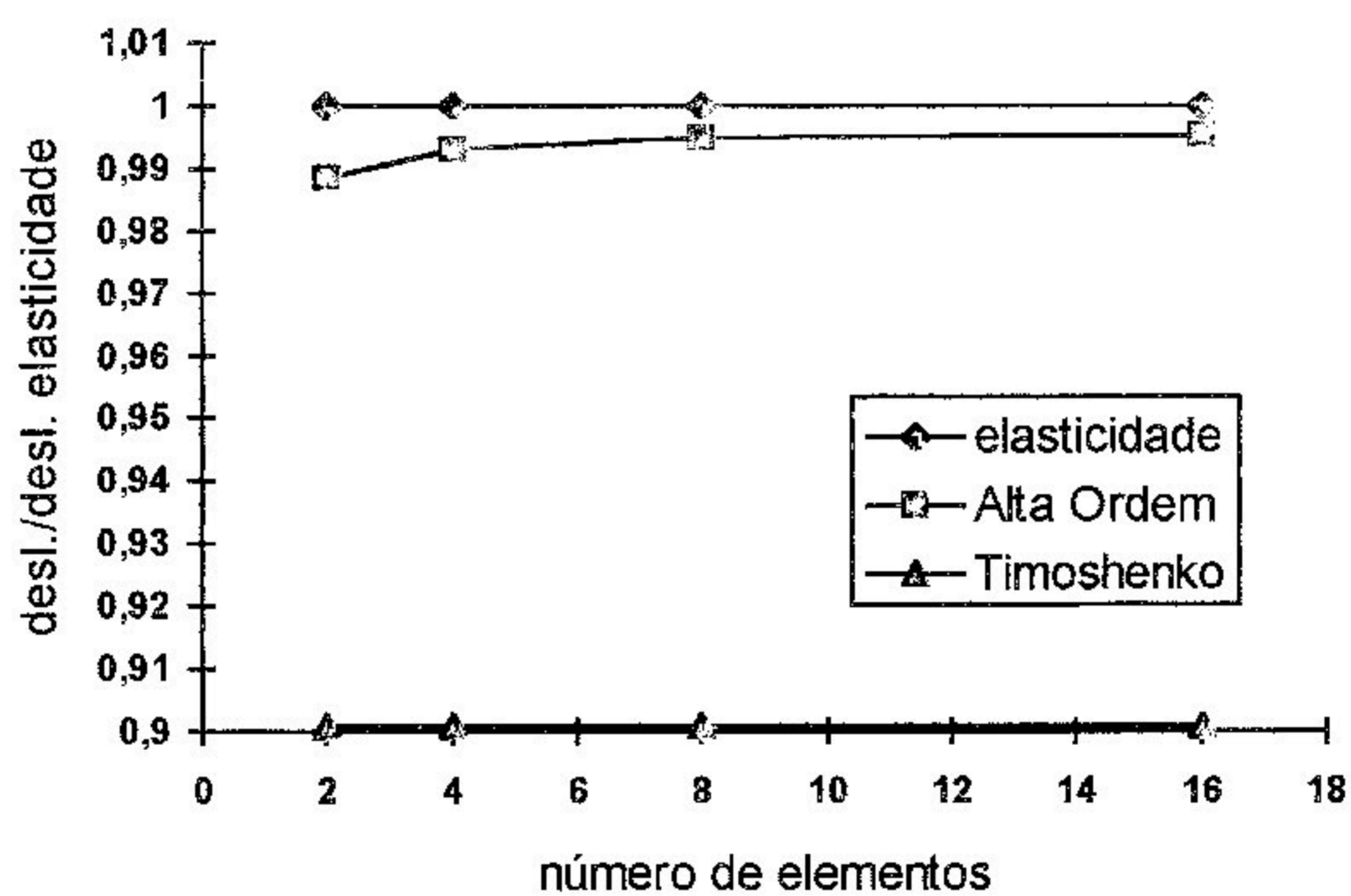


Fig. 4.5. Relação entre os Deslocamentos e Número de Elementos para ( $L/h = 10$ )

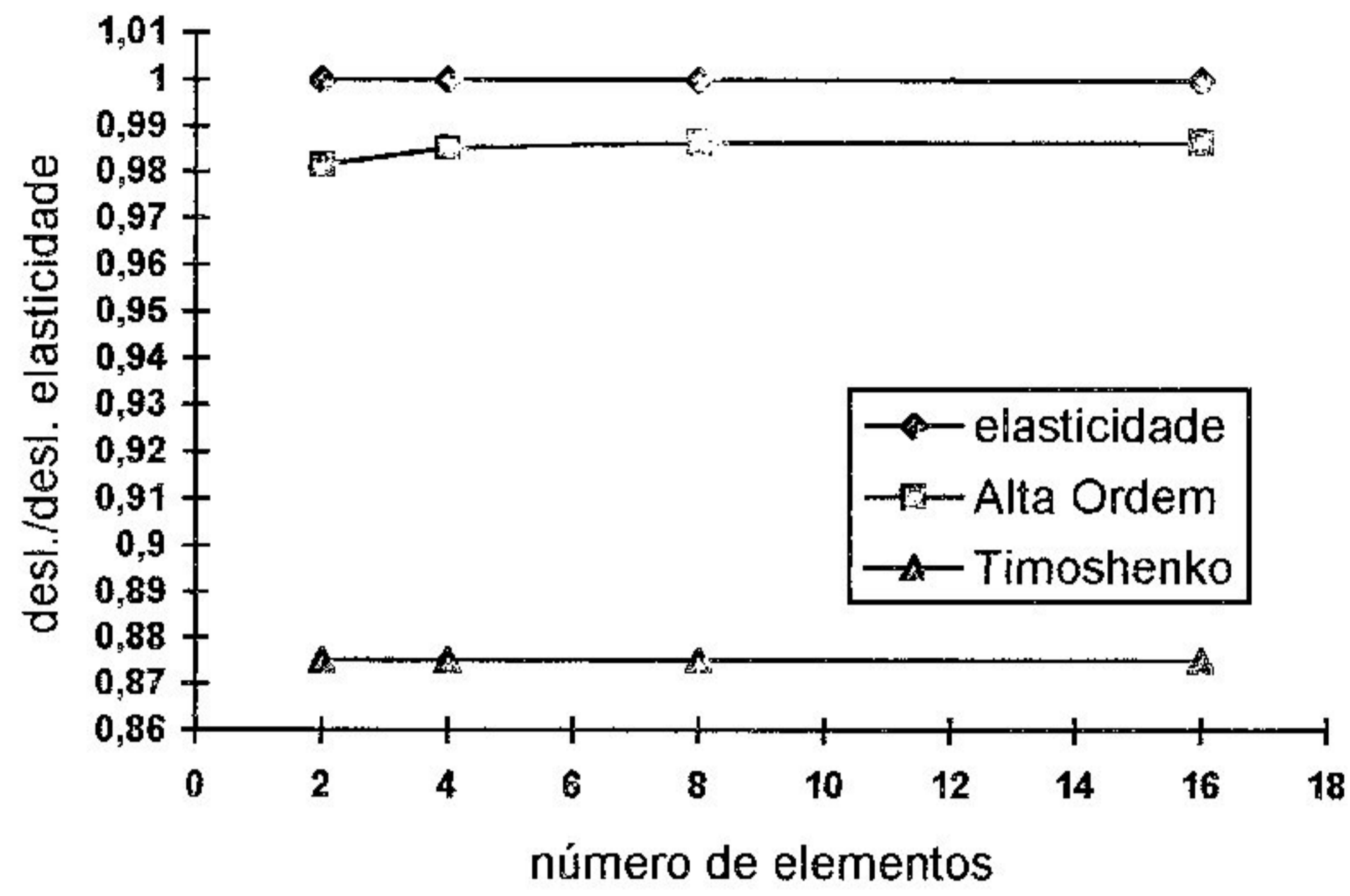


Fig. 4.6. Relação entre os Deslocamentos e Número de Elementos para ( $L/h = 5$ )

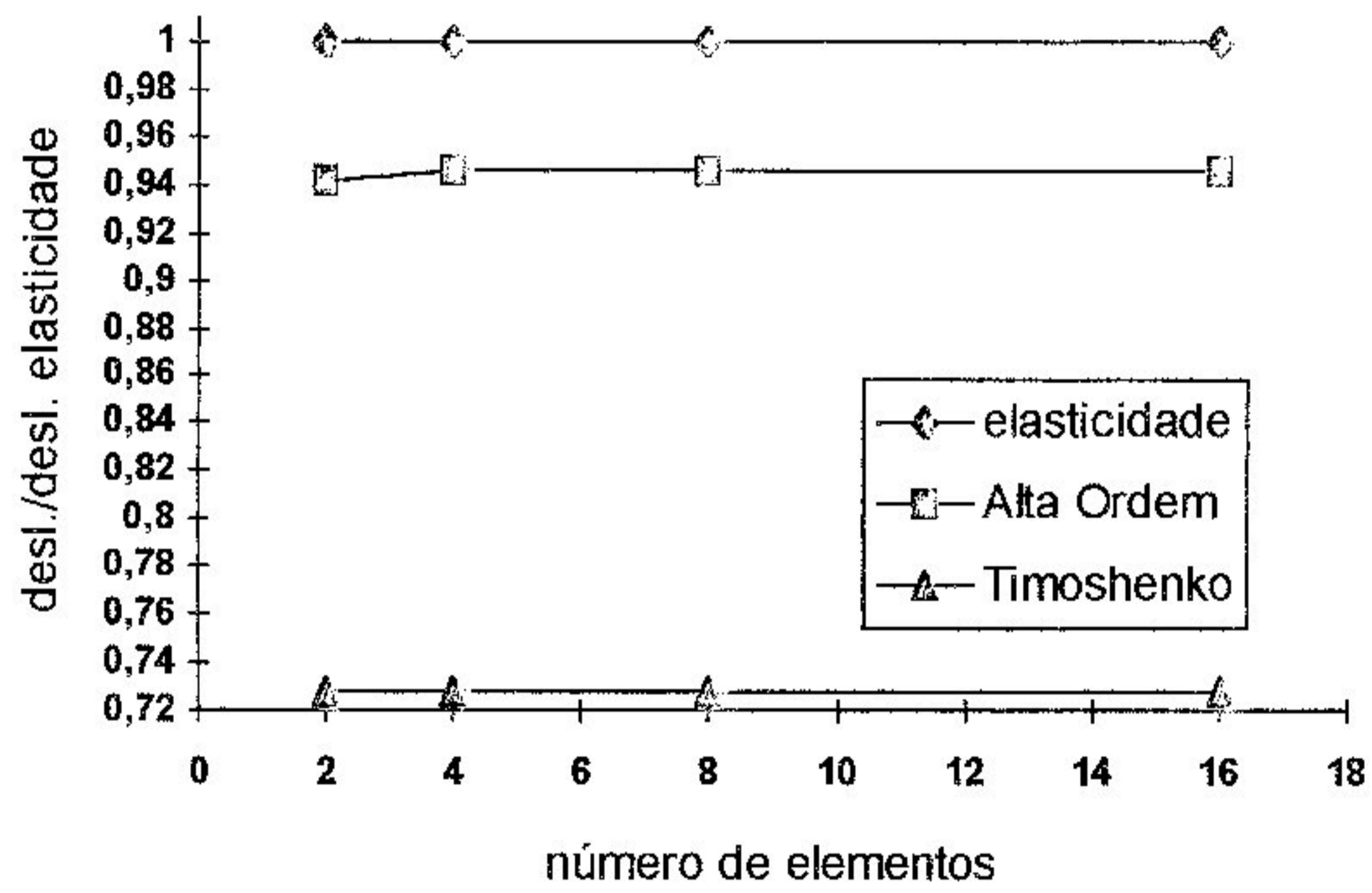


Fig. 4.7. Relação entre os Deslocamentos e Número de Elementos para ( $L/h = 2$ )



4.3.3.2. Resultados Obtidos para a Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{xz}$ )Tabela 4.2. Valores da Tensão de Cisalhamento na Seção de Engastamento,  $\tau_{xz}(0,z)$  [MPa], para  $L/h = 20$ 

		z/h	Alta Ordem	Timoshenko	Elasticidade
$\tau_{xz}$	2 elm	0,5	0	11,294	0
		0,25	10,456	11,294	11,25
		0	13,957	11,294	15
		-0,25	10,456	11,294	11,25
		-0,5	0	11,294	0
	4 elm	0,5	0	11,998	
		0,25	10,726	11,998	
		0	14,391	11,998	
		-0,25	10,726	11,998	
		-0,5	0	11,998	
	8 elm	0,5	0	12,00	
		0,25	10,766	12,00	
		0	14,592	12,00	
		-0,25	10,766	12,00	
		-0,5	0	12,00	
	16 elm	0,5	0	12,00	
		0,25	11,129	12,00	
		0	15,333	12,00	
		-0,25	11,129	12,00	
		-0,5	0	12,00	

A tensão de cisalhamento média obtida foi:

	Timoshenko	Alta ordem	Elasticidade
2 elementos	11,294	9,299	10,0
4 elementos	11,998	9,546	
8 elementos	12,00	9,601	
16 elementos	12,00	9,958	

Tabela 4.3. Valores da Tensão de Cisalhamento na Seção de Engastamento,  $\tau_{xz}(0,z)$  [MPa], para  $L/h = 10$

		$z/h$	Alta Ordem	Timoshenko	Elasticidade
$\tau_{xz}$	2 elm	0,5	0	5,648	0
		0,25	5,243	5,648	5,625
		0	7,015	5,648	7,5
		-0,25	5,243	5,648	5,625
		-0,5	0	5,648	0
	4 elm	0,5	0	5,99	
		0,25	5,352	5,99	
		0	7,249	5,99	
		-0,25	5,352	5,99	
		-0,5	0	5,99	
	8 elm	0,5	0	6,00	
		0,25	5,360	6,00	
		0	7,356	6,00	
		-0,25	5,360	6,00	
		-0,5	0	6,00	
	16 elm	0,5	0	6,00	
		0,25	5,497	6,00	
		0	7,675	6,00	
		-0,25	5,497	6,00	
		-0,5	0	6,00	

A tensão de cisalhamento média obtida foi:

	Timoshenko	Alta ordem	Elasticidade
2 elementos	5,648	4,668	5,0
4 elementos	5,99	4,773	
8 elementos	6,00	4,793	
16 elementos	6,00	4,932	

Tabela 4.4. Valores da Tensão de Cisalhamento na Seção de Engastamento,  $\tau_{xz}(0,z)$  [MPa], para  $L/h = 5$

		z/h	Alta Ordem	Timoshenko	Elasticidade
$\tau_{xz}$	2 elm	0,5	0	2,824	0
		0,25	2,609	2,824	2,812
		0	3,511	2,824	3,75
		-0,25	2,609	2,824	2,812
		-0,5	0	2,824	0
	4 elm	0,5	0	2,994	
		0,25	2,622	2,994	
		0	3,577	2,994	
		-0,25	2,622	2,994	
		-0,5	0	2,994	
	8 elm	0,5	0	3,00	
		0,25	2,646	3,00	
		0	3,612	3,00	
		-0,25	2,646	3,00	
		-0,5	0	3,00	
	16 elm	0,5	0	3,00	
		0,25	2,762	3,00	
		0	3,953	3,00	
		-0,25	2,762	3,00	
		-0,5	0	3,00	

A tensão de cisalhamento média obtida foi:

	Timoshenko	Alta ordem	Elasticidade
2 elementos	2,824	2,324	2,5
4 elementos	2,994	2,341	
8 elementos	3,00	2,363	
16 elementos	3,00	2,491	

Tabela 4.5. Valores da Tensão de Cisalhamento na Seção de Engastamento,  $\tau_{xz}(0,z)$  [MPa], para  $L/h = 2$

		$z/h$	Alta Ordem	Timoshenko	Elasticidade
$\tau_{xz}$	2 elm	0,5	0	1,130	0
		0,25	0,967	1,130	1,125
		0	1,283	1,130	1,5
		-0,25	0,967	1,130	1,125
		-0,5	0	1,130	0
	4 elm	0,5	0	1,198	
		0,25	1,006	1,198	
		0	1,325	1,198	
		-0,25	1,006	1,198	
		-0,5	0	1,198	
	8 elm	0,5	0	1,20	
		0,25	1,082	1,20	
		0	1,442	1,20	
		-0,25	1,082	1,20	
		-0,5	0	1,20	
	16 elm	0,5	0	1,20	
		0,25	1,106	1,20	
		0	1,542	1,20	
		-0,25	1,106	1,20	
		-0,5	0	1,20	

A tensão de cisalhamento média obtida foi:

	Timoshenko	Alta ordem	Elasticidade
2 elementos	1,130	0,859	1,0
4 elementos	1,198	0,892	
8 elementos	1,20	0,962	
16 elementos	1,20	0,992	

## 4.3.3.3. Resultados Obtidos para as Frequências Naturais

Tabela 4.6. Valores das Frequências Naturais para  $L/h = 20$ .

		Alta Ordem	Timoshenko	Euler Bernoulli
f <sub>1</sub> (Hz)	2 elm	42,373	44,217	42,181
	4 elm	42,228	44,198	
	8 elm	42,165	44,196	
	16 elm	42,138	44,196	
f <sub>2</sub> (Hz)	2 elm	264,007	278,498	264,289
	4 elm	261,771	276,494	
	8 elm	261,266	276,197	
	16 elm	261,106	-	
f <sub>3</sub> (Hz)	2 elm	835,684	776,373	740,200
	4 elm	722,303	753,139	
	8 elm	718,857	741,923	
	16 elm	718,391	736,424	

Tabela 4.7. Valores das Frequências Naturais para  $L/h = 10$ .

		Alta Ordem	Timoshenko	Euler Bernoulli
f <sub>1</sub> (Hz)	2 elm	84,237	88,306	84,361
	4 elm	83,976	88,267	
	8 elm	83,871	88,264	
	16 elm	83,837	88,270	
f <sub>2</sub> (Hz)	2 elm	507,679	551,354	528,577
	4 elm	504,071	547,486	
	8 elm	503,416	546,911	
	16 elm	503,256	-	
f <sub>3</sub> (Hz)	2 elm	1451,105	-	1480,400
	4 elm	1329,870	1515,206	
	8 elm	1326,709	1504,997	
	16 elm	1326,474	-	

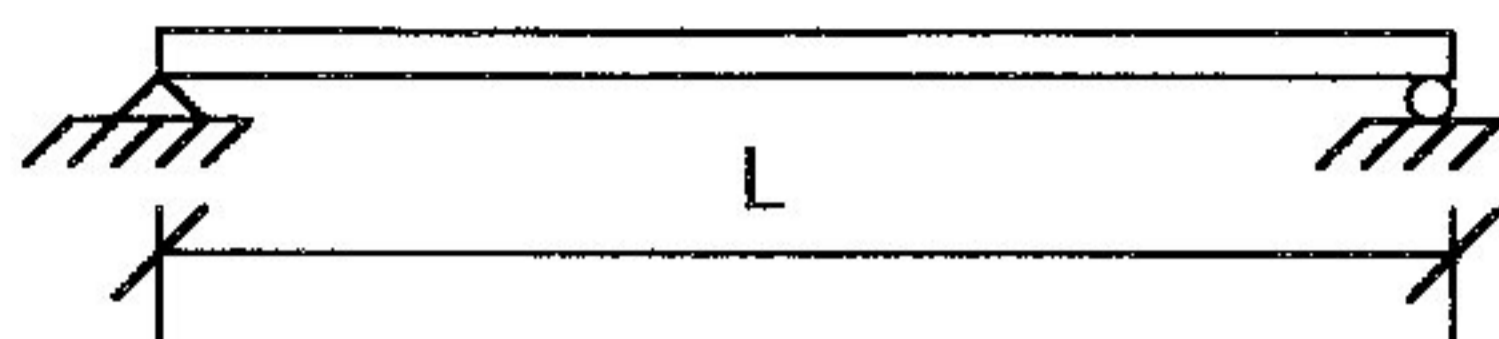
Tabela 4.8. Valores das Frequências Naturais para  $L/h = 5$ .

		Alta Ordem	Timoshenko	Euler Bernoulli
f <sub>1</sub> (Hz)	2 elm	164,767	175,596	168,722
	4 elm	164,361	175,520	
	8 elm	164,237	175,522	
	20 elm	164,213	175,760	
f <sub>2</sub> (Hz)	2 elm	893,256	776,373	1057,154
	4 elm	889,202	753,139	
	8 elm	888,733	741,923	
	16 elm	888,629	736,424	
f <sub>3</sub> (Hz)	2 elm	2197,249	-	2960,800
	4 elm	2125,073	2259,328	
	8 elm	2124,488	2225,651	
	16 elm	2124,304	2209,253	

Tabela 4.9. Valores das Frequências Naturais para  $L/h = 2$ .

		Alta Ordem	Timoshenko	Euler Bernoulli
f <sub>1</sub> (Hz)	2 elm	363,036	422,250	421,806
	4 elm	362,667	422,099	
	8 elm	362,576	422,106	
	16 elm	362,567	422,095	
f <sub>2</sub> (Hz)	2 elm	1388,532	776,372	2642,885
	4 elm	1385,413	753,139	
	8 elm	1385,119	741,923	
	16 elm	1385,055	736,424	
f <sub>3</sub> (Hz)	2 elm	2908,612	-	7401,998
	4 elm	2906,319	2259,328	
	8 elm	2905,358	2225,651	
	16 elm	-	2209,252	

#### 4.3.4. Resultados Obtidos para Viga Bi apoiada



##### 4.3.4.1. Resultados Obtidos para os Deslocamentos no Centro da Viga

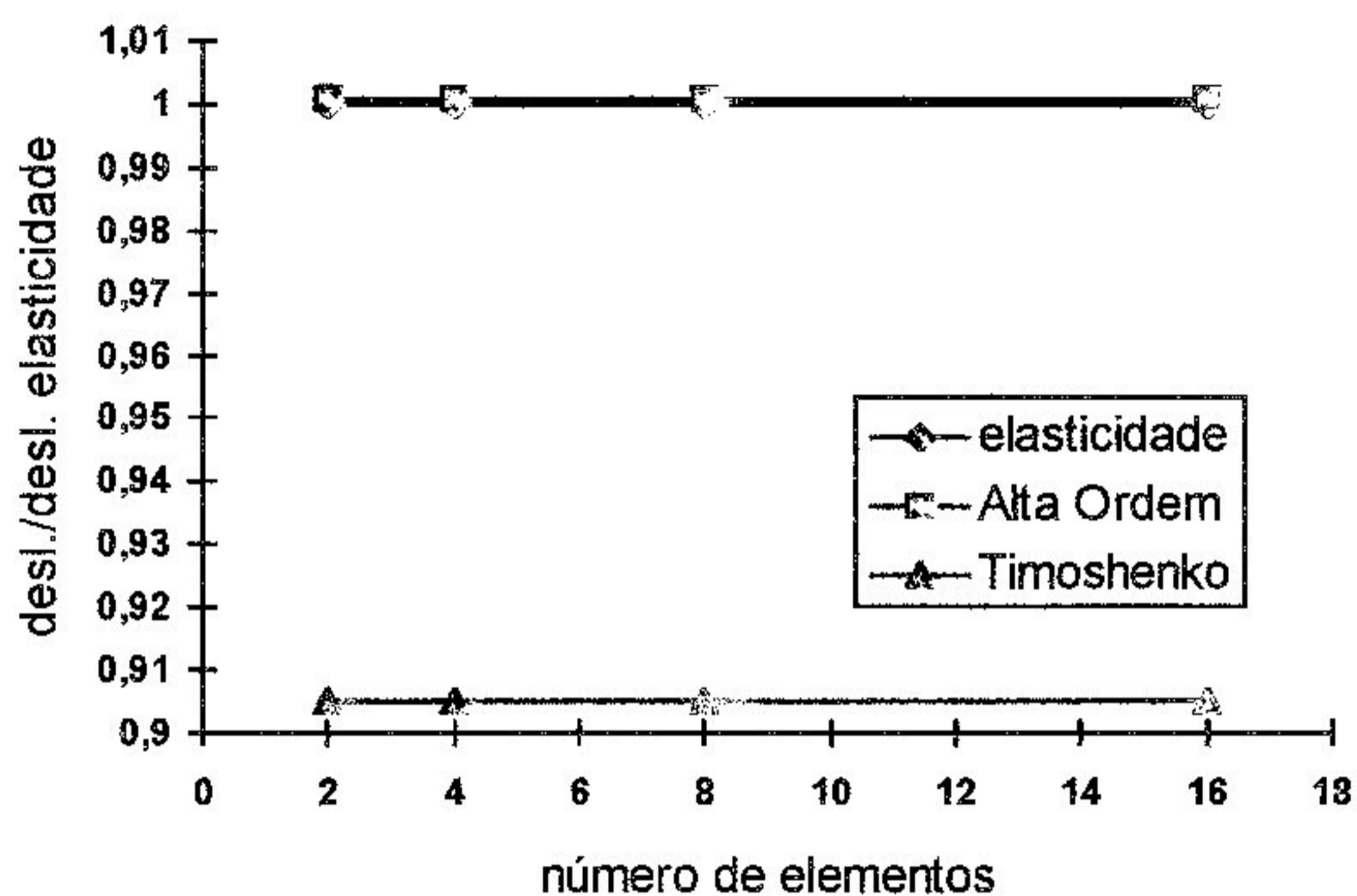


Fig. 4.8. Relação entre os Deslocamentos e Número de Elementos para ( $L/h = 21$ )

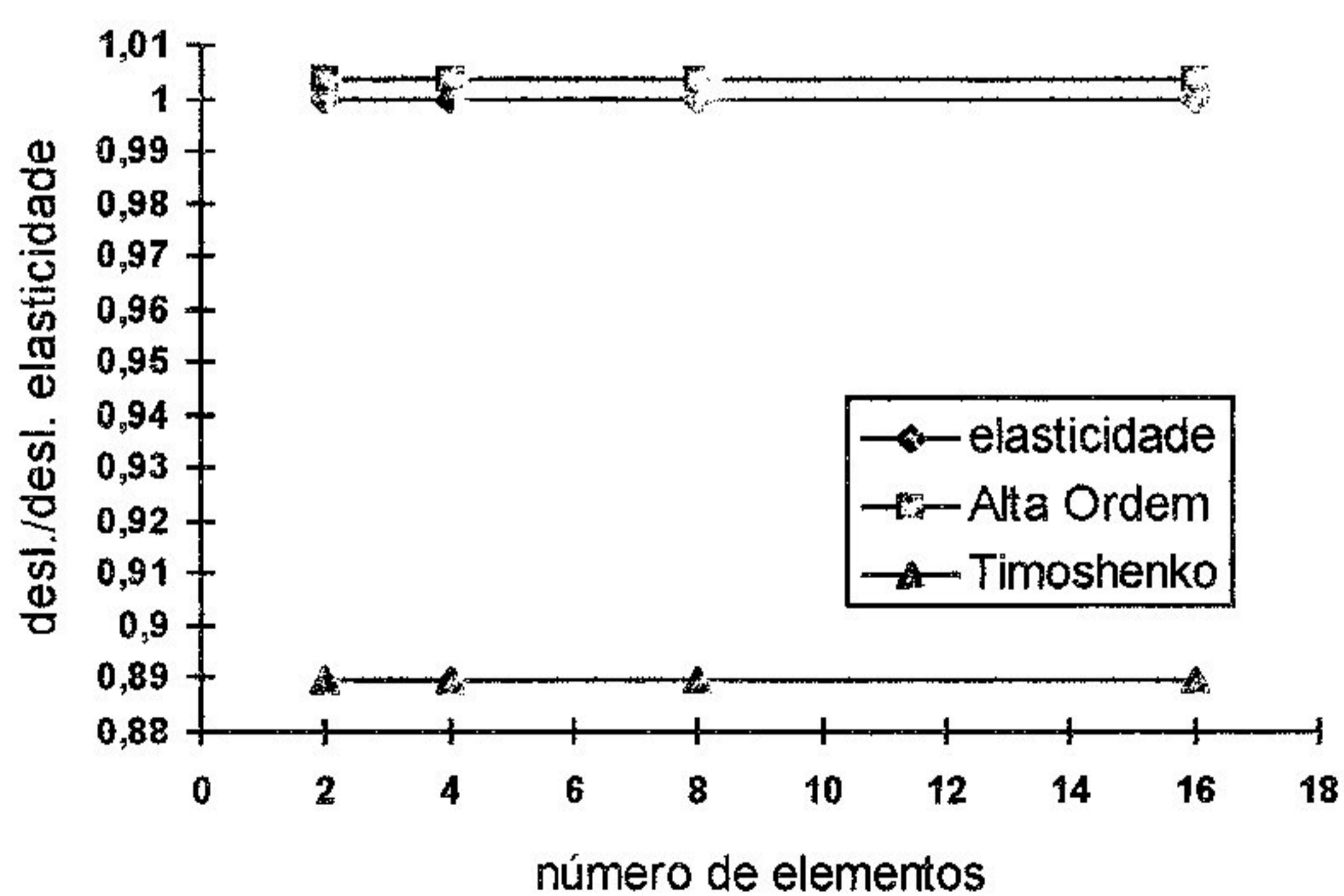


Fig. 4.9. Relação entre os Deslocamentos e Número de Elementos para ( $L/h = 10$ )

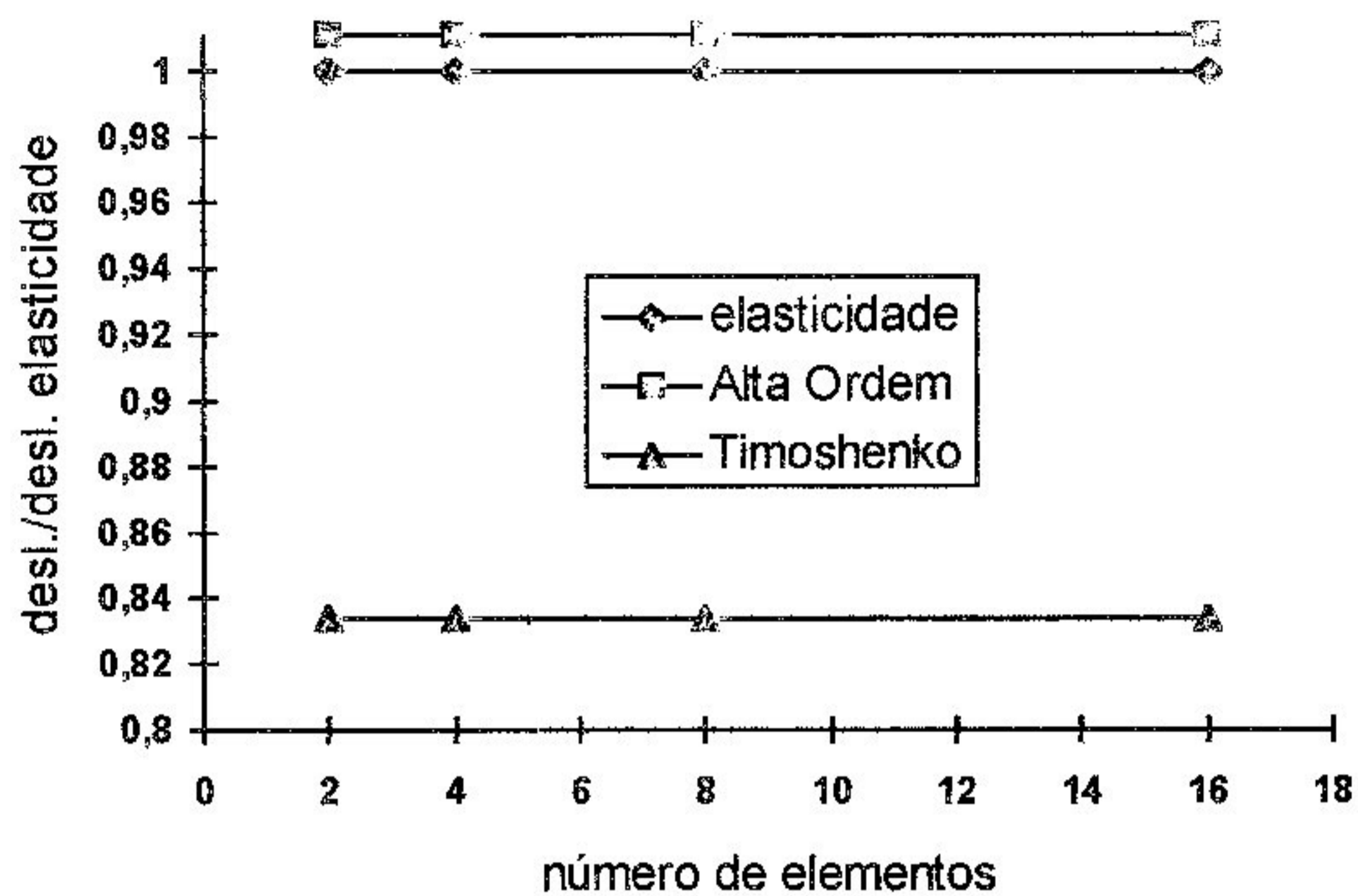


Fig. 4.10. Relação entre os Deslocamentos e Número de Elementos para ( $L/h = 5$ )

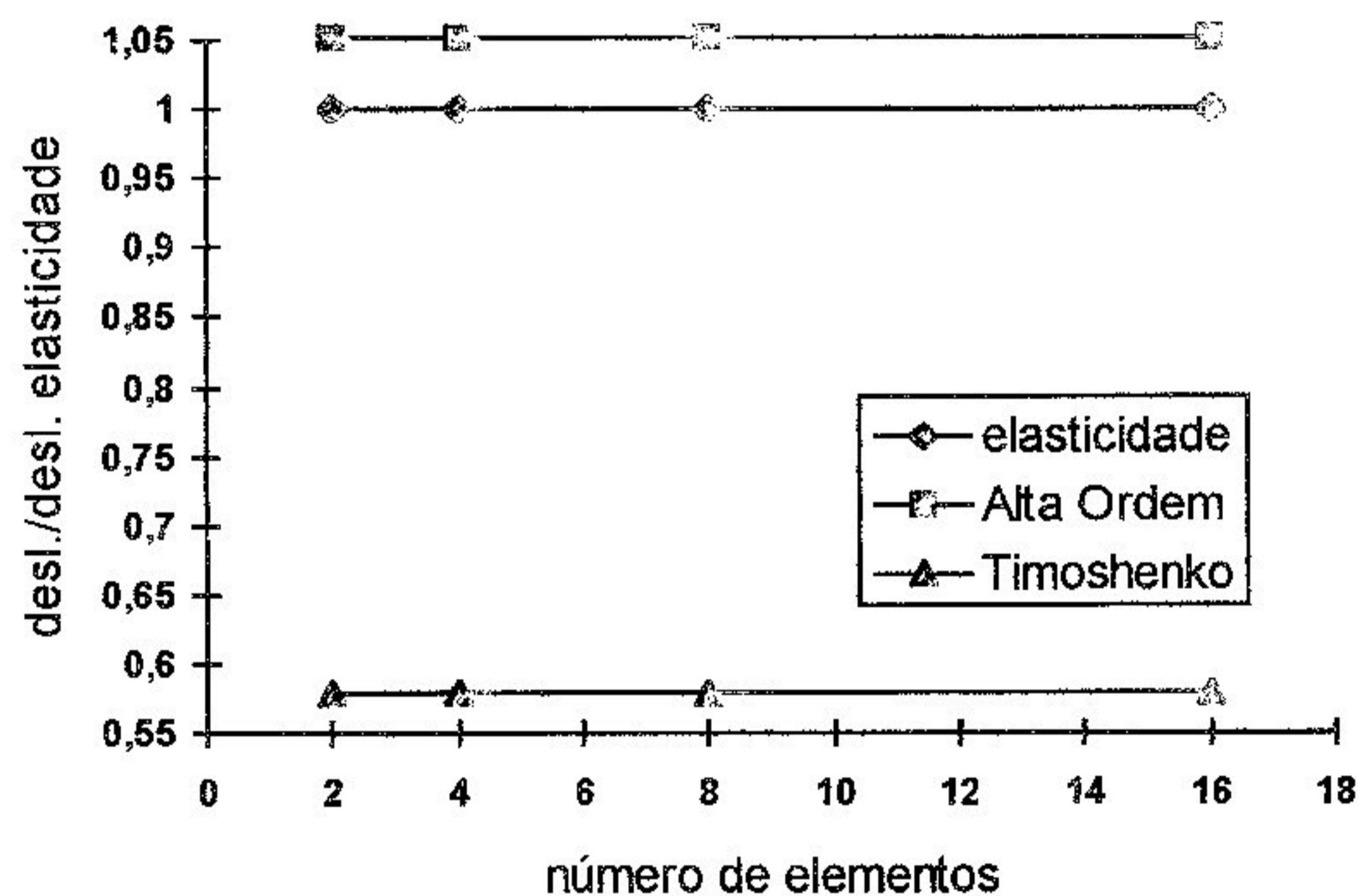


Fig. 4.11. Relação entre os Deslocamentos e Número de Elementos para ( $L/h = 2$ )



4.3.4.2. Resultados Obtidos da Tensão de Cisalhamento  $\tau_{xz}(0,z)$ Tabela 4.10. Valores da Tensão de Cisalhamento [MPa], para  $L/h = 20$ 

		$z/h$	Alta Ordem	Timoshenko	Elasticidade
$\tau_{xz}(0,z)$	2 elm	0,5	0	6,0	0
		0,25	3,335	6,0	5,625
		0	4,499	6,0	7,5
		-0,25	3,335	6,0	5,625
		-0,5	0	6,0	0
	4 elm	0,5	0	6,0	
		0,25	4,989	6,0	
		0	6,708	6,0	
		-0,25	4,989	6,0	
		-0,5	0	6,0	
	8 elm	0,5	0	6,0	
		0,25	5,540	6,0	
		0	7,439	6,0	
		-0,25	5,540	6,0	
		-0,5	0	6,0	
	16 elm	0,5	0	6,0	
		0,25	5,741	6,0	
		0	7,798	6,0	
		-0,25	5,741	6,0	
		-0,5	0	6,0	

A tensão de cisalhamento média obtida foi:

	Timoshenko	Alta ordem	Elasticidade
2 elementos	6,0	2,971	5,0
4 elementos	6,0	4,442	
8 elementos	6,0	4,932	
16 elementos	6,0	5,122	

Tabela 4.11. Valores da Tensão de Cisalhamento [MPa], para  $L/h = 10$ 

		$z/h$	Alta Ordem	Timoshenko	Elasticidade
$\tau_{xz}(0,z)$	2 elm	0,5	0	3,0	0
		0,25	2,162	3,0	2,813
		0	2,925	3,0	3,75
		-0,25	2,162	3,0	2,813
		-0,5	0	3,0	0
	4 elm	0,5	0	3,0	
		0,25	2,694	3,0	
		0	3,607	3,0	
		-0,25	2,694	3,0	
		-0,5	0	3,0	
	8 elm	0,5	0	3,0	
		0,25	2,843	3,0	
		0	3,826	3,0	
		-0,25	2,843	3,0	
		-0,5	0	3,0	
	16 elm	0,5	0	3,0	
		0,25	2,881	3,0	
		0	3,960	3,0	
		-0,25	2,881	3,0	
		-0,5	0	3,0	

A tensão de cisalhamento média obtida foi:

	Timoshenko	Alta ordem	Elasticidade
2 elementos	3,0	1,928	2,5
4 elementos	3,0	2,399	
8 elementos	3,0	2,532	
16 elementos	3,0	2,576	

Tabela 4.12. Valores da Tensão de Cisalhamento [MPa], para  $L/h = 5$ 

		$z/h$	Alta Ordem	Timoshenko	Elasticidade
$\tau_{xz}(0,z)$	2 elm	0,5	0	1,5	0
		0,25	1,269	1,5	1,406
		0	1,688	1,5	1,875
		-0,25	1,269	1,5	1,406
		-0,5	0	1,5	0
	4 elm	0,5	0	1,5	
		0,25	1,394	1,5	
		0	1,840	1,5	
		-0,25	1,394	1,5	
		-0,5	0	1,5	
	8 elm	0,5	0	1,5	
		0,25	1,423	1,5	
		0	1,918	1,5	
		-0,25	1,423	1,5	
		-0,5	0	1,5	
	16 elm	0,5	0	1,5	
		0,25	1,401	1,5	
		0	1,936	1,5	
		-0,25	1,401	1,5	
		-0,5	0	1,5	

A tensão de cisalhamento média obtida foi:

	Timoshenko	Alta ordem	Elasticidade
2 elementos	1,5	1,127	1,25
4 elementos	1,5	1,236	
8 elementos	1,5	1,268	
16 elementos	1,5	1,255	

Tabela 4.13. Valores da Tensão de Cisalhamento [MPa], para  $L/h = 2$ 

		$z/h$	Alta Ordem	Timoshenko	Elasticidade
$\tau_{xz}(0,z)$	2 elm	0,5	0	0,6	0
		0,25	0,536	0,6	0,563
		0	0,662	0,6	0,75
		-0,25	0,536	0,6	0,563
		-0,5	0	0,6	0
	4 elm	0,5	0	0,6	
		0,25	0,549	0,6	
		0	0,705	0,6	
		-0,25	0,549	0,6	
		-0,5	0	0,6	
	8 elm	0,5	0	0,6	
		0,25	0,546	0,6	
		0	0,736	0,6	
		-0,25	0,546	0,6	
		-0,5	0	0,6	
	16 elm	0,5	0	0,6	
		0,25	0,549	0,6	
		0	0,762	0,6	
		-0,25	0,549	0,6	
		-0,5	0	0,6	

A tensão de cisalhamento média obtida foi:

	Timoshenko	Alta ordem	Elasticidade
2 elementos	0,6	0,469	0,5
4 elementos	0,6	0,485	
8 elementos	0,6	0,486	
16 elementos	0,6	0,492	

## 4.3.4.3. Resultados Obtidos para as Frequências Naturais

Tabela 4.14. Valores das Frequências Naturais para  $L/h = 20$ 

		Alta Ordem	Timoshenko	Euler Bernoulli
$f_1$ (Hz)	2 elm	118,277	124,482	118,403
	4 elm	117,938	124,025	
	8 elm	117,925	123,995	
	16 elm	117,925	123,993	
$f_2$ (Hz)	2 elm	503,994	548,772	473,613
	4 elm	466,926	496,403	
	8 elm	466,141	494,580	
	16 elm	466,136	-	
$f_3$ (Hz)	2 elm	1226,258	1371,717	1065,630
	4 elm	1037,609	1127,082	
	8 elm	1029,220	1108,311	
	16 elm	1029,119	-	

Tabela 4.15. Valores das Frequências Naturais para  $L/h = 10$ .

		Alta Ordem	Timoshenko	Euler Bernoulli
$f_1$ (Hz)	2 elm	233,463	248,201	236,807
	4 elm	233,071	247,290	
	8 elm	233,068	247,230	
	16 elm	233,071	247,226	
$f_2$ (Hz)	2 elm	931,937	1084,185	947,226
	4 elm	892,561	980,871	
	8 elm	892,124	977,275	
	16 elm	892,253	-	
$f_3$ (Hz)	2 elm	2114,085	1462,191	2131,258
	4 elm	1889,450	1462,005	
	8 elm	1342,0470	1462,001	
	16 elm	1341,880	1462,001	

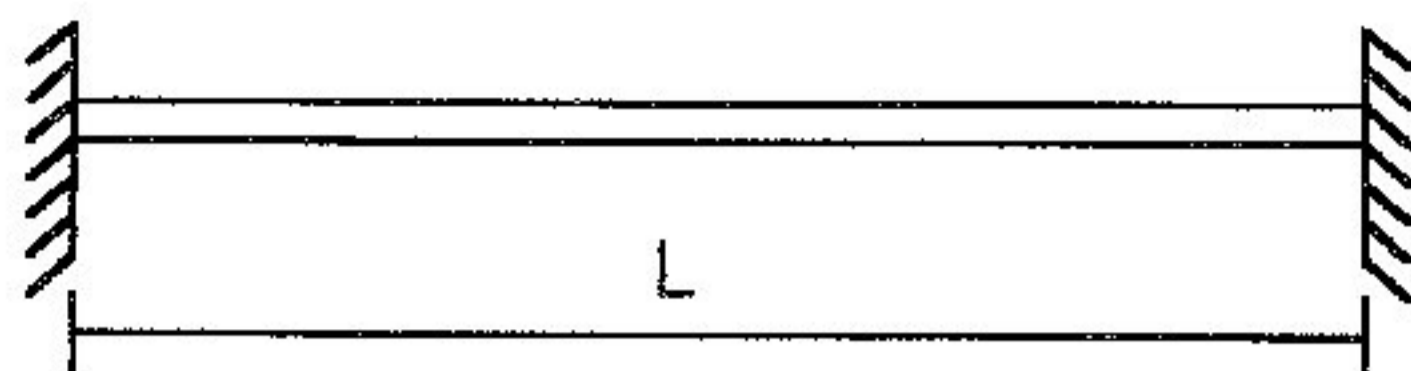
Tabela 4.16. Valores das Frequências Naturais para  $L/h = 5$ 

		Alta Ordem	Timoshenko	Euler Bernoulli
$f_1$ (Hz)	2 elm	446,280	490,436	473,613
	4 elm	446,062	488,637	
	8 elm	446,127	488,519	
	16 elm	446,157	488,511	
$f_2$ (Hz)	2 elm	1576,852	1462,191	1894,452
	4 elm	1553,742	1462,005	
	8 elm	-	1462,001	
	16 elm	-	1462,001	
$f_3$ (Hz)	2 elm	3176,813	2943,254	4262,516
	4 elm	2981,956	2924,382	
	8 elm	-	2924,001	
	16 elm	-	2924,001	

Tabela 4.17. Valores das Frequências Naturais para  $L/h = 2$ 

		Alta Ordem	Timoshenko	Euler Bernoulli
$f_1$ (Hz)	2 elm	898,470	1134,841	1184,032
	4 elm	898,403	1130,709	
	8 elm	898,095	1130,435	
	16 elm	897,159	1130,418	
$f_2$ (Hz)	2 elm	1302,726	1462,191	4736,129
	4 elm	1302,460	1462,005	
	8 elm	-	1462,001	
	16 elm	-	1462,001	
$f_3$ (Hz)	2 elm	2468,700	2943,254	10656,300
	4 elm	2467,959	2924,382	
	8 elm	2464,271	2924,011	
	16 elm	2448,502	2924,001	

## 4.3.5. Resultados Obtidos para Viga Bi-engastada

Tabela 4.18. Valores das Frequências Naturais para  $L/h = 20$ 

		Alta Ordem	Timoshenko	Euler Bernoulli
$f_1$ (Hz)	2 elm	270,042	285,543	268,402
	4 elm	265,769	281,380	
	8 elm	264,859	281,031	
	16 elm	264,534	281,008	
$f_2$ (Hz)	2 elm	878,931	1024,965	739,933
	4 elm	719,968	779,021	
	8 elm	715,193	772,391	
	16 elm	714,308	771,938	
$f_3$ (Hz)	2 elm	-	-	1445,389
	4 elm	1384,010	1536,545	
	8 elm	1365,991	1506,279	
	16 elm	1364,064	1483,846	

Tabela 4.19. Valores das Frequências Naturais para  $L/h = 10$ 

		Alta Ordem	Timoshenko	Euler Bernoulli
$f_1$ (Hz)	2 elm	513,777	568,801	536,804
	4 elm	507,507	560,612	
	8 elm	506,263	559,918	
	16 elm	505,919	559,876	
$f_2$ (Hz)	2 elm	1452,831	1672,941	1479,866
	4 elm	1305,081	1536,156	
	8 elm	1300,615	1506,279	
	16 elm	1299,911	1483,846	
$f_3$ (Hz)	2 elm	2628,067	-	2890,778
	4 elm	2372,740	3108,994	
	8 elm	2356,266	3012,242	
	16 elm	2355,484	2967,621	

Tabela 4.20. Valores das Frequências Naturais para  $L/h = 5$ 

		Alta Ordem	Timoshenko	Euler Bernoulli
$f_1$ (Hz)	2 elm	881,756	1119,845	1073,609
	4 elm	875,934	1104,512	
	8 elm	874,902	1103,176	
	16 elm	874,632	1103,070	
$f_2$ (Hz)	2 elm	2079,272	1672,941	2959,736
	4 elm	2014,295	1553,125	
	8 elm	2012,469	1506,279	
	16 elm	2011,977	1483,846	
$f_3$ (Hz)	2 elm	3725,232	-	5781,561
	4 elm	3371,761	3108,994	
	8 elm	3364,850	3012,238	
	16 elm	3364,718	2967,621	

Tabela 4.21. Valores das Frequências Naturais para  $L/h = 2$ .

		Alta Ordem	Timoshenko	Euler Bernoulli
$f_1$ (Hz)	2 elm	1330,875	1672,941	2684,022
	4 elm	1328,104	1553,125	
	8 elm	1327,272	1506,279	
	16 elm	1327,352	1483,846	
$f_2$ (Hz)	2 elm	2609,422	2537,966	7399,338
	4 elm	2605,693	2512,411	
	8 elm	2603,801	2509,548	
	16 elm	2603,847	2509,059	
$f_3$ (Hz)	2 elm	4288,493	-	14453,901
	4 elm	4173,716	3108,994	
	8 elm	4172,528	3012,238	
	16 elm	4167,805	2967,621	



#### 4.3.6. Análise dos Resultados

Os valores das frequências naturais extraídas a partir dos elementos formulados pela teoria de alta ordem estão próximos dos obtidos pela teoria de Timoshenko. Pelos resultados, observa-se que para vigas com relação  $L/h < 21$  a teoria clássica apresenta valores para as frequências naturais, acima do esperado, por desprezar a energia de cisalhamento transversal. Para  $L/h \leq 5$ , a teoria de alta ordem resulta em valores de frequências naturais bastante inferiores aos obtidos pela teoria de viga de Timoshenko. Para vigas com relação  $L/h \geq 21$ , observa-se que os valores obtidos, para as frequências naturais, pelo método dos elementos finitos, converge para os valores obtidos pela teoria clássica de vigas.

Os resultados obtidos, utilizando o elemento de alta ordem, na determinação das tensões de cisalhamento converge para os valores obtidos pela teoria da elasticidade. Entretanto, a solução usando o elemento de viga de Timoshenko gera valores médios de cisalhamento na seção transversal.

#### 4.4. Análise Estática de Vigas Ortotrópicas

Nesse exemplo, são considerados lâminas de fibras unidimensionais de material composto, com as seguintes propriedades:

$$E_{11} = 172,375 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 6,895 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 3,4475 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,25$$

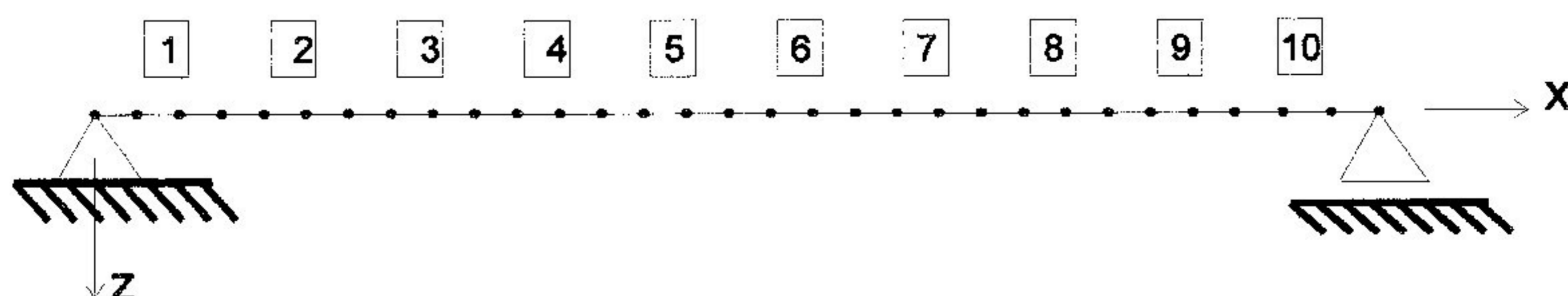


Fig. 4.12. Modelo de Elementos Finitos

#### 4.4.1. Freqüências Naturais pela Teoria Clássica de Laminados, JONES (1975)

Para laminados especialmente ortotrópicos, as freqüências naturais, para placas bi-apoiadas, são descritas pela seguinte equação diferencial:

$$D_{11}\delta w_{,xxxx} + 2(D_{12} + 2D_{66})\delta w_{,xxyy} + D_{22}\delta w_{,yyyy} + \rho\delta w_{,tt} = 0$$

$$\text{Onde: } D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (Q_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

As condições de contorno são:

$$x = 0, a \Rightarrow \delta w = 0 \quad \delta M_x = -D_{11}\delta w_{,xx} - D_{12}\delta w_{,yy} = 0$$

$$x = 0, b \Rightarrow \delta w = 0 \quad \delta M_y = -D_{12}\delta w_{,xx} - D_{22}\delta w_{,yy} = 0$$

As equações diferenciais e as condições de contorno são satisfeitas, utilizando:

$$\delta w(x, y) = \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

Tem-se:

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{\rho} \left[ D_{11} \left( \frac{m}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{m}{a} \right)^2 \left( \frac{n}{b} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{n}{b} \right)^4 \right]$$

#### 4.4.2. Viga com uma Lâmina com Fibras Orientadas Longitudinalmente

Os resultados obtidos, para os deslocamentos máximos e as tensões, encontram-se nos gráficos a seguir:

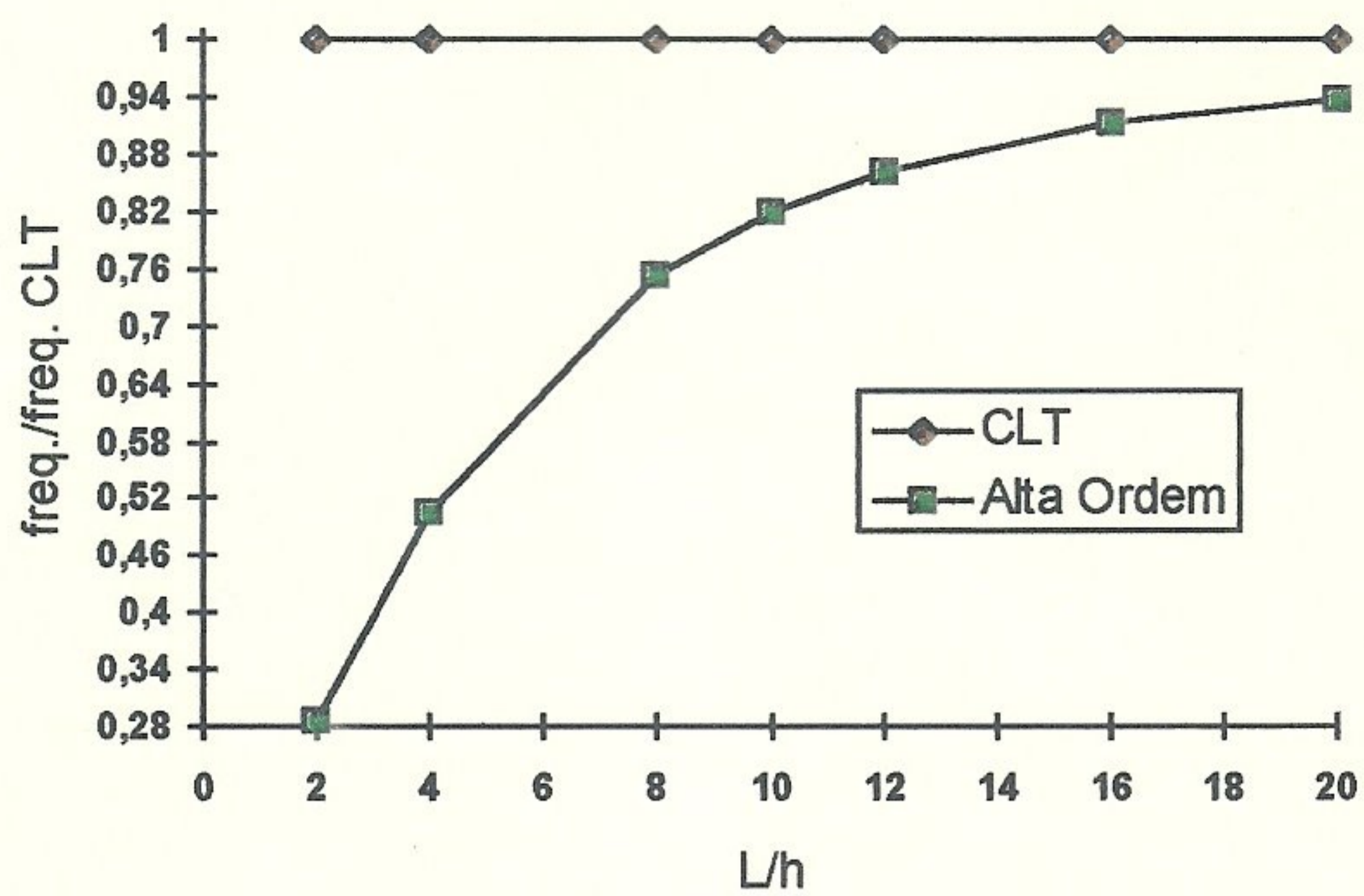
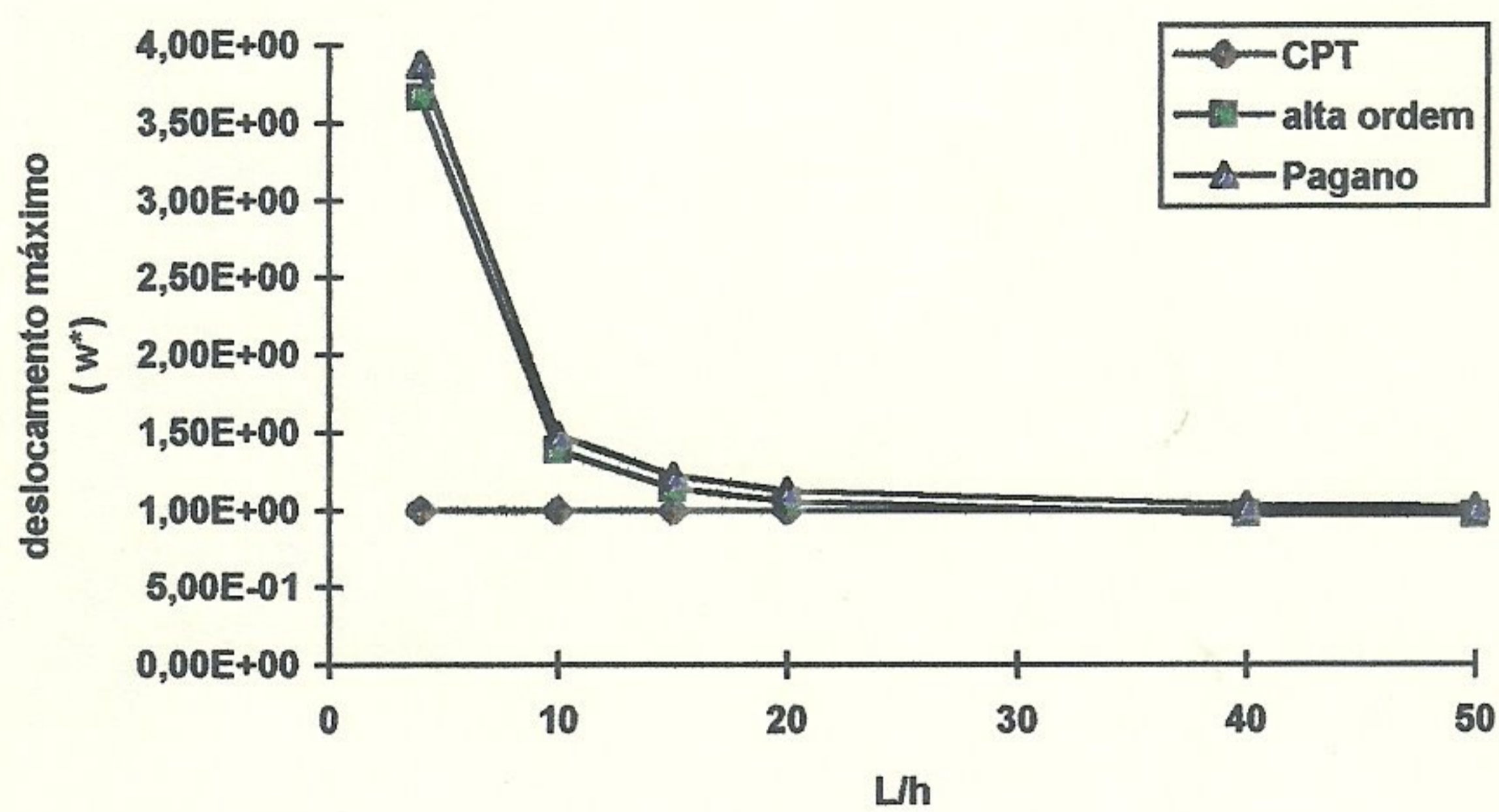


Fig. 4.12. Frequência Natural versus Razão L/h



Nota:  $w^* = w/w_{CPT}$

Fig. 4.13. Deslocamento Máximo versus Razão L/h

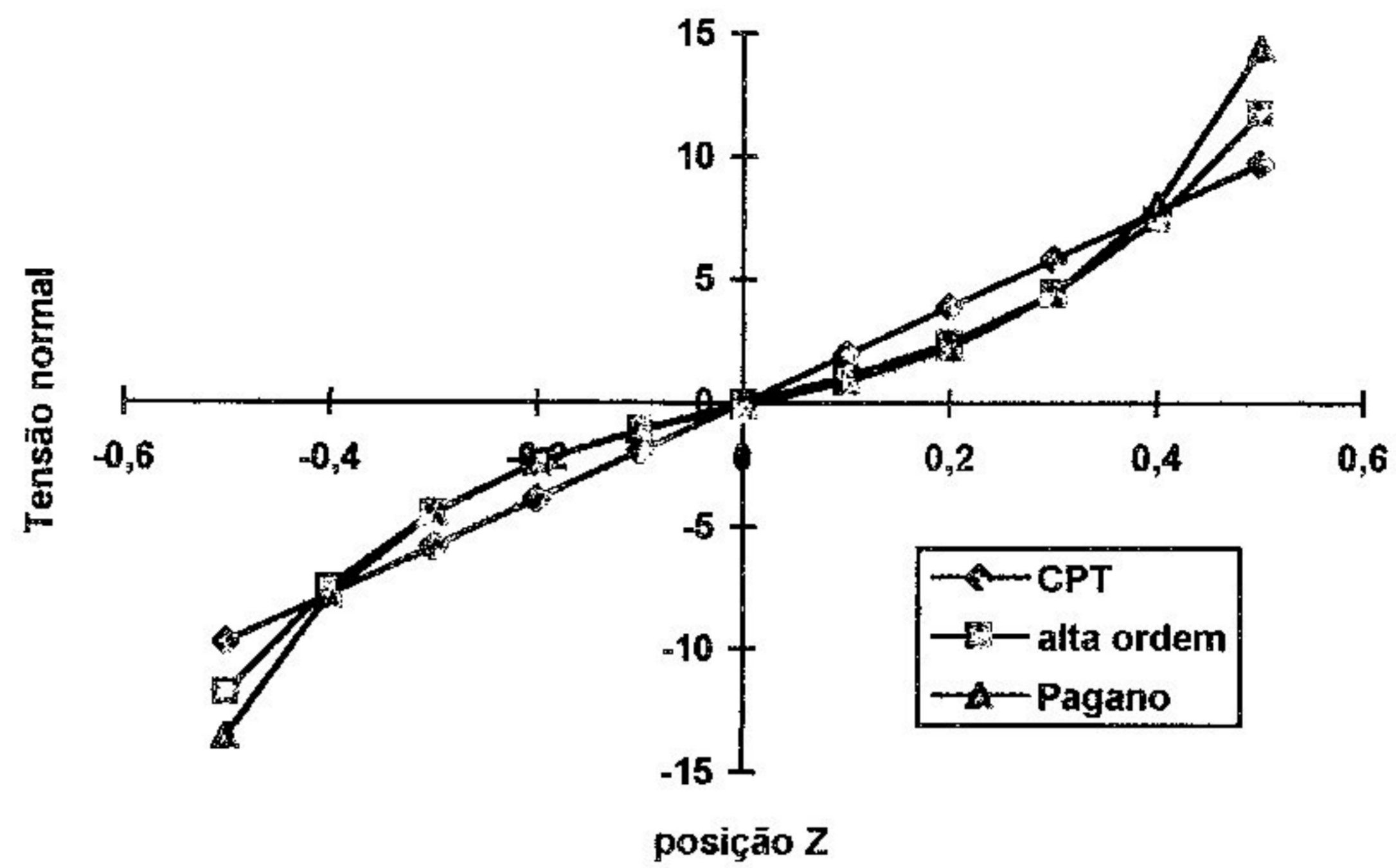


Fig. 4.14. Tensão Normal  $\sigma_x(L/2, z)$  versus Posição Z (espessura), para  $L/h = 4$

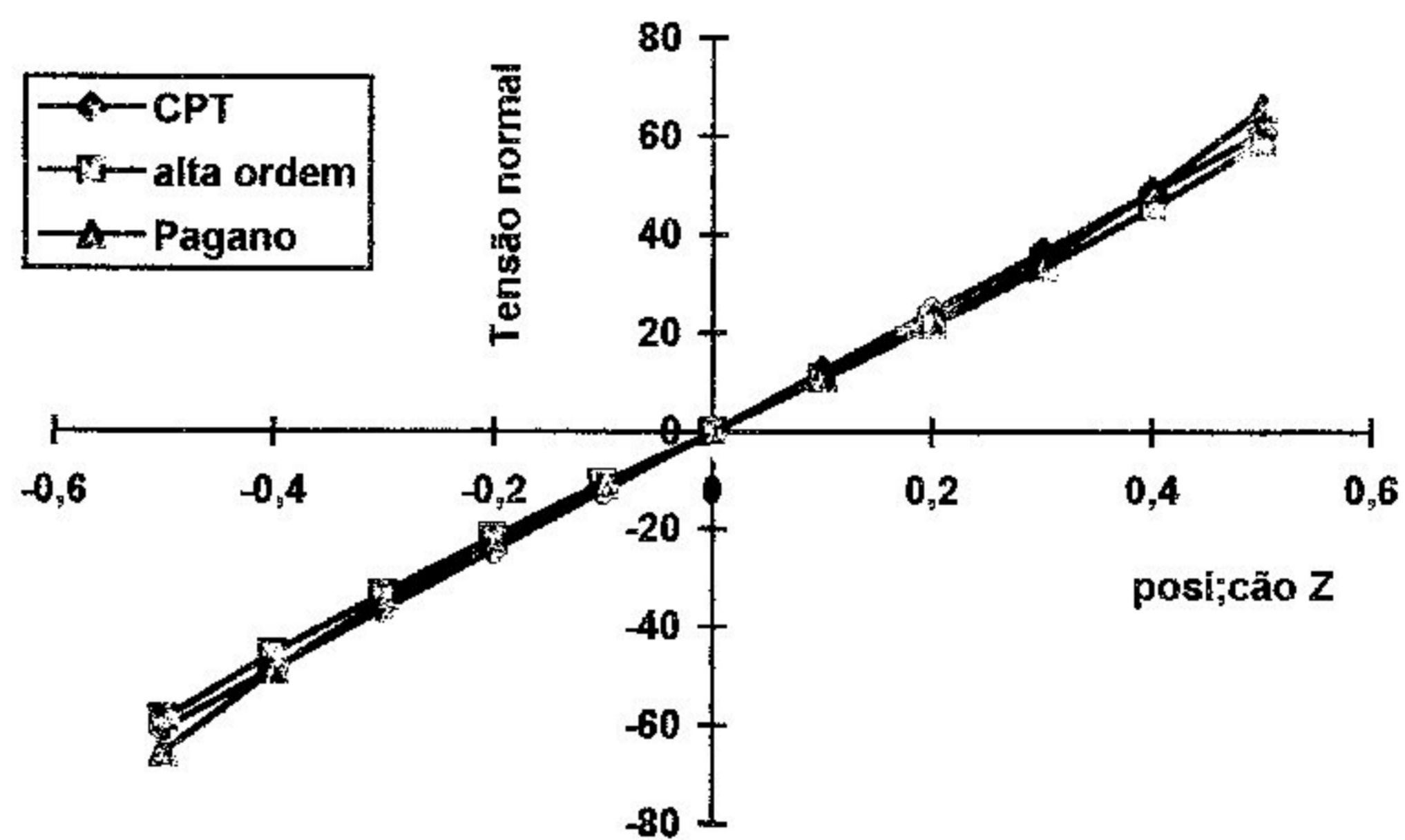


Fig. 4.15. Tensão Normal  $\sigma_x(L/2, z)$  versus Posição Z (espessura), para  $L/h = 10$

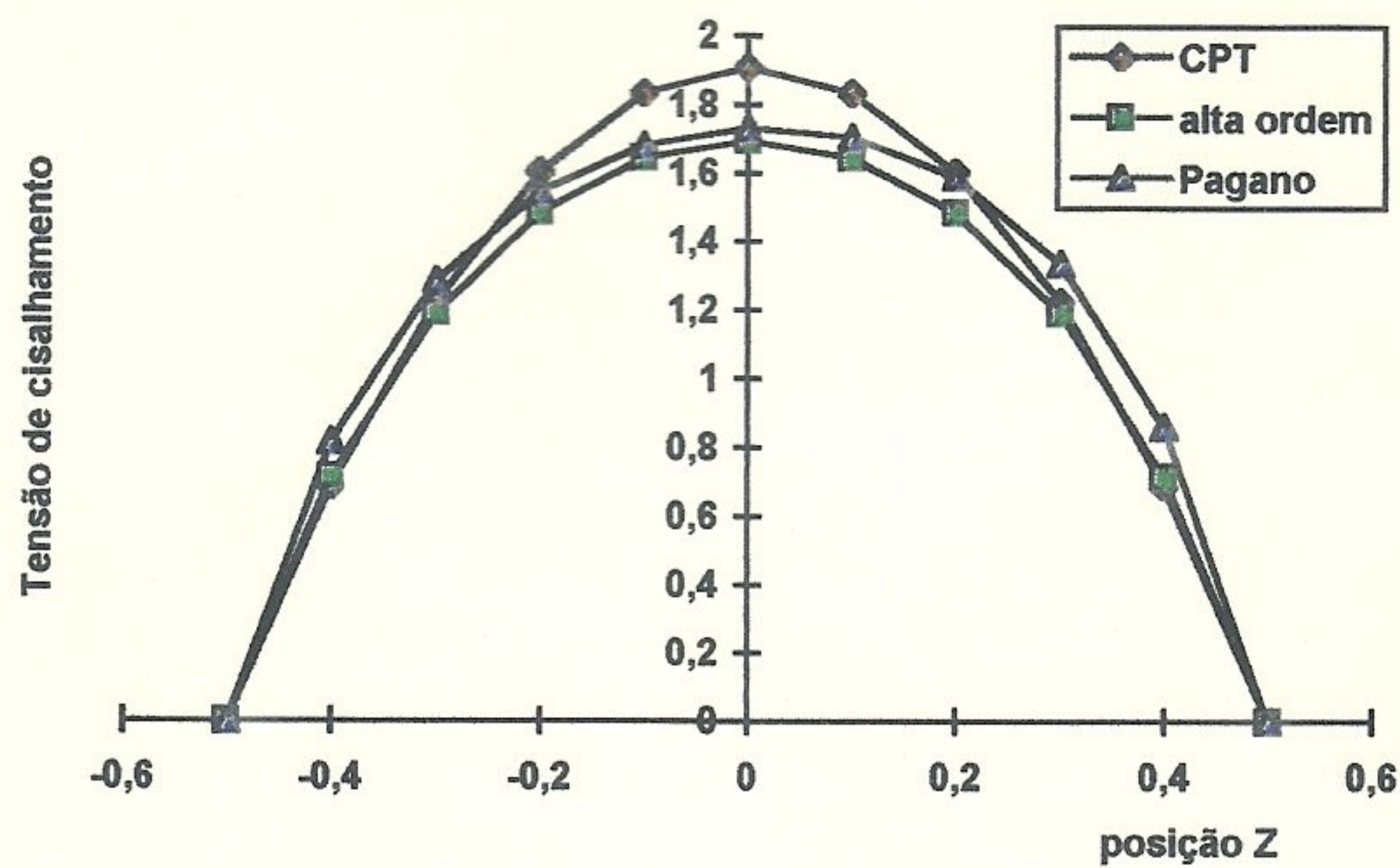


Fig. 4.16. Tensão de Cisalhamento  $\tau_{xz}(0,z)$  versus Posição Z (espessura), para  $L/h = 4$

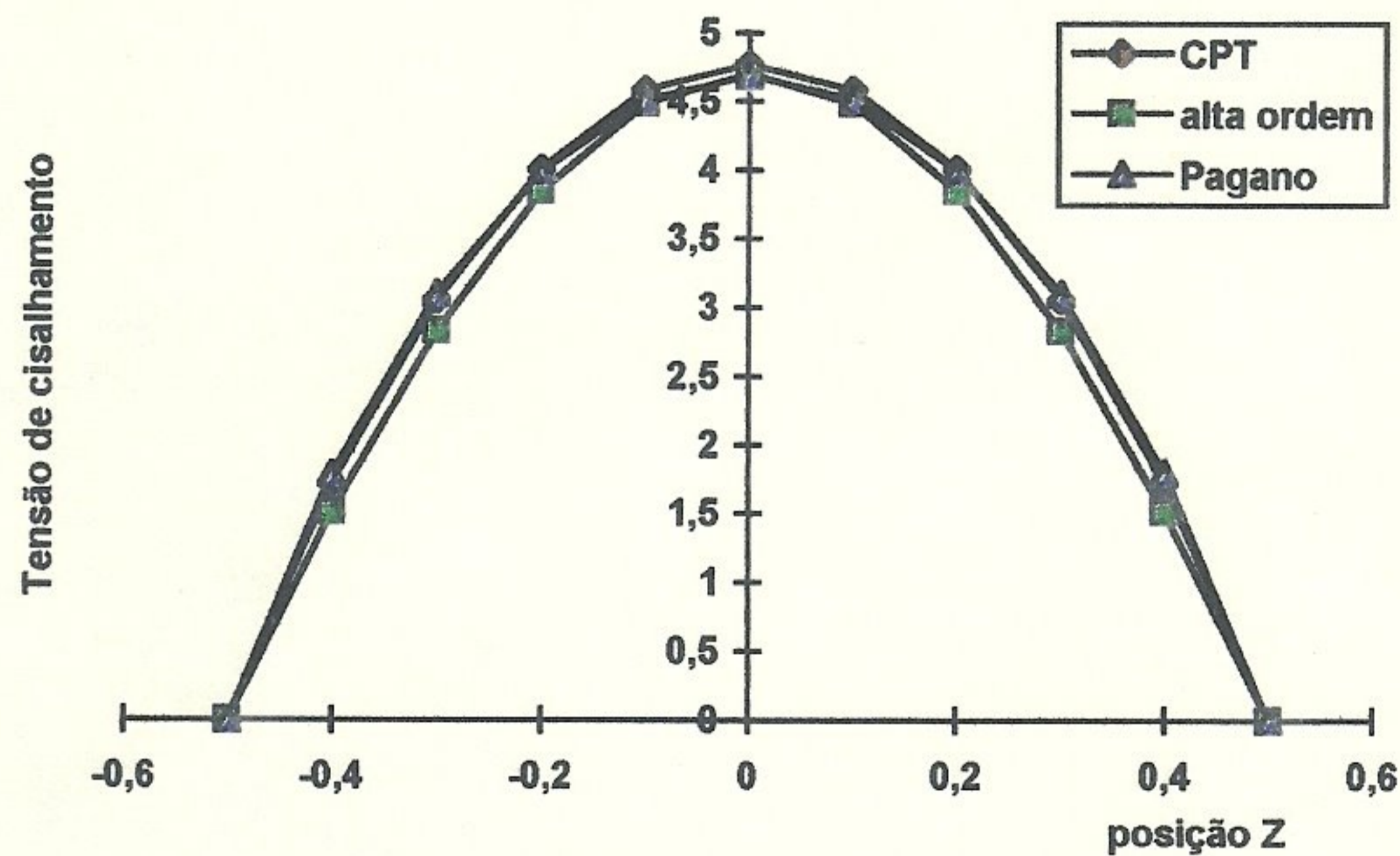


Fig. 4.17. Tensão Cisalhamento  $\tau_{xz}(0,z)$  versus Posição Z (espessura), para  $L/h = 10$

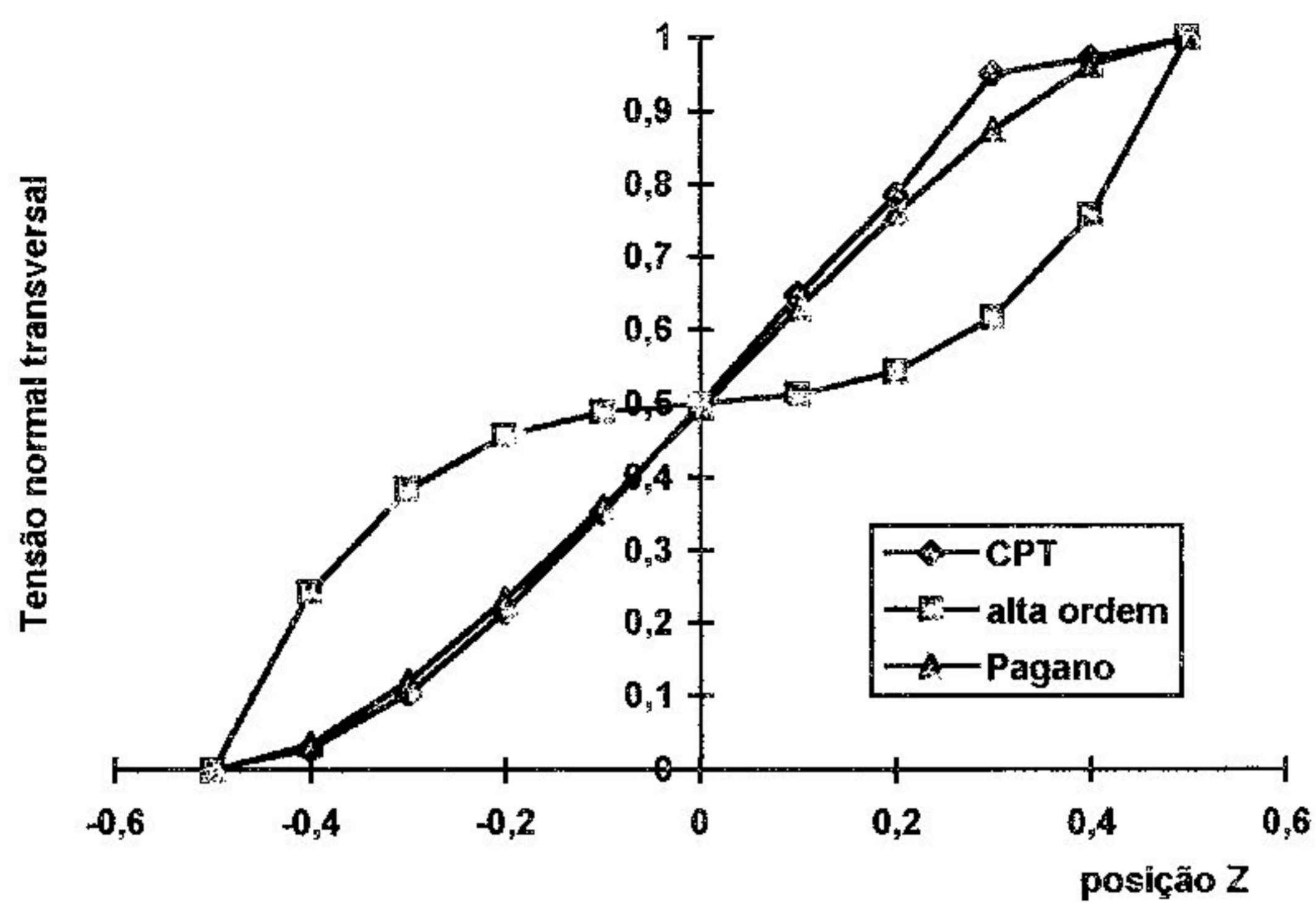


Fig. 4.18. Tensão Normal Transversal  $\sigma_z(L/2, z)$  versus Posição Z (espessura), para  $L/h = 4$

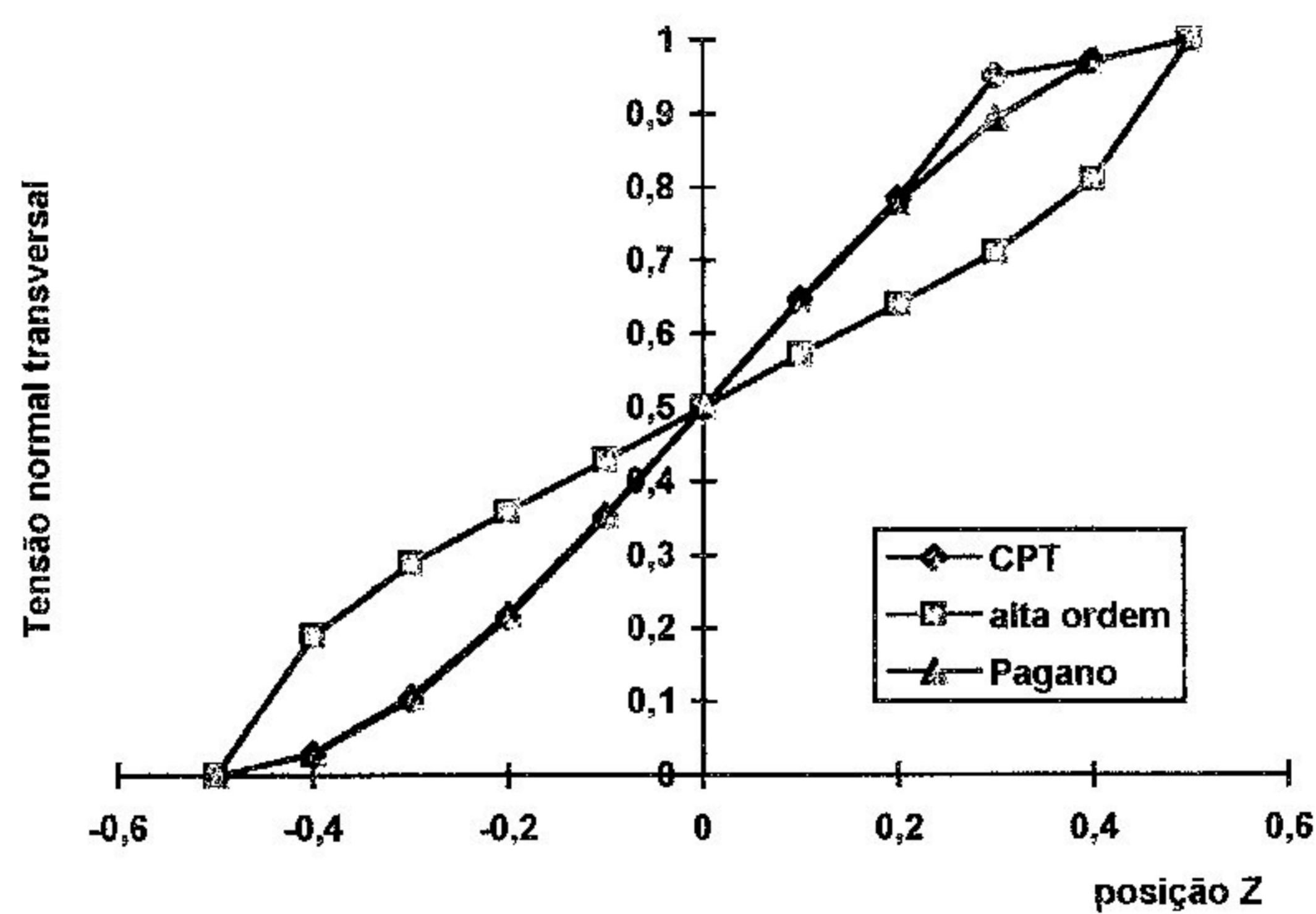


Fig. 4.19. Tensão Normal Transversal  $\sigma_z(L/2, z)$  versus Posição Z (espessura), para  $L/h = 10$

#### 4.4.3. Viga com duas Lâminas sendo a Superior com Fibras Orientadas na Direção Transversal e a Inferior com Fibras na Direção Longitudinal

Os resultados obtidos, para deslocamento máximo e tensões, encontram-se nos gráficos a seguir:

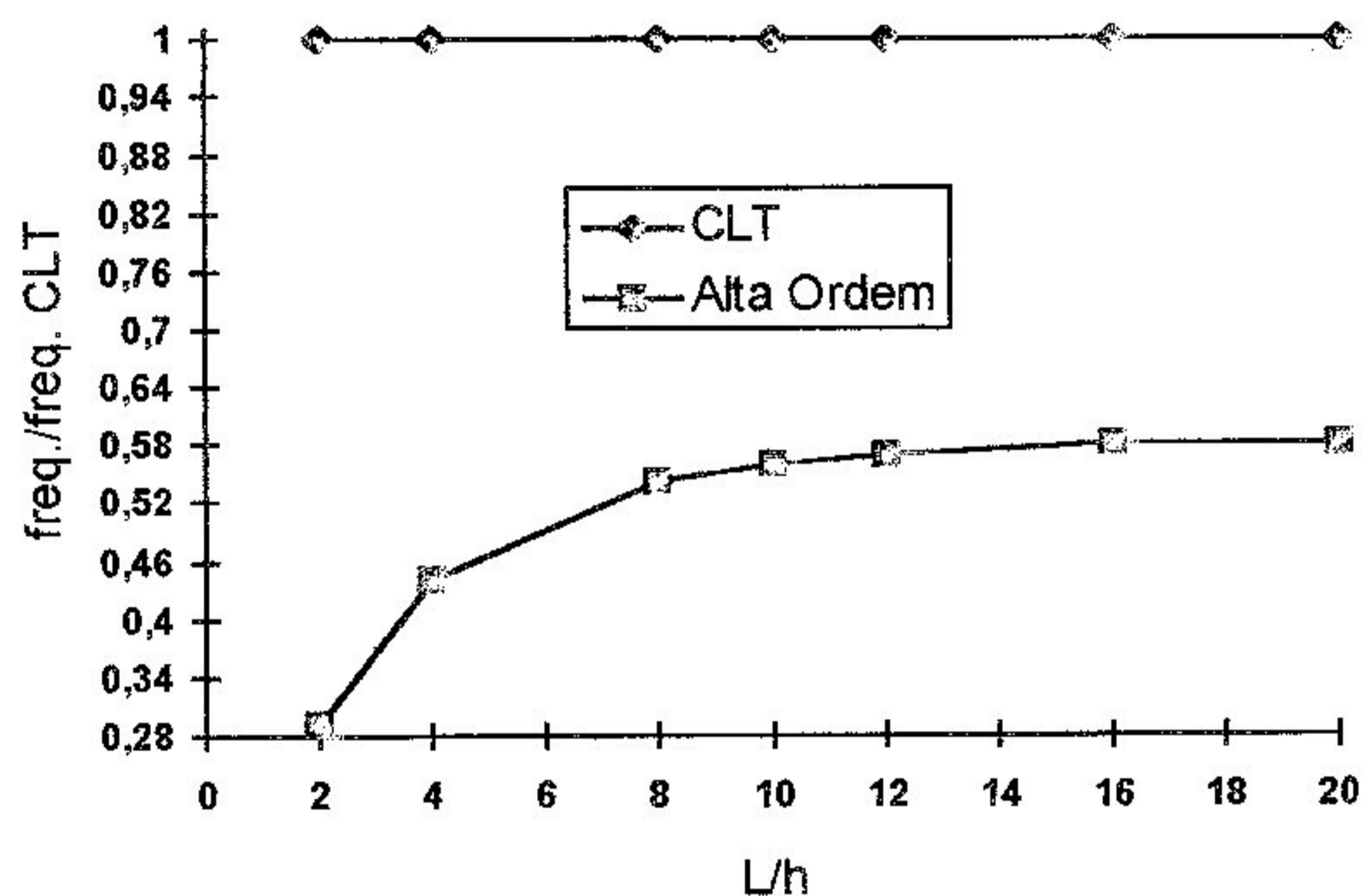


Fig. 4.20. Frequência Natural versus Razão  $L/h$

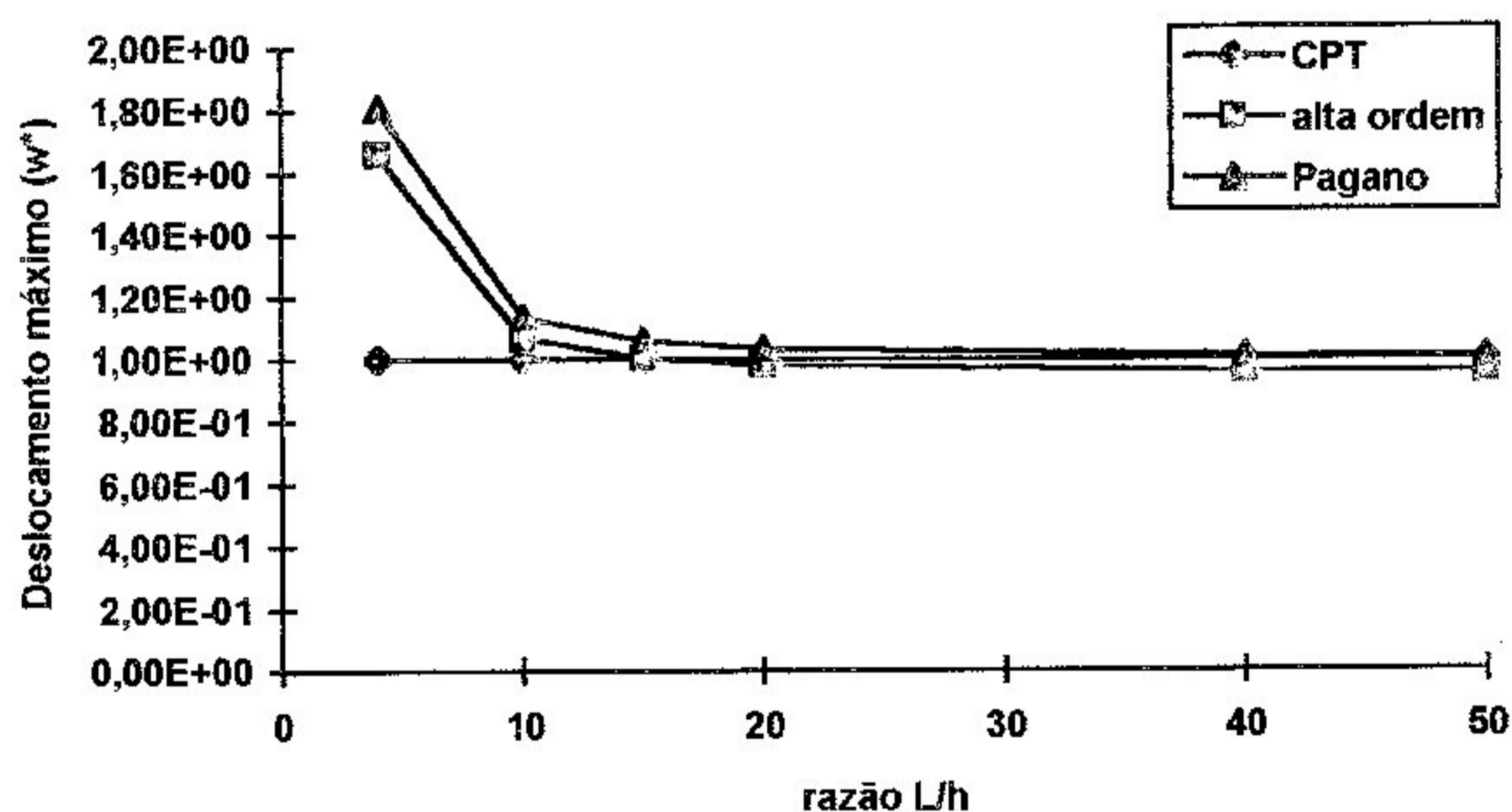


Fig. 4.21. Deslocamento Máximo versus Razão  $L/h$

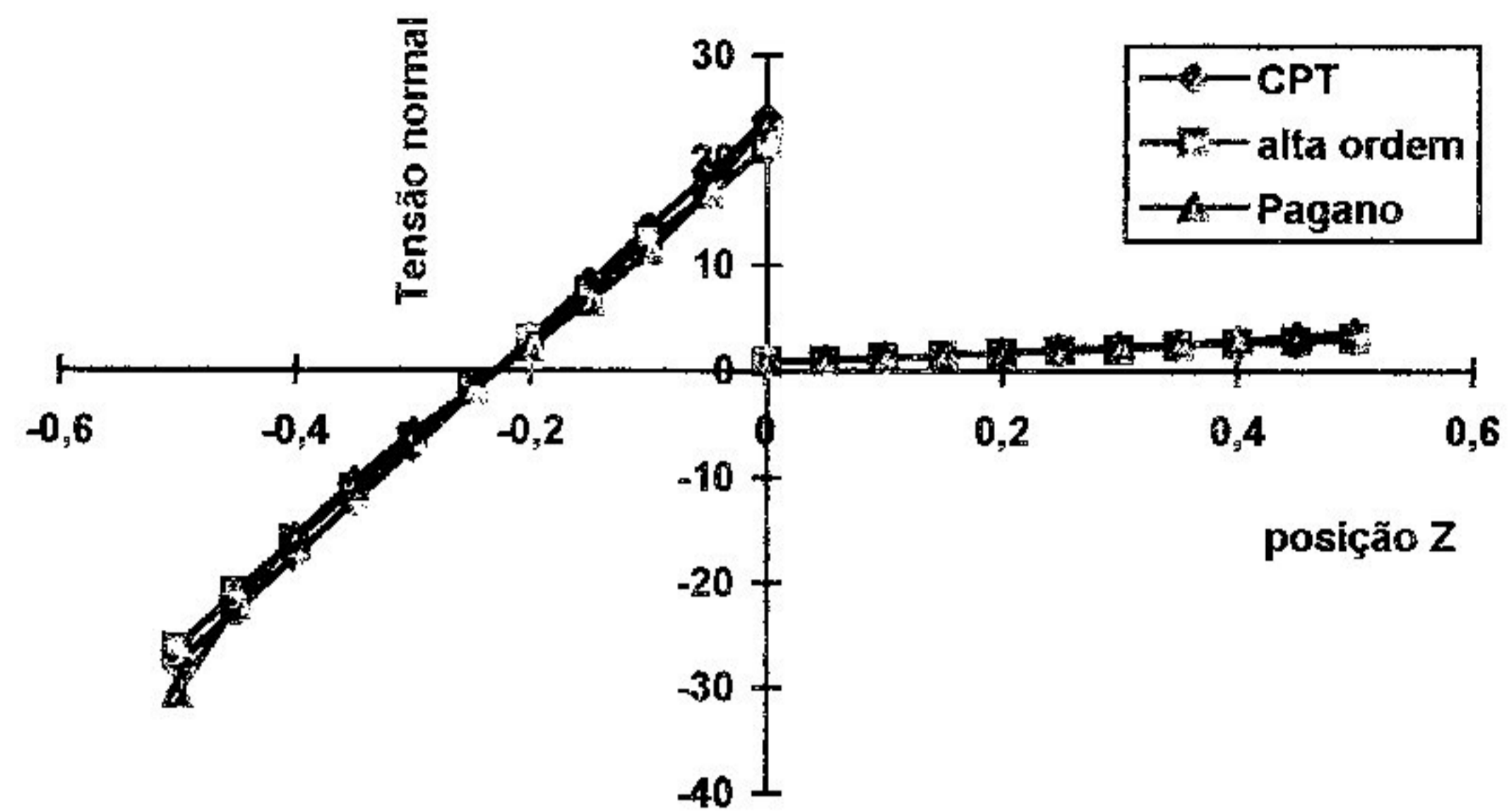


Fig. 4.22. Tensão Normal  $\sigma_x(L/2,z)$  versus Posição Z (espessura), para  $L/h = 4$

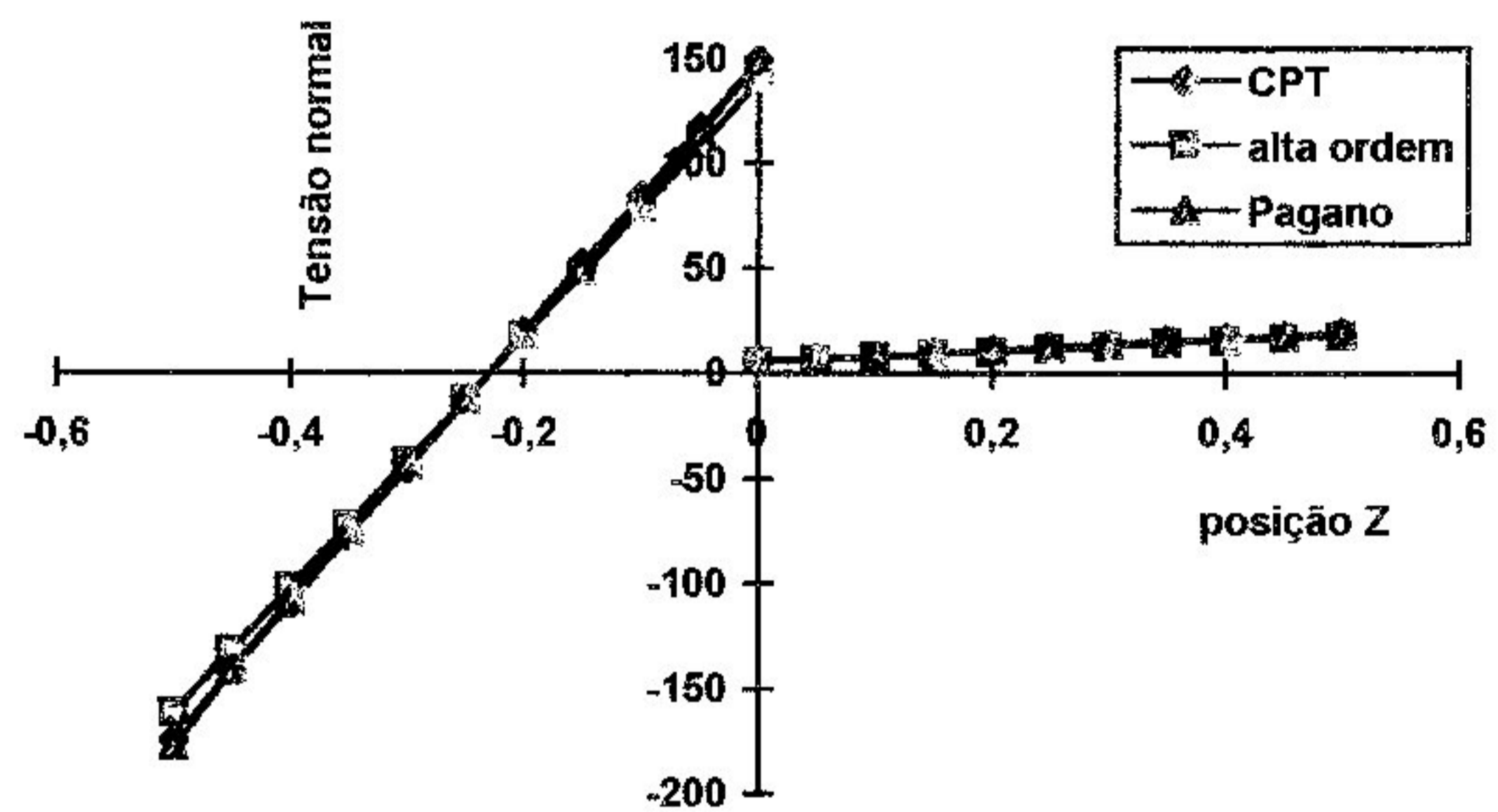


Fig. 4.23. Tensão Normal  $\sigma_x(L/2,z)$  versus Posição Z (espessura), para  $L/h = 10$



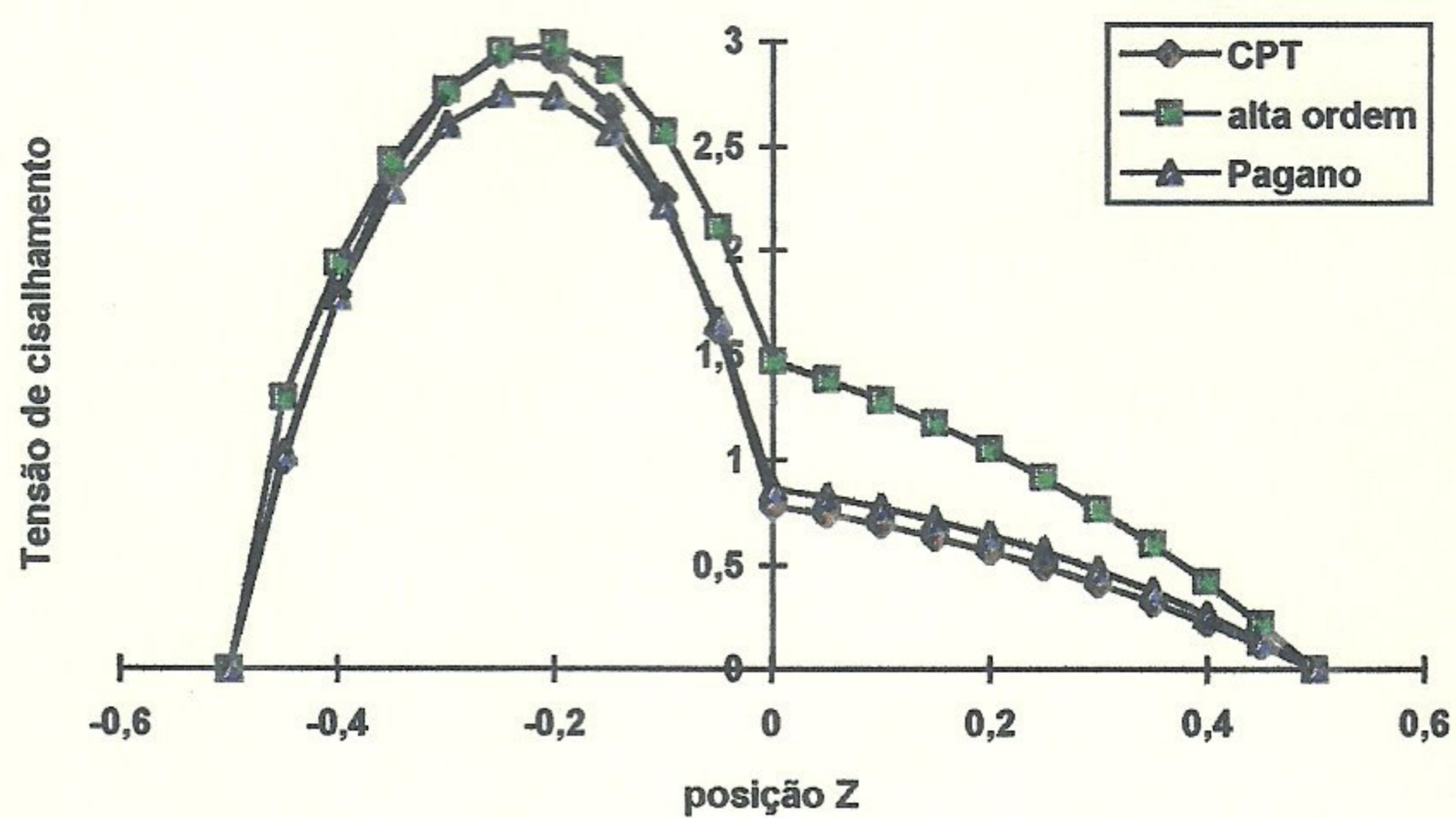


Fig. 4.24. Tensão Cisalhamento  $\tau_{xz}(0,z)$  versus Posição Z (espessura), para  $L/h = 4$

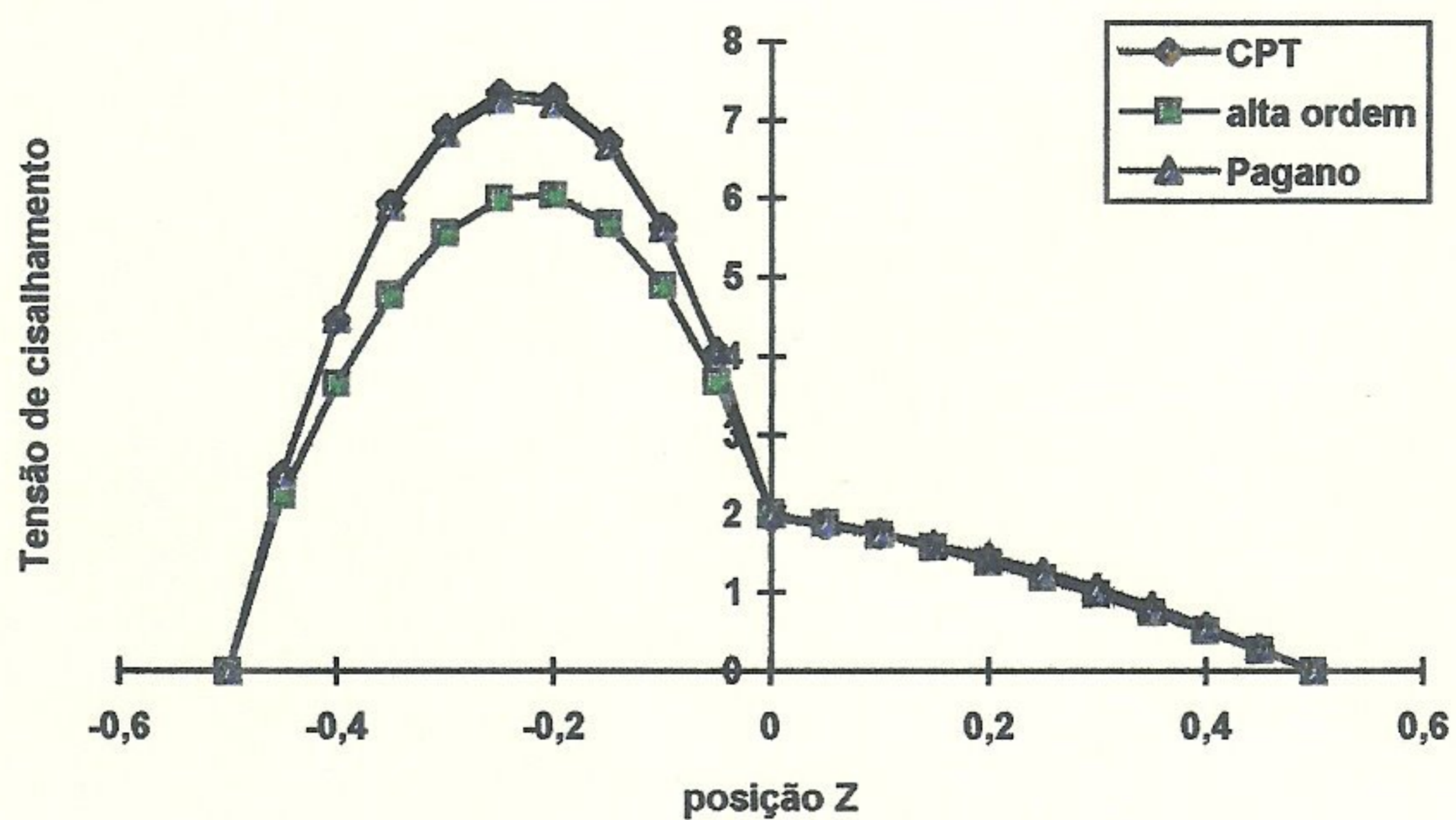


Fig. 4.25. Tensão Cisalhamento  $\tau_{xz}(0,z)$  versus Posição Z (espessura), para  $L/h = 10$

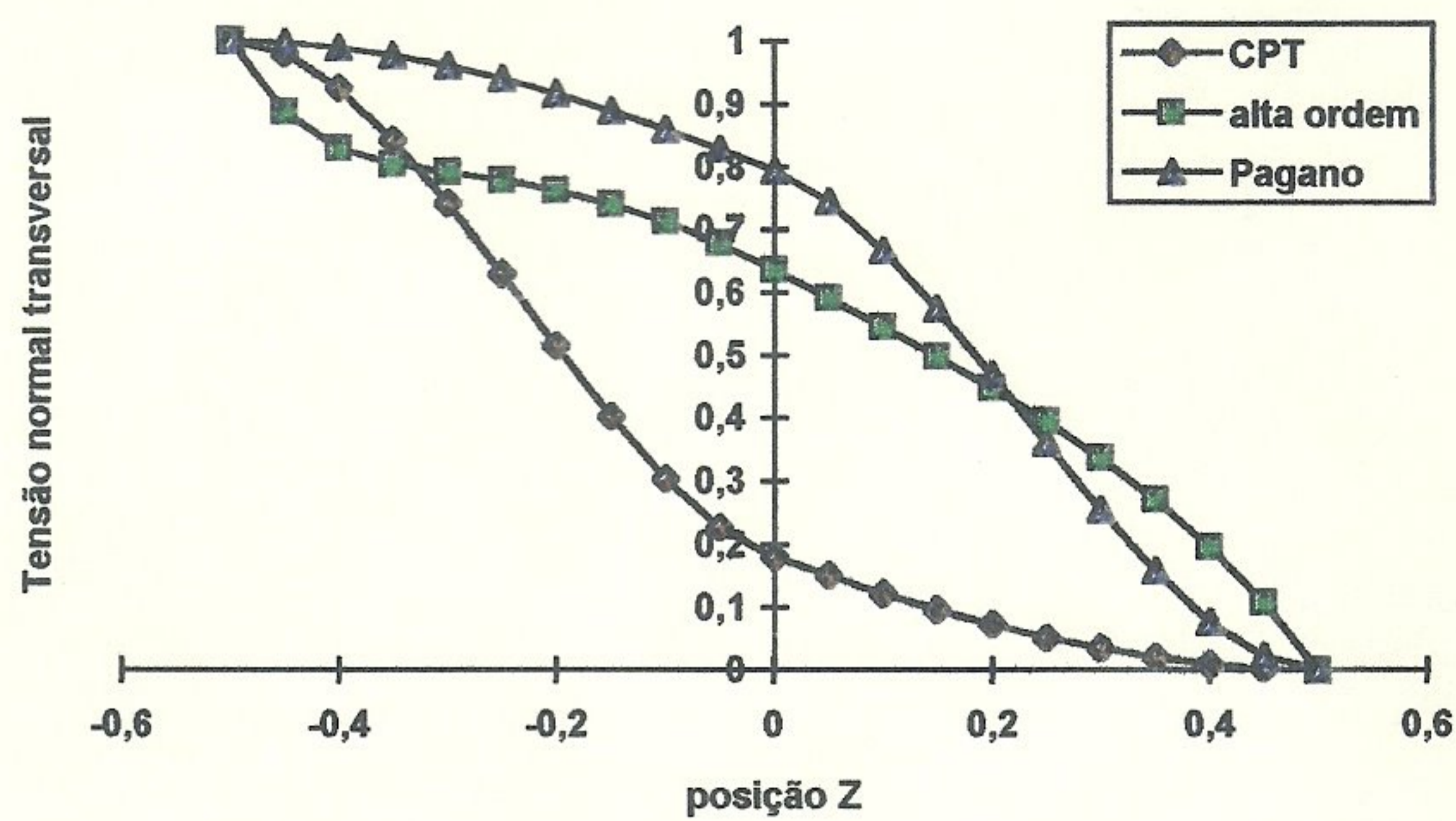


Fig. 4.26. Tensão Normal Transversal  $\sigma_z(L/2,z)$  versus Posição Z (espessura), para  $L/h = 4$

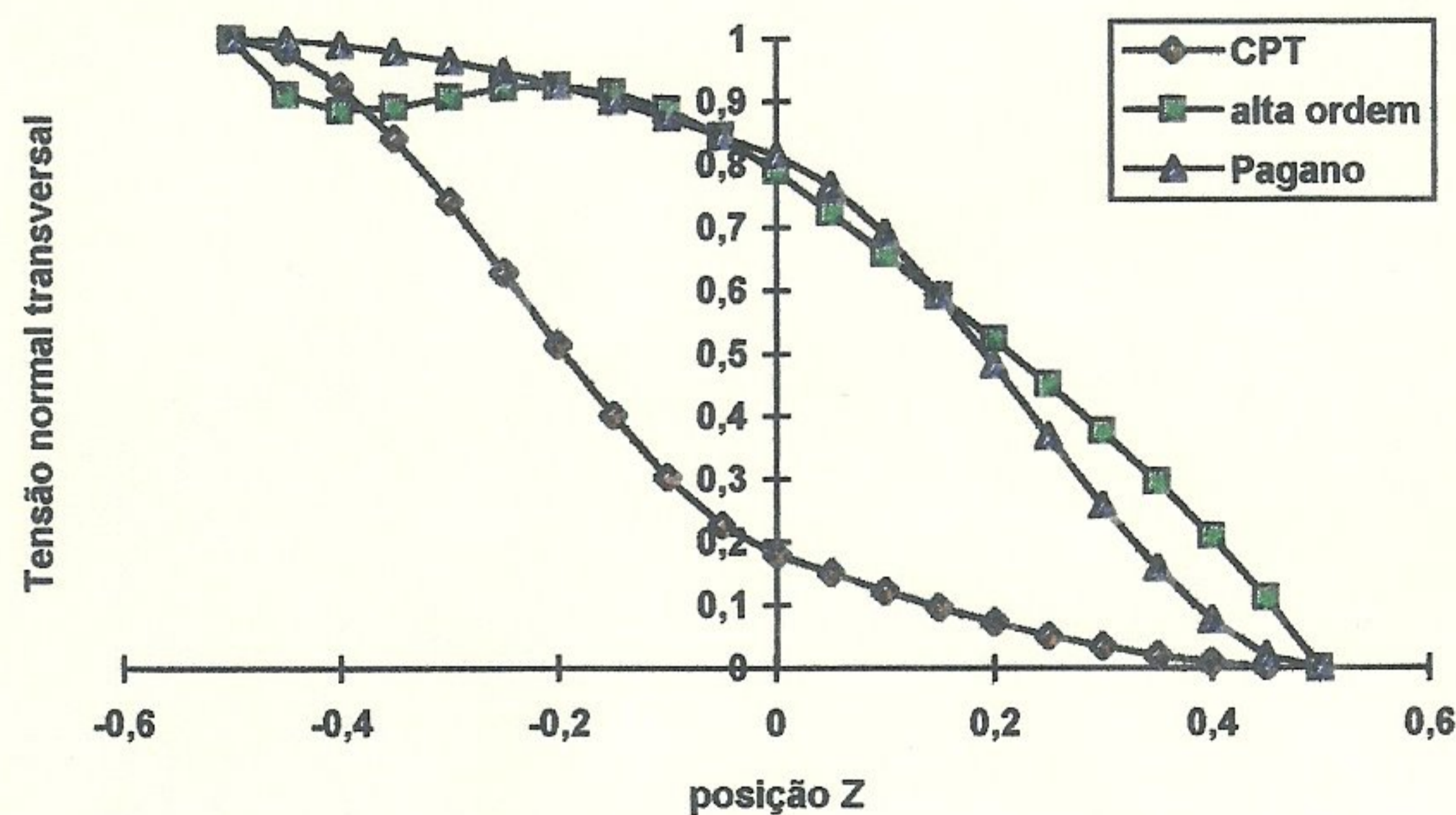


Fig. 4.27. Tensão Normal Transversal  $\sigma_z(L/2,z)$  versus Posição Z (espessura), para  $L/h = 10$

4.4.4. Viga com três Lâminas, sendo as Externas com Fibras Orientadas Longitudinalmente e a Interna com Fibras Orientadas Transversalmente.

Os resultados obtidos, para deslocamento máximo e tensões, encontram-se nos gráficos a seguir:

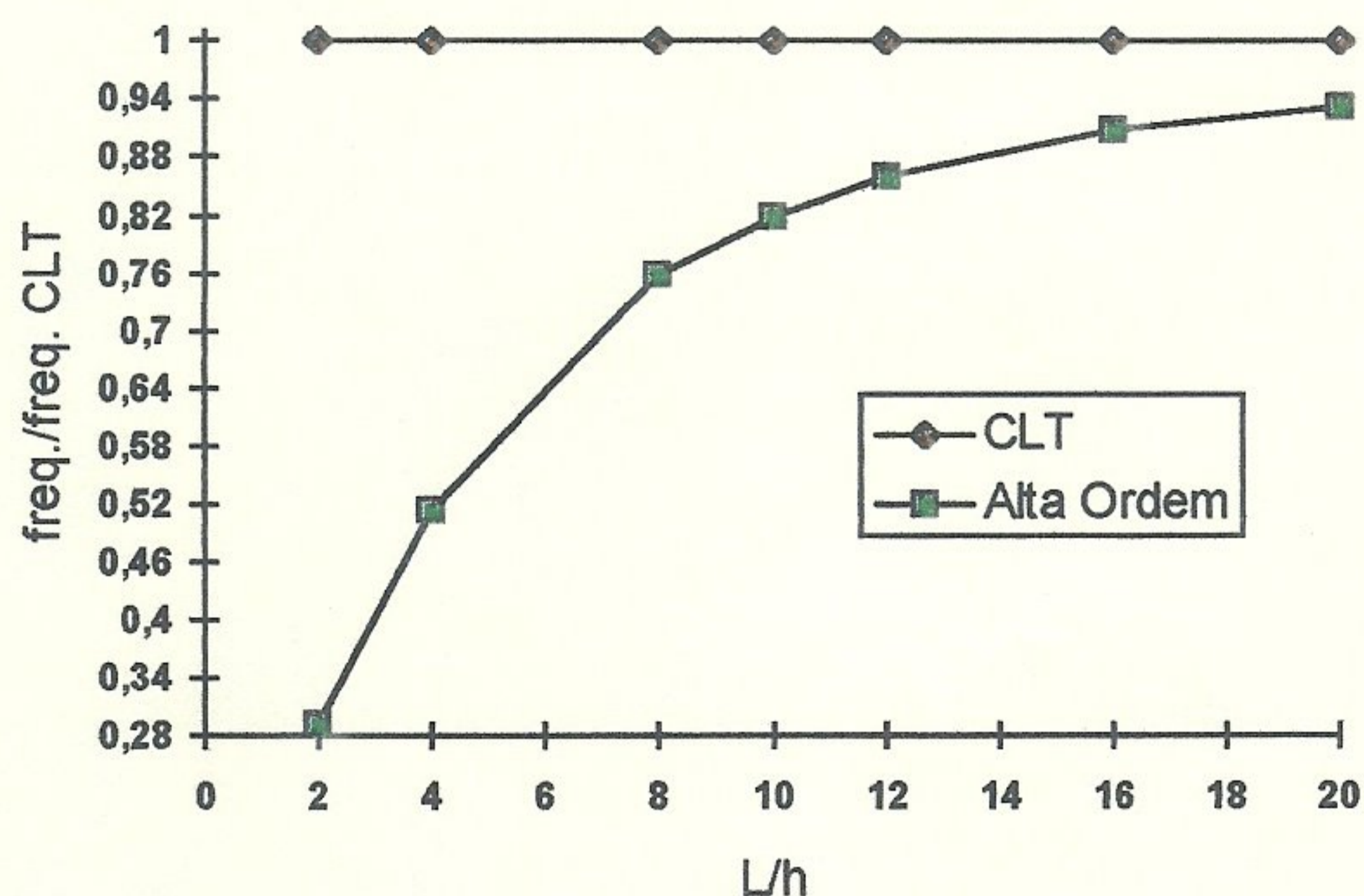


Fig. 4.28. Frequência Natural versus Razão L/h

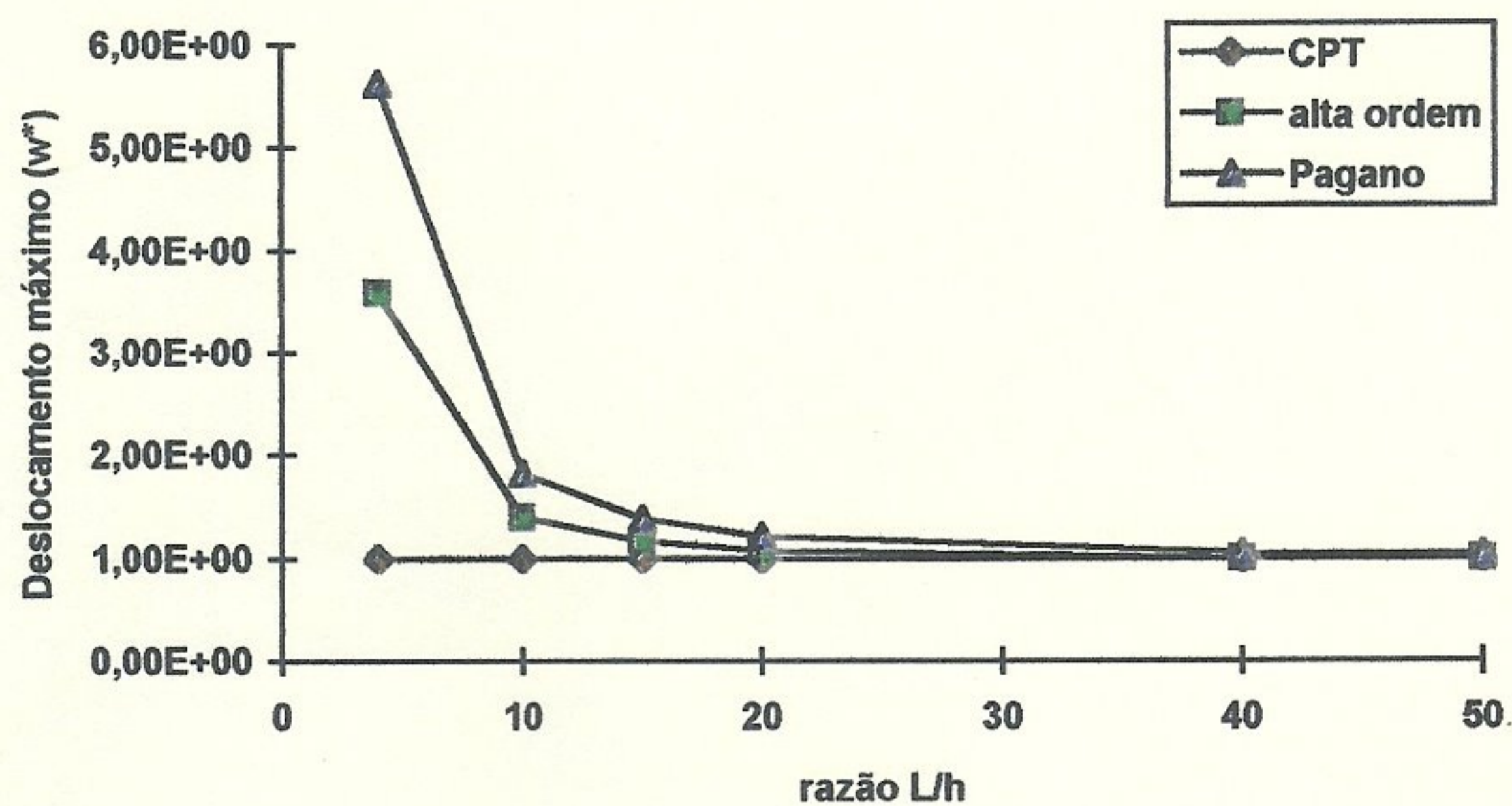


Fig. 4.29. Deslocamento Máximo versus Razão L/h

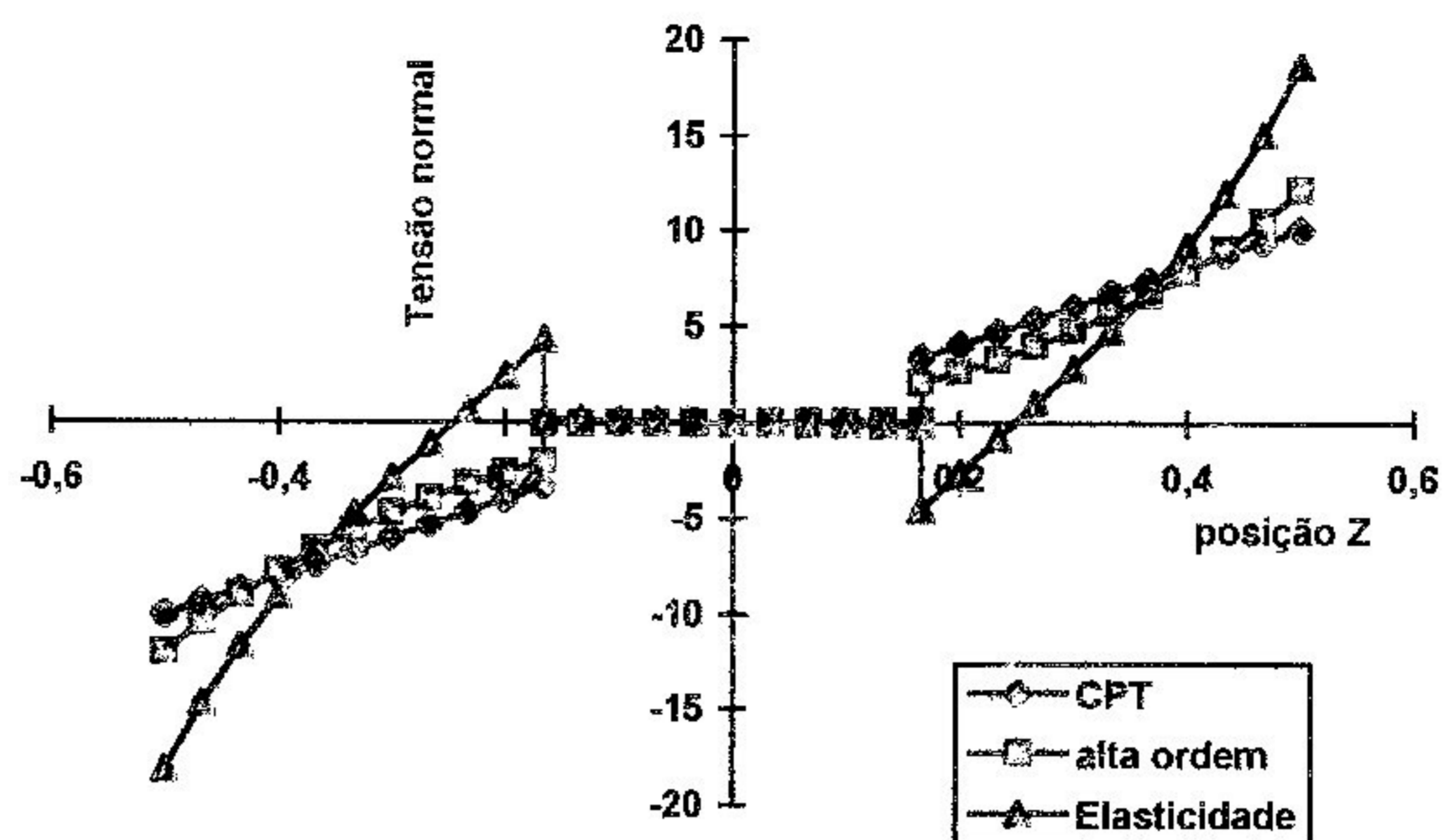


Fig. 4.30. Tensão Normal  $\sigma_x(L/2, z)$  versus Posição  $Z$  (espessura), para  $L/h = 4$

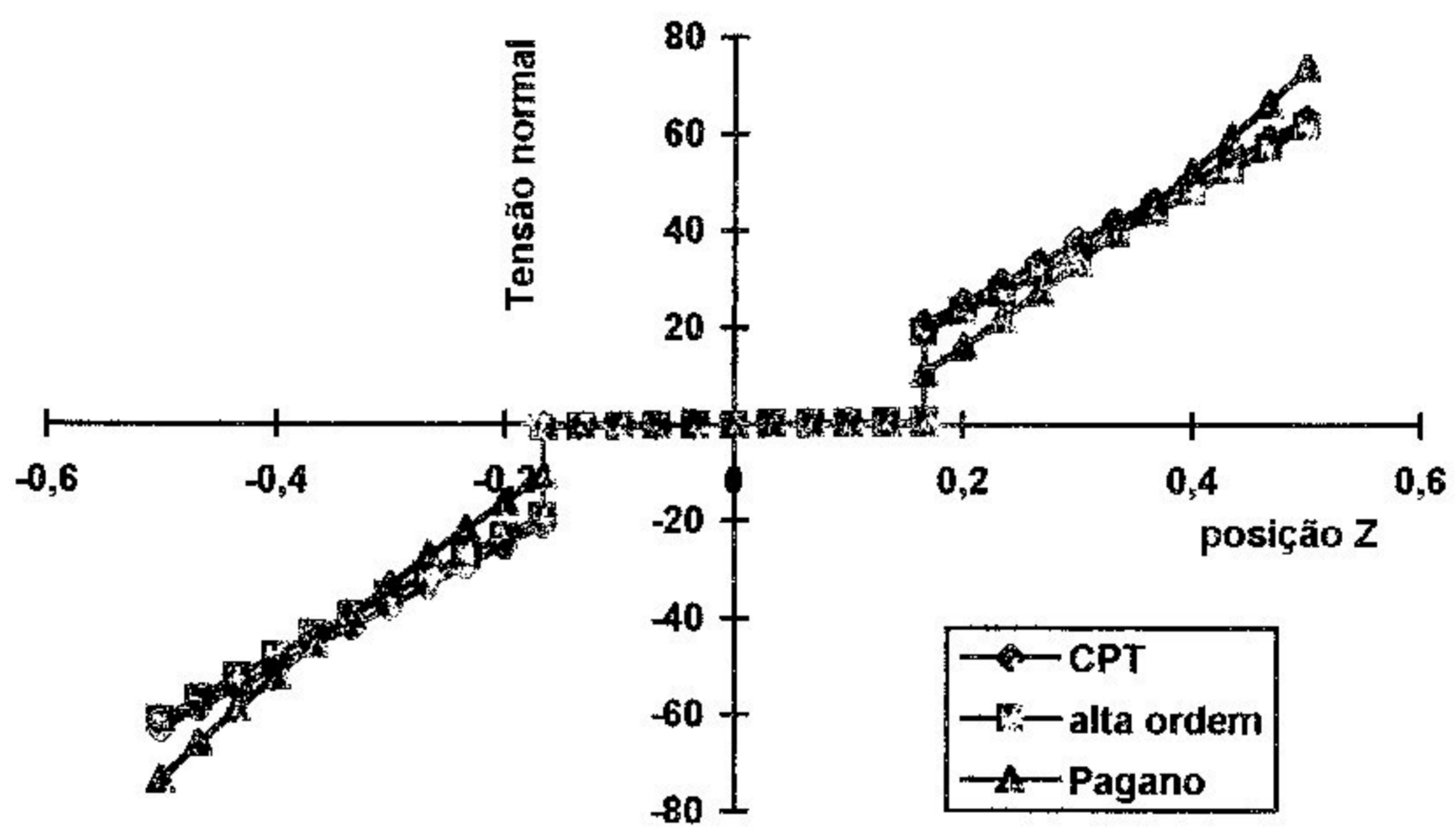


Fig. 4.31. Tensão Normal  $\sigma_x(L/2, z)$  versus Posição  $Z$  (espessura), para  $L/h = 10$

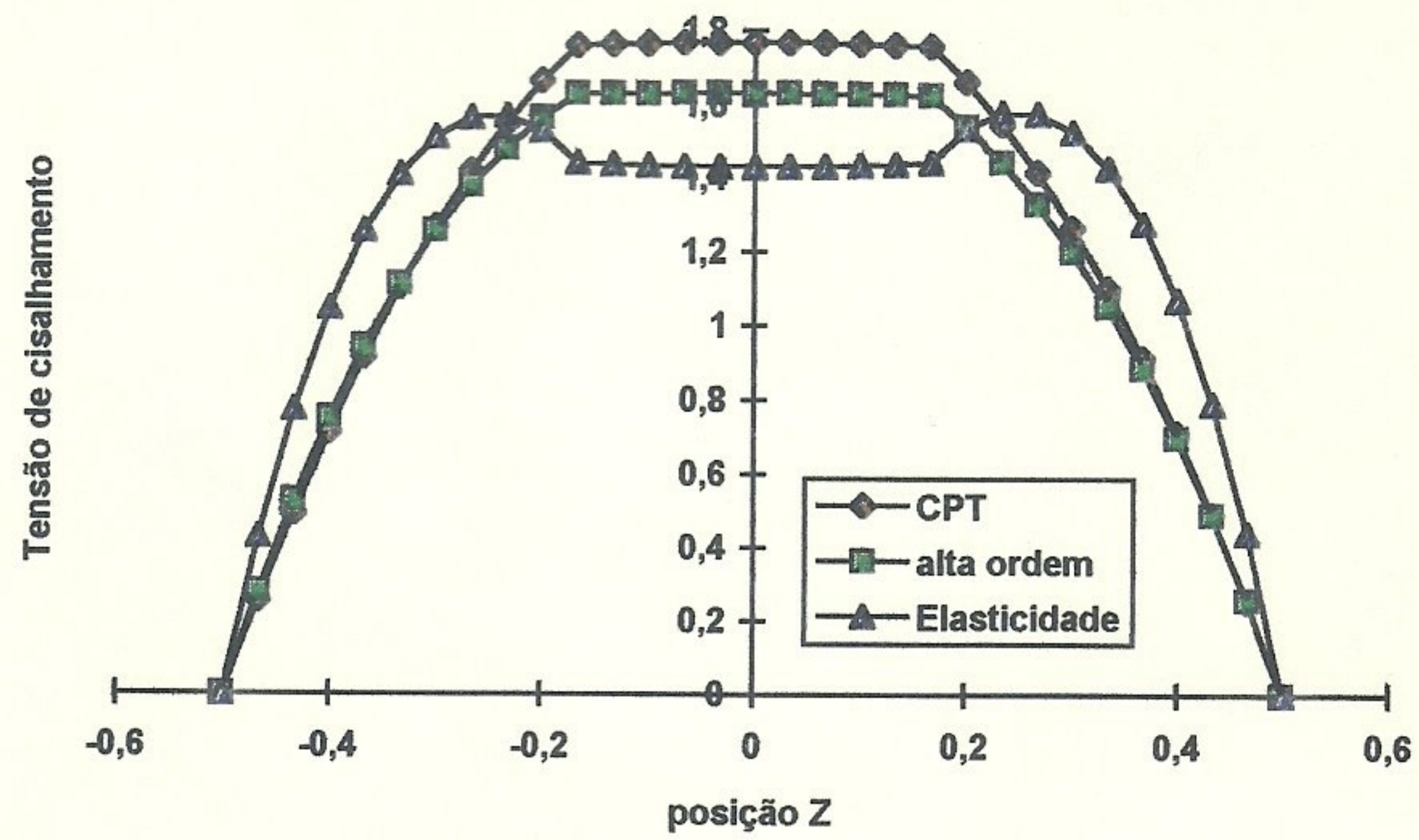


Fig. 4.32. Tensão Cisalhamento  $\tau_{xz}(0,z)$  versus Posição Z (espessura), para  $L/h = 4$

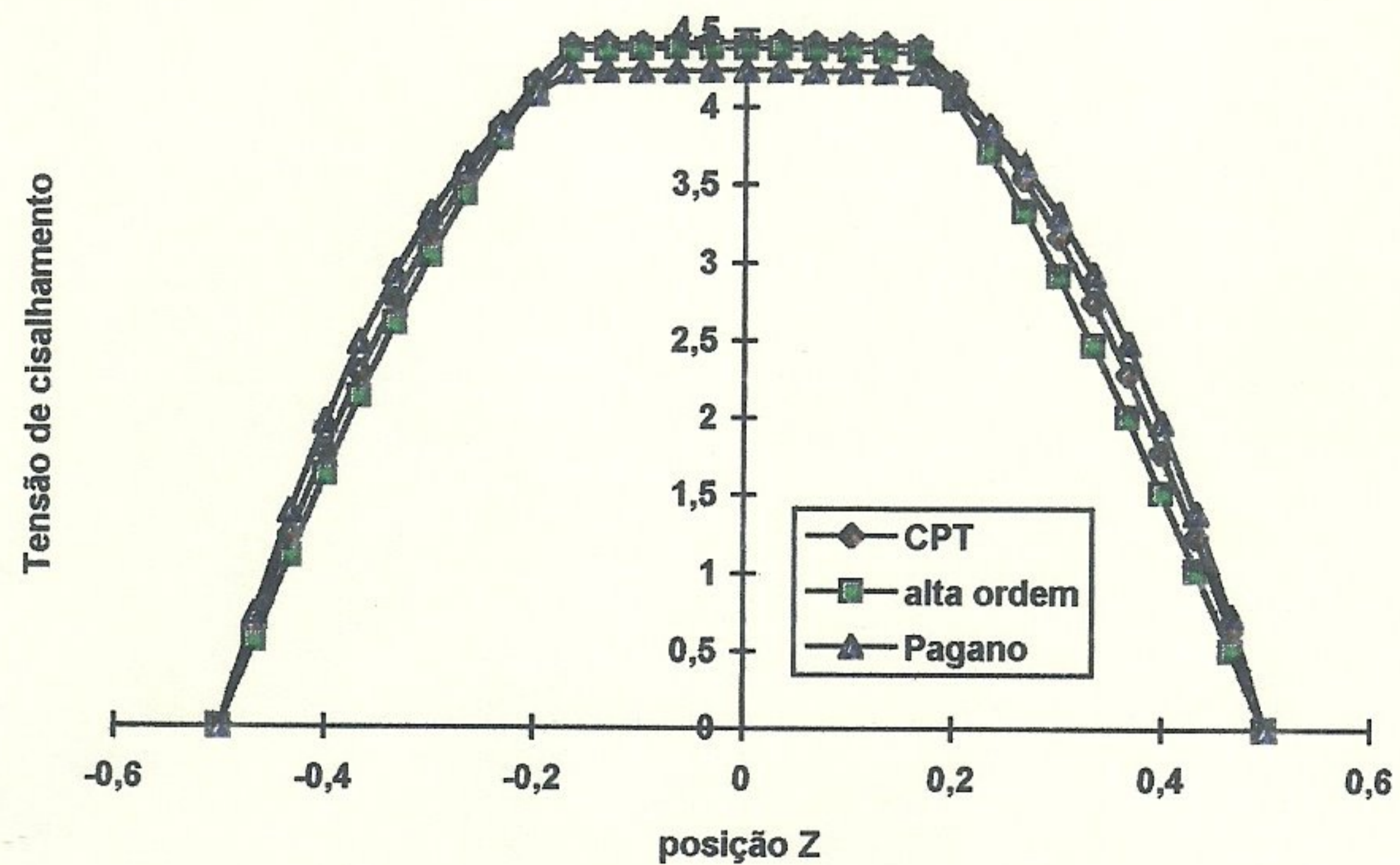


Fig. 4.33. Tensão Cisalhamento  $\tau_{xz}(0,z)$  versus Posição (espessura), para  $L/h = 10$

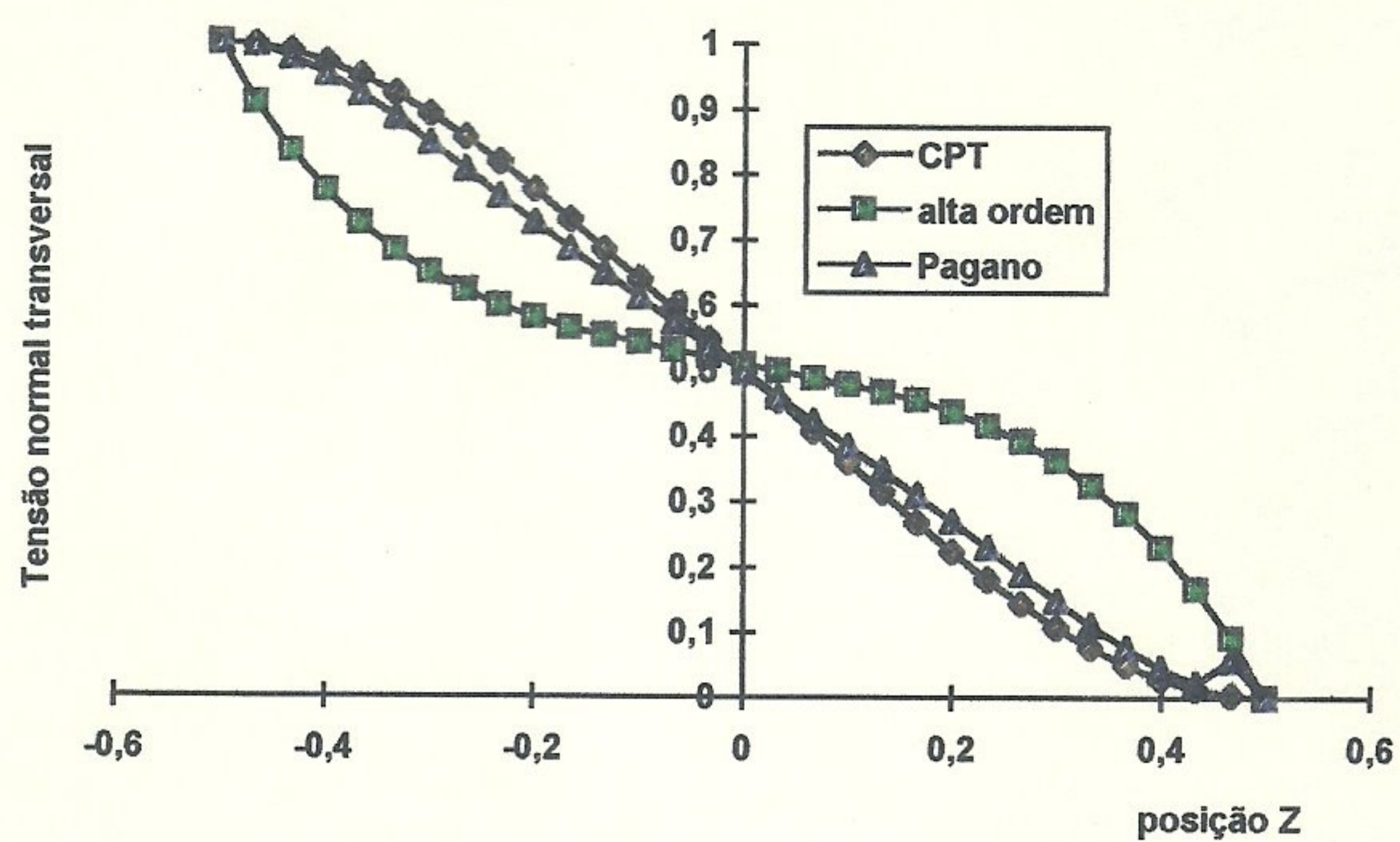


Fig. 4.34. Tensão Normal Transversal  $\sigma_z(L/2,z)$  versus Posição Z (espessura), para  $L/h = 4$

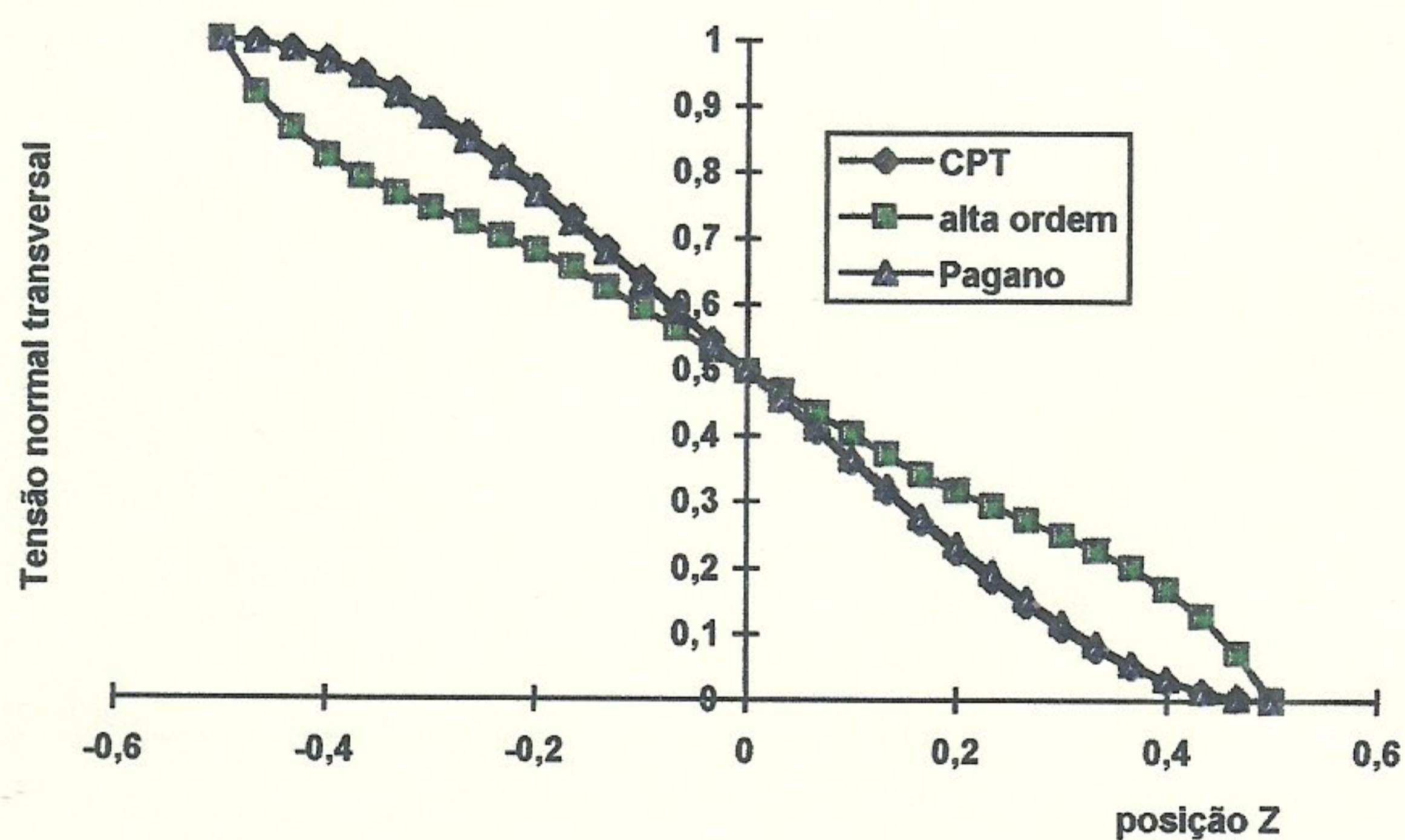


Fig. 4.35. Tensão Normal Transversal  $\sigma_z(L/2,z)$  versus Posição Z (espessura), para  $L/h = 10$

#### 4.4.5. Análise dos Resultados

A solução exata de placas bi-apoiada, com comprimento infinito na direção  $y$ , sujeito a um carregamento senoidal, e formada por lâminas ortotrópicas com suas direções principais alinhadas com os eixos da placa, foi proposta por Pagano. Ele também obteve a solução correspondente no âmbito da teoria clássica.

Para esse exemplo adotou-se um modelo com 10 elementos de alta ordem, obtendo-se resultados numéricos próximos aos obtidos pela teoria da elasticidade. Desta forma, conclui-se que a formulação de alta ordem se mostrou apropriada à predição das tensões normais e de cisalhamento ao longo da seção transversal da viga, inclusive nos casos de vigas curtas ( $L/h \leq 10$ ).

## Capítulo 5

# **CARACTERIZAÇÃO DOS MATERIAIS PARA FABRICAÇÃO DO PROTÓTIPO DE UMA VIGA CAIXÃO EM MADEIRA LAMINADA COLADA E VIDRO/EPOXI**

### 5.1. Introdução

Neste capítulo será apresentada a metodologia para a caracterização dos materiais utilizados na fabricação de uma viga, na forma caixão, tendo as mesas construídas de madeira laminada colada e as almas de lâminas de vidro/epoxi.

### 5.2. Materiais e Métodos

#### 5.2.1. A Madeira

A madeira utilizada para montagem dos corpos de prova foi o freijó [*Cordia Goeldiana*], devido a seu tradicional uso na indústria aeronáutica nacional.

A umidade da madeira, para montagem dos corpos de prova, variou de 11,0% a 14,0%, e a densidade aparente variou de 501 kg/m<sup>3</sup> a 584 kg/m<sup>3</sup>.

O módulo de elasticidade médio encontrado foi de 15.999,3 MPa e a resistência média à ruptura por flexão foi de 97,8 MPa.

#### 5.2.2. O Adesivo



Foram utilizados dois adesivos à base de resina epoxi: um fabricado pela Tubolit (Adesivo Scuna) e o outro fabricado pela Ciba S.A. (Araldit Ly 556).

A resina epoxi é um polímero termofixo o qual quando ativado por um agente de cura ( catalisador ), torna-se rígido e infusível.

O Araldit necessita de 50% em volume de catalisador, para a preparação do adesivo.

A resina Scuna necessita, para preparação do adesivo, uma mistura de 5 partes de resina por 1 parte de catalisador.

### 5.2.3. A Fibra de Vidro

Foi utilizado tecido de fibra de vidro do tipo E, que é o mais indicado para fins estruturais.

### 5.2.4. Equipamentos Utilizados

#### **Montagem dos corpos de prova**

Para o corte das peças e preparação das superfícies dos corpos de prova foram utilizados as máquinas da oficina do LAAES: Serra circular, serra de fita, plaina, furadeira de bancada e ferramentas manuais.

#### **Medidas dos corpos de prova**

Para a determinação das dimensões dos corpos de prova foi utilizado um paquímetro de 0,05 mm de precisão.

#### **Ensaio dos corpos de prova**

Os ensaios foram realizados em um conjunto de reação montado no LAAES. Este conjunto é constituído de um pórtico montado sobre uma laje de reação para 50 ton. por ponto. O carregamento é aplicado por um cilindro hidráulico de 100 kN acionado por uma bomba manual. Para

a medida do carregamento é utilizado um anel dinamométrico de 100 KN, cuja constante elástica é 24,7 kgf/0,01mm. Acoplado ao anel está um relógio comparador da Mitutoyo de 0,01 mm de precisão.

Para a medida das deformações foram utilizados extensômetros e uma maleta de extensometria MDC-10.

Os extensômetros utilizados foram:

- Rosetas tipo KFC-5-D17-11, para aço, da KYOWA, cujas características são:

Gage Length = 5mm

Resistência = 120  $\Omega$

Gage Fator = 2.11

$\theta = 45^\circ$

- Strain gage tipo KFC-5-120-C1-11, para aço, da KYOWA, cujas características são:

Gage Length = 5mm

Resistência = 120  $\Omega$

Gage Fator = 2.15

A maleta de extensometria MDC-10 é um aparelho destinado a medição de micro-deformações por meio de extensômetros elétricos. Ela pode ser configurada para uma ponte completa, 1/2 ponte ou 1/4 de ponte, podendo utilizar extensômetros de 120  $\Omega$  ou 350  $\Omega$ . O sistema de calibração tem uma resolução de  $\pm 1 \mu\text{m/m}$  e uma resolução de  $\pm 10 \mu\text{m/m}$ . A configuração adotada foi 1/4 de ponte.

Na determinação dos deslocamentos, foi utilizado relógios comparadores da Mitutoyo de 0,01 mm de precisão.

### 5.3. Caracterização da Madeira

Foram feitos os ensaios de umidade, densidade, cisalhamento, compressão paralela às fibras e Flexão estática.

#### 5.3.1. Cisalhamento da Madeira, Umidade, Densidade Aparente e Retração

A determinação da umidade, densidade aparente e do coeficiente de retração foi feita a partir do corpo de prova de cisalhamento que é do tipo apresentado na figura 5.1.

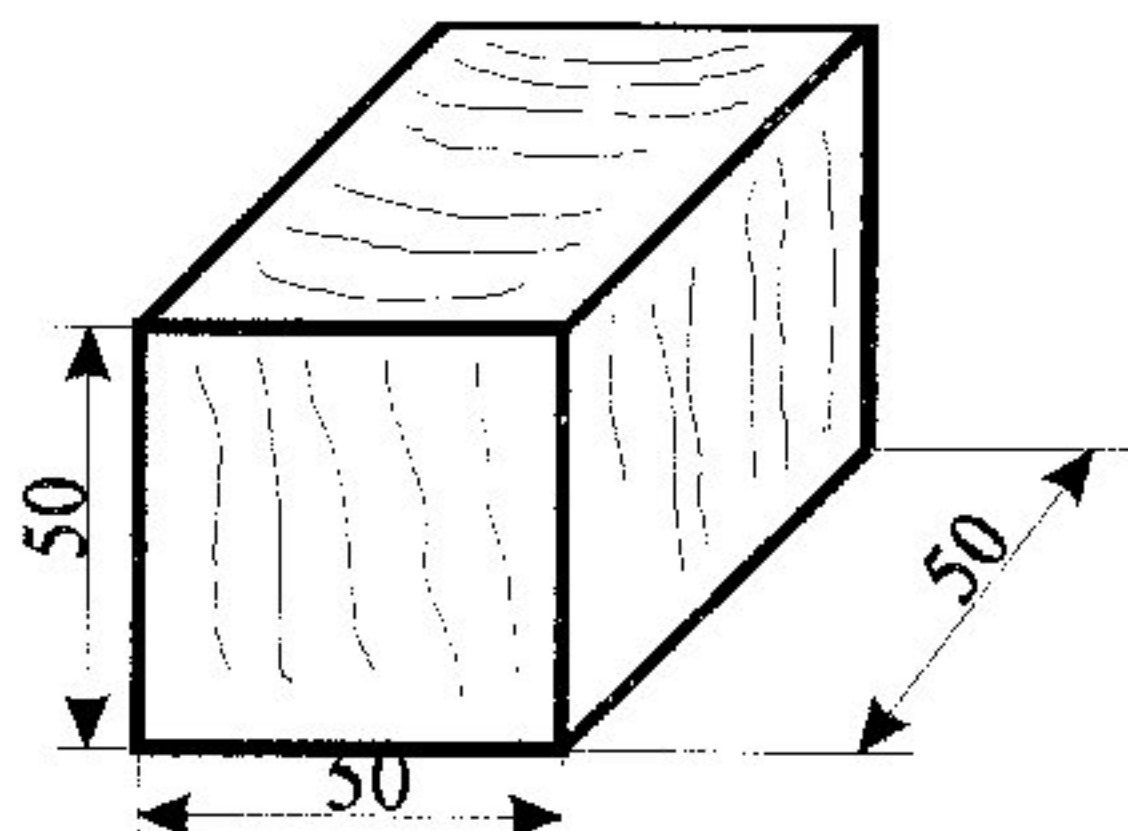


Fig. 5.1. Corpo de Prova para Determinação da Resistência ao Cisalhamento na Madeira

Com a utilização de um paquímetro foram determinados as dimensões do corpo de prova e utilizando uma balança eletrônica obteve-se a massa úmida ( $M_U$ ).

Após a secagem em estufa, os corpos foram, novamente, medidos e pesados, para obter a massa seca ( $M_S$ ).

Para a realização do ensaio de cisalhamento foi utilizado o dispositivo de ensaio apresentado na figura 5.2.

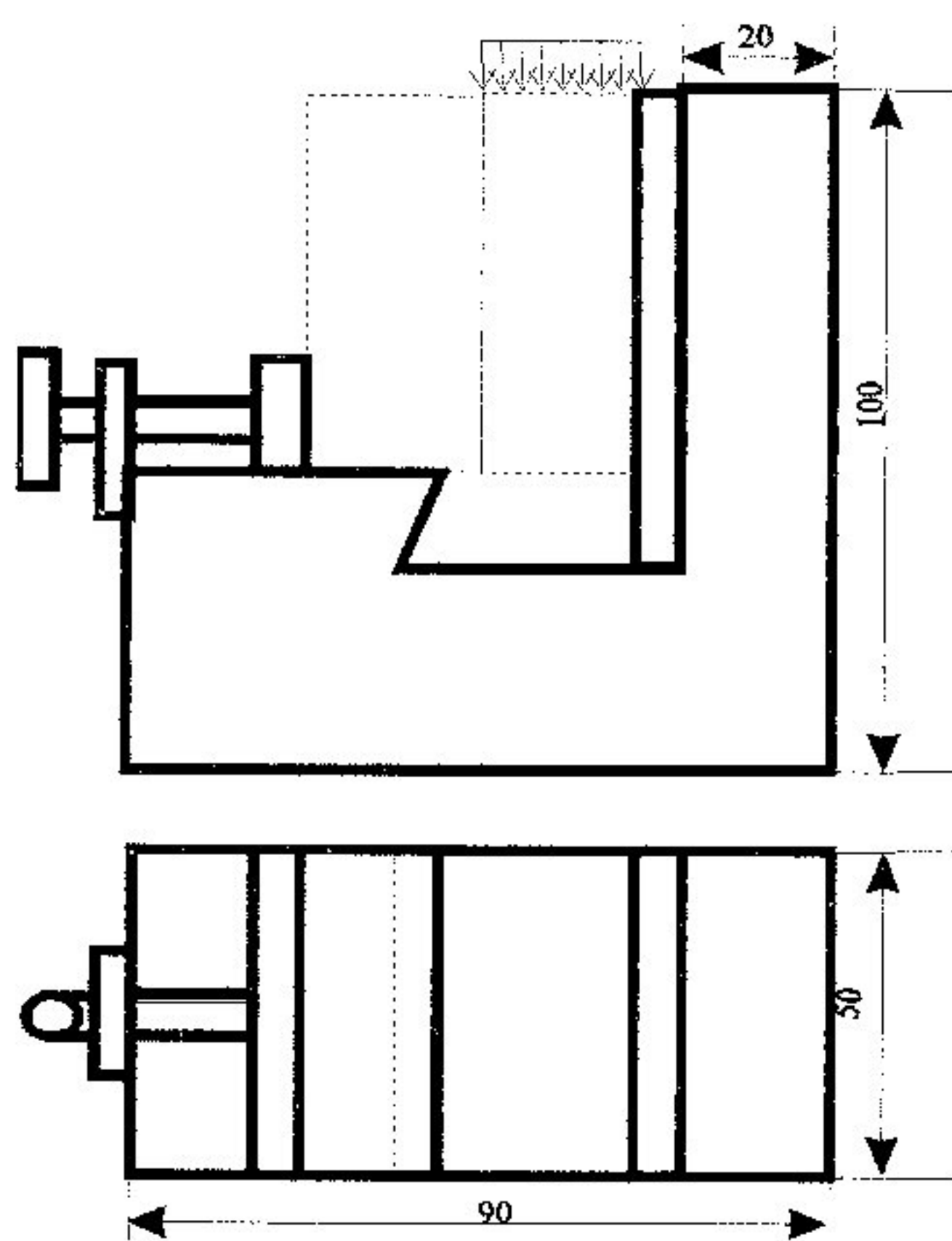


Fig. 5.2. Dispositivo de Ensaio de Cisalhamento

A determinação da tensão de cisalhamento na madeira, com umidade de equilíbrio, é dada por:

$$\tau_w = \frac{N_{rup}}{A_s} \quad (5.1)$$

Onde:

$\tau_w$  = tensão de cisalhamento da madeira

$N_{rup}$  = carga de ruptura de cisalhamento

$A_s$  = área de cisalhamento

A umidade e a densidade aparente são obtidas por:

$$U = \frac{M_u - M_s}{M_s} \cdot 100 \quad (\%) \quad (5.2)$$

$$Dap = \frac{M_u}{V_u} \quad (5.3)$$

Onde:

$U$  = umidade em porcentagem

$M_u$  = massa do corpo de prova úmido

$M_s$  = massa do corpo de prova seco em estufa

$Dap$  = densidade aparente

$V_u$  = volume do corpo de prova úmido

O coeficiente de retração foi obtido utilizando a equação:

$$\text{coef. retr} = \frac{Ct}{U} \quad (5.4)$$

Onde:

$Ct$  é a contração volumétrica dada por:

$$Ct = \frac{V_u - V_s}{V_s} \cdot 100\%$$

Onde :  $V_u$  = volume do corpo de prova úmido

$V_s$  = volume do corpo de prova seco

Os valores médios obtidos para 12 corpos de prova foram:

Tensão de Cisalhamento = 9,79 MPa

H= Teor de Umidade = 13,3 %

Coef. de retração = 0,312

Retração Radial = 1,37%

Retração Tangencial = 2,47%

Retração axial = 0,98%

Dap = 550 kg/m<sup>3</sup>

### 5.3.2. Compressão Paralela às Fibras

O valor médio da tensão de compressão, da madeira freijó, foi determinado utilizando-se corpos de prova do tipo apresentado na figura 5.3.

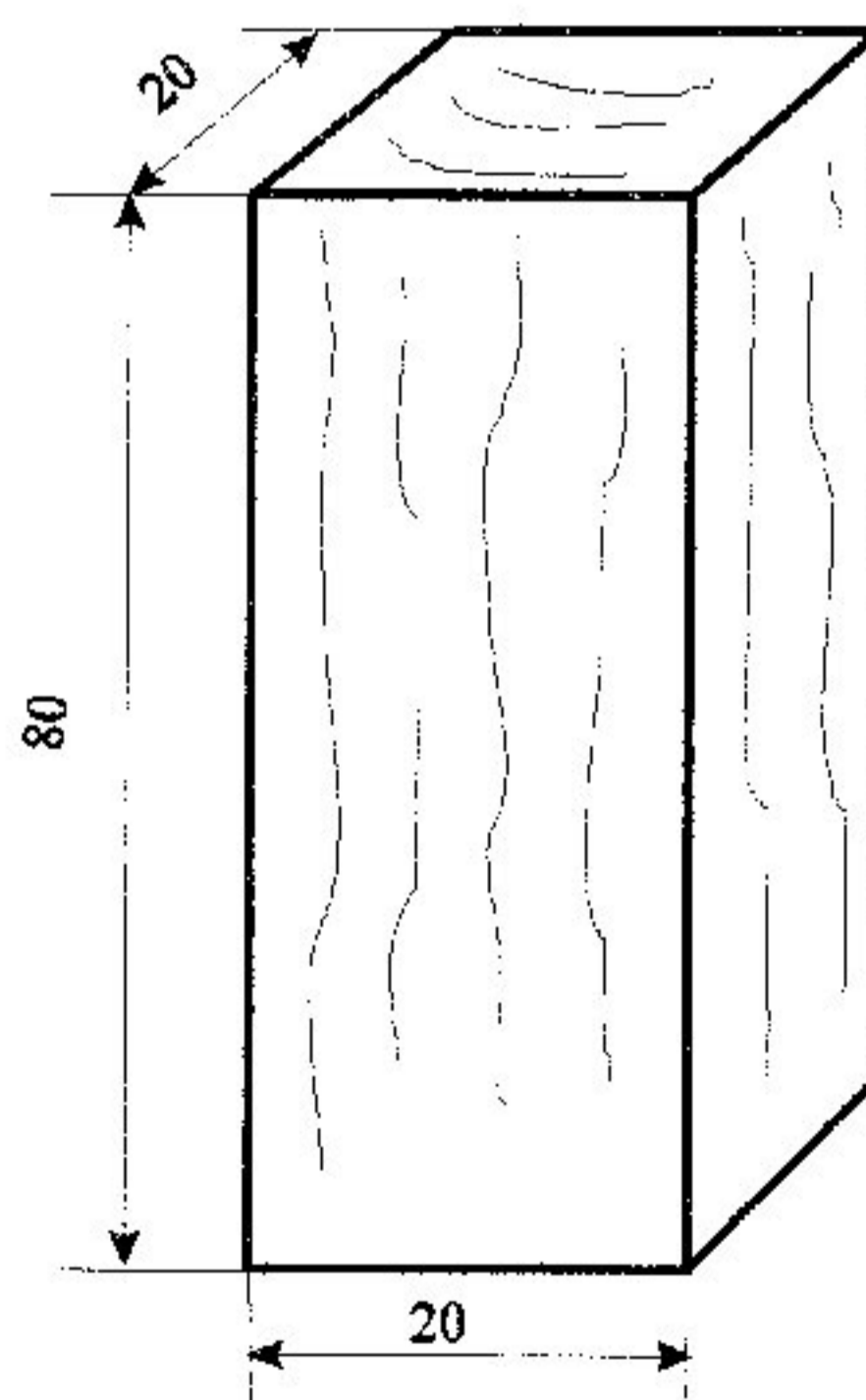


Fig. 5.3 - Corpo de Prova para Determinação da Tensão de Compressão

Os corpos de prova foram medidos, com a utilização de paquímetro, antes da realização do ensaio.

A tensão de compressão é obtida por:

$$\sigma_{wc} = \frac{N_{rup}}{a.b} \quad (5.5)$$

Onde:  $a.b$  = área da seção transversal do corpo de prova  
 $N_{rup}$  = carga de ruptura na compressão paralela às fibras  
 $\sigma_{wc}$  = tensão de compressão da madeira

Para 12 corpos de prova obtivemos o seguinte valor médio para a tensão de compressão:

$$\sigma_{wc} = 44,7 \text{ MPa}$$

### 5.3.3. Flexão Estática

O ensaio de flexão estática foi realizado conforme o esquema da figura 5.4, onde são obtidos os valores das cargas e das flechas no ponto central. Os corpos de prova destinados a este ensaio têm dimensões nominais de 3 x 4 X 81 cm, portanto com a relação  $L/h= 21$ , para não haver influência da força cortante, ROCCO LAHR (1983).

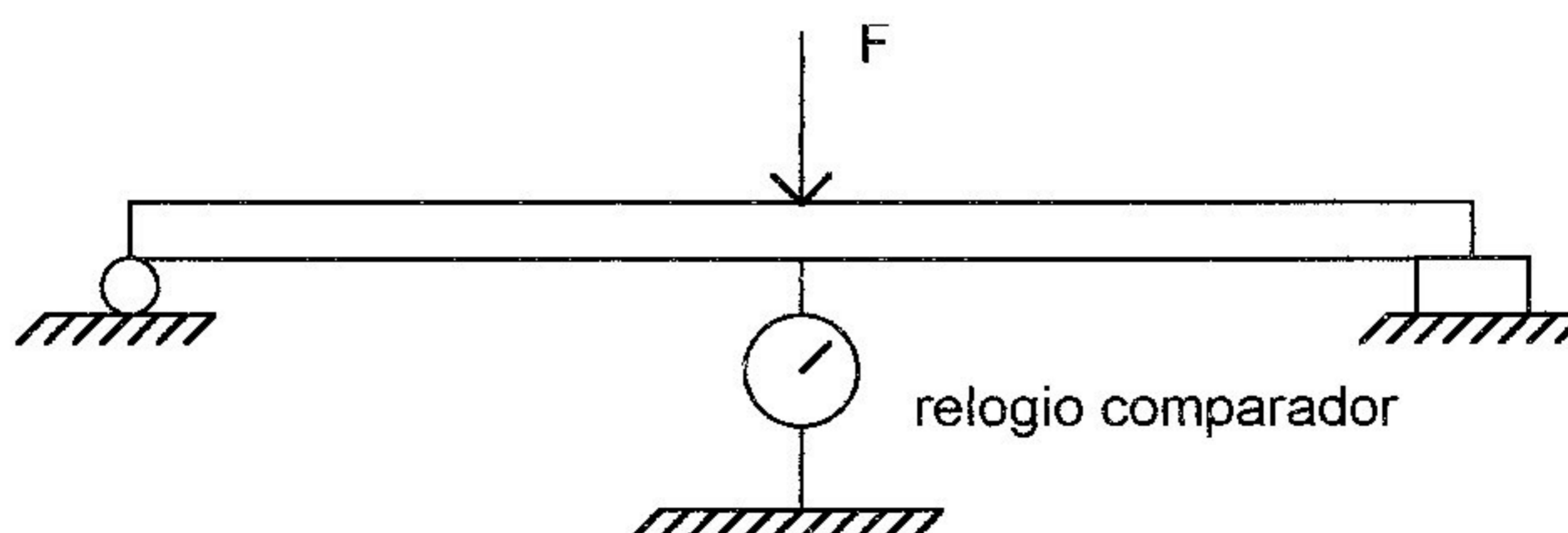
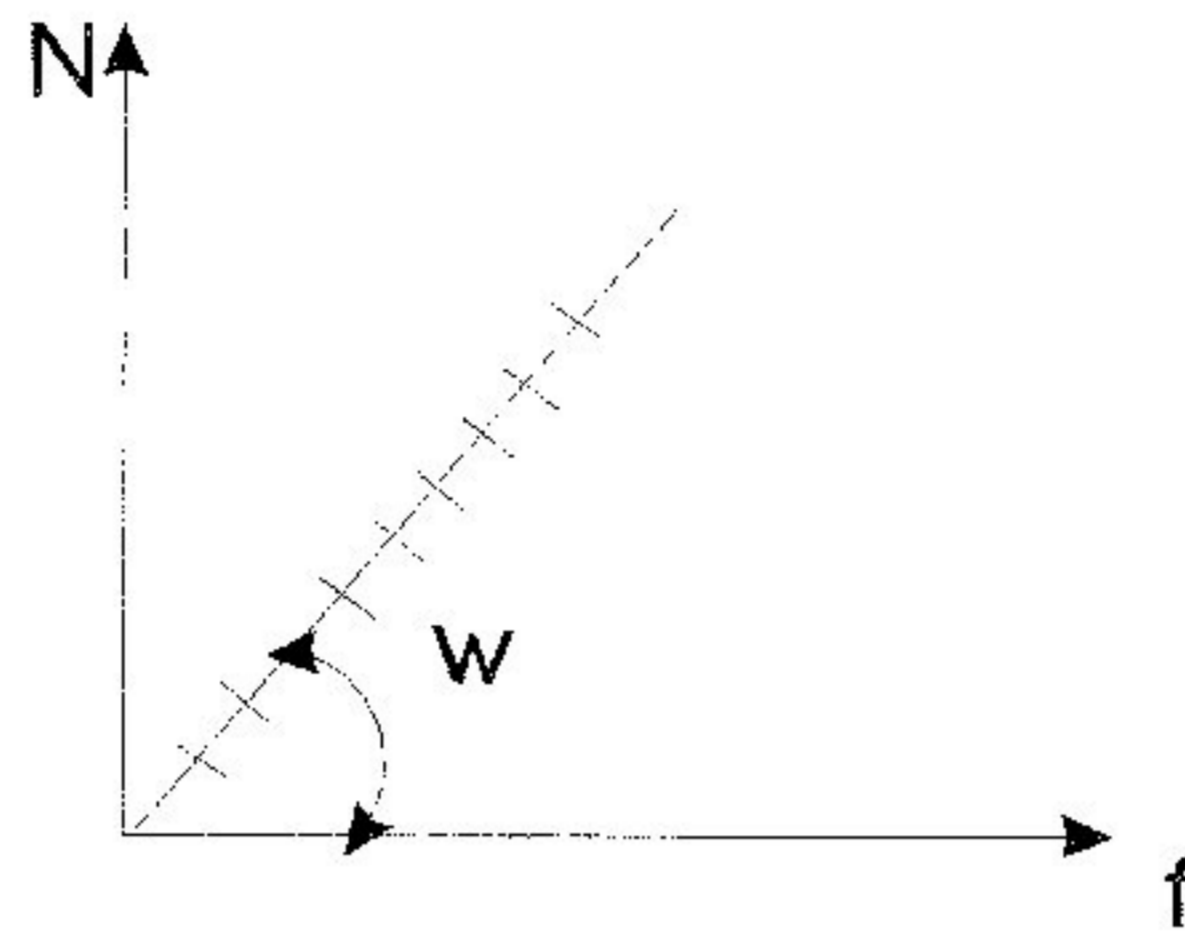


Fig. 5.4. Desenho Esquemático do Dispositivo Utilizado para Determinação do Módulo de Elasticidade na Flexão

A determinação do módulo de elasticidade na flexão foi feita através de uma regressão linear com pares de valores carga x flecha ( $N_i; f_i$ ), obtidos do ensaio de flexão. Através da fórmula tradicional da resistência dos materiais desprezando a influência da força cortante, obteve-se o módulo de elasticidade como é apresentado a seguir:



$$f = \frac{L^3}{48EI} N \quad \rightarrow \quad N = \frac{48EI}{L^3} f$$

$$\text{Assim:} \quad \text{tg } w = \frac{48EI}{L^3}$$

$$\text{Portanto:} \quad E = \frac{\text{tg } w L^3}{48I} \quad \text{ou} \quad E = \frac{\text{tg } w L^3}{4bh^3} \quad (5.6)$$

Onde :

$L$  = distância entre apoios

$N_i$  = carga

$f$  = flecha lida no centro da peça

$b$  = largura da peça

$h$  = espessura da peça

Na figura 5.5 é mostrado, como exemplo, as curvas obtidas para dois corpos de prova.

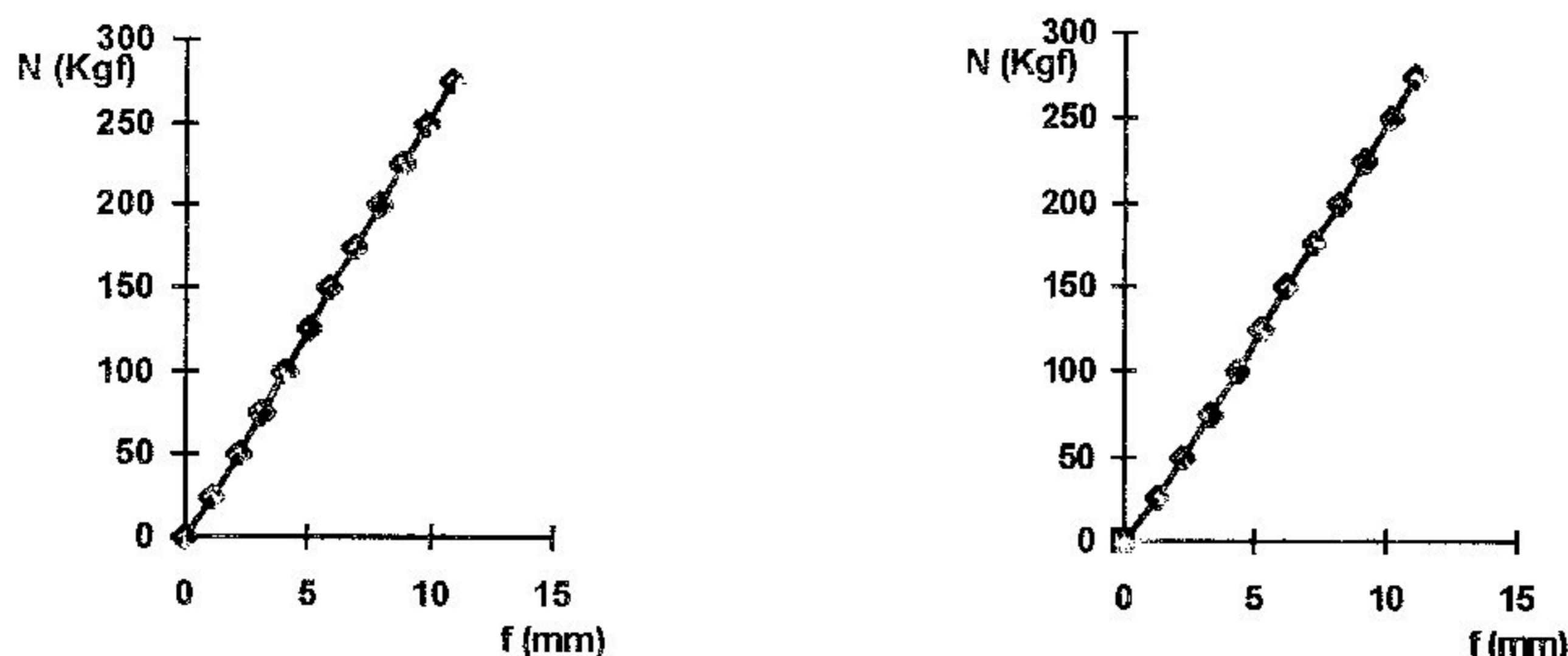


Fig. 5.5. Diagramas Carga x Flecha para dois Corpos de Prova

Usualmente, a resistência da madeira à flexão é obtida da seguinte expressão:

$$\sigma_{wb} = \frac{M_r}{I} y \text{ ou } \sigma_{wb} = \frac{3N_r L}{2bh^2} \quad (5.7)$$

Onde:

$M_r$  = Momento de ruptura

$I$  = Momento de inércia da seção transversal do corpo de prova, em relação a linha neutra

$y$  = Distância da linha neutra à borda mais solicitada

$\sigma_{wb}$  = Resistência da madeira à flexão simples

Esta equação é uma aproximação grosseira, pois ela é válida apenas no limite de proporcionalidade, e estamos utilizando a carga de ruptura.

Os resultados obtidos foram:

Módulo de elasticidade médio = 15999,3 MPa

Tensão de flexão média = 97,8 MPa



## 5.4. Caracterização da Ligação Adesiva

### 5.4.1. Determinação da Resistência ao Cisalhamento na Ligação Adesiva

Neste tipo de ligação a transmissão de carga se dá mediante as tensões de cisalhamento da linha adesiva. O dispositivo utilizado no ensaio foi o mostrado na figura 5.2.

O valor médio da resistência ao cisalhamento, paralelo às fibras na ligação colada, foi determinado utilizando-se corpos de prova do tipo proposto por MANTILLA, CARRASCO (1984). Na figura 5.6 está apresentado um desenho do corpo de prova utilizado.

A tensão de cisalhamento na ligação colada é obtido por:

$$\tau = \frac{N_{rup}}{A_c} \quad (5.8)$$

Onde:  $A_c$  = área colada  
 $N_{rup}$  = carga de ruptura  
 $\tau$  = tensão de cisalhamento na ligação colada

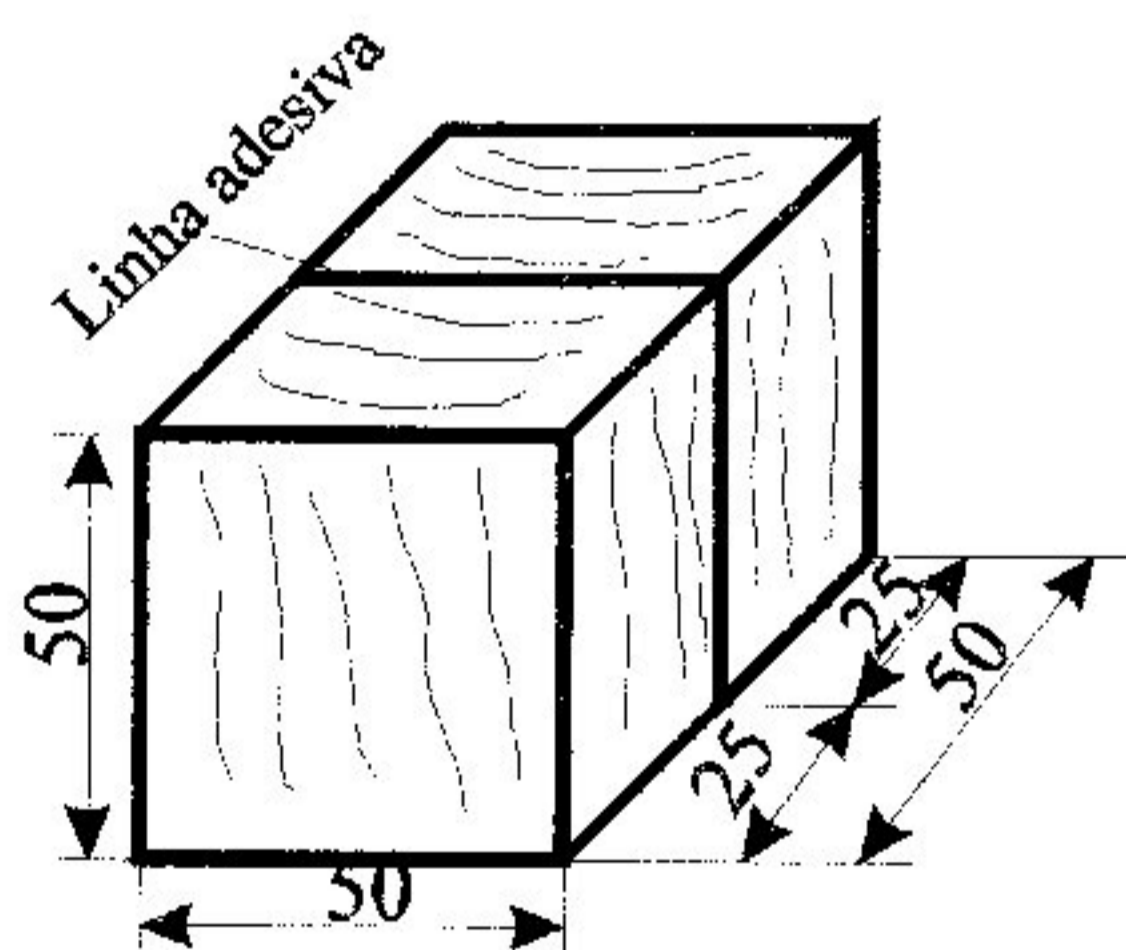


Fig. 5.6. Corpo de Prova para Determinação da Resistência ao Cisalhamento na Ligação Colada

Para 12 corpos de prova, o valor médio obtido foi:

Tensão cisalhamento média= 7,9 MPa

#### 5.4.2. Ligação Adesiva Solicitada ao Cisalhamento na Torção

O propósito deste ensaio foi verificar a resistência ao cisalhamento na ligação madeira - vidro/epoxi. Para isto, foi feita uma montagem, descrita a seguir, com o objetivo de determinar a resistência da linha adesiva solicitada por torção.

O esquema do corpo de prova utilizado para determinação do cisalhamento na torção está mostrado na figura 5.7, MANTILLA, CARRASCO (1984).

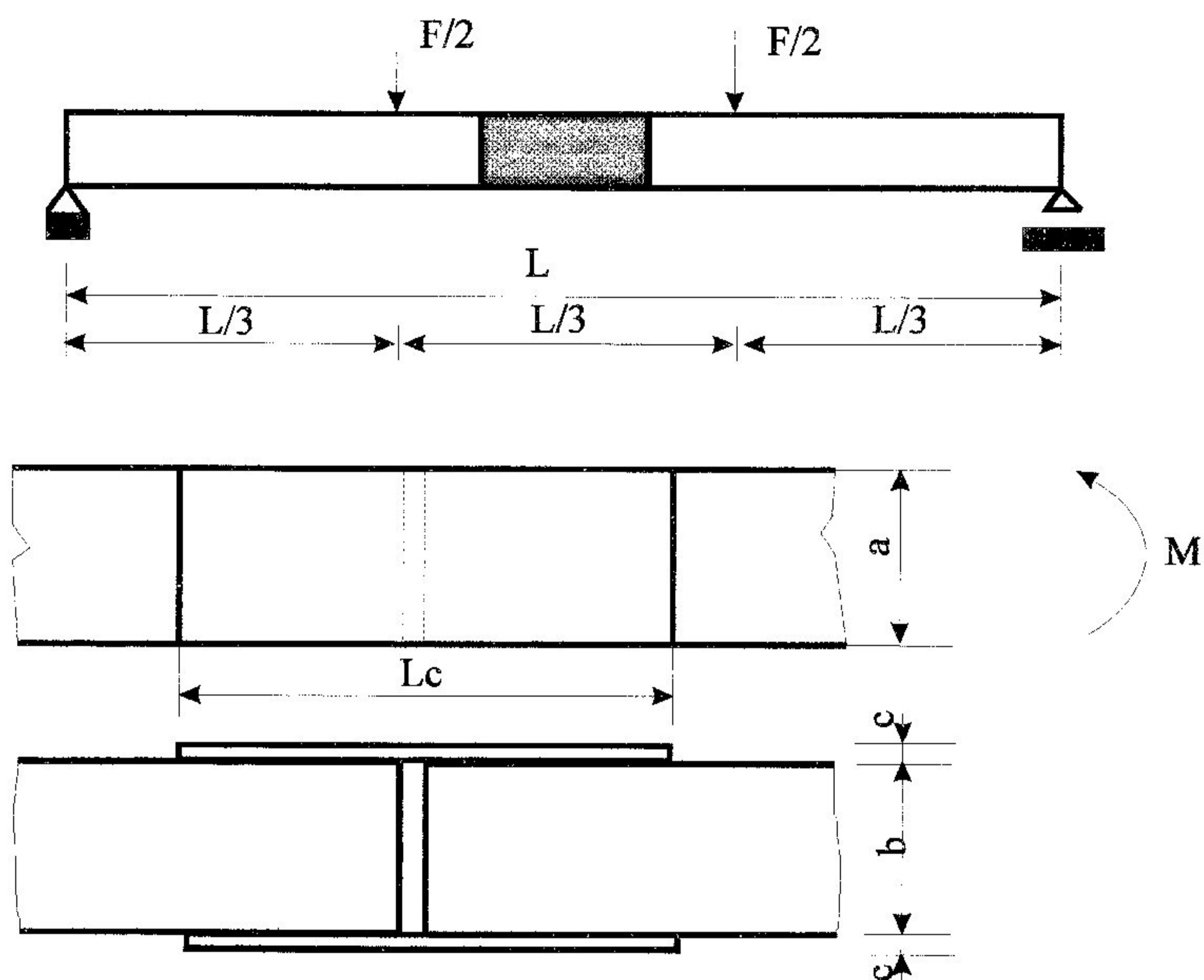


Fig. 5.7. Esquema do Corpo de Prova para Determinação do Cisalhamento na Torção

Observa-se pela figura 5.7 que o momento fletor atuante na ligação é constante. Assim, este deverá ser transmitido à cobrejunta por intermédio da linha adesiva, figura 5.8.

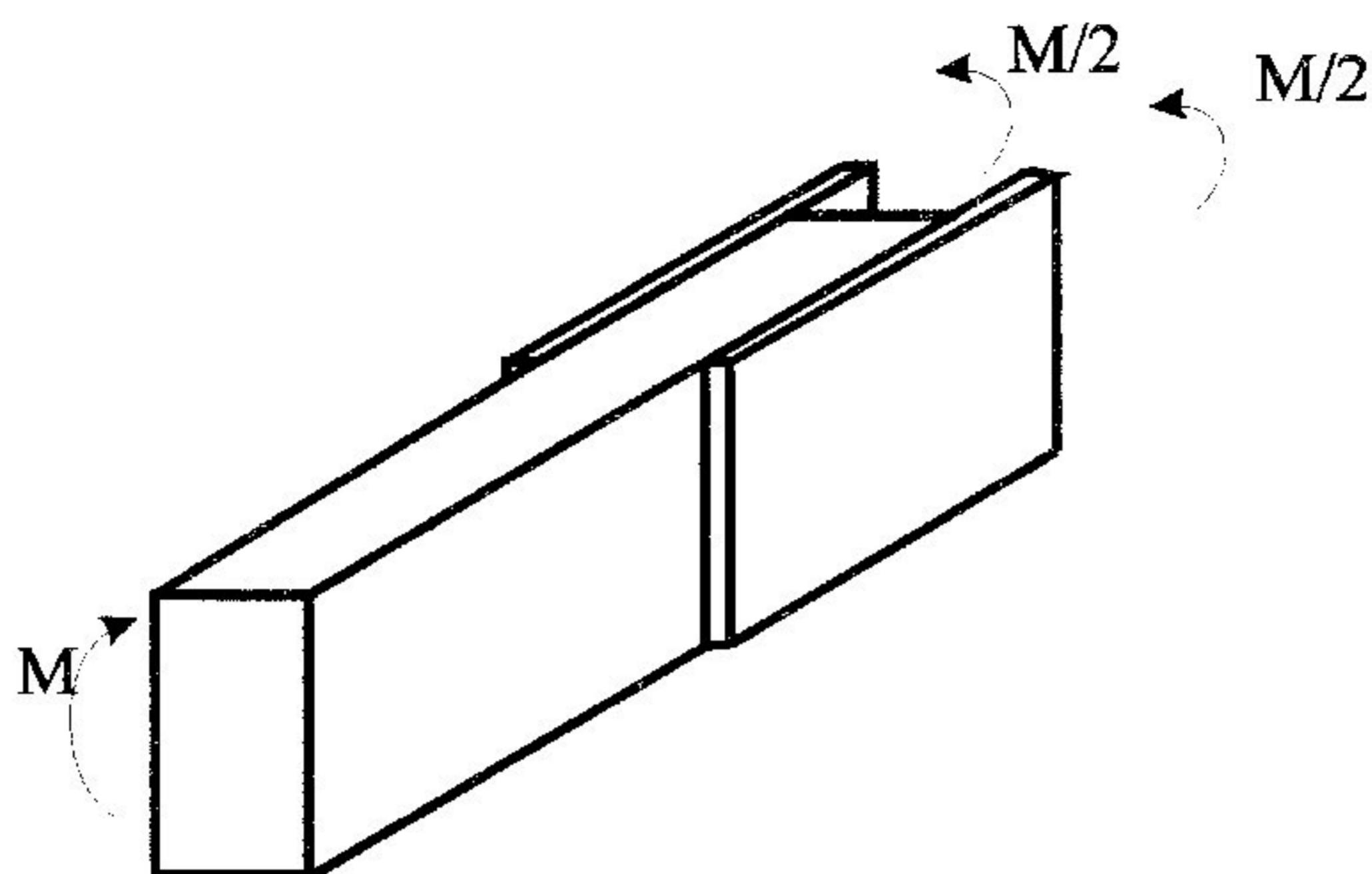


Fig. 5.8. Transmissão do Momento Fletor

A película adesiva estará sendo solicitada por torção, equivalente ao momento fletor transmitido à cobrejunta, figura 5.9.

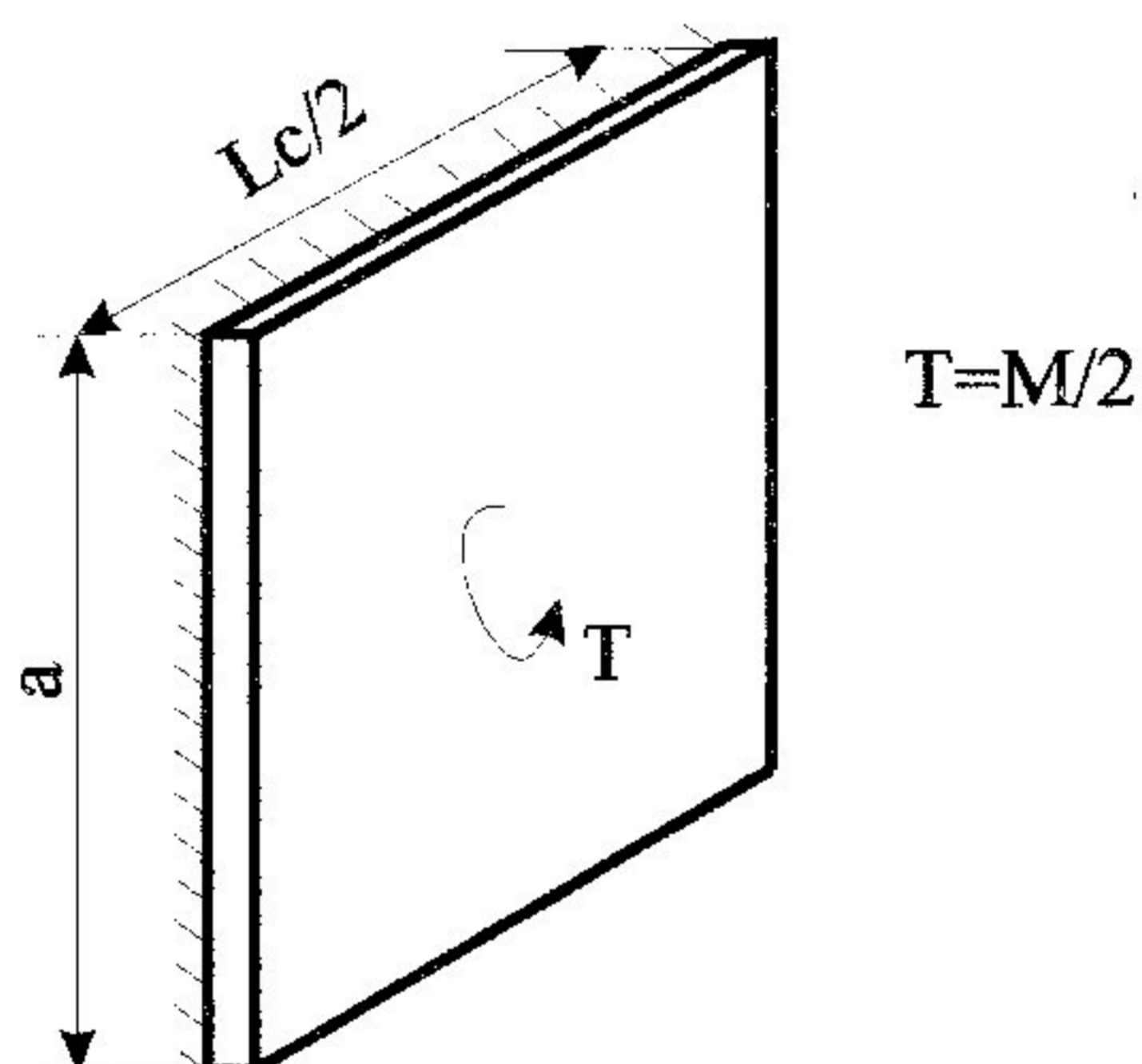


Fig. 5.9. Solicitação da Película Adesiva

Esta solicitação da película adesiva se traduz em um problema de torção simples, com seção retangular.

A distribuição das tensões de cisalhamento devido a torção no plano da película adesiva tem a forma da figura 5.10, onde a tensão máxima de cisalhamento se dá no ponto (A).

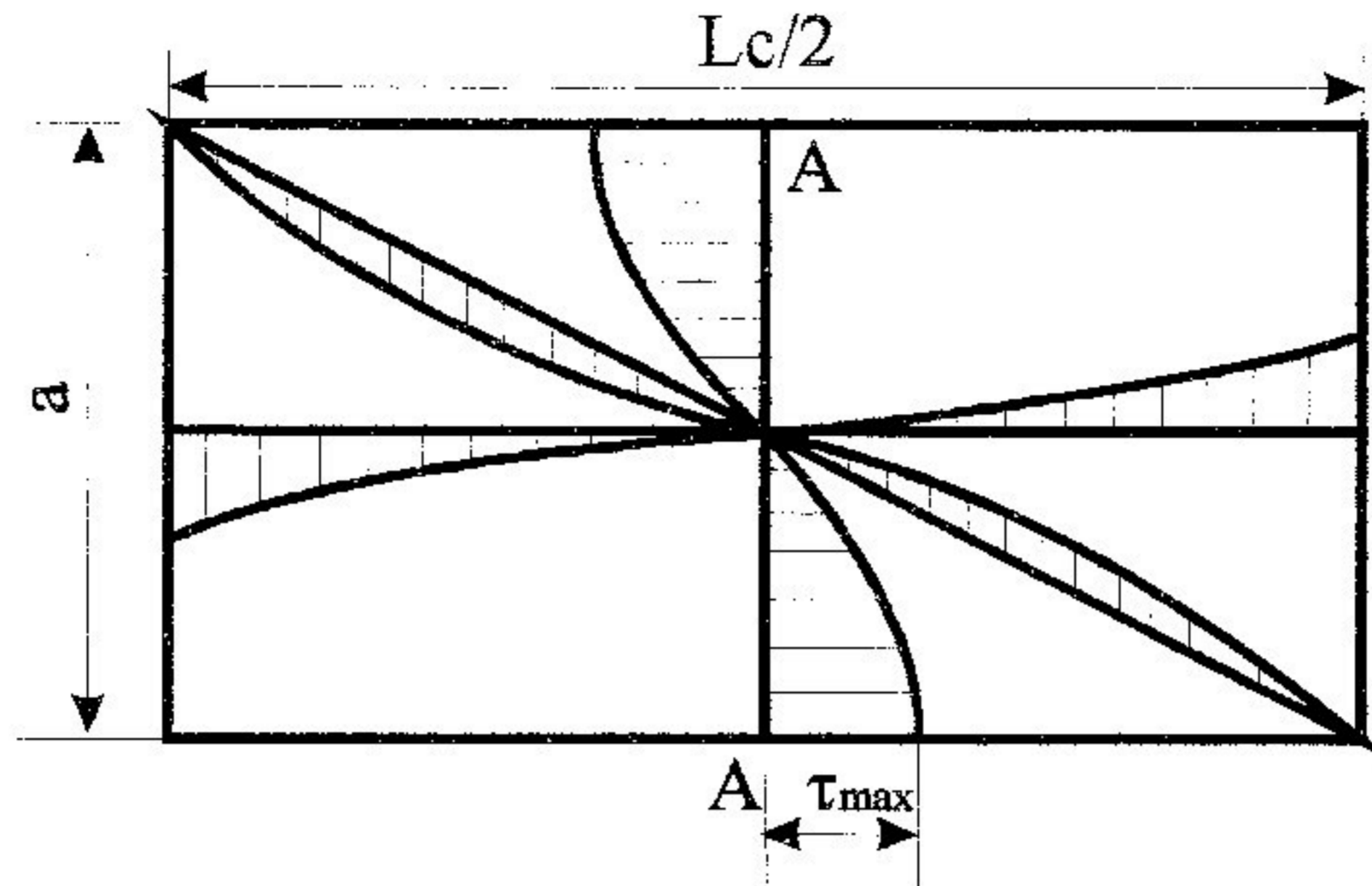


Fig. 5.10. Distribuição de Tensões de Cisalhamento na Torção , numa Seção Retangular, TIMOSHENKO (1985)

A equação que nos fornece a tensão máxima ao cisalhamento para uma seção submetida a torção, segundo TIMOSHENKO (1985):

$$\tau_{\max} = \tau_{\text{ato}} = \frac{T}{ka^2b} \quad (5.9)$$

Onde:

$T$  = momento de torção

$\tau_{\text{ato}}$  = tensão de cisalhamento na linha adesiva

$$k = 0,33 - 0,22 \frac{a}{b} + 0,10 \left( \frac{a}{b} \right)^2 \quad (5.10)$$

Sendo:  $a < b$  e  $b = Lc/2$

Para o ensaio, foi utilizado corpos de prova nas dimensões mostradas na figura 5.11. A cobrejunta foi construída utilizando três camadas de tecido de fibra de vidro.

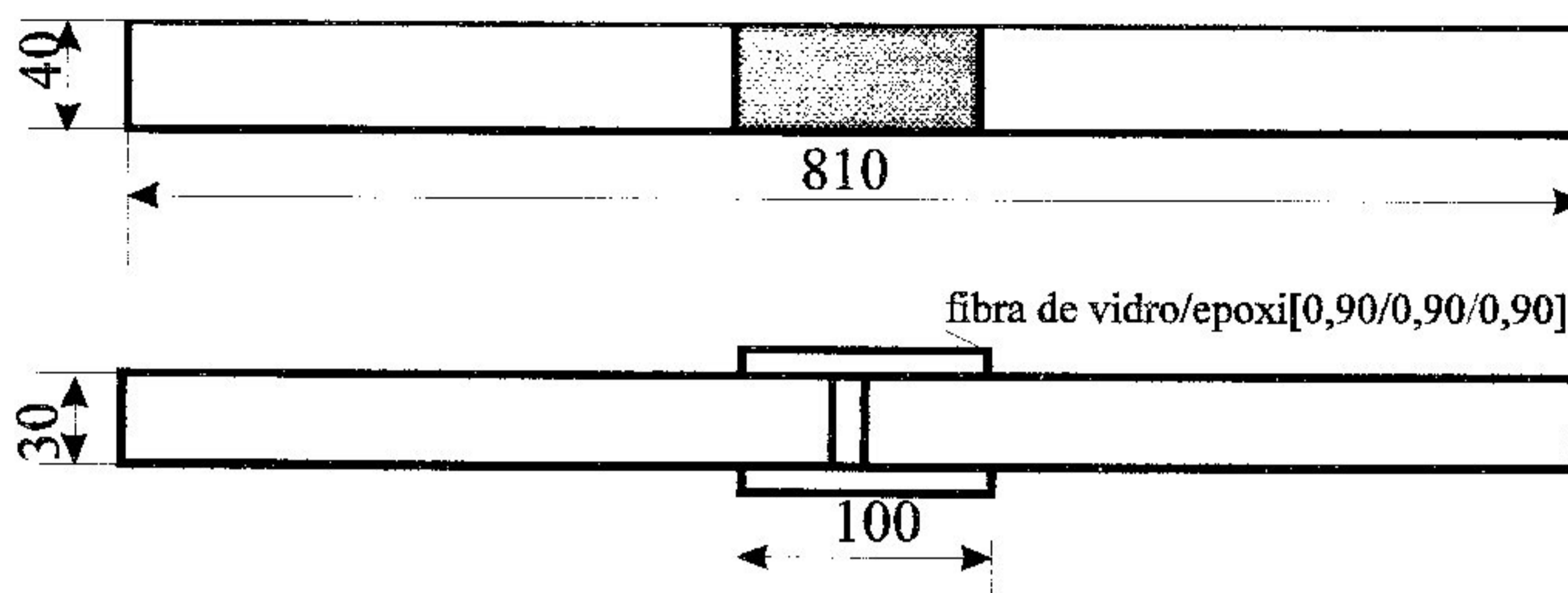


Fig. 5.11. Esboço do Corpo de Prova Utilizado

O resultado obtido foi:

Tensão de cisalhamento médio = 2,87 MPa

## 5.5. Caracterização das Lâminas de Vidro/Epoxi

### 5.5.1. Determinação das Propriedades Mecânicas das Lâminas de Vidro/Epoxi

Apesar dos MPRF apresentarem propriedades mecânicas anisotrópicas, eles podem ser tratados como materiais homogêneos macroscopicamente, e deste ponto de vista, assumimos como sendo uniformes algumas de suas propriedades físicas, como o peso específico e as frações em volume de fibra e resina (matriz),  $v_f$  e  $v_m$ .

Partindo da hipótese que é possível desprezar-se as imperfeições, tais como, vazios, impurezas, bolhas de ar, assume-se que é válida a expressão:

$$v_m + v_f = 1 \quad (5.11)$$

Este procedimento simplifica o cálculo destes parâmetros.

Na tabela 5.1 tem-se o peso específico da resina epoxi e da fibra de vidro, obtidos a partir de FRASCINO (1982) e JONES (1975).

Tabela 5.1. Peso Específicos ( $\rho$ ) dos Materiais Usados

Material	Resina Epoxi	Fibra de vidro
$\rho(\text{KN} / \text{m}^3)$	11,5	25,4

Algumas propriedades das fibras e da resina epoxi utilizadas, encontram-se na tabela 5.2, e as propriedades das lâminas com matriz de resina epoxi e frações de volume  $v_f = 0,60$  e  $v_m = 0,40$ , na tabela 5.3.

Tabela 5.2. Propriedades Mecânicas da Resina Epoxi e da Fibra de Vidro

Propriedade→ Material↓	E (MPa)	G (MPa)	$\nu$
Resina epoxi	3500	1280	0,35
fibra de vidro	72000	-	0,22

Tabela 5.3. Propriedades Mecânicas de Lâminas de Resina Epoxi Reforçadas por Fibra de Vidro.  $v_f = 0,60$  e  $v_m = 0,40$ .

$E_{11}$ (MPa)	$E_{22}$ (MPa)	$G_{12}$ (MPa)	$\nu_{12}$
53742	53742	8613	0,26

A impregnação de um tecido não acompanhada da aplicação de vácuo durante a cura, pode produzir uma lâmina de espessura não uniforme, mas no processo de fabricação, procurou-se com a aplicação de uma pressão uniforme, retirar os excessos de resina. Obteve-se com este procedimento um bom resultado, que pode ser verificado visualmente.

Após ensaiada a viga, foram feitos 4 corpos de prova, utilizando o laminado da alma. Esses corpos de prova foram pesados. Os pesos das quantidades de fibra e resina divididos pelos pesos específicos destes, fornecem o volume dos mesmos. Em seguida, dividindo o volume de um componente pela somatória dos volumes dos componentes, determinamos a fração de volume dos componentes em todos os casos.

Tabela 5.4. Características dos Corpos de Prova

cdp	peso total (N x 10 <sup>-2</sup> )	peso da fibras (N x 10 <sup>-2</sup> )	peso da resina (N x 10 <sup>-2</sup> )	vol. fibras (cm <sup>3</sup> )	vol. resina (cm <sup>3</sup> )	V <sub>f</sub>	V <sub>m</sub>
1	16	6,3	10,0	2,5	8,7	0,22	0,78
2	9,7	4,3	5,4	1,7	4,7	0,26	0,74
3	16,8	6,3	10,5	2,5	9,1	0,21	0,79
4	16,7	6,2	10,5	2,4	9,1	0,21	0,79

As lâminas foram curadas á temperatura ambiente.

A temperatura ambiente influi na viscosidade e na densidade da resina, o que pode alterar ligeiramente a determinação das frações de volume dos componentes. A umidade relativa do ar também pode alterar esses valores, e como não foram controladas essas duas variáveis, será assumido, nos cálculos, o valor de 0,20 para a fração em volume das fibras ( $v_f$ ), conforme se verifica na tabela 4.4. O fato de não serem considerados na determinação de  $v_f$  e  $v_m$ , os vazios, as bolhas de ar e algumas impurezas existentes nos "laminados", reforça tal procedimento que é a favor da segurança.

No trabalho de Frascino (1982) são deduzidas expressões que permitem a obtenção das propriedades de uma lâmina em função das propriedades, já conhecidas, de uma lâmina semelhante com frações de volume diferentes desta.

Nas expressões abaixo, o índice c indica uma propriedade ou fração de volume conhecida da lâmina de referência, então temos:

$$E_{11} = RE_{11c} + (1 - R)E_m \quad (5.12)$$

$$E_{22} = E_m E_{22c} / [(1 - R)E_{22c} + RE_m] \quad (5.13)$$

$$v_{12} = (1 - R)v_m + Rv_{12c} \quad (5.14)$$

$$G_{12} = G_m G_{12c} / [(1 - R)G_{12c} + RG_m] \quad (5.15)$$

Onde:

$$R = \left[ 1 + \frac{V_{mc}}{V_{fc}} V_f \right] \quad (5.16)$$

Logo, como:

$$v_m = 0,8 \quad , \quad v_f = 0,2 \quad , \quad v_{mc} = 0,4 \quad , \quad v_{fc} = 0,6$$

Temos:

$$R = 0,33$$

Como o tecido das lâminas é formado por fibras perpendiculares, então, temos:

$$E_{11} = E_{22}$$

Utilizando as equações (5.12) a (5.16), e os valores das tabelas 5.2 e 5.3, obtemos as propriedades das lâminas utilizadas, que estão mostradas na tabela 5.5.

Tabela 5.5. Propriedades Mecânicas de Lâminas de Resina Epoxi Reforçadas por Fibra de Vidro.  $v_f = 0,20$  e  $v_m = 0,80$ .

$E_{11}$ (MPa)	$E_{22}$ (MPa)	$G_{12}$ (MPa)	$\nu_{12}$
20247	20247	1787	0,32

Os dados da tabela 5.5 referem-se às propriedades existentes nas direções 1 e 2 ( principais ) das lâminas, porém numa estrutura de MPRF pode-se orientar as sucessivas camadas de lâminas em direções sempre distintas. Portanto, definindo-se um sistema de coordenadas global (x-y) para a estrutura, o sistema de coordenadas (1-2) de cada lâmina formará um ângulo  $\theta$  particular com o sistema global.



## Capítulo 6

### **FABRICAÇÃO DO PROTÓTIPO E ANÁLISE EXPERIMENTAL**

#### 6.1. Introdução

Dois processos construtivos para peças de formato complexo, quando se utiliza materiais compostos, podem ser utilizados: o "co-colado" e o "colado". No processo "co-colado" os vários componentes da peça são fabricados em conjunto, assim após a cura da resina obtém-se a peça pronta. No processo colado os vários componentes são fabricados isoladamente, e em seguida a peça é confeccionada colando-se os componentes.

Neste trabalho optou-se pelo processo "co-colado", na confecção do protótipo.

A viga construída é de seção transversal na forma caixão. Ela é constituída basicamente de duas mesas: uma de compressão e outra de tração.

Para haver transmissão de esforços cortantes verticais, de uma mesa à outra, as duas são tomadas solidárias por meio de tensores ou diafragmas, colocados a intervalos regulares. O conjunto é revestido de cada lado com lâminas de vidro/epoxi, solidárias às mesas e aos tensores, com a função de resistir aos esforços cortantes longitudinais. A figura 6.1 mostra a seção transversal desta viga.

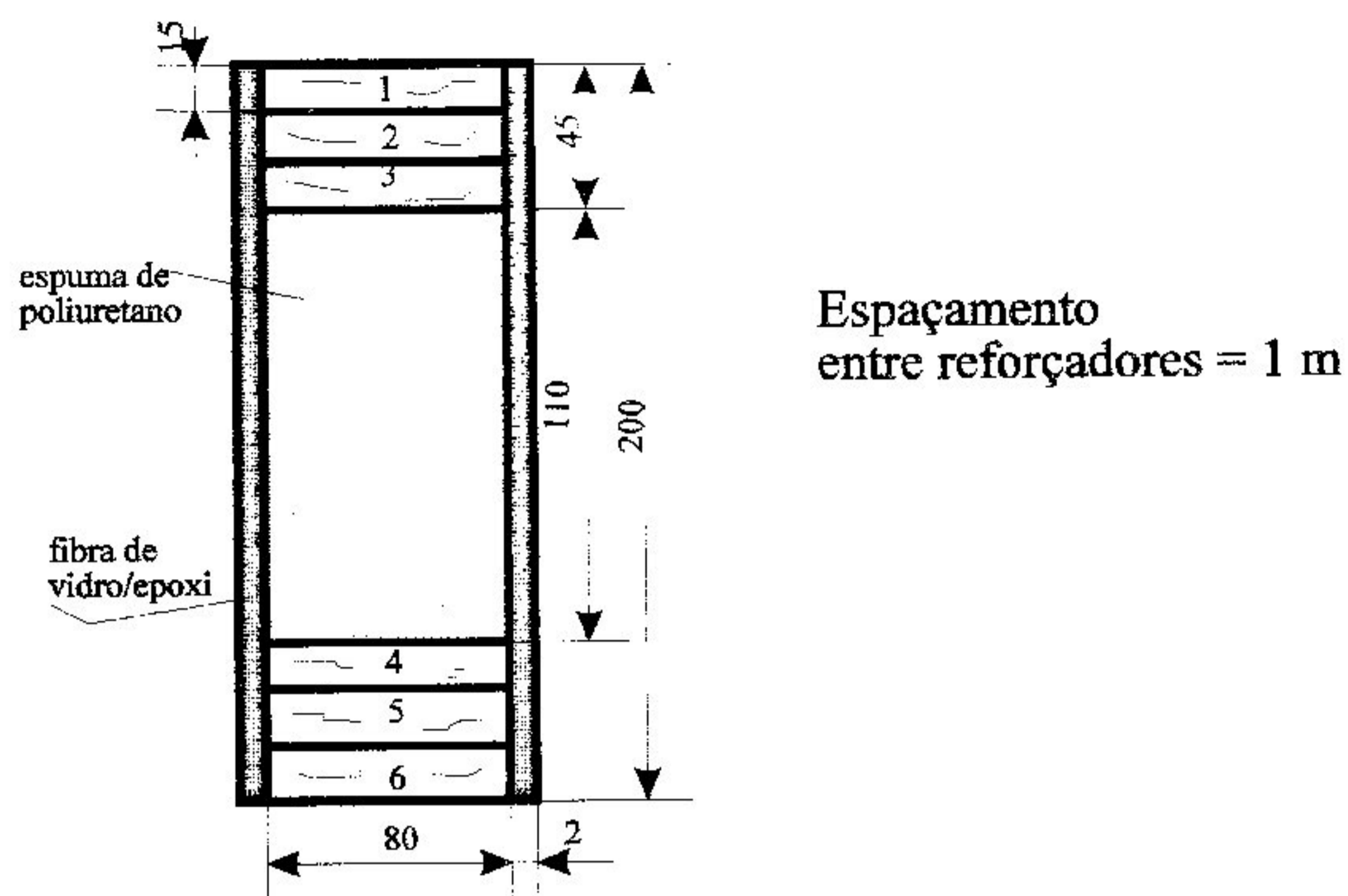


Fig. 6.1. Seção Transversal da Viga Ensaçada

## 6.2. Determinação das Dimensões da Viga

Para obtermos as dimensões da viga a ser ensaiada, optamos por utilizar alguns dados relativos a um avião leve, assim:

envergadura = 8,20 m

Área da asa = 11,7 m<sup>2</sup>

Asa retangular

Peso máximo = 4,8 kN

Corda = 1,426 m

Para o perfil NACA 65415 temos

$h = 0,2$  m

O Cálculo da distribuição de cargas ao longo da envergadura foi feito utilizando o método de Stender. Colocando a origem do eixo de referência na ponta da asa, obtemos os valores da força cortante e do momento fletor, em várias seções. Estes valores estão mostrados na tabela 6.1.

Tabela 6.1. Distribuição de Cargas ao Longo da Envergadura

seção	x (m)	Q (N)	M (N.m)
0	0	0	0
1	0,1	92,8	5,0
2	0,2	296,0	24,0
3	0,4	776,0	131,0
4	0,8	1906,0	667,0
5	1,2	3182,0	1685,0
6	1,7	4906,0	3707,0
7	2,3	7103,0	7310,0
8	2,9	9392,0	12258,0
9	3,6	12129,0	19791,0
10	4,1	14107,0	26350,0

Utilizando o boletim nº 29 do IPT-SP (1941), o momento fletor e a força cortante, mostrados acima, obtém-se as seguintes dimensões, para a viga caixão com almas de contraplacado aeronáutico:

espessura das mesas = 4,5 cm

espessura da alma = 2 mm

espaçamento entre reforçadores = 1m

espessura dos reforçadores = 1 cm

Como não existe um método para o cálculo de longarina caixão com as almas de lâminas de fibra de vidro/epoxi, construiu-se a longarina com as dimensões obtidas para viga caixão com alma de contraplacado aeronáutico.

### 6.3. Fabricação da Viga

Para a confecção das mesas foram preparadas seis lâminas de madeira freijó de comprimento igual a 4m e espessura igual a 1,5 cm. Em vista do comprimento das tábuas disponíveis no laboratório, serem menor

que 4m, foi necessário fazer uma emenda para conseguir o comprimento desejado. As emendas adotadas foram as biseladas, visto que é uma boa alternativa na união de lâminas, já que resultados de ensaios indicam que as lâminas com esse tipo de emenda possuem a mesma resistência de lâminas contínuas, FREAS (1962) apud MANTILLA, CARRASCO (1989). As emendas biseladas devem ser feitas com um mínimo de ligação adesiva normal às fibras, isto é, com o mínimo de inclinação. A inclinação adotada para o bisel foi de 1: 9, pois a partir desta inclinação o ganho na resistência é muito pouco, FREAS (1962) apud MANTILLA, CARRASCO (1989).

A fabricação das emendas biseladas foi realizada com a utilização de uma serra circular e uma plaina, onde através de um gabarito consegue-se o alinhamento adequado.

Após o posicionamento prévio das lâminas, estas foram coladas, prensadas até a cura do adesivo.

A cola empregada foi o Araldit ( resina epoxi ) que é termoplástica, sendo a colagem das lâminas obtida sob pressão, durante um tempo de aproximadamente 12 horas.

Para obter-se uma boa aderência é desejável que a superfície a ser colada esteja limpa e se faz necessário a aplicação de uma camada de cola nas duas faces, afim de evitar a formação de bolhas.

Depois de construída as mesas, os reforçadores foram colocados na posição prevista, sendo logo em seguida colados. Os reforçadores são peças de 1,0 x 8,0 x 11,0 cm.

O espaço livre entre as mesas e os reforçadores foi preenchido com espuma de poliuretano. O processo de fabricação da espuma é muito simples. Faz-se a mistura dos dois componentes na proporção de 50%, após alguns segundos a espuma começa a se formar. O volume da espuma resultante é de cerca de 10 a 15 vezes o volume da mistura.

Após a espuma ocupar o volume entre as mesas e os reforçadores, ela foi cortada e lixada para ficar nivelada com a superfície lateral.

Para a laminação das almas foram utilizadas 7 camadas de tecido de fibra de vidro, com a orientação  $[0,90/\pm 45/0,90/\pm 45/0,90/\pm 45/0,90]$ , totalizando uma espessura de 2 mm.

Antes de iniciar a laminação, os tecidos de fibras devem estar cortadas e a superfície lateral da madeira limpa, para ser aplicada uma fina camada de resina, e a seguir os tecidos de fibra sucessivamente. Nessa

operação deve-se usar um pincel para fazer a resina atravessar todos os tecidos, afim de que a impregnação seja a mais homogênea possível. Na impregnação manual, é fácil de se controlar visualmente a qualidade do processo, pois o índice de refração das sucessivas camadas deve ser o mais homogêneo possível, provocando um aparente "desaparecimento" das fibras na medida que estão sendo permeadas pela resina.

Após a última camada de fibra, é colocada um filme de plástico e a seguir uma placa de madeira fixada sobre as camadas de fibra, afim de produzir um pressão uniforme para a cura.

Minutos após ser a resina misturada ao catalisador, sua viscosidade vai aumentando gradativamente até o total endurecimento. É conveniente então, prepará-la para ser usada ao longo das etapas do processo, deixando as quantidade de resina e catalisador necessárias para toda a operação de laminação.

Com a finalidade de determinar qual dos dois tipos de resina epoxi utilizado ( Araldit e Scuna) era mais eficiente na impregnação das fibras de vidro, metade da viga possui almas fabricadas com o Araldit e a outra metade com a resina epoxi Scuna.

#### 6.4. Ensaio Preliminares

Para as estruturas de madeira laminada colada é necessário se conhecer as propriedades mecânicas de cada lâmina. Neste trabalho irá-se apenas determinar o módulo de elasticidade das lâminas de madeira.

Após a construção da viga, retirou-se dois corpos de prova de dimensões 1 x 2 x 20 cm, de cada lâmina de madeira. Esses corpos de prova foram submetidos a flexão, afim de se obter os módulos de elasticidade.

O dispositivo de ensaio utilizado é idêntico ao da figura 5.4 e o procedimento idêntico ao do item 5.3.3.

O resultado obtido encontra-se na tabela 6.2.

Tabela 6.2. Resultados Obtidos na Determinação do Módulo de Elasticidade das Lâminas de Madeira

lâmina	módulo de elasticidade médio, à flexão (MPA)
1	19935,5
2	20674,5
3	20008,7
4	20835,8
5	20315,3
6	20165,6

### 6.5. Medida de Deformação

As deformações da viga foram medidas através de extensômetros elétricos posicionados em lugares pré-estabelecidos.

A seguir será apresentado uma descrição dos esquemas do grupo de extensômetros utilizados ( Rosetas ) e a formulação para determinação das deformações.

Foram determinadas as deformações nas direções x,y e a distorção ou deformação por cisalhamento.

#### 6.5.1. Deformação de um Extensômetro

Na figura 6.2. é mostrado um extensômetro na linha OB, formando um ângulo  $\phi$  com o eixo x. Após aplicação de um deslocamento  $\Delta x$ , na direção x, ( figura 6.2-a); a linha  $\overline{OA}$  passa a ser  $OA'$  e a linha OB cresce de  $\Delta L$  passando a ser a linha OB.

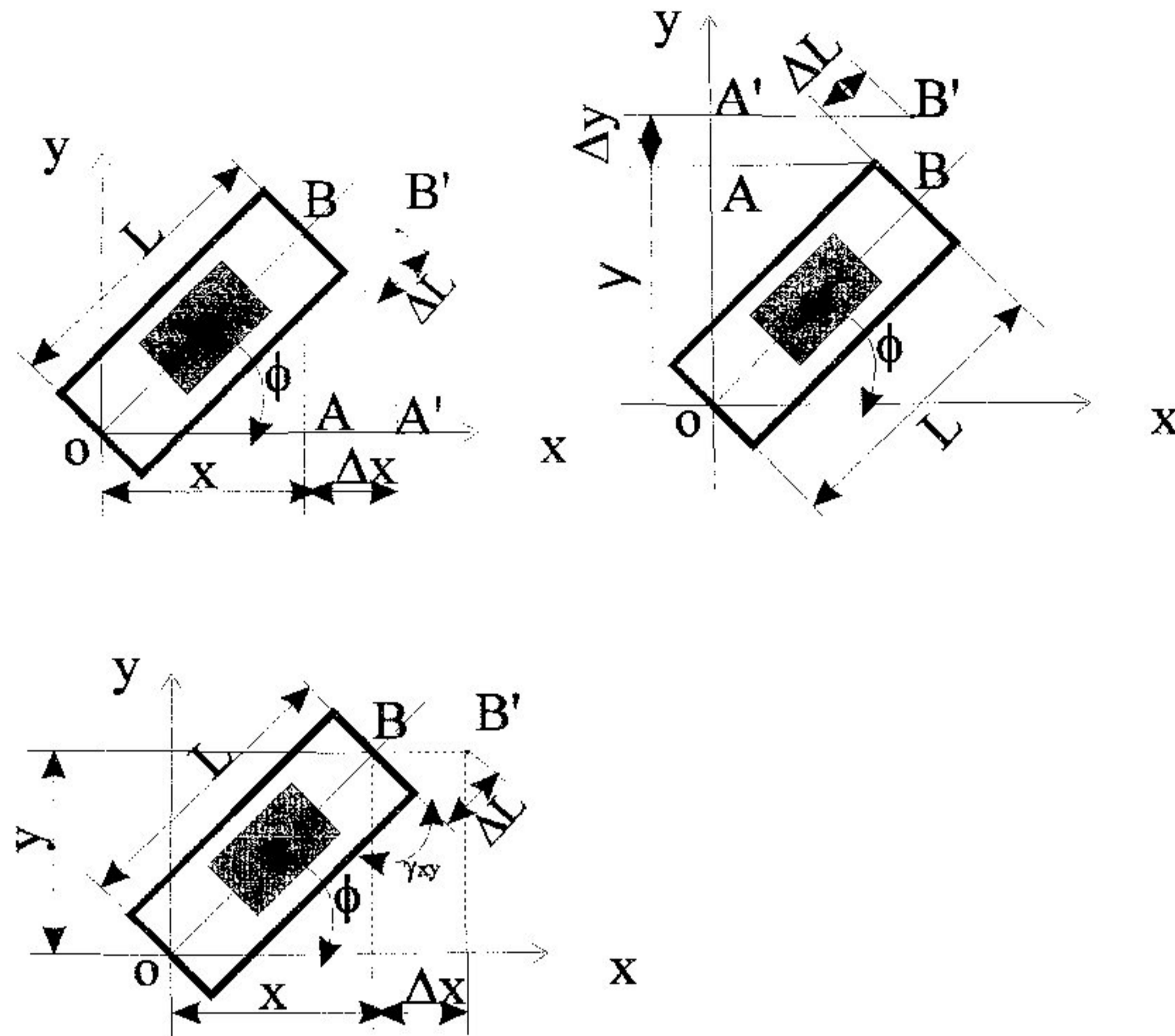


fig.6.2. Esquema das Deformações de um Extensômetro

A deformação na direção x é:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta_x}{X}$$

A deformação medida pelo extensômetro é:

$$\varepsilon_\phi = \frac{\Delta_L}{L}$$

Onde:

$$L = \frac{X}{\cos\phi}; \quad \Delta_L = \Delta_x \cos\phi$$

$$\text{Tem-se:} \quad \varepsilon_\phi = \frac{\Delta_x \cos^2 \phi}{X} = \varepsilon_x \cos^2 \phi \quad (6.1)$$

A seguir aplicamos um deslocamento na direção y, figura 6.2-b, através de relações geométricas análogas entre  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_\phi$  e com o ângulo  $90^\circ - \phi$ , tem-se:

$$\varepsilon_{\phi} = \varepsilon_y \cos^2(90 - \phi) = \varepsilon_y \sin^2 \phi \quad (6.2)$$

Finalmente aplica-se uma distorção devido à tensão de cisalhamento,  $\tau_{xy}$ , figura 6.2-c. A deformação na direção do extensômetro devido ao alongamento  $\Delta_L$  é:

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{\Delta_L}{L}$$

$$\text{Com, } L = \frac{y}{\sin \phi}$$

$$\Delta_L = \Delta_x \cos \phi$$

$$\text{Sendo: } \Delta_x = y \operatorname{tg} \gamma_{xy} \cong y \gamma_{xy}$$

$$\text{Tem-se: } \Delta_L = y \gamma_{xy} \cos \phi$$

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{y \gamma_{xy} \cos \phi}{y / \sin \phi} = \gamma_{xy} \sin \phi \cos \phi \quad (6.3)$$

Agora, atuando simultaneamente  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ , a deformação do extensômetro será a soma algébrica das equações (6.1), (6.2) e (6.3). Desta maneira obtém-se:

$$\varepsilon_{\phi} = \varepsilon_x \cos^2 \phi + \varepsilon_y \sin^2 \phi + \gamma_{xy} \sin \phi \cos \phi \quad (6.4)$$

Escrevendo de outra maneira, temos:

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\phi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\phi \quad (6.5)$$

Para conhecer as deformações  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ , é necessário efetuar medidas de 3 deformações,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , em três direções,  $\phi_1, \phi_2$  e  $\phi_3$ , em relação ao eixo x. Assim:



$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\phi_1 + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\phi_1 \\
 \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\phi_2 + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\phi_2 \\
 \varepsilon_3 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\phi_3 + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\phi_3
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Com as equações (6.6), pode-se determinar  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ .

### 6.5.2. Deformação em uma Roseta Trevo

Considere-se a roseta da figura 6.3, formada por 3 extensômetros. Os ângulos de inclinação em relação ao eixo x são;  $\phi_1 = 0^\circ$ ;  $\phi_2 = \theta$ ;  $\phi_3 = 90^\circ$ , substituindo na equação (6.6), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \varepsilon_x \\
 \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta \\
 \varepsilon_3 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \varepsilon_y
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Resolvendo para  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon_1 \\
 \varepsilon_y &= \varepsilon_3 \\
 \gamma_{xy} &= \frac{2\varepsilon_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

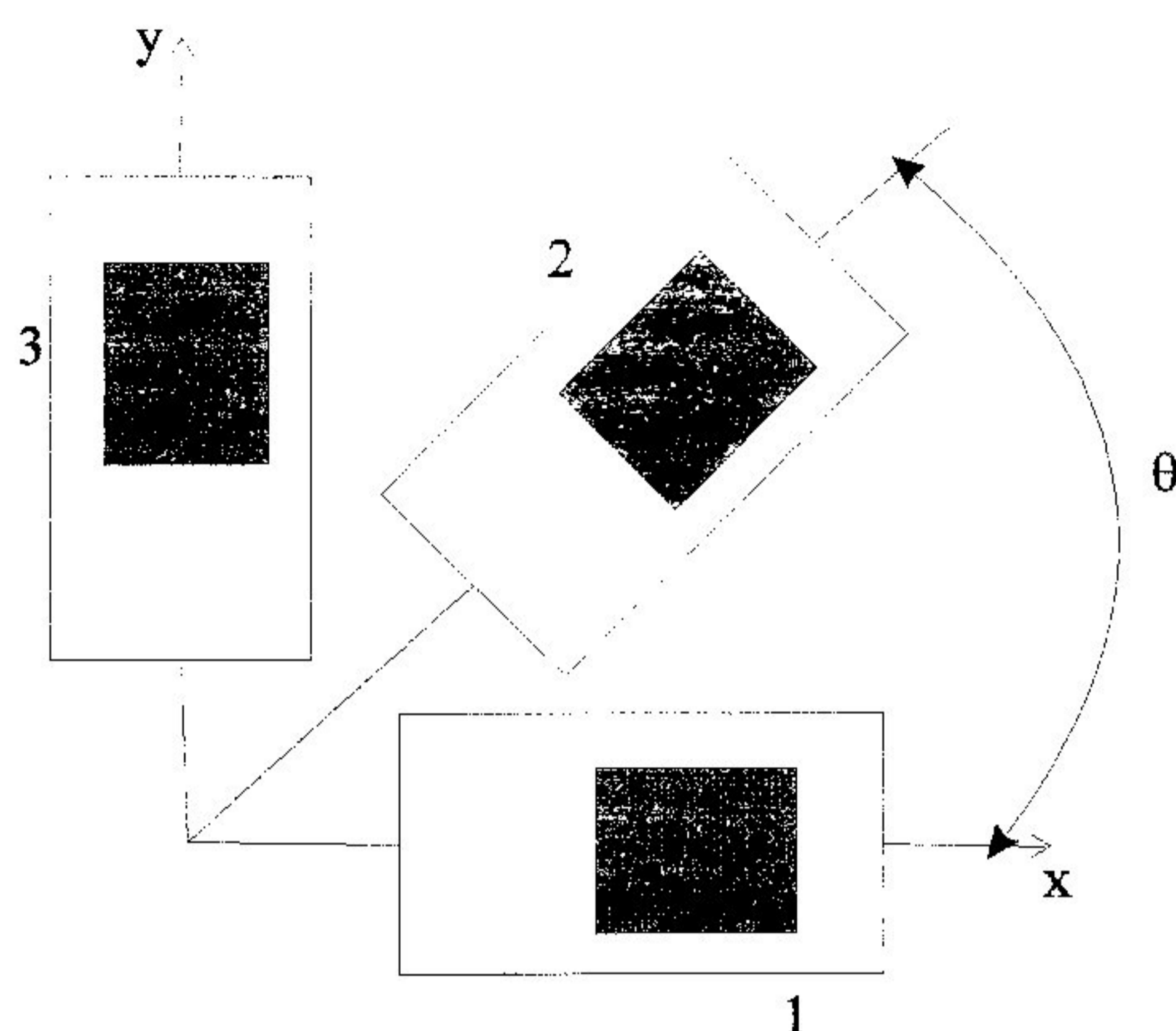


Fig. 6.3. Roseta Trevo

## 6.6. Instrumentação da Viga

Para a determinação das deformações ao longo da espessura da viga, foram instalados 20 extensômetros elétricos, sendo 6 rosetas.

A linha de extensômetros foi colada a 30 cm do centro da viga, ponto de aplicação da carga, afim de evitar as perturbações provocadas nas tensões devido a região de aplicação do carregamento, segundo o princípio de Saint-Venant. MANTILLA, CARRASCO (1989) verificou através de ensaios em vigas, que as tensões longitudinais não sofrem perturbação devido ao apoio, a partir de uma distância de 1,5 vezes a espessura. Também, verificou que para as tensões de cisalhamento, não se aplica o princípio de Saint-Venant.

A posição de cada extensômetro foi marcada cuidadosamente, antes da colagem, na superfície que foi lixada e limpa anteriormente. Na figura 6.4 é mostrado a posição dos extensômetros

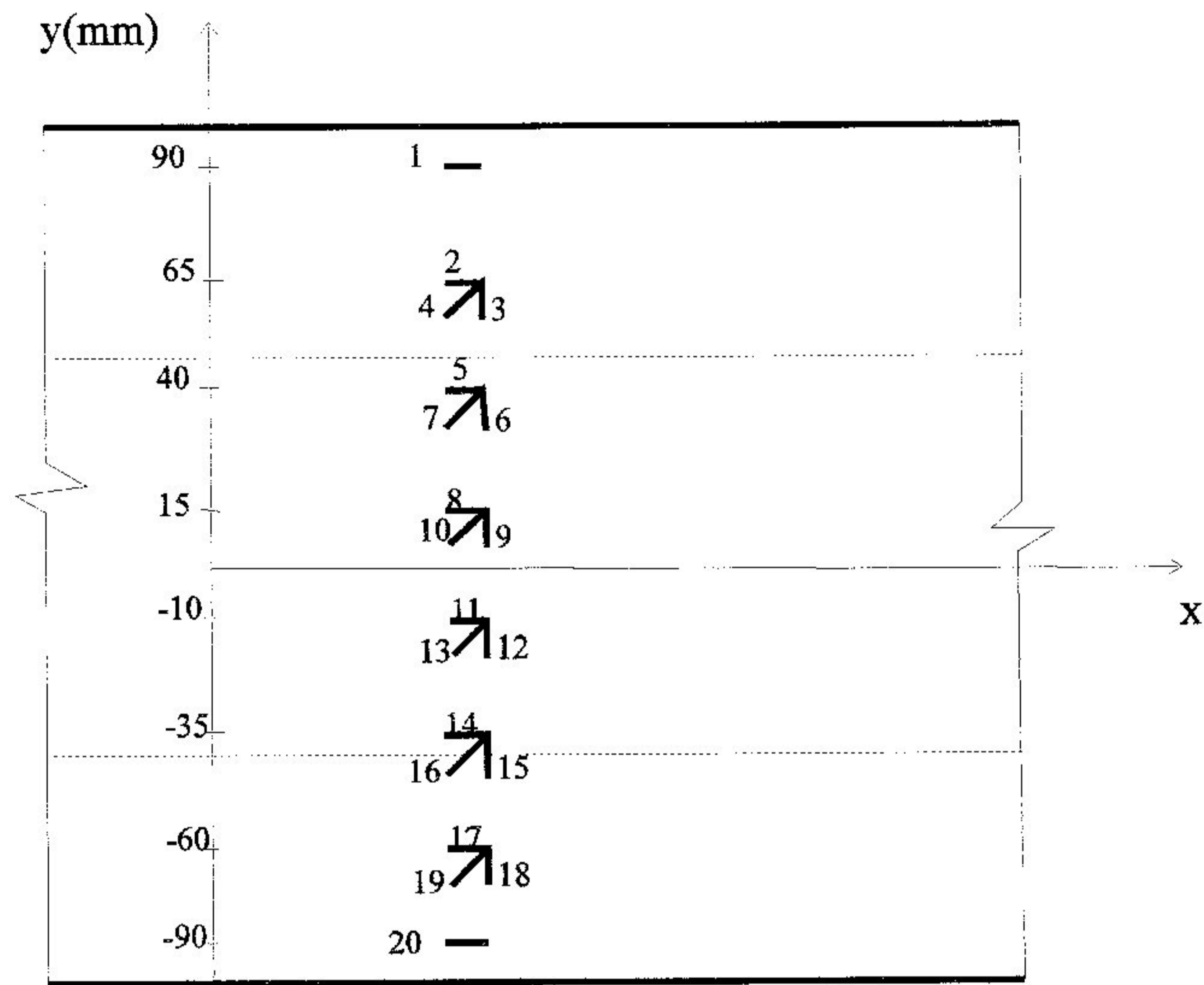


Fig. 6.4. Posição dos Extensômetros

Para a determinação da elástica da viga, foram utilizados 3 relógios comparadores, espaçados igualmente.

### 6.7. Ensaio da Viga

Optou-se por fazer o ensaio na viga bi-apoiada. A distância entre apoios foi de 3 metros, e a aplicação da carga foi no meio do vão. A figura 6.5 mostra o esquema do ensaio.

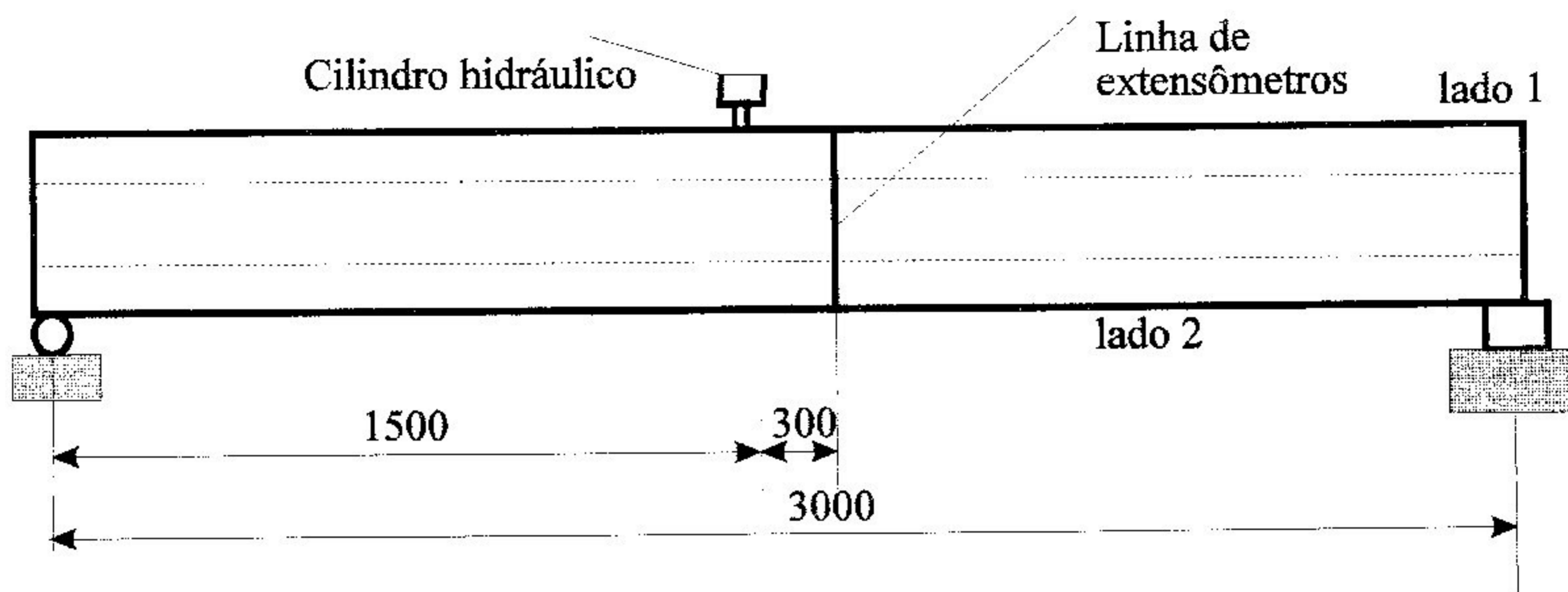


fig. 6.5. Esquema do Ensaio

A viga foi ensaiada no lado 1 e no lado 2. Foram feitos dois ensaios para cada lado. Devido a ponte de extensometria do LAAES ter apenas 10 canais, o ensaio foi realizado lendo as medidas de 10 extensômetros e depois se repetiu o ensaio lendo os outros 10 extensômetros.

A carga foi aplicada em intervalos de 1250 N. Após aplicação de cada intervalo de carga foram lidos os valores das deformações e dos deslocamentos.

No pré-carregamento se verificou que com uma carga de 10000 N começou o aparecimento de pequenos descolamento da interface vidro/epoxi - madeira. Assim, o carregamento máximo adotado foi de 8750 N.

## 6.8. Análise e Interpretação dos Resultados dos Ensaios

As figuras 6.6 a 6.10 apresentam os valores médios das deformações obtidas a partir das leituras dos extensômetros, durante ensaio. Foram determinadas as deformações Longitudinais, normais ao eixo da viga e as distorções em cada ponto onde estão colocados as rosetas.

As deformações longitudinais foram obtidas através da leitura dos extensômetros instalados paralelamente ao eixo da viga. As deformações normais às fibras foram obtidas através da leitura dos extensômetros instalados normalmente ao eixo da viga. As deformações por cisalhamento

foram determinadas através das deformações dos extensômetros das rosetas trevo. Estas deformações foram calculadas a partir das equações (6.8).

Nos gráficos das deformações longitudinais apresenta um valor de pico no ponto a 15 cm do centro, indicando evidências de flambagem nas placas da alma.

As figuras 6.11 e 6.12 apresentam os valores médios dos deslocamentos obtidos.

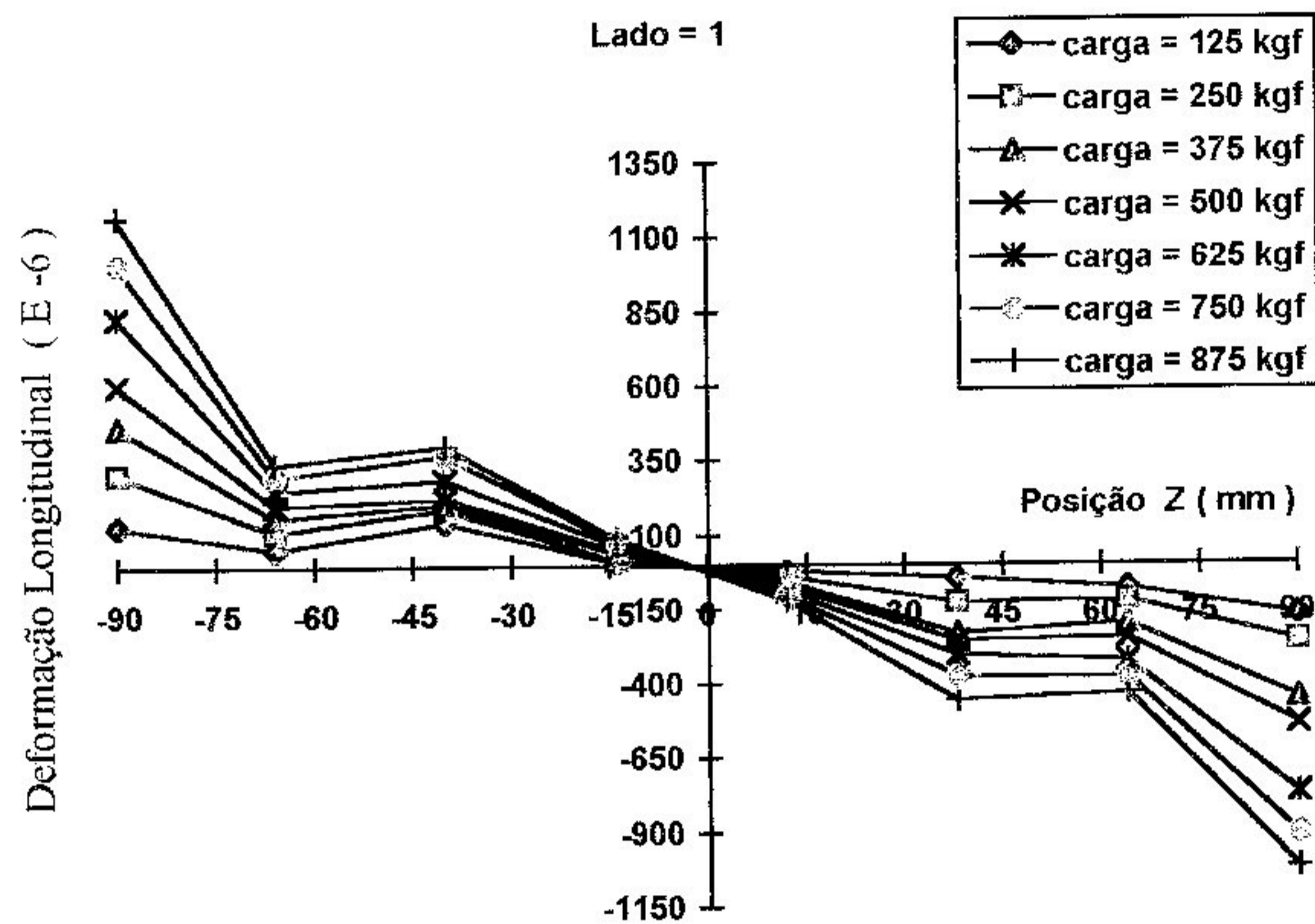


Fig. 6.6. Diagrama Deformação Longitudinal - Lado 1

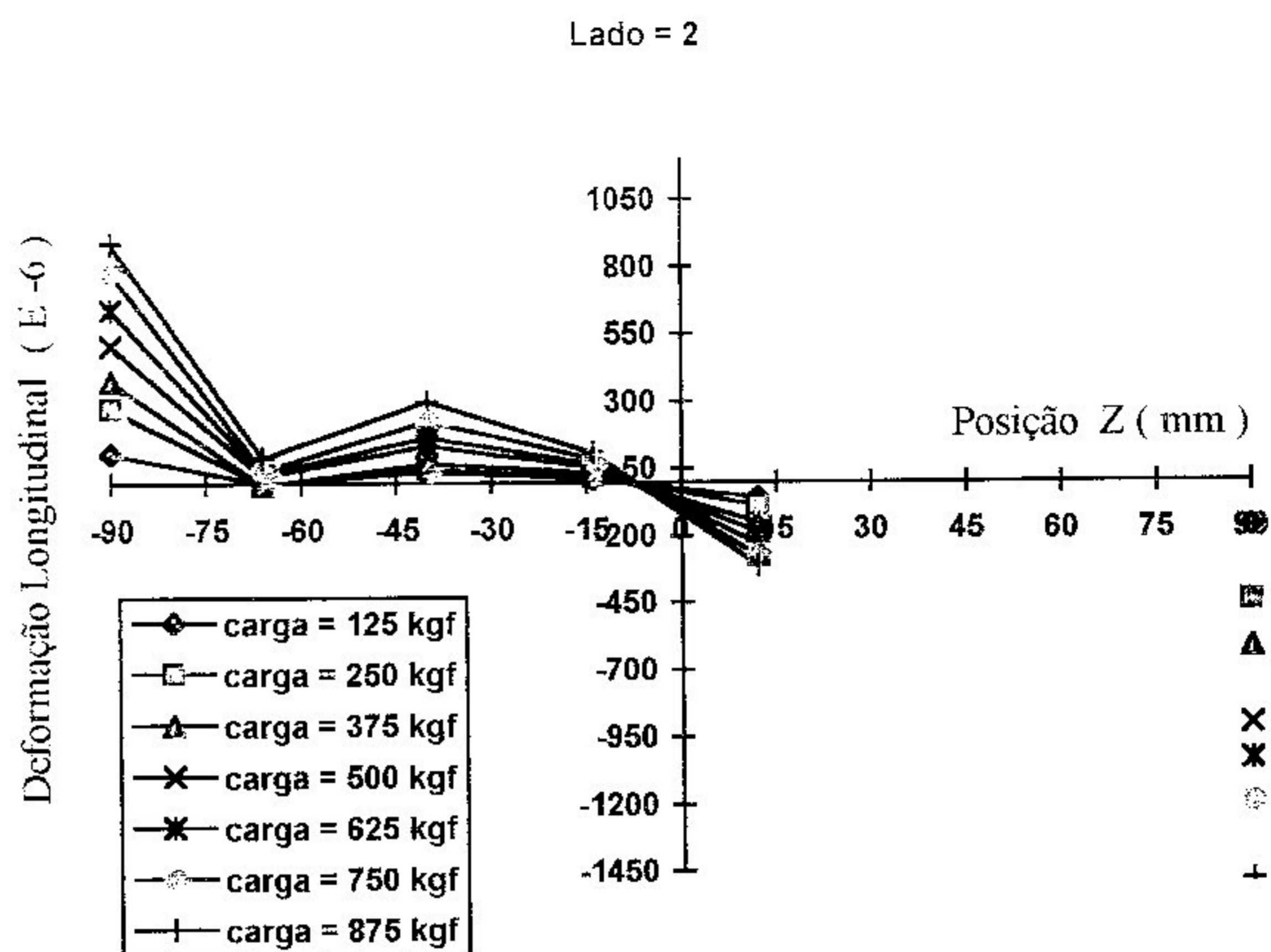


Fig. 6.7. Diagrama Deformação Longitudinal - lado 2

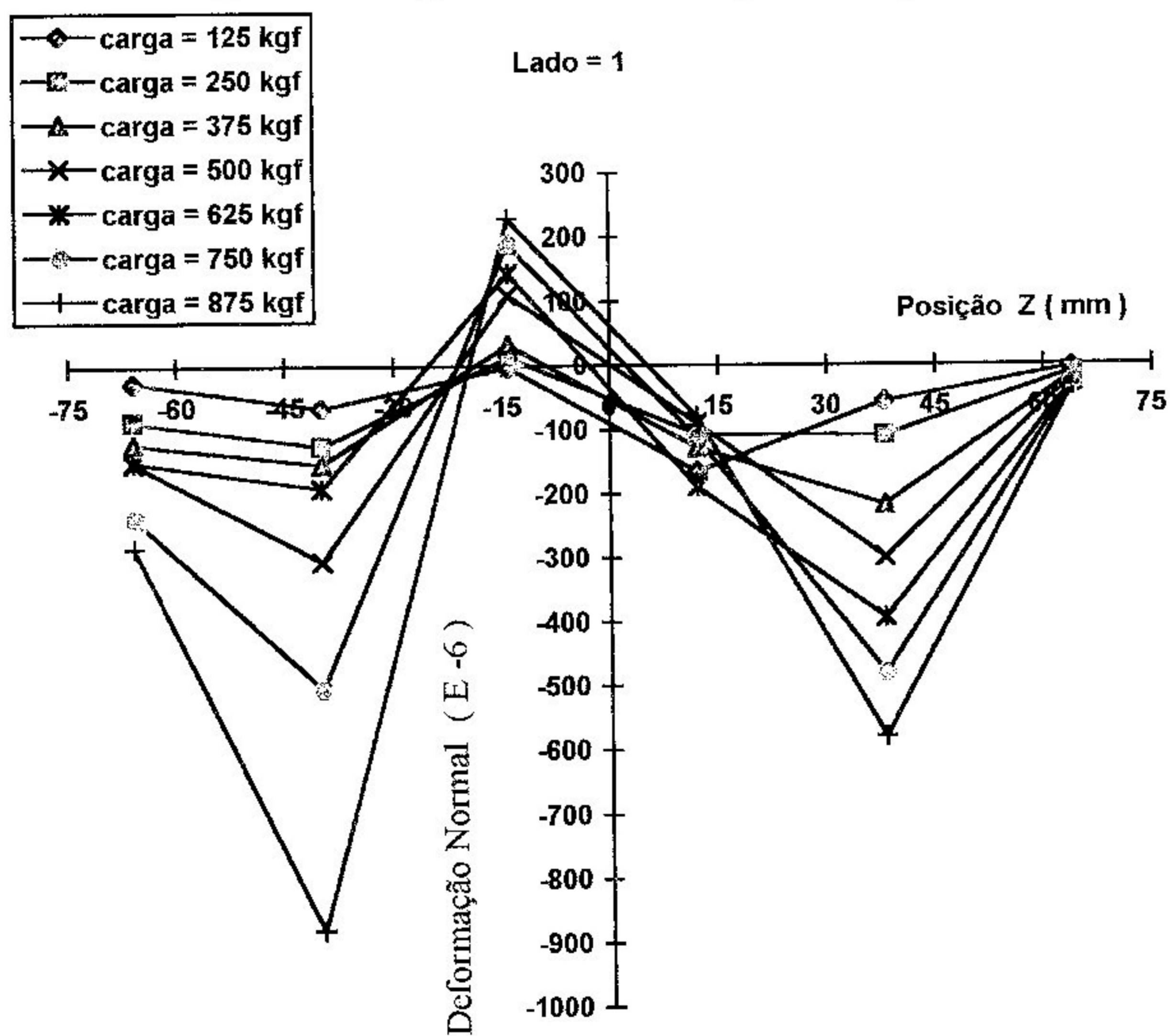


Fig. 6.8. Diagrama Deformação Normal - Lado 1

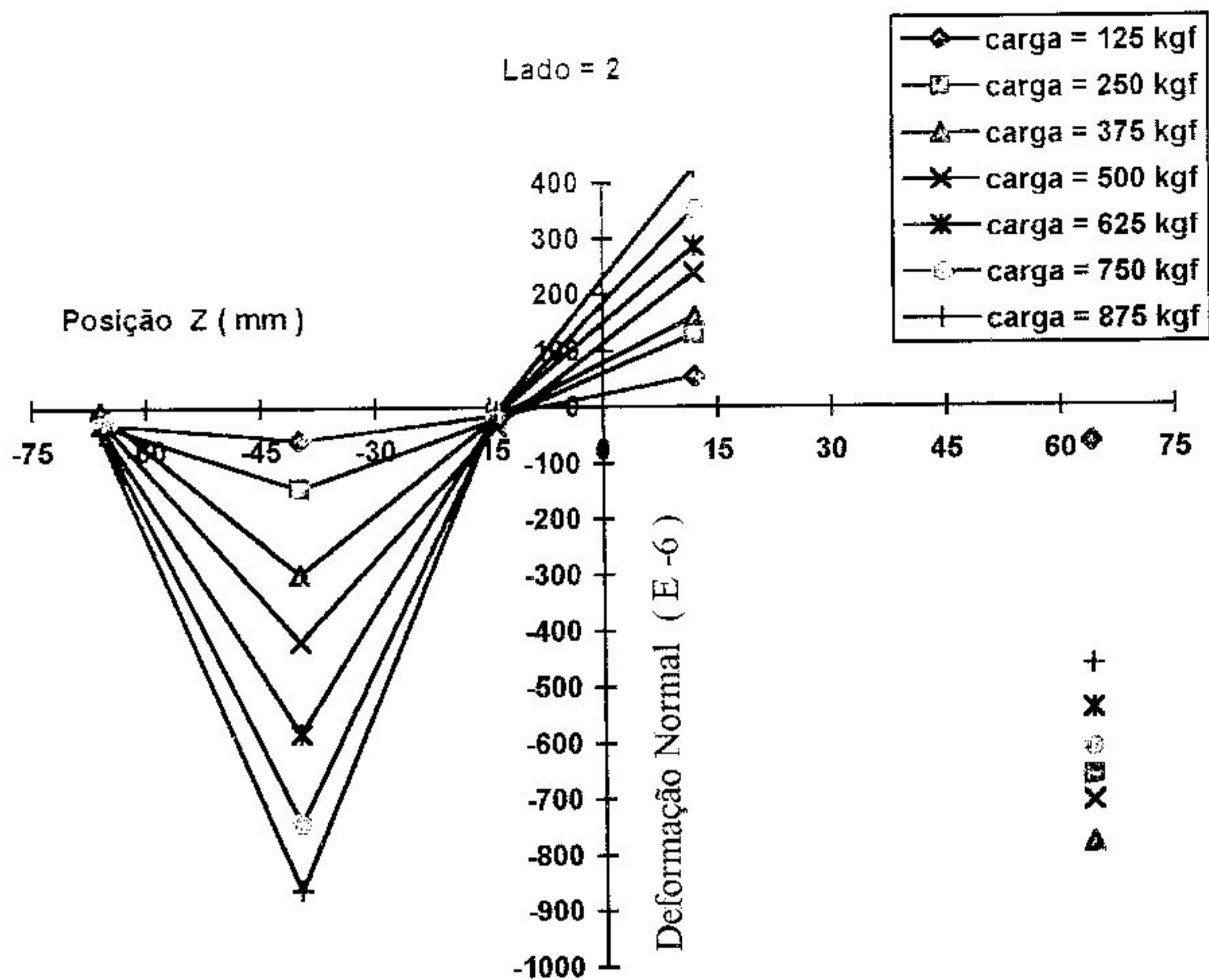


Fig. 6.9. Diagrama Deformação Normal - lado 2

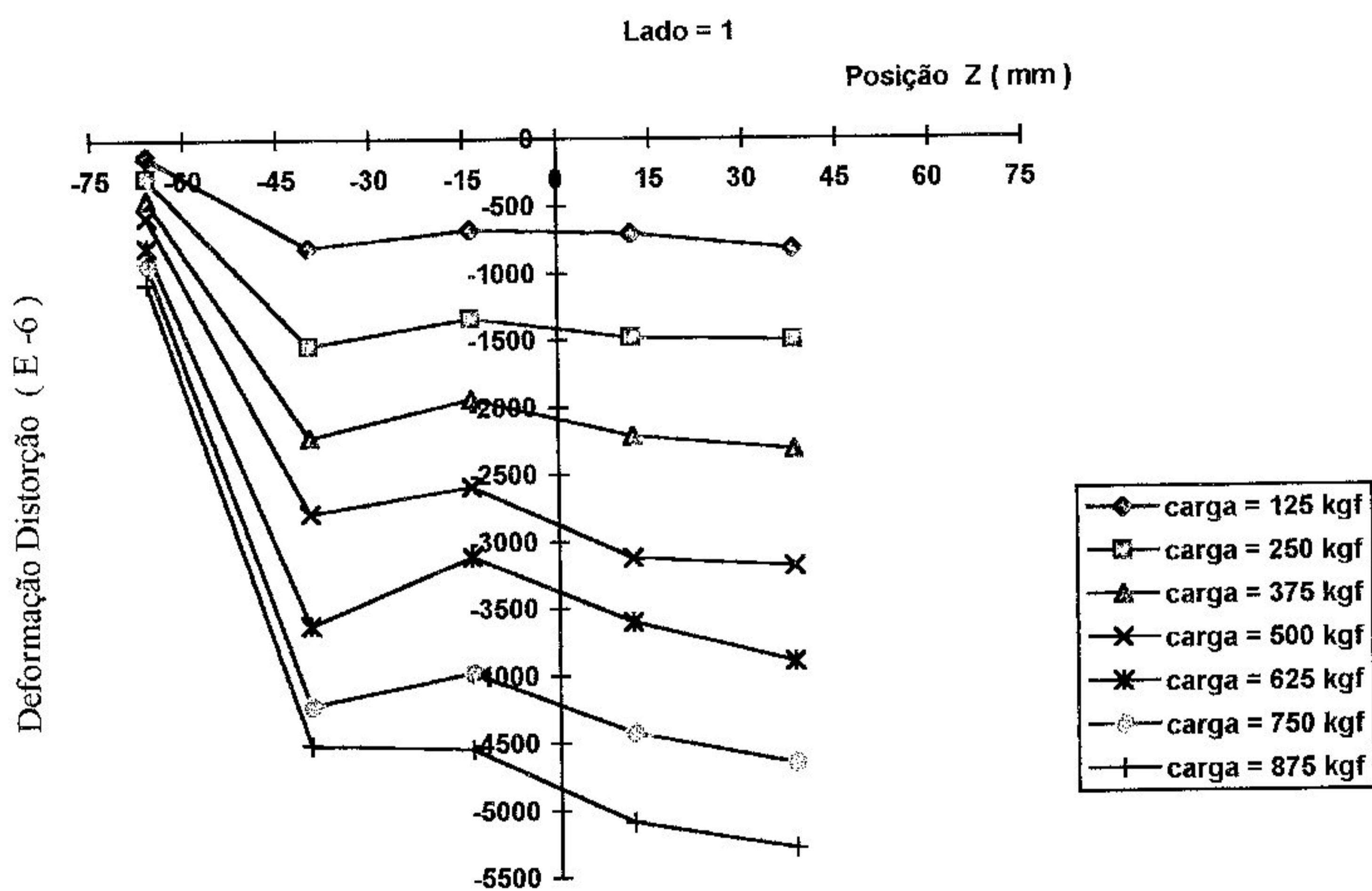


Fig. 6.10. Diagrama Deformação de Distorção

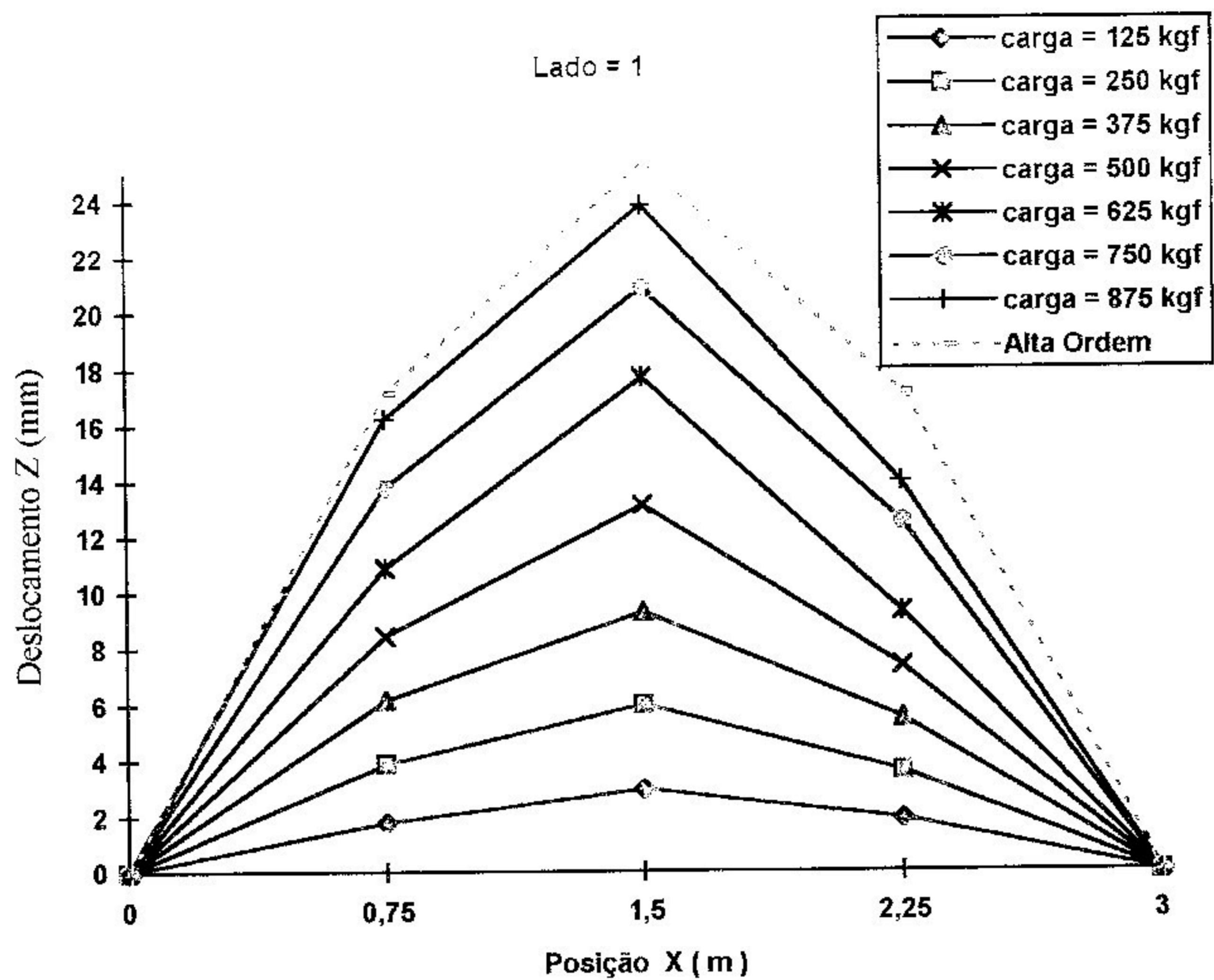


Fig. 6.11. Deslocamentos - Lado 1

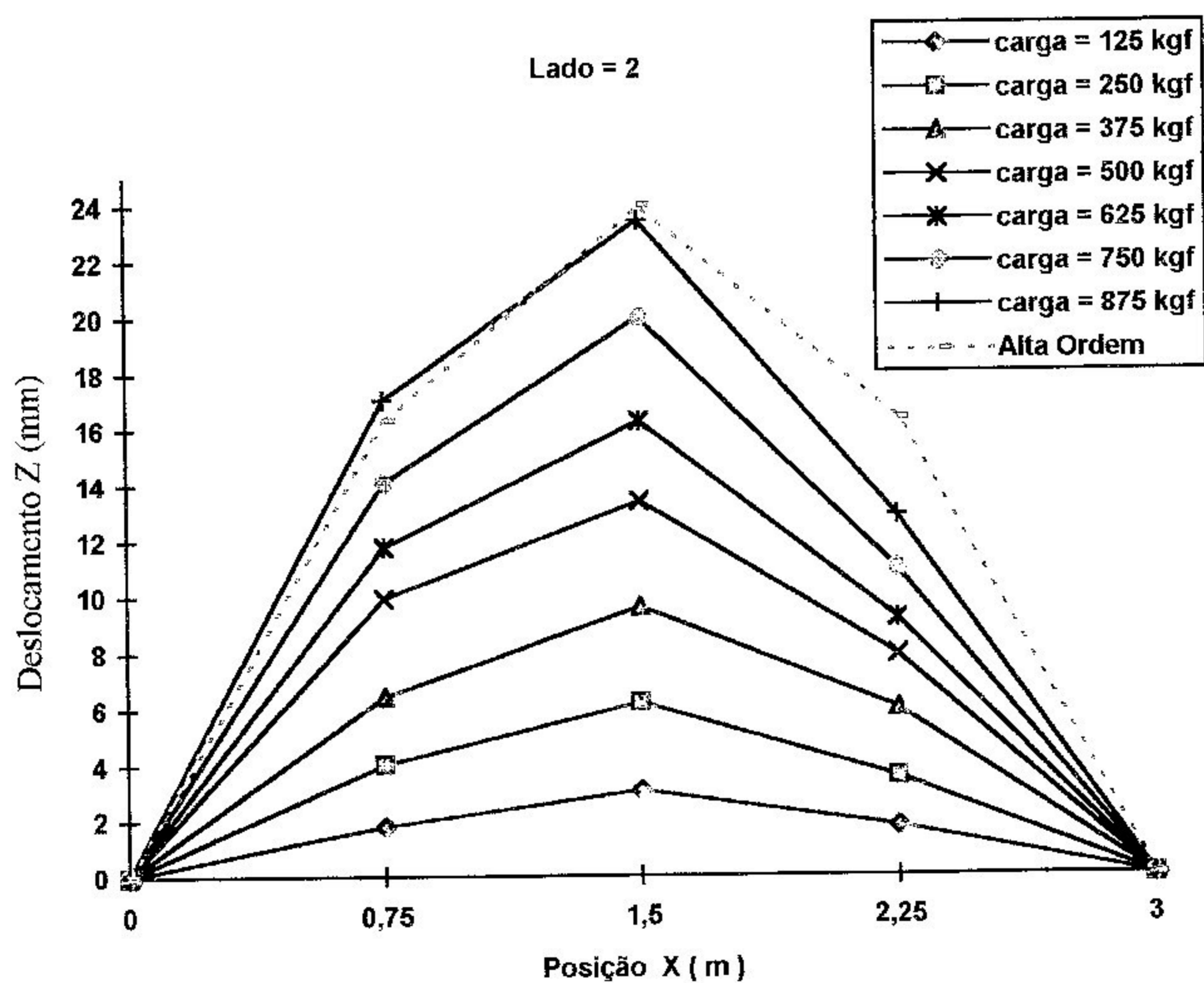


Fig. 6.12. Deslocamentos - Lado 2



Para a simulação numérica, na determinação dos deslocamentos, utilizou-se o valor obtido da rigidez efetiva.

A rigidez efetiva foi obtida por regressão linear utilizando os valores das cargas e deslocamento do ponto central da viga. A metodologia deste procedimento está descrito no capítulo 5.

Os resultados obtidos foram:

	Rigidez efetiva $EI_{ef}$ (N.m <sup>2</sup> )
Lado 1	194,14
Lado 2	206,19

## Capítulo 7

### CONSIDERAÇÕES GERAIS

#### 7.1. Conclusões

No capítulo 4 estudou-se o elemento de alta ordem utilizando vários tipos de carregamento e condições de contorno. Observou-se que para os casos analisados foram obtidos resultados satisfatórios em termos de engenharia.

Este estudo teve por finalidade dar credibilidade à formulação quanto à predição das tensões transversais interlaminares. Pode-se concluir que o elemento de alta ordem utilizado é de grande valia, principalmente na análise de delaminação de vigas curtas, onde se obtém resultados mais próximos dos obtidos experimentalmente.

A teoria de viga de Timoshenko fornece valores constante da tensão de cisalhamento ao longo da seção transversal da viga, onde o valor médio está em torno de 20% acima do valor médio obtido pela teoria da elasticidade. Pelo elemento de alta ordem obteve-se curvas parabólicas e os valores médios convergiram para os valores médios da teoria da elasticidade. Portanto, o elemento de viga de Timoshenko mostrou-se inadequado para o estudo de tensões interlaminares.

Na análise de frequências naturais observou-se uma boa concordância entre os resultados obtidos para o elemento de viga, formulado pela teoria de alta ordem, quando comparados àqueles obtidos para o elemento de viga, formulado pela teoria de Timoshenko. No caso de vigas curtas, estas frequências são bastante diferentes dos valores previstos pela teoria clássica de viga de Euler-Bernoulli: Portanto, para vigas curtas ( $L/h \leq 10$ ) é aconselhável utilizar-se a formulação da teoria de alta ordem ou a teoria de Timoshenko para determinação das frequências naturais da viga.

O elemento de viga utilizado possui sete graus de liberdade, que foram obtidos pela expansão em série de Taylor dos deslocamentos, como descrito no capítulo 2. Para obter-se um elemento mais “enxuto”, isto é, com menos graus de liberdade, pode-se considerar apenas o termo constante na

expansão do deslocamento transversal, já que os termos  $\theta_z$  e  $w^*$ , não alteram significativamente a precisão dos resultados.

Pode-se observar que a matriz de rigidez do elemento de alta ordem contém os termos de acoplamento de flexão e extensão, o que permite prever as deformações devidas a estes acoplamentos, no caso de vigas assimétricas. Assim, o elemento de alta ordem pode ser utilizado na previsão de tensões de laminados simétricos e não simétricos, sujeitos a qualquer tipo de carregamento e restrição de apoio.

Na caracterização da ligação colada foi realizado um ensaio de cisalhamento na torção, que teve por finalidade observar o comportamento na ligação vidro/epoxi - madeira. Nestes ensaios verificou-se a falha em compressão do laminado, na região onde não havia madeira. Não foi observado nenhum sinal de descolamento. Assim, na simulação numérica pode-se supor que não há deslocamento relativo nesta ligação.

Com a finalidade de observar a eficiência das duas resinas utilizadas, metade da viga foi confeccionada utilizando as almas produzidas com a resina Araldit e a outra metade com a resina Scuna.

No ensaio do modelo da viga observou-se a ocorrência de flambagem nas almas e também o início de descolamento do laminado, que utilizava a resina Araldit, com a madeira. Não foi observado nenhum indício de descolamento na união do laminado fabricado com resina Scuna. A ocorrência da flambagem da alma é nitidamente evidenciada nos gráficos da deformação normal.

O surgimento de flambagem nas almas deve-se a algumas falhas construtivas, tais como: as fibras dos reforçadores foram colocadas normais ao carregamento, o intervalo entre reforçadores foi muito grande e o laminado das almas apresentou defeitos como bolhas e áreas com excesso de resina, o que diminui a sua resistência.

O modelamento matemático adotado é originalmente proposto para placas laminadas de seção transversal retangular, onde conhecendo-se as propriedades elásticas de uma lâmina, obtêm-se as propriedades do laminado. Na simulação, para o caso da viga caixão, se torna necessário o conhecimento das propriedades elásticas do laminado da alma e a mudança da direção dos eixos de referência.

Devido ao fato da ocorrência de flambagem nas almas, não foi possível fazer comparações entre os resultados das deformações obtidas experimentalmente e a simulação numérica, elementos finitos.

O processo construtivo adotado mostrou-se pouco eficiente, pois não é possível controlar a quantidade de resina empregada e conseqüentemente não consegue-se uma espessura uniforme, sendo necessário menor espaçamento entre os reforçadores.

Para obter melhor qualidade no laminado é necessário a utilização de saco de vácuo para evitar a formação de bolhas e absorvedores para eliminar o excesso de resina.

O processo construtivo "co-colado" mostrou-se ser bastante complicada e sem muito controle sobre o processo de laminação. Para esse tipo de longarina o processo "colado" parece ser mais eficiente.

Devido as falhas construtivas observadas, não pôde-se concluir sobre as vantagens deste tipo de construção, sendo necessário realizar outros ensaios deste tipo viga, eliminando as falhas descritas, afim de comprovar sua eficiência.

## 7.2. Recomendações

O elemento de viga formulado através da teoria de deformação de alta ordem pode ser utilizado no estudo de vigas paredes e mistas ( aço e concreto).

A formulação de alta ordem pode ser utilizada na formulação de elementos de placas, afim de predizer as deformações devidas aos acoplamentos elásticos do material, para o caso de pás de helicóptero, e também no estudo dos efeitos de borda e de delaminação de painéis aeronáuticos.

Pode-se usar o elemento formulado neste trabalho em problemas que envolve variações térmicas, como por exemplo, na predição de tensões residuais devidas a cura da resina em autoclave, e também, no estudo de painéis de satélites.

Na confecção das almas de vidro/epoxi é recomendável a utilização de saco de vácuo e absorventes afim de obter uma melhor controle da quantidade de resina e evitar a formação de bolhas.

### 7.3. Propostas para Trabalhos Futuros

1) Utilizar, na expansão do deslocamento  $w(x,z)$ , apenas o termo constante e também fazer considerações com três graus de liberdade, isto é, eliminar os termos constante e quadrático da expansão do deslocamento  $u(x,z)$  e manter apenas o termo constante da expansão de  $w(x,z)$ ;

2) Utilizar a expansão descrita no item anterior para elemento de placa;

3) Realizar ensaios de vibração com vigas de razão de esbeltez  $L/h < 10$ , afim de verificar os resultados obtidos;

4) Realizar condensação do termo  $\theta^*$ , afim de obter o elemento com dois graus de liberdade na teoria de alta ordem;

5) Usar “splines” como funções de interpolação para eliminar os graus de liberdade intermediários e manter continuidade  $C^0$ .

6) Utilizar o método “colado” na construção da viga caixão e fazer ensaios de flexão.

7) Fazer comparações de resistência em peças produzidas pelo método “colado” e “co-colado”.

8) Realizar ensaios de caracterização do laminado de vidro/epoxi, afim de obter as características mecânicas e elásticas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABARCAR, Rene B. and CUNNIFF, Patrick F. **The Vibration of Cantilever Beams of Fiber Reinforced Material.** Journal Composite Materials, Vol. 6, pp 504-517, Outubro 1972 .
- BARBONI, R. and GAUDENZI, P. . **A Class of  $C^0$  Finite Elements for the Static and Dynamic Analysis of Laminated Plates.** Computer & Structures, Vol. 44, n° 6, pp 1169-1178, 1992.
- BATHE, K. J. . **Finite Element Procedures in Engineering Analysis.** Prentice-Hall, New Jersey, 1982.
- CHEN, Alex T. and YANG, T.Y. . **Static and Dynamic Formulation of Symmetrically Laminated Beam Finite Element for a Microcomputer.** Technomic Publishing Co.,Inc, 1985.
- COWPER, G.R. . **The shear coefficient in Timoshenko beam theory.** ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol 33, pp 335-340, 1966
- DYM, C.L. and SHAMES, I. H. . **Solid Mechanics a variational Approach.** Mc-Graw Hill Book Company, 1973.
- FRANSCINO, S.M.A. . **Análise e Desenvolvimento da Empena de Foguete Utilizando Material Conjugado.** São José dos Campos, ITA, Tese de Mestrado, 1982.
- GOODIER, J.N. . **On the Problems of the Beam and the Plate in the Theory of Elasticity.** Transactions of the Royal Society of Canada, Vol 32, pp 65-88, 1938.
- HALPIN, J.C. . **Primer on Composite Materials.** Technomic Publishing Co., 1984.

- INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS DE SÃO PAULO,  
**Boletim n° 29**, Dezembro 1941.
- INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS DE SÃO PAULO,  
**Boletim n° 31**, 1956.
- JONES, R.M. . **Mechanics of Composite Materials**. Washington,  
International Student Edition, Mc Graw-Hill Kogakusha Ltda, 1975.
- KANT, T. and GUPTA, A. . **A Finite Element Model for a Higher-Order Shear-deformable Beam Theory**. Journal of Sound and Vibration,  
Vol 25, n° 2, pp 193-202, 1988.
- KANT, T. and MANJUNATH, B.S. . **Refined Theories for Composite and Sandwich Beams with  $C^0$  Finite Elements**. Computer & Structures, Vol. 33, n° 3, pp 755-764, 1992.
- KAPANIA, Rakesh K. and RACITI, Stefano. **Recent Advances in Analysis of Laminated Beams and Plates. Part I: Shear Effects and Buckling**. AIAA Journal, Vol 27, n° 7, july 1989.
- LEVINSON, M. . **Further results of a new beam teory**. Journal of Sound and Vibration, Vol 77, pp 440-444, 1981.
- LEVINSON, M. . **A New Rectangular Beam Theory**. Journal Sound Vibration, Vol 74, pp 81-87, 1981.
- LEVY, Flaminio. **Estudo da Falha ao Impacto de uma estrutura de Material Conjugado usada em Aeronaves**. São José dos Campos, ITA, Tese de Mestrado, 1983.
- LO, K.H. and CHRISTENSEN, R.M. and WU, E.M. . **A High-order theory of plate Deformation part II: Laminated Plates**. ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol 44, pp 669-676, 1977.
- MANTILLA, CARRASCO, E.V. . **Ligações Estruturais de Madeira por Adesivo**. Tese de Mestrado, USP, 1984.

- MANTILLA, CARRASCO, E.V. . **Resistência, Elasticidade e Distribuição de Tensões nas Vigas Retas de Madeira Laminada Colada.** Tese de Doutorado, USP, 1989.
- MARSHALL, Andrew C. . **Composite Basics.** 1985
- MEDWADOWSKI, S.J. . **A Refined Theory of Elastic Orthotropic Plates.** ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol 25, pp 437-443, 1958.
- MEGSON, T.H.G. . **Aircraft Structures for engineering Students.** Edward Arnold (Publishers) HD, 1977.
- MINDLIN, R. D. . **Influence of rotatory inertia and shear Deformation on flexural motions of isotropic elastic plates.** ASME, Journal of Applied Mechanics Vol. 18, pp 31-38, 1951.
- MURTY, Krishna. **Vibration of Short Beams.** AIAA, Vol 8, pp 2098-2100, 1970.
- MURTY, Krishna and SHIMPI, R.P. . **Vibration of Laminated Beams.** Journal of Sound and Vibration, Vol. 36, nº2, pp 273-284, 1974.
- MURTY, Krishna and VELLAICHAMY, S. . **On Higher Order shear Deformation theory of laminated composite panels.** Composite Structures, Vol 8, pp 247-270, 1987.
- NASCIMENTO, K.D. . **Análise e Síntese de Placas sanduíche reforçadas.** São José dos Campos, ITA, Tese de Mestrado, 1990.
- OBERG, F.R. . **Heavy Timber Constrution.** American Technical Society, 1963.
- PAGANO, N.J. . **Exact Solution for Composite Laminates in Cilindrical Bending.** Journal Composite Materials, Vol 3, pp 398-410, 1969.



- PANDYA, B.N. and KANT, T. . **A Refined Higher-Order Generally Orthotropic  $C^0$  Plate Bending Element.** Computer & Structures, Vol 28, n° 2, pp 119-133, 1988.
- PHAN, N.D. and REDDY, J.N. . **Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear Deformation theory.** International Journal Numerical Methods Engineering, Vol 21, pp 2201-2219, 1985.
- PARKER, Harry. . **Simplified Design of Structures wood.** Wiley-Interscience Publication, 1979.
- RAO, Singiresu S. . **Mechanical Vibration.** Addison-Wesley Publishing Company, 1986.
- REDDY, J.N. . **A Refined Nonlinear Theory of plates with transverse shear Deformation.** International Journal Solids Structures, Vol. 20, pp 881-896, 1984.
- REISSNER, E. . **The effect of transverse shear Deformation on the bending of elastic plates.** ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 12, pp A69-A77, 1945.
- REUTER, R.C.Jr. . **Concise Property Transformation Relation for Anisotropic Lamina.** Journal of Composite Materials, pp 270-272, april 1971.
- ROCCO LAHR, F.A. . **Considerações a Respeito do Dimensionamento de Peças Estruturais de Madeira.** São Carlos, LAMEM-EESC-USP, Tese de Doutorado, 1983.
- ROY R. CRAIG, JR. . **Structural Dynamic -"An Introduction to Computer Methods"**. John Wiley & Sons, 1981.
- SHAMES, Irving H. . **Introdução à Mecânica dos Sólidos.** Prentice-Hall do Brasil-Rj, 1983.

- SHANLEY, F.R. . **Weight-Strength analysis of Aircraft Structures.** 2<sup>o</sup> edição, Dover Publications, Inc. New York, 1960.
- STASA, F.L. . **Applied Finite Element Analysis for engineers.** CBS College Publishing, 1985.
- STEPHEN, N.G. and LEVINSON, M. . **A Second Order Beam Theory.** Journal Sound Vibration, Vol 74, pp 81-87, 1981.
- SUZUKI, S. . **On the Strength of a Composite Beam.** Journal of Sound and Vibration, Vol 136, n<sup>o</sup> 2, pp 315-321, 1990.
- TESSLER, A. and DONG, S.B. . **On a Hierarchy of Conforming Timoshenko Beam Elements.** Computers & Structures, Vol. 14, n<sup>o</sup> 3-4, pp 335-344, 1961.
- TIMOSHENKO, S.P. . **On the Correction for Shear of Differential Equation for Transverse Vibration of Prismatic Bars.** Philosophical Magazine, Series 6, 41, pp 744 -746, 1921.
- TIMOSHENKO, S.P. and GOODIER, J.N. . **Theory of Elasticity.** McGraw-Hill, Singapore, 1985.
- TSAI, S.W. . **Introduction to Composite Materials.** Technomic Publishing Co., 1980.
- WHITNEY, J. and PAGANO, N.J. . **Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates.** ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol 37, pp 1031-1036, 1970.
- YANG, P.C. , NORRIS, C.H. and STAVSKY, Y. . **Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates.** International Journal Solids Structures, Vol 2, pp 665-684, 1966.
- ZIENKIEWICZ, O.C. and MORGAN, K. . **Finite Elements and Aproximation.** A Willey-Interscience Publication, John Wiley & Sons, 1982.

ZIENKIEWICZ, O.C. and TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method.**  
Mc Graw-Hill Book Company, Vol. 1, 4<sup>o</sup> edição, 1989.

## Apêndice A

**FORMULAÇÃO DA TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO**

Nesta seção será apresentada a teoria de viga de Timoshenko, a qual considera os efeitos de cisalhamento, onde tensão de cisalhamento é suposta constante ao longo da seção transversal. Um fator de correção  $K$  é utilizado para levar em conta a variação da tensão de cisalhamento ao longo da seção transversal. Essa teoria é aplicada em vigas curtas, porém pode ser convenientemente estendida para estruturas de placas.

Para considerar a deformação de cisalhamento introduz-se as seguintes considerações:

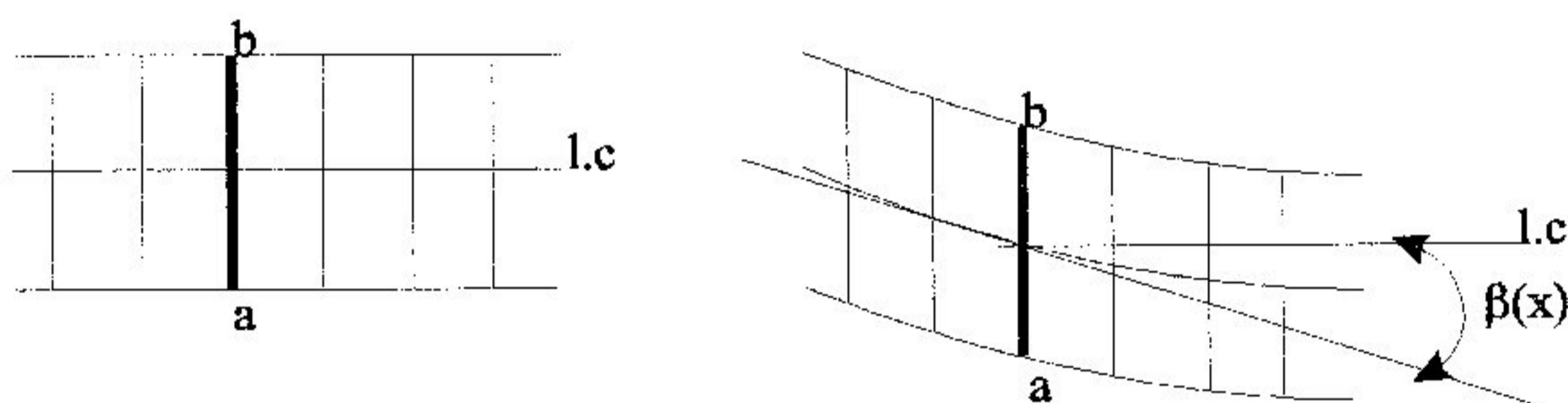


Fig.A.1. Representação Simbólica da Deformação Cisalhamento

a) Uma linha típica, tal como a normal à linha de centro (linha a-b) no estado indeformado, movimenta-se somente na direção vertical e permanece vertical durante a deformação.

b) A linha tangente à linha de centro após uma rotação  $\beta(x)$  dá origem à distorção de cisalhamento  $\gamma_{xz}$  num ponto ao longo da linha de centro. Com essas considerações, a inclinação total  $\frac{dw}{dx}$  da linha de centro, devido à deformação de cisalhamento e à deformação por flexão, pode ser dada por:

$$\frac{dw}{dx} = \beta(x) + \psi(x) \quad (A-1)$$

Onde:  $\psi(x)$  é a rotação da linha do elemento ao longo da linha de centro devido somente a flexão.

c) As deformações de cisalhamento são supostas serem as mesmas em todos os pontos de uma determinada seção transversal da viga. Esse ângulo  $\beta(x)$  usado para rotação do elemento ao longo da linha de centro, é considerado para medida do ângulo de cisalhamento em todos os pontos na seção transversal da viga. (Essa consideração é equivalente a assumir cisalhamento constante sobre a face da seção transversal, a qual é fisicamente impossível e será corrigido mais tarde).

Com essas considerações, o campo de deslocamento para a viga pode ser escrito como:

$$u_x = u_1(x,y,z) = -z\psi(x) = -z \left( \frac{dw}{dx} - \beta(x) \right) \quad (\text{A-2})$$

$$u_y = u_2(x,y,z) = 0 \quad (\text{A-3})$$

$$u_z = u_3(x,y,z) = w(x) \quad (\text{A-4})$$

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{d\psi}{dx} = -z(w_{,xx} - \beta_{,x}) \quad (\text{A-5})$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{dw}{dx} + \beta(x) + \frac{dw}{dx} \right) = \frac{1}{2} \beta(x) \quad (\text{A-6})$$

Assumindo o coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ , a tensão  $\sigma_{xx}$  e o momento  $M$  podem ser expressos como segue:

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = -E z \frac{d\psi}{dx} \quad (\text{A-7})$$

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} b \sigma_{xx} z dz = - \int_{-h/2}^{h/2} E z^2 \frac{d\psi}{dx} b dz = -EI \frac{d\psi}{dx} \quad (\text{A-8})$$

E a força de cisalhamento é:

$$V = \int_{-h/2}^{h/2} b \sigma_{xz} dz = \sigma_{xz} \int_{-h/2}^{h/2} b dz = \sigma_{xz} A = GA\beta(x) \quad (\text{A-9})$$

Lembrando que:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \beta(x) \quad (\text{A-10})$$

e,

$$\frac{\beta}{2} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2G} \sigma_{xz}$$

Considerando  $\sigma_{xz}$  constante ao longo da seção transversal, vem que:

$$\sigma_{xz}(x) = \frac{V}{A} = G\beta(x) \quad (\text{A-11})$$

Na realidade, a relação mais apropriada para  $\sigma_{xz}$  seria:

$$\sigma_{xz} = G\beta(x,z) \quad (\text{A-12})$$

Porém, tal procedimento complica o problema, uma vez que destrói sua natureza unidimensional. A situação pode ser melhorada, em parte, pela introdução de um fator adicional  $k$ , como se segue:

$$\sigma_{xz} = kG\beta(x) \quad (\text{A-13})$$

$$V(x) = kG\beta(x)A \quad (\text{A-14})$$

A energia potencial total para o suposto campo de deformação da viga de Timoshenko é dada por:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dx dz + \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} dx dz - \int_0^L p(x)w dx \quad (\text{A-15})$$

Usando:

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = - Ez \frac{d\psi}{dx} ; \quad \sigma_{xz} = kG\beta (x)$$

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx + \frac{GA}{2} \int_0^L k\beta^2 dx - \int_0^L p w dx$$

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx + \frac{kGA}{2} \int_0^L \left( \frac{dw}{dx} - \psi \right)^2 dx - \int_0^L p w dx$$

Juntando os termos, tem-se:

$$\pi_p = \int_0^L \left[ \frac{EI}{2} \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{kGA}{2} \left( \frac{dw}{dx} - \psi \right)^2 - p w \right] dx \quad (A-16)$$

Desta forma, o funcional depende de duas funções  $\psi$  e  $w$ . Efetuando uma variação no potencial,  $\pi_p$ , obtém-se a equação de Euler-Lagrange, ou equação de equilíbrio para o sistema.

$$\delta\pi_p = \int_0^L EI \frac{d\psi}{dx} d \frac{\delta\psi}{dx} dx + kAG \int_0^L \left[ \left( \frac{dw}{dx} - \psi \right) d \frac{\delta w}{dx} - \left( \frac{dw}{dx} - \psi \right) \delta\psi \right] dx - \int_0^L p \delta w dx = 0$$

Integrando por partes

$$EI \frac{d\psi}{dx} \delta\psi \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d\psi}{dx} \right) \delta\psi dx + kGA \left( \frac{dw}{dx} - \psi \right) \delta w \Big|_0^L - kGA \int_0^L \frac{d}{dx} \left( \frac{dw}{dx} - \psi \right) \delta w dx - \int_0^L kGA \left( \frac{dw}{dx} - \psi \right) \delta\psi dx - \int_0^L p \delta w dx = 0$$

Ou,

$$-\int_0^L \left[ kGA \frac{d}{dx} \left( \frac{dw}{dx} - \psi \right) + p \right] \delta w dx - \int_0^L \left[ \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d\psi}{dx} \right) + kGA \left( \frac{dw}{dx} - \psi \right) \right] \delta\psi dx + EI \frac{d\psi}{dx} \delta\psi \Big|_0^L + kAG \left( \frac{dw}{dx} - \psi \right) \delta w \Big|_0^L = 0 \quad (A-17)$$

Portanto, as equações de equilíbrio são:

$$\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d\psi}{dx} \right) + kGA \left( \frac{dw}{dx} - \psi \right) = 0 \quad (\text{A-18})$$

$$kGA \frac{d}{dx} \left( \frac{dw}{dx} - \psi \right) + p = 0 \quad (\text{A-19})$$

Para EI e kGA constantes, essas equações se reduzem a:

$$EI \frac{d^2\psi}{dx^2} + kAG \left( \frac{dw}{dx} - \psi \right) = 0 \quad (\text{A-18-a})$$

$$kGA \left( \frac{d\psi}{dx} - \frac{d^2w}{dx^2} \right) = p \quad (\text{A-19-a})$$

As condições de contorno em  $x=0, L$  são:

- a) Ou  $\psi$  é prescrito, ou  $EI \frac{d\psi}{dx} = 0$
- b) Ou  $w$  é prescrito, ou  $kGA \left( \frac{dw}{dx} - \psi \right) = 0$

Do ponto de vista físico, essas expressões são equivalentes a:

- a) Ou  $\psi$  é especificado ou  $M = 0$  em  $x = 0, L$ ;
- b) Ou  $w$  é especificado ou  $V = 0$  em  $x = 0, L$ .

Finalmente, é importante notar que, a equação diferencial para  $w$  e  $\psi$  pode ser desacoplada, por exemplo diferenciando a equação (A-18-a).

$$EI \frac{d^3\psi}{dx^3} + kAG \left( \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d\psi}{dx} \right) = 0$$

Substituindo na equação (A-19-a), tem-se:

$$EI \frac{d^3\psi}{dx^3} = p \quad (\text{A-20})$$



Diferenciando a equação (A-19-a) duas vezes e resolvendo para  $\psi'''(x)$

$$kGA \left( \frac{d^3 \psi}{dx^3} - \frac{d^4 w}{dx^4} \right) = \frac{d^2 p}{dx^2}$$

$$\frac{d^3 \psi}{dx^3} = \frac{1}{kGA} \frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^4 w}{dx^4} \quad (\text{A-21})$$

Combinando as equações (A-20) e (A-21), tem-se:

$$\frac{p}{EI} = \frac{1}{kGA} \frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^4 w}{dx^4}$$

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p - \frac{EI}{kGA} \frac{d^2 p}{dx^2} \quad (\text{A-22})$$

Quando  $KG \rightarrow \infty$  a equação (A-22) se reduz a equação de Euler-Bernoulli.

Em seguida, os efeitos de inércia são considerados e o princípio de Hamilton utilizado para obter as equações de movimento.

A energia cinética é dada por:

$$T_K = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho \dot{u}_1^2 dx dz$$

Usando as equações (A-2) e (A-4), tem-se:

$$T_K = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \rho \left[ z^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho I_{yy} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (\text{A-23})$$

Onde:  $I$  = momento de inércia geométrico e  $A$  = área da seção transversal da viga.

A equação (A-23) contém a energia cinética devido a inércia de translação e de rotação. A expressão para o potencial total para esse problema  $\pi_p$  já foi obtido na equação (A-16). Aplicando o princípio de Hamilton para obter a equação de movimento do sistema, segue que:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T_K - \pi_p) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (\text{A-24})$$

Combinando as equações (A-16), (A-23) e (A-24), tem-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} \left[ \rho I \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] - \frac{EI}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - \frac{kGA}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right)^2 + pw \right\} dx dt = 0 \quad (\text{A-25})$$

Os termos associados a  $\pi_p$  já foram considerados anteriormente. Considere, portanto, a variação dos termos associados à energia cinética.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T_K dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( \rho I \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \delta \psi}{\partial t} + \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dx dt$$

Integrando por partes com relação a  $t$ , tem-se:

$$\int_0^L \left( \rho I \frac{\partial \psi}{\partial t} \delta \psi \Big|_{t_1}^{t_2} + \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} \right) dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \delta \psi + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dt dx = \delta \int_{t_1}^{t_2} T_K dt \quad (\text{A-26})$$

Supondo, por simplicidade que,

$$\delta w \Big|_{t_1}^{t_2} = \delta \psi \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Pelo princípio de Hamilton, e utilizando as equações (A-26) e (A-16), vem que:

$$\left. \begin{aligned} -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ kGA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right] + p &= 0 \\ -\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + kAG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-27})$$

Para valores constantes de EI e kAG

$$\left. \begin{aligned} \rho A \ddot{w} - kAG \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - p(x,t) &= 0 \\ \rho I \ddot{\psi} - EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - kGA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-28})$$

As equações de contorno para esse caso já foram obtidas anteriormente. Admitindo também que:

$$M = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{e} \quad V_s = kGA \beta(x) = kGA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right)$$

A equação de movimento, equação (A-27), pode ser também expressa por:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_s}{\partial x} &= \rho A \ddot{w} - p(x,t) \\ V_s - \frac{\partial M}{\partial x} &= \rho I \ddot{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-29})$$

Nesse caso, as condições de contorno em  $x=0,L$  são:

Ou  $V_s = 0$  ou  $w$  é especificado

Ou  $M = 0$  ou  $\psi$  é especificado

## Apêndice B

**FORMULAÇÃO SEGUNDO A TEORIA DA ELASTICIDADE,  
PAGANO (1969).**

Considere o laminado composto de  $m$  camadas ortotrópicas, da figura B-1.

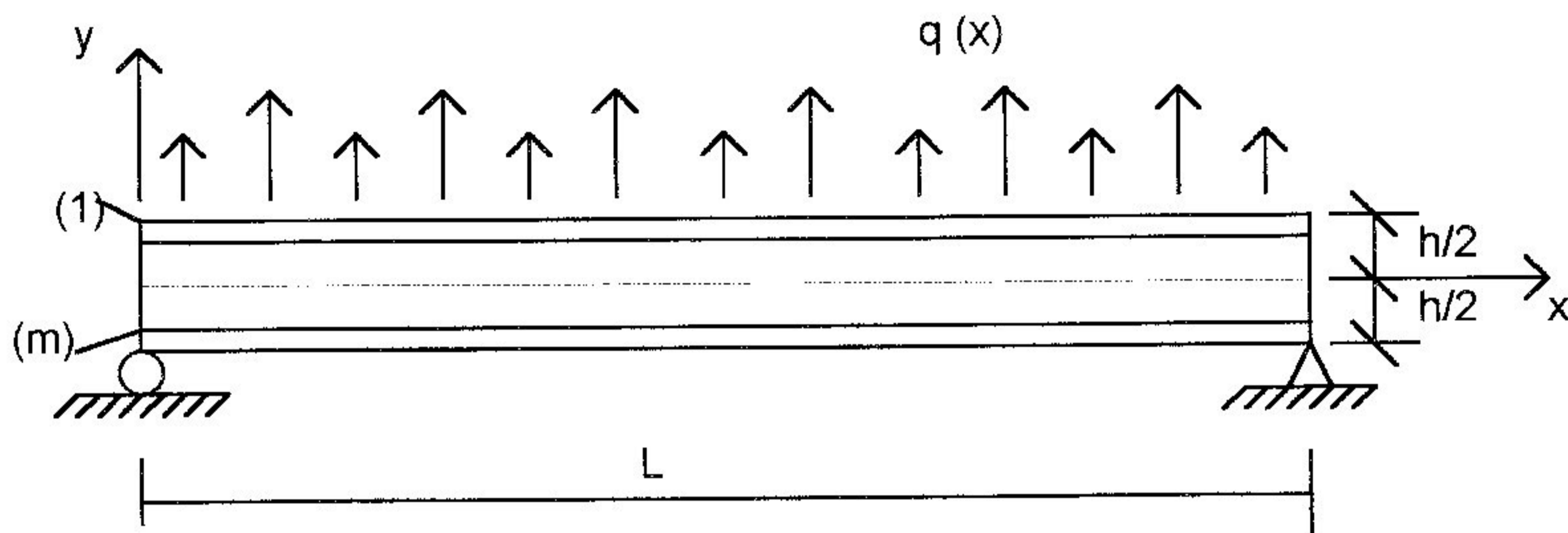


Figura B-1. Representação da Notação a ser Utilizada.

O laminado está num estado plano de deformação com relação ao plano  $xy$  e está simplesmente apoiado sobre as extremidades  $x=0$  e  $x=L$ . Pretende-se determinar as tensões e deslocamentos da chapa sujeita a uma carga distribuída na superfície superior.

Como cada camada é ortotrópica, as equações constitutivas são dadas por:

$$\varepsilon_x = R_{11}\sigma_x + R_{12}\sigma_y$$

$$\varepsilon_y = R_{12}\sigma_x + R_{22}\sigma_y \quad (B-1)$$

$$\gamma_{xy} = R_{66}\tau_{xy}$$

Onde  $R_{ij}$  são os coeficientes reduzidos para o caso plano de deformação.

Desprezando as forças de corpo, as equações de equilíbrio podem ser expressas como:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

As relações deformação-deslocamento são dadas por:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{B-2})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

As condições de contorno prescritas sobre a superfície superior e inferior são:

$$\sigma_y(x, h/2) = q(x) \quad (\text{B-3})$$

$$\sigma_y(x, -h/2) = \tau_{xy}(x, \pm h/2) = 0$$

e as condições de contorno da chapa nas extremidades são dadas por:

$$\sigma_x(0, y) = \sigma_x(L, y) = 0 \quad (\text{B-4})$$

$$v(0, y) = v(L, y) = 0$$

Para identificar as laminas, ou camadas, foi introduzido um índice, onde a camada superior corresponde a  $i = 1$ . Também foi introduzido um sistema de coordenadas locais  $x_i, y_i, z_i$ , sobre a linha de centro da  $i$ -ésima camada com origem em  $x=0$ . A espessura da  $i$ -ésima camada é designada por  $h_i$ .

Para estabelecer continuidade de tensão e deslocamentos na interface entre as camadas, as condições abaixo devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(i)}(x, -h_i/2) &= \sigma_y^{(i-1)}(x, h_{i-1}/2) \\ \tau_{xy}^{(i)}(x, -h_i/2) &= \tau_{xy}^{(i-1)}(x, h_{i-1}/2) \\ u_i(x, -h_i/2) &= u_{i-1}(x, h_{i-1}/2) \\ v_i(x, -h_i/2) &= v_{i-1}(x, h_{i-1}/2)\end{aligned}\tag{B-5}$$

Expressando a função de carga na forma de série de Fourier, tem-se:

$$q(x) = q_0 \operatorname{sen} px \tag{B-6}$$

Onde,  $q_0$  é uma constante, e

$$p = p(n) = \frac{n\pi}{L} \tag{B-7}$$

A solução do problema de valor de contorno descrito pelas equações. (B-1) a (B-7), pode ser escrito como, PAGANO (1969):

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(i)} &= f_i''(y) \operatorname{sen} px \\ \sigma_y^{(i)} &= -p^2 f_i(y) \operatorname{sen} px \\ \tau_{xy}^{(i)} &= -p f_i'(y) \operatorname{cosp} x\end{aligned}\tag{B-8}$$

Que satisfazem as equações de equilíbrio. Usando as equações (B-1), (B-2) e (B-8), obtém-se a seguinte equação diferencial em função de  $f_i(y)$ .

$$R_{11}^{(i)} f_i''''(y) - (R_{66}^{(i)} + 2R_{12}^{(i)}) p^2 f_i''(y) + R_{22}^{(i)} p^4 f_i(y) = 0 \quad (\text{B-9})$$

A solução desta equação é dada por, PAGANO (1969):

$$f_i(y) = \sum_{j=1}^4 A_{ji} \exp(m_{ji} y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (\text{B-10})$$

Onde  $A_{ji}$  são constantes, desde que os  $m_{ji}$  são todos distintos (para um dado  $i$ ). Os vários  $m_{ji}$  são dados por:

$$\left. \begin{matrix} m_{1i} \\ m_{2i} \end{matrix} \right\} = \pm p \left( \frac{a_i + b_i}{c_i} \right)^{1/2} \quad (\text{B-11})$$

$$\left. \begin{matrix} m_{3i} \\ m_{4i} \end{matrix} \right\} = \pm p \left( \frac{a_i - b_i}{c_i} \right)^{1/2}$$

Onde:

$$a_i = R_{66}^{(i)} + 2R_{12}^{(i)}$$

$$b_i = (a_i^2 - 4R_{11}^{(i)} R_{22}^{(i)})^{1/2} \quad (\text{B-12})$$

$$c_i = 2R_{11}^{(i)}$$

As propriedades do material composto considerado anteriormente são tais que:

$$a_i > b_i \quad \text{e} \quad a_i^2 > 4R_{11}^{(i)} R_{22}^{(i)}$$

Consequentemente, os  $m_{ji}$  são todos reais e distintos e os coeficientes  $A_{ji}$  são todos reais. As componentes da tensão tomam a forma:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(i)} &= \text{sen } px \sum_{j=1}^4 A_{ji} m_{ji}^2 \exp(m_{ji} y_i) \\ \sigma_y^{(i)} &= -p^2 \text{sen } px \sum_{j=1}^4 A_{ji} \exp(m_{ji} y_i) \\ \tau_{xy}^{(i)} &= -p \text{cosp } x \sum_{j=1}^4 A_{ji} m_{ji} \exp(m_{ji} y_i)\end{aligned}\tag{B-13}$$

As expressões para as componentes de deslocamento são:

$$\begin{aligned}u_i &= \frac{\text{cosp } x}{p} \sum_{j=1}^4 A_{ji} (R_{12}^{(i)} p^2 - R_{11}^{(i)} m_{ji}^2) \exp(m_{ji} y_i) \\ v_i &= \text{sen } px \sum_{j=1}^4 A_{ji} \left( R_{12}^{(i)} m_{ji} - \frac{R_{22}^{(i)}}{m_{ji}} p^2 \right) \exp(m_{ji} y_i)\end{aligned}\tag{B-14}$$

Satisfazendo as condições de contorno permanentes (B-3) e as condições de continuidade da interface (B-5), conduz para um sistema de 4m simultâneas equações para as 4m constantes  $A_{ji}$ . Os campos de tensão e deslocamento são dados pelas equações (B-13) e (B-14). Caso aconteça que  $b_i$  na equação (B-12) seja zero para uma determinada camada, o que ocorre para material isotrópico ou transversalmente isotrópico no plano xy, a expressão para  $f_i(y)$  dada pela equação (B-10) não é válida. Neste caso, temos:

$$f_i(y) = (A_{1i} + A_{2i} y_i) \exp(m_{1i} y_i) + (A_{3i} + A_{4i} y_i) \exp(-m_{1i} y_i)\tag{B-15}$$

Onde,  $m_{1i}$  é dado pela equação (B-11) com  $b_i=0$ . As tensões são como definidas na equação (B-8), enquanto os deslocamentos tomam a forma:



$$u_i = \left[ -R_{11}^{(i)} f_i''(y) + R_{12}^{(i)} p^2 f_i(y) \right] \frac{\cos px}{p}$$

$$v_i = \left[ R_{12}^{(i)} f_i'(y) + R_{22}^{(i)} \int f_i(y) dy \right] \sin px$$
(B-16)

Onde a integral na equação acima representa a integração indefinida da equação (B-15).

## Apêndice C

**SOLUÇÃO SEGUNDO A TEORIA CPT, JONES (1975)**

A teoria clássica de placas laminadas (CPT) é baseada nas seguintes hipóteses:

- a) Deslocamento linear através da espessura da placa;
- b) Deformação de cisalhamento é desprezada ( normal permanece normal );
- c) Consideração de estado plano de tensões nas relações constitutivas.

Para o caso de laminados sujeitos a flexão cilíndrica, as equações governativas do CPT reduzem a:

$$Au_{0,xx} - Bw_{,xxx} = 0 \tag{C-1}$$

$$Dw_{,xxxx} - Bu_{0,xxx} = q$$

Onde  $w$  é a deflexão da placa e  $u_0$  é o deslocamento no plano central na direção  $x$ . Tem-se, também:

$$(A, B, D) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, z^2) dz \tag{C-2}$$

Fazendo  $q = q_0 \text{ sen } px$ , encontra-se que,

$$u_0 = \frac{Bq_0}{Fp^3} \text{cosp}x \tag{C-3}$$

$$w = \frac{Aq_0}{Fp^4} \text{sen } px$$

Onde:

$$F = AD - B^2 \tag{C-4}$$

Logo, somente a componente de deformação  $\varepsilon_x$  não será zero, e é dada por:

$$\varepsilon_x = u_{0,x} - z w_{,xx} = \frac{(Az - B)}{Fp^2} q_0 \text{ sen } px \quad (\text{C-5})$$

Das relações constitutivas das camadas pode-se determinar as tensões no plano.

$$\sigma_x^{(i)} = \frac{q_0 Q_{11}^{(i)} (Az - B)}{Fp^2} \text{ sen } px \quad (\text{C-6})$$

$$\sigma_y^{(i)} = \frac{q_0 Q_{12}^{(i)} (Az - B)}{Fp^2} \text{ sen } px$$

De acordo com as considerações empregadas no CPT, as componentes de tensão  $\sigma_z$  e  $\tau_{xz}$ , como determinada da relação constitutiva, será zero, dessa forma foi computada aquelas tensões usando as equações de equilíbrio.

Assim, tem-se:

$$\tau_{xz}^{(i)} = -\frac{q_0 Q_{11}^{(i)}}{Fp} \left( \frac{A}{2} z^2 - Bz + H_i \right) \text{ cosp } x \quad (\text{C-7})$$

$$\sigma_z^{(i)} = -\frac{q_0 Q_{11}^{(i)}}{F} \left( \frac{A}{6} z^3 - \frac{B}{2} z^2 + H_i z + L_i \right) \text{ sen } px$$

Onde  $H_i$  e  $L_i$  são constantes a ser determinadas com as condições de contorno para  $\sigma_z$  e  $\tau_{xz}$  sobre  $z = \pm h/2$  e as condições de continuidade de tensão na interface. Apesar de existir  $2(m+1)$  condições de contorno e de continuidade de interface para  $\sigma_z$  e  $\tau_{xz}$ , somente  $2m$  daquelas são independentes devido as aproximações empregadas no CPT. Assim aquelas condições permitem a computação das  $2m$  constantes  $H_i$  e  $L_i$ .

Apêndice D

**MATRIZ DE RIGIDEZ E MASSA PARA ELEMENTO DE ALTA  
ORDEM**

MATRIZ DE RIGIDEZ

37*A*Q <sub>11</sub> /(10*I)	
37*Mst*Q <sub>11</sub> /(10*I) - A*Q <sub>13</sub> /2	37*Inc*Q <sub>11</sub> /(10*I) - Mst*Q <sub>13</sub> + 8*I*A*Q <sub>33</sub> /105
37*Inc*Q <sub>11</sub> /(10*I) - Mst*Q <sub>13</sub>	37*Mst2*Q <sub>11</sub> /(10*I) - 3*Inc*Q <sub>13</sub> /2 + 16*I*Mst*Q <sub>33</sub> /105
37*Mst2*Q <sub>11</sub> /(10*I) - 3*Inc*Q <sub>13</sub> /2	37*Inc2*Q <sub>11</sub> /(10*I) - 2*Mst2*Q <sub>13</sub> + 24*I*Inc*Q <sub>33</sub> /105
37*A*Q <sub>13</sub> /(10*I)	37*Mst*Q <sub>13</sub> /(10*I) - A*Q <sub>33</sub> /2
37*Mst*Q <sub>13</sub> /(10*I) - A*Q <sub>12</sub> /2	-Mst*Q <sub>12</sub> /2 + 8*I*A*Q <sub>23</sub> /105 + 37*Inc*Q <sub>13</sub> /(10*I) - Mst*Q <sub>33</sub> /2
37*Inc*Q <sub>13</sub> /(10*I) - Mst*Q <sub>12</sub>	-Inc*Q <sub>12</sub> + 16*I*Mst*Q <sub>23</sub> /105 + 37*Mst2*Q <sub>13</sub> /(10*I) - c*Q <sub>33</sub> /2
-13*A*Q <sub>11</sub> /(40*I)	-13*Mst*Q <sub>11</sub> /(40*I) + 7*A*Q <sub>13</sub> /80
-13*Mst*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 7*A*Q <sub>13</sub> /80	-13*Inc*Q <sub>11</sub> /(40*I) + 19*I*A*Q <sub>33</sub> /1680
-13*Inc*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 14*Mst*Q <sub>13</sub> /80	-13*Mst2*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 7*Inc*Q <sub>13</sub> /80 + 38*I*Mst*Q <sub>33</sub> /1680
-13*Mst2*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 21*Inc*Q <sub>13</sub> /80	-13*Inc2*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 14*Mst2*Q <sub>13</sub> /80 + 57*I*Inc*Q <sub>33</sub> /1680
-13*A*Q <sub>13</sub> /(40*I)	-13*Mst*Q <sub>13</sub> /(40*I) + 7*A*Q <sub>33</sub> /80
-13*Mst*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 7*A*Q <sub>12</sub> /80	-7*Mst*Q <sub>12</sub> /80 - 13*Inc*Q <sub>13</sub> /(40*I) + 19*I*A*Q <sub>23</sub> /1680 + 7*Mst*Q <sub>33</sub> /80
-13*Inc*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 14*Mst*Q <sub>12</sub> /80	-14*Inc*Q <sub>12</sub> /80 - 13*Mst2*Q <sub>13</sub> /(40*I) + 38*I*Mst*Q <sub>23</sub> /1680 + 7*Inc*Q <sub>33</sub> /80
-189*A*Q <sub>11</sub> /(40*I)	-189*Mst*Q <sub>11</sub> /(40*I) + 57*A*Q <sub>13</sub> /80
-189*Mst*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 57*A*Q <sub>13</sub> /80	-189*Inc*Q <sub>11</sub> /(40*I) + 33*I*A*Q <sub>33</sub> /560
-189*Inc*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 114*Mst*Q <sub>13</sub> /80	-189*Mst2*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 57*Inc*Q <sub>13</sub> /80 + 66*I*Mst*Q <sub>33</sub> /560
-189*Mst2*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 171*Inc*Q <sub>13</sub> /80	-189*Inc2*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 114*Mst2*Q <sub>13</sub> /80 + 99*I*Inc*Q <sub>33</sub> /560
-189*A*Q <sub>13</sub> /(40*I)	-189*Mst*Q <sub>13</sub> /(40*I) + 57*A*Q <sub>33</sub> /80
-189*Mst*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 57*A*Q <sub>12</sub> /80	-57*Mst*Q <sub>12</sub> /80 - 189*Inc*Q <sub>13</sub> /(40*I) + 33*I*A*Q <sub>23</sub> /560 + 57*Mst*Q <sub>33</sub> /80
-189*Inc*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 114*Mst*Q <sub>12</sub> /80	-114*Inc*Q <sub>12</sub> /80 - 189*Mst2*Q <sub>13</sub> /(40*I) + 66*I*Mst*Q <sub>23</sub> /560 + 57*Inc*Q <sub>33</sub> /80
27*A*Q <sub>11</sub> /(20*I)	27*Mst*Q <sub>11</sub> /(20*I) - 3*A*Q <sub>13</sub> /10
27*Mst*Q <sub>11</sub> /(20*I) + 3*A*Q <sub>13</sub> /10	27*Inc*Q <sub>11</sub> /(20*I) - 3*A*I*Q <sub>33</sub> /140
27*Inc*Q <sub>11</sub> /(20*I) + 6*Mst*Q <sub>13</sub> /10	27*Mst2*Q <sub>11</sub> /(20*I) + 3*Inc*Q <sub>13</sub> /10 - 6*I*Mst*Q <sub>33</sub> /140
27*Mst2*Q <sub>11</sub> /(20*I) + 9*Inc*Q <sub>13</sub> /10	27*Inc2*Q <sub>11</sub> /(20*I) + 6*Mst2*Q <sub>13</sub> /10 - 9*I*Inc*Q <sub>33</sub> /140
27*A*Q <sub>13</sub> /(20*I)	27*Mst*Q <sub>13</sub> /(20*I) - 3*A*Q <sub>33</sub> /10
27*Mst*Q <sub>13</sub> /(20*I) + 3*A*Q <sub>12</sub> /10	3*Mst*Q <sub>12</sub> /10 + 27*Inc*Q <sub>13</sub> /(20*I) - 3*I*A*Q <sub>23</sub> /140 - 3*Mst*Q <sub>33</sub> /10
27*Inc*Q <sub>13</sub> /(20*I) + 6*Mst*Q <sub>12</sub> /10	6*Inc*Q <sub>12</sub> /10 + 27*Mst2*Q <sub>13</sub> /(20*I) - 6*I*Mst*Q <sub>23</sub> /140 - 3*Inc*Q <sub>33</sub> /10

$37*Inc2*Q_{11}/(10*I) - 2*Mst2*Q_{13} + 32*I*Inc*Q_{33}/105$   
 $37*Mst3*Q_{11}/(10*I) - 5*Inc2*Q_{13}/2 + 48*I*Mst2*Q_{33}/105$   
 $37*Inc*Q_{13}/(10*I) - Mst*Q_{33}$   
 $-Inc*Q_{12}/2 + 16*I*Mst*Q_{33}/105 + 37*Mst2*Q_{13}/(10*I) - Inc*Q_{33}$   
 $-Mst2*Q_{12} + 32*I*Inc*Q_{33}/105 + 37*Inc2*Q_{13}/(10*I) - Mst2*Q_{33}$   
 $-13*Inc*Q_{11}/(40*I) + 14*Mst*Q_{13}/80$   
 $-13*Mst2*Q_{11}/(40*I) + 7*Inc*Q_{13}/80 + 38*I*Mst*Q_{33}/1680$   
 $-13*Inc2*Q_{11}/(40*I) + 76*I*Inc*Q_{33}/1680$   
 $-13*Mst3*Q_{11}/(40*I) - 7*Inc2*Q_{13}/80 + 114*I*Mst2*Q_{33}/1680$   
 $-13*Inc*Q_{13}/(40*I) + 14*Mst*Q_{33}/80$   
 $-7*Inc*Q_{12}/80 - 13*Mst2*Q_{13}/(40*I) + 38*I*Inc*Q_{33}/1680 + 14*Inc*Q_{33}/80$   
 $-14*Mst2*Q_{12}/80 - 13*Inc2*Q_{13}/(40*I) + 76*I*Inc*Q_{33}/1680 + 14*Mst2*Q_{33}/80$   
 $-189*Inc*Q_{11}/(40*I) + 114*Mst*Q_{13}/80$   
 $-189*Mst2*Q_{11}/(40*I) + 57*Inc*Q_{13}/80 + 66*I*Mst*Q_{33}/560$   
 $-189*Inc2*Q_{11}/(40*I) + 132*I*Inc*Q_{33}/560$   
 $-189*Mst3*Q_{11}/(40*I) - 57*Inc2*Q_{13}/80 + 198*I*Mst2*Q_{33}/560$   
 $-189*Inc*Q_{13}/(40*I) + 114*Mst*Q_{33}/80$   
 $-57*Inc*Q_{12}/80 - 189*Mst2*Q_{13}/(40*I) + 66*I*Mst*Q_{33}/560 + 114*Inc*Q_{33}/80$   
 $-114*Mst2*Q_{12}/80 - 189*Inc2*Q_{13}/(40*I) + 132*I*Inc*Q_{33}/560 + 114*Mst2*Q_{33}/80$   
 $27*Inc*Q_{11}/(20*I) - 6*Mst*Q_{13}/10$   
 $27*Mst2*Q_{11}/(20*I) - 3*Inc*Q_{13}/10 - 6*I*Mst*Q_{33}/140$   
 $27*Inc2*Q_{11}/(20*I) - 12*I*Inc*Q_{33}/140$   
 $27*Mst3*Q_{11}/(20*I) + 3*Inc2*Q_{13}/10 - 18*I*Mst2*Q_{33}/140$   
 $27*Inc*Q_{13}/(20*I) - 6*Mst*Q_{33}/10$   
 $3*Inc*Q_{12}/10 + 27*Mst2*Q_{13}/(20*I) - 6*I*Mst*Q_{33}/140 - 6*Inc*Q_{33}/10$   
 $6*Mst2*Q_{12}/10 + 27*Inc2*Q_{13}/(20*I) - 12*I*Inc*Q_{33}/140 - 6*Mst2*Q_{33}/10$

$37*Inc3*Q_{11}/(10*I) - 3*Mst3*Q_{13} + 72*I*Inc2*Q_{33}/105$   
 $37*Mst2*Q_{13}/(10*I) - 3*Inc*Q_{33}/2$   
 $-Mst2*Q_{12}/2 + 24*I*Inc*Q_{33}/105 + 37*Inc2*Q_{13}/(10*I) - 3*Mst2*Q_{33}/2$   
 $-Inc2*Q_{12} - 3*Inc2*Q_{33}/2 + 37*Mst3*Q_{13}/(10*I) + 48*I*Mst2*Q_{33}/105$   
 $-13*Mst2*Q_{11}/(40*I) + 21*Inc*Q_{13}/80$   
 $-13*Inc2*Q_{11}/(40*I) + 14*Mst2*Q_{13}/80 + 57*I*Inc*Q_{33}/1680$   
 $-13*Mst3*Q_{11}/(40*I) + 7*Inc2*Q_{13}/80 + 114*I*Mst2*Q_{33}/1680$   
 $-13*Inc3*Q_{11}/(40*I) + 171*I*Inc2*Q_{33}/1680$   
 $-13*Mst2*Q_{13}/(40*I) + 21*Inc*Q_{33}/80$   
 $-7*Mst2*Q_{12}/80 - 13*Inc2*Q_{13}/(40*I) + 57*I*Inc*Q_{33}/1680 + 21*Mst2*Q_{33}/80$   
 $-14*Inc2*Q_{12}/80 - 13*Mst3*Q_{13}/(40*I) + 114*I*Mst2*Q_{33}/1680 + 21*Inc2*Q_{33}/80$   
 $-189*Mst2*Q_{11}/(40*I) + 171*Inc*Q_{13}/80$   
 $-189*Inc2*Q_{11}/(40*I) + 114*Mst2*Q_{13}/80 + 99*I*Inc*Q_{33}/560$   
 $-189*Mst3*Q_{11}/(40*I) + 57*Inc2*Q_{13}/80 + 198*I*Mst2*Q_{33}/560$   
 $-189*Inc3*Q_{11}/(40*I) + 297*I*Inc2*Q_{33}/560$   
 $-189*Mst2*Q_{13}/(40*I) + 171*Inc*Q_{33}/80$   
 $-57*Mst2*Q_{12}/80 - 189*Inc2*Q_{13}/(40*I) + 99*I*Inc*Q_{33}/560 + 171*Mst2*Q_{33}/80$   
 $-114*Inc2*Q_{12}/80 - 189*Mst3*Q_{13}/(40*I) + 198*I*Mst2*Q_{33}/560 + 171*Inc2*Q_{33}/80$   
 $27*Mst2*Q_{11}/(20*I) - 9*Inc*Q_{13}/10$   
 $27*Inc2*Q_{11}/(20*I) - 6*Mst2*Q_{13}/10 - 9*I*Inc*Q_{33}/140$   
 $27*Mst3*Q_{11}/(20*I) - 3*Inc2*Q_{13}/10 - 18*I*Mst2*Q_{33}/140$   
 $27*Inc3*Q_{11}/(20*I) - 27*I*Inc2*Q_{33}/140$   
 $27*Mst2*Q_{13}/(20*I) - 9*Inc*Q_{33}/10$   
 $3*Mst2*Q_{12}/10 + 27*Inc2*Q_{13}/(20*I) - 9*I*Inc*Q_{33}/140 - 9*Mst2*Q_{33}/10$   
 $6*Inc2*Q_{12}/10 + 27*Mst3*Q_{13}/(20*I) - 18*I*Mst2*Q_{33}/140 - 9*Inc2*Q_{33}/10$

37*A*Q <sub>33</sub> /(10*I)	8*I*A*Q <sub>27</sub> /105 - Mst*Q <sub>23</sub> + 37*Inc*Q <sub>33</sub> /(10*I)
-A*Q <sub>23</sub> /2 + 37*Mst*Q <sub>33</sub> /(10*I)	16*I*Mst*Q <sub>27</sub> /105 - 3*Inc*Q <sub>23</sub> /2 + 37*Mst2*Q <sub>33</sub> /(10*I)
-Mst*Q <sub>23</sub> + 37*Inc*Q <sub>33</sub> /(10*I)	7*A*Q <sub>17</sub> /80 - 13*Mst*Q <sub>13</sub> /(40*I)
-13*A*Q <sub>13</sub> /(40*I)	7*Mst*Q <sub>17</sub> /80 + 19*I*A*Q <sub>23</sub> /1680 - 13*Inc*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 7*Mst*Q <sub>33</sub> /80
-13*Mst*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 7*A*Q <sub>33</sub> /80	7*Inc*Q <sub>17</sub> /80 + 38*I*Mst*Q <sub>23</sub> /1680 - 13*Mst2*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 14*Inc*Q <sub>33</sub> /80
-13*Inc*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 14*Mst*Q <sub>33</sub> /80	7*Mst2*Q <sub>17</sub> /80 + 57*I*Inc*Q <sub>23</sub> /1680 - 13*Inc2*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 21*Mst2*Q <sub>33</sub> /80
-13*Mst2*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 21*Inc*Q <sub>33</sub> /80	7*A*Q <sub>23</sub> /80 - 13*Mst*Q <sub>33</sub> /(40*I)
-13*A*Q <sub>33</sub> /(40*I)	19*I*A*Q <sub>27</sub> /1680 - 13*Inc*Q <sub>33</sub> /(40*I)
-7*A*Q <sub>23</sub> /80 - 13*Mst*Q <sub>33</sub> /(40*I)	38*I*Mst*Q <sub>27</sub> /1680 - 7*Inc*Q <sub>23</sub> /80 - 13*Mst2*Q <sub>33</sub> /(40*I)
-14*Mst*Q <sub>23</sub> /80 - 13*Inc*Q <sub>33</sub> /(40*I)	57*A*Q <sub>17</sub> /80 - 189*Mst*Q <sub>13</sub> /(40*I)
-189*A*Q <sub>13</sub> /(40*I)	57*Mst*Q <sub>17</sub> /80 + 33*I*A*Q <sub>23</sub> /560 - 189*Inc*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 57*Mst*Q <sub>33</sub> /80
-189*Mst*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 57*A*Q <sub>33</sub> /80	57*Inc*Q <sub>17</sub> /80 + 66*I*Mst*Q <sub>23</sub> /560 - 189*Mst2*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 114*Inc*Q <sub>33</sub> /80
-189*Inc*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 114*Mst*Q <sub>33</sub> /80	57*Mst2*Q <sub>17</sub> /80 + 99*I*Inc*Q <sub>23</sub> /560 - 189*Inc2*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 171*Mst2*Q <sub>33</sub> /80
-189*Mst2*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 171*Inc*Q <sub>33</sub> /80	57*A*Q <sub>23</sub> /80 - 189*Mst*Q <sub>33</sub> /(40*I)
-189*A*Q <sub>33</sub> /(40*I)	33*I*A*Q <sub>27</sub> /560 - 189*Inc*Q <sub>33</sub> /(40*I)
-57*A*Q <sub>23</sub> /80 - 189*Mst*Q <sub>33</sub> /(40*I)	66*I*Mst*Q <sub>27</sub> /560 - 57*Inc*Q <sub>23</sub> /80 - 189*Mst2*Q <sub>33</sub> /(40*I)
-114*Mst*Q <sub>23</sub> /80 - 189*Inc*Q <sub>33</sub> /(40*I)	-3*A*Q <sub>17</sub> /10 + 27*Mst*Q <sub>13</sub> /(20*I)
27*A*Q <sub>13</sub> /(20*I)	-3*Mst*Q <sub>17</sub> /10 - 3*I*A*Q <sub>23</sub> /140 + 27*Inc*Q <sub>13</sub> /(20*I) + 3*Mst*Q <sub>33</sub> /10
27*Mst*Q <sub>13</sub> /(20*I) + 3*A*Q <sub>33</sub> /10	-3*Inc*Q <sub>17</sub> /10 - 6*I*Mst*Q <sub>23</sub> /140 + 27*Mst2*Q <sub>13</sub> /(20*I) + 6*Inc*Q <sub>33</sub> /10
27*Inc*Q <sub>13</sub> /(20*I) + 6*Mst*Q <sub>33</sub> /10	-3*Mst2*Q <sub>17</sub> /10 - 9*I*Inc*Q <sub>23</sub> /140 + 27*Inc2*Q <sub>13</sub> /(20*I) + 9*Mst2*Q <sub>33</sub> /10
27*Mst2*Q <sub>13</sub> /(20*I) + 9*Inc*Q <sub>33</sub> /10	-3*A*Q <sub>23</sub> /10 + 27*Mst*Q <sub>33</sub> /(20*I)
27*A*Q <sub>33</sub> /(20*I)	-3*I*A*Q <sub>27</sub> /140 + 27*Inc*Q <sub>33</sub> /(20*I)
3*A*Q <sub>23</sub> /10 + 27*Mst*Q <sub>33</sub> /(20*I)	-6*I*Mst*Q <sub>27</sub> /140 + 3*Inc*Q <sub>23</sub> /10 + 27*Mst2*Q <sub>33</sub> /(20*I)
6*Mst*Q <sub>23</sub> /10 + 27*Inc*Q <sub>33</sub> /(20*I)	

$32*1*Inc*Q_{17}/105 - 2*Mst2*Q_{73} + 37*Inc2*Q_{33}/(10*I)$   
 $14*Mst*Q_{17}/80 - 13*Inc*Q_{13}/(40*I)$   
 $14*Inc*Q_{17}/80 + 38*I*Mst*Q_{73}/1680 - 13*Mst2*Q_{13}/(40*I) - 7*Inc*Q_{33}/80$   
 $14*Mst2*Q_{17}/80 + 76*I*Inc*Q_{73}/1680 - 13*Inc2*Q_{13}/(40*I) - 14*Mst2*Q_{33}/80$   
 $14*Inc2*Q_{17}/80 + 114*I*Mst2*Q_{73}/1680 - 13*Mst3*Q_{13}/(40*I) - 21*Inc2*Q_{33}/80$   
 $14*Mst*Q_{73}/80 - 13*Inc*Q_{33}/(40*I)$   
 $38*I*Mst*Q_{77}/1680 + 7*Inc*Q_{77}/80 - 13*Mst2*Q_{33}/(40*I)$   
 $76*I*Inc*Q_{77}/1680 - 13*Inc2*Q_{33}/(40*I)$   
 $114*Mst*Q_{17}/80 - 189*Inc*Q_{13}/(40*I)$   
 $114*Inc*Q_{17}/80 + 66*I*Mst*Q_{73}/560 - 189*Mst2*Q_{13}/(40*I) - 57*Inc*Q_{33}/80$   
 $114*Mst2*Q_{17}/80 + 132*I*Inc*Q_{73}/560 - 189*Inc2*Q_{13}/(40*I) - 114*Mst2*Q_{33}/80$   
 $114*Inc2*Q_{17}/80 + 198*I*Mst2*Q_{73}/560 - 189*Mst3*Q_{13}/(40*I) - 171*Inc2*Q_{33}/80$   
 $114*Mst*Q_{73}/80 - 189*Inc*Q_{33}/(40*I)$   
 $66*I*Mst*Q_{77}/560 + 57*Inc*Q_{77}/80 - 189*Mst2*Q_{33}/(40*I)$   
 $132*I*Inc*Q_{77}/560 - 189*Inc2*Q_{33}/(40*I)$   
 $-6*Mst*Q_{17}/10 + 27*Inc*Q_{13}/(20*I)$   
 $-6*Inc*Q_{17}/10 - 6*I*Mst*Q_{73}/140 + 27*Mst2*Q_{13}/(20*I) + 3*Inc*Q_{33}/10$   
 $-6*Mst2*Q_{17}/10 - 12*I*Inc*Q_{73}/140 + 27*Inc2*Q_{13}/(20*I) + 6*Mst2*Q_{33}/10$   
 $-6*Inc2*Q_{17}/10 - 18*I*Mst2*Q_{73}/140 + 27*Mst3*Q_{13}/(20*I) + 9*Inc2*Q_{33}/10$   
 $-6*Mst*Q_{73}/10 + 27*Inc*Q_{33}/(20*I)$   
 $-6*I*Mst*Q_{77}/140 - 3*Inc*Q_{77}/10 + 27*Mst2*Q_{33}/(20*I)$   
 $-12*I*Inc*Q_{77}/140 + 27*Inc2*Q_{33}/(20*I)$

$37*A*Q_{11}/(10*I)$   
 $37*Mst*Q_{11}/(10*I) + A*Q_{13}/2$   
 $37*Inc*Q_{11}/(10*I) + Mst*Q_{13}$   
 $37*Mst2*Q_{11}/(10*I) + 3*Inc*Q_{13}/2$   
 $37*A*Q_{13}/(10*I)$   
 $A*Q_{17}/2 + 37*Mst*Q_{13}/(10*I)$   
 $Mst*Q_{17} + 37*Inc*Q_{13}/(10*I)$   
 $27*A*Q_{11}/(20*I)$   
 $27*Mst*Q_{11}/(20*I) - 3*A*Q_{13}/10$   
 $27*Inc*Q_{11}/(20*I) - 6*Mst*Q_{13}/10$   
 $27*Mst2*Q_{11}/(20*I) - 9*Inc*Q_{13}/10$   
 $27*A*Q_{13}/(20*I)$   
 $-3*A*Q_{17}/10 + 27*Mst*Q_{13}/(20*I)$   
 $-6*Mst*Q_{17}/10 + 27*Inc*Q_{13}/(20*I)$   
 $-189*A*Q_{11}/(40*I)$   
 $-189*Mst*Q_{11}/(40*I) + 57*A*Q_{13}/80$   
 $-189*Inc*Q_{11}/(40*I) + 114*Mst*Q_{13}/80$   
 $-189*Mst2*Q_{11}/(40*I) + 171*Inc*Q_{13}/80$   
 $-189*A*Q_{13}/(40*I)$   
 $57*A*Q_{17}/80 - 189*Mst*Q_{13}/(40*I)$   
 $114*Mst*Q_{17}/80 - 189*Inc*Q_{13}/(40*I)$



37*Inc*Q <sub>11</sub> /(10*1) + Mst*Q <sub>13</sub> + 8*I*A*Q <sub>33</sub> /105	37*Inc2*Q <sub>11</sub> /(10*1) + 2*Mst2*Q <sub>13</sub> + 32*I*Inc*Q <sub>33</sub> /105
37*Mst2*Q <sub>11</sub> /(10*1) + 3*Inc*Q <sub>13</sub> /2 + 16*I*Mst*Q <sub>33</sub> /105	37*Mst3*Q <sub>11</sub> /(10*1) + 5*Inc2*Q <sub>13</sub> /2 + 48*I*Mst2*Q <sub>33</sub> /105
37*Inc2*Q <sub>11</sub> /(10*1) + 2*Mst2*Q <sub>13</sub> + 24*I*Inc*Q <sub>33</sub> /105	37*Inc*Q <sub>13</sub> /(10*1) + Mst*Q <sub>33</sub>
37*Mst*Q <sub>13</sub> /(10*1) + A*Q <sub>33</sub> /2	Inc*Q <sub>12</sub> /2 + 37*Mst2*Q <sub>13</sub> /(10*1) + 16*I*Mst*Q <sub>33</sub> /105 + Inc*Q <sub>33</sub>
Mst*Q <sub>12</sub> /2 + 37*Inc*Q <sub>13</sub> /(10*1) + 8*I*A*Q <sub>33</sub> /105 + Mst*Q <sub>33</sub> /2	Mst2*Q <sub>12</sub> + 37*Inc2*Q <sub>13</sub> /(10*1) + 32*I*Inc*Q <sub>33</sub> /105 + Mst2*Q <sub>33</sub>
Inc*Q <sub>12</sub> + 37*Mst2*Q <sub>13</sub> /(10*1) + 16*I*Mst*Q <sub>33</sub> /105 + Inc*Q <sub>33</sub> /2	27*Inc*Q <sub>11</sub> /(20*1) + 6*Mst*Q <sub>13</sub> /10
27*Mst*Q <sub>11</sub> /(20*1) + 3*A*Q <sub>13</sub> /10	27*Mst2*Q <sub>11</sub> /(20*1) + 3*Inc*Q <sub>13</sub> /10 - 6*I*Mst*Q <sub>33</sub> /140
27*Inc*Q <sub>11</sub> /(20*1) - 3*I*A*Q <sub>33</sub> /140	27*Inc2*Q <sub>11</sub> /(20*1) - 12*I*Inc*Q <sub>33</sub> /140
27*Mst2*Q <sub>11</sub> /(20*1) - 3*Inc*Q <sub>13</sub> /10 - 6*I*Mst*Q <sub>33</sub> /140	27*Mst3*Q <sub>11</sub> /(20*1) - 3*Inc2*Q <sub>13</sub> /10 - 18*I*Mst2*Q <sub>33</sub> /140
27*Inc2*Q <sub>11</sub> /(20*1) - 6*Mst2*Q <sub>13</sub> /10 - 9*I*Inc*Q <sub>33</sub> /140	27*Inc*Q <sub>13</sub> /(20*1) + 6*Mst*Q <sub>33</sub> /10
27*Mst*Q <sub>13</sub> /(20*1) + 3*A*Q <sub>33</sub> /10	-3*Inc*Q <sub>12</sub> /10 + 27*Mst2*Q <sub>13</sub> /(20*1) - 6*I*Mst*Q <sub>33</sub> /140 + 6*Inc*Q <sub>33</sub> /10
-3*Mst*Q <sub>12</sub> /10 + 27*Inc*Q <sub>13</sub> /(20*1) - 3*I*A*Q <sub>33</sub> /140 + 3*Mst*Q <sub>33</sub> /10	-6*Mst2*Q <sub>12</sub> /10 + 27*Inc2*Q <sub>13</sub> /(20*1) - 12*I*Inc*Q <sub>33</sub> /140 + 6*Mst2*Q <sub>33</sub> /10
-6*Inc*Q <sub>12</sub> /10 + 27*Mst2*Q <sub>13</sub> /(20*1) - 6*I*Mst*Q <sub>33</sub> /140 + 3*Inc*Q <sub>33</sub> /10	-189*Inc*Q <sub>11</sub> /(40*1) - 114*Mst*Q <sub>13</sub> /80
-189*Mst*Q <sub>11</sub> /(40*1) - 57*A*Q <sub>13</sub> /80	-189*Mst2*Q <sub>11</sub> /(40*1) - 57*Inc*Q <sub>13</sub> /80 + 66*I*Mst*Q <sub>33</sub> /560
-189*Inc*Q <sub>11</sub> /(40*1) + 33*I*A*Q <sub>33</sub> /560	-189*Inc2*Q <sub>11</sub> /(40*1) + 132*I*Inc*Q <sub>33</sub> /560
-189*Mst2*Q <sub>11</sub> /(40*1) + 57*Inc*Q <sub>13</sub> /80 + 66*I*Mst*Q <sub>33</sub> /560	-189*Mst3*Q <sub>11</sub> /(40*1) + 57*Inc2*Q <sub>13</sub> /80 + 198*I*Mst2*Q <sub>33</sub> /560
-189*Inc2*Q <sub>11</sub> /(40*1) + 114*Mst2*Q <sub>13</sub> /80 + 99*I*Inc*Q <sub>33</sub> /560	-189*Inc*Q <sub>13</sub> /(40*1) - 114*Mst*Q <sub>33</sub> /80
-189*Mst*Q <sub>13</sub> /(40*1) - 57*A*Q <sub>33</sub> /80	57*Inc*Q <sub>12</sub> /80 - 189*Mst2*Q <sub>13</sub> /(40*1) + 66*I*Mst*Q <sub>33</sub> /560 - 114*Inc*Q <sub>33</sub> /80
57*Mst*Q <sub>12</sub> /80 - 189*Inc*Q <sub>13</sub> /(40*1) + 33*I*A*Q <sub>33</sub> /560 - 57*Mst*Q <sub>33</sub> /80	114*Mst2*Q <sub>12</sub> /80 - 189*Inc2*Q <sub>13</sub> /(40*1) + 132*I*Inc*Q <sub>33</sub> /560 - 114*Mst2*Q <sub>33</sub> /80
114*Inc*Q <sub>12</sub> /80 - 189*Mst2*Q <sub>13</sub> /(40*1) + 66*I*Mst*Q <sub>33</sub> /560 - 57*Inc*Q <sub>33</sub> /80	

37*Inc3*Q <sub>11</sub> /(10*I) + 3*Mst3*Q <sub>13</sub> + 72*I*Inc2*Q <sub>33</sub> /105	37*A*Q <sub>33</sub> /(10*I)
37*Mst2*Q <sub>13</sub> /(10*I) + 3*Inc*Q <sub>33</sub> /2	A*Q <sub>33</sub> /2 + 37*Mst*Q <sub>33</sub> /(10*I)
Mst2*Q <sub>12</sub> /2 + 37*Inc2*Q <sub>13</sub> /(10*I) + 24*I*Inc*Q <sub>23</sub> /105 + 3*Mst2*Q <sub>33</sub> /2	Mst*Q <sub>23</sub> + 37*Inc*Q <sub>33</sub> /(10*I)
Inc2*Q <sub>12</sub> + 37*Mst3*Q <sub>13</sub> /(10*I) + 48*I*Mst2*Q <sub>23</sub> /105 + 3*Inc2*Q <sub>33</sub> /2	27*A*Q <sub>13</sub> /(20*I)
27*Mst2*Q <sub>11</sub> /(20*I) + 9*Inc*Q <sub>13</sub> /10	27*Mst*Q <sub>13</sub> /(20*I) - 3*A*Q <sub>33</sub> /10
27*Inc2*Q <sub>11</sub> /(20*I) + 6*Mst2*Q <sub>13</sub> /10 - 9*I*Inc*Q <sub>33</sub> /140	27*Inc*Q <sub>13</sub> /(20*I) - 6*Mst*Q <sub>33</sub> /10
27*Mst3*Q <sub>11</sub> /(20*I) + 3*Inc2*Q <sub>13</sub> /10 - 18*I*Mst2*Q <sub>33</sub> /140	27*Mst2*Q <sub>13</sub> /(20*I) - 9*Inc*Q <sub>33</sub> /10
27*Inc3*Q <sub>11</sub> /(20*I) - 27*I*Inc2*Q <sub>33</sub> /140	27*A*Q <sub>33</sub> /(20*I)
27*Mst2*Q <sub>13</sub> /(20*I) + 9*Inc*Q <sub>33</sub> /10	-3*A*Q <sub>23</sub> /10 + 27*Mst*Q <sub>33</sub> /(20*I)
-3*Mst2*Q <sub>12</sub> /10 + 27*Inc2*Q <sub>13</sub> /(20*I) - 9*I*Inc*Q <sub>23</sub> /140 + 9*Mst2*Q <sub>33</sub> /10	-6*Mst*Q <sub>23</sub> /10 + 27*Inc*Q <sub>33</sub> /(20*I)
-6*Inc2*Q <sub>12</sub> /10 + 27*Mst3*Q <sub>13</sub> /(20*I) - 18*I*Mst2*Q <sub>23</sub> /140 + 9*Inc2*Q <sub>33</sub> /10	-189*A*Q <sub>13</sub> /(40*I)
-189*Mst2*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 171*Inc*Q <sub>13</sub> /80	-189*Mst*Q <sub>13</sub> /(40*I) + 57*A*Q <sub>33</sub> /80
-189*Inc2*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 114*Mst2*Q <sub>13</sub> /80 + 99*I*Inc*Q <sub>33</sub> /560	-189*Inc*Q <sub>13</sub> /(40*I) + 114*Mst*Q <sub>33</sub> /80
-189*Mst3*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 57*Inc2*Q <sub>13</sub> /80 + 198*I*Mst2*Q <sub>33</sub> /560	-189*Mst2*Q <sub>13</sub> /(40*I) + 171*Inc*Q <sub>33</sub> /80
-189*Inc3*Q <sub>11</sub> /(40*I) + 297*I*Inc2*Q <sub>33</sub> /560	-189*A*Q <sub>33</sub> /(40*I)
-189*Mst2*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 171*Inc*Q <sub>33</sub> /80	57*A*Q <sub>23</sub> /80 - 189*Mst*Q <sub>33</sub> /(40*I)
57*Mst2*Q <sub>12</sub> /80 - 189*Inc2*Q <sub>13</sub> /(40*I) + 99*I*Inc*Q <sub>23</sub> /560 - 171*Mst2*Q <sub>33</sub> /80	114*Mst*Q <sub>23</sub> /80 - 189*Inc*Q <sub>33</sub> /(40*I)
114*Inc2*Q <sub>12</sub> /80 - 189*Mst3*Q <sub>13</sub> /(40*I) + 198*I*Mst2*Q <sub>23</sub> /560 - 171*Inc2*Q <sub>33</sub> /80	

$8*I^*A^*Q_{22}/105 + Mst^*Q_{23} + 37*Inc^*Q_{33}/(10*I)$   
 $16*I^*Mst^*Q_{22}/105 + 3*Inc^*Q_{23}/2 + 37*Mst^*Q_{33}/(10*I)$   
 $3*A^*Q_{12}/10 + 27*Mst^*Q_{13}/(20*I)$   
 $3*Mst^*Q_{12}/10 - 3*I^*A^*Q_{23}/140 + 27*Inc^*Q_{13}/(20*I) - 3*Mst^*Q_{33}/10$   
 $3*Inc^*Q_{12}/10 - 6*I^*Mst^*Q_{23}/140 + 27*Mst^*Q_{13}/(20*I) - 6*Inc^*Q_{33}/10$   
 $3*Mst^*Q_{12}/10 - 9*I^*Inc^*Q_{23}/140 + 27*Inc^*Q_{13}/(20*I) - 9*Mst^*Q_{33}/10$   
 $3*A^*Q_{23}/10 + 27*Mst^*Q_{33}/(20*I)$   
 $-3*I^*A^*Q_{22}/140 + 27*Inc^*Q_{33}/(20*I)$   
 $-6*I^*Mst^*Q_{22}/140 - 3*Inc^*Q_{23}/10 + 27*Mst^*Q_{33}/(20*I)$   
 $-57*A^*Q_{12}/80 - 189*Mst^*Q_{13}/(40*I)$   
 $-57*Mst^*Q_{12}/80 + 33*I^*A^*Q_{23}/560 - 189*Inc^*Q_{13}/(40*I) + 57*Mst^*Q_{33}/80$   
 $-57*Inc^*Q_{12}/80 + 66*I^*Mst^*Q_{23}/560 - 189*Mst^*Q_{13}/(40*I) + 114*Inc^*Q_{33}/80$   
 $-57*Mst^*Q_{12}/80 + 99*I^*Inc^*Q_{23}/560 - 189*Inc^*Q_{13}/(40*I) + 171*Mst^*Q_{33}/80$   
 $-57*A^*Q_{23}/80 - 189*Mst^*Q_{33}/(40*I)$   
 $33*I^*A^*Q_{22}/560 - 189*Inc^*Q_{33}/(40*I)$   
 $66*I^*Mst^*Q_{22}/560 + 57*Inc^*Q_{23}/80 - 189*Mst^*Q_{33}/(40*I)$

$32*I^*Inc^*Q_{22}/105 + 2*Mst^*Q_{23} + 37*Inc^*Q_{33}/(10*I)$   
 $6*Mst^*Q_{12}/10 + 27*Inc^*Q_{13}/(20*I)$   
 $6*Inc^*Q_{12}/10 - 6*I^*Mst^*Q_{23}/140 + 27*Mst^*Q_{13}/(20*I) - 3*Inc^*Q_{33}/10$   
 $6*Mst^*Q_{12}/10 - 12*I^*Inc^*Q_{23}/140 + 27*Inc^*Q_{13}/(20*I) - 6*Mst^*Q_{33}/10$   
 $6*Inc^*Q_{12}/10 - 18*I^*Mst^*Q_{23}/140 + 27*Mst^*Q_{13}/(20*I) - 9*Inc^*Q_{33}/10$   
 $6*Mst^*Q_{23}/10 + 27*Inc^*Q_{33}/(20*I)$   
 $-6*I^*Mst^*Q_{22}/140 + 3*Inc^*Q_{23}/10 + 27*Mst^*Q_{33}/(20*I)$   
 $-12*I^*Inc^*Q_{22}/140 + 27*Inc^*Q_{33}/(20*I)$   
 $-114*Mst^*Q_{12}/80 - 189*Inc^*Q_{13}/(40*I)$   
 $-114*Inc^*Q_{12}/80 + 66*I^*Mst^*Q_{23}/560 - 189*Mst^*Q_{13}/(40*I) + 57*Inc^*Q_{33}/80$   
 $-114*Mst^*Q_{12}/80 + 132*I^*Inc^*Q_{23}/560 - 189*Inc^*Q_{13}/(40*I) + 114*Mst^*Q_{33}/80$   
 $-114*Inc^*Q_{12}/80 + 198*I^*Mst^*Q_{23}/560 - 189*Mst^*Q_{13}/(40*I) + 171*Inc^*Q_{33}/80$   
 $-114*Mst^*Q_{23}/80 - 189*Inc^*Q_{33}/(40*I)$   
 $66*I^*Mst^*Q_{22}/560 - 57*Inc^*Q_{23}/80 - 189*Mst^*Q_{33}/(40*I)$   
 $132*I^*Inc^*Q_{22}/560 - 189*Inc^*Q_{33}/(40*I)$

54*A*Q <sub>11</sub> /(5*I)	
54*Mst*Q <sub>11</sub> /(5*I)	54*Inc*Q <sub>11</sub> /(5*I) + 27*I*A*Q <sub>33</sub> /70
54*Inc*Q <sub>11</sub> /(5*I)	54*Mst2*Q <sub>11</sub> /(5*I) + 54*I*Mst*Q <sub>33</sub> /70
54*Mst2*Q <sub>11</sub> /(5*I)	54*Inc2*Q <sub>11</sub> /(5*I) + 81*I*Inc*Q <sub>33</sub> /70
54*A*Q <sub>13</sub> /(5*I)	54*Mst*Q <sub>13</sub> /(5*I)
54*Mst*Q <sub>13</sub> /(5*I)	54*Inc*Q <sub>13</sub> /(5*I) + 27*I*A*Q <sub>23</sub> /70
54*Inc*Q <sub>13</sub> /(5*I)	54*Mst2*Q <sub>13</sub> /(5*I) + 54*I*Mst*Q <sub>23</sub> /70
-297*A*Q <sub>11</sub> /(40*I)	-297*Mst*Q <sub>11</sub> /(40*I) + 81*A*Q <sub>13</sub> /80
-297*Mst*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 81*A*Q <sub>13</sub> /80	-297*Inc*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 27*I*A*Q <sub>33</sub> /560
-297*Inc*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 162*Mst*Q <sub>13</sub> /80	-297*Mst2*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 81*Inc*Q <sub>13</sub> /80 - 54*I*Mst*Q <sub>33</sub> /560
-297*Mst2*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 243*Inc*Q <sub>13</sub> /80	-297*Inc2*Q <sub>11</sub> /(40*I) - 162*Mst2*Q <sub>13</sub> /80 - 81*I*Inc*Q <sub>33</sub> /560
-297*A*Q <sub>13</sub> /(40*I)	-297*Mst*Q <sub>13</sub> /(40*I) + 81*A*Q <sub>33</sub> /80
-81*A*Q <sub>17</sub> /80 - 297*Mst*Q <sub>13</sub> /(40*I)	-81*Mst*Q <sub>17</sub> /80 - 297*Inc*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 27*I*A*Q <sub>23</sub> /560 + 81*Mst*Q <sub>33</sub> /80
-162*Mst*Q <sub>17</sub> /80 - 297*Inc*Q <sub>13</sub> /(40*I)	-162*Inc*Q <sub>17</sub> /80 - 297*Mst2*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 54*I*Mst*Q <sub>23</sub> /560 + 81*Inc*Q <sub>33</sub> /80

$54 * \text{Inc}2 * Q_{11} / (5 * I) + 108 * I * \text{Inc} * Q_{33} / 70$   
 $54 * \text{Mst}3 * Q_{11} / (5 * I) + 162 * I * \text{Mst}2 * Q_{33} / 70$   
 $54 * \text{Inc} * Q_{13} / (5 * I)$   
 $54 * \text{Mst}2 * Q_{13} / (5 * I) + 54 * I * \text{Mst} * Q_{23} / 70$   
 $54 * \text{Inc}2 * Q_{13} / (5 * I) + 108 * I * \text{Inc} * Q_{23} / 70$   
 $-297 * \text{Inc} * Q_{11} / (40 * I) + 162 * \text{Mst} * Q_{13} / 80$   
 $-297 * \text{Mst}2 * Q_{11} / (40 * I) + 81 * \text{Inc} * Q_{13} / 80 - 54 * I * \text{Mst} * Q_{33} / 560$   
 $-297 * \text{Inc}2 * Q_{11} / (40 * I) - 108 * I * \text{Inc} * Q_{33} / 560$   
 $-297 * \text{Mst}3 * Q_{11} / (40 * I) - 81 * \text{Inc}2 * Q_{13} / 80 - 162 * I * \text{Mst}2 * Q_{33} / 560$   
 $-297 * \text{Inc} * Q_{13} / (40 * I) + 162 * \text{Mst} * Q_{33} / 80$   
 $-81 * \text{Inc} * Q_{12} / 80 - 297 * \text{Mst}2 * Q_{13} / (40 * I) - 54 * I * \text{Mst} * Q_{23} / 560 + 162 * \text{Inc} * Q_{33} / 80$   
 $-162 * \text{Mst}2 * Q_{12} / 80 - 297 * \text{Inc}2 * Q_{13} / (40 * I) - 108 * I * \text{Inc} * Q_{23} / 560 + 162 * \text{Mst}2 * Q_{33} / 80$

$54 * \text{Inc}3 * Q_{11} / (5 * I) + 243 * I * \text{Inc}2 * Q_{33} / 70$   
 $54 * \text{Mst}2 * Q_{13} / (5 * I)$   
 $54 * \text{Inc}2 * Q_{13} / (5 * I) + 81 * I * \text{Inc} * Q_{23} / 70$   
 $54 * \text{Mst}3 * Q_{13} / (5 * I) + 162 * I * \text{Mst}2 * Q_{23} / 70$   
 $-297 * \text{Mst}2 * Q_{11} / (40 * I) + 243 * \text{Inc} * Q_{13} / 80$   
 $-297 * \text{Inc}2 * Q_{11} / (40 * I) + 162 * \text{Mst}2 * Q_{13} / 80 - 81 * I * \text{Inc} * Q_{33} / 560$   
 $-297 * \text{Mst}3 * Q_{11} / (40 * I) + 81 * \text{Inc}2 * Q_{13} / 80 - 162 * I * \text{Mst}2 * Q_{33} / 560$   
 $-297 * \text{Inc}3 * Q_{11} / (40 * I) + 243 * I * \text{Inc}2 * Q_{33} / 560$   
 $-297 * \text{Mst}2 * Q_{13} / (40 * I) + 243 * \text{Inc} * Q_{33} / 80$   
 $-81 * \text{Mst}2 * Q_{12} / 80 - 297 * \text{Inc}2 * Q_{13} / (40 * I) - 81 * I * \text{Inc} * Q_{23} / 560 + 243 * \text{Mst}2 * Q_{33} / 80$   
 $-162 * \text{Inc}2 * Q_{12} / 80 - 297 * \text{Mst}3 * Q_{13} / (40 * I) - 162 * I * \text{Mst}2 * Q_{23} / 560 + 243 * \text{Inc}2 * Q_{33} / 80$

54*A*Q <sub>33</sub> /(5*I)	27*I*A*Q <sub>77</sub> /70 + 54*Inc*Q <sub>33</sub> /(5*I)
54*Mst*Q <sub>33</sub> /(5*I)	54*I*Mst*Q <sub>77</sub> /70 + 54*Mst2*Q <sub>33</sub> /(5*I)
54*Inc*Q <sub>33</sub> /(5*I)	81*A*Q <sub>17</sub> /80 - 297*Mst*Q <sub>13</sub> /(40*I)
-297*A*Q <sub>13</sub> /(40*I)	81*Mst*Q <sub>17</sub> /80 - 27*I*A*Q <sub>73</sub> /560 - 297*Inc*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 81*Mst*Q <sub>33</sub> /80
-297*Mst*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 81*A*Q <sub>33</sub> /80	81*Inc*Q <sub>17</sub> /80 - 54*I*Mst*Q <sub>73</sub> /560 - 297*Mst2*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 162*Inc*Q <sub>33</sub> /80
-297*Inc*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 162*Mst*Q <sub>33</sub> /80	81*Mst2*Q <sub>17</sub> /80 - 81*I*Inc*Q <sub>73</sub> /560 - 297*Inc2*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 243*Mst2*Q <sub>33</sub> /80
-297*Mst2*Q <sub>13</sub> /(40*I) - 243*Inc*Q <sub>33</sub> /80	81*A*Q <sub>73</sub> /80 - 297*Mst*Q <sub>33</sub> /(40*I)
-297*A*Q <sub>33</sub> /(40*I)	-27*I*A*Q <sub>77</sub> /560 - 297*Inc*Q <sub>33</sub> /(40*I)
-81*A*Q <sub>73</sub> /80 - 297*Mst*Q <sub>33</sub> /(40*I)	-54*I*Mst*Q <sub>77</sub> /560 - 81*Inc*Q <sub>73</sub> /80 - 297*Mst2*Q <sub>33</sub> /(40*I)
-162*Mst*Q <sub>73</sub> /80 - 297*Inc*Q <sub>33</sub> /(40*I)	

$108 * I * Inc * Q_{27/70} + 54 * Inc2 * Q_{33/560}$   
 $162 * Mst * Q_{17/80} - 297 * Inc * Q_{13/40}$   
 $162 * Inc * Q_{17/80} - 54 * I * Mst * Q_{23/560} - 297 * Mst2 * Q_{13/40} - 81 * Inc * Q_{33/80}$   
 $162 * Mst2 * Q_{17/80} - 108 * I * Inc * Q_{23/560} - 297 * Inc2 * Q_{13/40} - 162 * Mst2 * Q_{33/80}$   
 $162 * Inc2 * Q_{17/80} - 162 * I * Mst2 * Q_{23/560} - 297 * Mst3 * Q_{13/40} - 243 * Inc2 * Q_{33/80}$   
 $162 * Mst * Q_{23/80} - 297 * Inc * Q_{33/40}$   
 $-54 * I * Mst * Q_{27/560} + 81 * Inc * Q_{27/80} - 297 * Mst2 * Q_{33/40}$   
 $-108 * I * Inc * Q_{27/560} - 297 * Inc2 * Q_{33/40}$

$54 * A * Q_{11/560}$   
 $54 * Mst * Q_{11/560}$   
 $54 * Inc * Q_{11/560}$   
 $54 * Mst2 * Q_{11/560}$   
 $54 * A * Q_{13/560}$   
 $54 * Mst * Q_{13/560}$   
 $54 * Inc * Q_{13/560}$

$54 * Inc * Q_{11/560} + 27 * I * A * Q_{33/70}$   
 $54 * Mst2 * Q_{11/560} + 54 * I * Mst * Q_{33/70}$   
 $54 * Inc2 * Q_{11/560} + 81 * I * Inc * Q_{33/70}$   
 $54 * Mst * Q_{13/560}$   
 $54 * Inc * Q_{13/560} + 27 * I * A * Q_{27/70}$   
 $54 * Mst2 * Q_{13/560} + 54 * I * Mst * Q_{27/70}$











$\rho^{*27*1*A/70}$								
$\rho^{*27*1*Mst/70}$	$\rho^{*27*1*Inc/70}$							
$\rho^{*27*1*Inc/70}$	$\rho^{*27*1*Mst2/70}$	$\rho^{*27*1*Inc2/70}$						
$\rho^{*27*1*Mst2/70}$	$\rho^{*27*1*Inc2/70}$	$\rho^{*27*1*Mst3/70}$	$\rho^{*27*1*Inc3/70}$					
0	0	0	0	$\rho^{*27*1*A/70}$				
0	0	0	0	$\rho^{*27*1*Mst/70}$	$\rho^{*27*1*Inc/70}$			
0	0	0	0	$\rho^{*27*1*Inc/70}$	$\rho^{*27*1*Mst2/70}$	$\rho^{*27*1*Inc2/70}$		