

**ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS POR MEIO  
DA MECÂNICA DA FRATURA**

**MARCELO LOPES MARTINS BORGES**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**"ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS POR MEIO DA  
MECÂNICA DA FRATURA"**

Marcelo Lopes Martins Borges

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro  
DEES - UFMG - (Orientador)

---

Prof. Dr. Paulo José Modenesi  
DEMET-UFMG

---

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. José Felipe Dias  
Universidade de Itaúna

Belo Horizonte, 13 de dezembro de 2010

Aos meus pais Geraldo e Olinda,  
à minha esposa Rosana,  
e os meus filhos Rodrigo e Patrícia.

## **Agradecimentos**

A Deus que está sempre presente nas nossas vidas.

Ao professor Gabriel de Oliveira Ribeiro pela orientação, incentivo, dedicação e paciência para passar o seu conhecimento e experiência.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação de Estruturas da UFMG pelo profissionalismo, amizade e prontidão para ajudar.

Ao José Felipe Dias e Ricardo Santos Teixeira pela orientação no desenvolvimento do trabalho e na utilização do programa computacional FRANC3D.

Ao Rafael Weber Cirino pela valiosa dedicação no ensinamento do programa computacional ANSYS.

Ao Alberto H. Hibino, Cleber Caetano Thomazi e Sérgio Rolla Guimarães, da Gerência de Engenharia de Manutenção da ArcelorMittal Inox Brasil, pela valiosa dedicação e orientação durante o desenvolvimento deste trabalho, e a revisão da dissertação.

Ao Breno Scopinho, da Gerência de Engenharia de Manutenção da ArcelorMittal Inox Brasil, pela orientação na formatação do trabalho.

Ao Rogério Americano e Adriano Paixão Souza, da Gerência de Engenharia de Manutenção da ArcelorMittal Inox Brasil, pela confecção dos desenhos.

Aos amigos da Gerência de Engenharia de Manutenção da ArcelorMittal Inox Brasil pelo incentivo e apoio técnico.

À ArcelorMittal Inox Brasil, representada por Willian de Maria Carvalho, Antônio Marcos Borba Roldão, Pedro Cirino da Silva Neto, Valdir Quintão de Souza, Jadir Assis Barros, Redeir M. de Oliveira, Fernando Cláudio de Oliveira, Adailton de Souza Soares, que contribuíram para a realização deste trabalho através do apoio, recursos necessários e oportunidade ao meu crescimento profissional.

Ao José Luiz Perez Quero pelo incentivo e apoio em minha formação profissional.

Ao Dante Maria Pozzi pelo incentivo e apoio para a realização do mestrado.

## Sumário

Lista de figuras .....	iii
Lista de abreviaturas, siglas e símbolos .....	viii
Resumo .....	xi
Abstract.....	xii
1 Introdução.....	1
1.1 Objetivo .....	3
2 Revisão bibliográfica.....	4
2.1 Introdução .....	4
2.2 Fadiga em metais .....	6
2.3 Fundamentos da Mecânica da Fratura Elástica Linear - MFEL.....	12
2.4 Propagação de trinca por fadiga .....	17
2.4.1 Propagação de trincas por fadiga em eixos .....	27
2.5 Eixo de mandril .....	32
2.5.1 Danos acumulados por fadiga em eixo de mandril.....	37
2.6 Métodos numéricos .....	40
2.6.1 Análise pelo MEF ANSYS.....	41
2.6.2 Análise pelo MEC e FRANC3D .....	42
3 Metodologia.....	44
3.1 Introdução.....	44
3.2 Análise de componentes com trinca .....	46
3.2.1 Propagação de trincas no MEC/FRANC3D.....	47
3.2.2 Método empírico para o cálculo do fator de intensidade de tensão de componentes trincados .....	51
4 Aplicações e Resultados .....	53
4.1 Placa com trinca lateral.....	54
4.1.1 Análise global sem trinca .....	54
4.1.2 Análise com trinca .....	57
4.2 Corpo de prova compacto de tração .....	62
4.2.1 Análise global sem trinca .....	63
4.2.2 Análise com trincas .....	68
4.3 Caso analisado - eixo de mandril.....	77
4.3.1 Modelo de viga .....	79
4.3.2 Método numérico – análise global sem trincas em 3D.....	82
4.3.3 Consideração de trincas no trecho da seção <i>A</i> .....	95
4.3.4 Consideração de trincas no trecho da seção <i>C</i> .....	110
5 Conclusões.....	117
6 Referências Bibliográficas.....	119
7 Anexos.....	124
ANEXO A: Fatores de intensidade de tensão interpolados, taxa de propagação de trinca e número de ciclos.....	125
ANEXO B: Desenho do eixo de mandril .....	129
ANEXO C: Memória de cálculo .....	131
ANEXO D: Relatório da determinação das tensões e coeficientes de segurança via KISSsoft, baseado na norma DIN 743-1 .....	154

## Lista de figuras

FIGURA 2.1 – Mecanismos de fratura em metais: (a) fratura dúctil; (b) fratura por clivagem; (c) fratura intergranular (Fonte: ASM Handbook, 1993).	5
FIGURA 2.2 – Estágios I e II da trinca por fadiga (fonte: GUIMARÃES, 2009).	8
FIGURA 2.3 – Componentes de tensão e sistemas de referência nas proximidades da ponta da trinca.	14
FIGURA 2.4 – Modos básicos de sollicitação da trinca.	15
FIGURA 2.5 – Trinca centrada em uma placa infinita.	16
FIGURA 2.6 – Desenvolvimento global do crescimento da trinca à fadiga sob carga, em eixos: (a) tração, (b) flexão, (c) torção (Fonte: RICHARDS et al., 2008).	18
FIGURA 2.7 – Representação esquemática de marcas de superfície de fraturas por fadiga (Fonte: ASM Handbook (1975) <i>apud</i> BARSOM e ROLFE, 1999, com modificações).	20
FIGURA 2.8 – Comportamento do crescimento da trinca.	21
FIGURA 2.9 – Desenvolvimento da superfície de fratura para os modos I, II e III, e o carregamento no modo combinado (Fonte: RICHARDS et al., 2008).	25
FIGURA 2.10 – Frente de trinca em um eixo.	29
FIGURA 2.11 – Desenho esquemático de um eixo com uma trinca circunferencial sob torção.	31
FIGURA 2.12 - Linha de processo típica (Fonte: GUIMARÃES, 2009).	32
FIGURA 2.13 - (a) Desbobinadeira; (b) interior da caixa redutora (Fonte: GUIMARÃES, 2009).	33
FIGURA 2.14 - Conjunto do mandril (Fonte: GUIMARÃES, 2009).	34
FIGURA 2.15 - Detalhe do eixo de mandril (Fonte: GUIMARÃES, 2009).	36
FIGURA 2.16 - Detalhe do rasgo de chaveta do eixo de mandril, similar ao que sofreu a fratura (Fonte: GUIMARÃES, 2009).	38
FIGURA 2.17 - Detalhe da fratura do eixo de mandril, localizada na seção com rasgo de chaveta (fonte: GUIMARÃES, 2009).	39
FIGURA 2.18 - Dano acumulado em função do número de ciclos de carregamento (Fonte: GUIMARÃES, 2009).	39
FIGURA 3.1 – Sistema de coordenadas da frente de trinca e pontos geométricos (“geometry points”) utilizados no cálculo dos fatores de intensidade de tensão (Fonte: TEIXEIRA, 2004).	49
FIGURA 4.1 – Ilustração da placa de aço (plano $xy$ ).	55
FIGURA 4.2 – Carregamentos atuantes na placa de aço (plano $xy$ ).	56
FIGURA 4.3 – Tensão normal e deslocamento na direção $y$ – Etapa 1.	57
FIGURA 4.4 – Placa de aço com trinca na lateral (plano $xy$ ).	58
FIGURA 4.5 - Gráfico do fator de intensidade de tensão ao longo dos pontos da frente de trinca para duas posições da Etapa 1: (a) $a = 5$ mm; (b) $a = 20$ mm.	59
FIGURA 4.6 - Gráfico de $\Delta K$ versus profundidade de trinca para os modelos MEC/FRANC3D e analítico.	61
FIGURA 4.7 - Gráfico da profundidade da trinca $a$ versus o número de ciclos $N$ .	62
FIGURA 4.8 – Dimensões do corpo de prova tipo CT.	63
FIGURA 4.9 – Representação das regiões de aplicação da carga: (a) furo superior; (b) furo inferior.	64
FIGURA 4.10 – Restrições ao deslocamento atuantes no corpo de prova CT.	65
FIGURA 4.11 – Deslocamento na direção $y$ – Etapa 1.	65
FIGURA 4.12 – Tensão normal na direção $y$ – Etapa 1.	66

FIGURA 4.13 – Tensão normal e deslocamento na direção $y$ – Etapa 1. ....	67
FIGURA 4.14 – Corpo de prova CT com a presença de uma descontinuidade plana. ..	68
FIGURA 4.15 – Modelo tridimensional do corpo de prova CT utilizado nas simulações com o MEC/FRANC3D. ....	69
FIGURA 4.16 – Gráfico de $N$ (número de ciclos) versus $a$ (comprimento da trinca) para os modelos MEC/FRANC3D e DIAS (2006). ....	73
FIGURA 4.17 – Gráfico de $\Delta K$ versus $a$ para os modelos MEC/FRANC3D e DIAS (2006). ....	73
FIGURA 4.18 – Gráfico de $da/dN$ versus $\Delta K$ para os modelos MEC/FRANC3D e DIAS (2006) (CP1, CP2 e CP3). ....	74
FIGURA 4.19 – Gráfico de $N$ (número de ciclos) versus $a$ (comprimento da trinca) para os modelos MEC/FRANC3D e DIAS (2006). ....	76
FIGURA 4.20 – Disposição geral dos componentes (plano $yz$ ). ....	78
FIGURA 4.21 – Bobina de 30 toneladas em processo de desbobinamento pela ação de uma força de tração de 4 kN (plano $xy$ ). ....	78
FIGURA 4.22 – Esquema estrutural do eixo no plano $yz$ . ....	79
FIGURA 4.23 – Eixo de mandril. ....	82
FIGURA 4.24 – Carregamentos atuantes na extremidade do eixo do mandril: (a) vertical; (b) horizontal; (c) conjugado de forças, representando o torque. ....	84
FIGURA 4.25 – Restrições ao deslocamento atuantes no eixo do mandril: (a) mancal 1; (b) mancal 2; (c) rasgo de chaveta. ....	84
FIGURA 4.26 – Análise MEF/ANSYS – Deslocamento na direção $y$ – Etapa 2. ....	86
FIGURA 4.27 – Análise MEF/ANSYS – Tensão equivalente de von Mises no eixo de mandril – Etapa 2. ....	87
FIGURA 4.28 – Análise MEF/ANSYS – Tensão equivalente de von Mises no trecho contendo a seção $A$ – Etapa 2. ....	87
FIGURA 4.29 – Análise MEF/ANSYS – Tensão equivalente de von Mises no trecho contendo a seção $B$ – Etapa 2. ....	88
FIGURA 4.30 – Análise MEF/ANSYS – Tensão equivalente de von Mises no trecho contendo a seção $C$ – Etapa 2. ....	88
FIGURA 4.31 – Detalhe do trecho selecionado: (a) modelo gerado no ANSYS; (b) modelo gerado no FRANC3D. ....	90
FIGURA 4.32 – Carregamento atuante superfície do eixo do mandril – Etapa 2: (a) pressão $p_1$ ; (b) pressão $p_2$ ; (c) conjugado de forças, representando o torque. ....	90
FIGURA 4.33 – Análise MEC/FRANC3D – Deslocamento na direção $y$ – Etapa 2. ....	92
FIGURA 4.34 – Análise MEC/FRANC3D – Tensão equivalente de von Mises no trecho que contém a seção $A$ – Etapa 2. ....	92
FIGURA 4.35 – Representação da trinca semi-circular. ....	96
FIGURA 4.36 – Posições de frente de trinca propagadas na seção $A$ até atingir o furo interno do eixo. ....	97
FIGURA 4.37 – Posições de frentes de trincas. ....	105
FIGURA 4.38 – Área remanescente no eixo de mandril. ....	106
FIGURA 4.39 - Gráfico dos resultados da soma vetorial dos deslocamentos obtidos do modelo MEF/ANSYS. ....	108
FIGURA 4.40 – Representação do rasgo de chaveta do modelo gerado no programa MEC/FRANC3D. ....	111
FIGURA 4.41 – Representação da propagação de trinca na região do rasgo de chaveta: (a) trinca iniciando na extremidade do rasgo de chaveta; (b) trinca iniciando na linha de centro do rasgo de chaveta. ....	112
FIGURA 4.42 – Posições de frentes de trincas, totalizando 46. ....	113

FIGURA 4.43 - Gráfico da profundidade da trinca,  $a$ , versus o número de ciclos,  $N$ . 115

## Lista de tabelas

TABELA 4.1 – Resultados das tensões obtidos através dos modelos analítico e MEC/FRANC3D, da Etapa 1. ....	57
TABELA 4.2 – Resultados da propagação de trinca pelo modelo MEC/FRANC3D. ....	60
TABELA 4.3 – Resultados da propagação de trinca pelo modelo analítico. ....	61
TABELA 4.4 – Tensões para os modelos MEF/ANSYS e MEC/FRANC3D, no ponto de coordenadas (18,5; 28,5; 9) mm, e deslocamentos máximos. ....	68
TABELA 4.5 – Fatores de intensidade de tensão obtidos por meio do MEC/FRANC3D. ....	70
TABELA 4.6 – Valores de $\Delta K$ e $N$ para os modelos MEC/FRANC3D e DIAS (2006). 72	
TABELA 4.7 – Fatores de intensidade de tensão interpolados, taxa de propagação de trinca e número de ciclos. ....	75
TABELA 4.8 - Esforços solicitantes nas seções <i>A</i> , <i>B</i> e <i>C</i> da Etapa 1 – Modelo de Viga. ....	80
TABELA 4.9 - Esforços solicitantes nas seções <i>A</i> , <i>B</i> e <i>C</i> da Etapa 2 – Modelo de Viga. ....	81
TABELA 4.10 - Resultados das tensões calculadas nas seções <i>A</i> , <i>B</i> e <i>C</i> da Etapa 1. ....	81
TABELA 4.11 - Resultados das tensões calculadas nas seções <i>A</i> , <i>B</i> e <i>C</i> da Etapa 2. ....	81
TABELA 4.12 – Estudo de convergência na seção <i>A</i> para refinamento da malha, no ponto de coordenada (0; 127; 1.002) mm da Etapa 2. ....	85
TABELA 4.13 – Resultados das tensões obtidas através do método de viga e do programa ANSYS, na seção <i>A</i> da Etapa 1. ....	85
TABELA 4.14 – Resultados das tensões obtidas através do modelo de viga e análise MEF/ANSYS, nas seções <i>A</i> e <i>C</i> da Etapa 2. ....	89
TABELA 4.15 – Estudo de convergência com base nos resultados de um ponto na seção <i>A</i> da Etapa 2. ....	91
TABELA 4.16 – Resultados das tensões obtidos através dos modelos de viga, MEF/ANSYS e MEC/FRANC3D, na seção <i>A</i> da Etapa 2. ....	93
TABELA 4.17 - Resultados das tensões e coeficientes de segurança obtidas através da norma DIN 743-1 em termos de resistência à fadiga, nas seções <i>A</i> , <i>B</i> e <i>C</i> da Etapa 1. .	94
TABELA 4.18 - Resultados das tensões e coeficientes de segurança obtidas através da norma DIN 743-1 em termos de resistência à fadiga, para pontos nas seções <i>A</i> , <i>B</i> e <i>C</i> da Etapa 2. ....	95
TABELA 4.19 - Resultados dos fatores de intensidade de tensão até a trinca atingir o tamanho de 77,0 mm. ....	99
TABELA 4.20 – Resultados da propagação de trinca até a trinca atingir o tamanho de 77,0 mm. ....	100
TABELA 4.21 - Resultados dos fatores de intensidade de tensão na condição de contorno com torque e sem torque, para um tamanho de trinca igual a 77,0 mm. ....	101
TABELA 4.22 – Comparação dos valores do fator de intensidade de tensão obtidos pelos modelos MEC/FRANC3D e Murakami e Endo. ....	102
TABELA 4.23 – Valores do fator de intensidade de tensão obtidos pelo método MURAKAMI e ENDO (1983). ....	104
TABELA 4.24 – Valores do módulo do vetor deslocamento de pontos situados na seção da extremidade em balanço do eixo de mandril obtidos em função das profundidades de trinca. ....	107
TABELA 4.25 – Resultados dos fatores de intensidade de tensão até a trinca atingir o tamanho de 77,0 mm. ....	109

TABELA 4.26 – Resultados dos fatores de intensidade de tensão até a trinca atingir o tamanho de 77,0 mm. ....	110
TABELA 4.27 – Resultados da propagação de trinca através do método de MURAKAMI e ENDO (1983). ....	114

## Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

ADI	Ferro fundido nodular austemperado.
ASTM	<i>American Society for Testing and Materials.</i>
$a$	Comprimento da trinca.
$a_i, a_f, a_{max}$	Comprimento inicial, final e máxima da trinca.
$area$	Área projetada da trinca em um plano perpendicular à máxima tensão normal.
BES	<i>Boundary Element Solver.</i>
$c_I$	Constante para trincas superficiais ou internas.
CFG	<i>Cornell Fracture Groupe.</i>
$C$	Constante do material, referenciado na lei de Paris.
CP	Corpo de prova.
CT	Compacto de tração.
$C_I$	Constante do material, referenciado na equação de Walker.
$C'$	Constante do material, referenciado na equação de Forman.
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal.
EIC	Equações integrais de contorno.
EPD	Estado Plano de Deformação.
EPT	Estado Plano de Tensão.
FIT	Fator de intensidade de tensão.
FRANC3D	<i>Fracture Analysis Code for 3 Dimensional Problems.</i>
$F(t)$	Solicitação de tração cíclica.
$f_y$	Resistência ao escoamento.
$G$	Taxa de liberação de energia.
$G_c$	Taxa de liberação de energia crítica.
GNO	Aço silício de Grão Não Orientado.
$K (K_I, K_{II}, K_{III})$	Fator de intensidade de tensão para os modos <i>I, II, III</i> .
$K_{eff}$	Fator de intensidade de tensão efetivo.
$K_{fric}$	Fator de intensidade de tensão de fricção.
$K_{eq}$	Fator de intensidade de tensão equivalente.
$K_{eq,max}$	Fator de intensidade de tensão equivalente máximo.
$K_{max}, K_{min}$	Fator de intensidade de tensão máxima e mínima.

$K_{I_{max}}$	Fator de intensidade de tensão máxima no modo I.
$K_{th}$	Fator limiar da intensidade de tensão.
$K_f$	Fator de concentração de tensão em fadiga.
$K_t$	Fator geométrico de concentração de tensão teórico para tensões normais.
$K_{ts}$	Fator geométrico de concentração de tensão teórico para tensões de cisalhamento.
$K_{Ic}, K_{IIc}$	Fator cíclico de intensidade de tensão crítico nos modos I e II (tenacidade à fratura)
$m$	Constante do material, referenciado na lei de Paris.
$m_I$	Constante do material, referenciado na equação de Walker.
MEC	Método de Elementos de Contorno.
MEF	Método de Elementos Finitos.
MFEL	Mecânica da Fratura Elástica Linear.
MFEP	Mecânica da Fratura Elastoplástica.
$M(t)$	Momento fletor cíclico.
$M_t(t)$	Momento torsor cíclico.
$n$	Número de intervalos de crescimento da trinca.
$N, N_f$	Número de ciclos para ocorrer a falha.
OSM	<i>Object Solid Model</i> .
PVC	Problema de valor de contorno.
$q$	Sensibilidade ao entalhe do material.
$Q$	Peso da bobina.
$R$	Razão entre tensões e fatores de intensidade de tensão.
$R_e$	Raio externo do eixo.
$r$	Distância entre a ponta da trinca e o campo de tensões.
$r_y, r_p$	Tamanho da zona plástica.
$r_n$	Raio da região não trincada do eixo.
$S_a$	Amplitude de tensão.
$S_{max}, S_{min}$	Tensão normal máxima e mínima.
$T$	Torque.
$U$	Relação entre os fatores de intensidade de tensão.
$u$	Deslocamento.
$v$	Deslocamento da ponta da trinca.

$w$	Densidade de energia de deformação.
ZP	Zona plástica.
$\Delta a$	Extensão da trinca em cada ponto da frente de trinca.
$\Delta a_{max}$	Incremento máximo do comprimento de trinca.
$\Delta K_{eq}$	Fator cíclico de intensidade de tensão equivalente para os modos I, II e III.
$\Delta K_{ef}$	Fator cíclico efetivo de de intensidade de tensão.
$\Delta K (\Delta K_I, \Delta K_{II}, \Delta K_{III})$	Fator cíclico de intensidade de tensão para os modos I, II, III.
$\Delta K_{th}$	Fator limiar cíclico do fator de intensidade de tensão cíclica.
$\sigma$	Tensão remota.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tensão normal no sentido dos eixos $x, y$ e $z$ .
$\sigma_{ar}$	Amplitude de tensão completamente reversa.
$\sigma_{ij}, \sigma_{\gamma\gamma}$	Componente de tensão no ponto próximo à ponta da trinca.
$\sigma_{max}, \sigma_{min}, \sigma_m$	Tensão atuante máxima, mínima e média.
$\sigma_{equ}$	Tensão equivalente de von Mises.
$\sigma_I$	Tensão principal.
$\tau$	Tensão de cisalhamento.
$\tau_{xy}$	Tensão de cisalhamento no plano $xy$ .
$\gamma$	Energia de coesão.
$\gamma$	Constante da equação de Walker.
$\gamma_p$	Energia de fratura.
$\gamma_s$	Energia de superfície.
$\nu$	Coefficiente de Poisson.
$\beta (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$	Fator de correção da geometria da trinca para os modos I, II e III.
$\varphi_o, \psi_o$	Ângulo de inclinação da trinca nos modos II e III, respectivamente.
$\theta$	Ângulo entre a linha de propagação da trinca e o campo de tensões.
$\sqrt{a}$	Constante de Neuber.

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo de uma metodologia baseada na aplicação dos fundamentos da Mecânica da Fratura para a análise de propagação de trincas em componentes mecânicos sujeitos à fadiga, visando a estimativa do tempo, ou número de ciclos, que um componente estrutural dura submetido à ação de carregamento cíclico ou variável com o tempo. A metodologia foi dividida em duas etapas: a primeira corresponde à análise global linear elástica da estrutura sem a presença de trincas baseada no método de elementos finitos (MEF) ou no método de elementos de contorno (MEC); enquanto na segunda etapa introduz-se uma trinca na estrutura e a análise de propagação de trinca simulada por meio do MEC. Apresentam-se três aplicações, sendo que primeira considerou a propagação de trinca em uma placa tracionada axialmente, cujos resultados foram comparados com soluções disponíveis em manuais da Mecânica da Fratura. A segunda aplicação referiu-se a um corpo de prova compacto de tração de ferro fundido nodular austemperado, sendo os resultados comparados com resultados experimentais de tese de doutorado desenvolvida por DIAS (2006). Observou-se que os valores experimentais superaram os valores obtidos numericamente, com tendência de aumento da diferença à medida que a trinca se propaga. A terceira aplicação consistiu num estudo de caso de um eixo de mandril, que fraturou após onze anos e oito meses de trabalho. O número de ciclos estimado para a propagação no eixo do mandril, considerando carregamento cíclico de amplitude constante, foi comparado com a vida estimada considerando a regra linear de danos cumulativos de Miner. A metodologia apresentada e testada neste trabalho mostrou-se viável para a estimativa da propagação de trincas em componentes estruturais com base na fundamentação da Mecânica da Fratura.

**Palavras chaves:** Mecânica da Fratura, fadiga, propagação de trincas.

## **Abstract**

The aim of this work is to study a methodology based on the application of the Fracture Mechanics fundamentals to analyze the crack propagation in mechanical components subjected to fatigue in order to estimate the time, or the number of cycles, that these elements will endure when subjected to cyclic or variable loading. The methodology was divided into two stages: the first corresponds to the global linear elastic analysis of the structure without the presence of cracks, based on the finite element method (FEM) or on boundary element method (BEM); on the second stage a crack is introduced in the structure and its propagation is carried out using BEM. Three cases are presented. In the first one, it was considered the crack propagation in a plate under remote tension, and the results were compared to values available in Fracture Mechanics manuals. The second case referred to an austempered nodular ductile iron compact test specimen in tension. The results were compared to those obtained experimentally by DIAS (2006) in his Ph.D. thesis. In the last case an analysis of a mandrel shaft that fractured after almost twelve years in service was conducted, considering a cyclic load of constant amplitude. The results were compared with the life estimated by the Miner's linear rule of cumulative damage. The methodology presented and tested in this work was feasible for predicting crack propagation in structural elements.

**Key words:** fracture mechanics, fatigue, crack propagation.

# 1

## INTRODUÇÃO

Durante o tempo em serviço, estruturas e componentes de equipamentos podem falhar e causar acidentes. Isto geralmente conduz a perdas econômicas e vidas, além de gerar efeitos ambientais negativos. Frequentemente os eventos danosos são originários de falhas de materiais e de fabricação, cálculos inapropriados da resistência à fadiga, sobrecargas não previstas ou outros problemas oriundos do tempo de operação ou deficiência de manutenção de um componente.

No caso da existência dos eventos danosos, é de grande importância analisá-los de modo a obter informações valiosas para o melhoramento de um equipamento ou estrutura. A análise de falha é um processo que determina a causa de um dano. Este processo é complexo, baseia-se em diversas disciplinas, e usa uma variedade de técnicas de inspeção e laboratório. A Mecânica da Fratura é uma das ferramentas utilizadas na análise de falhas, e iniciou o seu desenvolvimento a partir da ocorrência de fraturas e inúmeros acidentes na indústria ferroviária, naval e aeronáutica. O uso dos aços de alta resistência cresceu após a Segunda Guerra Mundial com o objetivo de diminuir o peso das estruturas.

Os mecanismos de fratura na engenharia, classificados como dúctil, clivagem e intergranular, conduziram ao desenvolvimento de uma metodologia que compensasse as insuficiências do projeto convencional. Os critérios convencionais de projeto são baseados principalmente na resistência à tração do material, limite de escoamento e tensão de flambagem. Estes critérios são adequados para muitas estruturas, mas eles são insuficientes quando há o surgimento de trincas ou defeitos. Após vários anos de desenvolvimento, a Mecânica da Fratura tornou-se uma ferramenta útil e de grande importância no projeto de estruturas e equipamentos.

O crescente aumento de produção das indústrias, observado nas últimas décadas, tem exigido maior eficiência da manutenção. Conseqüentemente, a manutenção evoluiu tecnicamente através da adoção de novos métodos para assegurar sua missão de garantir o funcionamento dos equipamentos. No cenário atual, a expectativa da manutenção é de aumentar a disponibilidade dos equipamentos, de modo a atender ao processo de produção, com confiabilidade, segurança, preservação do meio ambiente, qualidade do produto, maior vida útil do equipamento e, sobretudo, custo adequado. As técnicas de inspeção existentes não são totalmente eficazes, pois a falha pode iniciar-se em seções críticas não expostas, ou mesmo, ser detectada tardiamente. Ademais, as técnicas de inspeção existentes podem ser inviáveis devido à necessidade da interrupção da produção, tendo em vista a margem de ganho dos produtos. Para esta situação, é importante a criação de um método de controle para orientar as ações da manutenção.

Neste sentido, este trabalho trata do cálculo dos valores do fator de intensidade de tensão relativos à sollicitação na ponta da trinca e à análise de propagação de trincas em componentes sujeitos à fadiga com base na Mecânica da Fratura. A Mecânica da Fratura será utilizada para analisar, explicar e prever o comportamento de trincas e fazer previsões sobre a vida restante do componente. Serão utilizados os dados relativos à geometria do componente em estudo, o comprimento inicial e final da trinca, e os valores máximo e mínimo do fator de intensidade de tensão correspondente às situações extremas de carregamento, além das propriedades do material. A análise de propagação de trincas será realizada considerando-se os valores extremos dos fatores de intensidade

de tensão, que podem ser obtidos por meio dos manuais da Mecânica da Fratura ou por meio da utilização de métodos numéricos.

No capítulo 1 são apresentados a introdução e os objetivos deste trabalho. No capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica dos diversos aspectos envolvidos no trabalho com destaque para os modos combinados de fratura em eixos. No capítulo 3 é exposta a metodologia empregada no cálculo dos parâmetros necessários à análise de propagação de trincas em componentes sujeitos à fadiga, com base na Mecânica da Fratura, o uso do programa computacional ANSYS para análise global da estrutura, o uso do programa computacional FRANC3D e do método empírico de MURAKAMI e ENDO (1983) para a obtenção dos fatores de intensidade de tensão. No capítulo 4 encontram-se as aplicações e os resultados, juntamente com a sua discussão, obtidos em uma placa tracionada axialmente e trincada, em um corpo de prova compacto de tração, e no estudo de caso de um eixo de mandril. No capítulo 5 estão listadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros. No capítulo 6 têm-se as referências bibliográficas utilizadas na fundamentação teórica e na análise e discussão dos resultados. Nos anexos encontram-se: desenho do eixo de mandril utilizado no estudo; memória de cálculo da análise global do eixo de mandril; relatório da determinação das tensões e coeficientes de segurança via KISSsoft, baseado na norma DIN 743-1.

## **1.1 Objetivo**

O objetivo principal deste trabalho é o estudo de uma metodologia que consiste na aplicação dos fundamentos da Mecânica da Fratura para a análise de propagação de trincas em componentes mecânicos sujeitos à fadiga, visando subsidiar os planos de inspeção e manutenção de equipamentos sujeitos a carregamentos variáveis com o tempo ou carregamentos cíclicos. Para isso serão utilizados métodos numéricos e computacionais (ANSYS e FRANC3D) para a análise global e uma análise refinada de regiões críticas em termos de sollicitação, visando à obtenção de respostas em termos de tensão, deformação, bem como os parâmetros de sollicitação nas pontas das trincas, quando estas são incorporadas à análise. Com base nestas respostas será desenvolvida a análise da propagação e o número de ciclos.

# 2

## REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Introdução

O controle da fratura de estruturas representa o esforço conjunto de projetistas, metalurgistas, produção e manutenção, com o objetivo de garantir a segurança operacional sem falhas catastróficas. Segundo BROEK (1997), o controle ocorre através da aplicação de medidas, tais como, análise de tolerância ao dano, correta seleção de materiais, aperfeiçoamento de projetos, testes estruturais, inspeção e manutenção.

A fratura é o evento final, geralmente ocorrendo subitamente, resultado da separação do material em duas ou mais partes, causada por sobrecarga imprevisível, falha estrutural ou trinca, conduzindo a perdas econômicas e vidas, além de gerar efeitos ambientais negativos.

A trinca surge em regiões de concentração de tensão, por exemplo, decorrentes de furos e entalhes, vazios internos, acabamentos superficiais, e propaga-se lentamente ao longo da estrutura durante o carregamento em serviço, sendo uma falha parcial e progressiva. A trinca é gerada pelos mecanismos de fadiga, corrosão sob tensão, fluência e hidrogênio, que podem induzir uma falha final através da fratura. Quando a trinca atinge o tamanho crítico, a fratura final poderá ocorrer por fratura dúctil, clivagem ou

intergranular, representados na FIGURA 2.1, e segundo BROEK (1996), são os mecanismos de separação final em metais.

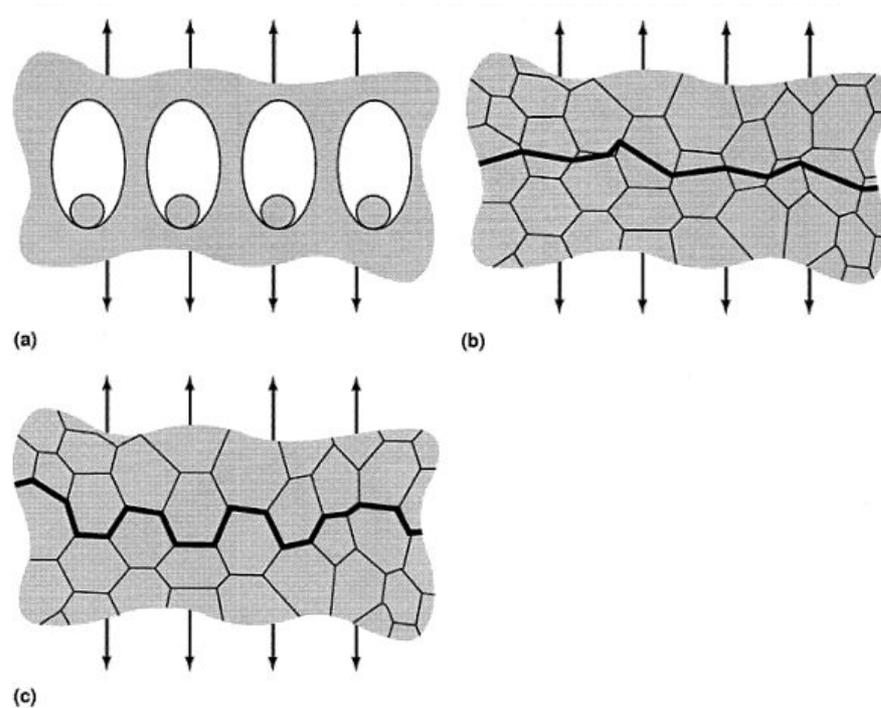


FIGURA 2.1 – Mecanismos de fratura em metais: (a) fratura dúctil; (b) fratura por clivagem; (c) fratura intergranular (Fonte: ASM Handbook, 1993).

A fratura dúctil ocorre através de deformação plástica precedida por estrição, que produz a fratura conhecida como taça e cone. No nível microscópico, a fratura dúctil revela uma superfície com cavidades denominadas *dimples*, representadas na FIGURA 2.1a, que crescem em torno de precipitados ou inclusões presentes no material e coalescem devido a mecanismos de deformação plástica. A fratura por clivagem ocorre pela separação de planos cristalinos devido à ruptura de ligações atômicas, geralmente de forma transgranular, representada na FIGURA 2.1b. A união de dois ou mais planos cristalográficos formam degraus que tendem a convergir no sentido da propagação local da trinca, produzindo o aspecto característico de rios (*river patterns*). Devido à fratura por clivagem ser associada a uma pequena deformação plástica, ela é chamada de fratura frágil. O termo fratura frágil é muitas vezes generalizado para todas as fraturas com pequena deformação plástica, embora a separação final ocorra de maneira dúctil. A

fratura intergranular, representada na FIGURA 2.1c, ocorre ao longo do contorno dos grãos.

## 2.2 Fadiga em metais

Segundo NORTON (2004) e DOWLING (1999), a falha por fadiga foi observada pela primeira vez por volta do ano de 1800, quando eixos de vagões ferroviários começaram a falhar após um pequeno período em serviço. Em 1828, W. A. J. Albert publicou os primeiros resultados de um estudo, após construir uma máquina de teste para correntes que falharam em serviço nas minas de Clausthal, na Alemanha. Em 1839, na França, J. V. Poncelet utilizou pela primeira vez o termo “fadiga” em um livro sobre mecânica. Em 1843, Rankine publicou um artigo intitulado “As causas da ruptura inesperada de munhões de eixos ferroviários”, no qual dizia que o material havia “cristalizado” e se tornado frágil devido às tensões flutuantes. As cargas dinâmicas eram um fenômeno novo, resultantes da introdução das máquinas movidas a vapor.

Segundo BROEK (1996), o crescente uso de metais no século XIX causou elevado número de acidentes. Somente na Grã Bretanha, na década de 1860-1870, morriam aproximadamente 200 pessoas por ano em acidentes devido à fratura de rodas, eixos e trilhos ferroviários. Alguns desses acidentes eram devidos à deficiência de projeto e outros por deficiência no processo construtivo dos componentes, provocando o início de trincas e a conseqüente fratura.

Segundo NORTON (2004), em 1870, na Alemanha, August Wöhler publicou os resultados de 20 anos de pesquisa sobre falhas em eixos ferroviários. Ele iniciou o desenvolvimento de estratégias de projeto para evitar falhas por fadiga, e testou em ferros, aços e outros materiais submetidos à flexão, torção e cargas axiais. As suas descobertas identificavam o número de ciclos de tensão variando no tempo como causadores do colapso e a descoberta da existência de uma tensão limite de resistência à fadiga para aços. O diagrama *S-N*, tensão versus número de ciclos, ou curva de Wöhler, tornou-se padrão para caracterizar o comportamento dos materiais submetidos a tensões alternadas. Wöhler mostrou ainda que o material das partes dos eixos quebrados ainda

continuava resistente e dúctil com base em ensaios de tração realizados com este material, tal como no material original.

Conforme a norma ASTM E 1150 *apud* ASM Handbook (1997), “fadiga é o processo gradual de mudança estrutural localizada permanente em um material sujeito a condições que produzem tensões e deformações flutuantes em algum ponto (ou pontos) e que pode culminar em trincas ou em fratura, depois de um número suficiente de flutuações”.

Segundo ASM Handbook (1997) e GUIMARÃES (2009), o mecanismo de falha por fadiga compreende as seguintes fases sucessivas: nucleação da trinca, propagação e ruptura. A nucleação ou iniciação da trinca de fadiga corresponde ao período gasto para a formação e o crescimento inicial da trinca até que um comprimento macroscópico seja alcançado. As trincas iniciam-se em um plano de cisalhamento localizado ou próximo de regiões com altas concentrações de tensões, como bandas de escorregamento persistentes, inclusões, porosidades ou descontinuidades, e verifica-se normalmente na superfície do corpo ou no contorno dos grãos. Na superfície ocorrem geralmente defeitos gerados pelo processo de fabricação, que podem funcionar como concentradores de tensão, podendo ainda ser agravados pela atuação do meio ambiente agressivo.

A fadiga pode ocorrer em amplitudes de tensão abaixo do limite de escoamento do material. Neste nível de tensão, a deformação plástica é limitada a uma quantidade pequena de grãos do material. Esta micro-plasticidade pode ocorrer mais facilmente em grãos da superfície do material, devido à ausência de material envoltório. Como consequência, a deformação plástica dos grãos na superfície é menos restringida do que nos grãos sub-superficiais, o que explica sua ocorrência em nível mais baixo de tensão.

Uma representação gráfica do processo de dano por fadiga é ilustrada na FIGURA 2.2, onde é mostrado o início da nucleação de uma trinca em uma região de bandas de escorregamento persistentes, que formam intrusões e extrusões na superfície, que geram micro-concentração de tensão. Com o aumento do número de ciclos, a rugosidade

superficial provocada pelo aumento de intensidade das intrusões e extrusões leva à formação de descontinuidades que podem ser consideradas microtrincas. No estágio I, a nucleação e o crescimento da trinca são usualmente considerados como a propagação da microtrinca inicial através de um comprimento finito da ordem de poucos grãos no plano de máxima tensão de cisalhamento local. Neste estágio, a plasticidade da ponta da trinca é fortemente influenciada pelas características do escorregamento, tamanho de grão, orientação e nível de tensão, pois o tamanho da trinca é compatível com a ordem de grandeza da microestrutura do material. Segundo CETLIN e SILVA (197-), o estágio II refere-se à propagação da macrotrinca, normal ao plano de tensão principal. A fratura é mais característica do processo de fadiga, é sempre visível a olho nu e pode corresponder à maioria da área da superfície da fratura, ainda que não corresponda necessariamente à maior parte do número de ciclos total suportado pela peça.

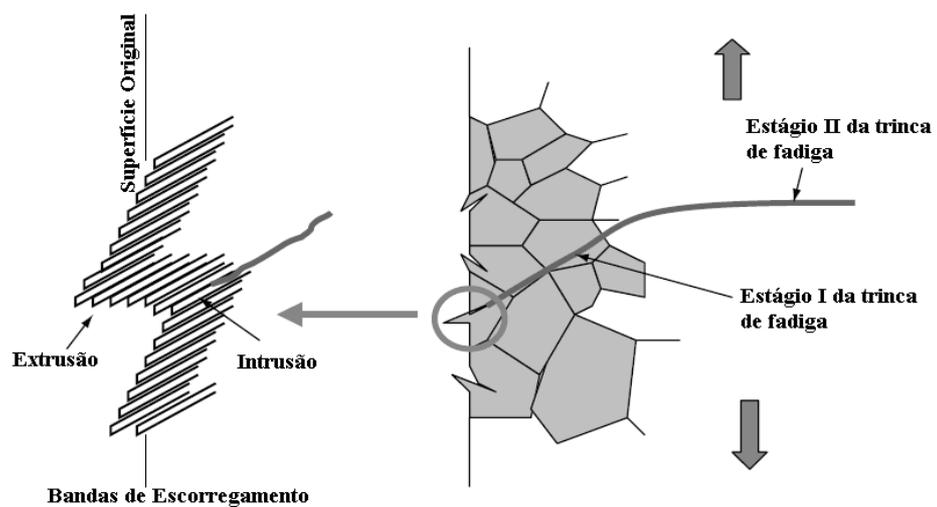


FIGURA 2.2 – Estágios I e II da trinca por fadiga (fonte: GUIMARÃES, 2009).

O período de transição da iniciação para propagação da trinca não tem uma definição precisa. Entretanto, no final do estágio de iniciação da trinca, o tamanho da trinca é da ordem de alguns poucos grãos do material. Para os aços, este tamanho de trinca compreende a faixa típica de 0,1 a 1,0 mm. Geralmente, o período de iniciação da trinca responde pela maior parte da vida em fadiga de um componente de aço, particularmente no regime de alto ciclo de fadiga ( $> 10^4$  ciclos). No regime de baixo ciclo de fadiga ( $< 10^4$  ciclos), a maior parte da vida é gasta na propagação da trinca (GUIMARÃES, 2009).

Com a contínua evolução da frente de trinca, num determinado momento, a seção remanescente do material não mais resiste à sollicitação e ocorre então, na última fase do processo, a falha final através da fratura do tipo frágil, dúctil ou uma combinação destas. Segundo CETLIN e SILVA (197-), a ruptura final do material ocorre quando a trinca desenvolvida progressivamente atinge o tamanho crítico para propagação instável, e a área da fratura desenvolvida progressivamente depende das tensões aplicadas e da tenacidade do material.

Atualmente há duas filosofias básicas de projeto tendo em vista a consideração de fadiga: vida segura (*safe life*) e tolerância ao dano (*fail safe*).

A primeira filosofia, denominada vida segura (*safe life*), considera que o componente ou o sistema estrutural é projetado com o objetivo de não desenvolver trincas durante um período determinado (vida segura). Segundo SURESH (2001), os componentes são analisados e testados em laboratório sob condições de carga de serviço, estimando-se então uma vida útil baseada na fadiga para o componente. A vida estimada à fadiga é devidamente ponderada por um fator de segurança, obtendo-se assim uma previsão de vida segura para o componente. No final da vida útil esperada, o componente é automaticamente retirado de serviço, mesmo que nenhuma falha tenha ocorrido, podendo ter ainda considerável vida residual. Embora a estimativa de vida seja obtida a partir de curvas *S-N* baseadas em testes de laboratório usando corpos-de-prova isentos de defeito, a filosofia de vida segura é teórica por natureza. Existem várias incertezas envolvidas, tais como: mudanças inesperadas nas condições de carregamento; erros na estimativa do espectro de carga; dispersão nos resultados dos testes; variação nas propriedades de diferentes lotes do mesmo material; existência de defeitos iniciais gerados pelo processo de produção; corrosão de peças usadas nos componentes e erros humanos na operação dos componentes. Ao adotar uma ampla margem de segurança (coeficiente de segurança), a vida segura pode ser garantida, embora não seja desejável do ponto de vista de economia e performance. Por outro lado, se trincas de fadiga se nuclearem no componente durante o serviço, o mesmo poderá falhar catastróficamente.

A filosofia tolerância ao dano (*fail safe*) baseia-se no argumento de que se um membro individual de uma grande estrutura falhar, deverá haver integridade estrutural nas partes restantes para permitir que a estrutura opere com segurança até que o defeito seja detectado e reparado. A tolerância ao dano é baseada no uso de redundância estrutural, onde sempre há um componente alternativo que vai funcionar quando há uma falha localizada. Pressupõe-se a necessidade de inspeções periódicas com o objetivo de identificar trincas para permitir correções ou substituições.

Independente da filosofia empregada no projeto recomenda-se sempre que componentes críticos de estruturas, tais como aeronaves e indústrias nucleares, sejam inspecionados periodicamente. Esta etapa elimina perigosas conseqüências resultantes de estimativas falsas e erros na fase de projeto, especialmente para a abordagem da vida segura.

Existem três abordagens para análise e projeto contra falhas à fadiga, que são baseadas em tensão (curva  $S-N$ ), deformação (curva  $\varepsilon-N$ ) e na Mecânica da Fratura. A abordagem pela tensão é o mais antigo dos três modelos e o mais frequentemente utilizado nas aplicações que envolvem fadiga de alto ciclo (acima de  $10^4$  ciclos). Trata-se de um modelo baseado na amplitude de tensão cíclica atuante, procurando determinar-se a resistência à fadiga do material. A partir da curva  $S-N$  do material, determinada por meio de ensaios de laboratório, relacionando a amplitude de tensão cíclica versus número de ciclos para falha, as tensões decorrentes dos carregamentos cíclicos aplicados à estrutura, devem ser mantidas abaixo de certo nível considerado seguro para o correspondente número de ciclos. Busca-se assim evitar a falha para o número de ciclos requerido.

Segundo NORTON (2004), a abordagem pela deformação fornece uma visão razoavelmente precisa do estágio de iniciação da trinca. Ela pode esclarecer os danos cumulativos devido às variações na carga cíclica ao longo da vida da peça. Combinações de cargas de fadiga e temperatura elevada são modeladas com maior segurança nesse caso, porque os efeitos de fluência podem ser incluídos na formulação matemática. Essa abordagem foi inicialmente desenvolvida no final dos anos 50 devido à necessidade de analisarem-se problemas de fadiga em componentes de baixa vida à

fadiga (DOWLING, 1999). Ela difere da abordagem pela tensão (curvas *S-N*) pelo fato de considerar não só as tensões, mas também as deformações locais. A sua principal característica está no emprego da curva cíclica tensão-deformação para obtenção da curva deformação versus vida à fadiga.

A Mecânica da Fratura se desenvolveu originalmente baseada no princípio da linearidade elástica do material (Mecânica da Fratura Elástica Linear - MFEL), e depois foi estendida para comportamento não-linear (Mecânica da Fratura Elastoplástica – MFEP). Ela é o ramo da Mecânica dos Sólidos que surgiu devido à necessidade de analisar e prever o comportamento de componentes estruturais contendo trincas ou descontinuidades. Neste sentido, busca-se avaliar o tamanho crítico da trinca, o tempo que uma trinca irá crescer de certo tamanho inicial até um tamanho crítico, o tamanho admissível de uma trinca pré-existente no momento da estrutura ser colocada em serviço e a frequência de inspeção da estrutura em relação às trincas. O desenvolvimento da Mecânica da Fratura ocorreu motivado por inúmeros acidentes históricos com vítimas fatais, relacionados às indústrias ferroviária, naval, automobilística e aeronáutica.

Com o advento das estruturas soldadas iniciou-se um novo ciclo de acidentes, tais como os registrados com a frota de navios Liberty, construídos durante a Segunda Guerra Mundial. Dos 2.500 navios Liberty, 145 partiram-se em duas partes, e quase 700 experimentaram falhas graves. Algumas das falhas ocorreram quando os navios foram lançados ao mar, antes mesmo de serem carregados e navegar, dividindo-se ao meio enquanto ancorados no cais. As falhas ocorriam em situações em que as tensões atuantes estavam bem abaixo do limite de resistência ao escoamento do material. Este tipo de falha atingiu muitas pontes e outras estruturas. Vários fatores contribuíram para estes acidentes, sendo: falhas de projeto, má qualidade das soldas, seleção de material inadequada, os principais. Segundo COTTERELL (2002), soldagem a arco elétrico para a construção de grandes estruturas de aço foi introduzida antes da Segunda Guerra Mundial. Sem o controle apropriado, a soldagem introduz os elementos necessários para a fratura frágil no aço: altas tensões residuais que podem estar próximas ao limite de escoamento; zona termicamente afetada adjacente à solda com uma temperatura de

transição mais alta que a do material original; defeitos semelhantes a trincas (concentradores de tensão).

Após a Segunda Guerra Mundial, o uso dos aços de alta resistência cresceu com o objetivo de diminuir o peso das estruturas, aliado a um aprofundamento nos métodos de análise para determinação mais precisa e confiável das tensões atuantes, proporcionando uma diminuição nos fatores de segurança. Os materiais de alta resistência têm geralmente uma baixa resistência residual na presença de trincas, isto é, baixa tenacidade à fratura. Tensões de serviço, às vezes com a ajuda de um ambiente agressivo, podem ser suficientes para induzir trincas, particularmente se houver defeitos pré-existentes ou detalhes geométricos com altas concentrações de tensão. Na presença de pequenas trincas, em estruturas projetadas com esses materiais, podem surgir falhas com tensões atuantes bem abaixo das tensões de serviço para as quais foram projetadas.

O desenvolvimento da Mecânica da Fratura veio trazer uma nova metodologia para compensar as deficiências dos critérios convencionais de projeto baseados apenas nos conhecimentos da Resistência dos Materiais. Estes critérios baseados essencialmente na hipótese de continuidade eram insuficientes para analisar situações em que havia presença de trincas (descontinuidade) ou grande probabilidade de ocorrência de trincas.

### **2.3 Fundamentos da Mecânica da Fratura Elástica Linear - MFEL**

Segundo COTTERELL (2002), os primeiros trabalhos conhecidos e dedicados à fratura foram dois artigos de Griffith, “The phenomenon of rupture and flow in solids”, publicado em 1920, e “The theory of rupture”, em 1924, que formam a base da Mecânica da Fratura. Griffith estudou a razão pela qual a resistência de qualquer material à tração era menor do que a resistência indicada ao nível atômico. Recorrendo a experiências realizadas com vidro, formulou o conceito segundo o qual uma trinca em um corpo propaga se a energia total do sistema diminuir com a propagação da trinca, ou seja, a propagação ocorre se a energia requerida para o crescimento da trinca puder ser provida pelo sistema. Este conceito ficou conhecido como teoria de Griffith, tendo sido desenvolvida inicialmente para materiais frágeis.

Até o final de 1940, o trabalho pioneiro de Griffith não foi visto como sendo relevante para a engenharia. Foi o trabalho de OROWAN<sup>1</sup> *apud* COTTERELL (2002) que conduziu à generalização do trabalho de Griffith para materiais menos frágeis. Orowan estudou a profundidade da deformação plástica abaixo das facetas de clivagem em aço de baixo carbono usando raio X. IRWIN<sup>2</sup> *apud* COTTERELL (2002) notou que a energia empregada na deformação plástica poderia ser estimada a partir dos resultados de Orowan. Esta energia de fratura,  $\gamma_p$ , para aço de baixo carbono em torno de 0°C seria aproximadamente duas mil vezes a energia de superfície,  $\gamma_s$ . Irwin concluiu que a teoria de Griffith poderia ser utilizada se a energia de superfície fosse substituída pelo trabalho plástico. OROWAN<sup>3</sup> *apud* COTTERELL (2002) apresentou a mesma idéia pouco tempo mais tarde. Um trabalho interessante sobre a medição de  $\gamma_p$  foi desenvolvido por WELLS<sup>4</sup> *apud* COTTERELL (2002), utilizando um termopar para medir a temperatura da onda plana emanada pela propagação de fratura rápida, a partir da qual a fonte de calor e  $\gamma_p$  poderia ser calculada.

O primeiro desenvolvimento da MEFL com base nos trabalhos de Irwin se deu em termos de energia. Ele definiu uma taxa de liberação de energia,  $G$ , que representa a energia disponível para um incremento na extensão da trinca. O termo taxa usado neste contexto se refere taxa de variação de energia potencial em relação à área trincada. A grandeza  $G$  é também chamada de força motriz para extensão de trinca<sup>5</sup>. Uma fratura poderá iniciar quando  $G$  alcançar o valor crítico  $G_c = 2\gamma_p$ . KIES e SMITH<sup>6</sup> *apud*

---

<sup>1</sup> OROWAN, E. Notch brittleness and strength of solids. Trans., Inst. Eng. Shipbuilders Scotland 1945; 89: pp. 165-215.

<sup>2</sup> IRWIN, G. R.. Fracture dynamics. Fracturing of metals. Cleveland, OH: American Society for Metals; 1948. pp. 147-166.

<sup>3</sup> OROWAN, E. Fracture and strength of solids. Reports Progr. Phys. 1949;12: pp. 185-232.

<sup>4</sup> WELL, A. A.. The mechanics of notch brittle fracture. Weld J, BWRA 1952; pp. 6:34.

<sup>5</sup> Irwin utilizou o termo força para extensão de trinca em analogia a força sobre uma deslocação e escolheu a letra  $G$  em honra a Griffith.

<sup>6</sup> KIES, J. A., SMITH, H. L.. Toughness testing of hot-stretched acrylics. Proc Aircraft Industries Association and Air Development Command Joint Conference, Dayton, OH, 1955.

COTTERELL (2002) observaram que a tensão crítica para um determinado tamanho de trinca depende somente de  $G_c E$ , onde  $E$  é o módulo de elasticidade. Os engenheiros da Boeing utilizaram  $(G_c E)^{1/2}$  e o denominaram tenacidade à fratura,  $K_{Ic}$ , em reconhecimento a Kies, com sendo um parâmetro de fratura. Irwin com base no trabalho de WESTERGAARD<sup>7</sup> *apud* COTTERELL (2002), relacionou  $G$  ao campo de tensão na ponta da trinca e introduziu o termo fator de intensidade de tensão (FIT),  $K = (G_c E)^{1/2}$ . Com base na definição do fator  $K$ , o campo de tensões nos pontos próximos à ponta da trinca pode ser expresso como:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{(2\pi r)^{1/2}} f_{ij}(\theta) + \dots \quad (2-1)$$

onde, conforme a FIGURA 2.3,  $r$  e  $\theta$  são coordenadas cilíndricas de um ponto próximo à ponta da trinca e  $f_{ij}(\theta)$  é uma função envolvendo funções trigonométricas do ângulo  $\theta$ . Termos de ordem superior são omitidos por não serem significativos para a análise da tensão em pontos próximos da ponta da trinca.

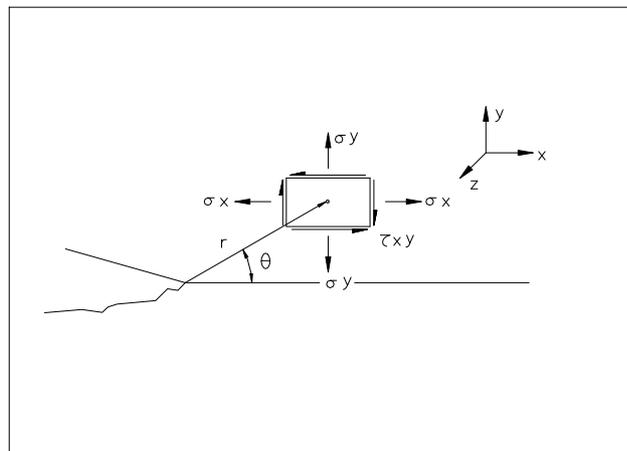


FIGURA 2.3 – Componentes de tensão e sistemas de referência nas proximidades da ponta da trinca.

A trinca em uma placa plana pode ser solicitada conforme os três modos básicos apresentados na FIGURA 2.4: (a) modo I, abertura, no qual os deslocamentos das superfícies da trinca são perpendiculares ao plano da trinca; (b) modo II, cisalhamento

<sup>7</sup> WESTERGAARD, H. M.. Bearing pressures and cracks. J. Appl. Mech. 1939; 6: pp. 49-53.

no plano ou deslizamento, ocorrem deslocamentos relativos, no plano da trinca, entre os pontos das duas faces, sendo os deslocamentos relativos na direção perpendicular à frente de trinca; (c) modo III, rasgamento, é causado pelo cisalhamento fora do plano da chapa, onde os deslocamentos relativos entre os pontos da superfície ocorrem no plano da trinca, na direção paralela à frente de trinca. Poderá ocorrer também a combinação dos três modos de trinca, isto é, modo misto.

O modo I é o mais importante com inúmeras aplicações práticas nos projetos de engenharia, sendo, portanto, o mais estudado. As formulações e abordagens do modo I podem ser estendidas aos modos II e III. A superposição dos três modos descreve o modo geral de sollicitação de uma trinca, denominado modo misto ou combinado.

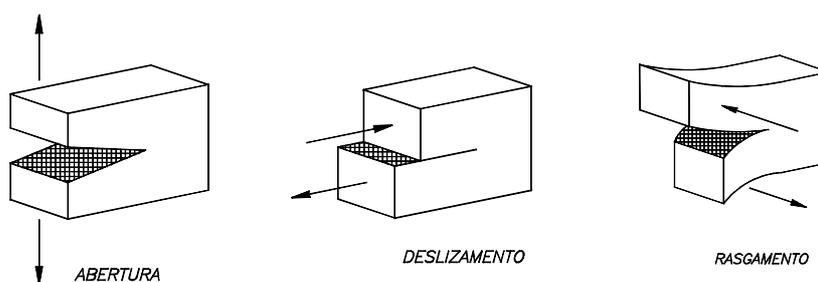


FIGURA 2.4 – Modos básicos de sollicitação da trinca

Para uma placa de dimensões infinitas sujeita a uma tensão remota e uniforme  $\sigma$ , com uma trinca centrada de tamanho  $2a$ , como apresentado na FIGURA 2.5, o FIT no modo I,  $K_I$ , é expresso como:

$$K_I = \beta\sigma\sqrt{(\pi a)} \quad (2-2)$$

onde  $\beta$  é o fator de correção dependente da geometria da trinca e do componente estrutural, bem como da forma como é carregado. Para a placa infinita apresentada na FIGURA 2.5,  $\beta$  é igual a 1.

A Eq. (2-1) é uma solução elástica linear, que apresenta valores de tensão  $\sigma_{ij}$  tendendo para infinito quando o raio  $r$  tende para zero. Na prática isto não ocorre, pois os materiais dúcteis (metais) desenvolvem deformações plásticas quando a tensão de

escoamento é atingida na região próxima da trinca, limitando assim a tensão a valores finitos. Irwin elaborou uma estimativa do tamanho da zona plástica (ZP),  $r_p$ , na ponta da trinca para um material com resistência ao escoamento  $f_y$  da seguinte forma:

$$r_p = \frac{1}{n\pi} \left( \frac{K}{f_y} \right)^2 \quad (2-3)$$

sendo  $n = 1$  para o estado plano de tensão (EPT) e  $n = 3$  para o estado plano de deformação (EPD).

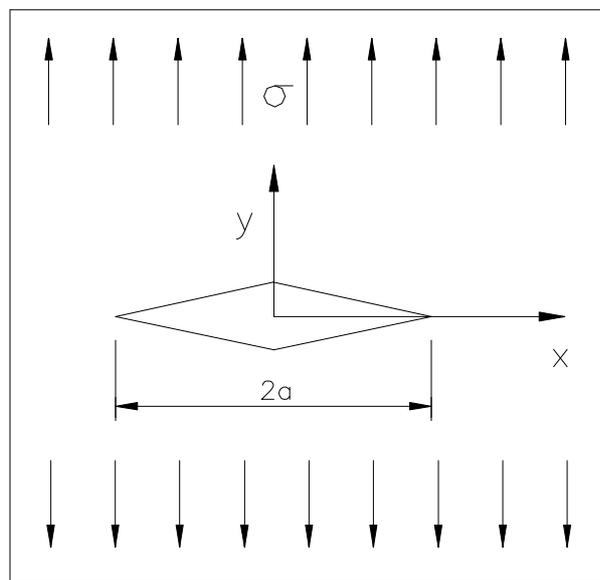


FIGURA 2.5 – Trinca centrada em uma placa infinita.

Irwin demonstrou que a ocorrência da plasticidade faz com que a trinca se comporte como se fosse um pouco maior do que seu tamanho físico. Como resultado da plasticidade na ponta da trinca, os deslocamentos são maiores e a rigidez é menor que seria caso o material fosse elástico linear. Em outras palavras, o material se comporta como se contivesse uma trinca de tamanho um pouco maior. O tamanho efetivo da trinca é considerado como seu tamanho físico mais a correção devida à ocorrência da ZP.

Todas as análises com base na MFEL são baseadas no conceito da similitude: trincas em componentes distintos do mesmo material, apresentando mesmo FIT devem se comportar da mesma maneira. Isto é, se uma trinca se propaga e causa a fratura do

componente, a outra também deverá propagar e levar à fratura, porque elas estão sujeitas ao mesmo FIT. A presença da ZP não inviabiliza a aplicação dos conceitos da MFEL, desde que o tamanho da ZP seja suficientemente pequeno de forma que a ZP esteja dentro da região cujos pontos tenham o respectivo estado de tensão governado pelo fator  $K$ , tal como em geral ocorre quando a remota  $\sigma$  é inferior à resistência ao escoamento  $f_y$ .

Em materiais com baixa resistência ao escoamento  $f_y$  e alta tenacidade à fratura, a ZP vai expandir-se além do limite em que pode ser expressa unicamente em função de  $K$ . Para estes materiais, a Mecânica da Fratura apresenta um tratamento baseado em considerações não lineares e elastoplásticas, entre a tensão e a deformação, através da Mecânica da Fratura Elastoplástica.

Outro aspecto importante no que diz respeito à similitude é o estado de sollicitação predominante nos corpos-de-prova visando à determinação da tenacidade à fratura  $K_{Ic}$ . Para se obter este parâmetro, considerado propriedade do material, o ensaio deve ocorrer predominantemente no estado plano de deformação (EPD), o que leva a requisitos de espessura mínima do corpo-de-prova, definidos nas especificações de ensaio das normas de materiais tais como a ASTM. Caso o ensaio ocorra com sollicitação no estado plano de tensão (EPT) (corpo-de-prova de pequena espessura), o valor crítico obtido no ensaio não se caracteriza como propriedade do material, mas um parâmetro de resistência, que depende da espessura da chapa e do material.

## 2.4 Propagação de trinca por fadiga

Segundo RICHARDS et al. (2008), as trincas pré-existentes ou originadas das cargas de serviço propagam-se quando a variação do fator de intensidade de tensão  $\Delta K$  ( $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ ) ultrapassa o limiar de crescimento de trinca a fadiga  $\Delta K_{th}$  do material. A trajetória global da trinca depende do tipo de carregamento bem como da geometria da estrutura. As trincas de fadiga em geral apresentam deformações plásticas

muito pequenas e se desenvolvem conforme as tensões normais locais dentro da estrutura.

Em uma barra prismática sujeita à tração axial, representada na FIGURA 2.6a, a trinca à fadiga propaga-se perpendicularmente à direção da tensão principal máxima  $\sigma_I$ , no plano transversal com normal na direção do eixo da barra, da mesma forma, para solicitação por flexão pura, conforme FIGURA 2.6b, a fratura inicia-se em um plano perpendicular à direção da tensão normal principal  $\sigma_I$ . Sob solicitação por torção, com tensão de cisalhamento  $\tau$ , conforme FIGURA 2.6c, a propagação da trinca é controlada também pela tensão principal máxima  $\sigma_I$ , cuja direção é inclinada com ângulo de  $45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal da barra.

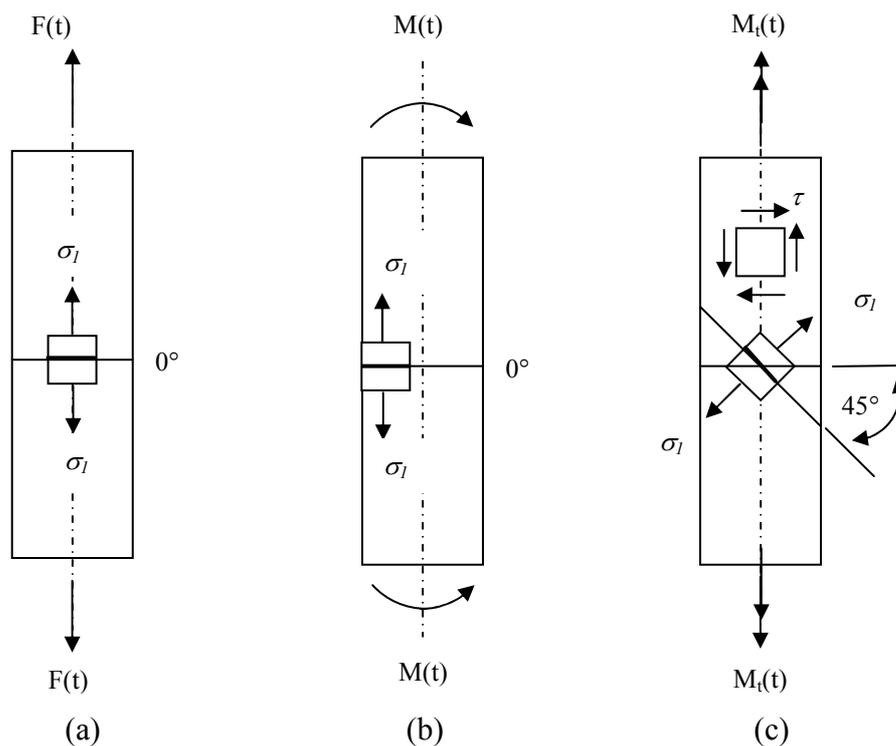


FIGURA 2.6 – Desenvolvimento global do crescimento da trinca à fadiga sob carga, em eixos: (a) tração, (b) flexão, (c) torção (Fonte: RICHARDS et al., 2008).

A geometria do componente (por exemplo, mudança na seção transversal) e o tipo de carregamento podem afetar o local de iniciação da trinca à fadiga e a forma de

propagação da trinca. A FIGURA 2.7 é uma representação esquemática da superfície de fratura em componentes de seções circulares e retangulares, com e sem entalhes, fraturados sob altas e baixas tensões nominais, sem concentração de tensão e com concentração de tensão moderada e intensa, quando solicitados por tração-tração ou tração-compressão, flexão unidirecional, flexão bidirecional, flexão-rotação e torção.

A vida de um componente estrutural contendo uma trinca pode ser estudada a partir da taxa de propagação da trinca em relação ao número de ciclos de carga. Conhecendo-se essa taxa, é possível estimar a vida restante do componente e estabelecer um plano de inspeções periódicas. PARIS<sup>8</sup> *apud* BROEK (1996) e PARIS<sup>9</sup> *et al. apud* BROEK (1996) concluíram que a taxa de propagação da trinca ( $da/dN$ ) em determinadas condições é regida pela variação do fator de intensidade de tensão  $\Delta K$  da seguinte forma:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K) = f[(S_{\max} - S_{\min})\sqrt{\pi a}] = f(2S_a\sqrt{\pi a}) \quad (2-4)$$

onde  $S_{\max}$  e  $S_{\min}$  são as tensões máxima e mínima em um ciclo, e  $S_a$  a amplitude de tensão (o símbolo  $S$  é utilizado para tensões cíclicas). Com base nas pesquisas desenvolvidas, PARIS propôs a taxa de propagação da trinca expressa como:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (2-5)$$

onde  $C$  e  $m$  são constantes de material, sendo que os valores de  $m$  usualmente variam entre 2 e 4 para os aços em geral. A Eq. (2-5) é conhecida como a Lei de Paris.

---

<sup>8</sup> PARIS, P. C. *The growth of fatigue cracks due to variations in load*. Ph. D. Thesis, Lehigh University, 1962.

<sup>9</sup> PARIS, P. C., GOMEZ, M. P., ANDERSON, W. E.. A rational analytic theory of fatigue. *The trend in Engineering*, 13, 1962, pp. 9-14.

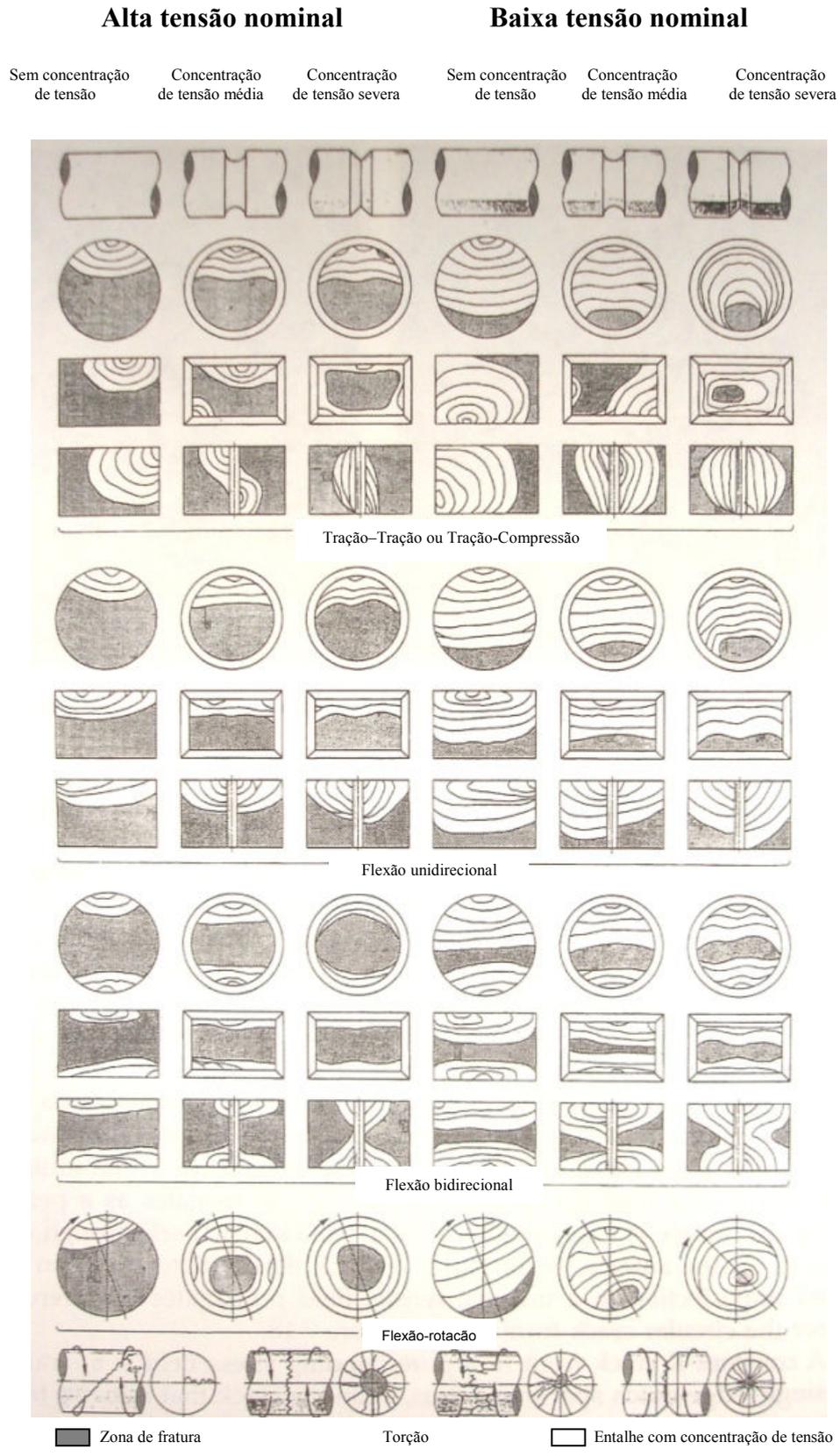


FIGURA 2.7 – Representação esquemática de marcas de superfície de fraturas por fadiga (Fonte: ASM Handbook (1975) *apud* BARSOM e ROLFE, 1999, com modificações).

O teste de laboratório para o levantamento da taxa de propagação de trinca num dado material é feito submetendo um corpo de prova com uma trinca inicial a um carregamento cíclico de amplitude constante. Os incrementos do comprimento da trinca são medidos, e o tamanho da trinca é plotado em função do correspondente número de ciclos. Variações na amplitude de carregamento e do comprimento inicial da trinca produzem diferentes curvas. Essas curvas podem ser reduzidas a uma única curva a partir dos dados dos ensaios, na qual são representadas pela taxa de crescimento da trinca  $da/dN$  em função da variação do fator de intensidade de tensão  $\Delta K$  ( $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ ). Uma representação desta curva em escala log-log é mostrada na FIGURA 2.8, na qual distinguem-se três regiões denotadas por I, II e III.

Na região I, ocorrem baixos valores de  $\Delta K$  e o crescimento da trinca é limitado pelo limiar de fadiga  $\Delta K_{th}$ , abaixo do qual a propagação da trinca por fadiga não ocorre, ou ocorre a taxas tão baixas que não é possível realizar a medição. Na região II a curva é essencialmente linear, representando uma região de crescimento estável. A maioria dos conceitos e aplicações da MFEL se refere a esta região, que é representada pela Lei de Paris (Eq. (2-5)). Na região III ocorre um crescimento rápido e instável da trinca, com o valor de  $K_{\max}$  tendendo para o valor crítico  $K_{Ic}$  (tenacidade à fratura).

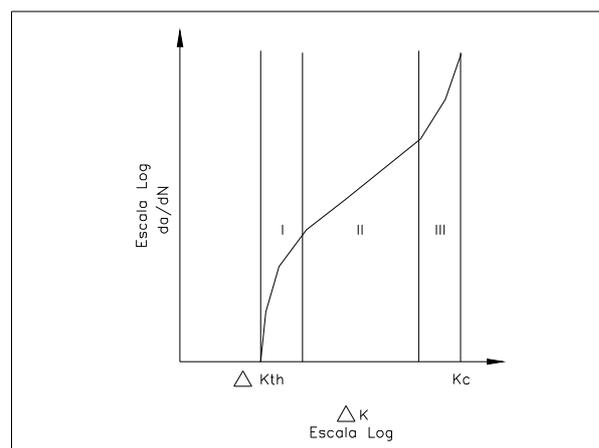


FIGURA 2.8 – Comportamento do crescimento da trinca.

Outras expressões para descrever a taxa de crescimento da trinca foram desenvolvidas, e levam em conta o efeito da razão entre as tensões máxima e mínima  $R$  ( $R = S_{\min} / S_{\max}$ )

sobre a curva  $da/dN$  versus  $\Delta K$  tal como na equação de Forman e na equação de Walker. FORMAN<sup>10</sup> et al. *apud* DOWLING (1999) propuseram que  $da/dN$  tende para infinito quando a trinca alcança o tamanho crítico, ou seja, quando  $K_{max}$  alcança  $K_{Ic}$ , e apresentaram a seguinte expressão:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C\Delta K^m}{(1-R)K_{Ic} - \Delta K} = \frac{C\Delta K^m}{(1-R)(K_{Ic} - K_{max})} \quad (2-6)$$

e pode ser reescrita como:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C\Delta K^m K_{max}}{K_{Ic} - K_{max}} \quad (2-7)$$

Segundo DOWLING (1999), Walker propôs a expressão:

$$\frac{da}{dN} = C_1 \left( \frac{\Delta K}{(1-R)^{1-\gamma}} \right)^{m_1} \quad (2-8)$$

onde  $C_1$ ,  $m_1$  e  $\gamma$  são constantes. Para  $R \geq 0$ , a constante  $\gamma$  para vários metais situa-se entre 0,3 a 1,0. Quando  $R < 0$ , a constante  $\gamma$  iguala-se a zero, exceto para aços dúcteis, onde  $\gamma = 0,22$ .

Comparando-se a Eq. (2-5) e a Eq. (2-8), as constantes  $C$  e  $m$  tornam-se:

$$C = \frac{C_1}{(1-R)^{(1-\gamma)m_1}} \quad m = m_1 \quad (2-9)$$

As diferenças entre as expressões de  $da/dN$  mencionadas acima não são grandes e nenhuma delas tem aplicação geral. Cada uma delas pode ser mais ou menos satisfatória em uma região limitada ou para um conjunto de dados limitado. A Lei de Paris, desenvolvida para componentes funcionando no regime elástico linear tem grande aplicação prática, visto que a maioria das estruturas trabalha no regime elástico, (TEIXEIRA, 2004).

---

<sup>10</sup> FORMAN, R. G., KEARNEY, V. E., ENGLE, R. M. Numerical Analysis of Crack Propagation in a Cyclic-Loaded Structure. Trans. ASME, J. Basic Eng., vol. D89, nº. 3, 1967, pp. 459-464.

Segundo BROEK (1996), nos ciclos de tensão em que existe uma componente de compressão e  $R < 0$ , a trinca deixa de ser um concentrador de tensões, e sugere a utilização de  $\Delta K = K_{max}$ . Existem algumas discussões a respeito da expressão mencionada anteriormente, pois a trinca não irá fechar exatamente no momento em que a tensão reverte de tração para compressão. O fechamento depende da abertura da ponta da trinca obtida durante o ciclo de tração e das propriedades de deformação do material. Na condição de  $R < 0$ , DOWLING (1999) argumenta que a parte referente ao ciclo de compressão não tem efeito, de modo que assumir  $\Delta K = K_{max}$  baseado na lógica de que a trinca fecha e não atua mais como uma trinca. Para materiais mais dúcteis, a região do eixo submetida à compressão pode contribuir para o crescimento da trinca, de modo que a expressão anterior não é universalmente aplicável. Segundo BRANCO et al. (1986), a aplicação dos conceitos teóricos da Mecânica da Fratura levaria a concluir que teoricamente quando as cargas são inteiramente de compressão não pode existir propagação da trinca, isto porque as faces da trinca se encontram nesse caso totalmente fechadas. Porém, esta análise não considera a influência das tensões residuais de tração que sempre existem na zona plástica na ponta da trinca, e que são devidas ao constrangimento induzido nessa zona pelo material restante do corpo elasticamente deformado. BRANCO et al. (1986) concluem que a propagação de trincas de fadiga pode ocorrer para ciclos de tensão totalmente em compressão, desde que haja tensões residuais de tração com valor suficiente para abrir as superfícies da trinca.

O fenômeno de fechamento de trinca foi pesquisado por ELBER<sup>11</sup> *apud* BANNANTINE et al. (1990) no início da década de 70, após observar anomalias na flexibilidade elástica de diversos materiais solicitados à fadiga. Segundo DIAS (2006), Elber concluiu que a mudança na flexibilidade das amostras era devido ao contato entre as superfícies da trinca, ou seja, devido ao fechamento de trinca para cargas bem baixas, porém maiores do que zero. Segundo GODEFROID (1999), o fechamento da trinca proposto por Elber é chamado de fechamento de trinca induzido por plasticidade, e ocorre porque o estado de tensão na ponta da trinca provoca uma zona plástica sempre crescente à sua frente, zona esta que vai sendo deixada para trás à medida que a trinca

---

<sup>11</sup> ELBER, W.. The significance of fatigue crack closure in damage tolerance in aircraft structures. ASTM STP 486, American Society for Testing and Materials. Philadelphia, 1971, pp. 230-242.

propaga. Forma-se um volume extra de material deformado plasticamente entre as faces da trinca, que está submetida a um campo de tensão residual de compressão no descarregamento do ciclo de fadiga.

Elber propôs que o fechamento de trinca decorrente da plasticidade reduzia a taxa de crescimento, através da redução do fator cíclico efetivo de intensidade de tensão,  $\Delta K_{eff}$ :

$$\Delta K_{eff} = U\Delta K \quad (2-10)$$

onde  $U$  é a relação entre os fatores de intensidade de tensão:

$$U = \frac{\Delta K_{eff}}{\Delta K} = 0,5 + 0,4R \quad (2-11)$$

A expressão de Elber, Eq. (2-11), é válida somente quando  $R > 0$ . Segundo BANNANTINE et al. (1990), outros pesquisadores desenvolveram expressões para  $U$ , na condição onde  $R < 0$ , como por exemplo, em SCHIJVE<sup>12</sup> *apud* BANNANTINE et al. (1990).

Segundo BROEK (1997), na prática, os modos II e III não ocorrem separadamente, mas sempre combinados com o modo I, por exemplo: I-II ou I-III ou I-II-III. O efeito da combinação de carregamentos cíclicos de tração e cisalhamento (modos I e II) foi estudado primeiramente por IIDA e KOBAYASHI<sup>13</sup> *apud* SURESH (1992). Estes pesquisadores impuseram tensões de tração cíclica uniaxial sobre folhas finas de ligas de alumínio 7075-T6 as quais continham pequenas trincas inclinadas posicionadas em ângulos distantes do carregamento. PALANISWAMY e KNAUSS<sup>14</sup> *apud* SURESH (2001) desenvolveram a equação dos modos combinados I-II baseada na taxa de energia liberada máxima ou teoria de Griffith:

---

<sup>12</sup> SCHIJVE, J.. *The stress ratio effect on fatigue crack growth in 2024-T3 Alclad and the relation to crack closure*, Memorandum M-336, Delft University of Technology Department of Aerospace Engineering, Delft, the Netherlands, Aug. 1979.

<sup>13</sup> IIDA, S., KOBAYASHI, A. S.. Crack propagation rate in 7075-T6 plates under cyclic tensile and transverse shear loadings. *Journal of Basic Engineering* 91, 1969, pp.764-769.

<sup>14</sup> PALANISWAMY, K., KNAUSS, W. G.. On the problem of crack extension in brittle solids under general loading. In *Mechanics Today*. Ed. S. Nemat-Nasser. New York: Pergamon Press, 1978, pp 87-148.

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{K_{II}}{K_{Ic}}\right)^2 = 1 \quad (2-12)$$

Para o modo II, puro, esta teoria prediz que  $K_{IIc} = \sqrt{2/3}K_{Ic}$  e  $\varphi_o = 77,4^\circ$ , onde o ângulo é representado na FIGURA 2.9b. Segundo BROEK (1997), a Eq. (2-12) aproxima-se da equação da elipse.

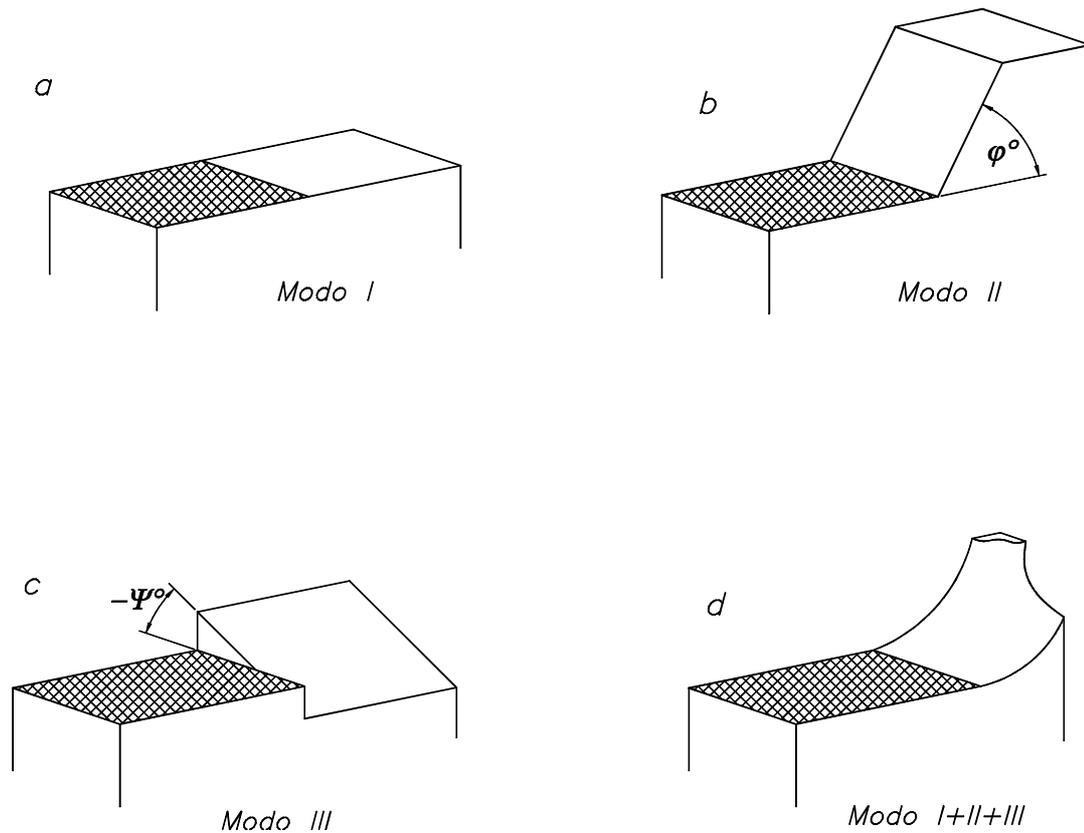


FIGURA 2.9 – Desenvolvimento da superfície de fratura para os modos I, II e III, e o carregamento no modo combinado (Fonte: RICHARDS et al., 2008).

De acordo com a teoria de tensão devido à tração máxima, a trinca avança na direção da tensão principal máxima na ponta da trinca, e para os modos combinados I-II:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_I(\varphi_o) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{II}(\varphi_o) \quad (2-13)$$

onde  $f_I(\varphi_o)$  e  $f_{II}(\varphi_o)$  são funções angulares adimensionais. A partir de uma combinação dos modos I-II, a direção da tensão máxima é determinada através da condição  $(\partial\sigma_{\varphi\varphi}/\partial\varphi) = 0$ , e é obtido  $\hat{\varphi}_o$ , que substituído na Eq. (2-13) têm-se:

$$\frac{K_I}{K_{Ic}} f_I(\hat{\varphi}_o) + \frac{K_{II}}{K_{IIc}} f_{II}(\hat{\varphi}_o) = 1 \quad (2-14)$$

Para o modo II, puro, esta teoria prediz que  $K_{IIc} = 0,866K_{Ic}$  e  $\varphi_o = 70,5^\circ$  (ERDOGAN e SIH<sup>15</sup> *apud* SURESH (2001)).

Segundo RICHARDS et al. (2008), os ângulos  $\varphi_o$  e  $\psi_o$ , representados na FIGURA 2.9, podem ser determinados através das funções:

$$\varphi_o = \mp [140^\circ \frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|} - 70^\circ (\frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|})^2] \quad (2-15)$$

$$\psi_o = \mp [78^\circ \frac{|K_{III}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|} - 33^\circ (\frac{|K_{III}|}{K_I + |K_{II}| + |K_{III}|})^2] \quad (2-16)$$

onde  $\varphi_o < 0^\circ$  para  $K_{II} > 0$  e  $\varphi_o > 0^\circ$  para  $K_{II} < 0$ ,  $\psi_o < 0^\circ$  para  $K_{III} > 0$  e  $\psi_o > 0^\circ$  para  $K_{III} < 0$ .

Segundo RICHARDS et al. (2008), na condição dos modos I-II-III estarem combinados, o fator de intensidade de tensão cíclico equivalente descreve o crescimento da trinca à fadiga:

$$\Delta K_{eq} = \frac{\Delta K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta K_I^2 + 4(1,155\Delta K_{II})^2 + 4(\Delta K_{III})^2} \quad (2-17)$$

Se o valor da intensidade de tensão equivalente máxima,  $K_{eq,max}$ , alcançar o valor da tenacidade à fratura,  $K_{Ic}$ , a trinca cresce de forma instável e uma falha geral de toda a estrutura ocorre, sendo  $K_{eq,max}$  expresso como:

$$K_{eq,max} = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 + 4(1,155K_{II})^2 + 4(K_{III})^2} = K_{Ic} \quad (2-18)$$

---

<sup>15</sup> ERDOGAN, F., SIH, G. C.. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. Journal of Basic Engineering 85, 1963, pp 519-527.

### 2.4.1 Propagação de trincas por fadiga em eixos

Segundo FONTE e FREITAS (1997), vários estudos experimentais têm sido executados em eixos com entalhes na sua circunferência e submetidos ao modo combinado de torção e flexão.

HOURLIER et al.<sup>16</sup> *apud* FONTE e FREITAS (1997) estudaram a influência do modo III sobre o modo I em eixos com entalhes. Uma significativa redução na taxa de crescimento da trinca foi observada como uma consequência do modo III. AKHURST et al.<sup>17</sup> *apud* FONTE e FREITAS (1997) apresentaram resultados do crescimento da trinca à fadiga em eixo trincado. A análise a fadiga foi baseada na Mecânica da Fratura e considerado o efeito do modo III sobre a taxa de crescimento da trinca, como resultado do torque constante aplicado sobre o eixo. YATES e MILLER<sup>18</sup> *apud* FONTE e FREITAS (1997) executaram testes em uma máquina de fadiga servo-hidráulica adequada com uma estrutura para carregamento de flexo-torção, onde os modos I e III foram executados, de forma combinada. Um novo critério para o limiar de fadiga no modo combinado, baseado na orientação e no deslocamento de abertura da trinca à fadiga foi proposto. TSCHEGG et al.<sup>19</sup> *apud* FONTE e FREITAS (1997) mostraram a influência da fricção, rugosidade, aspereza e fragmentos de corrosão sobre o comportamento do crescimento da trinca a fadiga submetido ao modo III. Verificou-se

---

<sup>16</sup> HOURLIER, F., McLEAN, D., PINEAU, A.. Fatigue crack growth behaviour of Ti-5Al-2,5Sn alloy under complex stress (mode I + steady mode III). *Metals Technology*, 1978, pp. 154-158.

HOURLIER, F., HONDT, D. d', TRUCHON, M., PINEAU, A.. Fatigue crack path behaviour under polymodal fatigue. In: *Multiaxial fatigue*, ASTM STP 853. Edited by K. J. Miller and M. W. Brown, 1985, pp. 228-248.

<sup>17</sup> AKHURST, K. N., LINDLEY, T. C., NIX, J. N.. The effect of mode III loading on fatigue crack growth in a rotating shaft. *Fatigue Engng. Struct.* 6, 1983, pp. 345-348.

<sup>18</sup> YATES, J. R., MILLER, K. J.. A torsion-bending loading frame for use with a uniaxial teste machine. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 11, 1988, pp. 321-330.

YATES, J. R., MILLER, K. J.. Mixed mode (I+III) fatigue Thresholds in a forging steel. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 12, 1989, pp. 259-270.

<sup>19</sup> TSCHEGG, E. K. Mode III and mode I fatigue crack propagation behaviour under torsional loading. *J. Mat. Sci.* 18, 1983, pp. 1604-1614.

TSCHEGG, E. K., STANZL, S. E., MAYER, H. R., CZEGLEY, M.. Crack face interaction near-threshold fatigue crack growth. *Fatigue Fract. Engng. Mater* 16, 1992, pp. 71-83.

TSCHEGG, E. K. A contribution to mode III fatigue crack propagation. *Mater. Sci. Engng* 54, 1982, pp. 127-136.

que as interações das superfícies da trinca produzem o fenômeno do fechamento na sua ponta e uma redução importante da taxa de crescimento da trinca.

FONTE et al. (2006) estudaram o crescimento de uma trinca semi-elíptica à fadiga em um eixo submetido à flexão cíclica e torção constante (em três diferentes níveis), utilizando duas máquinas de teste para simular as condições reais de serviço. O material utilizado foi o aço DIN Ck-45k normalizado, com resistência última igual a 850 MPa e resistência ao escoamento igual a 410 MPa. Utilizou-se o método de elementos finitos para a obtenção dos fatores de intensidade de tensão ao longo da frente de trinca, e a lei de Paris para determinação da taxa de crescimento a fadiga, onde a variação do fator de intensidade  $\Delta K$  foi substituída pela variação do fator de intensidade de tensão equivalente  $\Delta K_{eq}$  :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eq})^m \quad (2-19)$$

O  $\Delta K_{eq}$  para carregamentos nos modos combinados foi proposto por HUA<sup>20</sup> *apud* FONTE *et al.* (2006), que utilizou os parâmetros da energia elástica de Irwin para os três modos de carregamento:

$$\Delta K_{eq} = (G_{total} E)^{1/2} = [\Delta K_I^2 + \Delta K_{II}^2 + (1 + \nu) \Delta K_{III}^2]^{1/2} \quad (2-20)$$

onde  $G_{total}$  é a energia total de deformação liberada;  $E$  é o módulo de Young;  $\Delta K_I = \beta_1 \Delta \sigma \sqrt{\pi a}$ ;  $\Delta K_{II} = \beta_2 \Delta \tau \sqrt{\pi a}$ ;  $\Delta K_{III} = \beta_3 \Delta \tau \sqrt{\pi a}$ ;  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  são fatores geométricos para os modos I, II e III, respectivamente.

A evolução e a forma da superfície da trinca foram observadas para duas diferentes condições de carregamento: modo I e modo combinado (I e III). Para o modo I, as superfícies de trinca eram planas e os seus contornos regulares e simétricos. Para o modo combinado, as superfícies de trinca possuíam uma aparência com brilho (superfície da fratura altamente reflexiva), e uma forma helicoidal com um ângulo de inclinação proporcional à magnitude da torção. Resultados mostraram que, quando o

---

<sup>20</sup> HUA, C.T., Fatigue damage and small crack growth during biaxial loading. PhD Thesis. Department of Mechanical and Industry Engng. University of Illinois at Urbana-Champaign: 1984.

modo III é sobreposto ao modo I, a vida entre a trinca inicial e a fratura final é superior em comparação ao modo I puro, e a taxa de crescimento da trinca diminui. Sob a condição de torção constante, o método de elementos finitos mostra que os valores do fator de intensidade de tensão nos pontos *B* e *C*, representados na FIGURA 2.10, são diferentes e dependem da direção do torque. Isto explica porque o perfil da frente de trinca gira durante a propagação da trinca quando a torção é aplicada.

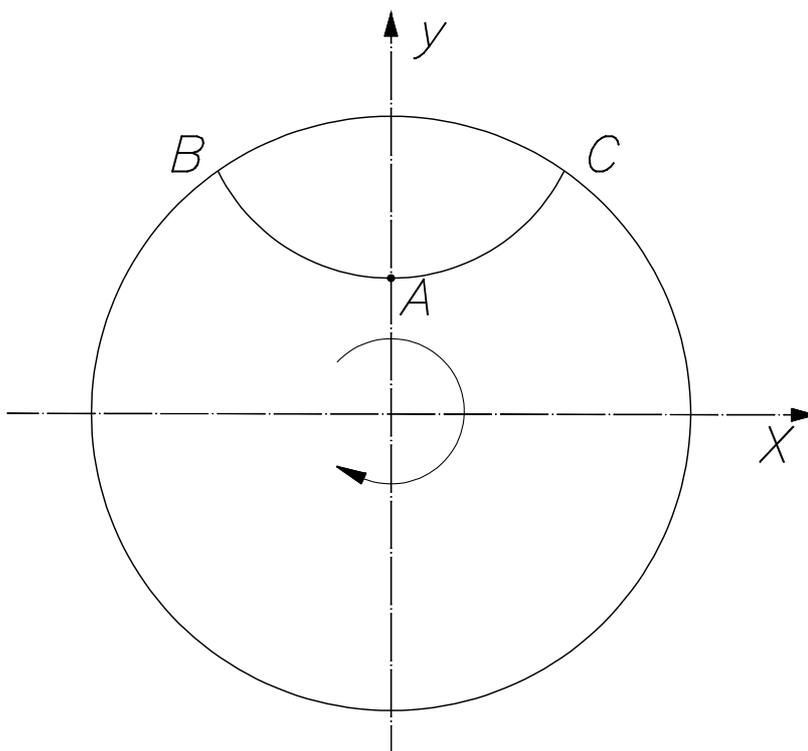


FIGURA 2.10 – Frente de trinca em um eixo.

Segundo TSCHEGG<sup>21</sup> et al. *apud* FONTE et al. (2006), para um eixo submetido à flexão cíclica, durante a fase de compressão a sollicitação próxima à ponta da trinca é menor em comparação à raiz do entalhe, significando uma contínua mudança do valor de *R* com o aumento do comprimento de trinca. Esta afirmação é válida apenas para o ponto *A*, representado na FIGURA 2.10.

---

<sup>21</sup> TSCHEGG, E. K., STANZL, S. E., MAYER, H. R., CZEGLEY, M.. Crack face interaction near-threshold fatigue crack growth. *Fatigue Fract. Engng. Mater* 16, 1992, pp. 71-83.

VAZIRI e NAYEB-HASHEMI (2005) estudaram a obtenção do fator de intensidade de tensão efetivo do modo III em eixos trincados circunferencialmente, submetidos à torção. Para um eixo sujeito à altos valores de amplitude de torque cíclico, a superfície da fratura é macroscopicamente plana, enquanto para baixa amplitude de torque cíclico, a superfície da fratura consiste de picos e vales semelhantes a “teto de fábrica” (*factory roof*). A profundidade e o comprimento de onda da superfície áspera de falha dependem do FIT, geometria e propriedades do material. Este modelo de trinca resulta da interação entre as superfícies, o que diminui o fator de intensidade de tensão efetivo,  $K_{eff}$ , quando o eixo é submetido ao carregamento torcional:

$$K_{eff} = K_{III} - K_{fric} \quad (2-21)$$

onde  $K_{III}$  é o fator de intensidade de tensão aplicado, ignorando a interação das superfícies da trinca,  $K_{fric}$  é o fator de intensidade de tensão de fricção. Para uma trinca cilíndrica circunferencial, apresentada na FIGURA 2.11,  $K_{III}$  é expresso como:

$$K_{III} = \frac{2T\sqrt{1-\gamma}}{\sqrt{\pi}R_e^{2.5}\gamma^{2.5}} \left(1 + \frac{1}{2}\gamma + \frac{3}{8}\gamma^3 + \frac{35}{128}\gamma^4 + 0.208\gamma^5\right) \quad (2-22)$$

onde  $\gamma = \frac{r_n}{R_e}$ ,  $r_n$  é o raio da região não trincada,  $R_e$  é o raio externo do eixo,  $T$  é o torque aplicado. O fator de intensidade de fricção é gerado pela interação das superfícies da trinca e pela distribuição de pressão entre estas superfícies. Ambos dependem da amplitude do torque aplicado e da rugosidade da superfície fraturada.

DUMITRU et al. (2007) estudaram a resistência à fadiga sob impactos repetitivos em eixos de sistemas de transmissão de energia. Ensaio de torção estática, ensaios de torção a impacto simples e ensaios de torção a impactos repetidos mostraram que a superfície de fratura nas regiões de concentração de tensões tem diferentes aspectos. No caso de ensaios de torção estática e ensaios de torção a impacto simples (onde cada ciclo de carregamento tem um impacto controlado), a fratura foi produzida em um plano normal à linha longitudinal do eixo. Nos ensaios de torção a impactos repetidos, a trinca propagada formou um ângulo (valor médio de 48,6°) com o plano da seção transversal, similar aos ensaios de fadiga à torção sem impacto.

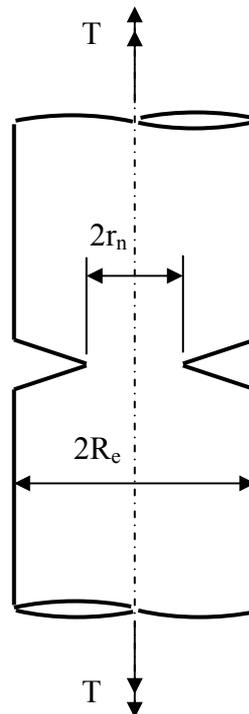


FIGURA 2.11 – Desenho esquemático de um eixo com uma trinca circunferencial sob torção.

Segundo BACHSCHMID et al. (2008), a análise da mudança de vibração nos mancais auxilia na descoberta de trincas em eixos de máquinas em operação. As trincas em eixos de transmissão propagam-se em superfícies planas e irregulares, perpendiculares ou inclinadas ao eixo de rotação. A presença destas trincas em eixos de máquinas pesadas, montadas na posição horizontal, onde o momento fletor horizontal devido ao peso determina a abertura e o fechamento da trinca durante uma revolução do eixo, denominado de “mecanismo de respiração”, produz uma variação periódica da rigidez. A variação da rigidez afeta o comportamento dinâmico do eixo, e a variação de sua vibração é um sinal disponível para detectar a trinca em um eixo rotativo durante a sua condição normal de operação. Um modelo em três dimensões (3D), trincado e analisado pelo método de elementos finitos, foi utilizado para simular o comportamento dinâmico do eixo, através do cálculo de deslocamentos nas solicitações de flexão e torção.

Segundo RICHARD et al. (2008), como consequência das cargas de serviço, o crescimento da trinca à fadiga pode ocorrer em estruturas metálicas e componentes de máquinas, o que conduz à falha ou parte dela, e como consequência o acidente. Um conhecimento sobre o crescimento da trinca à fadiga e sobre o comportamento geral da propagação da trinca no que diz respeito a casos reais de trinca, capacita o engenheiro a identificar os riscos de fratura antecipadamente na fase de desenvolvimento do projeto de máquinas e componentes. Conseqüentemente, torna-se possível a previsão de falhas estruturais e acidentes durante o tempo de serviço, viabilizando a elaboração de planos detalhados de inspeção e manutenção, buscando minimizar a probabilidade de catástrofes.

## 2.5 Eixo de mandril

Os primeiros eixos de mandril foram construídos na Alemanha por August Schmitz Company, por volta de 1893, para suportar bobinas de aço. Os mandris eram unidades projetadas com sistemas de expansão e contração, acionados através de correias ligadas aos motores da cadeia do laminador. O primeiro mandril de alta tração foi patenteado em 1905 por W. F. Conklin, de Pittsburgh (GUIMARÃES, 2009).

Os eixos de mandris compõem os equipamentos denominados bobinadeiras ou desbobinadeiras, montados nas extremidades de uma linha de processo, conforme ilustra a FIGURA 2.12.

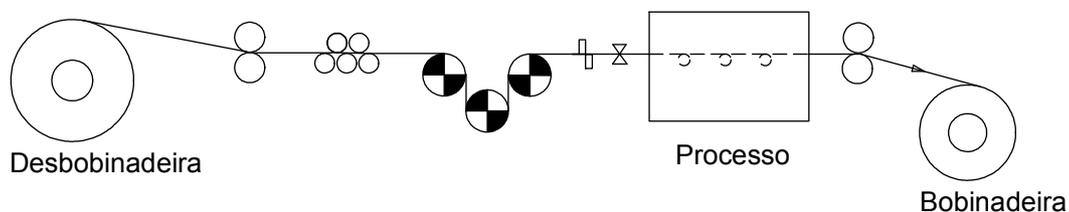


FIGURA 2.12 - Linha de processo típica (Fonte: GUIMARÃES, 2009).

As bobinadeiras têm a função de enrolar a bobina sobre um mandril expansível, na tração adequada ao processo, e as desbobinadeiras têm a função de desenrolar a bobina. São dotadas de acionamento através de motor acoplado a um redutor, bases e eixo de mandril, geralmente montado em balanço, conforme ilustra a FIGURA 2.13. Na FIGURA 2.13a é apresentada uma ilustração do conjunto da desbobinadeira ou bobinadeira e na FIGURA 2.13b é apresentado o interior da caixa redutora com os pares de engrenagens e o mandril.

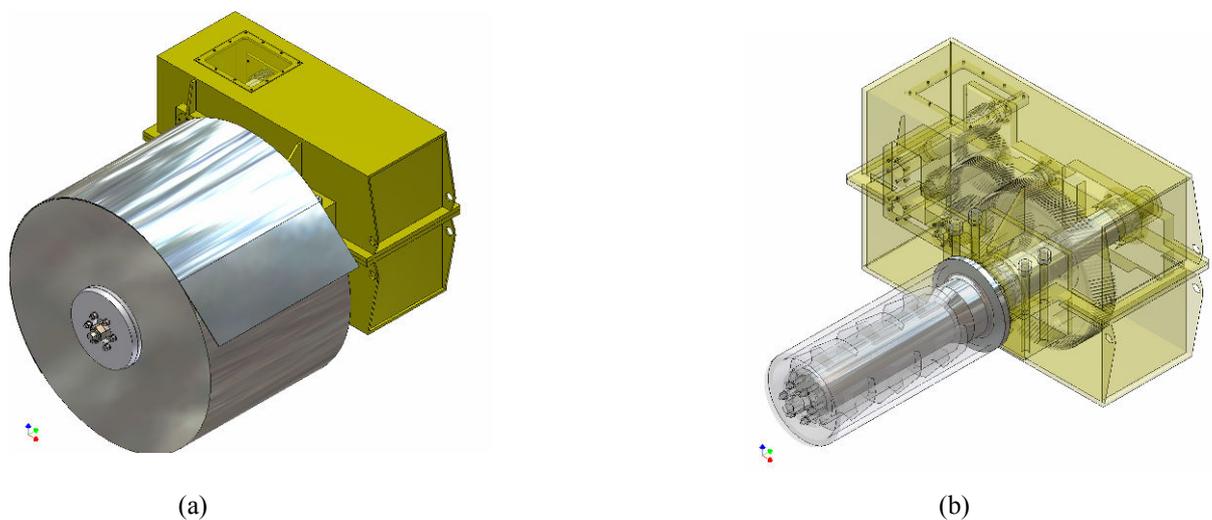


FIGURA 2.13 - (a) Desbobinadeira; (b) interior da caixa redutora (Fonte: GUIMARÃES, 2009).

A função do eixo do mandril é o de sustentar o peso da bobina e transmitir o torque proveniente do acionamento. Ele é submetido basicamente a esforços de torção, flexão e força cortante. Os esforços de torção são provenientes do torque transmitido pelo motor. Os esforços de flexão são oriundos das forças verticais e horizontais. As forças verticais são causadas pelo peso da bobina e do peso próprio. As forças horizontais são provenientes da força de tração.

Os mandris são dotados de sistema de expansão e contração para adequar seu diâmetro externo em relação ao diâmetro interno da bobina. A contração do mandril permite as operações de introdução e retirada das bobinas, e a sua expansão, por sua vez, é necessária para fixar as bobinas ao mandril.

O sistema de expansão e contração do mandril é realizado através de atuação hidráulica, onde uma haste prolongada do cilindro hidráulico de expansão, localizado na parte traseira do redutor, promove a movimentação da luva com rampas inclinadas, conforme se apresenta na FIGURA 2.14. As rampas inclinadas por sua vez são interligadas aos segmentos, que estão em contato direto com o diâmetro interno das bobinas. A movimentação axial da haste do cilindro promove a expansão ou a contração do mandril, dependendo do sentido de aplicação. O mordente localizado entre os segmentos tem a função de prender a ponta da tira a ser enrolada, utilizado nos equipamentos denominados bobinadeiras (GUIMARÃES, 2009).

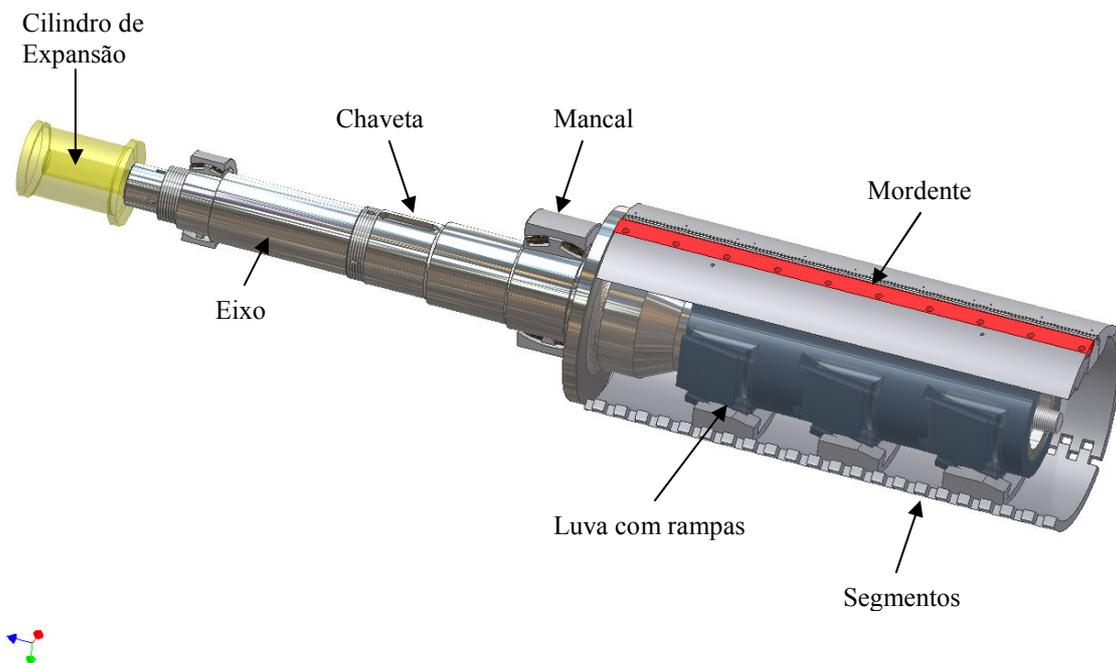


FIGURA 2.14 - Conjunto do mandril (Fonte: GUIMARÃES, 2009).

Um eixo de mandril sujeito à carga de flexão transversal fixa experimenta estado de tensões reversas. Qualquer elemento na superfície do eixo é submetido à tração e à compressão a cada rotação do mesmo. Assim, mesmo para as cargas fixas, os eixos devem ser projetados contra falhas por fadiga.

Os eixos de mandris são fabricados geralmente em aço AISI 4140, forjados e beneficiados para atingir uma resistência última entre 850 a 1.100 MPa. Apresentam

comprimento da ordem de 3.000 a 4.000 mm e diâmetros na faixa de 200 a 400 mm. Eles são trepanados para a passagem da haste de expansão do mandril e apresentam diversas seções críticas mais suscetíveis à falhas por fadiga, como rasgos de chaveta, ressaltos, roscas e interferências de montagem. Os ressaltos acomodam elementos fixados, tais como rolamentos e engrenagens. As chavetas são freqüentemente usadas para fixar engrenagens ao eixo a fim de transmitir o torque requerido. As mudanças nas seções transversais do eixo contribuem para alguma forma de concentração de tensões e devem ser incluídas no cálculo das tensões de fadiga.

O valor de concentração de tensão em qualquer geometria particular é denotado por um fator geométrico de concentração de tensão teórico  $K_t$  para tensões normais, ou  $K_{ts}$  para tensões de cisalhamento. Muitos desses fatores teóricos ou geométricos de concentração de tensão foram determinados para diversos carregamentos e geometrias e encontram-se publicados em várias referências: PETERSON<sup>22</sup> *apud* NORTON (2004), e ROARK e YOUNG<sup>23</sup> *apud* NORTON (2004). Para cargas dinâmicas é necessário modificar o fator de concentração de tensão de acordo com a sensibilidade do material a essas descontinuidades, de modo a se obter o fator de concentração de tensão em fadiga  $K_f$ , o qual pode ser aplicado às tensões dinâmicas nominais.

Segundo NORTON (2004), o fator de concentração de tensão em fadiga  $K_f$  é determinado através da Eq. (2-23)

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \quad (2-23)$$

onde  $q$  é a sensibilidade ao entalhe do material e pode ser definida a partir da fórmula de KUHN-HARDRATH<sup>24</sup> *apud* NORTON (2004), representada na Eq. (2-24)

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} \quad (2-24)$$

onde  $\sqrt{a}$  é a constante de Neuber e  $r$  o raio do entalhe.

---

<sup>22</sup> PETERSON, R. E. Stress-concentration factors. John Wiley & Sons: New York, 1974.

<sup>23</sup> ROARK, R. J., YOUNG, W. C.. Formulas for stress and strain, 5<sup>th</sup> ed.. McGraw-Hill: New York, 1975.

<sup>24</sup> KUHN, P., HARDRATH, H. F.. An engineering method for estimating notch-size effect in fatigue tests on steel. Technical note 2805, NACA, Washington, D. C., october, 1952.

Na FIGURA 2.15 destaca-se um eixo típico de mandril, onde são indicados alguns pontos de concentração de tensões, como rasgos de chaveta e ressalto. Além disto, as seções críticas também podem apresentar outros fatores modificadores, tais como, rugosidades superficiais, roscas, montagens por interferência, entre outros.

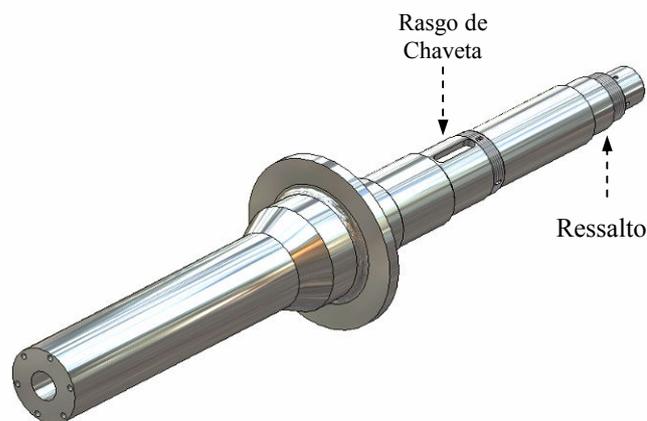


FIGURA 2.15 - Detalhe do eixo de mandril (Fonte: GUIMARÃES, 2009).

O dimensionamento de um eixo de mandril em balanço baseia-se no cálculo do diâmetro da seção correspondente ao momento fletor máximo. Após o cálculo da seção, o eixo de mandril é dimensionado à fadiga, levando-se em consideração os pontos de concentração de tensão. No dimensionamento levantam-se os limites de fadiga de cada seção crítica e calculam-se os fatores de segurança envolvidos, considerando vida infinita para o eixo. Neste modelo de dimensionamento, o peso final da bobina e a tração da linha são os limitadores de projeto para o dimensionamento do eixo. A existência de pontos de concentração de tensões observadas em várias seções do eixo de mandril, principalmente em seções localizadas no interior da caixa redutora, tornam sua manutenção uma condição crítica.

### 2.5.1 Danos acumulados por fadiga em eixo de mandril

Os eixos de mandris de bobinadeiras ou desbobinadeiras estão frequentemente sujeitos às cargas repetidas, também denominadas cargas cíclicas, e as tensões cíclicas resultantes podem levar a danos físicos microscópicos dos materiais envolvidos. Mesmo sob tensões bem abaixo do limite de ruptura, este dano microscópico pode acumular em ciclos continuados até que se transforme em uma trinca, que leva à falha do componente.

Dentro do estudo de acúmulo de danos em materiais é sabido que, à medida que o dano acumula-se, a vida remanescente para futuros carregamentos diminui. GUIMARÃES (2009) desenvolveu um trabalho de previsão de vida remanescente de eixos de mandris submetidos a danos acumulados por fadiga. Conforme este trabalho, o histórico do carregamento e as características físicas e geométricas do eixo do mandril determinam parte da previsão de vida. A regra linear de danos cumulativos de Miner foi utilizada para quantificar o dano à fadiga do eixo, provocado por cada bobina processada. Nela, o dano final acumulado é definido pela somatória dos danos parciais de todas as bobinas processadas. A partir do histórico das bobinas processadas, isto é, da largura, da espessura e do peso de cada bobina, o acúmulo de danos pode ser computado, com previsão de falha para dano final acumulado maior ou igual a 1.

O número de ciclos da curva *S-N* é determinado a partir do valor da amplitude de tensão atuante em cada bobina, e que encontra-se acima do limite de resistência à fadiga do material na seção crítica da peça. Com o incremento das espiras, a amplitude de tensão é comparada continuamente com o limite de resistência à fadiga, e o acúmulo de danos é computado, até atingir a última espira da bobina.

Um dos casos de eixo de mandril fraturado por fadiga, mencionado por GUIMARÃES (2009), operou durante 11 anos e 8 meses após processar 7.006 bobinas, quando fraturou na seção do rasgo de chaveta. Ele foi projetado para sustentar em sua extremidade em balanço uma bobina de 22,5 toneladas e transmitir o torque proveniente do acionamento motor e redutor. Após 4 anos em operação, começou a trabalhar com bobinas que pesavam entre 25 a 30 toneladas. Na FIGURA 2.16 é representado o rasgo

de chaveta de um eixo de mandril similar ao que sofreu a fratura, e na FIGURA 2.17 é representado o eixo fraturado na região do rasgo de chaveta.

O resultado do dano final acumulado pelas 7.006 bobinas processadas até a fratura do eixo do mandril foi igual a 1,285, maior que o limite de 1,0 da regra de linear de Miner. A FIGURA 2.18 indica o acúmulo linear do dano em função dos ciclos aplicados até a fratura do eixo. Considerando que o tempo de 11 anos e 8 meses corresponde ao dano de 1,285, para um dano igual a 1,0 tem-se 9,1 anos de vida do eixo de mandril.



FIGURA 2.16 - Detalhe do rasgo de chaveta do eixo de mandril, similar ao que sofreu a fratura (Fonte: GUIMARÃES, 2009).

GUIMARÃES (2009) concluiu que um eixo de mandril submetido à sobrecarga possui uma menor precisão no cálculo de previsão de vida baseada na regra linear de Miner. Para os casos onde o carregamento apresenta-se mais próximo do limite de fadiga, a aplicação da previsão de vida é mais adequada. Segundo DIAS (2006), valores diferentes da unidade ocorrem porque a regra de Palmgren-Miner não leva em consideração importantes aspectos, cuja influência na duração do componente à fadiga já foram comprovadas experimentalmente, tais como: nível de carga; seqüência de carregamento; interação das cargas, desprezando assim o fenômeno de aceleração ou retardo da velocidade de propagação da trinca. “Apesar de todas as imprecisões, a lei de Miner continua sendo largamente utilizada na prática e em vários trabalhos científicos,

devido à sua simplicidade matemática e ao fato de fornecer resultados com uma certa margem de segurança. Por este motivo ela é incorporada nos procedimentos de verificação à fadiga de várias normas de projetos estruturais e mecânicos” (DIAS, 2006, p. 47).

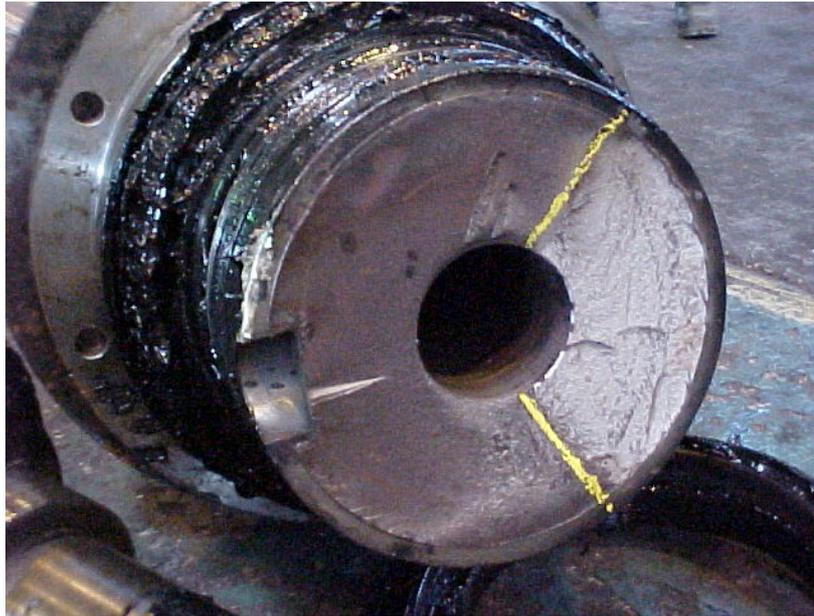


FIGURA 2.17 - Detalhe da fratura do eixo de mandril, localizada na seção com rasgo de chaveta (fonte: GUIMARÃES, 2009).

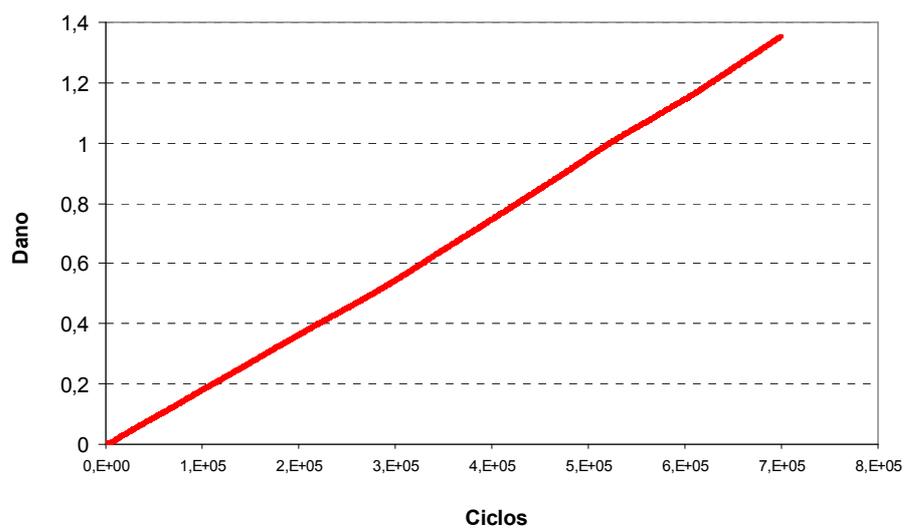


FIGURA 2.18 - Dano acumulado em função do número de ciclos de carregamento (Fonte: GUIMARÃES, 2009).

## 2.6 Métodos numéricos

Existem muitos problemas de engenharia descritos por um modelo matemático na forma de uma equação diferencial, ou um sistema de equações diferenciais, para os quais a obtenção de soluções analíticas exatas de forma fechada é muito difícil, ou mesmo impossível. Esta dificuldade decorre da natureza complexa das equações diferenciais ou das dificuldades associadas às condições de contorno. A utilização de métodos numéricos, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF) ou o Método dos Elementos de Contorno (MEC), proporciona a solução aproximada desses problemas. O primeiro passo na análise pelo MEF é a discretização do domínio. Este processo consiste em dividir o domínio do problema a ser analisado em um certo número de elementos finitos (sub-domínios de tamanho finito) interligados em pontos denominados nós. Em geral adotam-se aproximações do campo de deslocamentos sobre os elementos finitos, a partir das quais com base em princípios variacionais ou no princípio dos trabalhos virtuais, obtém o sistema correspondente de equações algébricas em termos dos deslocamentos nodais incógnitos.

Por outro lado o MEC se baseia na discretização das equações integrais de contorno (EIC) do problema. As EIC envolvem as grandezas no contorno, deslocamentos e forças de superfície, que podem ser prescritas ou incógnitas dependendo do problema específico a ser analisado. Num dado ponto do contorno de um problema de valor de contorno (PVC), se uma componente de deslocamento é prescrita, a componente da força de superfície correspondente é prescrita, e vice versa. O MEC consiste em discretizar o contorno dividindo-o em elementos definidos por pontos nodais. Adotam-se então aproximações das grandezas de contorno em termos dos respectivos valores nodais, gerando com isto um sistema de equações algébricas em termos dos valores incógnitos no contorno sejam eles forças ou deslocamentos. A partir da solução desse sistema obtêm-se as incógnitas de contorno, que podem então serem utilizadas, numa etapa de pós-processamento, para o cálculo direto de valores de deslocamentos ou das tensões em pontos do domínio com nas respectivas representações integrais na forma discretizada.

### 2.6.1 Análise pelo MEF ANSYS

ZIENKIEWICZ e CHEUNG<sup>25</sup> *apud* MOAVENI (2008) escreveram o primeiro livro totalmente devotado ao MEF, e em 1971, o programa computacional ANSYS foi lançado pela primeira vez.

ANSYS é um programa de elementos finitos que contém mais de 100.000 linhas de código, e é capaz de realizar análise estrutural estática e dinâmica (ambas linear e não-linear), problemas de transferência de calor e fluxo de fluidos, problemas acústicos e eletro-magnéticos. Os sistemas lineares são muito mais simples e geralmente não levam em conta deformações plásticas. Os sistemas não-lineares consideram as deformações plásticas e também grandes deslocamentos em função do carregamento, além de grandes variações térmicas. Atualmente o ANSYS é aplicado em muitos campos de engenharia, incluindo aeroespacial, construção civil, automotiva, eletrônica, e nuclear, entre outros.

O programa ANSYS possui dois níveis básicos: nível inicial (*Begin level*) e nível de processamento (*Processor level*). Entra-se no programa através do nível inicial, e através do mesmo tem-se acesso aos diversos processadores. O processador é uma coleção de funções e rotinas para fins específicos. Há três processadores utilizados com mais frequência: pré-processador (PREP7); processador (SOLUTION); pós-processador (POST1). O pré-processador contém ferramentas necessárias para construir um modelo de elementos finitos: definir tipos de elementos e opções; definir constantes reais dos elementos; definir propriedades dos elementos; criar a geometria do modelo (modelo sólido); manipular arquivos de dados, definir a malha de controle; malha do objeto criado; aplicar condições de contorno e carregamentos. O processador também possui comandos que permitem aplicar condições de contorno e carregamentos. Uma vez que todas as informações são disponibilizadas, obtêm-se as soluções nodais através do *solver* para sistema de equações lineares e/ou não-lineares. O pós-processador contém os recursos que permitem listar e visualizar os resultados da análise.

---

<sup>25</sup> ZIENKIEWICZ, O. C., CHEUNG, Y. K. K.. The finite element method in structural and continuum mechanics. London, McGraw-Hill, 1967.

### 2.6.2 Análise pelo MEC e FRANC3D

O MEC encontra-se bastante difundido nos círculos de pesquisa, constituindo-se uma alternativa na análise de vários problemas de engenharia.

Segundo RIBEIRO (2003), o surgimento do MEC se deu na década de 60, tendo como pioneiros M. A. Jaswon e G. T. Symm, trabalhando com as equações integrais de contorno para problemas bidimensionais de teoria de potencial. JASWON<sup>26</sup> *apud* RIBEIRO (2003) trata em seu artigo os aspectos teóricos do método, e SYMM<sup>27</sup> *apud* RIBEIRO (2003) trata da implementação computacional e da apresentação de resultados numéricos utilizando elementos constantes. São obtidos resultados convergentes com o refinamento da malha, confirmando a validade do método, e o condicionamento adequado do problema é alcançado, quando se utilizam elementos de mesmo comprimento ao longo de todo o contorno. Estes autores apontam também a possibilidade de estender a aplicação das equações integrais de contorno para problemas de teoria da elasticidade, tendo em vista a analogia entre as equações básicas que regem os problemas de potencial e elasticidade.

Segundo RIBEIRO (2003), o sucesso do MEC se deve principalmente à redução da dimensão do problema em uma unidade, uma vez que este método requer discretização apenas do contorno do problema. Para alguns problemas, especialmente aqueles envolvendo singularidades, tal como nos problemas de Mecânica da Fratura, obtém-se substancial ganho na precisão dos resultados ao se utilizar o MEC ao invés do MEF.

Segundo ALIABADI (2002), o MEC ainda não apresenta uma aplicação ampla na indústria como o MEF, contudo tem se tornado uma alternativa em importantes áreas da engenharia. Uma aplicação atraente do MEC é a aplicação aos problemas de Mecânica da Fratura e de propagação de trincas. A sua capacidade de propagar a trinca com uma

---

<sup>26</sup> JASWON, M. A. *Integral equation methods in potential theory I*. The Royal Society. London: Royal Society, 1963. pp. 23-32.

<sup>27</sup> SYMM, G. T. *Integral equation methods in potential theory II*. The Royal Society. London: Royal Society, 1963. pp. 33-46.

pequena necessidade de refazer a malha, faz do método uma preciosa ferramenta numérica para a Mecânica da Fratura.

O FRANC3D é um programa computacional baseado no MEC e encontra-se em desenvolvimento pelo Grupo de Fratura da Universidade de Cornell (Cornell Fracture Groupe - CFG), Nova York, Estados Unidos, desde 1987. Trata-se de um programa de uso livre e adotado em trabalhos de pesquisa na área da Mecânica da Fratura. Segundo MORETTI e BITTENCOURT (1998), o programa FRANC3D foi concebido com o objetivo principal de se obter um sistema eficiente para a realização da simulação numérica do comportamento de estruturas tridimensionais trincadas.

O FRANC3D é constituído de três módulos: OSM (*Object Solid Model*), modelador sólido, no qual se gera a geometria dos modelos; FRANC3D (*Fracture Analysis Code for 3 Dimensional Problems*), pré e pós-processador, destinado à geração da malha de elementos de contorno, leitura das propriedades do material e inserção de trincas; BES (*Boundary Element Solver*), para a análise estrutural pelo método de elementos de contorno e obtenção dos parâmetros da Mecânica da Fratura. No pós-processamento possibilita determinar os fatores de intensidade de tensão para os três modos de carregamento ( $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ ). (CFG, 2003).

# 3

## METODOLOGIA

### 3.1 Introdução

A metodologia usada para o cálculo dos parâmetros necessários à análise de propagação de trincas em componentes mecânicos sujeitos à fadiga, com base na Mecânica da Fratura, será descrita neste capítulo. Serão utilizados os dados relativos à geometria do componente em estudo, o comprimento inicial e final da trinca, e os valores máximo e mínimo do FIT correspondente às situações extremas de carregamento, além das propriedades do material.

Neste trabalho, a análise da propagação de trinca em uma estrutura será realizada em duas etapas. A primeira etapa corresponde à análise global linear elástica da estrutura sem a presença da trinca. Ela pode ser desenvolvida com a utilização de soluções analíticas fechadas para a obtenção do estado de tensão nos pontos da estrutura, podendo ser modelos uni, bi ou tridimensionais. Aí se incluem as soluções para estruturas compostas de barras, no âmbito da resistência dos materiais e teoria de estruturas, ou soluções para problemas de estado plano de tensão e deformação na teoria da elasticidade, ou problemas de placas, ou ainda a teoria de cascas. Atualmente, com o grande desenvolvimento dos métodos numéricos e computacionais, e dependendo da

complexidade da estrutura, em termos de geometria, carregamentos e vinculação, esta etapa pode ser desenvolvida baseada em métodos numéricos, tais como o MEF e o MEC, entre outros. Neste trabalho, para a primeira etapa, adota-se o MEF por meio da utilização do programa ANSYS (versão 11.0) e o MEC por meio da utilização do programa FRANC3D (versão F3D). A primeira etapa visa à obtenção das distribuições de tensão e de deformação, por meio das quais podem ser determinadas as regiões críticas em termos de sollicitação, onde há maior probabilidade da ocorrência de trincas. A determinação destas regiões com elevada possibilidade de ocorrência de trincas pode e deve ser complementada com base na experiência acumulada na monitoração e manutenção de estruturas, ou componentes mecânicos similares, bem como na presença de detalhes geométricos que induzam à concentração de tensão.

Inicia-se a segunda etapa a partir dos resultados da primeira etapa, com a trinca já introduzida na estrutura, ou numa parte dela. A análise de propagação é realizada considerando-se os valores extremos dos fatores de intensidade de tensão, que podem ser obtidos por meio dos manuais de Mecânica da Fratura, como por exemplo, em PARIS e SIH<sup>28</sup> *apud* BRANCO et al. (1986), ROOKE e CARTWRIGHT<sup>29</sup> *apud* BRANCO et al. (1986), TADA et al. (2000), ou por meio da utilização de métodos numéricos. Neste trabalho adota-se o MEC, com base na utilização do programa FRANC3D, e o método proposto por MURAKAMI e ENDO (1983), para a obtenção dos fatores de intensidade de tensão, à medida que a trinca se propaga. Dependendo do tamanho e da complexidade da estrutura, a análise de propagação é efetuada numa parte da estrutura na qual a trinca está inserida. O contorno desta parte é definido por linhas ou superfícies suficientemente afastadas da trinca, de forma que nesta etapa possam ser aplicadas condições de contorno, em termos de deslocamentos ou forças de superfície, obtidas a partir dos resultados da análise na primeira etapa.

Para a análise de propagação numa parte da estrutura usando o MEC, considera-se a análise global da estrutura por meio do MEF sem a presença da trinca, partindo do

---

<sup>28</sup> PARIS, P. C., SIH, G. C.. Stress analysis of cracks: Fracture toughness testing and its applications, ASTM STP 381, 1964, pp. 30-81.

<sup>29</sup> ROOKE, D. P., CARTWRIGHT, D. J.. Compendium of stress intensity factors, Her Majesty's Stationery, Office, London, 1976.

princípio que a matriz de rigidez global não se altera significativamente. Entretanto, à medida que a trinca se propaga, deverão ser efetuadas novas análises globais pelo MEF com a presença da trinca, visando avaliar e incorporar a possível deterioração da rigidez da estrutura devido à propagação.

### 3.2 Análise de componentes com trinca

A vida de um componente estrutural contendo uma trinca pode ser estudada a partir da taxa de propagação da trinca em relação ao número de ciclos de carga.

Com base na Lei de Paris, Eq. (2-5), o número de ciclos  $N_f$  necessários para propagar uma trinca de um comprimento inicial  $a_i$  até o seu comprimento crítico  $a_f$  pode ser obtido pela integração da respectiva equação, ou seja:

$$N_f = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{C(\Delta K)^m} \quad (3-1)$$

A variação do fator de intensidade de tensão  $\Delta K$  poderá ser substituída pela variação do fator de intensidade equivalente  $\Delta K_{eq}$ , Eq. (2-17), para carregamentos nos modos combinados.

Neste trabalho, a avaliação de  $N_f$  com base na Eq. (3-1) será efetuada de forma iterativa, utilizando-se o algoritmo proposto por BANNANTINE et al. (1990), descrito a seguir, considerando que os valores de  $K_{max}$  e  $K_{min}$  dependem do comprimento atualizado da trinca. Os passos principais deste algoritmo são:

- 1 – Divide-se o intervalo de crescimento da trinca de  $a_i$  até  $a_f$  em um certo número de incrementos,  $n-1$ ;
- 2 – Determina-se o valor de  $\beta$  (Eq. (2-2)) para cada intervalo de comprimento da trinca;
- 3 – Calcula-se  $\Delta K$  (Eq. (2-2)) para cada valor de  $a_n$ ;
- 4 – Para cada valor  $\Delta K$  determina-se o  $da/dN$  correspondente pela Lei de Paris;
- 5 – Determina-se a média da taxa de crescimento no intervalo:

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{\text{médio}} = \frac{\left(\frac{da}{dN}\right)_n + \left(\frac{da}{dN}\right)_{n+1}}{2} \quad (3-2)$$

6 – Determina-se o número de ciclos para o crescimento durante o incremento  $a_n$  até  $a_{n+1}$ :

$$\Delta N = \frac{\Delta a}{\left(\frac{da}{dN}\right)_{\text{médio}}} = \frac{2(a_{n+1} - a_n)}{\left(\frac{da}{dN}\right)_n + \left(\frac{da}{dN}\right)_{n+1}} \quad (3-3)$$

Os valores de  $\Delta N$  de cada incremento são somados e obtém-se uma solução aproximada para o número de ciclos  $N_f$  para uma trinca propagar de um comprimento inicial  $a_i$  até um comprimento final  $a_f$ . Neste trabalho os valores de  $\Delta K$  ( $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ ) são obtidos nos manuais de Mecânica da Fratura ou por meio do MEC/FRANC3D. No caso da utilização do MEC/FRANC3D, o cálculo de  $N_f$  é feito a partir do passo 4.

Considerando-se o efeito da razão entre as tensões máxima e mínima,  $R$ , sobre a curva  $da/dN$  versus  $\Delta K$ , as constantes  $C$  e  $m$  da Eq. (3-1) tornam-se:

$$C = \frac{C_1}{(1-R)^{(1-\gamma)m_1}} \quad m = m_1 \quad (3-4)$$

onde  $\gamma = 0$  para  $R < 0$ , propostos por Walker e mencionados na Seção 2.4.

### 3.2.1 Propagação de trincas no MEC/FRANC3D

A propagação da trinca é baseada nos valores do fator de intensidade de tensão conforme descrito anteriormente, e na direção do avanço da nova frente da trinca conforme critérios disponibilizados no programa MEC/FRANC3D. A geometria da frente pode ser modificada automaticamente à medida que a trinca se propaga.

Segundo TEIXEIRA (2004), a simulação da propagação da trinca é um processo incremental, no qual uma série de passos é repetida para a propagação da mesma. Cada iteração do processo representa uma configuração de trinca e depende dos resultados anteriores. Esses resultados são os campos de forças e os deslocamentos no contorno do corpo trincado, obtidos por meio do MEC. Os valores dos fatores de intensidade de

tensão são calculados em pontos discretos ao longo da frente da trinca, a partir do campo de forças e deslocamentos no contorno. Com os valores dos fatores de intensidade de tensão calcula-se uma nova frente de trinca. Essa nova configuração de trinca altera o modelo para o qual é determinado um novo campo de forças e deslocamentos. Esse processo é repetido até que uma condição de parada seja alcançada, o que pode ser um comprimento de trinca maior que o tamanho pré-estabelecido, ou uma trinca propagando completamente através do corpo ou ainda a condição de propagação instável.

A trinca em um corpo tridimensional pode ser classificada como sendo de superfície ou interna. A trinca interna não intercepta a superfície de contorno, enquanto a trinca de superfície intercepta uma ou mais superfícies de contorno. A propagação de uma trinca interna pode levar a uma trinca de superfície, e a propagação pode conduzir à ruptura total do corpo.

No MEC/FRANC3D os valores do fator de intensidade de tensão são calculados em pontos discretos localizados ao longo da frente da trinca. Em regiões próximas à frente da trinca o comportamento de um campo de deslocamentos tridimensionais, em certos planos, é idêntico ao campo de deslocamentos bidimensional em estado plano de deformação. No MEC/FRANC3D, estes planos são definidos pela normal  $n$  e a binormal  $b$  em pontos localizados na frente de trinca, conforme FIGURA 3.1. Estes pontos podem ser selecionados através de duas técnicas: “*mesh nodes*” e “*geometry points*”, sendo esta última recomendada por CFG (2003). Na “*geometry points*” a frente da trinca é dividida em segmentos iguais definidos por pontos geométricos, como mostrado na FIGURA 3.1. Os deslocamentos denotados por  $v$ ,  $u$  e  $w$  dos pontos geométricos nas direções  $n$ ,  $b$  e  $t$ , respectivamente, podem ser diretamente relacionados com os três fatores de intensidade de tensão  $K_I$ ,  $K_{II}$ , e  $K_{III}$ .

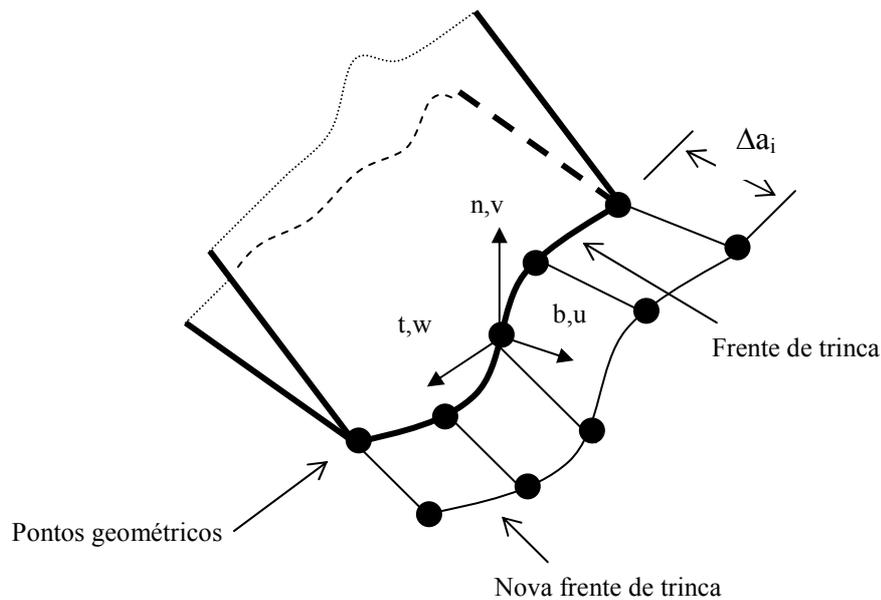


FIGURA 3.1 – Sistema de coordenadas da frente de trinca e pontos geométricos (“geometry points”) utilizados no cálculo dos fatores de intensidade de tensão (Fonte: TEIXEIRA, 2004).

Os valores de  $K_I$ ,  $K_{II}$ , e  $K_{III}$  são obtidos em cada ponto geométrico da frente de trinca pela análise utilizando o MEC/FRANC3D. O processo de propagação de trinca no MEC/FRANC3D é efetuado a partir desses valores.

A direção da propagação de cada um destes pontos é avaliada tratando a trinca como sendo composta por uma série de seções bidimensionais em estado plano de deformação. Quatro critérios para determinar a direção de crescimento da trinca estão disponíveis no MEC/FRANC3D, a saber: critério da máxima tensão circunferencial; critério do máximo potencial da taxa de liberação de energia; critério da mínima densidade de energia de deformação; e, critério de propagação linear. O método da máxima tensão circunferencial, recomendado pelo CFG (2003), indica propagação da trinca na direção perpendicular à direção da tensão principal. No método do máximo potencial da taxa de liberação de energia a propagação da trinca se dá na direção onde a taxa de liberação de energia é máxima, enquanto o método da mínima densidade de energia de deformação ocorre a propagação na direção para a qual a densidade de

energia de deformação é mínima. O critério de propagação linear força a trinca a permanecer plana.

No âmbito do MEC/FRANC3D, a nova frente da trinca é determinada pela combinação da direção e do incremento de propagação nos pontos da frente de trinca atual. Neste trabalho são adotados 24 pontos distribuídos uniformemente ao longo da frente de trinca, e o incremento máximo,  $\Delta a_{max}$ , é determinado pelo usuário. Este incremento máximo corresponde ao incremento aplicado no ponto da frente de trinca onde ocorre  $K_{Imax}$ . A extensão da trinca  $\Delta a_i$  em cada ponto da frente, FIGURA 3.1, é definida a partir de  $\Delta a_{max}$ , conforme a seguinte expressão:

$$\Delta a_i = \Delta a_{max} \left( \frac{K_i}{K_{Imax}} \right)^b \quad (3-5)$$

onde  $b$  é um parâmetro especificado pelo usuário, cujo valor é igual a 1, por sugestão do CFG (2003). Os valores de incremento frente,  $\Delta a_i$ , são adicionados aos comprimentos no respectivos pontos da frente para a obtenção da nova frente.

Segundo MORETTI e BITTENCOURT (1998), as malhas podem ser construídas utilizando-se elementos de contorno triangulares ou quadriláterais, ou uma combinação dos dois tipos. Se a malha está sendo construída com elementos quadriláterais, mas a superfície não pode ser inteiramente coberta por esse tipo de elemento, elementos triangulares são utilizados. Se a malha está sendo construída com elementos triangulares, toda a malha será composta por triângulos. Antes de gerar a malha em superfícies, as arestas do modelo devem ser subdivididas em segmentos de linha. Os nós da subdivisão da aresta tornam-se nós da malha. Assim, a densidade da subdivisão das arestas controla a densidade da malha, podendo-se alterar o número de subdivisões ou mudar a razão entre os pontos das arestas para aumentar o número de elementos num local específico da superfície.

O programa MEC/FRANC3D também possui um módulo para a previsão de vida à fadiga com base em equações de taxa de crescimento de trincas: equações de PARIS e

FORMAN et al.<sup>30</sup> *apud* CFG (2003), válidas para carregamento com amplitude constante. Para carregamentos com amplitude variável, o módulo de fadiga do MEC/FRANC3D utiliza o critério de retardamento de WILLENBORG et al.<sup>31</sup> *apud* CFG (2003). Segundo BANNANTINE et al. (1990) e BROEK (1996), o critério de Willenborg considera que o retardo do crescimento da trinca é causado pela tensão residual de compressão agindo sobre a ponta da trinca. Segundo CFG (2003), a idéia básica para este modelo é que o fator de intensidade de tensão para ciclos depois de uma sobrecarga será reduzido devido à zona plástica criada na ponta da trinca durante a sobrecarga. Ciclos de amplitude variável têm sido observados para retardar ou acelerar o crescimento da trinca dependendo da seqüência da amplitude de carga. O modelo de Willenborg foi originalmente proposto em termos de tensões cíclicas.

### 3.2.2 Método empírico para o cálculo do fator de intensidade de tensão de componentes trincados

MURAKAMI e ENDO (1983), MURAKAMI e NEMAT-NASSER (1983), e MURAKAMI (1985) desenvolveram um método empírico que permite calcular os fatores de intensidade de tensão em trincas, utilizando equações simples. Este método se fundamenta na proporcionalidade entre o FIT máximo no modo I e a área projetada da trinca no plano, cuja normal coincide com a direção da tensão principal máxima de tração:

$$K_{I_{max}} \propto (\sqrt{area})^{1/2} \quad (3-6)$$

onde  $K_{I_{max}}$  é o FIT máximo no modo I e *area* é a área projetada da trinca.

A Eq. (3-7) expressa o método para determinar  $K_{I_{max}}$  a partir da área projetada da trinca de materiais cujo coeficiente de Poisson é igual a 0,3.

---

<sup>30</sup> FORMAN, R. G., SHIVAKUMAR, V., NEWMAN, J. C.. Fatigue crack growth computer program "NASA/FLAGRO" version 2.0, Johnson Space Center, Houston, Texas, Rpt#JSC-22267A, 1994.

<sup>31</sup> WILLENBORG, J., ENGLE, R. M., WOOD, H. A.. A crack growth retardation model using an effective stress concept. AFFDL TM-71-1-FBR, 1971.

$$K_{I_{max}} \cong c_I \sigma \sqrt{\pi \sqrt{area}} \quad (3-7)$$

onde  $c_I$  é igual a 0,65 para trincas superficiais ou igual a 0,50 para trincas internas;  $\sigma$  é a tensão remota normal à área projetada. A constante  $c_I$  foi calculada para defeitos artificiais e trincas de diferentes formas e com várias inclinações.

A obtenção de  $K_{I_{max}}$  é determinada através do método da força de corpo (“*body force method*”), utilizada para avaliar falhas de superfície de três dimensões e formas irregulares (MURAKAMI e NEMAT-NASSER, 1983).

DIAS et al. (2003) compararam os resultados dos fatores de intensidade de tensão obtidos com o MEC/FRANC3D com os resultados obtidos utilizando-se o método de Murakami e Endo, encontrando diferenças de  $\pm 20\%$  para valores de  $K_{I_{max}}$  dentre todos os valores obtidos na frente de trinca no âmbito do MEC/FRANC3D, e de  $\pm 10\%$  quando se considera a média de todos os valores dos FIT obtidos para os pontos da frente de trinca. Para parâmetro  $\sqrt{area}$  inferior a 1.000  $\mu\text{m}$ , que equivale a uma área projetada de 1,0  $\text{mm}^2$ , a diferença foi de  $\pm 10\%$ , dentro da margem de erro determinada por Murakami e Endo. TEIXEIRA (2004) cita outros métodos empíricos, sendo o método desenvolvido por Murakami e Endo o mais completo na previsão do limite de fadiga de componentes contendo defeitos, inclusões e heterogeneidades.

# 4

## APLICAÇÕES E RESULTADOS

A metodologia apresentada no Capítulo 3 é aplicada inicialmente na análise de propagação de trinca em uma placa tracionada axialmente no estado plano de tensão (EPT), problema tipicamente bidimensional, cujos valores dos fatores de intensidade de tensão são obtidos por meio do MEC/FRANC3D (modelagem tridimensional) para os diversos estágios de propagação da trinca. Os resultados são comparados com a solução apresentada por TADA et al. (2000) para o problema bidimensional. Em outro estudo, um corpo de prova padronizado de ferro fundido nodular austemperado (ADI), tipo compacto de tração (CT), é analisado numa primeira etapa por meio do MEF/ANSYS e do MEC/FRANC3D, sem a presença de trincas. Na segunda etapa é introduzida uma trinca e a análise de propagação de trinca é simulada por meio do MEC/FRANC3D. Os resultados obtidos são comparados com os resultados experimentais apresentados por DIAS (2006), cuja tese de doutorado trata do comportamento do ADI à fadiga. Os dois exemplos foram utilizados para calibrar a modelagem tridimensional no âmbito do MEC/FRANC3D de problemas tipicamente bidimensionais com as repostas disponíveis nos manuais e com resultados experimentais.

Em seguida, é realizado o estudo de caso de um eixo de mandril utilizado no processo de desbobinamento visando tratamento de descarbonetação e recristalização de chapa de aço da linha de recozimento contínuo da ArcelorMittal Inox Brasil, que fraturou após 11 anos e 8 meses de trabalho. Em uma primeira etapa, é realizada a análise global, linear elástica, da estrutura sem a presença de trinca usando modelo de viga e modelo tridimensional por meio do MEF/ANSYS e do MEC/FRANC3D. Na segunda etapa uma trinca é posicionada em uma parte crítica da estrutura, cuja análise de propagação da trinca é desenvolvida através dos valores do fator de intensidade de tensão obtidos por meio do MEC/FRANC3D e do método empírico de MURAKAMI e ENDO (1983). Os resultados obtidos são comparados aos resultados obtidos por GUIMARÃES (2009).

#### 4.1 Placa com trinca lateral

Uma placa de largura finita é tracionada axialmente sob carregamento cíclico com amplitude de carga constante. Trata-se de uma placa de aço, com 320 mm de comprimento, 150 mm de largura e 10 mm de espessura. Considera-se amplitude de carga constante de forma que se tenha  $\Delta S = 50$  MPa, sendo  $\Delta S = S_{max} - S_{min}$ , com tensão longitudinal máxima  $S_{max} = 100$  MPa, e tensão longitudinal mínima  $S_{min} = 50$  MPa, conseqüentemente, a razão entre a tensão mínima e máxima é  $R = S_{min} / S_{max} = 0,5$ . A placa é constituída de aço SAE 4140, com resistência ao escoamento  $f_y = 655$  MPa, resistência última  $f_u = 981$  MPa, módulo de elasticidade  $E = 210.000$  MPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Inicialmente, efetua-se a análise linear elástica da placa sem a presença de trincas por meio do MEC/FRANC3D, e, numa segunda etapa, é introduzida uma trinca de borda na metade da placa, resultando numa análise de propagação de trinca onde a amplitude do fator cíclico de intensidade de tensão,  $\Delta K$ , é crescente.

##### 4.1.1 Análise global sem trinca

A placa de aço considerada, representada na FIGURA 4.1, com a tensão longitudinal atuante  $\sigma$  nas faces extremas da chapa, na direção  $y$ . São consideradas duas situações de carregamento: a primeira, denominada Etapa 1,  $\sigma$  consiste da carga máxima

correspondente a  $S_{max} = 100$  MPa; a segunda, denominada Etapa 2,  $\sigma$  corresponde à carga mínima com  $S_{min} = 50$  MPa.

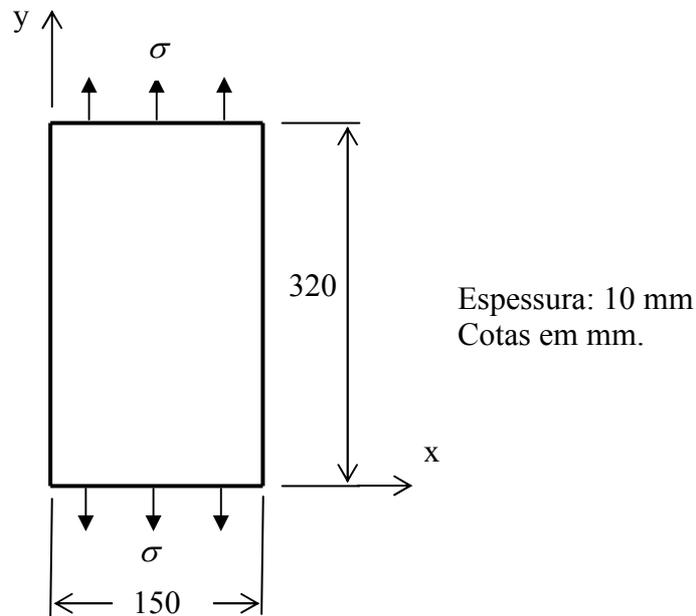


FIGURA 4.1 – Ilustração da placa de aço (plano  $xy$ ).

A placa, representada na FIGURA 4.1, é analisada por meio do MEC utilizando-se o programa FRANC3D versão F3D. Adota-se análise tridimensional estática, considerando-se os carregamentos descritos anteriormente.

Aplicam-se forças de superfície uniformes  $p$ , na face com 150 mm, na direção vertical (direção  $y$ ), conforme FIGURA 4.2. Na face extrema oposta à aplicação do carregamento, são colocadas restrições aos deslocamentos (FIGURA 4.2). Na linha da face, para  $0 \leq z \leq 10$  mm, especificam-se restrições nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Nos demais pontos da face, impõem-se restrições nas direções  $y$  e  $z$ . As restrições ao deslocamento foram adotadas tanto para o carregamento da Etapa 1 quanto da Etapa 2.

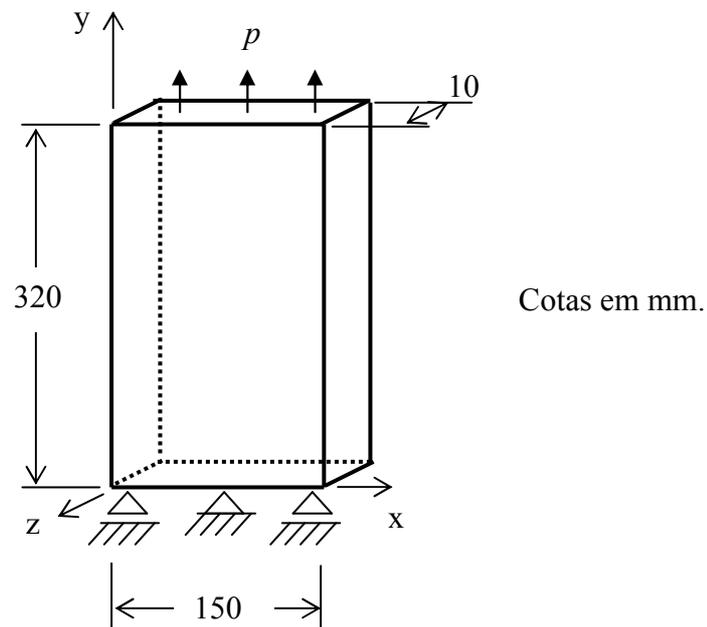


FIGURA 4.2 – Carregamentos atuantes na placa de aço (plano  $xy$ ).

A malha adotada para representar a placa de aço passou por um estudo de convergência, até chegar ao atual modelo, que consistiu na subdivisão das faces para criar as malhas, e os deslocamentos obtidos em cada análise foram comparados até atingir uma diferença mínima.

Na FIGURA 4.3 são ilustrados os resultados da análise tridimensional da placa de aço em termos de tensão normal e deslocamento na direção  $y$ , da Etapa 1.

Na TABELA 4.1 são apresentados os resultados das tensões obtidas por meio dos modelos analítico e MEC/FRANC3D, da Etapa 1, no ponto de coordenadas  $(0; 160; 0)$  mm, e deslocamentos máximos,  $\Delta L$ , na direção  $y$ .

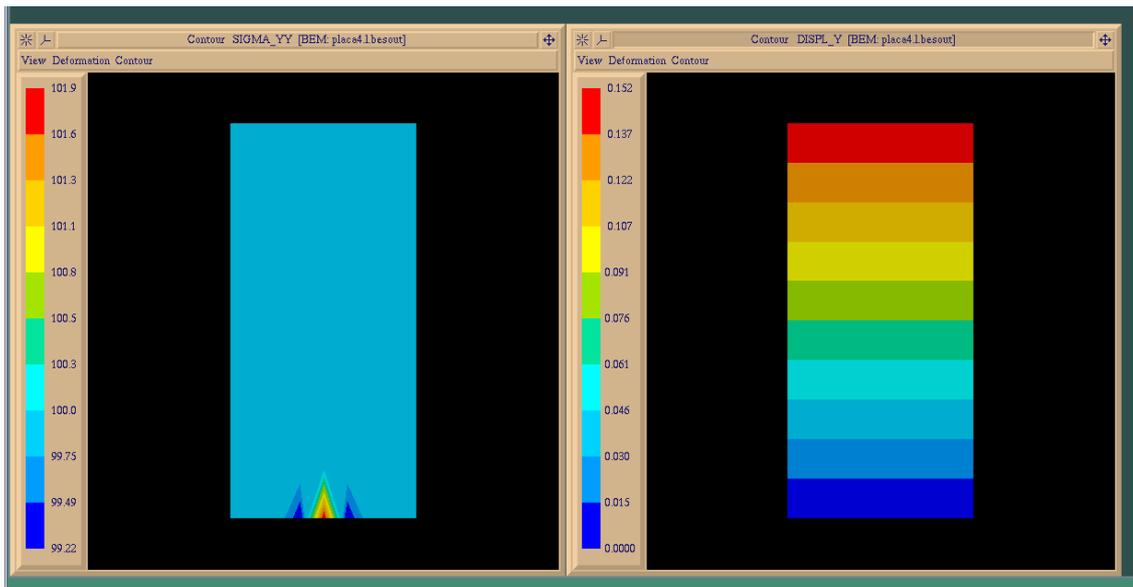


FIGURA 4.3 – Tensão normal e deslocamento na direção  $y$  – Etapa 1.

TABELA 4.1 – Resultados das tensões obtidos através dos modelos analítico e MEC/FRANC3D, da Etapa 1.

Modelo	$\sigma_y$ [MPa] Ponto de coordenada (0; 160; 0) mm	$\Delta L$ [mm]
Analítico	100	0,152
MEC/FRANC3D	100	0,152

#### 4.1.2 Análise com trinca

Utilizando o MEC/FRANC3D, considera-se agora o modelo tridimensional apresentado na FIGURA 4.2 com a presença de uma trinca planar, com frente reta paralela ao eixo  $z$ , situada no paralelo ao plano  $xy$ , conforme a FIGURA 4.4. São mantidas as mesmas condições de contorno mencionadas na seção anterior. O objetivo é o estudo da propagação de trinca no âmbito do MEC/FRANC3D para o caso simples apresentado, cujos resultados são bem conhecidos por meio da análise bidimensional considerando-se estado plano de tensão ou estado plano de deformação.

A trinca inicial tem a forma retangular, iniciando no ponto de coordenadas  $x = 0$  mm,  $y = 160$  mm e  $0 < z < 10$  mm, largura igual a 10 mm e profundidade inicial  $a = 5$  mm.

São adotados 24 pontos distribuídos uniformemente ao longo da frente de trinca, visando à determinação do fator de intensidade de tensão.

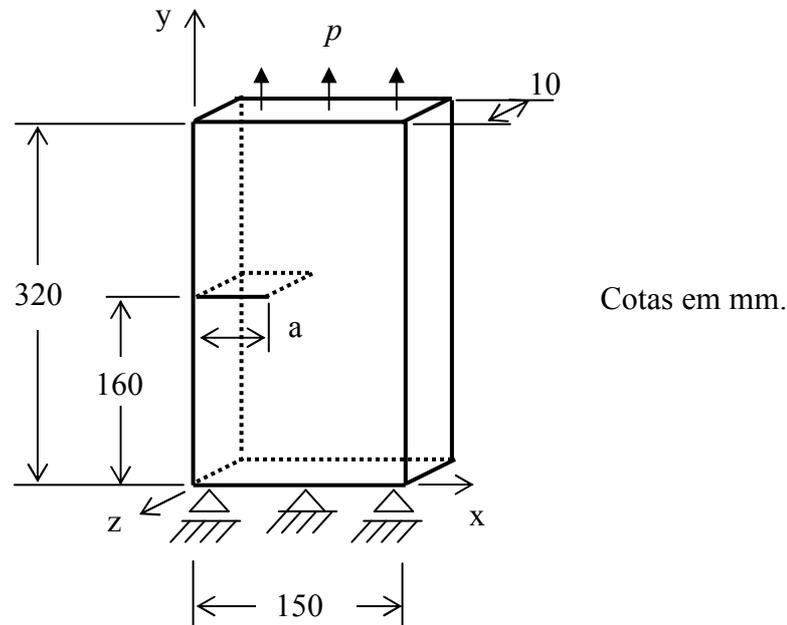


FIGURA 4.4 – Placa de aço com trinca na lateral (plano  $xy$ ).

Na FIGURA 4.5 é apresentado o gráfico do fator de intensidade de tensão ao longo dos pontos da frente de trinca, para duas posições da Etapa 1: (a)  $a = 5$  mm; (b)  $a = 20$  mm.

A propagação da trinca é efetuada conforme o critério da direção da máxima tensão circunferencial ( $\sigma_{Max}$ ) e a extensão dos pontos geométricos de acordo com a potência de  $K_I$  (*power of  $K_I$*  - Eq. (3-5)). O incremento de trinca  $\Delta a_{max}$  foi considerado igual a 5 mm, aplicado no ponto nodal da frente onde ocorre  $K_{I_{max}}$ , e os incrementos nos demais pontos da frente são calculados com base na Eq. (3-5), com o parâmetro  $b = 1$ .

Para a análise de propagação de trincas do modelo em estudo, consideram-se as seguintes propriedades do aço ferrítico-perlítico, segundo BARSOM e ROLFE (1999):

$$C = 6,89 \times 10^{-12} \frac{\text{m/ciclo}}{(\text{MPa}\sqrt{\text{m}})^m} \text{ e } m = 3,0, \text{ sendo } C \text{ e } m \text{ parâmetros do material conforme}$$

Lei de Paris. Adotou-se ainda conforme DOWLING (1999), o valor da tenacidade à fratura do aço,  $K_{Ic} = 110\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

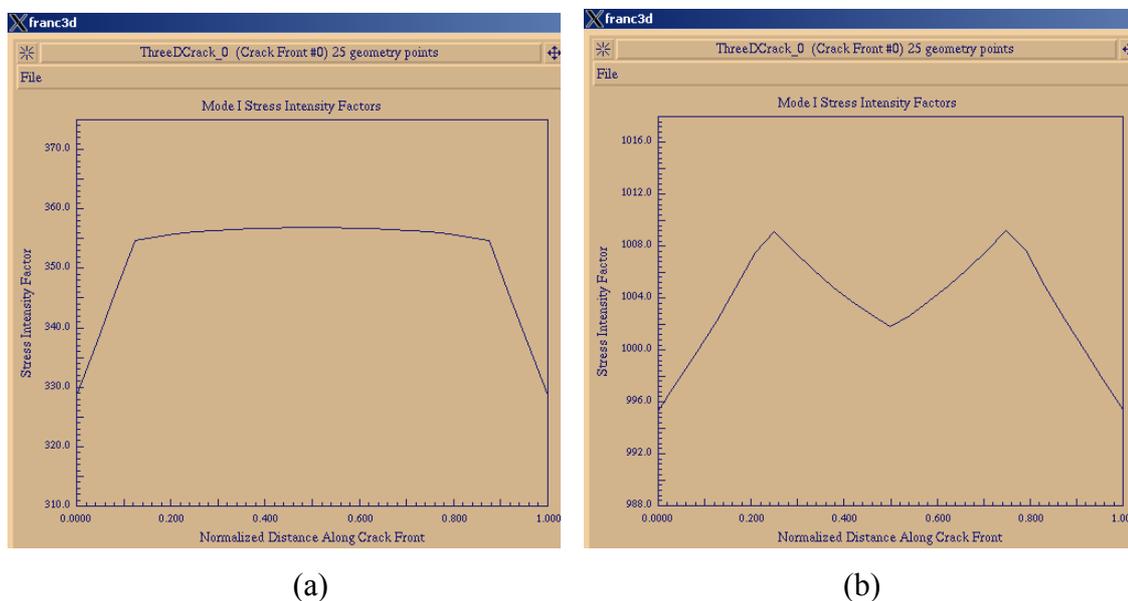


FIGURA 4.5 - Gráfico do fator de intensidade de tensão ao longo dos pontos da frente de trinca para duas posições da Etapa 1: (a)  $a = 5$  mm; (b)  $a = 20$  mm.

A propagação ocorre até que a trinca atinja o tamanho de 73 mm, quando  $K_I$  terá igualado a  $K_{Ic}$ , totalizando 15 posições de frente de trinca distintas.

O número de ciclos para se atingir o tamanho crítico de trinca, a partir de uma trinca inicial,  $N_f$  é obtido utilizando-se o algoritmo de BANNANTINE et al. (1990), com base na Lei da Paris, conforme descrito no Capítulo 3. Para esta análise considera-se o valor médio do FIT calculado com base nos resultados obtidos para os 24 pontos adotados ao longo da frente de trinca, como mencionado anteriormente. O número de intervalos  $n$  representa os 15 incrementos de crescimento da trinca especificados. Os resultados são apresentados na TABELA 4.2, onde observa-se que o número de ciclos para se atingir o tamanho crítico de trinca foi  $N_f = 2,198 \times 10^6$  ciclos e a profundidade da trinca é 65,7 mm, obtidos por interpolação.

TABELA 4.2 – Resultados da propagação de trinca pelo modelo MEC/FRANC3D.

Profundidade mm	$K_I$ máximo MPa $\sqrt{m}$	$K_I$ mínimo MPa $\sqrt{m}$	$\Delta K$ MPa $\sqrt{m}$	da/dN m/ciclos	N ciclos
5	11,69	5,85	5,845	1,38E-09	0
10	20,08	9,90	10,183	7,27E-09	1,156E+06
15	26,09	12,88	13,211	1,59E-08	1,588E+06
20	31,72	15,74	15,974	2,81E-08	1,815E+06
25	37,39	18,62	18,769	4,56E-08	1,951E+06
30	43,38	21,64	21,741	7,08E-08	2,037E+06
35	49,85	24,87	24,974	1,07E-07	2,093E+06
40	56,94	28,41	28,531	1,60E-07	2,130E+06
45	64,82	32,34	32,480	2,36E-07	2,156E+06
50	73,70	36,74	36,963	3,48E-07	2,173E+06
55	83,65	41,71	41,939	5,08E-07	2,184E+06
60	95,61	47,37	48,233	7,73E-07	2,192E+06
65	108,02	53,87	54,148	1,09E-06	2,198E+06
70	123,11	61,38	61,727	1,62E-06	2,201E+06
73	138,18	68,89	69,285	2,29E-06	2,203E+06

Segundo TADA et al. (2000), considerando-se o problema como bidimensional, o FIT pode ser calculado através da Eq. (2-2), e  $\beta$  obtido através da Eq. (4-1):

$$\beta = 0,265 \cdot \left(1 - \frac{a}{b}\right)^4 + \frac{0,857 + 0,265 \cdot \frac{a}{b}}{\left(1 - \frac{a}{b}\right)^2} \quad (4-1)$$

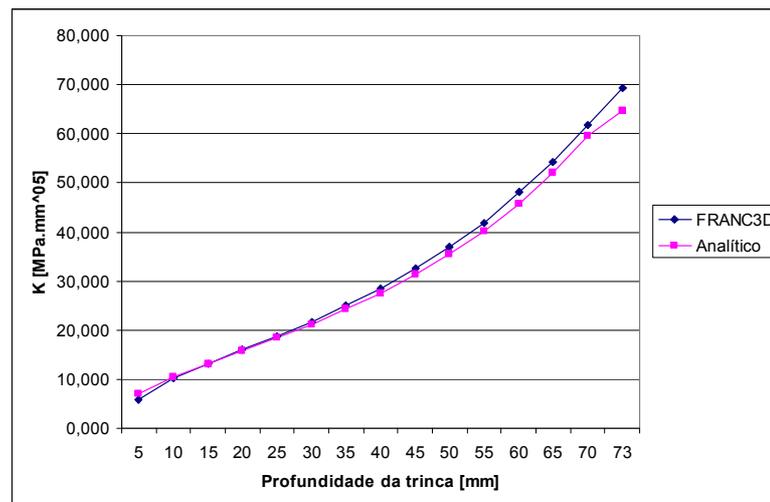
onde  $b$  é a largura da placa de aço, igual a 150 mm. Para  $\frac{a}{b} \leq 0,6$ , a exatidão é de 0,5%.

Para efeito de comparação efetua-se agora a avaliação do número de ciclos  $N_f$  para se atingir o tamanho crítico de trinca, a partir de uma trinca inicial, seguindo o mesmo algoritmo para obtenção, porém calculando-se os FIT máximos e mínimos pelas Eq. (2-2) e Eq. (4-1), sendo os resultados apresentados na TABELA 4.3. O número de ciclos para se atingir o tamanho crítico de trinca foi  $N_f = 2,060 \times 10^6$  ciclos e a profundidade da trinca é 66,9 mm, obtidos por interpolação.

Na FIGURA 4.6 é apresentado o gráfico do FIT para as duas análises efetuadas, a partir da dimensão  $a = 5$  mm. Observou-se uma diferença média de 4,7%.

TABELA 4.3 – Resultados da propagação de trinca pelo modelo analítico.

Profundidade mm	$K_I$ máximo $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$	$K_I$ mínimo $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$	$\Delta K$ $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$	$da/dN$ m/ciclos	$N$ ciclos
5	14,32	7,16	7,16	2,53E-09	0
10	20,76	10,38	10,38	7,70E-09	9,775E+05
15	26,24	13,12	13,12	1,56E-08	1,407E+06
20	31,47	15,73	15,73	2,68E-08	1,643E+06
25	36,78	18,39	18,39	4,29E-08	1,787E+06
30	42,37	21,19	21,19	6,55E-08	1,879E+06
35	48,42	24,21	24,21	9,78E-08	1,940E+06
40	55,08	27,54	27,54	1,44E-07	1,982E+06
45	62,51	31,26	31,26	2,10E-07	2,010E+06
50	70,90	35,45	35,45	3,07E-07	2,029E+06
55	80,46	40,23	40,23	4,49E-07	2,042E+06
60	91,45	45,72	45,72	6,59E-07	2,051E+06
65	104,18	52,09	52,09	9,74E-07	2,058E+06
70	119,08	59,54	59,54	1,45E-06	2,062E+06
73	129,26	64,63	64,63	1,89E-06	2,064E+06

FIGURA 4.6 - Gráfico de  $\Delta K$  versus profundidade de trinca para os modelos MEC/FRANC3D e analítico.

Na FIGURA 4.7 é apresentado o gráfico do número de ciclos acumulados na propagação, a partir da trinca inicial, para as duas análises efetuadas. Segundo MEC/FRANC3D, a vida total em ciclos da placa de aço é  $N_f = 2,198 \times 10^6$  ciclos, enquanto pelo modelo analítico bidimensional,  $N_f = 2,060 \times 10^6$  ciclos, indicando uma diferença de 6,7 %.

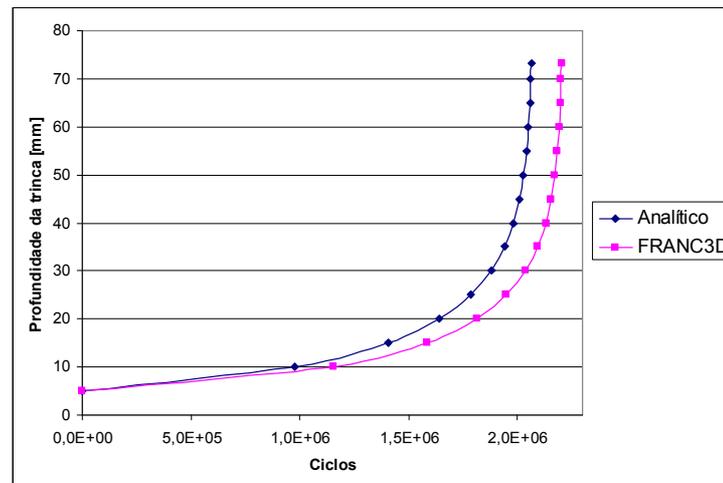


FIGURA 4.7 - Gráfico da profundidade da trinca  $a$  versus o número de ciclos  $N$ .

Comparando-se o número de ciclos acumulados observa-se que a diferença encontrada entre as duas análises é relativamente pequena e aceitável para este tipo de análise. A análise de propagação baseada no modelo bidimensional, a partir dos valores de FIT baseados nas equações disponíveis nos manuais da Mecânica da Fratura, teve como objetivo a validação e a calibragem da análise de propagação de trinca para o modelo tridimensional.

## 4.2 Corpo de prova compacto de tração

Um corpo de prova padronizado, tipo compacto de tração (CT), ensaiado em laboratório por DIAS (2006) e ilustrado na FIGURA 4.8, é carregado ciclicamente com amplitude de carga constante. Considera-se amplitude de carga constante de forma que se tenha  $\Delta P = 5,4$  kN, sendo  $\Delta P = P_{max} - P_{min}$ , com carregamento máximo  $P_{max} = 7,714$  kN, carregamento mínimo  $P_{min} = 2,314$  kN, conseqüentemente, a razão entre o carregamento mínima e máxima é  $R = P_{min} / P_{max} = 0,3$ . O corpo de prova CT é constituído de ferro fundido nodular austemperado (*Austempered Ductile Iron – ADI*) a  $360^{\circ}\text{C}$  durante 1,5 horas, com as seguintes propriedades médias, obtidas experimentalmente: resistência ao escoamento  $f_y = 871,6$  MPa; resistência última  $f_u = 1.115,1$  MPa; módulo de elasticidade  $E = 155.400$  MPa. O coeficiente de Poisson  $\nu = 0,28$  foi adotado com base no ASM Handbook (1993).

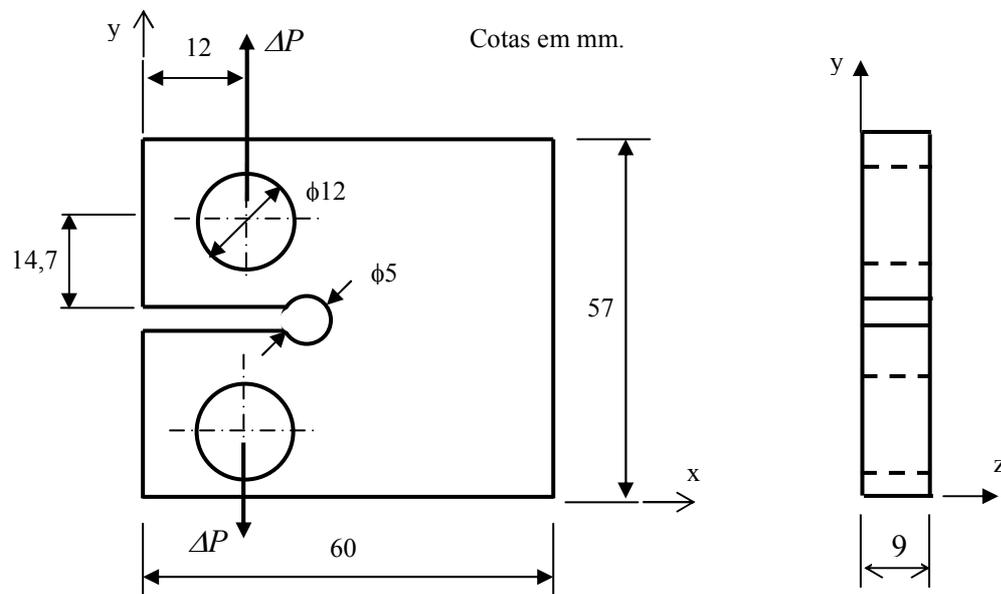


FIGURA 4.8 – Dimensões do corpo de prova tipo CT.

Inicialmente efetua-se a análise linear elástica do corpo de prova CT sem a presença de trincas para comparar os resultados obtidos por meio do MEF/ANSYS e do MEC/FRANC3D, e, numa segunda etapa é introduzida uma trinca, e então, efetua-se uma análise de propagação desta trinca, com amplitude do FIT,  $\Delta K$ , crescente.

#### 4.2.1 Análise global sem trinca

O corpo de prova CT, representado na FIGURA 4.8, é analisado por meio do MEF utilizando-se o programa computacional ANSYS versão 11.0, e adota-se análise tridimensional estática. A modelagem é realizada utilizando-se o elemento tridimensional SOLID45. A malha adotada para representar o CT passou por um estudo de convergência até chegar ao modelo adotado, composto de 6.565 elementos e 10.772 nós. O estudo de convergência consistiu no refino da malha do modelo, e os deslocamentos obtidos em cada análise foram comparados até atingir uma diferença mínima.

Aplicam-se forças de superfície uniformes  $p$  na superfície de  $76,37 \text{ mm}^2$  do furo de 12 mm de diâmetro, no intervalo  $45^\circ < \theta < 135^\circ$  para o furo superior e no intervalo de

$225^\circ < \theta < 315^\circ$  para o furo inferior, na direção vertical (direção  $y$ ), conforme FIGURA 4.9. São consideradas duas situações de carregamento: a primeira etapa, denominada Etapa 1, aplica-se a força de superfície  $p$  (100,97 MPa) referente ao carregamento  $P_{max}$ ; a segunda etapa, denominada Etapa 2, aplica-se a força de superfície  $p$  (30,26 MPa) referente ao carregamento  $P_{min}$ .

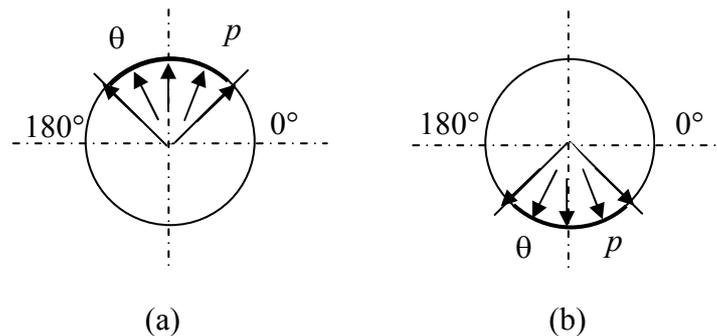


FIGURA 4.9 – Representação das regiões de aplicação da carga: (a) furo superior; (b) furo inferior.

São colocadas restrições aos deslocamentos conforme indicado na FIGURA 4.10. Nos nós situados na aresta de coordenadas  $(x = 60; y = 57; 0 \leq z \leq 9)$  mm impõem-se restrições aos deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ , e na aresta de coordenadas  $(x = 60; y = 0; 0 \leq z \leq 9)$  mm, impõem-se restrições aos deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . As restrições ao deslocamento foram adotadas tanto para o carregamento da Etapa 1 quanto da Etapa 2.

Para a Etapa 1, na FIGURA 4.11 são apresentados os resultados da análise tridimensional do corpo de prova em termos de deslocamento na direção  $y$ , cujo valor máximo é 0,050 mm. Na FIGURA 4.12 são apresentados os resultados da análise tridimensional do corpo de prova em termos de tensão normal na direção  $y$ . No ponto de coordenadas  $(18,5; 28,5; 9)$  mm, a tensão equivalente de von Mises  $\sigma_{equ} = 324,04$  MPa e a tensão na direção  $y$   $\sigma_y = 329,02$  MPa.

Efetua-se também a análise tridimensional do corpo de prova CT, conforme a FIGURA 4.8, utilizando-se o MEC por meio do programa FRANC3D versão F3D. Adotam-se os

mesmos carregamentos e dimensões descritas para os modelos baseados no MEF/ANSYS.

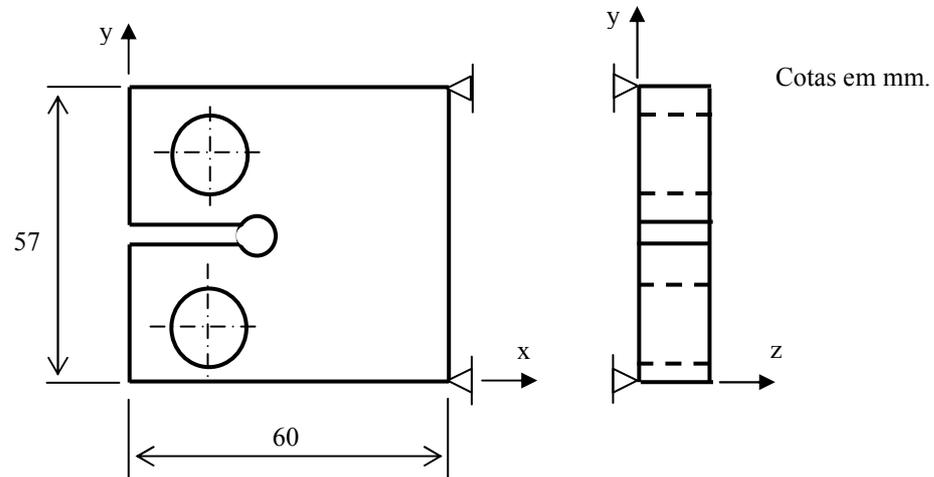


FIGURA 4.10 – Restrições ao deslocamento atuantes no corpo de prova CT.

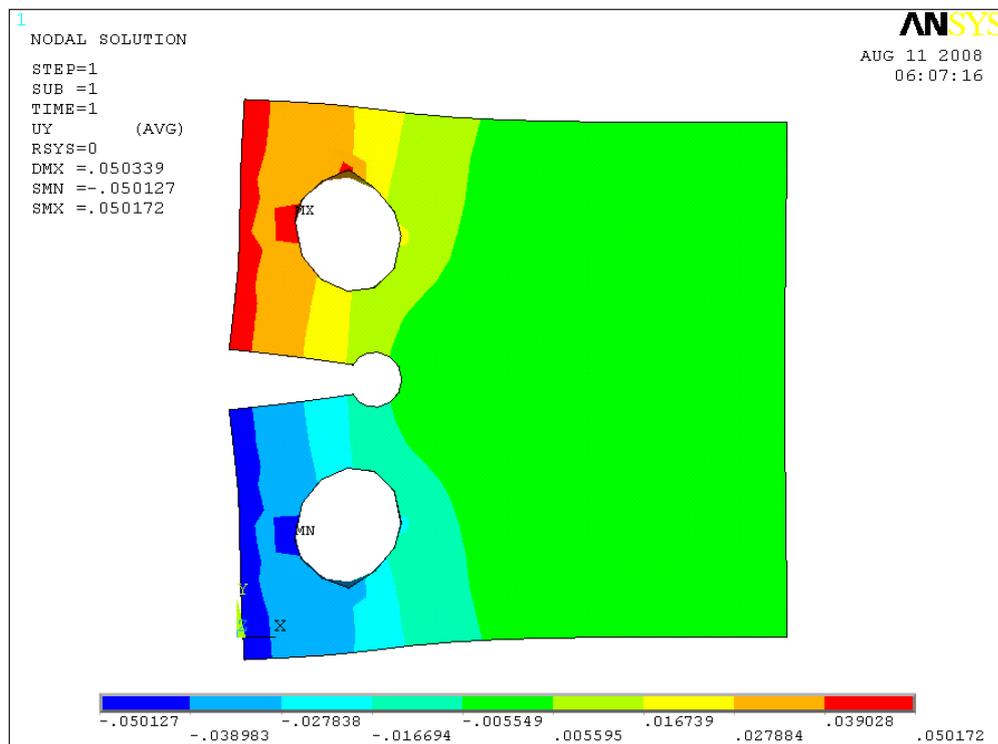


FIGURA 4.11 – Deslocamento na direção y – Etapa 1.

Tal como na análise MEF/ANSYS, aplicam-se forças de superfície uniformes  $p$  na superfície de  $76,37 \text{ mm}^2$  do furo de  $12 \text{ mm}$  de diâmetro, no intervalo  $45^\circ < \theta < 135^\circ$  para o furo superior e  $225^\circ < \theta < 315^\circ$  para o furo inferior, na direção vertical (direção  $y$ ), conforme FIGURA 4.9. São consideradas duas situações de carregamento: a primeira etapa, denominada Etapa 1, aplica-se a pressão  $p$  ( $100,97 \text{ MPa}$ ) referente ao carregamento  $P_{max}$ ; a segunda etapa, denominada Etapa 2, aplica-se a pressão  $p$  ( $30,26 \text{ MPa}$ ) referente ao carregamento  $P_{min}$ .

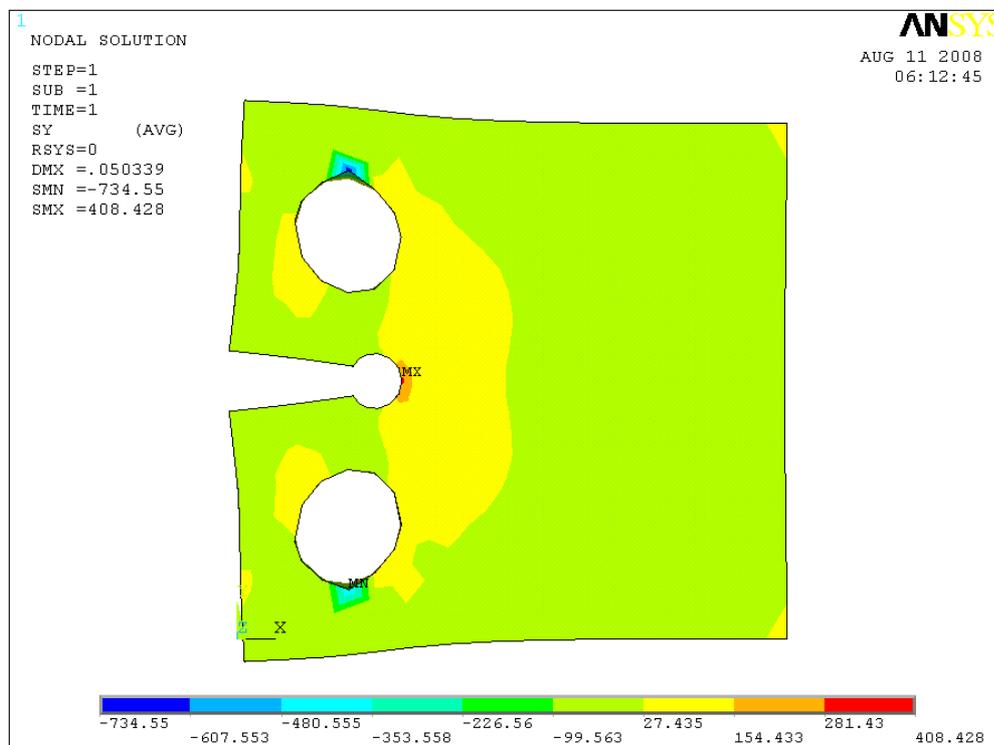


FIGURA 4.12 – Tensão normal na direção  $y$  – Etapa 1.

São colocadas restrições aos deslocamentos conforme indicado na FIGURA 4.10. Nos nós situados na aresta de coordenadas  $(x = 60; y = 57; 0 \leq z \leq 9) \text{ mm}$  impõem-se restrições aos deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ , e na aresta de coordenadas  $(x = 60; y = 0; 0 \leq z \leq 9) \text{ mm}$ , impõem-se restrições aos deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . As restrições ao deslocamento foram adotadas tanto para o carregamento da Etapa 1 quanto da Etapa 2.

A malha adotada para representar a placa de aço passou por um estudo de convergência, até chegar ao atual modelo, que consistiu na subdivisão das faces para criar as malhas, e os deslocamentos obtidos em cada análise foram comparados até atingir uma diferença mínima.

Para a Etapa 1, na FIGURA 4.13 são ilustrados os resultados da análise tridimensional do corpo de prova CT em termos de tensão normal e deslocamento na direção  $y$ , cujo valor máximo é de 0,047 mm. No ponto de coordenadas (18,5; 28,5; 9) mm, a tensão equivalente de von Mises  $\sigma_{equ} = 321,6$  MPa e a tensão  $\sigma_y = 340,85$  MPa, na direção  $y$ .

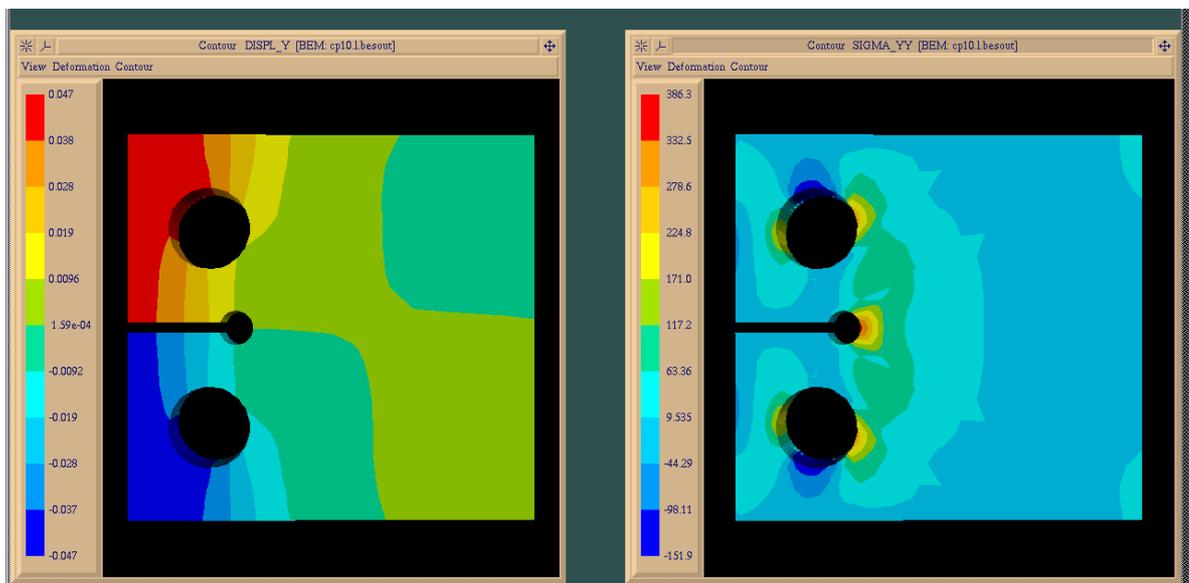


FIGURA 4.13 – Tensão normal e deslocamento na direção  $y$  – Etapa 1.

Na TABELA 4.4 apresentam-se os resultados das tensões obtidas para os modelos MEF/ANSYS e MEC/FRANC3D, no ponto de coordenadas (18,5; 28,5; 9) mm, e deslocamentos máximos,  $\Delta L$ , na direção  $y$ .

TABELA 4.4 – Tensões para os modelos MEF/ANSYS e MEC/Franc3D, no ponto de coordenadas (18,5; 28,5; 9) mm, e deslocamentos máximos.

Modelo	$\sigma_y$ [MPa]	Tensão equivalente de von Mises [MPa]	$\Delta L$ [mm]
MEF/ANSYS	329,02	324,04	0,050
MEC/Franc3D	340,8	321,60	0,047

#### 4.2.2 Análise com trincas

Utilizando o MEC/Franc3D, considera-se agora o modelo tridimensional apresentado na FIGURA 4.8 com a presença de uma descontinuidade plana (trinca), num plano paralelo ao plano  $xz$ , com tamanho de 2,5 mm a partir do final do entalhe, e frente reta paralela ao eixo  $z$ , conforme a FIGURA 4.14. São mantidas as mesmas condições de contorno mencionadas na seção anterior. O objetivo é o estudo da propagação de trinca no âmbito do MEC/Franc3D, cujos resultados são conhecidos por meio do experimento realizado por DIAS (2006).

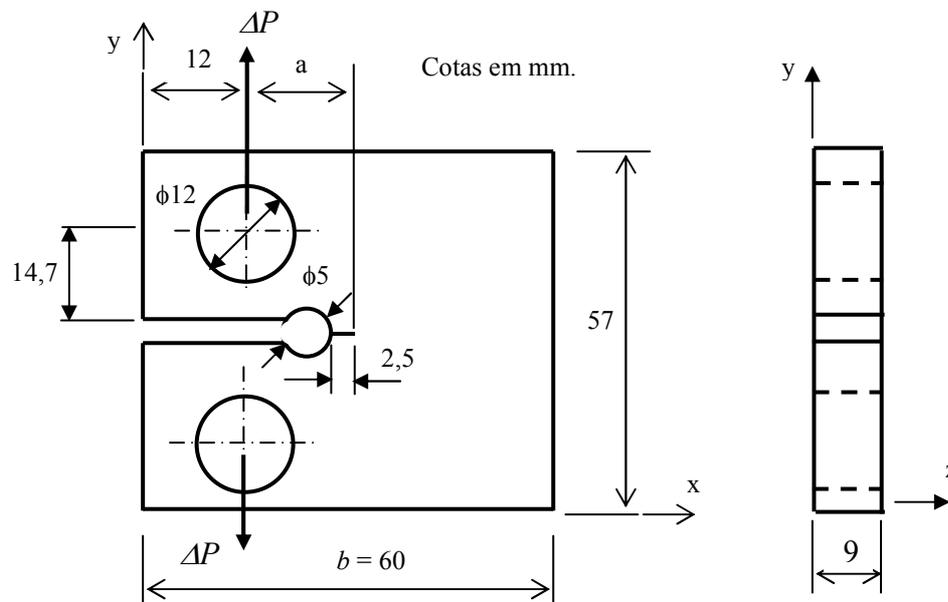


FIGURA 4.14 – Corpo de prova CT com a presença de uma descontinuidade plana.

Os detalhes do modelo tridimensional gerado no programa MEC/FRANC3D são apresentados na FIGURA 4.15. São mantidas as mesmas condições de contorno mencionadas na seção anterior.

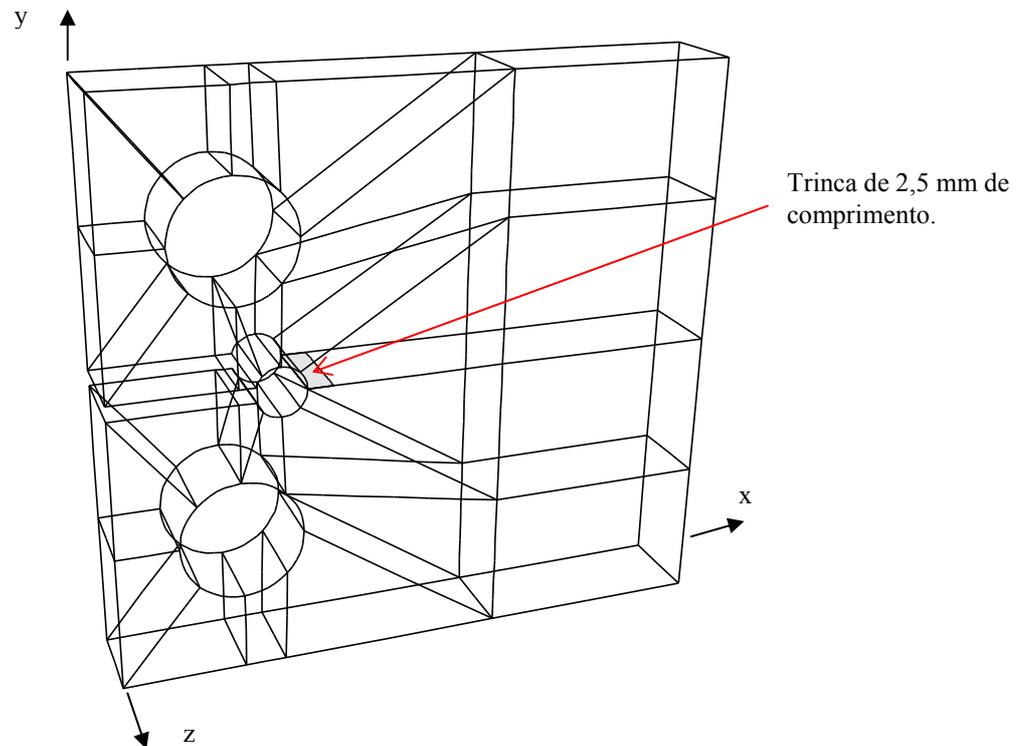


FIGURA 4.15 – Modelo tridimensional do corpo de prova CT utilizado nas simulações com o MEC/FRANC3D.

São adotados 24 pontos distribuídos uniformemente ao longo da frente de trinca, visando à determinação do FIT.

A propagação da trinca é efetuada conforme o critério da direção da máxima tensão circunferencial ( $\sigma_{Max}$ ) e a extensão dos pontos geométricos de acordo com a potência de  $K_I$  (*power of  $K_I$*  – Eq. (3-5)). Os cinco primeiros incrementos de trinca  $\Delta a_{max}$  foram considerados iguais a 1,5 mm, passando para 0,5 mm nos trinta e dois intervalos seguintes e finalizando com incrementos de 1,5 mm, aplicados no ponto nodal da frente onde ocorre  $K_{I_{max}}$ . Os incrementos nos demais pontos da frente são calculados com base na Eq. (3-5), com o parâmetro  $b = 1$ . A propagação ocorre até que a trinca atinja o tamanho de 37,5 mm, quando  $K_{I_{max}}$  terá igualado  $K_{I_c}$ , totalizando 41 posições distintas

de frentes de trinca. Os FIT obtidos por meio do MEC/FRANC3D são apresentados na TABELA 4.5. Considera-se o valor máximo do FIT, no modo I, dentre os resultados obtidos para os 24 pontos adotados ao longo da frente de trinca, como mencionado anteriormente. O valor de  $K_{I_{max}}$  se refere ao carregamento na condição de solitação máxima, e o valor de  $K_{I_{min}}$  se refere ao carregamento na condição de solitação mínima.

TABELA 4.5 – Fatores de intensidade de tensão obtidos por meio do MEC/FRANC3D.

<b>a</b>	$K_{I_{max}}$	$K_{I_{min}}$	$\Delta K$
mm	MPa $\sqrt{m}$	MPa $\sqrt{m}$	MPa $\sqrt{m}$
9,0	19,04	5,71	13,33
10,5	21,66	6,49	15,16
12,0	22,85	6,82	16,02
13,5	24,74	7,41	17,33
15,0	27,28	8,18	19,11
15,5	29,46	8,82	20,64
16,0	29,45	8,80	20,65
16,5	28,76	8,62	20,15
17,0	29,39	8,81	20,58
17,7	31,13	9,33	21,80
18,0	31,08	9,28	21,79
18,5	32,12	9,63	22,49
19,0	32,66	9,79	22,87
19,5	33,48	10,03	23,44
20,0	34,30	10,28	24,02
20,5	35,21	10,55	24,66
21,0	36,13	10,83	25,30
21,5	37,50	11,24	26,26
22,0	38,18	11,44	26,74
22,5	40,25	12,06	28,19
23,0	40,41	12,11	28,30
23,5	41,51	12,44	29,07
24,0	43,31	12,98	30,33
24,5	44,77	13,42	31,35
25,0	46,20	14,25	31,95
25,5	46,63	13,97	32,65
26,0	48,17	14,44	33,74
26,5	55,80	16,72	39,08
27,0	55,72	16,70	39,02
27,5	57,60	17,26	40,34
28,0	58,58	17,56	41,03
28,5	59,21	17,75	41,47
29,0	61,12	18,32	42,80
29,5	62,90	18,85	44,05
30,0	64,28	19,26	45,01
30,5	67,06	20,10	46,96

31,5	76,76	23,01	53,76
33,0	88,12	26,41	61,71
34,5	101,91	30,54	71,36
36,0	118,95	35,65	83,30
37,5	141,39	42,37	99,01

A propagação de trincas por meio do programa MEC/FRANC3D passou por um estudo de convergência até chegar ao modelo definitivo, que consistiu em incrementos menores entre as posições de frente de trinca, e os FIT obtidos em cada análise foram comparados até atingir uma diferença mínima. Além disso, procurou-se manter os incrementos de igual valor durante a propagação de trincas.

Para a análise de propagação de trincas do modelo em estudo consideram-se as seguintes propriedades do ferro fundido nodular austemperado a 360°C durante 1,5 horas:  $C = 7,1433 \times 10^{-12} \frac{\text{m/ciclo}}{(\text{MPa}\sqrt{\text{m}})^m}$  e  $m = 3,0753$ , constantes da Lei de Paris, conforme DIAS (2006).

O número de ciclos  $N_f$  para se atingir o tamanho crítico de trinca, a partir de uma trinca inicial, é obtido utilizando-se o algoritmo de BANNANTINE et al. (1990), com base na Lei da Paris, conforme descrito no Capítulo 3, e da variação do fator de intensidade de tensão  $\Delta K$  ( $\Delta K = K_{I_{max}} - K_{I_{min}}$ ). O número de intervalos  $n$  representa os 41 incrementos de crescimento da trinca especificados. Os resultados são apresentados na TABELA 4.6, a partir da dimensão  $a = 15,5$  mm, onde observa-se que o número de ciclos para se atingir o tamanho crítico de trinca foi  $N_f = 9,483 \times 10^4$  ciclos.

No modelo experimental, DIAS (2006) trabalhou com três corpos de prova, com a dimensão inicial,  $a = 9$  mm, conforme FIGURA 4.14. Durante os ensaios desenvolvidos por DIAS (2006), os FIT foram considerados após  $\Delta P$  estabilizar-se em 5,4 kN, correspondendo a dimensão  $a = 15,7$  mm. A dimensão final corresponde a  $a \cong 34,3$  mm. Na TABELA 4.6 apresentam-se alguns resultados obtidos por DIAS (2006), onde observa-se que o número de ciclos para se atingir o tamanho crítico de trinca foi  $N_f = 1,944 \times 10^5$  ciclos.

TABELA 4.6 – Valores de  $\Delta K$  e  $N$  para os modelos MEC/FRANC3D e DIAS (2006).

<b>a</b>	<b>FRANC3D</b>	<b>DIAS (2006)</b>	<b>FRANC3D</b>	<b>DIAS (2006)</b>	<b>FRANC3D</b>	<b>DIAS (2006)</b>
	$\Delta K$	$\Delta K$	$da/dN$	$da/dN$	$N$	$N$
mm	$\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$	$\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$	m/ciclos	m/ciclos	ciclos	ciclos
15,5	20,64	16,74	7,89E-08	4,16E-08	7,086E+03	4,001E+04
16,0	20,65	17,00	7,91E-08	7,81E-08	1,342E+04	4,889E+04
16,5	20,15	17,49	7,33E-08	3,36E-08	1,998E+04	6,154E+04
17,0	20,58	17,98	7,82E-08	7,71E-08	2,659E+04	7,218E+04
17,5	21,80	18,40	9,33E-08	7,27E-08	3,475E+04	8,218E+04
18,0	21,79	18,97	9,32E-08	7,16E-08	3,797E+04	9,163E+04
18,5	22,49	19,57	1,03E-07	6,27E-08	4,307E+04	1,009E+05
19,0	22,87	19,99	1,08E-07	5,68E-08	4,781E+04	1,103E+05
19,5	23,44	20,50	1,17E-07	1,04E-07	5,226E+04	1,186E+05
20,0	24,02	21,08	1,26E-07	6,88E-08	5,638E+04	1,279E+05
20,5	24,66	21,69	1,36E-07	7,36E-08	6,020E+04	1,355E+05
21,0	25,30	22,36	1,48E-07	8,97E-08	6,372E+04	1,430E+05
21,5	26,26	22,88	1,65E-07	1,30E-07	6,691E+04	1,500E+05
22,0	26,74	23,65	1,75E-07	1,10E-07	6,985E+04	1,561E+05
22,5	28,19	24,48	2,06E-07	1,76E-07	7,248E+04	1,615E+05
23,0	28,30	25,17	2,08E-07	1,21E-07	7,489E+04	1,672E+05
23,5	29,07	25,99	2,26E-07	9,84E-08	7,720E+04	1,713E+05
24,0	30,33	26,76	2,58E-07	1,49E-07	7,926E+04	1,752E+05
24,5	31,35	27,72	2,85E-07	2,03E-07	8,110E+04	1,780E+05
25,0	31,96	28,75	3,03E-07	3,09E-07	8,281E+04	1,800E+05
25,5	32,65	29,53	3,23E-07	2,73E-07	8,440E+04	1,814E+05
26,0	33,74	30,62	3,57E-07	3,68E-07	8,587E+04	1,828E+05
26,5	39,08	31,64	5,62E-07	3,06E-07	8,696E+04	1,841E+05
27,0	39,02	32,97	5,59E-07	4,85E-07	8,785E+04	1,855E+05
27,5	40,34	34,19	6,19E-07	3,67E-07	8,870E+04	1,868E+05
28,0	41,03	34,94	6,52E-07	2,95E-07	8,949E+04	1,877E+05
28,5	41,47	36,96	6,74E-07		9,024E+04	1,892E+05
29,0	42,80	38,48	7,43E-07		9,094E+04	1,904E+05
29,5	44,05	39,90	8,12E-07		9,159E+04	1,912E+05
30,0	45,01	41,73	8,68E-07		9,218E+04	1,920E+05
30,5	46,96	43,62	9,89E-07		9,272E+04	1,925E+05
31,5	53,76	47,95	1,50E-06		9,353E+04	1,935E+05
33,0	61,71	55,56	2,29E-06		9,432E+04	1,942E+05
34,5	71,36	63,00	3,58E-06		9,483E+04	1,944E+05

Na FIGURA 4.16 é apresentado o gráfico do número de ciclos acumulados na propagação a partir da dimensão  $a \cong 15,7$  mm, para as duas análises efetuadas. Para valores obtidos por meio do MEC/FRANC3D, o número de ciclos para se atingir o tamanho crítico de trinca foi  $N_f = 9,483 \times 10^4$  ciclos, e para valores obtidos por DIAS (2006), o número de ciclos para se atingir o tamanho crítico de trinca foi de  $N_f = 1,944 \times 10^5$  ciclos.

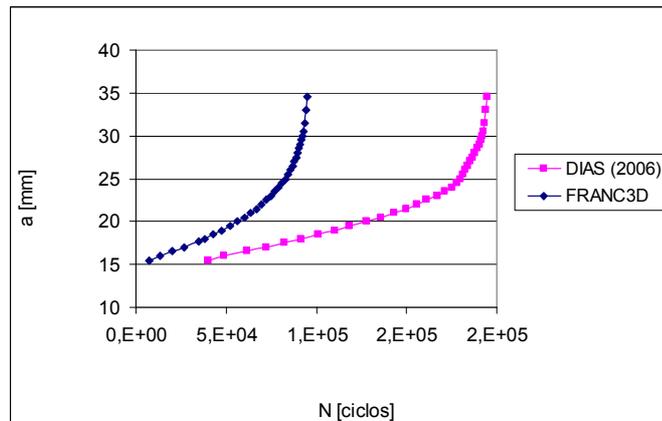


FIGURA 4.16 – Gráfico de  $N$  (número de ciclos) versus  $a$  (comprimento da trinca) para os modelos MEC/FRANC3D e DIAS (2006).

Na FIGURA 4.17 é apresentado o gráfico da variação do FIT para análise efetuada, a partir da dimensão  $a \cong 15,7$  mm, bem como os resultados correspondentes obtidos por DIAS (2006). Observou-se uma diferença média de 14,1% entre os valores do FIT.

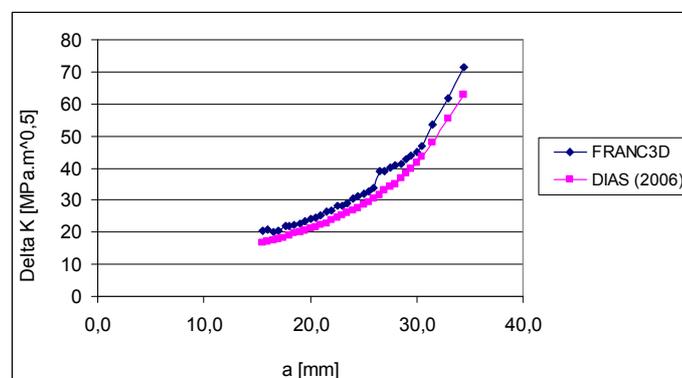


FIGURA 4.17 – Gráfico de  $\Delta K$  versus  $a$  para os modelos MEC/FRANC3D e DIAS (2006).

DIAS (2006) registrou a taxa de propagação de trinca  $da/dN$  a partir de  $\Delta K \cong 16,74 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ , que corresponde a dimensão  $a \cong 15,7$  mm. Na FIGURA 4.18 é apresentado o gráfico da taxa de propagação de trinca para as duas análises, e os valores baseados no modelo MEC/FRANC3D encontram-se dentro do campo de resultados apresentados por DIAS (2006). Os resultados para as duas análises são apresentados na

TABELA 4.6, e os valores da taxa de propagação de trinca  $da/dN$  correspondem à região II, representada na FIGURA 2.8. Os valores de  $da/dN$  apresentados a partir dos resultados obtidos por DIAS (2006) correspondem à média de  $da/dN$  dos três corpos de prova (CP1, CP2 e CP3).

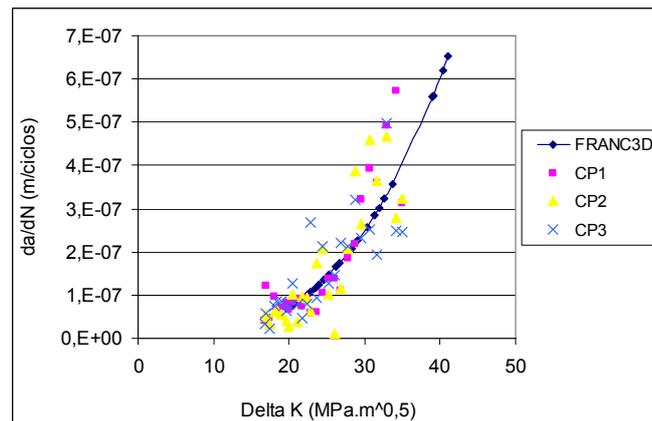


FIGURA 4.18 – Gráfico de  $da/dN$  versus  $\Delta K$  para os modelos MEC/FRANC3D e DIAS (2006) (CP1, CP2 e CP3).

Comparando-se o número de ciclos para se atingir o tamanho crítico de trinca, observa-se que o valor numérico é 2,05 vezes menor que o valor experimental. Para avaliar a possibilidade de erro de integração numérica no cálculo de  $N_f$ , aumentou-se o número de incrementos de trinca para a propagação da trinca. De fato, foram criados sub-incrementos para posições de frente de trinca entre as posições consideradas na primeira análise. A partir dos valores de  $K_{Imin}$  e  $K_{Imax}$  determinados por meio do MEC/FRANC3D, apresentados na TABELA 4.6, foram determinados novos valores dos FIT (máximo e mínimo) por meio da interpolação, referentes aos sub-incrementos correspondentes às novas posições de frente de trinca. Os novos sub-incrementos de trinca foram considerados iguais a 0,1 mm, totalizando 166 posições distintas de frentes de trinca, até atingir a dimensão  $a = 34,5$  mm. Na TABELA 4.7 são apresentados os novos valores interpolados de  $K_{Imin}$  e  $K_{Imax}$ , para algumas posições da frente de trinca no início e no final do processo de propagação, além dos respectivos valores de  $da/dN$  e  $N$ , a partir da dimensão  $a = 15,5$  mm. A tabela completa encontra-se no Anexo A.

Uma nova análise com base nas posições intermediárias da frente de trinca levou  $N_f = 9,495 \times 10^5$  ciclos para se atingir o tamanho crítico de trinca, a partir da dimensão  $a = 15,5$  mm, utilizando-se o algoritmo de BANNANTINE et al. (1990), com base na Lei da Paris. Observa-se que este valor é apenas 0,12% superior ao obtido na primeira análise ( $N_f = 9,483 \times 10^5$  ciclos).

TABELA 4.7 – Fatores de intensidade de tensão interpolados, taxa de propagação de trinca e número de ciclos.

<b>a</b>	<b><math>K_{I\max}</math></b>	<b><math>K_{I\min}</math></b>	<b><math>\Delta K</math></b>	<b>da/dN</b>	<b>N</b>
mm	MPa $\sqrt{m}$	MPa $\sqrt{m}$	MPa $\sqrt{m}$	m/ciclos	ciclos
15,5	29,460	8,819	20,641	7,89E-08	7,086E+03
15,6	29,459	8,815	20,643	7,89E-08	8,353E+03
15,7	29,457	8,812	20,646	7,90E-08	9,620E+03
15,8	29,456	8,808	20,648	7,90E-08	1,089E+04
15,9	29,455	8,804	20,651	7,90E-08	1,215E+04
16,0	29,454	8,800	20,653	7,90E-08	1,342E+04
...	...	...	...	...	...
30,5	67,059	20,097	46,962	9,89E-07	9,265E+04
30,6	68,029	20,388	47,641	1,03E-06	9,275E+04
30,7	69,000	20,679	48,321	1,08E-06	9,285E+04
30,8	69,971	20,970	49,001	1,13E-06	9,294E+04
30,9	70,941	21,261	49,681	1,18E-06	9,302E+04
31,5	76,765	23,006	53,759	1,50E-06	9,347E+04
31,6	77,522	23,233	54,289	1,54E-06	9,354E+04
31,7	78,279	23,460	54,819	1,59E-06	9,360E+04
31,8	79,036	23,687	55,349	1,64E-06	9,366E+04
31,9	79,793	23,914	55,879	1,69E-06	9,372E+04
33,0	88,121	26,411	61,710	2,29E-06	9,428E+04
33,1	89,040	26,686	62,354	2,36E-06	9,432E+04
33,2	89,959	26,961	62,997	2,44E-06	9,436E+04
33,3	90,878	27,237	63,641	2,52E-06	9,440E+04
33,4	91,797	27,512	64,285	2,60E-06	9,444E+04
34,5	101,905	30,540	71,365	3,58E-06	9,495E+04

A comparação do número de ciclos acumulados obtido por meio do MEC/FRANC3D em relação aos valores experimentais, mostra que os valores experimentais superam os valores obtidos numericamente, com tendência de aumento da diferença à medida que a trinca se propaga. Uma possível explicação para as diferenças observadas no número de ciclos acumulados durante a propagação é a provável ocorrência do fenômeno de fechamento da trinca, que não foi considerado na análise efetuada numericamente por

meio do MEC/FRANC3D, enquanto na pesquisa experimental desenvolvida por DIAS (2006) este fenômeno foi automaticamente incorporado, contribuindo para o prolongamento da vida do corpo de prova.

Buscando avaliar a possível influência do fenômeno de fechamento de trinca nos resultados obtidos com base na análise numérica, adotou-se a abordagem de fechamento proposta por Elber, conforme Eq. (2-10). No caso, como  $R = 0,3$ , com base na Eq. (2-11), obtém-se  $U = 0,62$ . Refazendo-se o cálculo de  $N_f$  a partir dos valores de  $\Delta K$ , corrigidos por meio de  $U = 0,62$ , obteve-se  $N_f = 4,125 \times 10^5$  ciclos para se atingir o tamanho crítico de trinca, ainda significativamente distinto do valor experimental  $N_f = 1,944 \times 10^5$  ciclos determinado por DIAS (2006).

Após um processo de calibração da modelagem numérica, adotou-se o fator de correção da relação  $U$  proposto por Elber, como  $U = (0,67 + 0,4 \times R) = 0,79$ . Refazendo-se o cálculo de  $N_f$  a partir dos valores de  $\Delta K$ , corrigidos por meio de  $U = 0,79$ , obteve-se  $N_f = 1,958 \times 10^5$  ciclos para se atingir o tamanho crítico de trinca, muito próximo do valor experimental,  $N_f = 1,944 \times 10^5$  ciclos, determinado por DIAS (2006). Na FIGURA 4.19 é apresentado o gráfico do número de ciclos acumulados na propagação a partir da dimensão  $a \cong 15,7$  mm, para a análise efetuada, em comparação com os resultados experimentais apresentados por DIAS (2006).

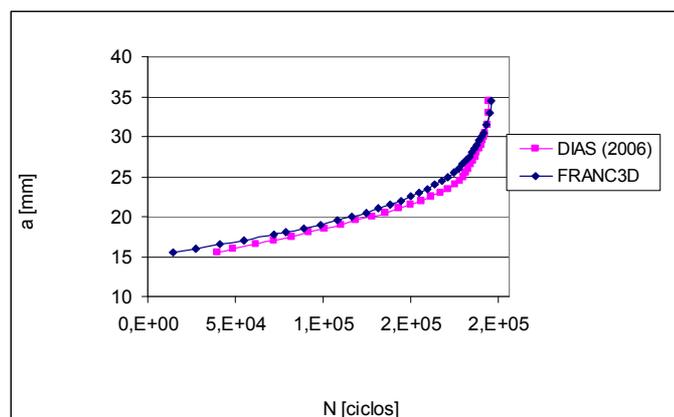


FIGURA 4.19 – Gráfico de  $N$  (número de ciclos) versus  $a$  (comprimento da trinca) para os modelos MEC/FRANC3D e DIAS (2006).

### 4.3 Caso analisado - eixo de mandril

Apresenta-se a análise do eixo de mandril, que faz parte da desbobinadeira da linha de recozimento contínuo, responsável pela produção do aço silício GNO (Grão Não Orientado), da empresa ArcelorMittal Inox Brasil. O aço GNO tem ampla aplicação na fabricação de núcleos de geradores e motores elétricos. Esta linha promove a decarbonetação e a recristalização do aço GNO através da passagem em forno elétrico contínuo com atmosfera controlada. Após a passagem no forno são desenvolvidas propriedades magnéticas na tira, que pode ser ainda revestida com camada isolante, dependendo da aplicação. O eixo em estudo foi projetado no ano de 1990 para sustentar bobinas de 22,5 toneladas e transmitir o torque proveniente do acionamento. No ano de 1994, o eixo passou a ser utilizado com bobinas de 30 toneladas. Após 11 anos e 8 meses em operação, a partir de 1990, ocorreu a fratura em uma seção transversal com rasgo de chaveta em 2001, representada na FIGURA 2.17.

O eixo de mandril, ilustrado na FIGURA 4.20 por meio de uma vista longitudinal, possui 3.194 mm de comprimento, sendo que um trecho de 1.425 mm encontra-se em balanço. É apoiado sobre dois mancais distanciados de 1.100 mm, destinando-se a suportar na extremidade em balanço, uma bobina de 30 toneladas, que é desenrolada no processo de desbobinamento a 3,6 rotações por minuto (rpm). O eixo é constituído de aço SAE 4140, com resistência ao escoamento  $f_y = 655$  MPa, resistência última  $f_u = 981$  MPa, módulo de elasticidade  $E = 210.000$  MPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Para mais detalhes referentes às dimensões do eixo, ver o Anexo A.

Na FIGURA 4.20,  $Q$  denota o peso da bobina, que varia à medida que ocorre o desbobinamento,  $T$  o momento de torção ao qual o eixo é submetido neste processo, proveniente da força de tração excêntrica, necessária ao processo de desbobinamento,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são as seções transversais nas quais estão situados pontos, onde são calculadas as tensões.

Uma vista de topo do eixo ilustrando o processo de desbobinamento é apresentada FIGURA 4.21.

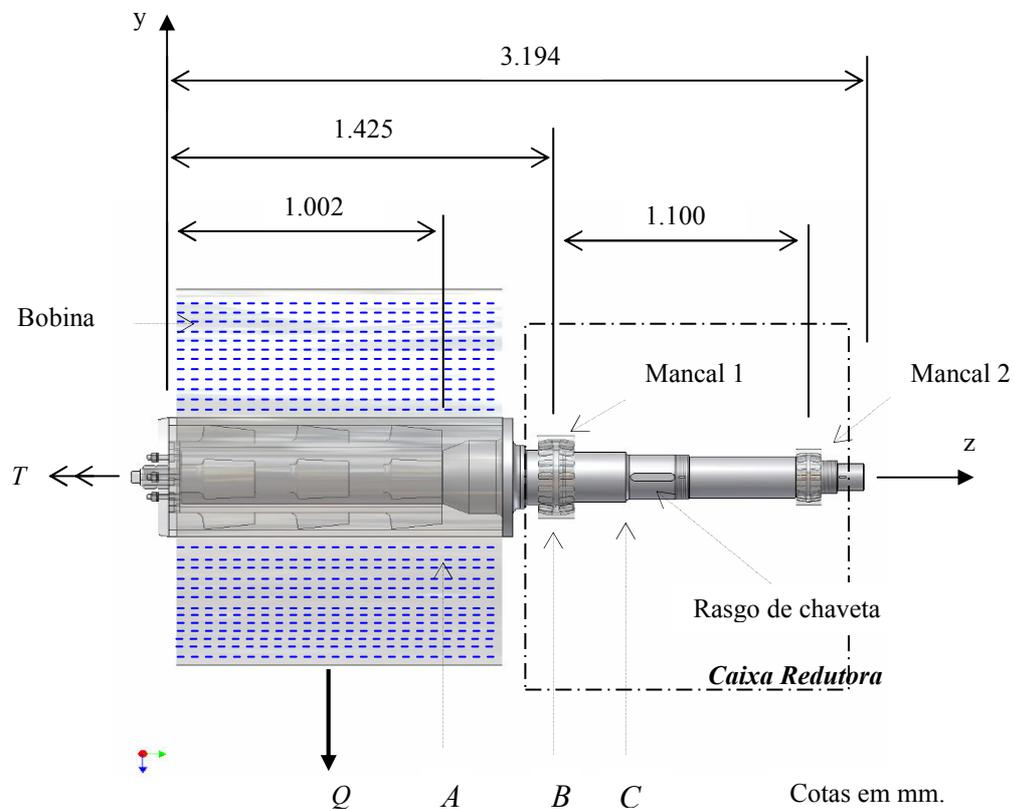


FIGURA 4.20 – Disposição geral dos componentes (plano yz).

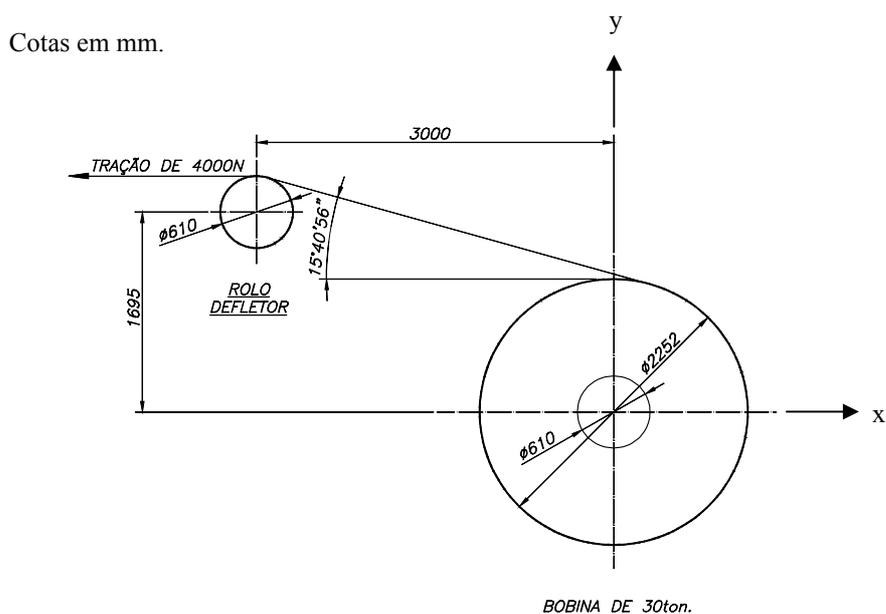


FIGURA 4.21 – Bobina de 30 toneladas em processo de desbobinamento pela ação de uma força de tração de 4 kN (plano  $xy$ ).

O diâmetro externo da bobina cheia é igual a 2.252 mm. O desbobinamento ocorre pela ação de uma força de tração de 4 kN. A tira de aço passa sobre um rolo defletor, cujo eixo encontra-se a 1.695 mm acima do eixo do mandril, formando um ângulo de  $15,7^\circ$  graus com o eixo horizontal.

### 4.3.1 Modelo de viga

O esquema estrutural do eixo do mandril, no plano vertical  $yz$ , considerado como viga biapoiada, está representado na FIGURA 4.22, com o carregamento uniformemente distribuído vertical  $q_y$ , momento de torção uniformemente distribuído  $t$ , e a indicação das seções  $A$ ,  $B$  e  $C$ , e mancais 1 e 3. São consideradas duas situações de carregamento: a primeira, denominada Etapa 1, considera-se o eixo sujeito ao peso próprio e ao peso da bobina, antes de início do processo de desbobinamento; a segunda, denominada Etapa 2, consiste no carregamento correspondente ao processo de desbobinamento.

Na Etapa 1 atua sobre o eixo no plano vertical  $yz$  apenas o carregamento uniformemente distribuído  $q_y$  devido ao peso próprio do eixo e ao peso da bobina.

O carregamento na Etapa 2 consiste de: carregamento uniformemente distribuído no plano vertical  $yz$ ; carregamento uniformemente distribuído no plano horizontal  $xz$ ; momento de torção uniformemente distribuído ao longo do eixo  $t$  devido ao processo de desbobinamento .

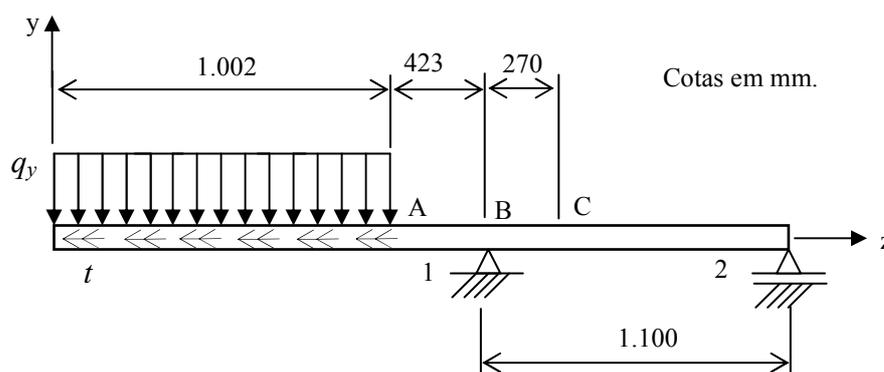


FIGURA 4.22 – Esquema estrutural do eixo no plano  $yz$ .

A carga distribuída no plano vertical  $yz$  é dada por:

$$q_y = q_b + q_e \quad (4-2)$$

onde  $q_y$  é a carga total distribuída na direção  $y$ ,  $q_b$  é a carga distribuída devido ao peso da bobina mais peso próprio do eixo,  $q_e$  é a componente da carga distribuída na direção  $y$ , devida ao esticamento da bobina (força de tração, FIGURA 4.21).

No plano horizontal  $xz$  tem-se o esquema estrutural análogo na FIGURA 4.22, com a carga distribuída na direção  $x$  igual a  $q_x$ , componente horizontal devida ao esticamento da bobina (força de tração, FIGURA 4.21).

Na Etapa 1 tem-se  $q_y = 302,8$  kN/m e na Etapa 2 têm-se  $q_y = 301,7$  kN/m,  $q_x = 3,8$  kN/m e  $t = 11,6$  kN×m/m.

Na TABELA 4.8 são apresentados os esforços solicitantes nas seções  $A$ ,  $B$  e  $C$  da Etapa 1 considerando o modelo de viga, enquanto na TABELA 4.9 são mostrados os esforços solicitantes nas seções  $A$ ,  $B$  e  $C$  da Etapa 2.

TABELA 4.8 - Esforços solicitantes nas seções  $A$ ,  $B$  e  $C$  da Etapa 1 – Modelo de Viga  
(Fonte: Anexo B).

Seção	$M_x$ (kN×m)	$M_y$ (kN×m)	$T$ (kN×m)	$V_x$ (kN)	$V_y$ (kN)	$K_f$
$A$	152,0	0	0	0	303,4	1,14
$B$	281,0	0	0	0	306,6	2,74
$C$	211,4	0	0	0	258,1	3,75

Nas TABELA 4.8 e TABELA 4.9,  $K_f$  denota o fator de concentração de tensão devido à variação do diâmetro do eixo e o respectivo raio de concordância usado nesta transição, representado no Anexo B. Na TABELA 4.10 são apresentadas às tensões calculadas nas seções  $A$ ,  $B$  e  $C$  da Etapa 1, considerando o eixo como viga.

TABELA 4.9 - Esforços solicitantes nas seções *A*, *B* e *C* da Etapa 2 – Modelo de Viga.

Seção	$M_x$ (kN×m)	$M_y$ (kN×m)	$T$ (kN×m)	$V_x$ (kN)	$V_y$ (kN)	$K_f$
<i>A</i>	151,5	1,9	4,5	3,8	302,3	1,14
<i>B</i>	280,0	3,6	4,5	3,8	305,6	2,74
<i>C</i>	210,6	2,7	4,5	3,2	257,1	3,75

TABELA 4.10 - Resultados das tensões calculadas nas seções *A*, *B* e *C* da Etapa 1

(Fonte: Anexo B).

Ponto de coordenadas ( <i>x</i> , <i>y</i> , <i>z</i> ) <sub>seção</sub> mm	$\sigma_{zz}$ [MPa]	$\tau_{zx}$ [MPa]	$\tau_{zy}$ [MPa]	Tensão equivalente de von Mises [MPa]
(0; 127; 1.002) <sub>A</sub>	110,1	0,0	0,0	110,1
(127;0;1.002) <sub>A</sub>	0,0	0,0	12,7	21,9
(0; 165; 1.425) <sub>B</sub>	220,2	0,0	0,0	220,2
(165; 0; 1.425) <sub>B</sub>	0,0	0,0	6,7	11,6
(31,5; 121; 1.695) <sub>C</sub>	337,4	0,0	0,0	337,4
(141; 0; 1.695) <sub>C</sub>	0,0	0,0	16,6	28,7

Nota: as tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\tau_{xy}$  são iguais a zero.

Na TABELA 4.11 são apresentados os resultados das tensões nas seções *A*, *B* e *C* do eixo na Etapa 2, também calculadas com base no modelo de viga.

TABELA 4.11 - Resultados das tensões calculadas nas seções *A*, *B* e *C* da Etapa 2

(Fonte: Anexo B).

Ponto de coordenadas ( <i>x</i> , <i>y</i> , <i>z</i> ) <sub>seção</sub> mm	$\sigma_{zz}$ [MPa]	$\tau_{zx}$ [MPa]	$\tau_{zy}$ [MPa]	Tensão equivalente de von Mises [MPa]
(0; 127; 1.002) <sub>A</sub>	109,7	1,7	0,0	109,8
(127; 0; 1.002) <sub>A</sub>	1,4	0,0	14,1	24,5
(0; 165; 1.425) <sub>B</sub>	219,4	0,7	0,0	219,4
(165; 0; 1.425) <sub>B</sub>	2,8	0,0	7,4	13,0
(31,5; 121; 1.695) <sub>C</sub>	336,2	1,2	0,0	336,2

(141; 0; 1.695) <sub>C</sub>	4,6	0,0	9,3	16,8
------------------------------	-----	-----	-----	------

Nota: as tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\tau_{xy}$  são iguais a zero.

### 4.3.2 Método numérico – análise global sem trincas em 3D

#### 4.3.2.1 Análise MEF / ANSYS

O eixo de mandril representado na FIGURA 4.23 é analisado por meio do MEF utilizando-se o programa computacional ANSYS versão 11.0. Adota-se análise tridimensional estática, considerando-se os carregamentos descritos anteriormente para as Etapa 1 e Etapa 2.

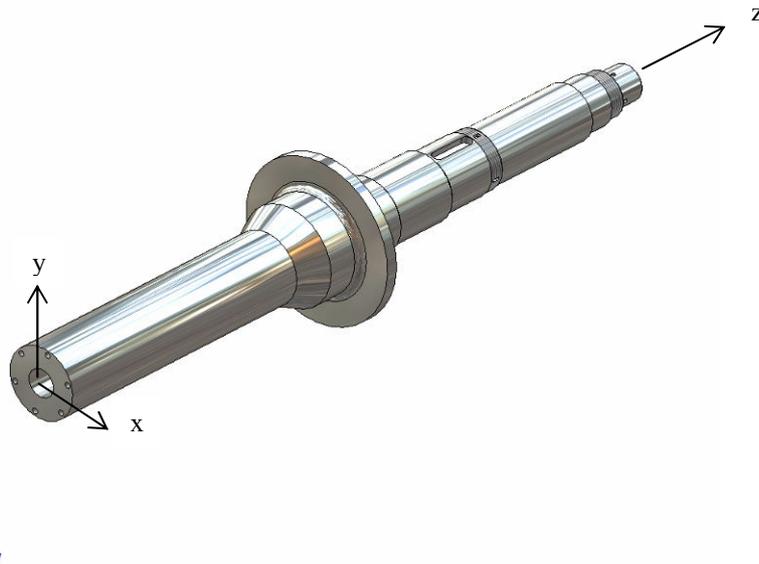


FIGURA 4.23 – Eixo de mandril.

A modelagem é realizada utilizando-se o elemento tridimensional SOLID45, e a malha do modelo é composta de 217.675 elementos e 43.226 nós.

Na Etapa 1, o carregamento consiste no peso da bobina, atuando no trecho de 1.002 mm, conforme FIGURA 4.22, porém nesta análise é aplicado como forças de superfície, enquanto o peso próprio do eixo é aplicado como força distribuída no volume, atuando na direção vertical (direção  $y$ ). Assim aplica-se uma pressão  $p_1$

(1,19 MPa) na superfície cilíndrica do eixo, tal como indicado na FIGURA 4.24a, representando o peso da bobina, que corresponde ao carregamento distribuído  $q_y$  do modelo de viga na Etapa 1.

Os carregamentos na Etapa 2, decorrentes do processo de desbobinamento, atuam no trecho de 1.002 mm conforme FIGURA 4.22 e são aplicados como forças de superfície, enquanto o peso próprio do eixo é considerado como força de volume na direção vertical (direção  $y$ ). O peso da bobina combinado com a componente vertical da força de esticamento da bobina é representado pela pressão  $p_1$  (1,18 MPa) aplicada na superfície cilíndrica do eixo, tal como indicado na FIGURA 4.24a, que corresponde ao carregamento distribuído  $q_y$  do modelo de viga na Etapa 2. A componente horizontal da força de esticamento é considerada como uma pressão  $p_2$  (0,015 MPa) na análise tridimensional baseada no MEF/ANSYS, conforme FIGURA 4.24b, correspondendo à carga distribuída  $q_x$  do modelo de viga. O momento torçor  $t$  (4,5 kN×m/m) é introduzido por meio de dois binários de forças constantes distribuídas ao longo de linhas na superfície do eixo do mandril, paralelas à direção  $z$ , como ilustrado na FIGURA 4.24c, atuando no intervalo  $476 \text{ mm} < z < 863 \text{ mm}$ . O intervalo mencionado indica a região de posicionamento da chaveta que liga o eixo de mandril à luva com rampas inclinadas, que por sua vez é interligada aos segmentos que estão em contato direto com o diâmetro interno das bobinas, representados na FIGURA 2.14.

Na posição do mancal 1 (FIGURA 4.20), na superfície cilíndrica externa do eixo no intervalo  $1.425 \text{ mm} < z < 1.574 \text{ mm}$ , são colocadas restrições aos deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , enquanto no mancal 2 (FIGURA 4.20), na superfície externa do eixo no intervalo  $2.520 \text{ mm} < z < 2.679 \text{ mm}$ , restringem-se os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ . As restrições consideradas são ilustradas na FIGURA 4.25. A restrição à rotação em torno do eixo  $z$  é considerada por meio de vinculação de pontos na face do rasgo da chaveta, tal como mostrado na FIGURA 4.25c. As restrições ao deslocamento e rotação especificadas acima foram adotadas tanto para o carregamento da Etapa 1 quanto da Etapa 2.

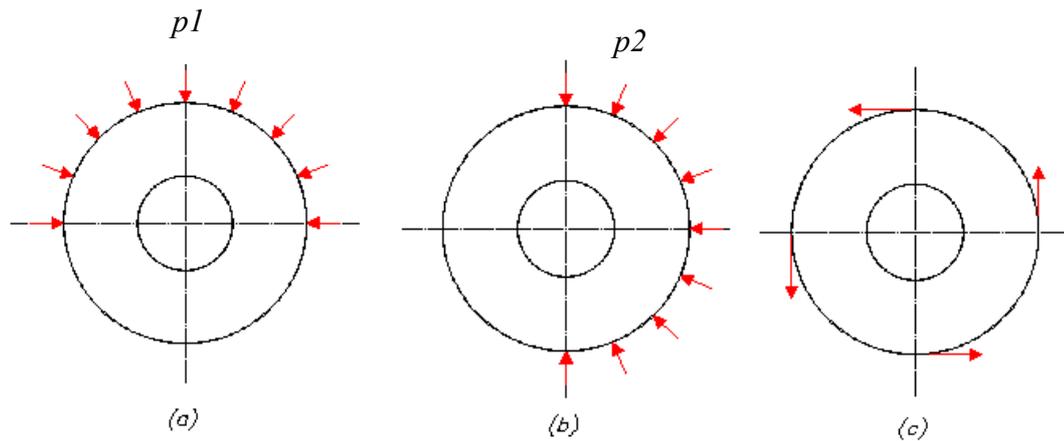


FIGURA 4.24 – Carregamentos atuantes na extremidade do eixo do mandril: (a) vertical; (b) horizontal; (c) conjugado de forças, representando o torque.

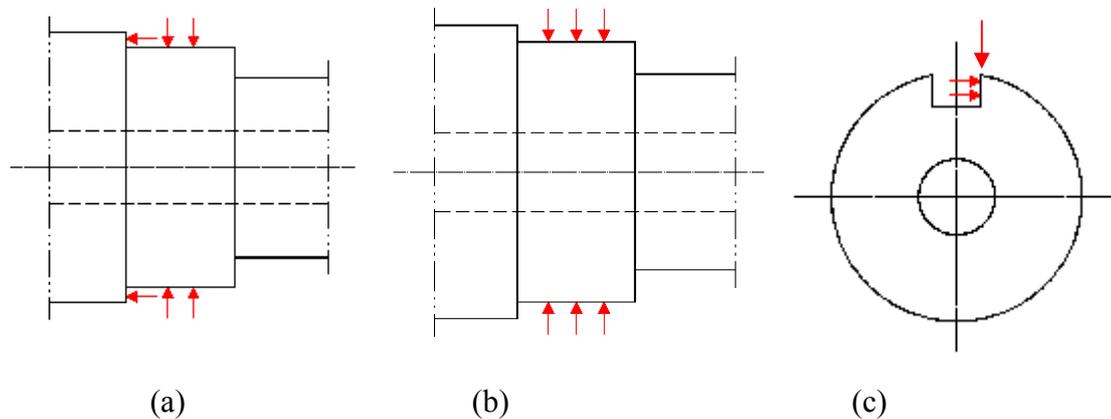


FIGURA 4.25 – Restrições ao deslocamento atuantes no eixo do mandril: (a) mancal 1; (b) mancal 2; (c) rasgo de chaveta.

A malha adotada para representar o eixo do mandril passou por um estudo de convergência, com base em resultados no ponto de coordenadas (0; 127; 1.002) mm situado na seção *A*, considerando carregamento da Etapa 2, conforme TABELA 4.12. A malha 3 foi a escolhida por ter apresentado uma diferença de apenas 0,8% na tensão equivalente de von Mises em comparação com a malha 2, e coincidência de deslocamentos na direção *y*.

Na TABELA 4.13 apresentam-se os resultados das tensões obtidas através modelo de viga e da análise MEF/ ANSYS, para pontos na seção *A*, considerando o carregamento da Etapa 1.

TABELA 4.12 – Estudo de convergência na seção *A* para refinamento da malha, no ponto de coordenada (0; 127; 1.002) mm da Etapa 2.

Malha	Deslocamento da coordenada (0; -127; 0) mm	$\sigma_{zz}$ [MPa]	$\tau_{zy}$ [MPa]	Tensão equivalente de von Mises [MPa]	Von Mises – percentual de diferenças (%)	Número de elementos	Número de nós
1	1,95	94,5	10,4	87,2	-	89.887	19.548
2	1,99	118,5	25,1	107,8	23,6	156.337	32.018
3	1,99	119,1	25,2	108,7	0,8	217.675	43.226

TABELA 4.13 – Resultados das tensões obtidas através do método de viga e do programa ANSYS, na seção *A* da Etapa 1.

Ponto de coordenadas (x, y, z) <sub>seção</sub> mm	Tensão equivalente de von Mises [MPa]	Modelo
(0; 127; 1.002) <sub>A</sub>	110,1	Viga
(0; 127; 1.002) <sub>A</sub>	108,7	MEF/ANSYS
(127; 0; 1.002) <sub>A</sub>	21,9	Viga
(127; 0; 1.002) <sub>A</sub>	10,5	MEF/ANSYS

Na FIGURA 4.26 apresentam-se, para a Etapa 2 de carregamento, os resultados da análise tridimensional do eixo de mandril em termos de deslocamentos na direção *y*, cujo valor máximo é 1,99 mm. A flecha máxima obtida por meio do modelo de viga é 1,64 mm.

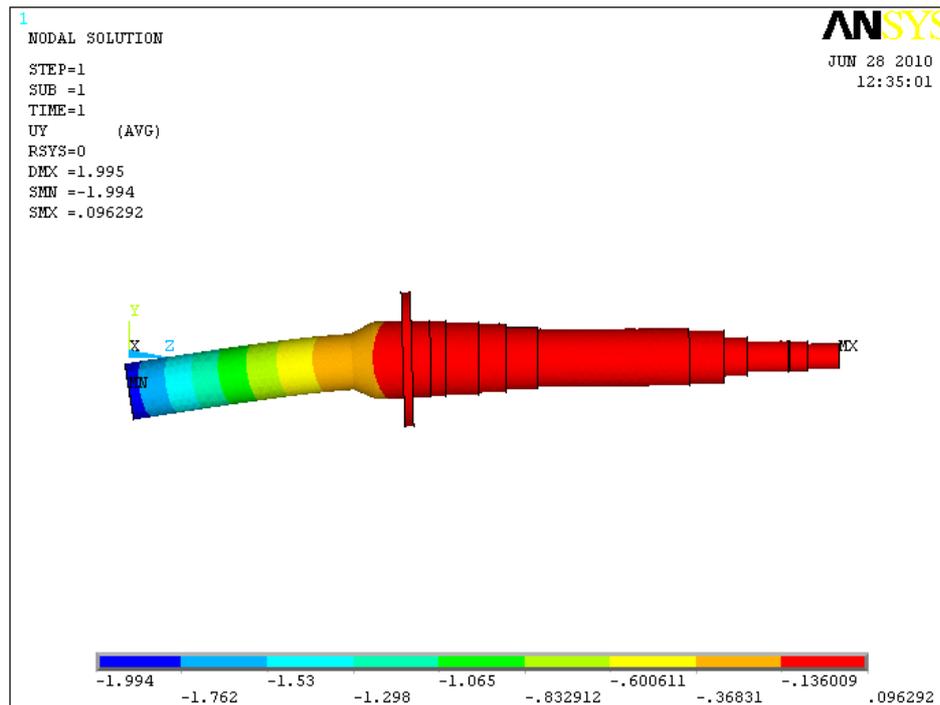


FIGURA 4.26 – Análise MEF/ANSYS – Deslocamento na direção  $y$  – Etapa 2.

Na FIGURA 4.27 são ilustrados os resultados da análise tridimensional do eixo de mandril, em termos de tensão equivalente de von Mises. Visando o melhor detalhamento de resultados, o eixo foi dividido em trechos incorporando as seções  $A$ ,  $B$  e  $C$ , tendo os resultados sido apresentados nas FIGURA 4.28, FIGURA 4.29 e FIGURA 4.30, respectivamente.

Na TABELA 4.14 são apresentados os resultados de tensões obtidas através do modelo de viga e do MEF/ANSYS, para pontos situados nas seções  $A$  e  $C$  para a Etapa 2 de carregamento.

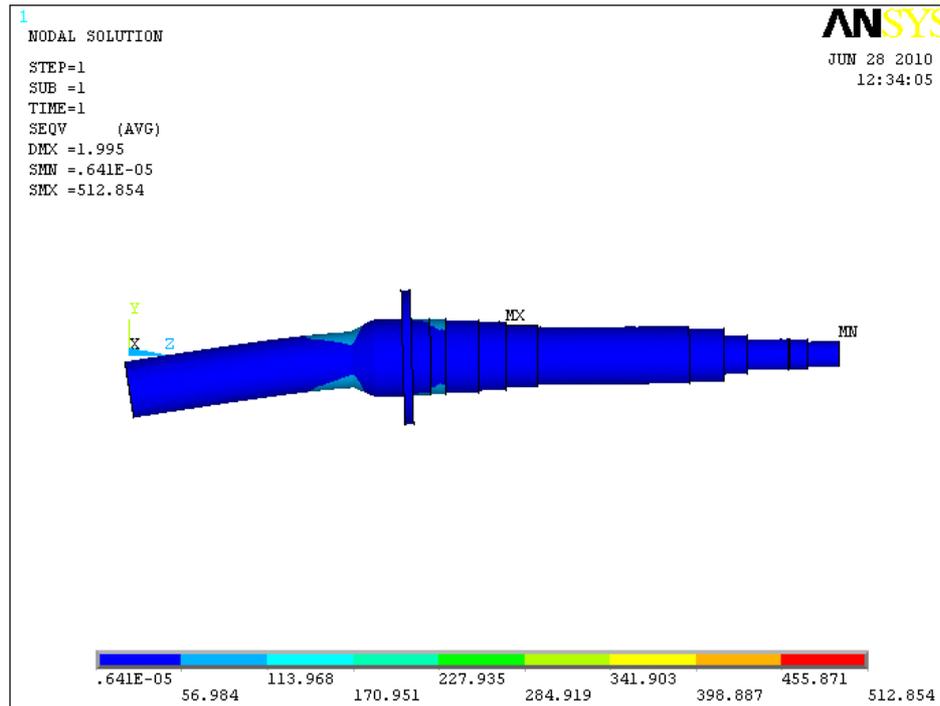


FIGURA 4.27 – Análise MEF/ANSYS – Tensão equivalente de von Mises no eixo de mandril – Etapa 2.

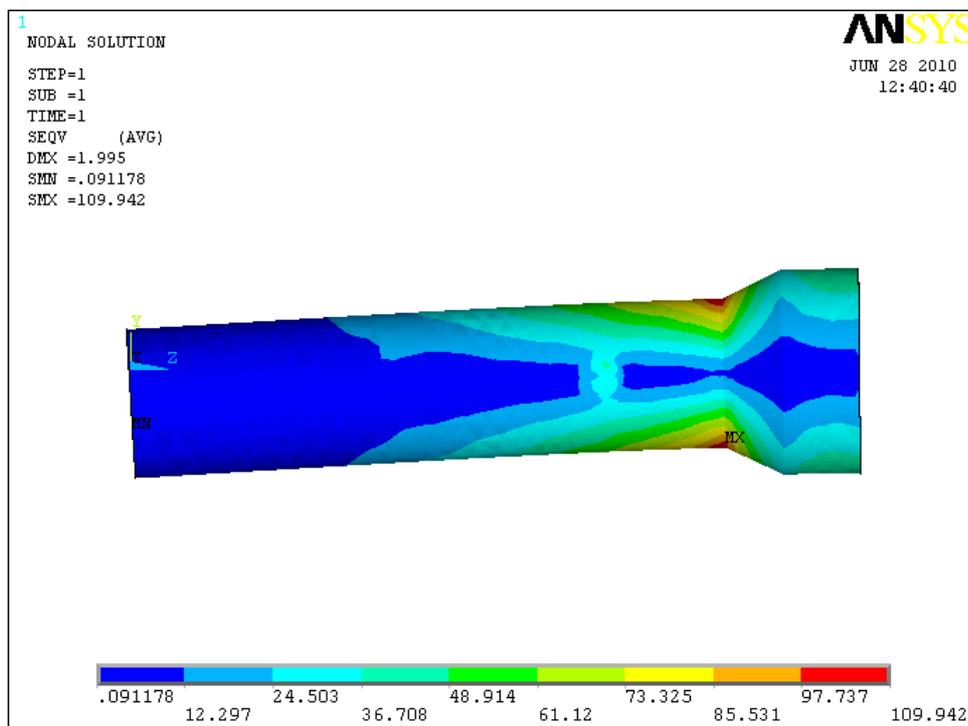


FIGURA 4.28 – Análise MEF/ANSYS – Tensão equivalente de von Mises no trecho contendo a seção A – Etapa 2.

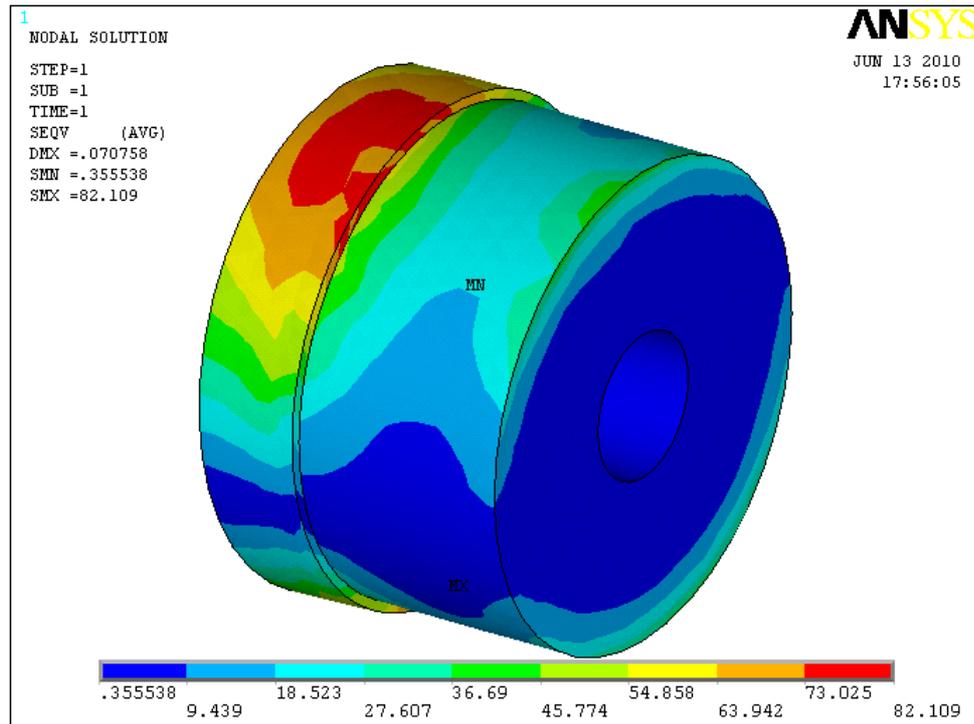


FIGURA 4.29 – Análise MEF/ANSYS – Tensão equivalente de von Mises no trecho contendo a seção *B* – Etapa 2.

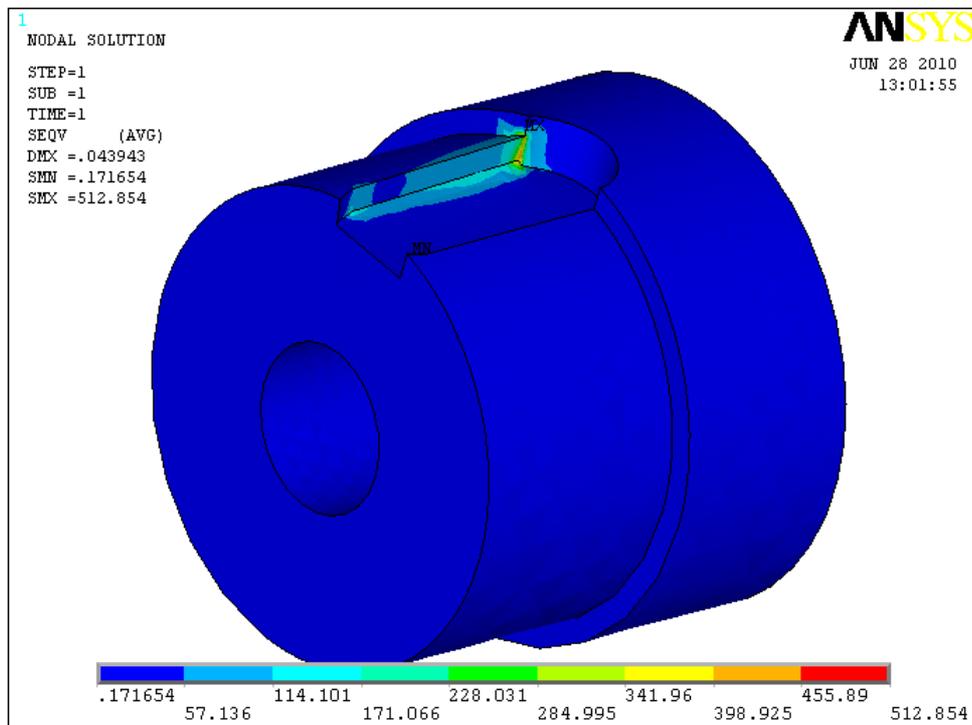


FIGURA 4.30 – Análise MEF/ANSYS – Tensão equivalente de von Mises no trecho contendo a seção *C* – Etapa 2.

TABELA 4.14 – Resultados das tensões obtidas através do modelo de viga e análise MEF/ANSYS, nas seções *A* e *C* da Etapa 2.

Ponto de coordenadas $(x, y, z)_{\text{seção}}$ mm	Tensão equivalente de von Mises [MPa]	Modelo
$(0; 127; 1.002)_A$	109,8	Viga
$(0; 127; 1.002)_A$	108,7	MEF/ANSYS
$(127; 0; 1.002)_A$	24,5	Viga
$(127; 0; 1.002)_A$	10,5	MEF/ANSYS
$(31,5; 121; 1.695)_C$	336,2	Viga
$(31,5; 121; 1.695)_C$	389,9	MEF/ANSYS

#### 4.3.2.2 Análise MEC / FRANC3D

Efetuu-se também a análise tridimensional do trecho do eixo de mandril que contém a seção *A*, conforme a FIGURA 4.20, utilizando-se o MEC por meio do programa FRANC3D versão F3D. Adota-se o mesmo carregamento da Etapa 2 descrito para o modelo baseado no MEF/ANSYS.

A região do eixo que contém a seção *A* foi modelada no programa MEC/FRANC3D com as mesmas dimensões do modelo desenvolvido por meio do MEF/ANSYS, de modo que as posições dos nós coincidem em ambos os modelos, na seção de corte apresentada na FIGURA 4.31. Esta figura ilustra o modelo gerado no MEC/ANSYS e o modelo gerado no MEC/FRANC3D, com dezesseis nós. No modelo MEC/FRANC3D, como condição de contorno na seção de corte, impõem-se os valores de deslocamentos obtidos por meio do MEF/ANSYS, nas direções *x*, *y* e *z*, nos dezesseis nós mencionados.

Tal como na análise MEF/ANSYS considerando Etapa 2, aplica-se uma pressão  $p_1$  (1,18 MPa) na superfície cilíndrica do eixo, tal como indicado na FIGURA 4.32a, e uma pressão  $p_2$  (0,015 MPa), conforme FIGURA 4.32b. O momento torçor  $t$  (4,5 kN×m/m) do modelo de viga é introduzido por meio de dois binários de forças constantes

distribuídas ao longo de linhas na superfície do eixo, paralelas ao eixo  $z$ , como apresentado na FIGURA 4.32c, atuando no intervalo  $476 \text{ mm} < z < 863 \text{ mm}$ .

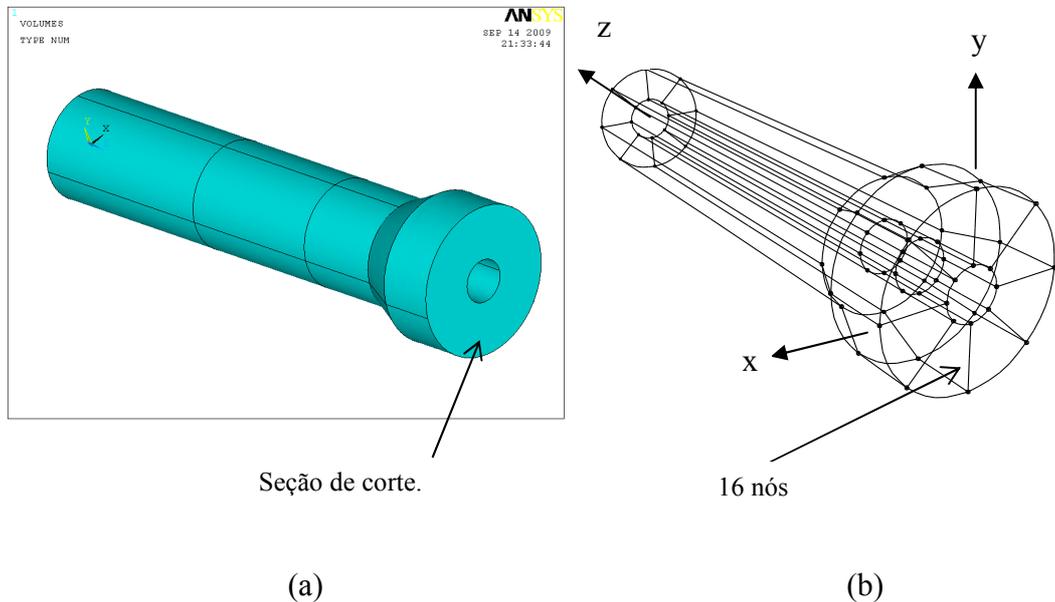


FIGURA 4.31 – Detalhe do trecho selecionado: (a) modelo gerado no ANSYS; (b) modelo gerado no FRANC3D.

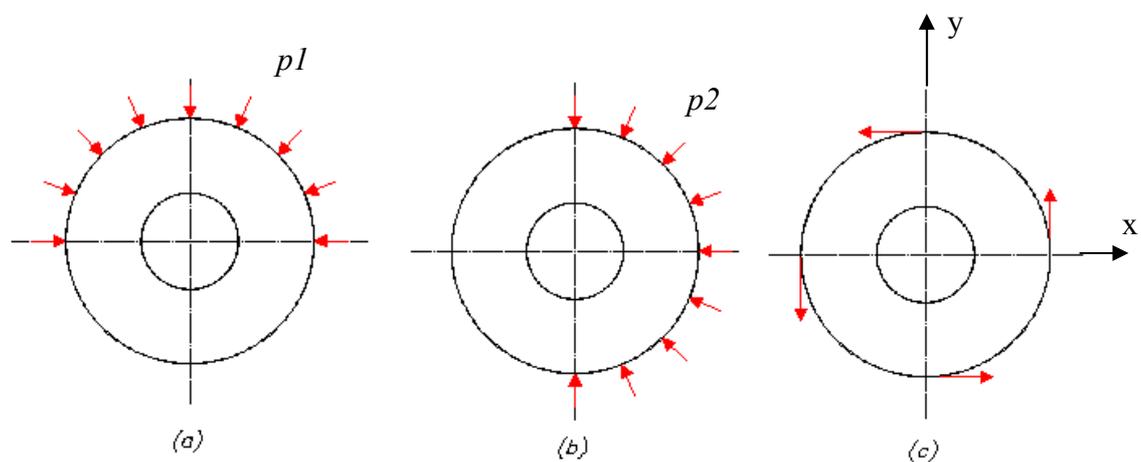


FIGURA 4.32 – Carregamento atuante superfície do eixo do mandril – Etapa 2: (a) pressão  $p_1$ ; (b) pressão  $p_2$ ; (c) conjugado de forças, representando o torque.

A malha adotada para representar o modelo do eixo do mandril passou por um estudo de convergência, conforme TABELA 4.15, considerando-se os resultados no ponto de coordenadas  $(0; 127; 1.002) \text{ mm}$  da seção  $A$  para o carregamento da Etapa 2. A malha 2 foi a escolhida devido a aproximação entre os valores das tensões equivalentes de von

Mises ao se comparar com o modelo de viga, e a redução do tempo de processamento dos dados no computador em até 4 vezes em comparação ao tempo exigido para a malha 3. O elemento de contorno utilizado é do tipo quadrilateral.

TABELA 4.15 – Estudo de convergência com base nos resultados de um ponto na seção *A* da Etapa 2.

<b>Malha</b>	<b>Deslocamento do ponto de coordenada (0;-127;0)* mm</b>	<b><math>\sigma_{zz}</math> [MPa]</b>	<b><math>\tau_{zy}</math> [MPa]</b>	<b>Tensão equivalente de von Mises [MPa]</b>	<b>Número de nós</b>
1	-1,8	107,9	-23,9	112,9	1.319
2	-2,0	115,0	-26,9	120,2	2.420
3	-2,1	126,2	-12,9	127,1	3.090

\* Coordenada conforme a FIGURA 4.22.

Na FIGURA 4.33 são ilustrados os resultados da análise tridimensional do trecho da seção *A* em termos de deslocamentos na direção *y*, cujo valor máximo é 1,77 mm.

Na FIGURA 4.34 são ilustrados os resultados da análise tridimensional baseada no MEC/FRANC3D para o trecho *A* em termos de tensão equivalente de von Mises. Na figura da esquerda tem-se uma visão completa do modelo, no plano *yz*, e na figura da direita tem-se uma ampliação da região de maior tensão atuante, no plano *xz*.

Na TABELA 4.16 apresentam-se os resultados das tensões obtidas por meio dos modelos de viga, MEC/FRANC3D e MEF/ANSYS, na seção *A* para carregamento da Etapa 2.

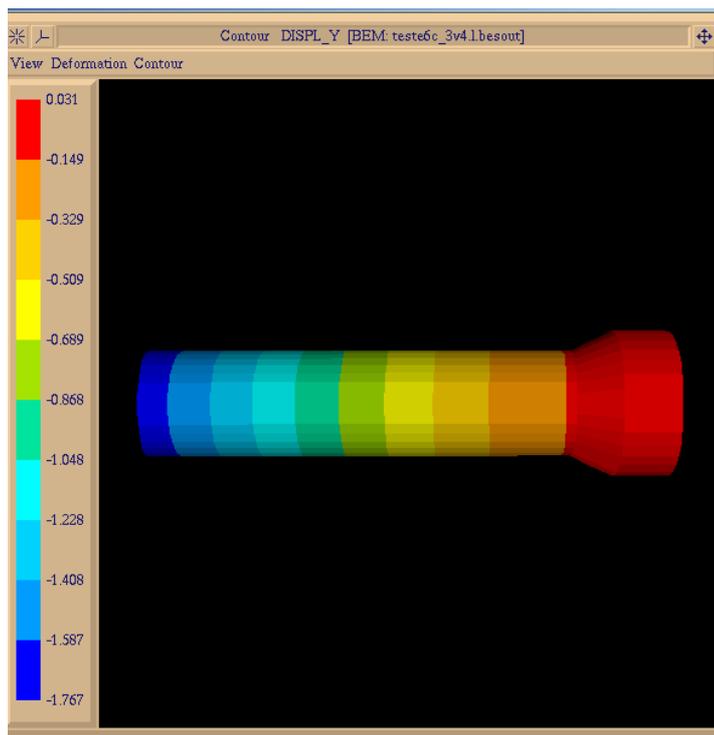


FIGURA 4.33 – Análise MEC/FRANC3D – Deslocamento na direção  $y$  – Etapa 2.

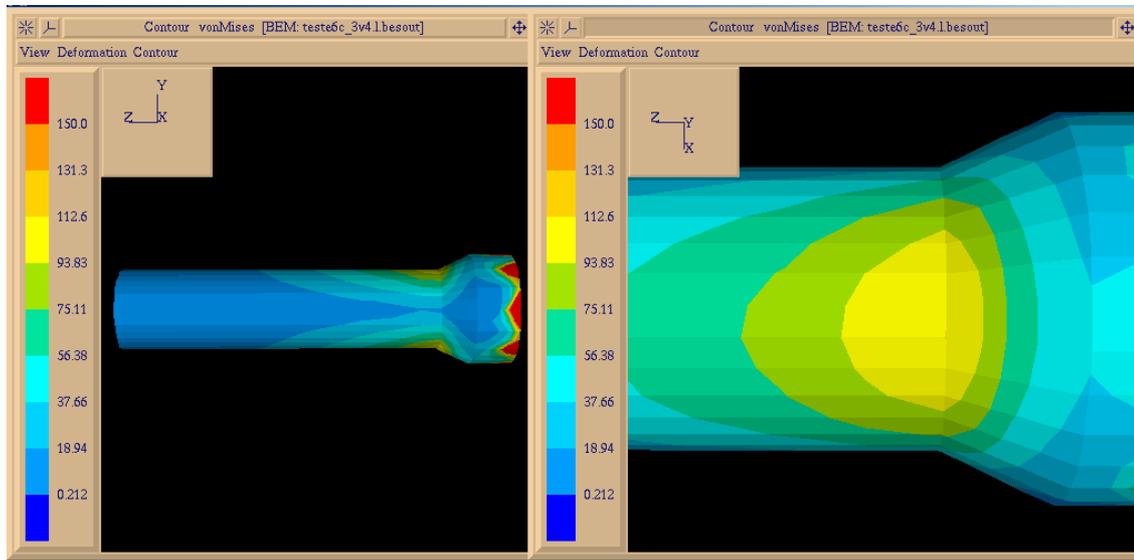


FIGURA 4.34 – Análise MEC/FRANC3D – Tensão equivalente de von Mises no trecho que contém a seção  $A$  – Etapa 2.

TABELA 4.16 – Resultados das tensões obtidos através dos modelos de viga, MEF/ANSYS e MEC/FRANC3D, na seção *A* da Etapa 2.

Ponto de coordenadas (x, y, z) mm	$\sigma_{zz}$ [MPa]	Tensão equivalente de von Mises [MPa]	Modelo
(0; 127; 1.002)	109,7	109,8	Viga
(0; 127; 1.002)	119,1	108,7	MEF/ANSYS
(0; 127; 1.002)	107,9	112,9	MEC/FRANC3D
(127; 0; 1.002)	1,4	24,5	Viga
(127; 0; 1.002)	1,8	10,6	MEF/ANSYS
(127; 0; 1.002)	3,5	16,2	MEC/FRANC3D

A comparação dos valores da tensão equivalente de von Mises obtidas pelos três modelos mostra diferenças de 1,0%, 2,8% e 3,9%, quando se comparam modelo de Viga e o modelo MEF/ANSYS, Viga e MEC/FRANC3D, MEF/ANSYS e MEC/FRANC3D, respectivamente, no ponto de coordenadas (0; 127; 1.002).

Neste trabalho, estuda-se a propagação de uma trinca com frente semi-circular que supostamente se inicia no ponto de coordenadas (0; 127; 1.002).

#### 4.3.2.3 Verificação da resistência à fadiga do eixo de mandril com base na norma DIN 743-1

O eixo de mandril submetido ao carregamento descrito anteriormente foi avaliado segundo a norma DIN 743-1 (*Shafts and axles, calculation of load capacity – part 1: general basis*), para cálculo da capacidade de carga de eixos. Segundo esta norma, a avaliação pode ocorrer em função da resistência à fadiga, quando é definido o coeficiente de segurança descrito na Eq. (4-3), ou resistência à carga máxima.

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{zda}}{\sigma_{zADK}} + \frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{bADK}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ta}}{\tau_{tADK}}\right)^2}} \quad (4-3)$$

onde  $S$  é o coeficiente de segurança,  $\sigma_{zda}$  é a amplitude de tensão devido à tração ou compressão,  $\sigma_{ba}$  é a amplitude de tensão devido à flexão,  $\tau_{ta}$  é a amplitude de tensão

devido ao cisalhamento,  $\sigma_{zdADK}$  é a amplitude de tensão permissível devido à tração ou compressão,  $\sigma_{bADK}$  é a amplitude de tensão permissível devido à flexão,  $\tau_{ADK}$  é a amplitude de tensão permissível devido ao cisalhamento. Para atender as exigências de segurança, a DIN 743-1 recomenda um coeficiente de segurança igual ou maior que 1,2.

Para a avaliação do eixo de mandril mencionado neste trabalho, calculou-se o coeficiente de segurança em função da resistência à fadiga segundo a DIN 743-1, baseado nas tensões decorrentes dos carregamentos descritos na Etapa 1 e Etapa 2. A obtenção do coeficiente de segurança, representada no Anexo D, foi realizada através do programa computacional de cálculo para projeto de máquinas KISSsoft, versão de abril de 2006, que segue as orientações da DIN 743-1. O KISSsoft possui em seu banco de dados materiais utilizados na confecção de eixos, e dentre a relação de materiais o aço 42CrMo4 foi o escolhido por ser equivalente ao aço SAE 4140, conforme OTTO e SCHÄNING (1979).

Na TABELA 4.17 são apresentados os resultados das tensões e coeficientes de segurança obtidos através da norma DIN 743-1 em termos de resistência à fadiga, em pontos situados nas seções *A*, *B* e *C* da Etapa 1.

TABELA 4.17 - Resultados das tensões e coeficientes de segurança obtidas através da norma DIN 743-1 em termos de resistência à fadiga, nas seções *A*, *B* e *C* da Etapa 1.

Ponto de coordenadas ( <i>x</i> , <i>y</i> , <i>z</i> ) <sub>seção</sub> mm	$\sigma_{zda}$ [MPa]	$\sigma_{zdADK}$ [MPa]	$\sigma_{ba}$ [MPa]	$\sigma_{bADK}$ [MPa]	$\tau_{ta}$ [MPa]	$\tau_{tADK}$ [MPa]	<i>S</i>
(0; 127; 1.002) <sub>A</sub>	0,0	261,623	97,318	267,647	0,0	167,603	2,7
(0; 165; 1.425) <sub>B</sub>	0,0	89,677	80,459	94,434	0,0	90,283	1,2
(0; 141; 1.695) <sub>C</sub>	0,0	105,883	115,874	105,883	0,0	105,960	0,9

Na TABELA 4.18 são apresentados os resultados das tensões e coeficientes de segurança obtidos através da norma DIN 743-1 em termos de resistência à fadiga, nas seções *A*, *B* e *C* da Etapa 2.

TABELA 4.18 - Resultados das tensões e coeficientes de segurança obtidas através da norma DIN 743-1 em termos de resistência à fadiga, para pontos nas seções *A*, *B* e *C* da Etapa 2.

Ponto de coordenadas $(x, y, z)_{\text{seção}}$ mm	$\sigma_{zda}$ [MPa]	$\sigma_{zdaDK}$ [MPa]	$\sigma_{ba}$ [MPa]	$\sigma_{baDK}$ [MPa]	$\tau_{ta}$ [MPa]	$\tau_{taDK}$ [MPa]	<i>S</i>
(0; 127; 1.002) <sub>A</sub>	0,045	301,500	96,456	267,675	0,0	167,603	2,8
(0; 165; 1.425) <sub>B</sub>	0,025	95,889	79,748	94,436	0,0	90,283	1,2
(0; 141; 1.695) <sub>C</sub>	0,0	105,883	114,850	105,883	0,0	105,960	0,9

Segundo a norma DIN 743-1, as seções *B* e *C* da Etapa 1 e Etapa 2 não alcançaram o coeficiente de segurança mínimo, indicando que o eixo de mandril não atende às exigências de segurança para trabalhar com carregamento especificado.

A comparação dos valores da tensão equivalente de von Mises baseados nos modelos viga e MEF/ANSYS em relação aos valores  $\sigma_{baDK}$  apresentados pela norma DIN 743-1 mostra que a seção *C* não atende ao limite de resistência à fadiga, indicando que o eixo de mandril não atende às exigências de segurança para o carregamento especificado.

### 4.3.3 Consideração de trincas no trecho da seção *A*

#### 4.3.3.1 Cálculo dos fatores de intensidade de tensão usando o MEC/Franc3D

Utilizando-se o MEC/Franc3D, considera-se agora o modelo tridimensional apresentado na seção 4.3.2.2, alterado pela presença de uma trinca semi-circular na seção *A*, com a frente propagando na direção do eixo *y*, paralela ao plano *xy*. São mantidas as mesmas condições de contorno mencionadas na seção 4.3.2.2. O objetivo é o estudo da propagação de trinca no componente de um equipamento industrial, que fraturou em trabalho. Considera-se que a princípio, tendo em conta que a trinca é muito pequena em comparação com as dimensões do eixo, a matriz de rigidez global do MEF não se altera significativamente, permanecendo válida a análise global do eixo com base no MEF/ANSYS. Entretanto, à medida que a trinca se propaga, deverão ser efetuadas

novas análises globais pelo MEF, visando avaliar e incorporar a deterioração da rigidez da peça devido à propagação da trinca.

A trinca inicial tem a forma semi-circular, obtida da biblioteca de trincas do MEC/FRANC3D, com centro no ponto de coordenadas (0; 127; 1.002) mm, posição (0; 0; 180) graus, profundidade inicial  $a$  igual a 1 mm, ângulo entre faces  $\alpha$  de 180°, conforme FIGURA 4.35. São adotados 24 pontos distribuídos uniformemente ao longo da frente de trinca, visando à determinação do fator de intensidade de tensão.

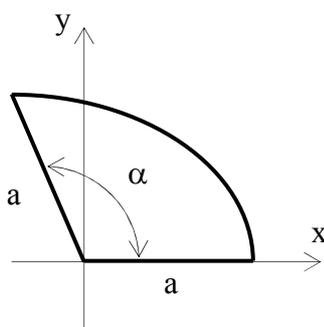


FIGURA 4.35 – Representação da trinca semi-circular.

A propagação da trinca é efetuada conforme o critério de propagação planar (*Planar*) e a extensão dos pontos geométricos de acordo com a potência de  $K_I$  (*power of  $K_I$*  - Eq. (3-5)). Os dez primeiros incrementos de trinca  $\Delta a_{max}$  foram considerados iguais a 1 mm, passando para 3 mm nos dez intervalos seguintes e finalizando com incrementos de 5 mm, e aplicados no ponto nodal da frente onde ocorre  $K_{I_{max}}$ . Os incrementos nos demais pontos da frente são calculados com base na Eq. (3-5), com o parâmetro  $b = 1$ .

A propagação ocorre até que a trinca atinge o tamanho de 77,0 mm, quando a frente atinge a superfície de contorno do furo interno do eixo, conforme FIGURA 4.36. Ao atingir o valor de 77,0 mm, a frente de trinca tangencia a circunferência que delimita o furo interno no eixo, totalizando 37 posições de frente de trinca distintas. A partir deste ponto, haveriam duas frentes de trinca ligando a superfície externa à superfície interna do eixo. A modelagem desta situação não foi possível por meio do MEC/FRANC3D, interrompendo-se então o estudo de propagação da trinca. Segundo TEIXEIRA (2004),

em situações de geometria e estados de tensão complexos, a forma de uma trinca pode ser totalmente alterada ao longo do processo de propagação.

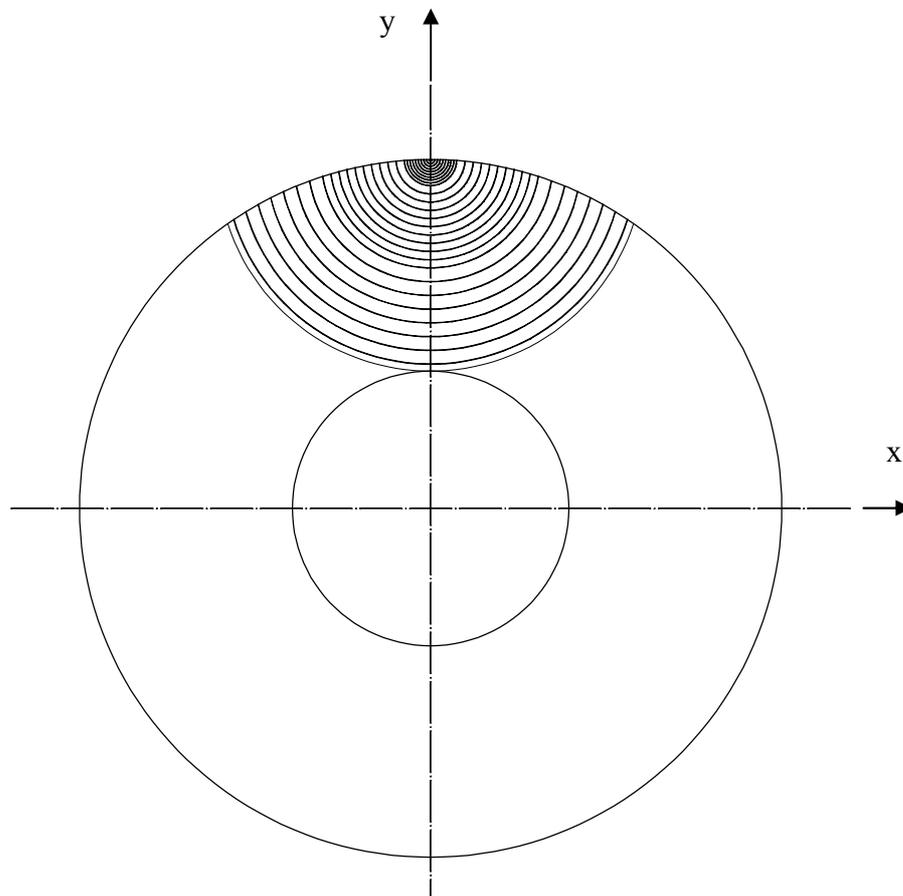


FIGURA 4.36 – Posições de frente de trinca propagadas na seção *A* até atingir o furo interno do eixo.

Para a análise de propagação de trincas do modelo em estudo considera-se as seguintes propriedades do aço martensítico utilizado na fabricação de eixos de mandril com base em BARSOM e ROLFE (1999):  $C_1 = 1,36 \times 10^{-10} \frac{\text{m/ciclo}}{(\text{MPa}\sqrt{\text{m}})^m}$  e  $m_1 = 2,25$ , sendo  $C_1$  e  $m_1$  parâmetros do material conforme equação de Walker. Adotou-se ainda conforme DOWLING (1999), o valor da tenacidade à fratura do aço,  $K_{Ic} = 110 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

O giro do eixo de mandril a 180°, posiciona a frente de trinca no domínio negativo do eixo  $y$ , tendendo a comprimir e fechar as faces da trinca. Nesta condição, o valor do FIT é negativo, difere da condição positiva em 0,97% e  $R = -1$ .

Neste trabalho, considera-se a inexistência de tensões residuais de tração na ponta da trinca, sendo mantido  $\Delta K = K_{max}$ , quando o FIT obtido na condição da trinca propagasse no sentido positivo do eixo  $y$ , paralelo ao plano  $xy$ .

Os FIT nos modos I, II e III, e a área ocupada pela trinca, até o tamanho de 77,0 mm, são apresentados na TABELA 4.19. Considera-se o valor máximo do fator de intensidade  $K_I$  dentre os resultados obtidos para os 24 pontos adotados ao longo da frente de trinca, como mencionado anteriormente, e  $K_{II}$  e  $K_{III}$  são tomados no mesmo ponto de  $K_I$ . Os valores de  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  se referem ao carregamento descrito para a Etapa 2, na condição de solicitação máxima. Notar que para o tamanho de 77,0 mm o valor de  $K_I$  máximo corresponde a 35,3 % do valor de  $K_{Ic}$  do aço.

O número de ciclos  $N_f$  para se atingir o tamanho de 77,0 mm da trinca, a partir de uma trinca inicial, é obtido utilizando-se o algoritmo de BANNANTINE et al. (1990), com base na equação de Walker e do fator de intensidade de tensão cíclico equivalente  $\Delta K_{eq}$ , segundo RICHARDS et al. (2007), conforme descrito no Capítulo 3. O número de intervalos  $n$  representa os 37 incrementos de crescimento da trinca especificados. Os resultados são apresentados na TABELA 4.20, onde observa-se que o número de ciclos para se atingir o tamanho de 77,0 mm foi  $N_f = 3,987 \times 10^6$  ciclos.

Quando a frente de trinca atinge o tamanho de 77,0 mm, ela atinge o ponto de coordenadas (0; 50; 1.002) mm, conforme FIGURA 4.22. Neste momento, a área remanescente da seção transversal do eixo é de 32.322,20 mm<sup>2</sup>, correspondendo a 75,5 % da área da seção transversal inicial de 42.816,8 mm<sup>2</sup>.

Com base nos resultados de FONTE et al. (2006), segundo os quais a solicitação no modo III contribui favoravelmente reduzindo a taxa de propagação da trinca, na

sequencia da análise, consideraram-se apenas os carregamentos que causam sollicitação da trinca no modo I, deixando de considerar a torção decorrente do desbobinamento.

TABELA 4.19 - Resultados dos fatores de intensidade de tensão até a trinca atingir o tamanho de 77,0 mm.

Profundidade mm	$K_I$ MPa $\sqrt{m}$	$K_{II}$ MPa $\sqrt{m}$	$K_{III}$ MPa $\sqrt{m}$	Área da trinca mm <sup>2</sup>
1,00	3,93	0,174	0,225	1,456
1,92	7,78	-0,253	0,131	5,772
2,64	9,23	0,312	0,837	11,605
3,38	9,17	0,661	0,560	19,882
4,10	10,80	0,443	0,989	27,846
4,75	11,19	-0,543	-0,777	38,497
5,39	11,87	-0,615	-0,796	50,641
6,02	11,91	-0,672	-0,878	64,360
6,72	12,54	-0,604	-0,994	79,177
7,36	12,45	-0,687	-0,976	95,793
9,26	12,48	-0,817	-0,675	155,903
11,33	13,36	0,374	1,341	238,632
13,39	15,04	-0,987	-0,815	342,081
15,43	15,22	-1,081	-0,839	457,508
17,67	16,24	-0,976	-1,083	585,431
19,72	16,44	-1,070	-1,108	728,740
21,70	17,64	-1,117	-1,229	885,090
23,60	17,84	-1,197	-1,225	1.051,870
25,47	19,00	-1,228	-1,382	1.229,430
27,29	19,12	-1,323	-1,319	1.416,390
30,27	21,65	-1,422	-1,222	1.831,890
33,87	21,17	-1,389	-0,871	2.267,010
37,09	23,09	-1,354	-1,013	2.722,040
40,50	23,38	-1,586	-1,009	3.202,640
43,77	24,80	-1,956	-1,367	3.673,290
46,90	25,60	-1,912	-1,094	4.238,180
50,01	27,21	-2,033	-1,277	4.798,510
53,19	27,48	-2,162	-1,212	5.381,360
56,31	29,10	-2,303	-1,260	5.992,270
59,41	29,14	-2,323	-1,196	6.626,800
62,55	29,43	-2,062	-1,360	7.293,790
65,74	33,67	-2,951	-1,606	7.977,060
68,80	34,38	-2,832	-1,121	8.616,090
72,00	35,47	-3,174	-1,518	9.324,630
74,97	37,88	-3,185	-1,210	10.046,300
76,43	39,23	-3,318	-1,949	10.413,500
77,00	38,82	-3,194	-1,807	10.494,600

TABELA 4.20 – Resultados da propagação de trinca até a trinca atingir o tamanho de 77,0 mm.

Profundidade mm	$\Delta K_{eq}$ MPa $\sqrt{m}$	da/dN m/ciclos	N ciclos
1,00	3,952	6,29E-10	0
1,92	7,795	2,90E-09	5,209E+05
2,64	9,321	4,34E-09	7,194E+05
3,38	9,262	4,28E-09	8,906E+05
4,10	10,910	6,18E-09	1,029E+06
4,75	11,277	6,66E-09	1,131E+06
5,39	11,965	7,61E-09	1,220E+06
6,02	12,027	7,70E-09	1,302E+06
6,72	12,656	8,64E-09	1,388E+06
7,36	12,578	8,52E-09	1,463E+06
9,26	12,582	8,52E-09	1,685E+06
11,33	13,510	1,00E-08	1,908E+06
13,39	15,174	1,30E-08	2,087E+06
15,43	15,368	1,34E-08	2,242E+06
17,67	16,388	1,55E-08	2,398E+06
19,72	16,604	1,59E-08	2,529E+06
21,70	17,818	1,86E-08	2,643E+06
23,60	18,030	1,92E-08	2,744E+06
25,47	19,209	2,21E-08	2,835E+06
27,29	19,330	2,24E-08	2,916E+06
30,27	21,841	2,95E-08	3,031E+06
33,87	21,327	2,79E-08	3,157E+06
37,09	23,238	3,39E-08	3,261E+06
40,50	23,563	3,50E-08	3,360E+06
43,77	25,074	4,02E-08	3,447E+06
46,90	25,840	4,30E-08	3,522E+06
50,01	27,470	4,94E-08	3,589E+06
53,19	27,754	5,05E-08	3,653E+06
56,31	29,399	5,75E-08	3,710E+06
59,41	29,433	5,77E-08	3,764E+06
62,55	29,679	5,88E-08	3,818E+06
65,74	34,088	8,03E-08	3,864E+06
68,80	34,729	8,37E-08	3,901E+06
72,00	35,909	9,02E-08	3,938E+06
74,97	38,267	1,04E-07	3,969E+06
76,43	39,698	1,13E-07	3,982E+06
77,00	39,248	1,10E-07	3,987E+06

A partir da análise efetuada por meio do MEF/ANSYS considerando trinca com  $a = 77,0$  mm e eliminando o torque como condição de contorno, executa-se uma nova análise baseada no MEC/FRANC3D, aplicando-se como condição de contorno, no modelo de elementos de contorno, os deslocamentos obtidos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  nos

dezesseis nós mencionados na FIGURA 4.31 da seção 4.3.2.2, e novos valores do FIT são calculados.

Os FIT nos modos I, II e III, considerando trinca com  $a = 77,0$  mm, são apresentados na TABELA 4.21. Considera-se o valor máximo do fator de intensidade  $K_I$  dentre os resultados obtidos para os 24 pontos adotados ao longo da frente de trinca, e  $K_{II}$  e  $K_{III}$  são tomados neste mesmo. A Eq. (2-17) é utilizada para se determinar a variação do fator de intensidade equivalente  $\Delta K_{eq}$ .

TABELA 4.21 - Resultados dos fatores de intensidade de tensão na condição de contorno com torque e sem torque, para um tamanho de trinca igual a 77,0 mm.

Condição de contorno	$K_I$	$K_{II}$	$K_{III}$	$\Delta K_{eq}$
	MPa $\sqrt{m}$	MPa $\sqrt{m}$	MPa $\sqrt{m}$	MPa $\sqrt{m}$
Com torque	38,818	-3,194	-1,807	39,248
Sem torque	40,310	0,079	3,395	40,595

O FIT no modo I aumentou de valor quando o torque foi eliminado como condição de contorno aplicado ao eixo de mandril. A comparação dos valores de  $K_I$  na condição de contorno com torque em relação à condição sem torque mostra um acréscimo de 3,8%, analogamente,  $\Delta K_{eq}$  é de 3,4% superior para a condição sem torque.

Os resultados mostram que com a consideração do torque, o FIT no modo I diminui e, em conseqüência, o número de ciclos para propagação entre a trinca inicial e a fratura final será superior em comparação ao modo I sem atuação do torque, conforme FONTE et al. (2006), mencionado na seção 2.4.1.

#### 4.3.3.2 Cálculo dos fatores de intensidade de tensão usando o método empírico

Na TABELA 4.22 são apresentados os resultados dos FIT obtidos através do MEC/Franc3D e método MURAKAMI e ENDO (1983), representado na Eq. (3-7).

A tensão remota normal à área projetada  $\sigma$  adotada é igual a  $\sigma_{zz} = 109,7$  MPa, do ponto de coordenadas (0; 127; 1002) mm na seção A da Etapa 2 do modelo de viga descrito na

seção 4.3.1. Na TABELA 4.22 comparam-se os valores de  $K_I$  máximo obtidos pelo MEC/Franc3D e por meio do método proposto por Murakami e Endo (1983).

TABELA 4.22 – Comparação dos valores do fator de intensidade de tensão obtidos pelos modelos MEC/Franc3D e Murakami e Endo.

Posição frente de trinca	$K_I$ MEC/Franc3D	$K_I$ Murakami e Endo	area = área da trinca	$\sqrt{area}$
	MPa $\sqrt{m}$	MPa $\sqrt{m}$	mm <sup>2</sup>	$\mu m$
1	3,928	4,390	1,456	1.207
2	7,782	6,195	5,772	2.403
3	9,306	7,376	11,605	3.407
4	9,165	8,439	19,882	4.459
5	10,796	9,181	27,846	5.277
6	11,189	9,955	38,497	6.205
7	11,870	10,661	50,641	7.116
8	11,913	11,320	64,360	8.022
9	12,539	11,922	79,177	8.898
10	12,452	12,503	95,793	9.787
11	12,475	14,122	155,903	12.486
12	13,363	15,708	238,632	15.448
13	15,044	17,188	342,081	18.495
14	15,221	18,484	457,508	21.389
15	16,239	19,659	585,431	24.196
16	16,438	20,765	728,740	26.995
17	17,640	21,799	885,090	29.750
18	17,841	22,760	1.051,870	32.433
19	19,005	23,665	1.229,430	35.063
20	19,119	24,518	1.416,390	37.635
21	21,649	26,146	1.831,890	42.801
22	21,171	27,577	2.267,010	47.613
23	23,088	28,868	2.722,040	52.173
24	23,377	30,065	3.202,640	56.592
25	24,796	31,114	3.673,290	60.608
26	25,605	32,247	4.238,180	65.101
27	27,210	33,263	4.798,510	69.271
28	27,476	34,230	5.381,360	73.358
29	29,104	35,163	5.992,270	77.410
30	29,139	36,059	6.626,800	81.405
31	29,426	36,934	7.293,790	85.404
32	33,671	37,770	7.977,060	89.314
33	34,384	38,505	8.616,090	92.823
34	35,471	39,273	9.324,630	96.564
35	37,876	40,012	10.046,300	100.231
36	39,232	40,373	10.413,500	102.047
37	38,818	40,451	10.494,600	102.443

Os resultados desta tabela apresentam um erro médio de: 10,5% para os parâmetros  $\sqrt{area}$  até 1.207  $\mu\text{m}$  ( $area=1,456 \text{ mm}^2$ ); 18,1% para os parâmetros  $\sqrt{area}$  entre 2.403  $\mu\text{m}$  ( $area=5,772 \text{ mm}^2$ ) a 102.443  $\mu\text{m}$  ( $area=10.494,6 \text{ mm}^2$ ). Segundo MURAKAMI (1985), um erro de  $\pm 10\%$  ocorre quando o parâmetro  $\sqrt{area}$  encontra-se abaixo de 1.000  $\mu\text{m}$  (1,0  $\text{mm}^2$ ). DIAS et al. (2003) compararam os resultados dos FIT obtidos por meio MEC/FRANC3D com os respectivos resultados obtidos com base no método de MURAKAMI e ENDO (1983), encontrando diferenças de  $\pm 20\%$  para valores de  $K_{I_{max}}$  dentre todos os valores obtidos na frente de trinca no âmbito do MEC/FRANC3D, e de  $\pm 10\%$  quando se considera a média de todos os valores dos FIT obtidos para os pontos da frente de trinca. Segundo estes autores, para parâmetro  $\sqrt{area}$  inferior a 1.000  $\mu\text{m}$ , que equivale a uma área projetada de 1,0  $\text{mm}^2$ , a diferença foi de  $\pm 10\%$ , dentro da margem de erro determinada por MURAKAMI e ENDO (1983).

O parâmetro  $\sqrt{area}$  pode ser utilizado como um meio rápido de estimar o FIT de trincas em modelos de geometria complexa em duas e três dimensões (DIAS et al., 2003).

#### 4.3.3.3 Valor final da trinca

Para estimar o valor final da trinca é utilizado o método proposto por MURAKAMI e ENDO (1983) para calcular o FIT, representado pela Eq. (3-6). A tensão remota normal à área projetada  $\sigma$  é igual a tensão remota citada na seção 4.3.3.2. A trinca inicial propaga a partir da frente de trinca de profundidade igual a 77 mm, citada na seção 4.3.3.1, com incremento igual a 5 mm. A frente da trinca propaga na direção do eixo  $y$ , situada no paralelo ao plano  $xy$ . Os incrementos de trinca seguintes são iguais a 5 mm. A área projetada da trinca é obtida através do programa computacional AutoCAD, conforme FIGURA 4.37. A propagação ocorre até que a trinca atinja o tamanho de 254 mm. Na TABELA 4.23 são apresentados os resultados do FIT obtidos através do método MURAKAMI e ENDO (1983), e  $K_I$  máximo não iguala a  $K_{Ic}$ .

TABELA 4.23 – Valores do fator de intensidade de tensão obtidos pelo método MURAKAMI e ENDO (1983).

Posição frente de trinca	Profundidade de trinca	$K_I$ Murakami e Endo	area = área da trinca
	mm	$\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$	$\text{mm}^2$
38	80,06	40,921	10.990,80
39	83,06	41,409	11.524,60
40	86,06	41,863	12.038,40
41	89,06	42,291	12.538,60
42	92,06	42,699	13.028,60
43	95,06	43,088	13.511,10
44	98,06	43,464	13.987,70
45	101,06	43,826	14.459,90
46	104,06	44,177	14.928,90
47	107,06	44,518	15.395,70
48	110,06	44,851	15.861,10
49	113,06	45,176	16.325,80
50	116,06	45,494	16.790,70
51	119,06	45,806	17.256,30
52	122,06	46,113	17.723,20
53	125,06	46,415	18.192,20
54	128,06	46,713	18.663,90
55	131,06	47,008	19.138,80
56	134,06	47,299	19.617,50
57	137,06	47,587	20.100,90
58	140,02	47,874	20.589,50
59	143,02	48,159	21.084,10
60	146,02	48,443	21.585,70
61	149,02	48,726	22.095,00
62	152,02	49,009	22.613,00
63	155,02	49,293	23.141,70
64	158,02	49,578	23.681,70
65	161,02	49,865	24.235,10
66	164,02	50,156	24.804,10
67	167,02	50,450	25.391,90
68	170,02	50,751	26.002,50
69	173,02	51,060	26.643,00
70	176,02	51,385	27.328,00
71	177,00	51,498	27.568,40
72	182,00	52,094	28.865,80
73	187,00	52,662	30.147,00
74	192,00	53,205	31.408,20
75	197,00	53,721	32.645,50
76	202,00	54,212	33.854,30
77	207,00	54,676	35.029,70
78	212,00	55,114	36.166,50
79	217,00	55,526	37.258,30

80	222,00	55,909	38.298,00
81	227,00	56,263	39.277,40
82	232,00	56,586	40.186,10
83	237,00	56,874	41.011,10
84	242,00	57,123	41.734,60
85	247,00	57,326	42.329,40
86	252,00	57,465	42.741,20
87	254,00	57,490	42.816,80

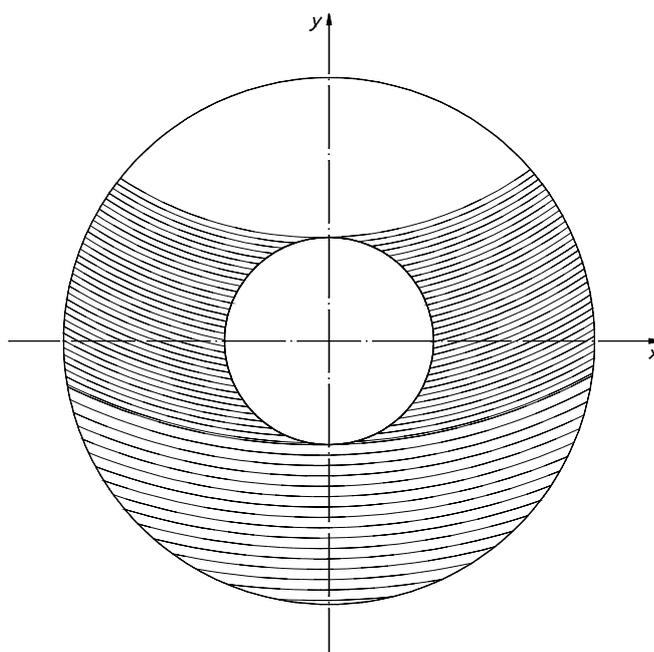


FIGURA 4.37 – Posições de frentes de trinças.

Uma nova análise é realizada, quando é calculada a profundidade de trinca que corresponde à resistência ao escoamento do material do eixo de mandril. Através do programa computacional AutoCAD e a partir das áreas remanescentes obtidas da TABELA 4.23, momentos de inércia correspondentes ao eixo  $x$  são calculados. Para cada área remanescente, a tensão normal devido à flexão na direção  $y$ ,  $\sigma_z$ , é calculada e comparada com a resistência ao escoamento  $f_y$ . Quando a profundidade de trinca atinge 192 mm, representada na FIGURA 4.38, correspondente à posição 74 da TABELA 4.23, o momento de inércia em relação ao eixo  $x$  é igual a 4.338.803 mm<sup>4</sup> e  $\sigma_z = 698,2$  MPa para o ponto de coordenadas (1,8; -62,0; 1.002) mm, superior a  $f_y = 655$  MPa. A área remanescente da seção transversal do eixo é de 11.408,6 mm<sup>2</sup>,

correspondendo a 36,6% da área da seção transversal inicial de 42.816,8 mm<sup>2</sup>, sem trinca.

A tensão normal  $\sigma_z$  é utilizada como referência por representar 99,9% da tensão equivalente de von Mises, em comparação às outras tensões, conforme Anexo B.

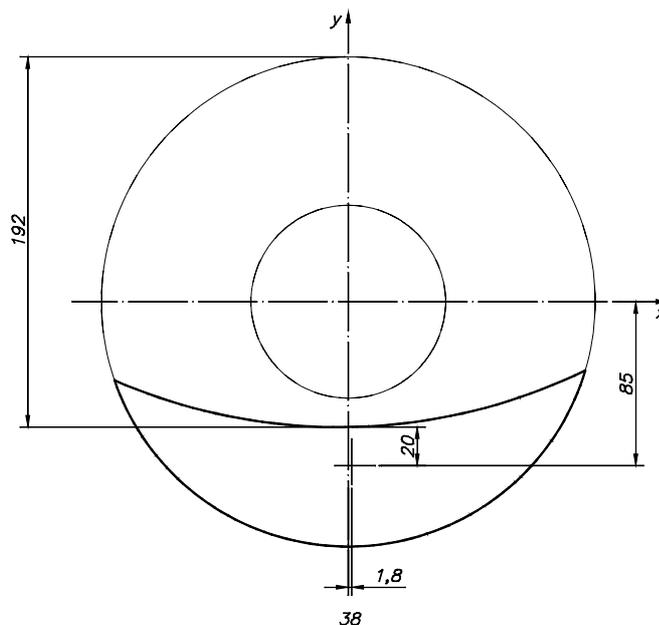


FIGURA 4.38 – Área remanescente no eixo de mandril.

O valor final da trinca encontra-se pouco acima do valor de 192 mm, onde a área remanescente da seção transversal do eixo é igual a 36,6% da área da seção transversal inicial, sem trinca. Segundo DOWLING (1999), o crescimento da trinca causa uma diminuição da área resistente da peça, e um aumento da tensão sobre a área remanescente. Dependendo do material e da geometria da peça, o escoamento plástico total pode ser alcançado antes de  $K_I$  máximo atingir  $K_{Ic}$ .

#### 4.3.3.4 Avaliação da deteriorização da rigidez do eixo de mandril devido a propagação da trinca

Nesta seção considera-se que a matriz de rigidez global do MEF se altera à medida que a trinca se propaga, e objetiva-se avaliar a deterioração da rigidez do eixo de mandril devido à propagação de trinca.

Foram escolhidas quatro profundidades de trinca apresentadas na TABELA 4.19, e inseridas na seção *A* do modelo do eixo com base no MEF/ANSYS, ocupando uma área próxima à apresentada na tabela citada. Na TABELA 4.24 são apresentados os valores do módulo do vetor deslocamento de pontos situados na seção da extremidade em balanço do eixo de mandril, para os modelos com as seguintes profundidades de trinca:  $a = 0$  mm,  $a = 7,36$  mm,  $a = 17,67$  mm,  $a = 37,09$  mm e  $a = 77,06$  mm. Na FIGURA 4.39 são apresentados os resultados do módulo do vetor deslocamento.

TABELA 4.24 – Valores do módulo do vetor deslocamento de pontos situados na seção da extremidade em balanço do eixo de mandril obtidos em função das profundidades de trinca.

Ponto de coordenadas (x; y; z) mm	$a = 0$ mm	$a = 7,36$ mm	$a = 17,67$ mm	$a = 37,09$ mm	$a = 77,06$ mm
(0; 127; 0)	0,352310	0,374490	0,374940	0,384690	0,450130
(-127; 0; 0)	0,380110	0,390840	0,391290	0,400800	0,464340
(0; -127; 0)	0,366180	0,382640	0,383210	0,392610	0,454340
(127; 0; 0)	0,406750	0,404980	0,405330	0,414940	0,479330

A comparação dos valores de deslocamento da extremidade em balanço do eixo de mandril analisado por meio do MEF/ANSYS, nas condições  $a = 0$  mm e  $a = 37,09$  mm, mostra diferenças na faixa de 2,0% a 9,2%.

A partir da análise efetuada por meio do MEF/ANSYS considerando a trinca com  $a = 7,36$  mm,  $a = 17,67$  mm,  $a = 37,09$  mm e  $a = 77,00$  mm, executa-se uma nova análise baseada no MEC/FRANC3D, aplicando-se como condição de contorno no modelo de elementos de contorno, os deslocamentos obtidos nas direções *x*, *y* e *z* nos dezesseis nós mencionados na FIGURA 4.31 da seção 4.3.2.2, e novos valores do fator de intensidade de tensão são calculados.

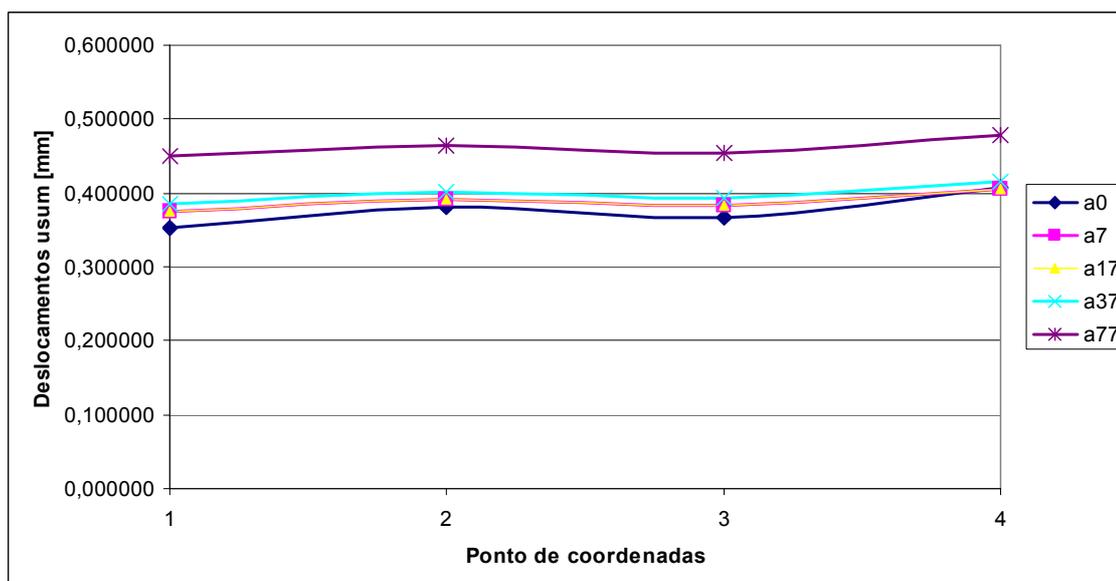


FIGURA 4.39 - Gráfico dos resultados da soma vetorial dos deslocamentos obtidos do modelo MEF/ANSYS.

Os FIT nos modos I, II e III, e a área ocupada pela trinca, até o tamanho de 77,0 mm, são apresentados na TABELA 4.25. São destacados os novos valores do fator de intensidade de tensão a partir de  $a = 7,36$  mm.

O número de ciclos  $N_f$  para se atingir o tamanho de 77,0 mm da trinca, a partir de uma trinca inicial, é obtido utilizando-se o algoritmo de BANNANTINE et al. (1990), com base na equação de Walker e do fator de intensidade de tensão cíclico equivalente  $\Delta K_{eq}$ , segundo RICHARDS et al. (2007), conforme descrito no Capítulo 3. O número de intervalos  $n$  representa os 37 incrementos de crescimento da trinca especificados. Os resultados são apresentados na TABELA 4.26, onde observa-se que o número de ciclos para se atingir o tamanho de 77,0 mm foi  $N_f = 3,953 \times 10^6$  ciclos, destacando-se a utilização dos valores do FIT atualizados a partir de  $a = 7,36$  mm. A comparação dos valores de  $\Delta K_{eq}$  obtidos nas condições de profundidade de trinca  $a = 0$  mm,  $a = 7,36$  mm,  $a = 17,67$  mm,  $a = 37,09$  mm e  $a = 77,0$  mm, no modelo MEF/ANSYS, mostra diferenças na faixa de  $-0,2\%$  a  $+7,2\%$ . A comparação do número de ciclos obtido anteriormente com o valor obtido após a atualização dos FIT,  $a = 77,0$  mm, mostrou uma diferença de  $0,9\%$ , significando que a degradação da matriz de rigidez global do MEF não alterou de forma significativa os resultados do número de ciclos.

TABELA 4.25 – Resultados dos fatores de intensidade de tensão até a trinca atingir o tamanho de 77,0 mm.

Profundidade	$K_I$	$K_{II}$	$K_{III}$	Área da trinca
mm	MPa $\sqrt{m}$	MPa $\sqrt{m}$	MPa $\sqrt{m}$	mm <sup>2</sup>
1,00	3,93	0,174	0,225	1,456
1,92	7,78	-0,253	0,131	5,772
2,64	9,23	0,312	0,837	11,605
3,38	9,17	0,661	0,560	19,882
4,10	10,80	0,443	0,989	27,846
4,75	11,19	-0,543	-0,777	38,497
5,39	11,87	-0,615	-0,796	50,641
6,02	11,91	-0,672	-0,878	64,360
6,72	12,54	-0,604	-0,994	79,177
7,36	12,48	0,988	1,720	95,793
9,26	12,46	0,714	1,490	155,903
11,33	13,29	-1,380	-0,415	238,632
13,39	14,71	-1,527	-0,467	342,081
15,43	15,16	1,040	2,055	457,508
17,67	16,02	1,236	2,150	585,431
19,72	16,47	1,291	2,286	728,740
21,70	17,39	1,295	2,445	885,090
23,60	17,85	1,385	2,525	1.051,870
25,47	18,70	1,378	2,617	1.229,430
27,29	19,08	1,459	2,702	1.416,390
30,27	21,47	1,583	2,761	1.831,890
33,87	21,10	1,780	2,650	2.267,010
37,09	22,54	1,557	2,744	2.722,040
40,50	23,68	1,959	2,940	3.202,640
43,77	23,34	-2,699	-0,735	3.673,290
46,90	25,95	2,143	3,290	4.238,180
50,01	27,14	2,064	3,373	4.798,510
53,19	27,97	2,236	3,432	5.381,360
56,31	29,16	2,166	3,573	5.992,270
59,41	29,89	2,363	3,668	6.626,800
62,55	28,06	1,916	3,307	7.293,790
65,74	31,64	-3,764	-0,875	7.977,060
68,80	36,33	3,464	4,213	8.616,090
72,00	35,59	3,226	3,974	9.324,630
74,97	38,74	3,252	4,569	10.046,300
76,43	40,91	3,662	5,375	10.413,500
77,00	40,49	3,821	5,221	10.494,600

TABELA 4.26 – Resultados dos fatores de intensidade de tensão até a trinca atingir o tamanho de 77,0 mm.

Profundidade mm	$\Delta K_{eq}$ MPa $\sqrt{m}$	da/dN m/ciclos	N ciclos	Diferenças entre $K_{eq}$ (%)
1,00	3,952	6,29E-10	0	0,0
1,92	7,795	2,90E-09	5,209E+05	0,0
2,64	9,321	4,34E-09	7,194E+05	0,0
3,38	9,262	4,28E-09	8,906E+05	0,0
4,10	10,910	6,18E-09	1,029E+06	0,0
4,75	11,277	6,66E-09	1,131E+06	0,0
5,39	11,965	7,61E-09	1,220E+06	0,0
6,02	12,027	7,70E-09	1,302E+06	0,0
6,72	12,656	8,64E-09	1,388E+06	0,0
7,36	12,812	8,88E-09	1,461E+06	1,9
9,26	12,685	8,68E-09	1,677E+06	0,8
11,33	13,489	9,97E-09	1,899E+06	-0,2
13,39	14,937	1,25E-08	2,082E+06	-1,6
15,43	15,521	1,37E-08	2,238E+06	1,0
17,67	16,428	1,55E-08	2,391E+06	0,2
19,72	16,906	1,66E-08	2,519E+06	1,8
21,70	17,852	1,87E-08	2,631E+06	0,2
23,60	18,341	1,99E-08	2,730E+06	1,7
25,47	19,188	2,20E-08	2,819E+06	-0,1
27,29	19,601	2,31E-08	2,899E+06	1,4
30,27	21,968	2,99E-08	3,012E+06	0,6
33,87	21,618	2,88E-08	3,135E+06	1,4
37,09	23,004	3,31E-08	3,238E+06	-1,0
40,50	24,243	3,73E-08	3,335E+06	2,9
43,77	23,776	3,57E-08	3,425E+06	-5,2
46,90	26,589	4,59E-08	3,502E+06	2,9
50,01	27,752	5,05E-08	3,566E+06	1,0
53,19	28,613	5,41E-08	3,627E+06	3,1
56,31	29,802	5,93E-08	3,682E+06	1,4
59,41	30,571	6,28E-08	3,733E+06	3,9
62,55	28,611	5,41E-08	3,786E+06	-3,6
65,74	32,251	7,09E-08	3,837E+06	-5,4
68,80	37,234	9,79E-08	3,874E+06	7,2
72,00	36,405	9,31E-08	3,907E+06	1,4
74,97	39,624	1,13E-07	3,936E+06	3,5
76,43	42,019	1,29E-07	3,948E+06	5,8
77,00	41,616	1,26E-07	3,953E+06	6,0

#### 4.3.4 Consideração de trincas no trecho da seção C

O trecho do eixo que contém a seção C foi modelado tridimensionalmente no programa MEC/Franc3D com as mesmas dimensões do modelo desenvolvido por meio do

MEF/ANSYS, de modo que as posições dos nós coincidem em ambos os modelos, conforme FIGURA 4.40. No modelo MEC/FRANC3D, como condição de contorno na seção de corte, impõem-se os valores de deslocamentos obtidos por meio do MEF/ANSYS nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  da Etapa 2. Tal como na análise MEF/ANSYS, a restrição à rotação em torno do eixo  $z$  é considerada, conforme FIGURA 4.25c.

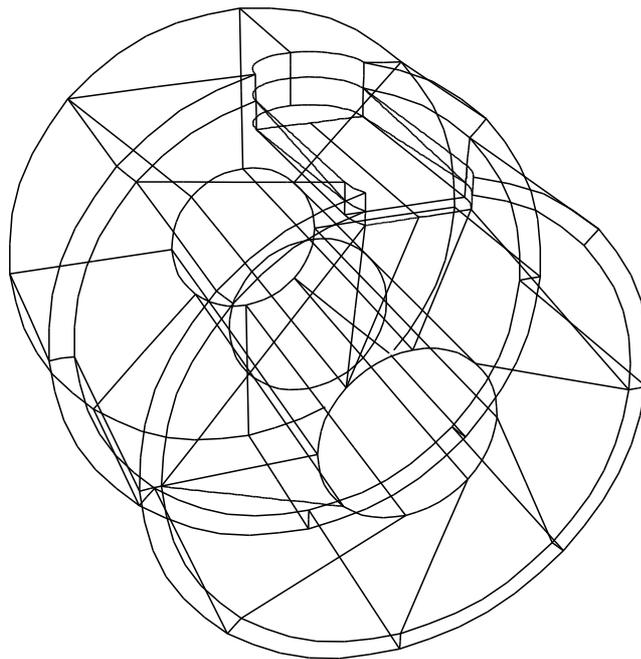


FIGURA 4.40 – Representação do rasgo de chaveta do modelo gerado no programa MEC/FRANC3D.

Utilizando o MEC/FRANC3D, uma trinca com frente semi-circular é inserida na seção  $C$ , situada num plano paralelo ao plano  $xy$ , obtida da biblioteca de trincas do MEC/FRANC3D, com centro no ponto de coordenadas (31,5; 121; 1.695) mm, posição (0; 0; 90) graus, profundidade inicial  $a$  igual a 1 mm, ângulo entre faces  $\alpha$  de 270°, conforme FIGURA 4.35. São adotados 24 pontos distribuídos uniformemente ao longo da frente de trinca, visando a determinação do FIT. A propagação da trinca é efetuada conforme o critério de propagação planar (*Planar*) e a extensão dos pontos geométricos de acordo com a potência de  $K_I$  (*power of KI* - Eq. (3-5)). O incremento de trinca  $\Delta a_{max}$  foi considerado igual a 1 mm, aplicado no ponto nodal da frente onde ocorre  $K_{I_{max}}$ , e os

incrementos nos demais pontos da frente são calculados com base na Eq. (3-5), com o parâmetro  $b = 1$ .

A propagação ocorre até que a trinca atinja a superfície externa de contorno do eixo, no ponto de coordenadas (31,5; 155,5; 1.695) mm, representada pela letra *A* na FIGURA 4.41a. A partir daí, a modelagem não foi possível por meio do MEC/FRANC3D, interrompendo-se então o estudo de propagação da trinca.

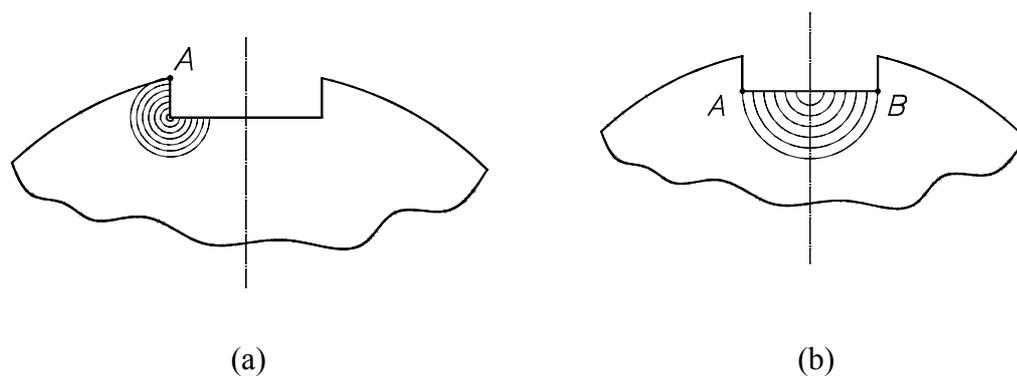


FIGURA 4.41 – Representação da propagação de trinca na região do rasgo de chaveta: (a) trinca iniciando na extremidade do rasgo de chaveta; (b) trinca iniciando na linha de centro do rasgo de chaveta.

Uma trinca inicial com a forma semi-circular, obtida da biblioteca de trincas do MEC/FRANC3D, é inserida a partir de outro ponto de coordenadas, (0; 121; 1.695) mm, posição (0; 0; 180) graus, profundidade inicial  $a$  igual a 1 mm, ângulo entre faces  $\alpha$  de 180°, conforme FIGURA 4.35. São adotados 24 pontos distribuídos uniformemente ao longo da frente de trinca, visando a determinação do FIT. É utilizado o critério de propagação planar (*Planar*) e a extensão dos pontos geométricos de acordo com a potência de  $K_I$  (*power of  $K_I$*  - Eq. (3-5)). O incremento de trinca  $\Delta a_{max}$  foi considerado igual a 1 mm, aplicado no ponto nodal da frente onde ocorre  $K_{I_{max}}$ , e os incrementos nos demais pontos da frente são calculados com base na Eq. (3-5), com o parâmetro  $b = 1$ .

A propagação ocorre até que a trinca atinge a superfície externa de contorno do eixo, no ponto de coordenadas ( $\pm 31,5$ ; 121; 1.695) mm representados pelas letras *A* e *B* na

FIGURA 4.41b. A partir deste ponto, a modelagem também não foi possível por meio do MEC/FRANC3D, interrompendo-se então o estudo de propagação da trinca.

Para estimar o valor final da trinca, é utilizado o método proposto por MURAKAMI e ENDO (1983) para calcular o FIT, representado pela Eq. (3-6) e citado na seção 4.3.3.2. A tensão remota normal à área projetada  $\sigma$  é igual a  $\sigma_{zz} = 336,2$  MPa, do ponto de coordenadas (31,5; 121; 1.695) mm da Etapa 2 do modelo de viga descrito na seção 4.3.1. A trinca inicial tem a forma semi-circular, com centro no ponto de coordenadas (31,5; 121; 1.695) mm, com profundidade inicial  $a$  igual a 1 mm, conforme FIGURA 4.35. A frente da trinca propaga na direção do eixo  $y$ , situada no paralelo ao plano  $xy$ . Os dez primeiros incrementos de trinca correspondentes a  $\Delta a_{max}$  são iguais a 1 mm, passando para 3 mm nos dez intervalos seguintes e finalizando com incrementos de 5 mm. A área projetada da trinca é obtida através do programa computacional AutoCAD, conforme FIGURA 4.42. A propagação ocorre até que a trinca atinja o tamanho de 63,2 mm, quando  $K_I$  máximo terá igualado  $K_{Ic}$ , totalizando 25 posições de trincas distintas.

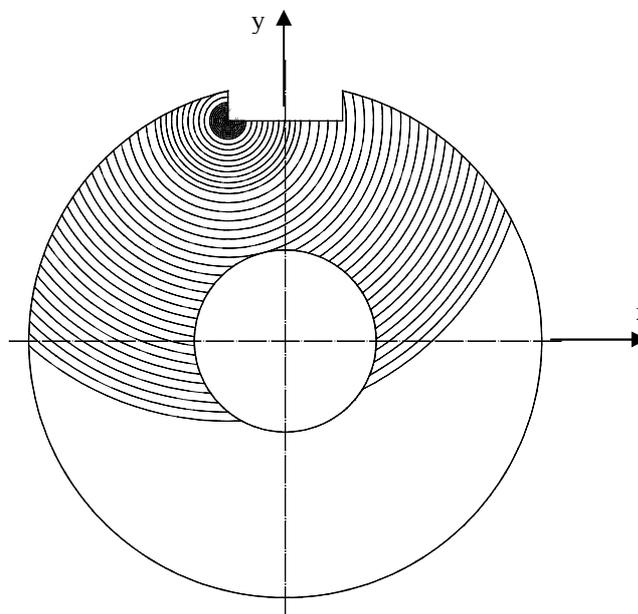


FIGURA 4.42 – Posições de frentes de trincas, totalizando 46.

Para a análise de propagação de trincas do modelo em estudo adotam-se as mesmas propriedades do aço da seção 4.3.3.1.

O número de ciclos para se atingir o tamanho crítico de trinca,  $N_f$ , a partir da trinca inicial  $a = 1$  mm, é obtido utilizando-se o algoritmo de BANNANTINE et al. (1990), com base na equação de Walker, conforme descrito no Capítulo 3. Para esta análise consideram-se os valores do FIT calculados com base nos resultados obtidos pelo método proposto por MURAKAMI e ENDO (1983), como mencionado anteriormente. O número de intervalos  $n$  representa os 28 incrementos de crescimento da trinca especificados. Os resultados são apresentados na TABELA 4.27, onde observa-se que o número de ciclos para se atingir o tamanho crítico de trinca é  $N_f = 2,528 \times 10^5$  ciclos e a profundidade da trinca é 63,2 mm, obtidos por interpolação.

TABELA 4.27 – Resultados da propagação de trinca através do método de MURAKAMI e ENDO (1983).

Profundidade	Área da trinca	Área resistente	$K_I$	da/dN	N
mm	mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	MPa√m	m/ciclo	ciclo
1,00	2,40	54601,60	15,245	1,31E-08	0
2,00	9,40	54594,60	21,447	2,83E-08	4,827E+04
3,00	21,20	54582,80	26,282	4,47E-08	7,567E+04
4,00	37,70	54566,30	30,350	6,18E-08	9,444E+04
5,00	58,90	54545,10	33,932	7,94E-08	1,086E+05
6,00	84,80	54519,20	37,169	9,75E-08	1,199E+05
7,00	115,50	54488,50	40,154	1,16E-07	1,293E+05
8,00	150,80	54453,20	42,922	1,35E-07	1,372E+05
9,00	190,90	54413,10	45,528	1,54E-07	1,442E+05
10,00	235,60	54368,40	47,987	1,73E-07	1,503E+05
13,00	398,20	54205,80	54,715	2,33E-07	1,650E+05
16,00	603,10	54000,90	60,698	2,94E-07	1,764E+05
19,00	815,10	53788,90	65,446	3,48E-07	1,858E+05
22,00	1.044,60	53559,40	69,633	4,00E-07	1,938E+05
25,00	1.296,10	53307,90	73,492	4,52E-07	2,008E+05
28,00	1.570,50	53033,50	77,106	5,04E-07	2,071E+05
31,00	1.868,10	52735,90	80,525	5,55E-07	2,128E+05
34,00	2.188,90	52415,10	83,779	6,07E-07	2,179E+05
37,00	2.532,90	52071,10	86,893	6,59E-07	2,227E+05
40,00	2.900,00	51704,00	89,883	7,11E-07	2,271E+05
45,00	3.562,70	51041,30	94,629	7,99E-07	2,337E+05
50,00	4.288,30	50315,70	99,118	8,86E-07	2,396E+05
55,00	5.076,00	49528,00	103,386	9,74E-07	2,450E+05
60,00	5.924,80	48679,20	107,460	1,06E-06	2,499E+05
65,00	6.855,10	47748,90	111,451	1,15E-06	2,544E+05

Na FIGURA 4.43 é apresentado o gráfico do número de ciclos acumulados na propagação, a partir da trinca inicial até  $K_I$  máximo atingir o valor crítico  $K_{Ic}$ .

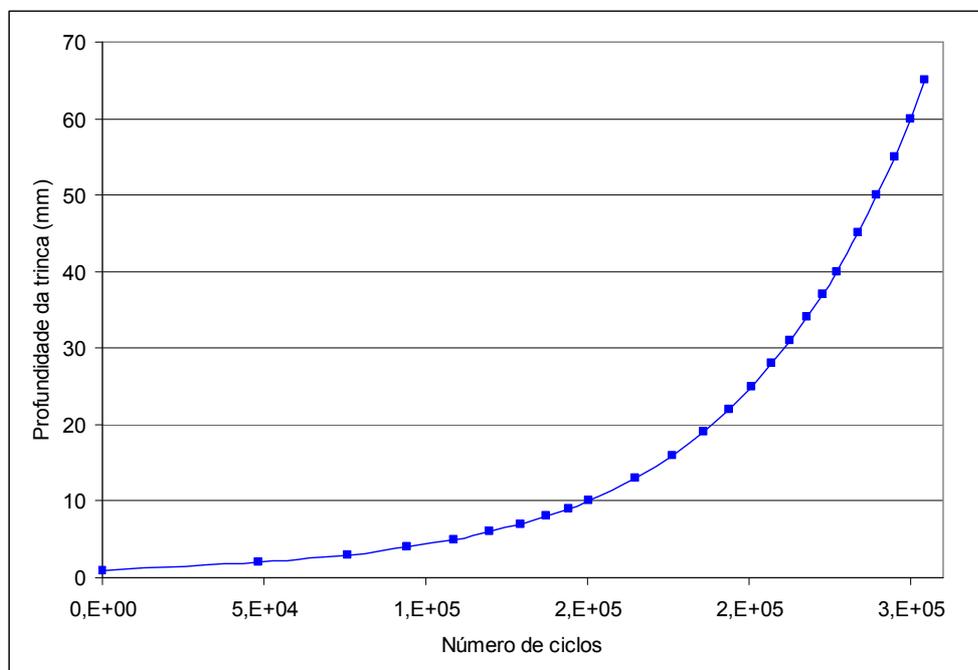


FIGURA 4.43 - Gráfico da profundidade da trinca,  $a$ , versus o número de ciclos,  $N$ .

Para um tamanho de trinca igual a 63,2 mm, a área resistente da seção transversal do eixo é 48.086,7 mm<sup>2</sup>, sendo que a área da seção transversal  $C$  sem trinca é 54.604,0 mm<sup>2</sup>. O eixo de mandril, fraturado após 11 anos e 8 meses em operação, representado na FIGURA 2.17, apresentou 16.532,88 mm<sup>2</sup> de área resistente compreendida no ângulo de 109°, aproximadamente, da seção transversal  $C$ . A área resistente 16.532,88 mm<sup>2</sup> é 2,9 vezes menor que a área resistente encontrada na análise efetuada por meio do MEC/Franc3D.

Segundo GUIMARÃES (2009), o eixo de mandril operou  $6,987 \times 10^5$  ciclos acima do limite de fadiga até ocorrer a ruptura na seção  $C$ , valor este 2,8 vezes maior que o número de ciclos encontrado na análise efetuada por meio do MEC/Franc3D.

Uma possível explicação para as diferenças observadas é o fato da análise apresentada neste trabalho ser baseada no carregamento cíclico com amplitude de carga constante, enquanto no caso real e no estudo desenvolvido por GUIMARÃES (2009), o

carregamento de fato tem amplitude variável ao longo do tempo. Além disto, o fechamento não foi considerado nas análises efetuadas neste trabalho e sua consideração pode causar diferenças significativas.

# 5

## CONCLUSÕES

A metodologia apresentada e testada neste trabalho, baseada exclusivamente em análise linear utilizando-se o MEF e o MEC, mostrou-se viável para a estimativa da propagação de trincas em componentes estruturais com base na fundamentação da mecânica da fratura.

Na análise de propagação de trincas baseada nos valores obtidos numericamente é importante considerar o fenômeno do fechamento de trinca, que pode ser realizado considerando-se o fator de intensidade de tensão cíclico efetivo, proposto por W. Elber, em 1971, e J. Schijve, em 1979.

O método proposto por Murakami e Endo pode ser utilizado como um meio rápido de estimar o fator de intensidade tensão de trincas em casos com geometria e carregamentos complexos. Este método mostrou diferenças nos resultados de até  $\pm 20\%$  em comparação aos resultados obtidos MEC/FRANC3D.

A comparação do número de ciclos obtido a partir da análise MEF/ANSYS, sem a presença da trinca, em relação à análise global considerando a presença da trinca,

mostrou uma diferença de apenas 0,9% no problema analisado, mostrando que a degradação da matriz de rigidez global do MEF não alterou de forma significativa o resultado.

Ressalta-se que não se tinha a pretensão de estimar a vida total em fadiga, mas apenas avaliar o período de propagação a partir de uma trinca inicial existente até se atingir um tamanho crítico correspondente ao início da propagação instável. Para a melhoria da precisão dos resultados é importante considerar a possibilidade de incluir fenômenos que afetam a propagação tais como o fenômeno do fechamento que pode retardar este processo, bem como o efeito de carregamento variável.

As estimativas de propagação obtidas segundo a metodologia apresentada tornam possível a elaboração de planos de manutenção para a substituição programada de peças trincadas, minimizando-se a ocorrências de quebras acidentais de componentes industriais e de riscos para a segurança de pessoas e equipamentos. A avaliação de estruturas complexas em termos de geometria, carregamentos e vinculação, pode ser realizada com precisão adequada utilizando-se métodos numérico e computacionais, tais como o MEF e o MEC, complementados com o conhecimento indispensável das características mecânicas dos materiais, proporcionado pelos fundamentos da engenharia de materiais.

# 6

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALIABADI, M. H. The boundary element method. Applications in solids and structures, volume 2. England: John Wiley & Sons, Ltd. 2002, 580 p.

ANSYS ©, Manual do usuário, versão 11.0, 2007.

AMERICAN SOCIETY FOR METALS. ASM Handbook. Properties and selection: irons, steels, and high-performance alloys, vol. 1, 1993, 2521 p.

AMERICAN SOCIETY FOR METALS. ASM Handbook. vol. 10, 8<sup>th</sup> ed., OH 44073, 1975, p. 102.

AMERICAN SOCIETY FOR METALS. ASM Handbook. Failure analysis and prevention, vol. 11, 2002, 2909 p.

AMERICAN SOCIETY FOR METALS. ASM Handbook. Fatigue and Fracture, vol. 19, 1997, 2592 p.

BACHSCHMID, N., TANZI, E., AUDEBERT, S.. *The effect of helicoidal crack on the behaviour of rotation shafts*. Engineering Fracture Mechanics 75. Elsevier, 2008, pp 475-488.

BANNANTINE, J. A., COMER, J. J., HANDROCK, J. L.. Fundamentals of metal fatigue analysis. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1990, 273 p.

BARSOM, J. M., ROLFE, S. T.. Fracture and fatigue control in structures – Applications of fracture mechanics. 3<sup>rd</sup> ed. Philadelphia: ASTM, 1999, 515 p.

BRANCO, C. M., FERNANDES, A. A. e CASTRO, P. M. S. T.. Fadiga de estruturas soldadas. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1986. 902 p.

BROEK, D.. Elementary engineering fracture mechanics, 4 ed. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. 516 p.

BROEK, D.. The practical use of fracture mechanics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 522 p.

CETLIN, P. R., SILVA, P. S. P., Análise de fraturas. Associação Brasileira de Metais. ABM. São Paulo: ABM, 197-. 229 p.

CFG – CORNELL FRACTURE GROUP. FRANC3D Menu & Dialog Reference. Cornell Fracture Group, Cornell University, Ithaca, NY. 2003. Versão 2.3. Disponível em: [http://www.cfg.cornell.edu/software\\_documentation](http://www.cfg.cornell.edu/software_documentation) . Acesso em julho de 2006.

COTTERELL, B.. The past, present, and future of fracture mechanics. Institute of Materials Research and Engineering, 3 Research Link, Singapore 117602, Singapore. Engineering Fracture Mechanics 69. Pergamon: 2002, pp. 533-553.

DIAS, J.F.. Estudo do comportamento à fadiga de elementos estruturais e de máquinas em ferro fundido nodular austemperado (ADI) sujeito a carregamentos de amplitude

variável. Tese (Doutorado em engenharia de estruturas). Belo Horizonte: UFMG, 2006. 122 p.

DIAS, J. F., TEIXEIRA, R. S., RIBEIRO, G. O.. Avaliação numérica do fator de intensidade de tensão em componentes contendo defeitos. In: XXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2003, Ouro Preto, Brasil. Anais... Ouro Preto: Núcleo de Tecnologia da Informação da Universidade Federal de Ouro Preto, 2003.

DOWLING, N. E.. Mechanical behavior of materials. Engineering methods for deformation, fracture, and fatigue; 2 ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1999. 833 p.

DUMITRU, I., MARSAVINA, L., FAUR, N.. Experimental study of torsional impact fatigue of shafts. Journal of Sound and Vibration 308. Elsevier: 2007, pp. 479-488.

FONTE, M., FREITAS, M.. Semi-elliptical fatigue crack growth under rotating or reversed bending combined with steady torsion. Fatigue & Fracture Engineering Materials & Structures, vol. 20, n. 6, 1997, pp. 895-906.

FONTE, M., REIS, L., ROMEIRO, F., LI, B., FREITAS, M.. The effect of steady torsion on fatigue crack growth in shafts. International Journal of Fatigue 28. Elsevier: 2006, pp. 609-617.

GODEFROID, L. B.. Fundamentos de Mecânica da Fratura. Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais. Ouro Preto: UFOP, 1999.

GUIMARÃES, S. R.. Desenvolvimento e aplicação de uma metodologia para previsão de vida de eixos de mandris de bobinadeiras de laminação a frio submetidas a danos acumulados por fadiga. Dissertação em Engenharia Mecânica. Belo Horizonte: UFMG, 2009.

GUIMARÃES, S. R., ABREU, G. L. C. M., PERTENCE, A. E. M. Desenvolvimento de uma metodologia de cálculo para previsão de vida de eixos de mandris de bobinadeiras de tiras a frio. V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2008, Salvador, Brasil, 2008. CONEM 2008 – Anais do Congresso pp. 1- 7, 2008.

MOAVENI, S.. Finite element analysis – Theory and application with ANSYS. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ 07458: Pearson Prentice Hall, 2008. 861 p.

MORETTI, C. O., BITTENCOURT, T. N.. FRANC3D: Idéias básicas, conceitos fundamentais e utilização. Laboratório de Mecânica Computacional. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações. São Paulo: Escola Politécnica da USP, 1998.

MURAKAMI, Y. Analysis of stress intensity factors of modes I, II, III for inclined surface cracks of arbitrary shape. Engineering Fracture Mechanics, v. 22, n.1, pp. 101-114, 1985.

MURAKAMI, Y., ENDO, M., Quantitative evaluation of fatigue strength of metals containing various small defects or cracks. Engineering Fracture Mechanics, v. 17, n. 1, pp. 1-15, 1983.

MURAKAMI, Y., NEMAT-NASSER, N. S., Growth and stability of interacting surface flaws of arbitrary shape. Engineering Fracture Mechanics, v. 17, n. 3, pp. 193-210, 1983.

NORTON, R. L.. Projeto de Máquinas, 2 ed. Porto Alegre: Artmed, 2004. 931 p.

PILKEY, W. D.. Stress concentration factors, 2<sup>nd</sup> ed. New York: John Wiley & Sons, 1997. 508 p.

RIBEIRO, T. S. A. Algoritmos não-triangulares do método dos elementos de contorno para problemas bidimensionais de elasticidade. Dissertação (Mestrado em engenharia de estruturas). Belo Horizonte: UFMG, 2003. 153 p.

RICHARD, H. A., SANDER, M., FULLAND, M. KULLMER, G.. Development of fatigue crack growth in real structures. *Engineering Fracture Mechanics* 75. Elsevier, 2008, pp. 331-340.

SURESH, S.. *Fatigue of materials*, 1<sup>st</sup> ed. New York: Cambridge: University Press, 1992. 617 p.

SURESH, S.. *Fatigue of materials*, 2<sup>nd</sup> ed. New York: Cambridge: University Press, 2001. 679 p.

TADA, H., PARIS, P. C., IRWIN, G.. *The stress analysis of cracks handbook*, Del Research Corporation, Missouri, USA, 2000.

TEIXEIRA, R. S.. *Metodologia de análise de fadiga em componentes estruturais de aço baseada na mecânica da fratura*. Dissertação (Mestrado em engenharia de estruturas). Belo Horizonte: UFMG, 2004. 92 p.

TEIXEIRA, R. S., DIAS, J. F., RIBEIRO, G. O.. Métodos numéricos aplicados na avaliação de vida à fadiga e trajetória de trinca em elementos estruturais tridimensionais sob carregamento com amplitude variável. VI Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, SIMMEC, 2004, Itajubá, Brasil. Itajubá: Instituto de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Itajubá, 2004.

VAZIRI, A., NAYEB-HASHEMI, H.. The effect of crack surface interaction on the stress intensity factor in mode III crack growth in round shafts. *Engineering Fracture Mechanics* 72. Elsevier: 2005, pp. 617-629.

WEAVER Jr., W., JOHNSTON, P. R. *Finite elements for structural analysis*. New Jersey: Prentice-Hall. 1984, 403 p.

# 7

## ANEXOS

**ANEXO A:** Fatores de intensidade de tensão interpolados, taxa de propagação de trinca e número de ciclos.

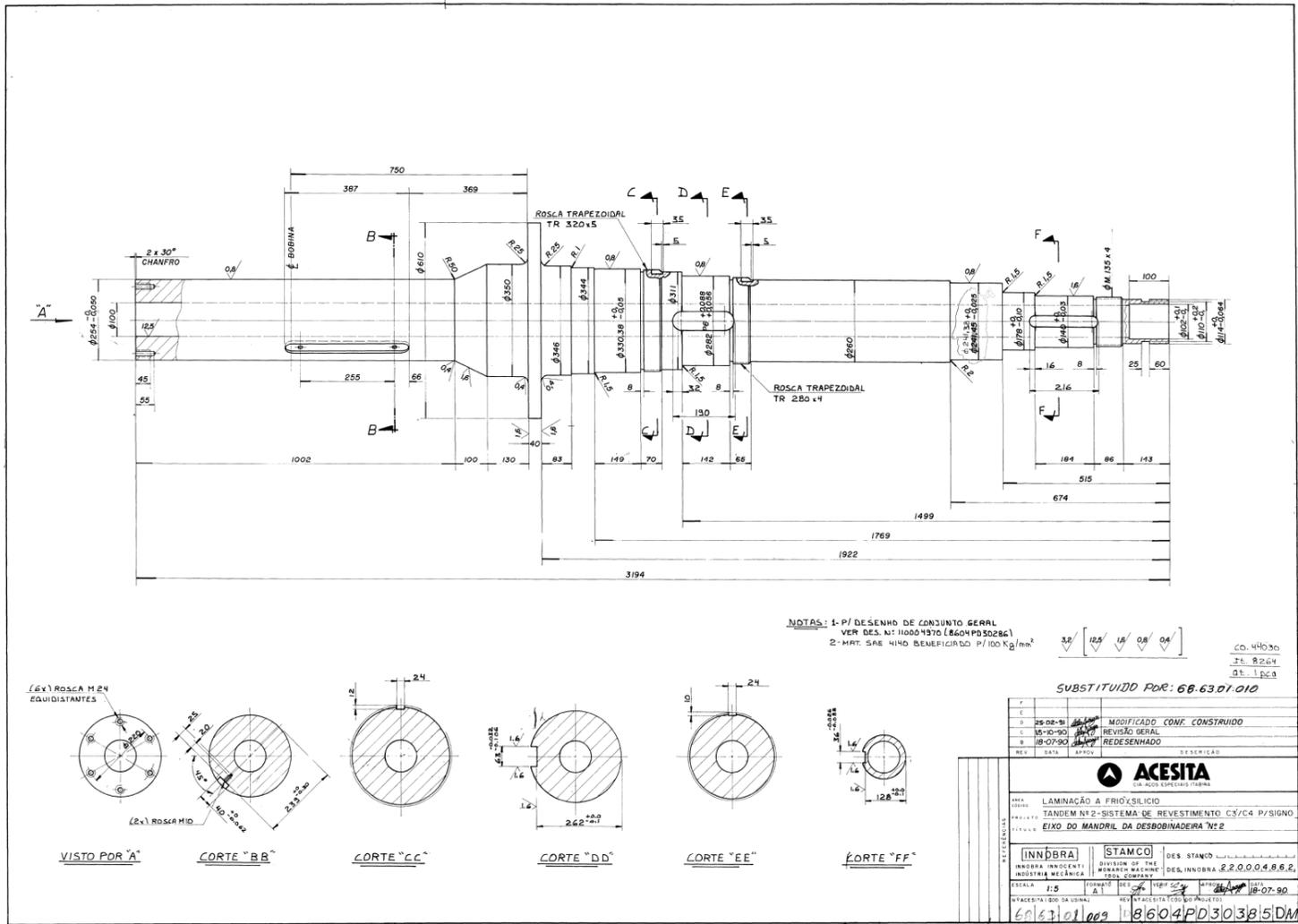
<b>a</b>	$K_{max}$	$K_{min}$	$\Delta K$	$da/dN$	$N$
mm	$MPa\sqrt{m}$	$MPa\sqrt{m}$	$MPa\sqrt{m}$	m/ciclos	ciclos
15,5	29,460	8,819	20,641	7,89E-08	7,086E+03
15,6	29,459	8,815	20,643	7,89E-08	8,353E+03
15,7	29,457	8,812	20,646	7,90E-08	9,620E+03
15,8	29,456	8,808	20,648	7,90E-08	1,089E+04
15,9	29,455	8,804	20,651	7,90E-08	1,215E+04
16,0	29,454	8,800	20,653	7,90E-08	1,342E+04
16,1	29,316	8,763	20,552	7,79E-08	1,469E+04
16,2	29,178	8,726	20,451	7,67E-08	1,599E+04
16,3	29,040	8,689	20,350	7,55E-08	1,730E+04
16,4	28,902	8,652	20,249	7,44E-08	1,863E+04
16,5	28,764	8,615	20,148	7,33E-08	1,999E+04
16,6	28,889	8,654	20,234	7,42E-08	2,134E+04
16,7	29,014	8,693	20,320	7,52E-08	2,268E+04
16,8	29,139	8,732	20,406	7,62E-08	2,400E+04
16,9	29,264	8,772	20,492	7,72E-08	2,531E+04
17,0	29,389	8,811	20,578	7,82E-08	2,660E+04
17,1	29,736	8,914	20,822	8,10E-08	2,785E+04
17,2	30,084	9,018	21,066	8,40E-08	2,906E+04
17,3	30,431	9,121	21,310	8,70E-08	3,023E+04
17,4	30,778	9,225	21,554	9,01E-08	3,136E+04
17,5	31,126	9,328	21,798	9,33E-08	3,245E+04
17,6	31,116	9,319	21,797	9,33E-08	3,352E+04
17,7	31,106	9,311	21,796	9,33E-08	3,460E+04
17,8	31,096	9,302	21,795	9,33E-08	3,567E+04
17,9	31,087	9,293	21,794	9,33E-08	3,674E+04
18,0	31,077	9,284	21,793	9,32E-08	3,781E+04
18,1	31,285	9,352	21,933	9,51E-08	3,887E+04
18,2	31,493	9,421	22,073	9,70E-08	3,992E+04
18,3	31,702	9,489	22,213	9,89E-08	4,094E+04
18,4	31,910	9,557	22,353	1,01E-07	4,194E+04
18,5	32,119	9,626	22,493	1,03E-07	4,292E+04
18,6	32,227	9,658	22,569	1,04E-07	4,389E+04
18,7	32,335	9,691	22,644	1,05E-07	4,485E+04
18,8	32,443	9,723	22,720	1,06E-07	4,580E+04
18,9	32,551	9,755	22,796	1,07E-07	4,673E+04
19,0	32,660	9,788	22,872	1,08E-07	4,766E+04
19,1	32,823	9,837	22,986	1,10E-07	4,858E+04
19,2	32,986	9,886	23,100	1,12E-07	4,948E+04
19,3	33,149	9,935	23,214	1,13E-07	5,037E+04
19,4	33,312	9,984	23,328	1,15E-07	5,125E+04
19,5	33,475	10,033	23,442	1,17E-07	5,211E+04
19,6	33,640	10,082	23,558	1,18E-07	5,296E+04
19,7	33,805	10,132	23,673	1,20E-07	5,380E+04
19,8	33,969	10,181	23,789	1,22E-07	5,463E+04

19,9	34,134	10,230	23,904	1,24E-07	5,544E+04
20,0	34,299	10,279	24,020	1,26E-07	5,624E+04
20,1	34,482	10,334	24,148	1,28E-07	5,703E+04
20,2	34,665	10,389	24,276	1,30E-07	5,781E+04
20,3	34,848	10,444	24,405	1,32E-07	5,857E+04
20,4	35,032	10,499	24,533	1,34E-07	5,932E+04
20,5	35,215	10,554	24,661	1,36E-07	6,006E+04
20,6	35,398	10,608	24,789	1,39E-07	6,079E+04
20,7	35,581	10,663	24,917	1,41E-07	6,150E+04
20,8	35,764	10,718	25,046	1,43E-07	6,221E+04
20,9	35,947	10,773	25,174	1,45E-07	6,290E+04
21,0	36,130	10,828	25,302	1,48E-07	6,358E+04
21,1	36,403	10,910	25,493	1,51E-07	6,425E+04
21,2	36,677	10,992	25,685	1,55E-07	6,491E+04
21,3	36,950	11,074	25,876	1,58E-07	6,555E+04
21,4	37,224	11,156	26,068	1,62E-07	6,617E+04
21,5	37,497	11,238	26,259	1,65E-07	6,678E+04
21,6	37,635	11,279	26,356	1,67E-07	6,739E+04
21,7	37,772	11,320	26,452	1,69E-07	6,798E+04
21,8	37,910	11,361	26,549	1,71E-07	6,857E+04
21,9	38,047	11,402	26,645	1,73E-07	6,915E+04
22,0	38,185	11,443	26,742	1,75E-07	6,972E+04
22,1	38,597	11,567	27,031	1,81E-07	7,029E+04
22,2	39,010	11,691	27,320	1,87E-07	7,083E+04
22,3	39,423	11,815	27,609	1,93E-07	7,136E+04
22,4	39,836	11,939	27,898	1,99E-07	7,187E+04
22,5	40,249	12,062	28,187	2,06E-07	7,236E+04
22,6	40,282	12,072	28,209	2,06E-07	7,285E+04
22,7	40,314	12,082	28,232	2,07E-07	7,333E+04
22,8	40,346	12,092	28,255	2,07E-07	7,381E+04
22,9	40,379	12,101	28,277	2,08E-07	7,429E+04
23,0	40,411	12,111	28,300	2,08E-07	7,478E+04
23,1	40,631	12,177	28,454	2,12E-07	7,525E+04
23,2	40,851	12,243	28,608	2,15E-07	7,572E+04
23,3	41,071	12,309	28,762	2,19E-07	7,618E+04
23,4	41,291	12,375	28,916	2,23E-07	7,663E+04
23,5	41,511	12,440	29,070	2,26E-07	7,708E+04
23,6	41,870	12,548	29,322	2,32E-07	7,752E+04
23,7	42,229	12,656	29,573	2,38E-07	7,794E+04
23,8	42,588	12,764	29,825	2,45E-07	7,835E+04
23,9	42,948	12,871	30,077	2,51E-07	7,876E+04
24,0	43,307	12,979	30,328	2,58E-07	7,915E+04
24,1	43,600	13,067	30,533	2,63E-07	7,954E+04
24,2	43,892	13,154	30,738	2,69E-07	7,991E+04
24,3	44,185	13,242	30,943	2,74E-07	8,028E+04
24,4	44,478	13,330	31,148	2,80E-07	8,064E+04
24,5	44,771	13,417	31,353	2,85E-07	8,100E+04
24,6	45,056	13,583	31,473	2,89E-07	8,134E+04
24,7	45,342	13,748	31,594	2,92E-07	8,169E+04
24,8	45,628	13,914	31,714	2,96E-07	8,203E+04
24,9	45,914	14,080	31,835	2,99E-07	8,236E+04

25,0	46,200	14,245	31,955	3,03E-07	8,270E+04
25,1	46,286	14,191	32,095	3,07E-07	8,303E+04
25,2	46,372	14,137	32,235	3,11E-07	8,335E+04
25,3	46,457	14,083	32,375	3,15E-07	8,367E+04
25,4	46,543	14,029	32,515	3,19E-07	8,398E+04
25,5	46,629	13,974	32,655	3,23E-07	8,430E+04
25,6	46,938	14,067	32,871	3,30E-07	8,460E+04
25,7	47,246	14,159	33,087	3,37E-07	8,490E+04
25,8	47,555	14,252	33,303	3,44E-07	8,520E+04
25,9	47,863	14,344	33,519	3,50E-07	8,548E+04
26,0	48,172	14,437	33,735	3,57E-07	8,577E+04
26,1	49,698	14,894	34,804	3,93E-07	8,603E+04
26,2	51,224	15,351	35,872	4,32E-07	8,628E+04
26,3	52,750	15,809	36,941	4,73E-07	8,650E+04
26,4	54,276	16,266	38,010	5,16E-07	8,670E+04
26,5	55,802	16,723	39,078	5,62E-07	8,688E+04
26,6	55,786	16,719	39,067	5,61E-07	8,706E+04
26,7	55,770	16,714	39,056	5,61E-07	8,724E+04
26,8	55,754	16,709	39,045	5,60E-07	8,742E+04
26,9	55,738	16,704	39,034	5,60E-07	8,760E+04
27,0	55,722	16,699	39,022	5,59E-07	8,778E+04
27,1	56,098	16,812	39,286	5,71E-07	8,795E+04
27,2	56,474	16,925	39,549	5,83E-07	8,813E+04
27,3	56,850	17,038	39,812	5,95E-07	8,830E+04
27,4	57,226	17,150	40,076	6,07E-07	8,846E+04
27,5	57,602	17,263	40,339	6,19E-07	8,863E+04
27,6	57,978	17,322	40,476	6,26E-07	8,879E+04
27,7	57,994	17,380	40,614	6,32E-07	8,895E+04
27,8	58,190	17,439	40,751	6,39E-07	8,910E+04
27,9	58,387	17,498	40,889	6,46E-07	8,926E+04
28,0	58,583	17,557	41,026	6,52E-07	8,941E+04
28,1	58,709	17,595	41,114	6,57E-07	8,956E+04
28,2	58,835	17,632	41,202	6,61E-07	8,972E+04
28,3	58,961	17,670	41,291	6,65E-07	8,987E+04
28,4	59,087	17,708	41,379	6,70E-07	9,002E+04
28,5	59,213	17,746	41,467	6,74E-07	9,017E+04
28,6	59,595	17,860	41,735	6,88E-07	9,031E+04
28,7	59,976	17,975	42,002	7,01E-07	9,046E+04
28,8	60,358	18,089	42,269	7,15E-07	9,060E+04
28,9	60,740	18,203	42,537	7,29E-07	9,074E+04
29,0	61,122	18,318	42,804	7,43E-07	9,087E+04
29,1	61,477	18,424	43,053	7,57E-07	9,101E+04
29,2	61,832	18,531	43,301	7,70E-07	9,114E+04
29,3	62,187	18,637	43,550	7,84E-07	9,127E+04
29,4	62,541	18,743	43,798	7,98E-07	9,139E+04
29,5	62,896	18,850	44,047	8,12E-07	9,152E+04
29,6	63,173	18,932	44,240	8,23E-07	9,164E+04
29,7	63,449	19,015	44,434	8,34E-07	9,176E+04
29,8	63,726	19,098	44,628	8,45E-07	9,188E+04
29,9	64,002	19,181	44,821	8,56E-07	9,200E+04
30,0	64,279	19,264	45,015	8,68E-07	9,211E+04

30,1	64,835	19,430	45,404	8,91E-07	9,223E+04
30,2	65,391	19,597	45,794	9,15E-07	9,234E+04
30,3	65,947	19,764	46,183	9,39E-07	9,244E+04
30,4	66,503	19,930	46,572	9,64E-07	9,255E+04
30,5	67,059	20,097	46,962	9,89E-07	9,265E+04
30,6	68,029	20,388	47,641	1,03E-06	9,275E+04
30,7	69,000	20,679	48,321	1,08E-06	9,285E+04
30,8	69,971	20,970	49,001	1,13E-06	9,294E+04
30,9	70,941	21,261	49,681	1,18E-06	9,302E+04
31,5	76,765	23,006	53,759	1,50E-06	9,347E+04
31,6	77,522	23,233	54,289	1,54E-06	9,354E+04
31,7	78,279	23,460	54,819	1,59E-06	9,360E+04
31,8	79,036	23,687	55,349	1,64E-06	9,366E+04
31,9	79,793	23,914	55,879	1,69E-06	9,372E+04
33,0	88,121	26,411	61,710	2,29E-06	9,428E+04
33,1	89,040	26,686	62,354	2,36E-06	9,432E+04
33,2	89,959	26,961	62,997	2,44E-06	9,436E+04
33,3	90,878	27,237	63,641	2,52E-06	9,440E+04
33,4	91,797	27,512	64,285	2,60E-06	9,444E+04
34,5	101,905	30,540	71,365	3,58E-06	9,495E+04

ANEXO B: Desenho do eixo de mandril





**ANEXO C: Memória de cálculo****I - DADOS**

$P_b := 3000\text{kgf} + 400\text{kgf} + 200\text{kgf}$	Peso da bobina de 30 toneladas mais os pesos do eixo na região onde a bobina encontra-se apoiada (340kgf), luva (400kgf), peças que envolvem o eixo (200kgf)
$P_b = 300083.49\text{N}$	
$D_e := 2252\text{mm}$	Diâmetro externo da bobina
$d := 100\text{mm}$	Diâmetro interno do eixo.
$T_r := 4000\text{N}$	Força de tração na chapa.
$\alpha := 15.7\text{deg}$	Ângulo que representa a inclinação da tira com a linha horizontal.

**II - ETAPA 1****1 - ESFORÇOS SOLICITANTES NA SEÇÃO A****1.1 - FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO X ( $V_x$ )**

$V_x := 0\text{N}$  Força cortante.

**1.2 - FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO Y ( $V_y$ )**

$pp1 := 340\text{kgf}$  Peso próprio do eixo referente ao comprimento de 1.002 mm.

$V_y := P_b + pp1$   $V_y = 303417.75\text{N}$  Força cortante.

$q_y := \frac{V_y}{1002\text{mm}}$   $q_y = 302.81 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$  Carga distribuída na direção horizontal.

**1.3 - MOMENTO FLETOR EM RELAÇÃO AO EIXO X ( $M_x$ )**

$M_x := V_y \cdot \frac{1002\text{mm}}{2}$   $M_x = 152012.29\text{N}\cdot\text{m}$  Momento fletor.

**1.4 - MOMENTO FLETOR EM RELAÇÃO AO EIXO Y ( $M_y$ )**

$M_y := V_x \cdot \frac{1002\text{mm}}{2}$   $M_y = 0\text{N}\cdot\text{m}$  Momento fletor.

## 1.5 - TENSÕES APLICADAS

### 1.5.1 - TENSÃO DE CISALHAMENTO DEVIDO A TORÇÃO NO PLANO ZX

$$\tau_{zx\_torcao} := 0 \frac{N}{mm^2} \quad \text{Tensão de cisalhamento devido à torção.}$$

### 1.5.2 - TENSÃO DE CISALHAMENTO DEVIDO A TORÇÃO NO PLANO ZY

$$\tau_{zy\_torcao} := 0 \frac{N}{mm^2} \quad \text{Tensão de cisalhamento devido à torção.}$$

### 1.5.3 - TENSÃO NORMAL DEVIDO A FLEXÃO EM RELAÇÃO AO EIXO X

$$D := 254mm \quad \text{Diâmetro externo do eixo.}$$

$$J_x := \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \quad J_x = 199408384.74mm^4 \quad \text{Momento de inércia.}$$

$$\sigma_{z\_v} := \frac{M_x \cdot D}{J_x \cdot 2} \quad \sigma_{z\_v} = 96.8 \frac{N}{mm^2} \quad \text{Tensão devida à flexão.}$$

$$K_t := 1.18 \quad \text{Fator de concentração de tensões.}$$

$$q := 0.763 \quad \text{Sensibilidade ao entalhe.}$$

O valor de q foi obtido em NORTON (2004), página 330.

$$K_f := 1 + q \cdot (K_t - 1) \quad K_f = 1.14$$

$$\sigma_{z\_v} := \frac{M_x \cdot D}{J_x \cdot 2} \cdot K_f \quad \sigma_{z\_v} = 110.1 \frac{N}{mm^2} \quad \text{Tensão devida à flexão considerando o fator de concentração de tensões.}$$

### 1.5.4 - TENSÃO NORMAL DEVIDO A FLEXÃO EM RELAÇÃO AO EIXO Y

$$J_y := \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \quad J_y = 199408384.74mm^4 \quad \text{Momento de inércia.}$$

$$\sigma_{z\_h} := \frac{M_y \cdot D}{J_y \cdot 2} \quad \sigma_{z\_h} = 0 \frac{N}{mm^2} \quad \text{Tensão atuante a flexão.}$$

$$\sigma_{z\_h} := \frac{M_y \cdot D}{J_y \cdot 2} \cdot K_f \quad \sigma_{z\_h} = 0 \frac{N}{mm^2} \quad \text{Tensão devida à flexão considerando o fator de concentração de tensões.}$$

### 1.5.5 - TENSÃO MÁXIMA DE CISALHAMENTO DEVIDO À FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO X

$$\text{area} := \pi \cdot \frac{D^2 - d^2}{4} \quad \text{area} = 42816.8 \text{mm}^2 \quad \text{Área da seção transversal do eixo.}$$

$$\tau_{zx\_cortante} := \frac{V_x}{\text{area}} \cdot \frac{D^2 + D \cdot d + d^2}{D^2 + d^2} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\tau_{zx\_cortante} = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão máxima de cisalhamento.}$$

### 1.5.6 - TENSÃO MÁXIMA DE CISALHAMENTO DEVIDO À FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO Y

$$\tau_{zy\_cortante} := \frac{V_y}{\text{area}} \cdot \frac{D^2 + D \cdot d + d^2}{D^2 + d^2} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\tau_{zy\_cortante} = 12.67 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão máxima de cisalhamento.}$$

### 1.5.7 - TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES NO PONTO (x = 0 mm, y = 127 mm, z = 1.002 mm)

$$\sigma_x := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \sigma_y := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{xy} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{zy} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_z := \sigma_{z\_v} \quad \sigma_z = 110.1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{zx} := \tau_{zx\_torcao} + \tau_{zx\_cortante} \quad \tau_{zx} = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{vm} := \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$

$$\sigma_{vm} = 110.1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão equivalente de von Mises.}$$

### 1.5.8 - TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES NO PONTO ( $x = 127 \text{ mm}$ , $y = 0 \text{ mm}$ , $z = 1.002 \text{ mm}$ )

$$\sigma_x := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \sigma_y := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{xy} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{zx} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{zy} := \tau_{zy\_torcao} + \tau_{zy\_cortante} \quad \tau_{zy} = 12.7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_z := \sigma_{z\_h} \quad \sigma_z = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{vm} := \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$

$$\sigma_{vm} = 21.9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão equivalente de von Mises.}$$

### 1.5.9 - PRESSÃO ATUANTE NA SUPERFÍCIE DO EIXO DEVIDO AO CARREGAMENTO VERTICAL

Pressão atuante na superfície de 1.002 mm de comprimento por 254 mm de largura:

$$p := \frac{V_y}{D \cdot 1002 \text{ mm}} \quad p = 1.192 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Pressão atuante na superfície superior do eixo.}$$

### 1.5.10 - PRESSÃO ATUANTE NA SUPERFÍCIE DO EIXO DEVIDO AO CARREGAMENTO HORIZONTAL

Pressão atuante na superfície de 1.002 mm de comprimento por 254 mm de largura:

$$p := \frac{V_x}{D \cdot 1002 \text{ mm}} \quad p = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Pressão atuante na superfície lateral do eixo.}$$

## 2 - ESFORÇOS SOLICITANTES NA SEÇÃO B

### 2.1 - FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO X ( $V_x$ )

$$V_x := 0 \text{ N} \quad \text{Força cortante.}$$



$$S_{ut} := 100 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2} \quad S_{ut} = 142233.43 \text{psi} \quad \text{Limite de ruptura do material.}$$

$$r_{in} := 1.5 \text{mm} \quad r_{in} = 0.06 \text{in} \quad \text{Raio de concordância.}$$

$$q := \frac{1}{1 + \frac{0.039 \text{in}^{0.5}}{\sqrt{r_{in}}}} \quad q = 0.86 \quad \text{Sensibilidade ao entalhe, página 330 (NORTON,2004)}$$

$$K_f := 1 + q \cdot (K_t - 1) \quad K_f = 2.74$$

$$\sigma_{z_v} := \frac{M_x}{J_x} \cdot \frac{D}{2} \cdot K_f \quad \sigma_{z_v} = 220.2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão devida à flexão considerando o fator de concentração de tensões.}$$

#### 2.5.4 - TENSÃO NORMAL DEVIDO A FLEXÃO EM RELAÇÃO AO EIXO Y

$$J_y := \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \quad J_y = 0 \text{m}^4 \quad \text{Momento de inércia.}$$

$$\sigma_{z_h} := \frac{M_y}{J_y} \cdot \frac{D}{2} \cdot K_f \quad \sigma_{z_h} = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão atuante a flexão.}$$

#### 2.5.5 - TENSÃO MÁXIMA DE CISALHAMENTO DEVIDO À FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO X

$$\text{area} := \pi \cdot \frac{D^2 - d^2}{4} \quad \text{area} = 77675.9 \text{mm}^2 \quad \text{Área da seção transversal do eixo.}$$

$$\tau_{zx\_cortante} := \frac{V_x}{\text{area}} \cdot \frac{D^2 + D \cdot d + d^2}{D^2 + d^2} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\tau_{zx\_cortante} = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão máxima de cisalhamento.}$$

#### 2.5.6 - TENSÃO MÁXIMA DE CISALHAMENTO DEVIDO À FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO Y

$$\tau_{zy\_cortante} := \frac{V_y}{\text{area}} \cdot \frac{D^2 + D \cdot d + d^2}{D^2 + d^2} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\tau_{zy\_cortante} = 6.72 \frac{N}{mm^2}$$

Tensão máxima de cisalhamento.

### 2.5.7 - TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES NO PONTO (x = 0 mm, y = 165 mm, z = 1.425 mm)

$$\sigma_x := 0 \frac{N}{mm^2} \quad \sigma_y := 0 \frac{N}{mm^2} \quad \tau_{xy} := 0 \frac{N}{mm^2} \quad \tau_{zy} := 0 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_z := \sigma_{z\_v} \quad \sigma_z = 220.2 \frac{N}{mm^2}$$

$$\tau_{zx} := \tau_{zx\_torcao} + \tau_{zx\_cortante} \quad \tau_{zx} = 0 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{vm} := \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$

$$\sigma_{vm} = 220.2 \frac{N}{mm^2}$$

Tensão equivalente.

### 2.5.8 - TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES NO PONTO (x = 165 mm, y = 0 mm, z = 1.425 mm)

$$\sigma_x := 0 \frac{N}{mm^2} \quad \sigma_y := 0 \frac{N}{mm^2} \quad \tau_{xy} := 0 \frac{N}{mm^2} \quad \tau_{zx} := 0 \frac{N}{mm^2}$$

$$\tau_{zy} := \tau_{zy\_torcao} + \tau_{zy\_cortante} \quad \tau_{zy} = 6.7 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_z := \sigma_{z\_h} \quad \sigma_z = 0 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{vm} := \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$

$$\sigma_{vm} = 11.6 \frac{N}{mm^2}$$

Tensão equivalente.

### 3 - ESFORÇOS SOLICITANTES NA SEÇÃO C

#### 3.1 - FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO X ( $V_x$ )

$$V_x := 0\text{N} \quad \text{Força cortante.}$$

#### 3.2 - FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO Y ( $V_y$ )

$$pp3 := 524\text{kgf} \quad \text{Peso próprio do eixo referente ao comprimento de 1.100 mm.}$$

$$R1 := \frac{(Pb + pp1) \cdot \left( \frac{1002\text{mm}}{2} + 423\text{mm} + 1100\text{mm} \right) + (pp2 - pp1) \cdot \left( \frac{423\text{mm}}{2} + 1100\text{mm} \right) + pp3 \cdot \frac{1100\text{mm}}{2}}{1100\text{mm}}$$

$$R1 = 564716.43\text{N} \quad \text{Reação atuante no mancal 1.}$$

$$V_y := R1 - Pb - pp2 \quad V_y = 258062.49\text{N} \quad \text{Força cortante.}$$

#### 3.3 - MOMENTO FLETOR EM RELAÇÃO AO EIXO X ( $M_x$ )

$$M_x := (Pb + pp1) \cdot \left( \frac{1002\text{mm}}{2} + 423\text{mm} + 270\text{mm} \right) + (pp2 - pp1) \cdot \left( \frac{423\text{mm}}{2} + 270\text{mm} \right) - R1 \cdot 270\text{mm}$$

$$M_x = 211365.59\text{N}\cdot\text{m} \quad \text{Momento fletor.}$$

#### 3.4 - MOMENTO FLETOR EM RELAÇÃO AO EIXO Y ( $M_y$ )

$$M_y := 0\text{N}\cdot\text{m} \quad \text{Momento fletor.}$$

### 3.5 - TENSÕES APLICADAS

#### 3.5.1 - TENSÃO DE CISALHAMENTO DEVIDO A TORÇÃO NO PLANO ZX

$$\tau_{zx\_torcao} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão de cisalhamento devido à torção.}$$

#### 3.5.2 - TENSÃO DE CISALHAMENTO DEVIDO A TORÇÃO NO PLANO ZY

$$\tau_{zy\_torcao} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão de cisalhamento devido à torção.}$$

### 3.5.3 - TENSÃO NORMAL DEVIDO A FLEXÃO EM RELAÇÃO A EIXO X

$$D := 282\text{mm}$$

Diâmetro externo do eixo (média entre diâmetros)

$$J_{x1} := \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \quad J_{x1} = 305523153.6\text{mm}^4$$

Momento de inércia da seção sem o rasgo de chave.

$$J_{x2} := \frac{63 \cdot \text{mm} \cdot (20 \cdot \text{mm})^3}{12} \quad J_{x2} = 42000\text{mm}^4$$

Momento de inércia da seção do rasgo de chave.

$$J_x := J_{x1} - \left[ J_{x2} + \left[ (63\text{mm} \cdot 20\text{mm}) \cdot (131\text{mm})^2 \right] \right]$$

$$J_x = 283858293.6\text{mm}^4$$

Momento de inercia da seção C.

$$\sigma_{z_v} := \frac{M_x}{J_x} \cdot 121\text{mm} \quad \sigma_{z_v} = 90.1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão devida à flexão.

$$r := 1.2\text{mm}$$

$$r = 0.05\text{in}$$

Raio de concordância do rasgo de chave.

$$K_t := 1.426 + 0.1643 \left( \frac{0.1}{\frac{r}{D}} \right) - 0.0019 \left( \frac{0.1}{\frac{r}{D}} \right)^2$$

$$K_t = 4.24$$

Fator de concentração de tensões (PILKEY, 1997, p. 408).

$$S_{ut} := 100 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2} \quad S_{ut} = 142233.43\text{psi}$$

Limite de ruptura do material.

$$q := \frac{1}{1 + \frac{0.039\text{in}^{0.5}}{\sqrt{r}}} \quad q = 0.85$$

Sensibilidade ao entalhe (NORTON, 2004, p. 330).

$$K_f := 1 + q \cdot (K_t - 1) \quad K_f = 3.75$$

Função do fator de concentração de tensões.

$$\sigma_{z_v} := \frac{M_x}{J_x} \cdot 121\text{mm} \cdot K_f \quad \sigma_{z_v} = 337.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão devida à flexão considerando o fator de concentração de tensões.

### 3.5.4 - TENSÃO NORMAL DEVIDO A FLEXÃO EM RELAÇÃO A EIXO Y

$$J_y := \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \quad J_y = 305523153.6 \text{mm}^4 \quad \text{Momento de inércia.}$$

$$\sigma_{z\_h} := \frac{M_y}{J_y} \cdot \frac{D}{2} \cdot K_f \quad \sigma_{z\_h} = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão atuante a flexão.}$$

### 3.5.5 - TENSÃO MÁXIMA DE CISALHAMENTO DEVIDO À FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO X

$$\text{area} := \pi \cdot \frac{D^2 - d^2}{4} \quad \text{area} = 54604 \text{mm}^2 \quad \text{Área da seção transversal do eixo.}$$

$$\tau_{zx\_cortante} := \frac{V_x}{\text{area}} \cdot \frac{D^2 + D \cdot d + d^2}{D^2 + d^2} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\tau_{zx\_cortante} = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão máxima de cisalhamento.}$$

### 3.5.6 - TENSÃO MÁXIMA DE CISALHAMENTO DEVIDO À FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO Y

$$\tau_{zy\_cortante} := \frac{V_y}{\text{area}} \cdot \frac{D^2 + D \cdot d + d^2}{D^2 + d^2} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\tau_{zy\_cortante} = 8.29 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão máxima de cisalhamento.}$$

### 3.6 - TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES NO PONTO (x = 31,5 mm, y = 121 mm, z = 1.695 mm)

$$\sigma_x := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \sigma_y := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{xy} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{zy} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_z := \sigma_{z\_v} \quad \sigma_z = 337.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{zx} := \tau_{zx\_torcao} + \tau_{zx\_cortante} \quad \tau_{zx} = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{\text{vm}} := \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$

$$\sigma_{\text{vm}} = 337.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão equivalente.

### 3.7 - TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES NO PONTO (x = 141 mm, y = 0 mm, z = 1.695 mm)

$$\sigma_x := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \sigma_y := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{xy} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{zx} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{zy} := \tau_{zy\_cortante} + \tau_{zy\_cortante} \quad \tau_{zy} = 16.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \sigma_z := \sigma_{z\_h} \quad \sigma_z = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{\text{vm}} := \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$

$$\sigma_{\text{vm}} = 28.7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão equivalente.

## III - ETAPA 2

### 1 - ESFORÇOS SOLICITANTES NA SEÇÃO A

#### 1.1 - TORQUE NO EIXO DO MANDRIL (Tor)

$$\text{Tor} := \text{Tr} \cdot \frac{D_e}{2}$$

$$\text{Tor} = 4504 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Torque no eixo do mandril.

#### 1.2 - FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO X (Vx)

$$\text{Tr}_x := \cos(\alpha) \cdot \text{Tr}$$

$$\text{Tr}_x = 3850.77 \text{ N}$$

Componente da tração na horizontal.

$$V_x := \text{Tr}_x$$

Força cortante.

$$q_x := \frac{V_x}{1002 \text{ mm}}$$

$$q_x = 3.84 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Carga distribuída na direção horizontal.

#### 1.3 - FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO Y (Vy)

$$\text{Tr}_y := \sin(\alpha) \cdot \text{Tr}$$

$$\text{Tr}_y = 1082.4 \text{ N}$$

Componente da tração na vertical.

$$V_y := P_b - T_{ry} + p \cdot l \quad V_y = 302335.35\text{N} \quad \text{Força cortante.}$$

$$q_y := \frac{V_y}{1002\text{mm}} \quad q_y = 301.73 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad \text{Carga distribuída na direção horizontal.}$$

#### 1.4 - MOMENTO FLETOR EM RELAÇÃO AO EIXO X (M<sub>x</sub>)

$$M_x := V_y \cdot \frac{1002\text{mm}}{2} \quad M_x = 151470.01\text{N}\cdot\text{m} \quad \text{Momento fletor.}$$

#### 1.5 - MOMENTO FLETOR EM RELAÇÃO AO EIXO Y (M<sub>y</sub>)

$$M_y := V_x \cdot \frac{1002\text{mm}}{2} \quad M_y = 1929.23\text{N}\cdot\text{m} \quad \text{Momento fletor.}$$

#### 1.6 - TENSÕES APLICADAS

##### 1.6.1 - TENSÃO DE CISALHAMENTO DEVIDO A TORÇÃO NO PLANO ZX

$$D := 254\text{mm} \quad \text{Diâmetro externo do eixo.}$$

$$W_t := \frac{\pi}{16} \cdot (D^3 - d^3) \quad W_t = 3021242.95\text{mm}^3 \quad \text{Momento resistente a torção.}$$

$$\tau_{zx\_torcao} := \frac{T_{or}}{W_t} \quad \tau_{zx\_torcao} = 1.49 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão de cisalhamento devido à torção.}$$

##### 1.6.2 - TENSÃO DE CISALHAMENTO DEVIDO A TORÇÃO NO PLANO ZY

$$\tau_{zy\_torcao} := \frac{T_{or}}{W_t} \quad \tau_{zy\_torcao} = 1.49 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão de cisalhamento devido à torção.}$$

##### 1.6.3 - TENSÃO NORMAL DEVIDO A FLEXÃO EM RELAÇÃO AO EIXO X

$$J_x := \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \quad J_x = 199408384.74\text{mm}^4 \quad \text{Momento de inércia.}$$

$$\sigma_{z\_v} := \frac{M_x \cdot D}{J_x \cdot 2} \quad \sigma_{z\_v} = 96.5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão devida à flexão.}$$

$$K_t := 1.18 \quad \text{Fator de concentração de tensões.}$$

$$q := 0.763 \quad \text{Sensibilidade ao entalhe.}$$

O valor de  $q$  foi obtido em NORTON (2004), página 330.

$$K_f := 1 + q \cdot (K_t - 1) \quad K_f = 1.14$$

$$\sigma_{z\_v} := \frac{M_x \cdot D}{J_x} \cdot \frac{D}{2} \cdot K_f \quad \sigma_{z\_v} = 109.7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão devida à flexão considerando o fator de concentração de tensões.

#### 1.6.4 - TENSÃO NORMAL DEVIDO A FLEXÃO EM RELAÇÃO AO EIXO Y

$$J_y := \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \quad J_y = 0 \text{ m}^4$$

Momento de inércia.

$$\sigma_{z\_h} := \frac{M_y \cdot D}{J_y} \cdot \frac{D}{2} \quad \sigma_{z\_h} = 1.2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão atuante a flexão.

$$\sigma_{z\_h} := \frac{M_y \cdot D}{J_y} \cdot \frac{D}{2} \cdot K_f \quad \sigma_{z\_h} = 1.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão atuante a flexão considerando o fator de concentração de tensões.

#### 1.6.5 - TENSÃO MÁXIMA DE CISALHAMENTO DEVIDO À FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO X

$$\text{area} := \pi \cdot \frac{D^2 - d^2}{4} \quad \text{area} = 42816.8 \text{ mm}^2$$

Área da seção transversal do eixo.

$$\tau_{zx\_cortante} := \frac{V_x}{\text{area}} \cdot \frac{D^2 + D \cdot d + d^2}{D^2 + d^2} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\tau_{zx\_cortante} = 0.16 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão máxima de cisalhamento.

#### 1.6.6 - TENSÃO MÁXIMA DE CISALHAMENTO DEVIDO À FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO Y

$$\tau_{zy\_cortante} := \frac{V_y}{\text{area}} \cdot \frac{D^2 + D \cdot d + d^2}{D^2 + d^2} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\tau_{zy\_cortante} = 12.62 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão máxima de cisalhamento.

**1.7 - TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES NO PONTO (x = 0 mm, y = 127 mm, z = 1.002 mm)**

$$\sigma_x := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \sigma_y := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{xy} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{zy} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_z := \sigma_{z\_v} \quad \sigma_z = 109.7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{zx} := \tau_{zx\_torcao} + \tau_{zx\_cortante} \quad \tau_{zx} = 1.7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{vm} := \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$

$$\sigma_{vm} = 109.8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão equivalente.

**1.8 - TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES NO PONTO (x = 127 mm, y = 0 mm, z = 1.002 mm)**

$$\sigma_x := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \sigma_y := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{xy} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{zx} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{zy} := \tau_{zy\_torcao} + \tau_{zy\_cortante} \quad \tau_{zy} = 14.1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_z := \sigma_{z\_h} \quad \sigma_z = 1.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{vm} := \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$

$$\sigma_{vm} = 24.5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão equivalente.

### 1.9 - PRESSÃO ATUANTE NA SUPERFÍCIE DO EIXO DEVIDO AO CARREGAMENTO VERTICAL

Pressão atuante em uma área de 1.002 mm de comprimento por 254 mm de largura:

$$p := \frac{V_y}{D \cdot 1002 \text{ mm}} \quad p = 1.188 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Pressão atuante na superfície superior do eixo.}$$

OU

$$\frac{D}{2} \cdot \int_0^\pi qV \cdot \sin(\theta) d\theta \rightarrow 254 \text{ mm} \cdot qV$$

$$qV := \frac{V_y}{254 \text{ mm}} \quad qV = 1190.3 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad \text{ou} \quad qV := \frac{qV}{1002 \text{ mm}} \quad qV = 1.19 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

### 1.10 - PRESSÃO ATUANTE NA SUPERFÍCIE DO EIXO DEVIDO AO CARREGAMENTO HORIZONTAL

Pressão atuante em uma área de 1.002 mm de comprimento por 254 mm de largura:

$$p := \frac{V_x}{D \cdot 1002 \text{ mm}} \quad p = 0.0151 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Pressão atuante na superfície lateral do eixo.}$$

OU

$$\frac{D}{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} qH \cdot \cos(\theta) d\theta \rightarrow 254 \text{ mm} \cdot qH$$

$$qH := \frac{V_x}{254 \text{ mm}} \quad qH = 15.16 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad \text{ou} \quad qH := \frac{qH}{1002 \text{ mm}} \quad qH = 0.02 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

## 2 - ESFORÇOS SOLICITANTES NA SEÇÃO B

### 2.1 - TORQUE NO EIXO DO MANDRIL (Tor)

$$\text{Tor} := \text{Tr} \cdot \frac{D_e}{2} \quad \text{Tor} = 4504 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Torque no eixo do mandril.}$$

### 2.2 - FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO X (Vx)

$$\text{Tr}_x := \cos(\alpha) \cdot \text{Tr} \quad \text{Tr}_x = 3850.77 \text{ N} \quad \text{Componente da tração na horizontal.}$$

$$V_x := \text{Tr}_x \quad \text{Força cortante.}$$

### 2.3 - FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO Y ( $V_y$ )

$$T_{ry} := \sin(\alpha) \cdot Tr \quad T_{ry} = 1082.4N \quad \text{Componente da tração na vertical.}$$

$$V_y := P_b - T_{ry} + pp_2 \quad V_y = 305571.54N \quad \text{Força cortante.}$$

### 2.4 - MOMENTO FLETOR EM RELAÇÃO AO EIXO X ( $M_x$ )

$$M_x := (P_b + pp_1 - T_{ry}) \cdot \left( \frac{1002mm}{2} + 423mm \right) + (pp_2 - pp_1) \cdot \frac{423mm}{2}$$

$$M_x = 280042.32N \cdot m \quad \text{Momento fletor.}$$

### 2.5 - MOMENTO FLETOR EM RELAÇÃO AO EIXO Y ( $M_y$ )

$$M_y := Tr_x \cdot \left( \frac{1002mm}{2} + 423mm \right) \quad M_y = 3558.11N \cdot m \quad \text{Momento fletor.}$$

### 2.6 - TENSÕES ATUANTES

#### 2.6.1 - TENSÃO DE CISALHAMENTO DEVIDO A TORÇÃO NO PLANO ZX

$$D := 330mm \quad \text{Diâmetro externo do eixo.}$$

$$W_t := \frac{\pi}{16} \cdot (D^3 - d^3) \quad W_t = 6859863.9mm^3 \quad \text{Momento resistente a torção.}$$

$$\tau_{zx\_torcao} := \frac{Tor}{W_t} \quad \tau_{zx\_torcao} = 0.7 \frac{N}{mm^2} \quad \text{Tensão de cisalhamento devido à torção.}$$

#### 2.6.2 - TENSÃO DE CISALHAMENTO DEVIDO A TORÇÃO NO PLANO ZY

$$\tau_{zy\_torcao} := \frac{Tor}{W_t} \quad \tau_{zy\_torcao} = 0.7 \frac{N}{mm^2} \quad \text{Tensão de cisalhamento devido à torção.}$$

#### 2.6.3 - TENSÃO NORMAL DEVIDO A FLEXÃO EM RELAÇÃO AO EIXO X

$$J_x := \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \quad J_x = 577228871.06mm^4 \quad \text{Momento de inércia.}$$

$$\sigma_{z\_v} := \frac{M_x \cdot D}{J_x \cdot 2} \quad \sigma_{z\_v} = 80 \frac{N}{mm^2} \quad \text{Tensão devida à flexão.}$$

$$K_t := 0.97527 \left( \frac{1.5\text{mm}}{D} \right)^{-0.20958} \quad K_t = 3.02 \quad \text{Fator de concentração de tensões, página 858 (NORTON, 2004).}$$

$$S_{ut} := 100 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2} \quad S_{ut} = 142233.43\text{psi} \quad \text{Limite de ruptura do material.}$$

$$r_{in} := 1.5\text{mm} \quad r_{in} = 0.06\text{in} \quad \text{Raio de concordância.}$$

$$q := \frac{1}{1 + \frac{0.039\text{in}^{0.5}}{\sqrt{r_{in}}}} \quad q = 0.86 \quad \text{Sensibilidade ao entalhe, página 330 (NORTON, 2004)}$$

$$K_f := 1 + q \cdot (K_t - 1) \quad K_f = 2.74$$

$$\sigma_{z_v} := \frac{M_x \cdot D}{J_x \cdot 2} \cdot K_f \quad \sigma_{z_v} = 219.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão devida à flexão considerando o fator de concentração de tensões.}$$

#### 2.6.4 - TENSÃO NORMAL DEVIDO A FLEXÃO EM RELAÇÃO AO EIXO Y

$$J_y := \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \quad J_y = 577228871.06\text{mm}^4 \quad \text{Momento de inércia.}$$

$$\sigma_{z_h} := \frac{M_y \cdot D}{J_y \cdot 2} \quad \sigma_{z_h} = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão atuante a flexão.}$$

$$\sigma_{z_h} := \frac{M_y \cdot D}{J_y \cdot 2} \cdot K_f \quad \sigma_{z_h} = 2.8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão devida à flexão considerando o fator de concentração de tensões.}$$

#### 2.6.5 - TENSÃO MÁXIMA DE CISALHAMENTO DEVIDO À FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO X

$$\text{area} := \pi \cdot \frac{D^2 - d^2}{4} \quad \text{area} = 77675.9\text{mm}^2 \quad \text{Área da seção transversal do eixo.}$$

$$\tau_{z_x\_cortante} := \frac{V_x}{\text{area}} \cdot \frac{D^2 + D \cdot d + d^2}{D^2 + d^2} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\tau_{z_x\_cortante} = 0.1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão máxima de cisalhamento.}$$

### 2.6.6 - TENSÃO MÁXIMA DE CISALHAMENTO DEVIDO À FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO Y

$$\tau_{zy\_cortante} := \frac{V_y}{\text{area}} \cdot \frac{D^2 + D \cdot d + d^2}{D^2 + d^2} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\tau_{zy\_cortante} = 6.7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão máxima de cisalhamento devido à força cortante.

### 2.7 - TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES NO PONTO (x = 0 mm, y = 165 mm, z = 1.425 mm)

$$\sigma_x := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \sigma_y := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{xy} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{zy} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{yz} := \tau_{zy}$$

$$\sigma_z := \sigma_{z\_v} \quad \sigma_z = 219.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{zx} := \tau_{zx\_torcao} + \tau_{zx\_cortante} \quad \tau_{zx} = 0.7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{vm} := \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$

$$\sigma_{vm} = 219.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão equivalente.

### 2.8 - TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES NO PONTO (x = 165 mm, y = 0 mm, z = 1.425 mm)

$$\sigma_x := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \sigma_y := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{xy} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{zx} := 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{zy} := \tau_{zy\_torcao} + \tau_{zy\_cortante} \quad \tau_{zy} = 7.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_z := \sigma_{z\_h} \quad \sigma_z = 2.79 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{\text{evm}} := \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$

$$\sigma_{\text{evm}} = 13 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão equivalente.}$$

### 3 - ESFORÇOS SOLICITANTES NA SEÇÃO C

#### 3.1 - TORQUE NO EIXO DO MANDRIL (Tor)

$$\text{Tor} := \text{Tr} \cdot \frac{D_e}{2} \quad \text{Tor} = 4504 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{Torque no eixo do mandril.}$$

#### 3.2 - FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO X (Vx)

$$\text{Tr}_x := \cos(\alpha) \cdot \text{Tr} \quad \text{Tr}_x = 3850.77 \text{ N} \quad \text{Componente da tração na horizontal.}$$

$$\text{R1}_x := \frac{\text{Tr}_x \left( \frac{1002 \text{ mm}}{2} + 423 \text{ mm} + 1100 \text{ mm} \right)}{1100 \text{ mm}}$$

$$\text{R1}_x = 7085.41 \text{ N} \quad \text{Reação atuante no mancal 1.}$$

$$\text{V}_x := \text{R1}_x - \text{Tr}_x \quad \text{V}_x = 3234.64 \text{ N} \quad \text{Força cortante.}$$

#### 3.3 - FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO Y (Vy)

$$\text{pp}_3 := 524 \text{ kgf} \quad \text{Peso próprio do eixo referente ao comprimento de 1.100 mm.}$$

$$\text{R1}_y := \frac{(\text{Pb} + \text{pp}_1 - \text{Try}) \cdot \left( \frac{1002 \text{ mm}}{2} + 423 \text{ mm} + 1100 \text{ mm} \right) + (\text{pp}_2 - \text{pp}_1) \cdot \left( \frac{423 \text{ mm}}{2} + 1100 \text{ mm} \right) + \text{pp}_3 \cdot \frac{1100 \text{ mm}}{2}}{1100 \text{ mm}}$$

$$\text{R1}_y = 562724.81 \text{ N} \quad \text{Reação atuante no mancal 1.}$$

$$\text{V}_y := \text{R1}_y - \text{Pb} - \text{pp}_2 + \text{Try} \quad \text{V}_y = 257153.27 \text{ N} \quad \text{Força cortante.}$$

### 3.4 - MOMENTO FLETOR EM RELAÇÃO A EIXO X (M<sub>x</sub>)

$$M_x := (P_b + p_{p1} - T_{ry}) \cdot \left( \frac{1002\text{mm}}{2} + 423\text{mm} + 270\text{mm} \right) + (p_{p2} - p_{p1}) \cdot \left( \frac{423\text{mm}}{2} + 270\text{mm} \right) - R_{1y} \cdot 270\text{mm}$$

$$M_x = 210610.94\text{N}\cdot\text{m} \quad \text{Momento fletor.}$$

### 3.5 - MOMENTO FLETOR EM RELAÇÃO A EIXO Y (M<sub>y</sub>)

$$M_y := T_{rx} \cdot \left( \frac{1002\text{mm}}{2} + 423\text{mm} + 270\text{mm} \right) - R_{1x} \cdot 270\text{mm}$$

$$M_y = 2684.75\text{N}\cdot\text{m} \quad \text{Momento fletor.}$$

### 3.6 - TENSÕES APLICADAS

#### 3.6.1 - TENSÃO DE CISALHAMENTO DEVIDO A TORÇÃO NO PLANO ZX

$$D := 282\text{mm} \quad \text{Diâmetro externo do eixo (média entre diâmetros).}$$

$$W_t := \frac{\pi}{16} \cdot (D^3 - d^3) \quad W_t = 4206939.71\text{mm}^3 \quad \text{Momento resistente a torção.}$$

$$\tau_{zx\_torcao} := \frac{T_{or}}{W_t} \quad \tau_{zx\_torcao} = 1.07 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão de cisalhamento devido à torção.}$$

#### 3.6.2 - TENSÃO DE CISALHAMENTO DEVIDO A TORÇÃO NO PLANO ZY

$$\tau_{zy\_torcao} := \frac{T_{or}}{W_t} \quad \tau_{zy\_torcao} = 1.07 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{Tensão de cisalhamento devido à torção.}$$

#### 3.6.3 - TENSÃO NORMAL DEVIDO A FLEXÃO EM RELAÇÃO AO EIXO X

$$J_{x1} := \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \quad J_{x1} = 305523153.6\text{mm}^4 \quad \text{Momento de inércia da seção sem o rasgo de chaveta.}$$

$$J_{x2} := \frac{63 \cdot \text{mm} \cdot (20 \cdot \text{mm})^3}{12} \quad J_{x2} = 42000\text{mm}^4 \quad \text{Momento de inércia da seção do rasgo de chaveta.}$$

$$J_x := J_{x1} - \left[ J_{x2} + \left[ (63\text{mm} \cdot 20\text{mm}) \cdot (131\text{mm})^2 \right] \right]$$

$$J_x = 283858293.6\text{mm}^4 \quad \text{Momento de inercia da seção C.}$$

$$\sigma_{z_v} := \frac{M_x}{J_x} \cdot 12 \text{ lmm} \quad \sigma_{z_v} = 89.8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão devida à flexão.

$$r := 1.2 \text{ mm} \quad r = 0.05 \text{ in}$$

Raio de concordância no rasgo de chaveta.

$$K_t := 1.426 + 0.1643 \left( \frac{0.1}{\frac{r}{D}} \right) - 0.0019 \left( \frac{0.1}{\frac{r}{D}} \right)^2$$

$$K_t = 4.24$$

Fator de concentração de tensões (PILKEY, 1997, p. 408).

$$S_{ut} := 100 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2} \quad S_{ut} = 142233.43 \text{ psi}$$

Limite de ruptura do material.

$$q := \frac{1}{1 + \frac{0.039 \text{ in}^{0.5}}{\sqrt{r}}} \quad q = 0.85$$

Sensibilidade ao entalhe (NORTON, 2004, p. 330).

$$K_f := 1 + q \cdot (K_t - 1) \quad K_f = 3.75$$

Função do fator de concentração de tensões.

$$\sigma_{z_v} := \frac{M_x}{J_x} \cdot 12 \text{ lmm} \cdot K_f \quad \sigma_{z_v} = 336.2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão devida à flexão, considerando o fator de concentração de tensões.

### 3.6.4 - TENSÃO NORMAL DEVIDO A FLEXÃO EM RELAÇÃO AO EIXO Y

$$J_y := \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \quad J_y = 0 \text{ m}^4$$

Momento de inércia.

$$\sigma_{z_h} := \frac{M_y}{J_y} \cdot \frac{D}{2} \cdot K_f \quad \sigma_{z_h} = 4.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão atuante a flexão.

### 3.6.5 - TENSÃO MÁXIMA DE CISALHAMENTO DEVIDO À FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO X

$$\text{area} := \pi \cdot \frac{D^2 - d^2}{4} \quad \text{area} = 54604 \text{ mm}^2$$

Área da seção transversal do eixo.

$$\tau_{zx\_cortante} := \frac{V_x}{\text{area}} \cdot \frac{D^2 + D \cdot d + d^2}{D^2 + d^2} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\tau_{zx\_cortante} = 0.1 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Tensão máxima de cisalhamento.

### 3.6.6 - TENSÃO MÁXIMA DE CISALHAMENTO DEVIDO À FORÇA CORTANTE NA DIREÇÃO Y

$$\tau_{zy\_cortante} := \frac{V_y}{\text{area}} \cdot \frac{D^2 + D \cdot d + d^2}{D^2 + d^2} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\tau_{zy\_cortante} = 8.26 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Tensão máxima de cisalhamento.

### 3.7 - TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES NO PONTO (x = 31,5 mm, y = 121 mm, z = 1.695 mm)

$$\sigma_x := 0 \frac{N}{\text{mm}^2} \quad \sigma_y := 0 \frac{N}{\text{mm}^2} \quad \tau_{xy} := 0 \frac{N}{\text{mm}^2} \quad \tau_{zy} := 0 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_z := \sigma_{z\_v} \quad \sigma_z = 336.2 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{zx} := \tau_{zx\_torcao} + \tau_{zx\_cortante} \quad \tau_{zx} = 1.2 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{vm} := \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$

$$\sigma_{vm} = 336.2 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Tensão equivalente.

### 3.8 - TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES NO PONTO (x = 141 mm, y = 0 mm, z = 1.695 mm)

$$\sigma_x := 0 \frac{N}{\text{mm}^2} \quad \sigma_y := 0 \frac{N}{\text{mm}^2} \quad \tau_{xy} := 0 \frac{N}{\text{mm}^2} \quad \tau_{zx} := 0 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{zy} := \tau_{zy\_torcao} + \tau_{zy\_cortante} \quad \tau_{zy} = 9.3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \sigma_z := \sigma_z\_h \quad \sigma_z = 4.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{\text{evm}} := \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$

$$\sigma_{\text{evm}} = 16.8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensão equivalente.

## ANEXO D: Relatório da determinação das tensões e coeficientes de segurança via KISSsoft, baseado na norma DIN 743-1

### Etapa 1:

————— KISSsoft/Hirware Rel. 04-2006 —————  
 ACESITA S.A.  
 File name : C:/Arquivos de programas/KISSsoft-Hirware 04-2006/USR/ac40530/Eixo  
 Mandril TD2.W10  
 Project :  
 Date : 23.08.2010/16:44:43 User : ac40530  
 Description : Eixo Mandril TD2 Etapa 1 300083,49N No.:

**Important hint: At least one warning has occurred during the calculation:**

1-> For shaft with internal diameter the notch factors are limited.  
 Non of the known calculation methods produces reliable data. It is proposed to  
 use the data for the full shaft and to judge the results conservatively

2-> Fatigue resistance:  
 The minimal safety  
 factor is not reached!

### **Strength calculation according to DIN 743 (Edition 2000-10)**

#### Summary

Shaft to:  
 Drawing 6867010009  
 Description Eixo do mandril da desbobinadeira TD2 (Etapa 1 - Carga 300.08

Material 42 CrMo 4 (1)  
 Material type Heat treatable steel  
 Material treatment alloyed, through hardened  
 Surface treatment No

Calculation of fatigue resistance and the static strength  
 Calculation for load case 2 (sig.av/sig.mv = const)

Cross section	Position (Y-Koor)	effect of notch
A-A	1002.00	Shoulder
B-B	1425.00	Shoulder
C-C	1695.00	key

#### Results:

Cross section	Notch- factor bending	Surface factor	Size coeff. bending	Safety fatigue strength	Safety Yield- strength
A-A	1.00	0.89	0.80	2.75	4.01
B-B	3.02	0.89	0.80	1.17	5.58
C-C	2.78	1.00	0.80	0.91	3.37
Nominal safety:				1.20	1.20

The requirements of the safety proof of the shaft are:

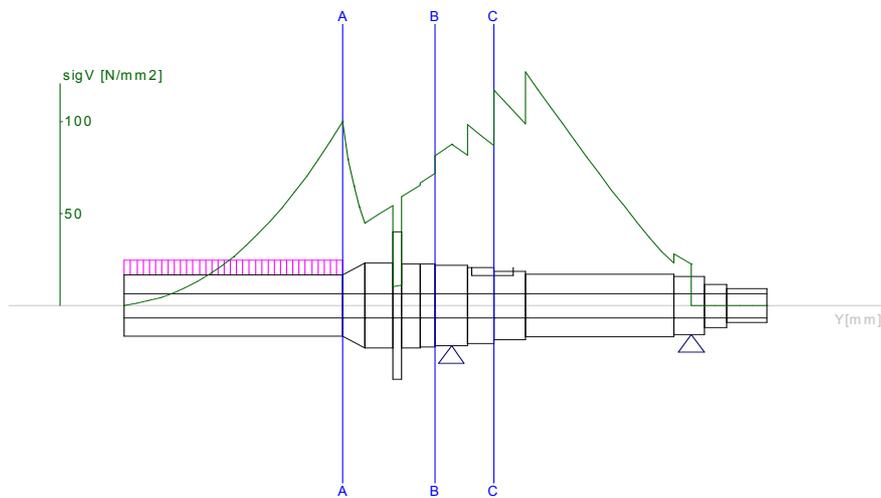
satisfied [ ] not satisfied [x]

Design engineer:..... Date:..... Signature:.....

Name: C:\Arquivos de programas\KISSsoft-Hirware 04-2006\USR\ac40530\Eixo Mandril TD2.W 10, Date/Time: 23.08.2010/16:44:43

**Strength calculation**

Principal stress



Drawing: 6867010009

Description: Eixo do mandril da desbobinadeira TD2 (Etapa 1 - Carga 300.083,49 N)

**Calculation details:**

General statements

Drawing		6867010009
Description	Eixo do mandril da desbobinadeira TD2 (Etapa 1 - Carga 300.08	
Length (mm)	[l]	2945.00
Speed (1/min)	[n]	30.00

Material	42 CrMo 4 (1)	
Material type	Heat treatable steel	
Material treatment	alloyed, through hardened	
Surface treatment	No	

Reference diameter material (mm)	[dB]	16.00
sigB according DIN 743 (at dB) (N/mm <sup>2</sup> )	[sigB]	1100.00
sigS according DIN 743 (at dB) (N/mm <sup>2</sup> )	[sigS]	900.00
[sigzdW] (bei dB) (N/mm <sup>2</sup> )		440.00
[sigbW] (bei dB) (N/mm <sup>2</sup> )		550.00
[tautW] (bei dB) (N/mm <sup>2</sup> )		330.00
Thickness of raw material (mm)	[dWerkst]	620.00

Material data calculated according DIN743/3 with K1(d)

Material strength calculated from size of raw material

Geometric size coefficient K1d calculated from raw material diameter

[sigBeff] (N/mm <sup>2</sup> )	737.00
[sigSeff] (N/mm <sup>2</sup> )	603.00
[sigbF] (N/mm <sup>2</sup> )	663.30
[tautF] (N/mm <sup>2</sup> )	348.14

[sigzdW] (N/mm <sup>2</sup> )	294.80
[sigbW] (N/mm <sup>2</sup> )	368.50
[tautW] (N/mm <sup>2</sup> )	221.10

Fatigue resistance for single stage use

Calculation for load case 2 (sig.av/sig.mv = const)

**Cross section A-A Shoulder**

Comment		
Position (Y-Co-ordinate) (mm)	[y]	1002.00
External diameter (mm)	[da]	254.000
Inner diameter (mm)	[di]	100.000

effect of notch

		Shoulder			
[D, r, t] (mm)		254.002	50.000	0.001	
Mean roughness (µm)		[Rz]			8.000
		Tension/Compression Bending Torsion Shearing			
Load: (N) (Nm)					
Mean value		0.0	0.0	0.0	0.0
Amplitude		0.0	152803.7	0.0	304997.4
Maximal value		0.0	259766.3	0.0	518495.6
Cross section, section modulus: (mm <sup>2</sup> )					
[A, Wb, Wt, A]		42816.8	1570145	3140290	42816.8
Stresses: (N/mm <sup>2</sup> )					
[sigzdm, sigbm, taum, tauqm] (N/mm <sup>2</sup> )		0.000	0.000	0.000	0.000
[sigzda, sigba, taua, tauqa] (N/mm <sup>2</sup> )		0.000	97.318	0.000	12.735
[sigzdmax, sigbmax, taumax, tauqmax] (N/mm <sup>2</sup> )		0.000	165.441	0.000	21.650
Technological size influence	[Kl(sigB)]		0.670		
	[Kl(sigS)]		0.670		
		Tension/Compression Bending Torsion			
Shape number	[alfa]	1.006	1.000	1.000	
References stress slope	[G']	0.069	0.069	0.023	
support coefficient n	[n]	1.006	1.000	1.000	
Notch effect coefficient	[beta]	1.000	1.000	1.000	
Geometrical size influence	[K2(d)]	1.000	0.800	0.800	
Influence coefficient surface roughness	[KF]	0.887	0.887	0.935	
Influence coefficient surface strengthening	[KV]	1.000	1.000	1.000	
Total influence coefficient	[K]	1.127	1.377	1.319	
Present margin of safety for fatigue resistance:					
Equivalent mean stress (N/mm <sup>2</sup> )	[sigmV]		0.000		
Equivalent mean stress (N/mm <sup>2</sup> )	[taumV]		0.000		
Part bending fatigue stress (N/mm <sup>2</sup> )	[sigWK]	261.623	267.647	167.603	
Influence coefficient mean stress sens.	[PsisigK]	0.216	0.222	0.128	
Possible amplitude (N/mm <sup>2</sup> )	[sigADK]	261.623	267.647	167.603	
Margin of safety fatigue resistance	[S]		2.750		
Required safety	[Smin]		1.200		
Result (%)	[S/Smin]		229.2		
Present margin of safety for proof against exceed of yield point:					
Static support number	[K2F]	1.000	1.100	1.000	
Increase coefficient	[gammaF]	1.000	1.000	1.000	
Part yield stress (N/mm <sup>2</sup> )	[sigFK]	603.000	663.300	348.142	
Margin of safety yield stress	[S]		4.009		
Required safety	[Smin]		1.200		
Result (%)	[S/Smin]		334.1		

**Cross section B-B Shoulder**

Comment

Position (Y-Co-ordinate) (mm)	[y]		1425.00
External diameter (mm)	[da]		330.380
Inner diameter (mm)	[di]		100.000

effect of notch

		Shoulder			
[D, r, t] (mm)		344.000	1.500	6.810	
Mean roughness (µm)		[Rz]			8.000
		Tension/Compression Bending Torsion Shearing			
Load: (N) (Nm)					
Mean value		0.0	0.0	0.0	0.0
Amplitude		0.0	282458.9	0.0	308264.2
Maximal value		0.0	480180.1	0.0	524049.1
Cross section, section modulus: (mm <sup>2</sup> )					
[A, Wb, Wt, A]		77873.0	3510593	7021186	77873.0
Stresses: (N/mm <sup>2</sup> )					
[sigzdm, sigbm, taum, tauqm] (N/mm <sup>2</sup> )		0.000	0.000	0.000	0.000
[sigzda, sigba, taua, tauqa] (N/mm <sup>2</sup> )		0.000	80.459	0.000	6.742
[sigzdmax, sigbmax, taumax, tauqmax] (N/mm <sup>2</sup> )		0.000	136.780	0.000	11.461
Technological size influence	[Kl(sigB)]		0.670		

	[K1 (sigS)]	0.670			
			Tension/Compression	Bending	Torsion
Shape number	[alfa]	3.433	3.281	2.015	
References stress slope	[G']	1.679	1.679	0.767	
support coefficient n	[n]	1.086	1.086	1.058	
Notch effect coefficient	[beta]	3.161	3.020	1.904	
Geometrical size influence	[K2 (d)]	1.000	0.800	0.800	
Influence coefficient surface roughness					
	[KF]	0.887	0.887	0.935	
Influence coefficient surface strengthening					
	[KV]	1.000	1.000	1.000	
Total influence coefficient	[K]	3.287	3.902	2.449	
Present margin of safety for fatigue resistance:					
Equivalent mean stress (N/mm <sup>2</sup> )	[sigmV]	0.000			
Equivalent mean stress (N/mm <sup>2</sup> )	[taumV]	0.000			
Part bending fatigue stress (N/mm <sup>2</sup> )					
	[sigWK]	89.677	94.434	90.283	
Influence coefficient mean stress sens.					
	[PsisigK]	0.065	0.068	0.065	
Possible amplitude (N/mm <sup>2</sup> )	[sigADK]	89.677	94.434	90.283	
Margin of safety fatigue resistance					
	[S]	1.174			
Required safety	[Smin]	1.200			
Result (%)	[S/Smin]	97.8			
Present margin of safety for proof against exceed of yield point:					
Static support number	[K2F]	1.000	1.100	1.000	
Increase coefficient	[gammaF]	1.150	1.150	1.000	
Part yield stress (N/mm <sup>2</sup> )	[sigFK]	693.450	762.795	348.142	
Margin of safety yield stress	[S]	5.577			
Required safety	[Smin]	1.200			
Result (%)	[S/Smin]	464.7			
<b>Cross section C-C key</b>					
Comment					
Position (Y-Co-ordinate) (mm)	[y]		1695.00		
External diameter (mm)	[da]		282.000		
Inner diameter (mm)	[di]		100.000		
effect of notch					
					key
No of keys	[n]		1		
Groove with manufactured with end milling cutter standard:					
DIN 6885.1 (Standard)					
[b, t, r] (mm)		63.000	20.150	1.800	
Mean roughness (µm)	[Rz]			8.000	
			Tension/Compression	Bending	Torsion Shearing
Load: (N) (Nm)					
Mean value		0.0	0.0	0.0	0.0
Amplitude		0.0	251079.5	0.0	279048.8
Maximal value		0.0	426835.1	0.0	474383.0
Cross section, section modulus: (mm <sup>2</sup> )					
[A, Wb, Wt, A]		54604.0	2166831	4333662	54604.0
Stresses: (N/mm <sup>2</sup> )					
[sigzdm, sigbm, taum, tauqm] (N/mm <sup>2</sup> )		0.000	0.000	0.000	0.000
[sigzda, sigba, taua, tauqa] (N/mm <sup>2</sup> )		0.000	115.874	0.000	8.960
[sigzdmx, sigbmx, taumax, tauqmax] (N/mm <sup>2</sup> )		0.000	196.986	0.000	15.232
Technological size influence					
	[K1 (sigB)]		0.670		
	[K1 (sigS)]		0.670		
			Tension/Compression	Bending	Torsion
Notch effect coefficient	[beta (dB)]	2.674	2.674	1.637	
[dB] (mm) = 40.0					
Geometrical size influence	[K3 (d)]	0.915	0.915	0.957	
Geometrical size influence	[K3 (dB)]	0.952	0.952	0.976	
Notch effect coefficient	[beta]	2.784	2.784	1.669	
Geometrical size influence	[K2 (d)]	1.000	0.800	0.800	
Influence coefficient surface roughness					
	[KF]	1.000	1.000	1.000	
Roughness factor is included into the notch effect coefficient					
Influence coefficient surface strengthening					
	[KV]	1.000	1.000	1.000	

Total influence coefficient	[K]	2.784	3.480	2.087
Present margin of safety for fatigue resistance:				
Equivalent mean stress (N/mm <sup>2</sup> )	[sigmV]	0.000		
Equivalent mean stress (N/mm <sup>2</sup> )	[taumV]	0.000		
Part bending fatigue stress (N/mm <sup>2</sup> )				
	[sigWK]	105.883	105.883	105.960
Influence coefficient mean stress sens.				
	[PsisigK]	0.077	0.077	0.077
Possible amplitude (N/mm <sup>2</sup> )	[sigADK]	105.883	105.883	105.960
Margin of safety fatigue resistance				
	[S]	0.914		
Required safety	[Smin]	1.200		
Result (%)	[S/Smin]	76.1		
Present margin of safety for proof against exceed of yield point:				
Static support number	[K2F]	1.000	1.100	1.000
Increase coefficient	[gammaF]	1.000	1.000	1.000
Part yield stress (N/mm <sup>2</sup> )	[sigFK]	603.000	663.300	348.142
Margin of safety yield stress	[S]		3.367	
Required safety	[Smin]		1.200	
Result (%)	[S/Smin]		280.6	

## Remarks:

- The shear-force is in the analysis DIN 743 not taken into account.
- Cross section with square groove:  
Undefined reference diameter for the notch number.  
The shaft diameter is taken as reference diameter.
- Cross section with interference fit:  
The notching factor for the light fit case is no longer defined in DIN 743 .  
The factors are introduced from the FKM Guidelines.

---

End report

---

lines : 307

---

## Etapa 2:

---

KISSsoft/Hirnware Rel. 04-2006

ACESITA S.A.  
 File name : C:/Arquivos de programas/KISSsoft-Hirnware 04-2006/USR/ac40530/Eixo  
 Mandril TD2 Etapa 2.W10  
 Project :  
 Date : 23.08.2010/16:43:01 User : ac40530  
 Description : Eixo Mandril TD2 Etapa 2 299001,1 N No.:

---

**Important hint: At least one warning has occurred during the calculation:**

1-> For shaft with internal diameter the notch factors are limited.  
 Non of the known calculation methods produces reliable data. It is proposed to  
 use the data for the full shaft and to judge the results conservatively

2-> Fatigue resistance:  
 The minimal safety  
 factor is not reached!

**Strength calculation according to DIN 743 (Edition 2000-10)**

**Summary**

Shaft to:  
 Drawing 6867010009  
 Description Eixo do mandril da desbobinadeira TD2 (Etapa 2 - Carga 299.00)

Material 42 CrMo 4 (1)  
 Material type Heat treatable steel  
 Material treatment alloyed, through hardened  
 Surface treatment No

Calculation of fatigue resistance and the static strength  
 Calculation for load case 2 (sig.av/sig.mv = const)

Cross section	Position (Y-Koor)	effect of notch
A-A	1002.00	Shoulder
B-B	1425.00	Shoulder
C-C	1695.00	key

**Results:**

Cross section	Notch- factor bending	Surface factor	Size coeff. bending	Safety fatigue strength	Safety Yield- strength
A-A	1.00	0.89	0.80	2.77	4.05
B-B	3.02	0.89	0.80	1.18	5.63
C-C	2.78	1.00	0.80	0.92	3.40

Nominal safety: 1.20 1.20

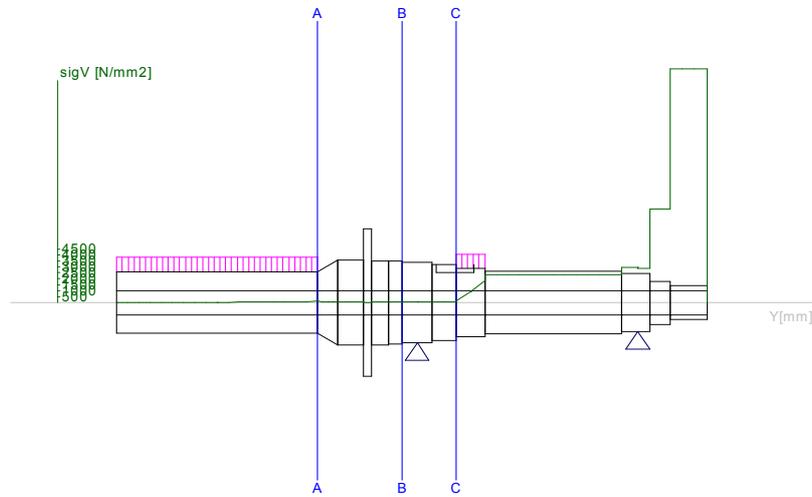
The requirements of the safety proof of the shaft are:

satisfied [ ] not satisfied [x]

Design engineer:..... Date:..... Signature:.....

Name: C:\Arquivos de programas\KISSsoft-Hirware 04-2006\USR\lac40530\Eixo Mandril TD2 Etapa 2.W10, Date/Time: 23.08.2010/16:43:01

Strength calculation  
Principal stress



Drawing: 6867010009

Description: Eixo do mandril da desbobinadeira TD2 (Etapa 2 - Carga 299.001,1 N)

#### Calculation details:

##### General statements

Drawing		6867010009
Description	Eixo do mandril da desbobinadeira TD2 (Etapa 2 - Carga 299.00	
Length (mm)	[l]	2945.00
Speed (1/min)	[n]	3.60

Material	42 CrMo 4 (1)
Material type	Heat treatable steel
Material treatment	alloyed, through hardened
Surface treatment	No

Reference diameter material (mm)	[dB]	16.00
sigB according DIN 743 (at dB) (N/mm <sup>2</sup> )	[sigB]	1100.00
sigS according DIN 743 (at dB) (N/mm <sup>2</sup> )	[sigS]	900.00
[sigzdW] (bei dB) (N/mm <sup>2</sup> )		440.00
[sigbW] (bei dB) (N/mm <sup>2</sup> )		550.00
[tautW] (bei dB) (N/mm <sup>2</sup> )		330.00
Thickness of raw material (mm)	[dWerkst]	620.00

Material data calculated according DIN743/3 with K1(d)

Material strength calculated from size of raw material

Geometric size coefficient K1d calculated from raw material diameter

[sigBeff] (N/mm <sup>2</sup> )	737.00
[sigSeff] (N/mm <sup>2</sup> )	603.00
[sigbF] (N/mm <sup>2</sup> )	663.30
[tautF] (N/mm <sup>2</sup> )	348.14

[sigzdW] (N/mm <sup>2</sup> )	294.80
[sigbW] (N/mm <sup>2</sup> )	368.50
[tautW] (N/mm <sup>2</sup> )	221.10

Fatigue resistance for single stage use

Calculation for load case 2 (sig.av/sig.mv = const)

##### Cross section A-A Shoulder

Comment		
Position (Y-Co-ordinate) (mm)	[y]	1002.00
External diameter (mm)	[da]	254.000
Inner diameter (mm)	[di]	100.000

effect of notch

	Shoulder			
[D, r, t] (mm)	254.002	50.000	0.001	
Mean roughness ( $\mu\text{m}$ )	[Rz]		8.000	
				Tension/Compression Bending Torsion Shearing
Load: (N) (Nm)				
Mean value	-1925.4	0.0	0.0	0.0
Amplitude	1925.4	151450.6	0.0	302296.5
Maximal value	-6546.4	257466.0	0.0	513904.1
Cross section, section modulus: ( $\text{mm}^2$ )				
[A, Wb, Wt, A]	42816.8	1570145	3140290	42816.8
Stresses: ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )				
[sigzdm, sigbm, taum, tauqm] ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )	-0.045	0.000	0.000	0.000
[sigzda, sigba, taua, tauqa] ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )	0.045	96.456	0.000	12.622
[sigzdm, sigbmax, taumax, tauqmax] ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )	-0.153	163.976	0.000	21.458
Technological size influence	[Kl(sigB)]	0.670		
	[Kl(sigS)]	0.670		
				Tension/Compression Bending Torsion
Shape number	[alfa]	1.006	1.000	1.000
References stress slope	[G']	0.069	0.069	0.023
support coefficient n	[n]	1.006	1.000	1.000
Notch effect coefficient	[beta]	1.000	1.000	1.000
Geometrical size influence	[K2(d)]	1.000	0.800	0.800
Influence coefficient surface roughness	[KF]	0.887	0.887	0.935
Influence coefficient surface strengthening	[KV]	1.000	1.000	1.000
Total influence coefficient	[K]	1.127	1.377	1.319

Present margin of safety for fatigue resistance:

Equivalent mean stress ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )	[sigmV]	0.045		
Equivalent mean stress ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )	[taumV]	0.026		
Part bending fatigue stress ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )	[sigWK]	261.623	267.647	167.603
Influence coefficient mean stress sens.	[PsigK]	0.216	0.222	0.128
Possible amplitude ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )	[sigADK]	301.500	267.675	167.603
Margin of safety fatigue resistance	[S]	2.774		
Required safety	[Smin]	1.200		
Result (%)	[S/Smin]	231.2		

Present margin of safety

for proof against exceed of yield point:

Static support number	[K2F]	1.000	1.100	1.000
Increase coefficient	[gammaF]	1.000	1.000	1.000
Part yield stress ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )	[sigFK]	603.000	663.300	348.142
Margin of safety yield stress	[S]	4.049		
Required safety	[Smin]	1.200		
Result (%)	[S/Smin]	337.4		

**Cross section B-B Shoulder**

Comment				
Position (Y-Co-ordinate) (mm)	[y]		1425.00	
External diameter (mm)	[da]		330.380	
Inner diameter (mm)	[di]		100.000	

effect of notch

	Shoulder			
[D, r, t] (mm)	344.000	1.500	6.810	
Mean roughness ( $\mu\text{m}$ )	[Rz]		8.000	
				Tension/Compression Bending Torsion Shearing
Load: (N) (Nm)				
Mean value	-1925.4	0.0	0.0	0.0
Amplitude	1925.4	279963.2	0.0	305563.3
Maximal value	-6546.4	475937.5	0.0	519457.6
Cross section, section modulus: ( $\text{mm}^2$ )				
[A, Wb, Wt, A]	77873.0	3510593	7021186	77873.0
Stresses: ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )				
[sigzdm, sigbm, taum, tauqm] ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )	-0.025	0.000	0.000	0.000
[sigzda, sigba, taua, tauqa] ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )	0.025	79.748	0.000	6.682
[sigzdm, sigbmax, taumax, tauqmax] ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )	-0.084	135.572	0.000	11.360

Technological size influence	[K1 (sigB)]	0.670		
	[K1 (sigS)]	0.670		
			Tension/Compression	Bending Torsion
Shape number	[alfa]	3.433	3.281	2.015
References stress slope	[G']	1.679	1.679	0.767
support coefficient n	[n]	1.086	1.086	1.058
Notch effect coefficient	[beta]	3.161	3.020	1.904
Geometrical size influence	[K2 (d)]	1.000	0.800	0.800
Influence coefficient surface roughness	[KF]	0.887	0.887	0.935
Influence coefficient surface strengthening	[KV]	1.000	1.000	1.000
Total influence coefficient	[K]	3.287	3.902	2.449
Present margin of safety for fatigue resistance:				
Equivalent mean stress (N/mm <sup>2</sup> )	[sigmV]	0.025		
Equivalent mean stress (N/mm <sup>2</sup> )	[taumV]	0.014		
Part bending fatigue stress (N/mm <sup>2</sup> )	[sigWK]	89.677	94.434	90.283
Influence coefficient mean stress sens.	[PsisigK]	0.065	0.068	0.065
Possible amplitude (N/mm <sup>2</sup> )	[sigADK]	95.889	94.436	90.283
Margin of safety fatigue resistance	[S]	1.184		
Required safety	[Smin]	1.200		
Result (%)	[S/Smin]	98.7		
Present margin of safety for proof against exceed of yield point:				
Static support number	[K2F]	1.000	1.100	1.000
Increase coefficient	[gammaF]	1.150	1.150	1.000
Part yield stress (N/mm <sup>2</sup> )	[sigFK]	693.450	762.795	348.142
Margin of safety yield stress	[S]	5.630		
Required safety	[Smin]	1.200		
Result (%)	[S/Smin]	469.2		

**Cross section C-C key**

Comment				
Position (Y-Co-ordinate) (mm)	[y]		1695.00	
External diameter (mm)	[da]		282.000	
Inner diameter (mm)	[di]		100.000	
effect of notch				

## key

No of keys	[n]	1		
Groove with manufactured with end milling cutter standard:				
DIN 6885.1 (Standard)				
[b, t, r] (mm)		63.000	20.150	1.800
Mean roughness (µm)	[Rz]			8.000

## Tension/Compression Bending Torsion Shearing

Load: (N) (Nm)				
Mean value		-0.0	0.0	0.0
Amplitude		0.0	248859.6	0.0
Maximal value		-0.0	423061.3	0.0
Cross section, section modulus: (mm <sup>2</sup> )				
[A, Wb, Wt, A]		54604.0	2166831	4333662
Stresses: (N/mm <sup>2</sup> )				
[sigzdm, sigbm, taum, tauqm] (N/mm <sup>2</sup> )		-0.000	0.000	0.000
[sigzda, sigba, taua, tauqa] (N/mm <sup>2</sup> )		0.000	114.850	0.000
[sigzdmax, sigbmax, taumax, tauqmax] (N/mm <sup>2</sup> )		-0.000	195.244	0.000
Technological size influence	[K1 (sigB)]	0.670		
	[K1 (sigS)]	0.670		

## Tension/Compression Bending Torsion

Notch effect coefficient	[beta (dB)]	2.674	2.674	1.637
[dB] (mm) = 40.0				
Geometrical size influence	[K3 (d)]	0.915	0.915	0.957
Geometrical size influence	[K3 (dB)]	0.952	0.952	0.976
Notch effect coefficient	[beta]	2.784	2.784	1.669
Geometrical size influence	[K2 (d)]	1.000	0.800	0.800
Influence coefficient surface roughness	[KF]	1.000	1.000	1.000
Roughness factor is included into the notch effect coefficient				

Influence coefficient surface strengthening				
	[KV]	1.000	1.000	1.000
Total influence coefficient	[K]	2.784	3.480	2.087
Present margin of safety for fatigue resistance:				
Equivalent mean stress (N/mm <sup>2</sup> )	[sigmV]		0.000	
Equivalent mean stress (N/mm <sup>2</sup> )	[taumV]		0.000	
Part bending fatigue stress (N/mm <sup>2</sup> )				
	[sigWK]	105.883	105.883	105.960
Influence coefficient mean stress sens.				
	[PsisigK]	0.077	0.077	0.077
Possible amplitude (N/mm <sup>2</sup> )	[sigADK]	105.883	105.883	105.960
Margin of safety fatigue resistance				
	[S]		0.922	
Required safety	[Smin]		1.200	
Result (%)	[S/Smin]		76.8	
Present margin of safety				
for proof against exceed of yield point:				
Static support number	[K2F]	1.000	1.100	1.000
Increase coefficient	[gammaF]	1.000	1.000	1.000
Part yield stress (N/mm <sup>2</sup> )	[sigFK]	603.000	663.300	348.142
Margin of safety yield stress	[S]		3.397	
Required safety	[Smin]		1.200	
Result (%)	[S/Smin]		283.1	

## Remarks:

- The shear-force is in the analysis DIN 743 not taken into account.
- Cross section with square groove:  
Undefined reference diameter for the notch number.  
The shaft diameter is taken as reference diameter.
- Cross section with interference fit:  
The notching factor for the light fit case is no longer defined in DIN 743 .  
The factors are introduced from the FKM Guidelines.

End report

lines : 307