

Universidade Federal de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação
em Engenharia de Produção

Uma abordagem bayesiana para modelos
de degradação: a obtenção da
distribuição preditiva *a posteriori* dos
tempos de falha de unidades amostrais
futuras e sob teste

Mestrando: Rívert Paulo Braga Oliveira

lamabarista@gmail.com

Orientadora: Profa. Dra. Marta Afonso Freitas

marta@dep.ufmg.br

Co-orientadora: Profa. Dra. Rosângela Helena Loschi

loschi@est.ufmg.br

**Belo Horizonte
Fevereiro
2011**

Rívert Paulo Braga Oliveira

Uma abordagem bayesiana para modelos
de degradação: a obtenção da
distribuição preditiva *a posteriori* dos
tempos de falha de unidades amostrais
futuras e sob teste

Dissertação apresentada ao Departamento
de Pós-Graduação em Engenharia de Pro-
dução da Universidade Federal de Minas
Gerais, para a obtenção do Título de
Mestre em Engenharia de Produção, Con-
centração em Produção e Logística.

Orientadora: Marta Afonso Freitas

Co-orientadora: Rosângela Helena Loschi

Belo Horizonte
Fevereiro
2011

*Aos meus pais, José Antônio e Valdelice.
Aos meus irmãos, Rodrigo e Rony.
A meu grande amor, Carolina.*

Epígrafe

Onde se pode encontrar a prova da existência de Deus?

"Num axioma que aplicais às vossas ciências.

Não há efeito sem causa. Procurai a causa de tudo que não é obra do homem e a vossa razão responderá."

Passagem de "O Livro dos Espíritos" de Allan Kardec, Capítulo 1, questão 4.

Agradecimentos

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, me apoiaram neste trabalho.

A minha orientadora, Dr^a. Marta Afonso Freitas pela orientação e dedicação à elaboração da dissertação, além das oportunidades e aprendizado que transpassaram o mundo acadêmico.

A minha co-orientadora, Dr^a. Rosângela Helena Loschi pelas críticas decisivas e pela orientação.

A ambas por acreditarem na minha capacidade.

Ao colaborador Dr. Enrico Antônio Colosimo, sempre muito ativo e contribuindo bastante em grande parte das reuniões.

Ao companheiro de mestrado, Júlio Ferreira, pela participação e colaboração nas reuniões do grupo. Além das longas discussões teóricas.

Aos meus pais, José Antônio e Valdelice, e meus irmãos, Rodrigo e Rony, pela força, dedicação, apoio e carinho.

A minha namorada Carolina, pelo companheirismo, força, incentivo, dedicação, carinho e compreensão.

Aos amigos do Objetivo, do CEFET-MG, da Estatística-UFMG, do LADEC, companheiros de mestrado, da minha infância e demais amigos que fiz ao longo dos anos.

A CAPES e CNPq pelo financiamento da pesquisa.

Aos professores do PPGEF-UFMG pelo conhecimento transmitido.

A Inês, secretária do PPGEF-UFMG, pelo ótimo trabalho que desempenha, e aos demais funcionários da UFMG.

A UFMG e LADEC pelo suporte e estrutura.

Resumo

A Confiabilidade é um ramo da Estatística que visa descrever via inferência a distribuição do tempo de falha de objetos de interesse. Técnicas convencionais são voltadas para a ocorrência de falhas ao longo do tempo. Contudo, para determinadas situações nas quais a ocorrência de falhas é pequena ou quase nula, a estimação das quantidades que descrevem os tempos de falha fica comprometida. Dessa forma foram desenvolvidos os modelos de degradação, que possuem como dado experimental não a falha, mas sim alguma característica mensurável a ela atrelada, a qual quando monitorada torna possível melhorias significativas nas estimativas das quantidades de interesse. Modelos de degradação têm sido amplamente aplicados e estudados sob a perspectiva da estatística clássica, todavia dificuldades computacionais e má especificações relativas a suposições dos modelos passaram a tornar interessante uma abordagem pelo enfoque da estatística bayesiana. Isso se deve ao fato de que os métodos computacionais implementados na abordagem bayesiana já permitem acomodar um número maior de distribuições de probabilidade, e dessa forma torna-se menos susceptível a problemas de má especificação. Neste texto evidencia-se que mesmo sob má especificação o enfoque bayesiano pode apresentar bons resultados. O que se propõe neste texto é apontar alguns erros metodológicos que vêm sendo cometidos no uso da inferência bayesiana e apresentar uma proposta de análise, comparando-a com as abordagens por inferência bayesiana existentes na literatura em Modelos de Degradação. Uma base de dados de emissores de laser e outra de rodas de trem ilustram a aplicação da metodologia proposta neste texto. Os resultados apresentados permitem levantar a confiabilidade dos objetos estudados e de objetos futuros, fora do escopo da amostra.

Palavras-chave: Modelos de Degradação, Inferência Bayesiana, Distribuição Preditiva

Abstract

Reliability is a branch of Statistical inference which seeks to describe the route failure time distribution of objects of interest. The conventional techniques are geared towards the occurrence of failures over time. However, for certain situations in which the occurrence of failures is small or almost zero, the estimation of quantities that describe the failure time is compromised. Thus, degradation models were developed, which the experiental data are not failures, but some measurable characteristic linked to them, which when monitored make possible significant improvements in estimates of quantities of interest. The degradation models have been widely applied and studied from the perspective of classical statistics, however, computational difficulties and misspecifications of the assumptions of the models, have turned interesting the approach by a focus on bayesian statistics. This is due to the fact that the computational methods implemented in the bayesian approach already allowed accommodate a larger number of probability distributions, thus become less susceptible to problems of misspecification. This text shows that even under misspecification the Bayesian approach can produce good results. The proposal in this paper is to point out some methodological errors that have been committed in the use of bayesian inference and present a proposal for analyzing degradation paths, comparing it to the approaches for bayesian inference in the literature on degradation models. A database of laser emitters and another of train wheels illustrate the application of the methodology proposed in this text. The results allow to raise the reliability of the studied objects and future objects outside the scope of the sample.

Keywords: Degradation Models, Bayesian Inference, Predictive Distribution

Lista de Figuras

1.1	Croqui - vista principal inferior de um vagão motor.	2
1.2	Perfis de desgaste - rodas MA11.	3
1.3	Perfil de degradação das unidades emissoras laser.	5
4.1	Convergência e autocorrelação das cadeias da distribuição <i>a posteriori</i> para alguns parâmetros - Assumindo $\beta_i \sim Weibull$ (Caso gerado - $T \sim Bimodal$)	63
4.2	Perfis de degradação - $T \sim Bimodal$	66
4.3	Densidade de probabilidade dos efeitos aleatórios Gerados - $T \sim Bimodal$	66
4.4	Densidade <i>a posteriori</i> : efeito aleatório do perfil 7 - Assumindo $\beta_i \sim Weibull$ (Caso gerado - $T \sim Bimodal$)	67
4.5	Distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos de falha para um perfil futuro assumindo $\beta_i \sim Weibull$ (Caso gerado - $T \sim Bimodal$)	68
4.6	Densidade <i>a posteriori</i> : efeito aleatório do perfil 7 - Assumindo $\beta_i \sim Lognormal$ (Caso gerado - $T \sim Bimodal$)	70
4.7	Distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos de falha para um perfil futuro assumindo $\beta_i \sim Lognormal$ (Caso gerado - $T \sim Bimodal$)	71
4.8	Perfis de degradação - $T \sim Weibull$	72
4.9	Densidade <i>a posteriori</i> : efeito aleatório do perfil 7 - Assumindo $\beta_i \sim Weibull$ (Caso gerado - $T \sim Weibull$)	73

4.10	Distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos de falha para um perfil futuro assumindo $\beta_i \sim Weibull$ (Caso gerado - $T \sim Weibull$)	74
4.11	Distribuição preditiva <i>a posteriori</i> assumindo $\beta_i \sim Weibull$ (Caso gerado - $T \sim Weibull$)	75
4.12	Densidade <i>a posteriori</i> : efeito aleatório do perfil 7 - Assumindo $\beta_i \sim Lognormal$ (Caso gerado - $T \sim Weibull$)	76
4.13	Distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos de falha para um perfil futuro assumindo $\beta_i \sim Lognormal$ (Caso gerado - $T \sim Weibull$)	77
4.14	Perfis de degradação - $T \sim Lognormal$	78
4.15	Densidade <i>a posteriori</i> : efeito aleatório do perfil 7 - Assumindo $\beta_i \sim Weibull$ (Caso gerado - $T \sim Lognormal$)	79
4.16	Preditiva <i>a posteriori</i> $F_{T_{n+1} Y}(t Y)$ assumindo $\beta_i \sim Weibull$	80
4.17	Densidade <i>a posteriori</i> : efeito aleatório do perfil 7 - Assumindo $\beta_i \sim Lognormal$ (Caso gerado - $T \sim Lognormal$)	81
4.18	Distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos de falha para um perfil futuro assumindo $\beta_i \sim Lognormal$ (Caso gerado - $T \sim Lognormal$)	82
4.19	Distribuição preditiva <i>a posteriori</i> assumindo $\beta_i \sim Lognormal$ (Caso gerado - $T \sim Lognormal$)	83
5.1	Distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos de falha para um laser futuro assumindo $\beta_i \sim Weibull$	86
5.2	Distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos de falha para lasers sob teste e laser futuro assumindo $\beta_i \sim Weibull$	87
5.3	Predições para lasers futuros e sob teste assumindo $T \sim Weibull$	89
5.4	Distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos de falha para uma roda futura assumindo $\beta_i \sim Weibull$	91

5.5	Distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos de falha para rodas sob teste e roda futura assumindo $\beta_i \sim Weibull$	91
5.6	Predições para rodas futuras e sob teste assumindo $\beta_i \sim Weibull$	93
5.7	Preditiva <i>a posteriori</i> $F_{T_{n+1} Y_{\sim}}(t Y_{\sim})$ assumindo $\beta_i \sim Lognormal$	94

Lista de Tabelas

3.1	Amostra - preditiva <i>a posteriori</i> de T via Hamada (2005)	45
3.2	Amostra - preditiva <i>a posteriori</i> de T via Robinson e Crowder (2000) . .	48
3.3	Amostra - preditiva <i>a posteriori</i> de um perfil futuro via Robinson e Crow- der (2000)	49
3.4	Amostra distribuição preditiva <i>a posteriori</i> via Proposta	51
3.5	Amostra - preditiva do perfil futuro <i>a posteriori</i> via Proposta	52
5.1	Distribuição <i>a posteriori</i> das quantidades de interesse e parâmetros (Da- dos dos Emissores de Laser - Hamada (2005))	88
5.2	Percentis da distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos de falha para unidades sob teste (Dados dos Emissores de Laser - Hamada (2005)) . .	88
5.3	Distribuição <i>a posteriori</i> das quantidades de interesse e parâmetros (Da- dos de Desgaste de Rodas de Trem - Freitas <i>et al.</i> (2010))	92
5.4	Percentis da distribuição preditiva <i>a posteriori</i> dos tempos de falha para unidades sob teste (Dados de Desgaste de Rodas de Trem - Freitas <i>et al.</i> (2010))	92
5.5	Distribuição <i>a posteriori</i> das quantidades de interesse e parâmetros (Da- dos de Desgaste de Rodas de Trem - Freitas <i>et al.</i> (2010))	95

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Situações Práticas Motivadoras	1
1.1.1	Dados de Desgaste de Rodas de Trem	1
1.1.2	Dados de Corrente de Operação de Emissores de Laser	4
1.2	Literatura	5
1.3	O Modelo Geral de Degradação e o Problema da Estimação dos Parâmetros	10
1.4	Objetivos do Trabalho	19
1.5	Organização deste Texto	19
2	Métodos Estatísticos Baseados em Inferência Clássica para Estimação de Parâmetros em Modelos de Degradação	21
2.1	O Método Aproximado	22
2.2	O Método Analítico	23
2.3	O Método de Dois Estágios	25
2.4	O Método Numérico	27
3	Especificação do Modelo de Degradação Sob Abordagem Bayesiana	32
3.1	Método Baseado em Inferência Bayesiana	32
3.2	Modelo com Efeito Aleatório Weibull	34
3.2.1	Construção da Função de Verossimilhança	34

3.2.2	Especificação das Distribuições <i>a priori</i>	36
3.2.3	Especificação das Distribuições Condicionais Completas	39
3.3	Modelo com Efeito Aleatório Lognormal	41
3.3.1	Construção da Função de Verossimilhança	41
3.3.2	Especificação das Distribuições <i>a priori</i>	41
3.3.3	Especificação das Distribuições Condicionais Completas	43
3.4	$F_{T_i Y}(t y)$ Segundo Hamada (2005)	43
3.5	$F_{T_i Y}(t y)$ Segundo Robinson e Crowder (2000)	47
3.5.1	$F_{T_i Y}(t y)$ para um Perfil sob Teste	47
3.5.2	$F_{T_i Y}(t y)$ para um Perfil Futuro	49
3.6	$F_{T_i Y}(t y)$ Proposta	50
3.6.1	$F_{T_i Y}(t y)$ para um Perfil sob Teste	50
3.6.2	$F_{T_i Y}(t y)$ para um Perfil Futuro	51
3.6.3	$F_{T_i Y}(t y)$ para um Perfil Futuro Incluído na Verossimilhança	51
3.7	Inconsistência Teórica em Hamada (2005)	55
4	Dados Simulados - Tempos de Falha Conhecidos	60
4.1	Geração dos Perfis Simulados	61
4.2	Distribuições <i>a priori</i> Assumidas para os Parâmetros do Modelo de Degradação	62
4.2.1	Efeito Aleatório Weibull	63
4.2.2	Efeito Aleatório Lognormal	64
4.3	Caso 1: Distribuição do Tempo até a Falha $T \sim$ Bimodal - Mistura de Duas Normais	65
4.3.1	Análises Supondo Efeito Aleatório Weibull	67
4.3.2	Análises Supondo Efeito Aleatório Lognormal	69
4.4	Caso 2: Distribuição do Tempo até a Falha $T \sim$ Weibull	70

4.4.1	Análises Supondo Efeito Aleatório Weibull	72
4.4.2	Análises Supondo Efeito Aleatório Lognormal	75
4.5	Caso 3: Distribuição do Tempo até a Falha $T \sim$ Lognormal	78
4.5.1	Análises Assumindo Efeito Aleatório Weibull	79
4.5.2	Análises Supondo Efeito Aleatório Lognormal	81
4.6	Conclusões	83
5	Situações Práticas Revisitadas	85
5.1	Emissores de Laser	85
5.2	Desgaste das Rodas de Trem	89
5.2.1	Rodas de Trem - Efeito Aleatório Weibull	90
5.2.2	Rodas de Trem - Efeito Aleatório Lognormal	93
6	Conclusão	96
6.1	Sugestões para Pesquisas Futuras	98
	Referências Bibliográficas	100
A	ROTINA NO R - Caso 1: Distribuição do Tempo até a Falha $T \sim$ Bimodal - Mistura de Duas Normais	106
B	ROTINA NO R - Emissores de Laser Para Predições	123
C	MODELO PARA WINBUGS: WEIBULL	127
D	MODELO PARA WINBUGS: LOGNORMAL	129

Capítulo 1

Introdução

1.1 Situações Práticas Motivadoras

1.1.1 Dados de Desgaste de Rodas de Trem

Utilizaremos os dados de desgaste de rodas de trens discutidos inicialmente em Freitas *et al.* (2009) como uma das motivações práticas do trabalho. Trata-se de um subconjunto de um banco de dados maior, referente a um estudo conduzido por uma empresa do setor ferroviário. O banco de dados completo inclui, entre outras informações, as medidas de diâmetros de rodas tomadas em 13 igualmente espaçados tempos de inspeção: $t_0 = 0km$, $t_1 = 50.000Km$, \dots , $t_{13} = 600.00Km$. Estas medidas foram registradas para 14 trens, cada um composto por quatro carros (vagões), sendo um motor (MA) e três reboques (R1,R2,R3). Os carros reboque não possuem tração própria. Cada vagão em um dado trem, possui dois truques, cada truque com dois eixos, cada eixo com duas rodas, totalizando assim oito rodas por carro (vagão); trinta e duas por trem. A Figura 1.1 apresenta o croqui para o vagão motor.

No estudo preliminar foram selecionados aleatoriamente quatorze (14) trens dos vinte e cinco (25) em operação. Para estes quatorze (14) trens foi dada ênfase aos

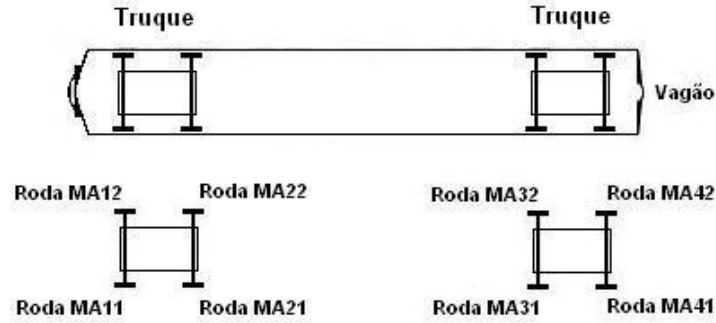


Figura 1.1: Croqui - vista principal inferior de um vagão motor.

dados dos vagões motor uma vez que características do modo de operação dos mesmos acelera o desgaste as rodas. Portanto os dados disponibilizados foram os de desgaste das rodas desse vagão (isto é, ao todo quatorze (14) vagões motor). O objetivo do estudo era a caracterização da confiabilidade das rodas através da obtenção da distribuição do tempo até a falha e a obtenção das estimativas de quilometragem média até a falha, dos quantis da distribuição do tempo de falha e da confiabilidade em 300.000 Km. As rodas estudadas são de aço forjado e laminado e cada uma possui um diâmetro inicial de 966 mm. A equipe de engenharia determinou que a redução crítica de diâmetro ocorre quando este atinge 889 mm, ocasião em que a roda deve ser substituída. Portanto, ao final do acompanhamento, obtiveram-se 14 medidas de diâmetro para cada uma das oito posições de rodas do vagão motor (MA11, MA12, MA21, MA22, MA31, MA32, MA41, MA42). Freitas *et al.* (2009) analisaram os dados das quatorze (14) rodas MA11 apenas e para tal, utilizaram como informação, o desgaste das rodas, dado por:

$$Y_{ij} = 966mm - Diam_{ij}, \quad (i = 1,2,\dots,14; j = 1,2,\dots,13)$$

em que Y_{ij} é a variável aleatória que define o desgaste da i -ésima roda no j -ésimo tempo (quilometragem) de medição.

A Figura 1.2 apresenta os perfis para as rodas MA11. O limiar crítico de degradação D_f ("Failure Threshold") é dado por:

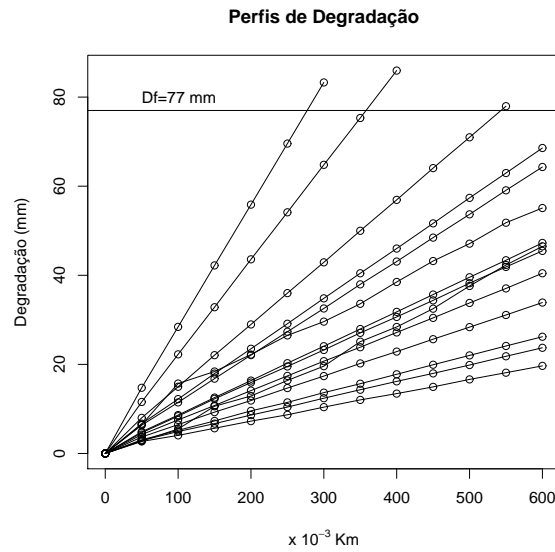


Figura 1.2: Perfis de desgaste - rodas MA11.

$$D_f = 966\text{mm} - \text{Diam}_{\text{critico}} = 966\text{mm} - 889\text{mm} = 77\text{mm}$$

Portanto, considera-se que a “falha” de uma determinada roda ocorreu quando o desgaste atinge este limiar crítico. Observe que os perfis são lineares e que para esta posição 3 unidades (21,4%) atingem o limiar crítico durante o período de observação.

Freitas *et al.* (2009) utilizaram os dados de degradação das rodas MA11 e modelos de degradação cujos parâmetros foram estimados com base em inferência clássica (em particular, máxima verossimilhança) para obter a distribuição do tempo até falha das rodas MA11, bem como estimativas de quantis, da quilometragem média até a falha, e da confiabilidade em 300.000 Km. Neste trabalho, os dados das rodas MA11 serão re-analisados bem como os dados das rodas em outras posições, utilizando uma abordagem baseada em inferência bayesiana. Os resultados são comparados com aqueles obtidos por Freitas *et al.* (2010), um outro texto no qual o autor utilizou estatística bayesiana para estimar as quantidades de interesse para esta mesma base de dados.

1.1.2 Dados de Corrente de Operação de Emissores de Laser

Hamada (2005) apresentou dados para quinze (15) lasers, acompanhados por 4000 horas de operação. Foi registrado para cada um, a cada 250 h, o percentual de aumento na corrente de operação (calculado em relação à corrente nominal de operação isto é, aquela do início do ensaio). Esta informação é importante visto que a luz dos lasers se degrada ao longo do tempo se a corrente de operação é mantida constante. Conseqüentemente, para que seja gerada uma saída de luz constante, a corrente de operação precisa ser aumentada ao longo do tempo. Portanto a medida de degradação neste caso é o percentual de aumento na corrente de operação. A “falha” do laser é estabelecida para o momento no qual o percentual de aumento na corrente excede 10%. Em outras palavras, no limiar $D_f = 10\%$ considera-se que o laser falhou, embora ainda esteja em operação.

A Figura 1.3 apresenta o gráfico dos perfis de degradação para cada uma das 15 unidades emissoras de laser (os dados estão disponíveis na página http://www.stat.lanl.gov/staff/MHamada/degradation_data.htm). Por exemplo, para a 10^a Unidade, cuja degradação é a mais rápida, os dados são (0,0000; 0,4136; 1,4880; 2,3810; 2,9950; 3,8350; 4,5010; 5,2510; 6,2560; 7,0510; 7,8030; 8,3210; 8,9300; 9,5540; 10,4500; 11,2800; 12,2100).

Note que os perfis são lineares e que 3 das 15 unidades (20%) (atingiram o limiar crítico D_f durante o período de coleta de dados). O objetivo aqui também é a obtenção da distribuição do tempo até a falha dos lasers bem como outras características tais como o número médio de horas até a falha e quantis da distribuição.

O autor utilizou abordagem baseada em inferência bayesiana para análise dos dados e obteve entre outras informações, a distribuição *a posteriori* do quantil 0,1 da distribuição do tempo até a falha (isto é, o tempo até o qual 10% das falhas já terão ocorrido). Neste trabalho os dados dos lasers serão re-analisados utilizando também uma abordagem com base em inferência bayesiana. A motivação para a re-análise re-

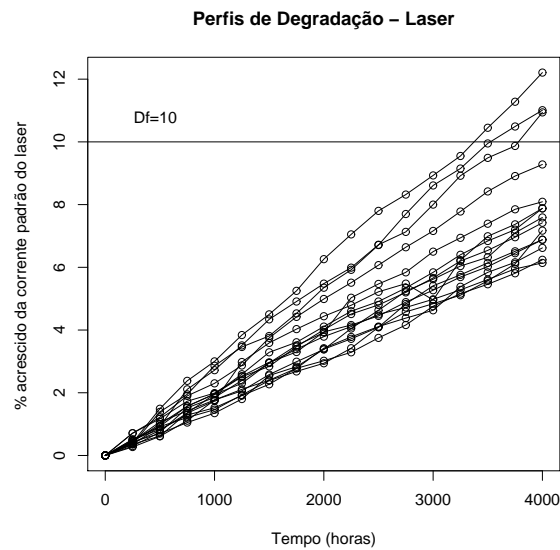


Figura 1.3: Perfil de degradação das unidades emissoras laser.

side no fato de termos identificado uma inconsistência no procedimento utilizado por Hamada (2005). As inconsistências serão discutidas nos Capítulos 3 e 4.

1.2 Literatura

Grande parte da literatura em Confiabilidade faz o uso de dados de tempo de falha (ou tempo de vida) em estudos nos quais o objetivo é a caracterização da confiabilidade de produtos. Esses dados são oriundos de ensaios de vida, nos quais a medida observada é o tempo de falha (neste texto, os termos “tempo de vida”, “tempo de falha” e “tempo até a falha”, serão utilizados indiscriminadamente). Todavia, para produtos que possuem um alto grau de confiabilidade, tais como componentes eletrônicos modernos, é comum encontrar-se diante de uma situação na qual, ao final do ensaio, poucas ou até mesmo nenhuma falha é observada, resultando em um alto índice de censuras. Em casos como estes, em geral, os custos de realização dos ensaios são elevados e os mesmos

acabam não fornecendo informações suficientes para a inferência estatística. Em algumas situações é possível implementar testes acelerados (ver Nelson, 1990), mas, mesmo nestes casos, o índice de censuras resultante pode ser elevado. Dados com esta natureza (alto índice de censuras) fornecem pouca informação a respeito da proporção de produtos que conseguem, por exemplo, operar além do período de garantia estipulado.

Por esta razão, a literatura específica na área de confiabilidade tem dado maior ênfase à utilização de dados de degradação como uma alternativa aos dados de tempo até a falha. Alguns exemplos importantes são os trabalhos de (Lu e Meeker, 1993; Tseng *et al.*, 1995; Lu *et al.*, 1996; Chiao e Hamada, 1996, 2000; Robinson e Crowder, 2000; Oliveira e Colosimo, 2004; Hamada, 2005). Nos testes de degradação, a variável observada não é o tempo de falha, mas uma medida de degradação de alguma característica de qualidade do produto de interesse, tomada ao longo do tempo. Esta medida deve estar diretamente relacionada à falha. Além disso, a própria definição da falha deve estar associada à algum nível crítico pré-especificado (limiar de falha ou “failure threshold”) da medida de degradação. A justificativa para a utilização desse tipo de abordagem reside no fato de que muitas falhas são o resultado de um mecanismo de degradação em atuação para o qual existem características que se degradam com o tempo. Do ponto de vista da engenharia, alguns mecanismos de degradação comuns incluem fadiga, trincas, corrosão e oxidação. Para conduzir um teste (ensaio) de degradação, é necessário pré-especificar um limiar crítico de degradação (limiar de falha ou “failure threshold”), obter medidas da degradação em tempos pré-fixados e distintos e definir que a falha ocorre quando a quantidade de degradação para uma unidade sob teste excede aquele nível crítico. A principal vantagem da utilização de dados de degradação sobre os dados de tempos de falha (oriundos de testes de vida) é que a análise pode ser feita de maneira satisfatória, ainda que nenhuma falha tenha ocorrido, isto é, mesmo que nenhum dos perfis das unidades sob observação tenha atingido o limiar considerado “falha” durante o período de estudo.

A análise de dados de degradação, assim como dos dados de tempo de falha, tem como objetivo estimar a distribuição do tempo até a falha ou características da mesma, tais como o p -ésimo quantil (t_p), o tempo médio até a falha, ou a função de confiabilidade $R(t)$ por exemplo. Existem referências importantes abordando a utilização de dados de degradação para estimar a confiabilidade. Gertsbackh e Kordonskiy (1969) por exemplo, discutiram o problema de degradação sob o ponto de vista da engenharia. Os autores apresentaram a distribuição de Bernstein, a qual descreve a distribuição do tempo até a falha para um modelo linear simples (uma reta) com intercepto e inclinação ambos aleatórios. Nelson (1981) discutiu uma situação especial na qual a medida de degradação é destrutiva (somente uma medida pode ser feita em cada item). (Nelson, 1990, Capítulo 11) revisou a literatura relacionada ao tema, pesquisou aplicações, descreveu idéias básicas e utilizando um exemplo específico, mostrou como analisar um certo tipo de dados de degradação.

Na literatura duas abordagens básicas para modelagem e análise de dados de degradação podem ser encontradas. A primeira assume que a degradação é um processo aleatório no tempo. Dentro dessa linha, Doksum (1991) utilizou um processo de Wiener para analisar dados de degradação. Tang e Chang (1995) modelaram dados oriundos de ensaios de degradação acelerados não destrutivos como uma coleção de processos estocásticos. Whitmore e Schenkelberg (1997) modelaram o processo de degradação como um processo de difusão de Wiener.

Uma abordagem alternativa é considerar modelos estatísticos mais gerais. Nestes modelos a degradação é modelada por uma função do tempo e possivelmente algumas variáveis aleatórias multidimensionais. Esses modelos são denominados modelos gerais de perfis de degradação (“*general degradation path models*”). A análise de dados de degradação por essa abordagem é implementada em duas etapas. A primeira consiste na construção de um modelo não linear (ou linear) misto que explique o perfil de degradação ao longo do tempo e a estimação dos parâmetros desconhecidos deste modelo. A segunda

etapa consiste em utilizar estas estimativas dos parâmetros para estimar a distribuição do tempo até a falha e outras características de interesse.

Em geral a análise é implementada em duas etapas. É importante ressaltar que dados de degradação possuem características de dados longitudinais (Fitzmaurice *et al.*, 2004). Portanto, a primeira etapa da análise é na realidade uma análise de dados longitudinais com resposta contínua, implementada através de um modelo não linear (ou linear) misto. A utilização de um modelo misto, isto é, que incorpora em sua forma funcional tanto efeitos aleatórios quanto fixos, pode, por sua vez, ser vista como uma modelagem em dois estágios, no qual primeiramente parâmetros não observáveis (os efeitos aleatórios) são amostrados de uma distribuição que por si só, possui parâmetros (fixos) desconhecidos. Em seguida (2º. Estágio) os dados observados no ensaio são considerados como sendo amostras (realizações) de distribuições Normais independentes, cujas médias são funções lineares (ou não lineares) destes efeitos aleatórios e, possivelmente, de outros parâmetros populacionais (efeitos fixos). Uma vez que uma família paramétrica para os efeitos aleatórios é escolhida é preciso estimar os parâmetros fixos do modelo, quais sejam os parâmetros que indexam a distribuição dos efeitos aleatórios e outros parâmetros fixos que fazem parte da forma funcional do perfil de degradação. É, justamente, neste ponto da primeira etapa de análise dos dados de degradação que surgem algumas dificuldades, as quais serão elucidadas mais adiante, na Seção 1.3.

De posse das estimativas dos parâmetros do modelo, a segunda etapa da análise dos dados de degradação consiste em estimar a distribuição do tempo até a falha $F_T(t)$. Quando o modelo de degradação não é suficientemente simples para que se obtenha uma forma fechada para a distribuição do tempo de falha então uma estimativa pode ser obtida através de simulação de Monte Carlo.

Métodos de estimação baseados em inferência clássica podem ser empregados para obter estimativas dos parâmetros desconhecidos nos modelos de degradação e, a partir delas, estimar a distribuição do tempo de falha.

Lu e Meeker (1993) desenvolveram métodos estatísticos utilizando dados de degradação para estimar a distribuição do tempo até a falha para uma classe ampla de modelos de degradação. Os autores consideraram um modelo não linear misto (“*NLME - Non-linear Mixed- Effects Model*”) e propuseram um método de estimação em dois estágios para obter estimadores pontuais e intervalos de confiança para percentis da distribuição do tempo até a falha. O procedimento foi ilustrado com dados de evolução de trincas em ensaios de fadiga. Yacout *et al.* (1996) utilizaram o procedimento proposto por Lu e Meeker (1993) em dados de degradação de elementos de combustível. Lu *et al.* (1996) estenderam o modelo de degradação e sugeriram métodos de estimação baseados na verossimilhança, entretanto, estes não são adequados para todos os tipos de dados de degradação. Lu *et al.* (1997) propuseram um modelo com coeficientes de regressão aleatórios e uma função para o desvio padrão, para analisar dados de semicondutores com perfis lineares de degradação. Su *et al.* (1999) consideraram um modelo de degradação com coeficientes e tamanho de amostra aleatórios e utilizaram máxima verossimilhança para estimação dos parâmetros. Os métodos foram aplicados em um conjunto de dados de semicondutores. Wu e Shao (1999) estudaram as propriedades assintóticas dos estimadores de mínimos quadrados (ponderados) do modelo NLME. Os autores utilizaram estas propriedades para obtenção de estimativas pontuais e intervalos de confiança aproximados para percentis da distribuição do tempo de falha. Os métodos propostos foram ilustrados com dados de comprimento de trincas em metais submetidos a ensaios de fadiga. Uma boa referência em modelos gerais de perfis de degradação é (Meeker e Escobar, 1998, Capítulos 13 e 21). Wu e Shao (2000) apresentaram um método de estimação ponderado com base em conjuntos nebulosos para modificar o procedimento em dois estágios proposto por Lu e Meeker (1993). O método proposto e o de dois estágios de Lu e Meeker (1993) foram ambos utilizados no banco de dados apresentado no trabalho de Wu e Shao (1999).

Finalmente, outros trabalhos importantes são os de Crk (2000), Jiang e Zhang

(2002) e Oliveira e Colosimo (2004). Neste último os autores compararam os três métodos propostos por Meeker e Escobar (1998) (analítico, aproximado e numérico) aplicando cada um deles a um conjunto de dados de desgaste de bandas de rodagem de pneus automotivos.

Dentre alguns métodos disponíveis na literatura estão o método analítico, numérico e o método aproximado (Meeker e Escobar, 1998, Capítulos 13 e 21) e todos baseiam-se em estimação por máxima verossimilhança ou mínimos quadrados. Os métodos analítico e aproximado aplicam-se melhor a situações nas quais o modelo de degradação é simples (por exemplo uma reta) com poucos parâmetros aleatórios. Já o método numérico é mais abrangente e permite utilizar modelos mais complexos (não lineares por exemplo) com parâmetros fixos e aleatórios. A grande dificuldade da abordagem por inferência clássica reside justamente na primeira etapa da análise dos dados, ou seja, na estimação dos parâmetros do modelo. Esta questão será melhor apresentada na próxima Seção.

1.3 O Modelo Geral de Degradação e o Problema da Estimação dos Parâmetros

Em um ensaio de degradação, uma amostra de n unidades é colocada sob teste. Para cada uma delas observa-se ao longo do tempo uma característica relacionada ao mecanismo de falha de interesse. Em outras palavras, observa-se a “degradação” desta unidade, através das medidas desta característica tomadas ao longo do tempo. A abordagem geral consiste em modelar os perfis de degradação das unidades individuais utilizando a mesma forma funcional e as diferenças entre as unidades amostrais são explicadas através da incorporação de efeitos aleatórios no modelo. Assim, para a i -ésima unidade, a verdadeira degradação no tempo t é dada por:

$$Y_{it} = D(t; \alpha; \beta_i) \quad (1.1)$$

em que $D(t; \alpha; \beta_i)$ assume uma forma funcional que depende de parâmetros (cuja natureza será explicitada mais adiante). Para uma dada unidade i , a falha ocorre quando a degradação atinge o limiar pré-especificado D_f . Assim o tempo de falha da i -ésima unidade é o tempo T_i no qual:

$$Y_{iT} = D_f = D(T_i; \alpha; \beta_i) \quad (1.2)$$

Entretanto, os dados observados nos ensaios de degradação para uma dada unidade i são na verdade amostras do seu verdadeiro perfil (dado por (1.1)), obtidas em m_i tempos pré-especificados t_{ij} ($j = 1, 2, \dots, m_i$). Como estas medidas estão sujeitas a erros, a verdadeira degradação no tempo t_{ij} (isto é, $D(t_{ij})$) é observada com erro ε_{ij} .

Portanto, o modelo geral de degradação é dado por:

$$Y_{ij} = D(t_{ij}; \alpha; \beta_i) + \varepsilon_{ij} \quad (1.3)$$

em que Y_{ij} é a variável aleatória que representa a j -ésima medida para a i -ésima unidade; $D(t_{ij}; \alpha; \beta_i)$ é o real perfil de degradação da unidade i em um tempo pré-especificado t_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m_i$); $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)^t$ é um vetor de efeitos fixos que descreve as características da população (este se mantém constante para todas as unidades); $\beta_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ip})^t$ é um vetor de efeitos aleatórios associado à i -ésima unidade, representando características individuais de cada unidade (por exemplo, variações em propriedades da matéria prima, no processo de produção, nas dimensões do componente, etc.) e ε_{ij} é o erro aleatório (da medida) associado à i -ésima unidade no tempo t_{ij} .

A forma funcional de $D(t_{ij}; \underline{\alpha}; \underline{\beta}_i)$ pode ser baseada em análise empírica dos perfis de degradação dos processos sob estudo, mas sempre que possível deve ser baseada em algum fenômeno físico-químico associado à ele. Assume-se, em geral, que os ε_{ij} 's ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m_i$) são independentes e identicamente distribuídos (*iid*), seguindo uma distribuição Normal com média zero (0) e variância desconhecida σ_ε^2 .

Entretanto, há trabalhos nos quais σ_ε^2 varia com o tempo ou o nível de degradação (Lu *et al.*, 1997; Wakefield *et al.*, 1994). Se o processo de medição induz uma correlação serial entre os erros, então uma forma de covariância estruturada pode ser adotada. Neste trabalho será adotado o modelo geral (1.3) com erros *iid* $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Os $\underline{\beta}_i$'s ($i = 1, 2, \dots, n$) são independentes, com distribuição $\Lambda_{\underline{\beta}|\underline{\theta}}(\underline{\beta}|\underline{\theta})$, que depende de um vetor de parâmetros (fixos) desconhecidos $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)^t$. O parâmetro $\underline{\theta}$ também precisa ser estimado a partir dos dados de degradação. Além disso, $\{\underline{\beta}_i\}$ e $\{\varepsilon_{ij}\}$ são, por suposição, independentes para todo i e j . Assume-se também que y e t estão em escalas transformadas, caso necessário. Por exemplo, Y e t podem estar em escala logarítmica.

A proporção de falhas no tempo t é equivalente à proporção de perfis de degradação que excedem o limiar crítico D_f até o tempo t . Portanto, é possível definir a distribuição do tempo de falha T para o modelo (1.1) como sendo

$$F_{T|\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\theta}}(t|\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\theta}) = F_{T|\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\theta}}(t|\underline{\alpha}; \Lambda_{\underline{\beta}|\underline{\theta}}(\underline{\beta}|\underline{\theta}); D_f; D) = P(T \leq t|\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\theta}) = P[D(t; \underline{\alpha}; \underline{\beta}) \geq D_f|\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\theta}]$$

quando as medidas de degradação são crescentes com o tempo, ou como sendo

$$F_{T|\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\theta}}(t|\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\theta}) = F_{T|\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\theta}}(t|\underline{\alpha}; \Lambda_{\underline{\beta}|\underline{\theta}}(\underline{\beta}|\underline{\theta}); D_f; D) = P(T \leq t|\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\theta}) = P[D(t; \underline{\alpha}; \underline{\beta}) \leq D_f|\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\theta}]$$

quando as medidas de degradação são decrescentes com o tempo.

Para que se possa estimar, por exemplo, os quantis da distribuição do tempo de falha T com base neste modelo de degradação, é necessário estimar $\underline{\alpha}$ (o vetor de efeitos fixos)

e $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)^t$ o vetor de parâmetros, também fixos, da distribuição dos efeitos aleatórios $\Lambda_{\underline{\beta}|\underline{\theta}}(\underline{\beta}|\underline{\theta})$.

Para perfis cujos modelos assumem formas funcionais simples, uma vez que $\Lambda_{\underline{\beta}|\underline{\theta}}(\underline{\beta}|\underline{\theta})$ é conhecida, a distribuição $F_{T|\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\theta}}(t|\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\theta})$ pode ser expressa, em geral, em forma fechada. Entretanto, em muitos casos, isto não é possível. Quando a forma funcional de $D(t_{ij}; \underline{\alpha}; \underline{\beta}_i)$ é não linear e o modelo tem mais de um parâmetro aleatório (ou seja, quando o vetor de parâmetros $\underline{\beta}_i$ tem dimensão $k > 1$), a especificação de $F_{T|\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\theta}}(t|\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\theta})$ torna-se complicada. Em casos como este essa avaliação é feita de forma numérica. De maneira mais geral, é possível obter numericamente a distribuição de T para quaisquer $\underline{\alpha}$, $\Lambda_{\underline{\beta}|\underline{\theta}}(\underline{\beta}|\underline{\theta})$, D_f e D especificados, utilizando simulação de Monte Carlo. Todavia, esse procedimento só pode ser implementado se o vetor de parâmetros fixos $\underline{\alpha}$ e o vetor de parâmetros $\underline{\theta}$ (fixo) da distribuição dos efeitos aleatórios $\Lambda_{\underline{\beta}|\underline{\theta}}(\underline{\beta}|\underline{\theta})$ puderem ser estimados. Portanto, mesmo para uma dada distribuição $\Lambda_{\underline{\beta}|\underline{\theta}}(\underline{\beta}|\underline{\theta})$ o problema continua sendo a estimação de $\underline{\alpha}$ e $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)^t$.

Este problema tem sido tratado na literatura. Lu e Meeker (1993) trabalharam no problema de estimação de parâmetros e propuseram o método de dois estágios para o caso no qual o vetor de efeitos aleatórios $\underline{\beta}$, ou alguma reparametrização apropriada do mesmo, segue uma distribuição Normal Multivariada (NM) com média $\mu_{\underline{\beta}}$ e matriz de variância-covariância $\Sigma_{\underline{\beta}}$. Em outras palavras, neste caso, $\Lambda_{\underline{\beta}|\underline{\theta}}(\underline{\beta}|\underline{\theta}) = \Lambda_{\underline{\beta}}(\mu_{\underline{\beta}}, \Sigma_{\underline{\beta}}) = N_p(\mu_{\underline{\beta}}, \Sigma_{\underline{\beta}})$. Como a estimação por máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição dos efeitos aleatórios $\mu_{\underline{\beta}}$ e $\Sigma_{\underline{\beta}}$ é, em geral, algebricamente complicada e computacionalmente intensiva quando estes aparecem de forma não linear no modelo postulado para o perfil, os autores propuseram este método de dois estágios como uma alternativa aos métodos computacionalmente intensivos. Estudos por simulação mostraram que os resultados obtidos pelo método de dois estágios eram comparáveis aos dos métodos computacionalmente intensivos.

Posteriormente, Pinheiro e Bates (1995) utilizaram o método desenvolvido por Lind-

strom e Bates (1990) para dados com medidas repetidas para obter uma estimativa de máxima verossimilhança aproximada dos parâmetros μ_{β} , Σ_{β} e σ_{ε}^2 em modelos de degradação com suposição de normalidade dos efeitos aleatórios. As funções LME (“*linear mixed-effects models*”) e NLME (“*nonlinear mixed effects models*”) escritas na linguagem S-PLUS, foram desenvolvidas para este objetivo (Pinheiro e Bates, 2000). Em outras palavras, estas funções foram desenvolvidas para o caso específico de modelos cujos efeitos aleatórios seguem uma distribuição Normal Multivariada.

Meeker e Escobar (1998) apresentam três métodos para análise de dados de degradação: o método analítico, aproximado e o numérico. Eles serão brevemente apresentados no próximo Capítulo. O método analítico é na verdade utilizado como uma forma de obter a distribuição do tempo de falha a partir do conhecimento da distribuição dos efeitos aleatórios do modelo. Utilizando a forma funcional proposta para o verdadeiro perfil de degradação e o limiar crítico que define a falha, a relação entre o tempo de falha e os efeitos aleatórios é obtida. Assim, supondo que se conhece a distribuição dos efeitos aleatórios chega-se analiticamente à distribuição do tempo até a falha $F_T(t)$ através de transformação de variáveis. Em geral, os parâmetros da distribuição de $F_T(t)$ podem ser escritos como funções do limiar crítico D_f e dos parâmetros da distribuição dos efeitos aleatórios. Entretanto, este procedimento torna-se razoavelmente complicado para formas funcionais mais complexas e nem sempre é possível chegar a uma forma fechada para a distribuição do tempo de falha. Além disso, mesmo que uma forma fechada seja encontrada e se obtenha a relação existente entre seus parâmetros e os da distribuição dos efeitos aleatórios, ainda é preciso estimar tais parâmetros a partir dos dados de degradação.

O método aproximado consiste em ajustar por mínimos quadrados um modelo de degradação para o perfil de cada unidade separadamente e, a partir dele, estimar os respectivos tempos até a falha isto é, o tempo no qual cada perfil irá atingir o limiar D_f . Estas estimativas são denominadas “pseudo tempos de falha”. Em seguida uma análise

de tempo de falha tradicional (utilizando distribuições tais como Weibull, Lognormal etc.) é implementada com base nestas quantidades. Em outras palavras, os pseudo tempos de falha são tratados como se fossem os resultados observados de ensaio. As estimativas dos parâmetros da distribuição escolhida são obtidas por máxima verossimilhança. Este método é simples e tem apelo prático. Entretanto, ele pode subestimar a precisão das estimativas das quantidades de interesse como percentis por exemplo, visto que não se leva em conta na análise dos pseudo tempo de falhas, os erros nas estimativas dos mesmos. Tanto o método analítico como o aproximado são mais indicados para situações nas quais a forma funcional do modelo é razoavelmente simples (uma reta por exemplo e com um parâmetro aleatório).

O método numérico por outro lado, é bastante abrangente e permite utilizar modelos mais complexos (não lineares por exemplo) com vários parâmetros fixos e aleatórios. A estimação dos parâmetros é feita pelo método de máxima verossimilhança. Todavia, as rotinas disponíveis para a estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança utilizam a suposição de que os efeitos aleatórios seguem uma distribuição Normal Multivariada com vetor de médias e matriz de variância-covariância desconhecidos (Pinheiro e Bates, 1995, 2000). No caso em que os efeitos aleatórios não têm distribuição Normal, a obtenção das estimativas não é um tarefa trivial. Meeker e Escobar (1998) apresentam o método numérico supondo a normalidade dos efeitos aleatórios e utilizam os algoritmos de (Pinheiro e Bates, 1995, 2000) para obtenção das estimativas dos parâmetros nos exemplos apresentados. Entretanto, para muitas situações práticas tais como as que serão tratadas neste trabalho (vide Seção 1.1), essa suposição não é verdadeira. Tal dificuldade computacional impõe uma restrição prática ao método numérico.

Dada a dificuldade de verificação da validade dessa suposição de normalidade, muitos trabalhos na literatura têm tentado estudar o efeito de desvios desta suposição nas estimativas dos parâmetros fixos tanto para esta classe de modelos (Modelos Lineares e Não Lineares de Efeitos Mistos) quanto para outras mais abrangentes tais como

a dos Modelos Lineares Generalizados de Efeitos Mistos - GLMM (“*Generalized Linear Mixed Effects Models*”). Verbeke e Lesaffre (1997), Agresti *et al.* (2004), Litière *et al.* (2008), Alonso e Molenberghs (2008), Freitas *et al.* (2009) são alguns exemplos.

Em particular, com o objetivo de estudar o impacto de desvios da suposição de Normalidade nas estimativas de percentis, Freitas *et al.* (2009) compararam, através de um estudo por simulação, os resultados obtidos com os métodos numérico e aproximado àqueles oriundos de uma análise tradicional de tempo até a falha (isto é, utilizando apenas o tempo no qual o perfil atinge o limiar D_f e as observações censuradas). Os autores utilizaram um modelo de degradação linear simples (uma reta sem intercepto) no qual o efeito aleatório associado à cada perfil de degradação (a inclinação da reta) era oriundo das distribuições normal, Weibull e lognormal. Entre outros resultados, os autores constataram que o desempenho do método numérico (medido pelo erro quadrático médio das estimativas) é altamente afetado pela violação da suposição de normalidade dos efeitos aleatórios, chegando ao ponto deste ter o pior desempenho dentre os três métodos comparados. Em particular, Toledo (2007) constatou que o efeito maior desta má especificação é no vício relativo das estimativas obtidas pelo método numérico.

Em função da grande dificuldade de estimação dos parâmetros do modelo em situações nas quais a suposição de Normalidade não se aplica, e dos efeitos desta má especificação, uma outra frente de pesquisa foi aberta cujo foco é o desenvolvimento de métodos computacionais alternativos, que permitam a obtenção de estimadores de máxima verossimilhança para modelos de efeitos mistos (utilizados na modelagem de dados de degradação) com efeitos aleatórios não-normais. Pinheiro *et al.* (2001) propuseram um modelo linear misto com efeitos aleatórios de uma distribuição T multivariada. Para modelos gerais com efeitos aleatórios não-normais, alguns métodos de estimação que aparecem na literatura incluem a verossimilhança hierárquica (Lee e Nelder, 1996) e a maximização por partes (Song *et al.*, 2005). Entretanto, a implementação destes métodos para utilização intensiva em análise de dados mostrou-se uma tarefa desafi-

adora. A quadratura gaussiana é uma ferramenta que tem sido utilizada com sucesso na estimação de parâmetros em modelos com efeitos aleatórios Normais. Para modelos mistos com efeitos aleatórios não-normais, Nelson *et al.* (2006) propôs um método computacional que utiliza o método PIT (“*Probability Integral Transformation*”) para obter estimativas de máxima verossimilhança. Infelizmente essa abordagem só consegue lidar com efeitos aleatórios para os quais a inversa da função distribuição acumulada (f.d.a) tem forma fechada, o que limita a sua aplicação. Liu e Yu (2008) propuseram um novo método de estimação que reformula a verossimilhança condicional de efeitos aleatórios não-normais. Os autores reformulam a verossimilhança, dividindo e multiplicando a verossimilhança condicional por uma função densidade Normal. Os mesmos mostram que os resultados encontrados são similares aos obtidos pelo método PIT. Além disso, há vantagens adicionais tais como a redução do esforço computacional e a possibilidade de lidar com distribuições de efeitos aleatórios para as quais não há forma fechada para a função de distribuição acumulada.

Por outro lado, outra abordagem para o tratamento de dados de degradação é utilização de métodos bayesianos. Esta abordagem aparece de maneira natural visto que utiliza a informação contida na distribuição *a priori* dos parâmetros do modelo de degradação. Em fármaco-cinética, métodos bayesianos já foram utilizados (Wakefield *et al.*, 1994; Gelman *et al.*, 1996; Wakefield, 1996), entretanto só recentemente essa abordagem começou a ser utilizada em dados de degradação. Hamada (2005) utilizou inferência bayesiana em dados de degradação associados a falhas em lasers (situação descrita na Seção 1.1.2). O autor baseou-se em um modelo linear de degradação com estrutura hierárquica, no qual uma distribuição *a priori* Weibull foi escolhida para os efeitos aleatórios e distribuições *a priori* Gamma foram utilizadas para os dois hiperparâmetros. Amostras da distribuição *a posteriori* dos parâmetros do modelo foram obtidas através de métodos MCMC (Gamerman e Lopes, 2006, Markov Chain Monte Carlo). As distribuições *a posteriori* de quantis da distribuição do tempo de falha T ,

bem como da confiabilidade *a posteriori* em 4500 horas de uso também foram obtidas. Para isso, as expressões para o cálculo do p -ésimo quantil e de $R(t)$ (a confiabilidade em um tempo t) de uma distribuição Weibull foram aplicadas às amostras da distribuição *a posteriori* dos parâmetros do modelo. Contudo, algumas inconsistências teóricas foram observadas no referido artigo, uma vez que o autor afirma que a distribuição dos Tempos de Falha e dos Efeitos Aleatórios do modelo proposto é Weibull tanto *a priori* quanto *a posteriori*. Será provado no presente trabalho que essa colocação não é válida. Diante desta constatação um dos objetivos da presente pesquisa é estudar o efeito dessa inconsistência nos resultados da análise dos dados dos emissores a laser e propor uma abordagem alternativa.

Robinson e Crowder (2000) fizeram uma revisão dos métodos clássicos de inferência para modelos de degradação e apresentaram uma abordagem bayesiana completa para o problema, que incluía a estimação da distribuição do tempo de falha de unidades futuras e para as unidades sob teste. No artigo os autores aplicam o enfoque bayesiano num modelo de degradação não linear utilizado por Lu e Meeker (1993) originário da Lei de Paris-Edorgan (e.g., Sobczyk e Spencer, 1992, Capítulo 1). O banco de dados utilizado é recorrente na área e foi primeiramente introduzido por Hudak *et al.* (1978), trata de medidas da evolução do tamanho da trinca em eixos. Os autores eliciam distribuições *a priori* não informativas no sentido de Jeffreys para os parâmetros da distribuição e hiperparâmetros da distribuição dos efeitos aleatórios, posteriormente utilizam as distribuições marginais *a posteriori* dos mesmos para obter a distribuição dos tempos de falha das unidades sob teste e de uma unidade futura através da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha.

1.4 Objetivos do Trabalho

Os objetivos deste trabalho são:

1. Apontar as inconsistências teóricas presentes em Hamada (2005).
2. Apresentar uma proposta de abordagens alternativas encontradas para a análise de tempos de falha via Modelos de Degradação com a abordagem bayesiana.
3. Comparar os resultados da proposta com as duas na literatura, quais sejam, de Robinson e Crowder (2000) e Hamada (2005), para algumas situações de dados simulados.
4. Aplicar a proposta de análise aos dados de rodas de trem e emissores de laser.

1.5 Organização deste Texto

O presente texto está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 são apresentados os métodos estatísticos para estimação dos parâmetros em modelos de degradação com abordagem pela estatística clássica. No Capítulo 3 fornecemos a especificação do modelo linear sob o enfoque bayesiano, seguido das metodologias apresentadas nos artigos de Hamada (2005), Robinson e Crowder (2000) e a proposta de análise realizada nesta dissertação, além de evidenciar-se analiticamente a inconsistência teórica em Hamada (2005). No Capítulo 4 mostra-se empiricamente a inconsistência teórica presente em Hamada (2005). Para esta avaliação empírica utilizam-se dados simulados. Os mesmos são utilizadas para avaliar a proposta de análise deste texto em relação aos métodos de Hamada (2005) e Robinson e Crowder (2000), com mais foco neste primeiro. No Capítulo 5 os dados de emissores de laser presentes em Hamada (2005) e os dados de

rodas de trem (Freitas *et al.*, 2009, 2010) são reanalisados pela metodologia proposta na dissertação, além disso, comparam-se os resultados com os daqueles autores (apenas o enfoque bayesiano). No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões do estudo.

Capítulo 2

Métodos Estatísticos Baseados em Inferência Clássica para Estimação de Parâmetros em Modelos de Degradação

Neste capítulo serão brevemente apresentados os principais métodos de estimação e análise de dados de degradação baseados em inferência clássica. Embora tais métodos não sejam o foco do presente trabalho, a nomenclatura para modelos de degradação é introduzida através dos mesmos. Além disso, o leitor poderá apreciar melhor a estrutura da verossimilhança que será introduzida na inferência bayesiana (Seção 3.2.1). Uma abordagem completamente bayesiana de estimação para modelos de degradação é apresentada no Capítulo 3.

Antes de iniciarmos a apresentação dos métodos, introduzimos a notação que será utilizada extensivamente ao longo deste texto e as simplificações que se fizeram neces-

sárias. Na literatura estatística, a convenção usual é denotar a variável aleatória por uma letra maiúscula (*e.g.*, Y_{ij} é a variável aleatória que representa a resposta a ser observada para a i -ésima unidade no j -ésimo tempo) e o valor observado dessa variável aleatória (“os dados”) pela letra minúscula correspondente (*e.g.*, y_{ij} é o valor observado de Y_{ij}). Para a maior parte deste texto essa convenção será mantida. Entretanto, se nos desviarmos desta notação, estará claro pelo contexto se estamos nos referindo à variável aleatória ou à sua realização (seu valor observado).

Além disso, a notação $f_{\tilde{Y}|\tilde{\theta}}(y|\theta)$ será utilizada para representar a função densidade de probabilidade do vetor aleatório \tilde{Y} , indexado pelo vetor de parâmetros $\tilde{\theta}$, avaliada no vetor de valores observados (“os dados”) y . De maneira equivalente, $F_{\tilde{Y}|\tilde{\theta}}(y|\theta)$ é a função distribuição acumulada de probabilidade de \tilde{Y} associada a $f_{\tilde{Y}|\tilde{\theta}}(y|\theta)$. Tal notação é similar para as demais funções distribuição densidade e acumulada de probabilidade.

2.1 O Método Aproximado

Seja o modelo dado em (1.3). O método aproximado, introduzido por Meeker e Escobar (1998), consiste de dois passos. O primeiro é uma análise separada para cada perfil de modo a definir (estimar) quando o limiar de degradação D_f é alcançado, o que caracteriza a falha.

Ao tempo de falha estimado, obtido da solução da equação de degradação em relação a t quando a degradação é igual à degradação crítica, dá-se o nome “pseudo tempo de falha”. Os “pseudo tempos de falha” são analisados como uma amostra completa de tempos de falha para a estimação de $F_{T|\theta}(t|\theta)$, em que $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)^t$ é o vetor de parâmetros, fixos, da distribuição dos efeitos aleatórios $\Lambda_{\beta|\theta}(\beta|\theta)$, os quais no Método Aproximado são tratados como fixos. Formalmente, temos:

1. Para cada unidade i utilize o modelo $Y_{ij} = D(t_{ij}; \alpha; \beta_i) + \varepsilon_{ij}$ e a amostra ob-

servada $(t_{i1}, y_{i1}), \dots, (t_{im_i}, y_{im_i})$ para encontrar as estimativas de máxima verossimilhança (condicionadas) de $\underset{\sim}{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)^t$ e $\underset{\sim}{\beta}_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ip})^t$. Note que fixando-se i , as estimativas são obtidas para uma unidade experimental específica. Portanto o vetor $\underset{\sim}{\beta}_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ip})^t$ é tratado como fixo. O vetor $\underset{\sim}{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)^t$ de efeitos fixos, que no modelo geral (1.3) é comum para todas as unidades, também será estimado para cada uma separadamente. Denote tais estimativas $\underset{\sim}{\hat{\alpha}}_i$ e $\underset{\sim}{\hat{\beta}}_i$, as quais também podem ser obtidas através de mínimos quadrados.

2. Para cada unidade i resolva as equações $D_i(t; \underset{\sim}{\hat{\alpha}}_i; \underset{\sim}{\hat{\beta}}_i) = D_f$ para t e obtenha a solução $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n$ (“pseudo tempos de falha”).
3. Execute o procedimento convencional de análise de tempo de falha (Nelson, 1990) para os “pseudo tempos de falha” $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n$ para estimar $F_{T|\underset{\sim}{\theta}}(t|\underset{\sim}{\theta})$.

O método é adequado para caminhos de degradação relativamente simples, e para os quais os dados sejam suficientes para estimar $\underset{\sim}{\alpha}_i$ e $\underset{\sim}{\beta}_i$. O horizonte de extrapolação deve ser curto, uma vez que o modelo desconsidera erros de previsão e os erros inerentes aos valores de degradação observados.

2.2 O Método Analítico

Para modelos de degradação mais simples, $F_{T|\underset{\sim}{\theta}}(t|\underset{\sim}{\theta})$ pode ser expressa de forma fechada. O exemplo a seguir ilustra o caso.

Suponha que o perfil real de degradação de uma unidade particular seja dado por $D(t) = \alpha + \beta t$, em que α é efeito fixo e representa a degradação inicial de todas as unidades sob teste, ou seja, $D(0) = \alpha$; β é a taxa de degradação que varia de unidade para unidade (corresponde ao efeito aleatório) de acordo com uma distribuição log-

normal com parâmetros μ_β e $\sigma_\beta > 0$.

Para o nível crítico D_f tem-se:

$$D_f = \alpha + \beta T \text{ e } T = g(\beta; \alpha; D_f, D) = \frac{D_f - \alpha}{\beta}$$

em que g é a transformação da variável aleatória (v.a.) β na v.a. T , e T é o tempo até a falha.

A função distribuição acumulada de T é dada por:

$$\begin{aligned} F_{T|\alpha,\beta}(t|\alpha,\beta) &= P(T \leq t|\alpha,\beta) \\ &= P\left(\frac{D_f - \alpha}{\beta} \leq t|\alpha,\beta\right) \\ &= P\left(\beta \geq \frac{D_f - \alpha}{t}|\alpha,\beta\right) \\ F_{T|\alpha,\mu_\beta,\sigma_\beta}(t|\alpha,\mu_\beta,\sigma_\beta) &= 1 - \Phi_{nor}\left(\frac{\log(D_f - \alpha) - \log t - \mu_\beta}{\sigma_\beta}|\alpha,\mu_\beta,\sigma_\beta\right) \\ &= \Phi_{nor}\left(\frac{-[\log(D_f - \alpha) - \log t - \mu_\beta]}{\sigma_\beta}|\alpha,\mu_\beta,\sigma_\beta\right) \\ &= \Phi_{nor}\left(\frac{\log t - [\log(D_f - \alpha) - \mu_\beta]}{\sigma_\beta}|\alpha,\mu_\beta,\sigma_\beta\right), t > 0 \end{aligned}$$

em que Φ_{nor} é a função distribuição acumulada de uma distribuição normal padrão. Neste caso, T também é log-normal com parâmetro de escala $t_{0,50|\alpha,\mu_\beta,\sigma_\beta} = \exp(\mu_T) = \mu_T = [\log(D_f - \alpha) - \mu_\beta]$ e parâmetro de forma $\sigma_T = \sigma_\beta > 0$. Outras funções densidade de probabilidade podem ser utilizadas para estimar $F_T(t)$ utilizando o mesmo procedimento. Resultados para outras distribuições como Weibull, Normal (Gaussiana) e Bernstein podem ser encontradas em Lu e Meeker (1993). Note que mesmo neste caso é preciso estimar os parâmetros da distribuição dos efeitos aleatórios β .

2.3 O Método de Dois Estágios

Este método foi apresentado por Lu e Meeker (1993) e parte do pressuposto de que o vetor de efeitos aleatórios β , ou alguma reparametrização apropriada $\varphi = H(\beta)$ segue uma distribuição Normal Multivariada. A seguir são explicitados os passos do método.

Estágio 1

1. Para cada unidade amostral i ($i = 1, \dots, n$), ajuste o modelo de degradação (1.3) (através de mínimos quadrados) e obtenha as estimativas de Estágio 1 para os parâmetros do modelo $(\alpha; \beta_i)$. Em outras palavras, para cada unidade i ($i = 1, \dots, n$), $(\hat{\alpha}_i; \hat{\beta}_i)$ são, respectivamente, as estimativas de mínimos quadrados para os parâmetros de efeito fixo e aleatório do modelo. Vale aqui a mesma observação feita no passo 1 do método aproximado. Ainda, um estimador da variância do erro σ_ε^2 , obtida da i -ésima unidade é o erro quadrático médio:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \left[\sum_{i=1}^{m_i} \frac{\left\{ y_{ij} - D \left(t_{ij}; \hat{\alpha}_i; \hat{\beta}_i \right) \right\}^2}{(m_i - q)} \right], \text{ em que } q = p + r.$$

2. Assuma que, para alguma reparametrização apropriada (e.g, transformação de Box e Cox, 1964), $\hat{\varphi}_i = H(\hat{\beta}_i)$ é aproximadamente distribuído segundo uma normal multivariada com média assintótica μ_φ e matriz de variância e covariância Σ_φ .

Estágio 2

No segundo estágio, os estimadores $(\hat{\alpha}_i; \hat{\varphi}_i)$ ($i = 1, \dots, n$) são combinados para construir os estimadores de dois estágios dos parâmetros do modelo de degradação.

Os estimadores de α , μ_φ e Σ_φ são, respectivamente,

$$\hat{\alpha}_{\sim} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\alpha}_i}{n}$$

$$\hat{\mu}_{\varphi_{\sim}} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\varphi}_i}{n}$$

$$\hat{\Sigma}_{\varphi_{\sim}} = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\left(\hat{\varphi}_i - \hat{\mu}_{\varphi_{\sim}} \right) \left(\hat{\varphi}_i - \hat{\mu}_{\varphi_{\sim}} \right)^t}{(n-1)} \right] - \sum_{i=1}^n \frac{\text{var}_{\varepsilon} \left(\hat{\varphi}_i \right)}{n}$$

Estimação Pontual de $F_{T|\alpha_{\sim}, \mu_{\varphi_{\sim}}, \Sigma_{\varphi_{\sim}}}(t|\alpha_{\sim}, \mu_{\varphi_{\sim}}, \Sigma_{\varphi_{\sim}})$

A estimativa $\hat{F}_{T|\alpha_{\sim}, \mu_{\varphi_{\sim}}, \Sigma_{\varphi_{\sim}}}(t|\alpha_{\sim}, \mu_{\varphi_{\sim}}, \Sigma_{\varphi_{\sim}})$ de $F_{T|\alpha_{\sim}, \mu_{\varphi_{\sim}}, \Sigma_{\varphi_{\sim}}}(t|\alpha_{\sim}, \mu_{\varphi_{\sim}}, \Sigma_{\varphi_{\sim}})$ pode ser avaliada para qualquer nível de precisão desejada através de simulação Monte Carlo. Os passos básicos são:

1. Estime os parâmetros α_{\sim} , $\mu_{\varphi_{\sim}}$ e $\Sigma_{\varphi_{\sim}}$ de n perfis de degradação utilizando o método de dois estágios.
2. Gere N realizações $\tilde{\varphi}$ de φ da distribuição $N\left(\hat{\mu}_{\varphi_{\sim}}; \hat{\Sigma}_{\varphi_{\sim}}\right)$ e obtenha as N correspondentes realizações $\tilde{\beta}^*$ de β a partir de $H^{-1}(\tilde{\varphi})$, em que N é grande (e.g., $N = 100.000$) e H^{-1} é a transformada inversa de H . Em casos para os quais $F_{\tilde{\beta}}(\cdot)$ de $\tilde{\beta}$ é conhecida, as realizações $\tilde{\beta}^*$ de $\tilde{\beta}$ podem ser geradas diretamente desta distribuição. Tais valores podem ser aplicados nos passos 3 e 4.
3. Calcule os N tempos de falha t^* simulados substituindo $\tilde{\beta}^*$ em $D_f = D(\tilde{\beta}; \hat{\alpha}_{\sim}; t)$.
4. Estime $F_{T|\alpha_{\sim}, \mu_{\varphi_{\sim}}, \Sigma_{\varphi_{\sim}}}(t|\alpha_{\sim}, \mu_{\varphi_{\sim}}, \Sigma_{\varphi_{\sim}})$ da distribuição empírica simulada para qualquer valor desejado de t da seguinte maneira:

$$\hat{F}_{T|\alpha_{\sim}, \mu_{\varphi_{\sim}}, \Sigma_{\varphi_{\sim}}}(t|\alpha_{\sim}, \mu_{\varphi_{\sim}}, \Sigma_{\varphi_{\sim}}) = \frac{[\text{Número de tempos de falha } t^* \leq t]}{N}$$

O erro Monte Carlo é facilmente calculado através da distribuição binomial. Este erro pode ser minimizado fazendo-se N suficientemente grande. Intervalos de confiança podem ser construídos através de procedimentos bootstrap (Efron, 1985).

O número de observações em cada nível afeta a acurácia da estimação dos parâmetros do modelo para cada um dos perfis individuais (Lu e Meeker, 1993). No desenvolvimento do método de dois estágios, Lu e Meeker (1993) assumiram que o número de observações para cada perfil era suficientemente grande para garantir as propriedades assintóticas dos estimadores. Para o modelo utilizado no artigo, os autores concluíram através de um estudo por simulação (não incluído no artigo) que a normalidade assintótica era garantida com um número mínimo de $m_i = 7$ observações ($i = 1, 2, \dots, n$) para cada uma das n unidades amostrais.

2.4 O Método Numérico

O método numérico, apresentado por Meeker e Escobar (1998) consiste na estimação dos parâmetros do modelo geral de degradação (1.3) pelo método de máxima verossimilhança e, posteriormente, a obtenção de $F_T(t)$ através de simulação de Monte Carlo.

Primeiramente é necessário retomar o modelo geral (1.3) e introduzir uma notação adicional que será utilizada ao longo do texto nas próximas seções e capítulos. A referência básica é o trabalho de Robinson e Crowder (2000).

Seja o modelo geral de degradação (1.3):

$$Y_{ij} = D(t_{ij}; \alpha, \beta_i) + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m_i$$

em que,

- Y_{ij} é variável aleatória que representa a j -ésima medida de degradação da i -ésima unidade amostral, no j -ésimo tempo pré-especificado t_{ij} ;
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)^t$ é o vetor de parâmetros fixos (associado aos efeitos fixos), desconhecido e comum à todas as unidades;
- $\beta_i = (\beta_{i1}, \dots, \beta_{ip})^t$ é o vetor de parâmetros aleatórios (coeficientes dos efeitos aleatórios do modelo) e que varia entre as unidades experimentais.

As suposições básicas do modelo são:

1. Os β_i 's ($i = 1, \dots, n$) são *iid* e seguem uma distribuição multivariada $\Lambda_{\beta|\theta}(\beta|\theta)$ indexada por um vetor fixo de parâmetros $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)^t$ desconhecido.

Seja $f_{\beta|\theta}(\beta|\theta)$ a função densidade associada a $\Lambda_{\beta|\theta}(\beta|\theta)$. Portanto, $\Lambda_{\beta_i|\theta}(\beta_i|\theta) = \Lambda_{\beta|\theta}(\beta|\theta)$ e $f_{\beta_i|\theta}(\beta_i|\theta) = f_{\beta|\theta}(\beta|\theta) \forall i = 1, \dots, n$, em que $f_{\beta_i|\theta}(\beta_i|\theta)$ é a função densidade do vetor de efeito aleatório β_i .

2. Os erros ε_{ij} são *iid* $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, em que σ_ε^2 é fixo e desconhecido. Seja $f_{\varepsilon_{ij}|\sigma_\varepsilon^2}(\varepsilon_{ij}|\sigma_\varepsilon^2)$ a função densidade de probabilidade dos ε_{ij} 's. Assim:

$$f_{\varepsilon_{ij}|\sigma_\varepsilon^2}(\varepsilon_{ij}|\sigma_\varepsilon^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\varepsilon_{ij}^2\right\}$$

em que, $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$.

3. os vetores aleatórios β_i e $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{im_i})^t$ são independentes para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Seja $Y_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{im_i})^t$ o vetor aleatório que denota as medidas de degradação da i -ésima unidade, e $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im_i})^t$ o vetor de observações ("os dados") da i -ésima unidade.

De maneira análoga, seja $\underset{\sim}{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^t$ o vetor aleatório que representa o conjunto completo de medidas de degradação para as n unidades, e $\underset{\sim}{y} = (y_1, \dots, y_n)^t$ os dados observados durante o período de ensaios.

Seja $\underset{\sim}{B} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^t = (\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1p}; \beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2p}; \dots; \beta_{n1}, \beta_{n2}, \dots, \beta_{np})^t$ que agrega todos os parâmetros aleatórios do modelo (para todas as n unidades experimentais).

Denote a função densidade de $\underset{\sim}{Y}_i$ como $f_{Y_i|\alpha, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2}(y_i|\alpha, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2)$. Assim pela suposição de independência de β_i e ε_{ij} ($\forall i, j$), tem-se que as funções densidade de probabilidade de $\underset{\sim}{Y}$ e $\underset{\sim}{B}$ são dadas respectivamente por:

$$f_{\underset{\sim}{Y}|\alpha, \underset{\sim}{B}, \theta, \sigma_\varepsilon^2}(\underset{\sim}{y}|\alpha, \underset{\sim}{B}, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = \prod_i^n f_{Y_i|\alpha, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2}(y_i|\alpha, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2) \quad (2.1)$$

$$f_{\underset{\sim}{B}|\theta}(\underset{\sim}{B}|\theta) = \prod_i^n f_{\beta_i|\theta}(\beta_i|\theta) \quad (2.2)$$

Sejam α , θ e σ_ε^2 os parâmetros (fixos) a serem estimados. De (2.1) e (2.2), segue que a expressão geral da função de verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} f_{\underset{\sim}{Y}|\alpha, \theta, \sigma_\varepsilon^2}(\underset{\sim}{y}|\alpha, \theta, \sigma_\varepsilon^2) &= \int_{\Xi_{\underset{\sim}{B}}} f_{\underset{\sim}{Y}, \underset{\sim}{B}|\alpha, \theta, \sigma_\varepsilon^2}(\underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{B}|\alpha, \theta, \sigma_\varepsilon^2) d\underset{\sim}{B} \\ &= \int_{\Xi_{\beta_1}} \cdots \int_{\Xi_{\beta_n}} f_{\underset{\sim}{Y}, \underset{\sim}{B}|\alpha, \theta, \sigma_\varepsilon^2}(\underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{B}|\alpha, \theta, \sigma_\varepsilon^2) d\beta_1 \dots d\beta_n \\ &= \int_{\Xi_{\beta_1}} \cdots \int_{\Xi_{\beta_n}} \left\{ f_{\underset{\sim}{Y}|\alpha, \underset{\sim}{B}, \theta, \sigma_\varepsilon^2}(\underset{\sim}{y}|\alpha, \underset{\sim}{B}, \theta, \sigma_\varepsilon^2) f_{\underset{\sim}{B}|\theta}(\underset{\sim}{B}|\theta) \right\} d\beta_1 \dots d\beta_n \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{\Xi_{\beta_1}} \cdots \int_{\Xi_{\beta_n}} \left\{ f_{Y_i|\alpha, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2}(y_i|\alpha, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2) f_{\beta_i|\theta}(\beta_i|\theta) \right\} d\beta_1 \dots d\beta_n \end{aligned} \quad (2.3)$$

em que, $\Xi_{\tilde{B}} = (\Xi_{\tilde{\beta}_1}, \dots, \Xi_{\tilde{\beta}_n})$ é o suporte de \tilde{B} , e $\Xi_{\tilde{\alpha}}$ é o suporte de $\tilde{\alpha}$.

Note que com a suposição de que os erros são *iid* $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, Y_i tem distribuição Normal Multivariada de ordem m_i , ou seja, $Y_i | \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_i, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}_\varepsilon^2$ são independentemente distribuídos (*indep.*) segundo uma distribuição $N_{m_i}(\mu_{Y_i}; \Sigma_{Y_i})$, em que μ_{Y_i} é o vetor de médias (de dimensão $m_i \times 1$ dado por $\mu_{Y_i} = E(Y_i) = [D(t_{i1}; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_i), \dots, D(t_{im_i}; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_i)]^t$) e matriz de variância-covariância $\Sigma_{Y_i} = \sigma_\varepsilon^2 I_{m_i}$, na qual I_{m_i} é a matriz identidade de ordem m_i .

Além disso, $Y_{ij} | \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_i, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}_\varepsilon^2 \stackrel{indep.}{\sim} N(D_i(t_{ij}; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_i); \sigma_\varepsilon^2)$ em que $j = 1, \dots, m_i$. Portanto, em (2.3), $f_{Y_i | \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_i, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}_\varepsilon^2}(y_i | \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_i, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}_\varepsilon^2) = \prod_{j=1}^{m_i} N(D_i(t_{ij}; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_i); \sigma_\varepsilon^2)$, de onde segue a função de verossimilhança (2.4):

$$\begin{aligned} f_{\tilde{Y} | \tilde{\alpha}, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}_\varepsilon^2}(y | \tilde{\alpha}, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}_\varepsilon^2) &= \prod_{i=1}^n \int_{\Xi_{\tilde{\beta}_1}} \cdots \int_{\Xi_{\tilde{\beta}_n}} \left\{ f_{Y_i | \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_i, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}_\varepsilon^2}(y_i | \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_i, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}_\varepsilon^2) f_{\tilde{\beta}_i | \tilde{\theta}}(\tilde{\beta}_i | \tilde{\theta}) \right\} d\tilde{\beta}_1 \dots d\tilde{\beta}_n \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{\Xi_{\tilde{\beta}_1}} \cdots \int_{\Xi_{\tilde{\beta}_n}} \left\{ \left[\prod_{j=1}^{m_i} N(D_i(t_{ij}; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_i); \sigma_\varepsilon^2) \right] f_{\tilde{\beta}_i | \tilde{\theta}}(\tilde{\beta}_i | \tilde{\theta}) \right\} \\ &\quad d\tilde{\beta}_1 \dots d\tilde{\beta}_n \end{aligned} \quad (2.4)$$

A estimação de $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\theta}$ e $\tilde{\sigma}_\varepsilon^2$ é então obtida pela maximização da função (2.4). Entretanto a integração nos $\tilde{\beta}_i$'s em geral apresenta problemas. A solução é resolver as integrais numericamente. Contudo, mesmo numericamente, a dificuldade de resolução aumenta com o aumento da dimensão de $\tilde{\beta}_i$.

Uma suposição adicional, em geral implementada, é a de que os $\tilde{\beta}_i$'s são *iid* segundo uma Normal Multivariada de ordem p , ou seja, neste caso $\tilde{\theta} = (\mu_{\tilde{\beta}}, \Sigma_{\tilde{\beta}})$ e $\tilde{\beta}_i | \mu_{\tilde{\beta}}, \Sigma_{\tilde{\beta}} \stackrel{iid}{\sim} N_p(\mu_{\tilde{\beta}}, \Sigma_{\tilde{\beta}})$, em que $\Sigma_{\tilde{\beta}}$ é a matriz de variância-covariância.

Portanto, na expressão da verossimilhança (2.4), $f_{\tilde{\beta}_i | \tilde{\theta}}(\tilde{\beta}_i | \tilde{\theta}) = f_{\tilde{\beta}_i | \mu_{\tilde{\beta}}, \Sigma_{\tilde{\beta}}}(\tilde{\beta}_i | \mu_{\tilde{\beta}}, \Sigma_{\tilde{\beta}})$ é a função densidade da $N_p(\mu_{\tilde{\beta}}, \Sigma_{\tilde{\beta}})$, para todo $i = 1, \dots, n$. Tal como:

$$f_{\tilde{\beta}_i|\tilde{\mu}_\beta,\tilde{\Sigma}_\beta}(\tilde{\beta}_i|\tilde{\mu}_\beta,\tilde{\Sigma}_\beta) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\tilde{\Sigma}_\beta|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\tilde{\beta}_i - \tilde{\mu}_\beta)^t \tilde{\Sigma}_\beta^{-1}(\tilde{\beta}_i - \tilde{\mu}_\beta)\right\}$$

Nesse caso em que os $\tilde{\beta}_i$'s são normalmente distribuídos, as funções LME (modelo linear de efeitos mistos lineares) e NLME (modelo não-linear de efeitos mistos), implementadas no Software R 2.9.0 (R Development Core Team, 2005) no pacote NLME Pinheiro *et al.* (2008), podem ser utilizadas para cálculo das estimativas de máxima verossimilhança aproximadas dos parâmetros $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\theta} = \left(\tilde{\mu}_\beta, \tilde{\Sigma}_\beta\right)$ e σ_ε^2 (Pinheiro e Bates, 2000).

Assim, das estimativas de $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\theta} = \left(\tilde{\mu}_\beta, \tilde{\Sigma}_\beta\right)$ e σ_ε^2 , $F_{T|\tilde{\alpha},\tilde{\theta},\tilde{\Sigma}_\beta}(t|\tilde{\alpha},\tilde{\theta},\tilde{\Sigma}_\beta)$ pode ser obtida via integração direta.

Contudo, o tempo computacional para avaliação das integrais irá aumentar exponencialmente com o aumento das dimensões das integrais. Uma alternativa é calcular $F_{T|\tilde{\alpha},\tilde{\theta},\tilde{\Sigma}_\beta}(t|\tilde{\alpha},\tilde{\theta},\tilde{\Sigma}_\beta)$ via simulação de Monte Carlo, de forma bastante similar àquela apresentada na etapa de Estimação Pontual de $F_{T|\tilde{\alpha},\tilde{\mu}_\varphi,\tilde{\Sigma}_\varphi}(t|\tilde{\alpha},\tilde{\mu}_\varphi,\tilde{\Sigma}_\varphi)$, na Seção 2.3.

Capítulo 3

Especificação do Modelo de Degradação Sob Abordagem Bayesiana

Dada a natureza aproximadamente linear dos perfis de degradação em estudo neste texto (veja as Figuras 1.2 e 1.3), será apresentada a especificação do modelo de degradação sob a abordagem bayesiana considerando-se aquela linearidade. O mesmo modelo será utilizado para ambas as situações práticas deste texto.

3.1 Método Baseado em Inferência Bayesiana

A inferência bayesiana permite estimar parâmetros desconhecidos de um modelo e avaliar a incerteza sobre ele através da distribuição *a posteriori*. Ou seja, a inferência resultante é a distribuição de probabilidade *a posteriori* dos parâmetros desconhecidos do modelo. Essa tarefa é executada combinando a informação *a priori* sobre

$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_s)$, em que s é o número de parâmetros do modelo, com a informação contida nos dados. A informação *a priori* é, em geral, descrita por uma função densidade de probabilidade $f_{\tilde{\eta}}(\eta)$, conhecida como distribuição *a priori* de $\tilde{\eta}$. Esta distribuição é uma escolha subjetiva e descreve o conhecimento inicial (antes de se observar os dados) do especialista sobre $\tilde{\eta}$. A informação fornecida pelos dados resumida na função de verossimilhança $f_{\tilde{Y}|\tilde{\eta}}(y|\eta) = f_{Y_{11}, \dots, Y_{1m_1}, \dots, Y_{n1}, \dots, Y_{nm_n}|\eta}(y_{11}, \dots, y_{1m_1}, \dots, y_{n1}, \dots, y_{nm_n}|\eta)$. A informação combinada é então descrita por outra função densidade de probabilidade $F_{\tilde{\eta}|\tilde{Y}}(\eta|y)$, chamada distribuição *a posteriori* de $\tilde{\eta}$. O teorema de Bayes fornece a maneira de calcular essa distribuição *a posteriori*, que é dada por:

$$f_{\tilde{\eta}|\tilde{Y}}(\eta|y) = \frac{f_{\tilde{Y}|\tilde{\eta}}(y|\eta)f_{\tilde{\eta}}(\eta)}{\int_{\Xi_{\tilde{\eta}}} f_{\tilde{Y}|\tilde{\eta}}(y|\eta)f_{\tilde{\eta}}(\eta)d\eta} \quad (3.1)$$

em que $\int_{\Xi_{\tilde{\eta}}} f_{\tilde{Y}|\tilde{\eta}}(y|\eta)f_{\tilde{\eta}}(\eta)d\eta$ é a distribuição preditiva de \tilde{y} , *a priori*, e $\Xi_{\tilde{\eta}}$ é o espaço paramétrico de $\tilde{\eta}$.

O maior problema da inferência bayesiana reside em calcular a integral em (3.1). Todavia, com os avanços dos métodos computacionais tornou-se fácil obter amostras de $f_{\tilde{\eta}|\tilde{Y}}(\eta|y)$ (Geman e Geman, 1984; Gelfand e Smith, 1990; Casella e George, 1992; Chib e Greenberg, 1995). Todos estes trabalhos mostram como obter uma amostra da distribuição *a posteriori* através de simulação Monte Carlo via Cadeias de Markov (métodos MCMC). Uma apresentação detalhada dos métodos MCMC podem ser encontrados, por exemplo, em Gamerman e Lopes (2006).

Para dados de degradação, a exclusiva estimação da distribuição dos parâmetros do modelo é insuficiente para a obtenção da distribuição dos tempos de falha das unidades sob teste e das unidades futuras (que não se encontram no escopo da amostra, ou seja, alguma unidade qualquer da população). É necessária a exploração da relação entre os parâmetros e tempos de medição, estabelecida pelo modelo (1.3). Usando essa relação,

a distribuição dos tempos de falha poderá ser obtida através de $f_{\eta|Y}(\eta|y)$.

3.2 Modelo com Efeito Aleatório Weibull

3.2.1 Construção da Função de Verossimilhança

Seja $\tilde{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ em que $\tilde{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{im_i})$ denota o vetor aleatório de medidas feitas na unidade amostral i , $i = 1, \dots, n$ (perfis de degradação). Seja $\tilde{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^t$ o vetor que contém todos os vetores de efeitos aleatórios das n unidades experimentais.

Da Figura 1.2 e 1.3 na Seção 1.1 percebe-se que os perfis de degradação são aproximadamente lineares. Hamada (2005) utilizou, para os dados de lasers, um modelo no qual o verdadeiro perfil de degradação no tempo t , para o i -ésimo perfil amostral é dado por:

$$D_i(t) = \left(\frac{1}{\beta_i} \right) t \quad (3.2)$$

Fazendo $D_f = D_i(T_i)$ é possível obter o tempo de falha para o perfil i , da seguinte forma:

$$T_i = D_f \beta_i \quad (3.3)$$

Portanto, o modelo que descreve Y_{ij} isto é, a degradação do i -ésimo perfil no tempo t_{ij} toma a seguinte forma:

$$Y_{ij} = D_{ij} = D(t_{ij}, \beta_i) + \varepsilon_{ij} = \left(\frac{1}{\beta_i} \right) t_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (3.4)$$

em que $i = 1, \dots, n$ (*perfis*), $j = 1, \dots, m_i$ (*medidas*).

Fazendo referência à notação do Capítulo 2, note que no caso do modelo 3.4, $\beta_i = \beta_i$ (um escalar, $\forall i = 1, \dots, n$) e, portanto, $\underset{\sim}{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^t$ neste caso é $\underset{\sim}{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^t$. Para facilitar a notação, visto que β_i é um escalar, $\underset{\sim}{B}$ e $\underset{\sim}{\beta}$ serão utilizados ao longo deste e dos próximos capítulos.

Além disso, assume-se que

$$\varepsilon_{ij} | \sigma_\varepsilon^2 \stackrel{iid}{\sim} N(0; \sigma_\varepsilon^2). \quad (3.5)$$

Conseqüentemente, tem-se que

$$Y_{ij} | \beta_i, \sigma_\varepsilon^2 \stackrel{indep}{\sim} N\left(\frac{1}{\beta_i} t_{ij}; \sigma_\varepsilon^2\right). \quad (3.6)$$

Sendo $\underset{\sim}{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{im_i})$, segue-se então que

$$\underset{\sim}{Y}_i | \beta_i, \sigma_\varepsilon^2 \stackrel{indep}{\sim} N_{m_i}\left(\underset{\sim}{\mu}_i; \sigma_\varepsilon^2 I_{m_i}\right) = N_{m_i}\left(\frac{1}{\beta_i} \underset{\sim}{t}_i^t; \sigma_\varepsilon^2 I_{m_i}\right), \quad (3.7)$$

em que I_{m_i} denota a matriz identidade de ordem m_i , $\underset{\sim}{t}_i^t = (t_{i1}, \dots, t_{im_i})$ e:

$$\underset{\sim}{\mu}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_i} t_{i1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\beta_i} t_{im_i} \end{bmatrix}$$

Então tem-se que a distribuição conjunta de $\underset{\sim}{Y}, \underset{\sim}{B} | \theta, \sigma_\varepsilon^2$ é:

$$\begin{aligned}
 f_{\tilde{Y}, \tilde{B} | \tilde{\theta}, \sigma_\varepsilon^2}(y, B | \tilde{\theta}, \sigma_\varepsilon^2) &= f_{Y|B, \sigma_\varepsilon^2}(y|B, \sigma_\varepsilon^2) f_{B|\tilde{\theta}}(B|\tilde{\theta}) \\
 &= \prod_{i=1}^n \left\{ f_{Y_i|\beta_i, \sigma_\varepsilon^2}(y_i|\beta_i, \sigma_\varepsilon^2) f_{\beta_i|\tilde{\theta}}(\beta_i|\tilde{\theta}) \right\} \\
 &= \prod_{i=1}^n \left\{ \left[\prod_{j=1}^{m_i} f_{Y_{ij}|\beta_i, \sigma_\varepsilon^2}(y_{ij}|\beta_i, \sigma_\varepsilon^2) \right] f_{\beta_i|\tilde{\theta}}(\beta_i|\tilde{\theta}) \right\} \\
 &= \prod_{i=1}^n \left\{ \left[\prod_{j=1}^{m_i} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i} \right)^2 \right\} \right] \right. \\
 &\quad \left. f_{\beta_i|\tilde{\theta}}(\beta_i|\tilde{\theta}) \right\} \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Ainda, estabeleceu-se que a degradação inicial é $y_{i1} = 0$ para todas as unidades. Note que a equação (3.8) é bastante similar à equação (2.4), exceto pelas integrais. Para a inferência bayesiana, diferentemente do procedimento da estatística clássica, não são efetuadas as integrações no espaço paramétrico dos efeitos aleatórios. O procedimento bayesiano para estimação dos parâmetros na equação (3.8) surge naturalmente como evidenciado na Seção 3.2.2.

3.2.2 Especificação das Distribuições *a priori*

Assim como em Robinson e Crowder (2000), determinamos a distribuição conjunta *a posteriori* dos parâmetros como se segue:

$$\begin{aligned}
f_{\tilde{\beta}, \tilde{\theta}, \sigma_{\varepsilon}^2 | \tilde{Y}}(\tilde{\beta}, \tilde{\theta}, \sigma_{\varepsilon}^2 | \tilde{y}) &= \frac{f_{\tilde{Y}, \tilde{\beta}, \tilde{\theta}, \sigma_{\varepsilon}^2}(\tilde{y}, \tilde{\beta}, \tilde{\theta}, \sigma_{\varepsilon}^2)}{f_{\tilde{Y}}(\tilde{y})} \\
&= \frac{f_{\tilde{Y} | \tilde{\beta}, \sigma_{\varepsilon}^2}(\tilde{y} | \tilde{\beta}, \sigma_{\varepsilon}^2) f_{\tilde{\beta} | \tilde{\theta}}(\tilde{\beta} | \tilde{\theta}) f_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}) f_{\sigma_{\varepsilon}^2}(\sigma_{\varepsilon}^2)}{\int_{\sigma_{\varepsilon}^2} \int_{\tilde{\beta}} \int_{\tilde{\theta}} f_{\tilde{Y} | \tilde{\beta}, \sigma_{\varepsilon}^2}(\tilde{y} | \tilde{\beta}, \sigma_{\varepsilon}^2) f_{\tilde{\beta} | \tilde{\theta}}(\tilde{\beta} | \tilde{\theta}) f_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}) f_{\sigma_{\varepsilon}^2}(\sigma_{\varepsilon}^2) d\tilde{\theta} d\tilde{\beta} d\sigma_{\varepsilon}^2} \\
&\propto \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left[f_{Y_{ij} | \beta_i, \sigma_{\varepsilon}^2}(y_{ij} | \beta_i, \sigma_{\varepsilon}^2) \right] f_{\beta_i | \theta}(\beta_i | \theta) \right\} f_{\theta}(\theta) f_{\sigma_{\varepsilon}^2}(\sigma_{\varepsilon}^2) \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Note que as notações de $f_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta})$ e $f_{\sigma_{\varepsilon}^2}(\sigma_{\varepsilon}^2)$ foram suprimidas (não condicionadas pelos respectivos parâmetros) a título de simplificação.

Essa forma expandida remete aos modelos hierárquicos (Bernardo e Smith, 1994).

Define-se a distribuição *a priori* para os efeitos aleatórios β_i 's, e σ_{ε}^2 através de $f_{\beta_i | \theta}(\beta_i | \theta)$ e $f_{\sigma_{\varepsilon}^2}(\sigma_{\varepsilon}^2)$, respectivamente.

Defina $\theta = (\delta, \lambda)^t$, dessa maneira assume-se $\beta_i | \theta = \beta_i | (\delta, \lambda)^t \sim Weibull(\delta, \lambda)$ como distribuição *a priori* para os efeitos aleatórios de cada perfil. Ou seja:

$$\beta_i | \theta = \beta_i | (\delta, \lambda) \sim Weibull(\delta, \lambda) \quad (3.10)$$

$$f_{\beta_i | \delta, \lambda}(\beta_i | \delta, \lambda) = \delta \lambda (\beta_i)^{\delta-1} \exp \left\{ -\lambda \beta_i^{\delta} \right\} \quad \beta_i > 0, \delta > 0 \text{ e } \lambda > 0 \quad (3.11)$$

Hamada (2005) utilizou exatamente a distribuição *a priori* na equação (3.10) para os efeitos aleatórios β_i , o que é razoável ser assumido aqui, pois os perfis apresentados nas Figuras 1.2 e 1.3 indicam que a degradação é positiva. Ainda, a distribuição Weibull é flexível o bastante para definir distribuições *a priori* tanto informativas quanto não informativas (no sentido de atribuir massa probabilística aproximadamente igual para todos os valores no suporte de β_i).

Assume-se, como usualmente utilizado na literatura e inclusive em Hamada (2005), que $\sigma_{\varepsilon}^2 | a_3, b_3 \sim GammaInvertida(a_3, b_3)$, ou seja, distribuição *a priori* de σ_{ε}^2 tem a

seguinte densidade:

$$f_{\sigma_\varepsilon^2|a_3,b_3}(\sigma_\varepsilon^2|a_3,b_3) = \frac{b_3^{a_3}}{\Gamma(a_3)} (\sigma_\varepsilon^2)^{-(a_3+1)} e^{b_3/\sigma_\varepsilon^2}; \sigma_\varepsilon^2 > 0, a_3 > 0, b_3 > 0 \quad (3.12)$$

Ainda, é possível especificar no modelo hierárquico as chamadas “hiperprioris”, isto é, $f_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}) = f_\delta(\delta)f_\lambda(\lambda)$. Aqui assumimos

$$\delta|a_1,b_1 \sim \text{Gamma}(a_1; b_1) \quad (3.13)$$

$$f_{\delta|a_1,b_1}(\delta|a_1,b_1) = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \delta^{a_1-1} e^{-b_1\delta}; \delta > 0, a_1 > 0, b_1 > 0 \quad (3.14)$$

$$\lambda|a_2,b_2 \sim \text{Gamma}(a_2; b_2) \quad (3.15)$$

$$f_{\lambda|a_2,b_2}(\lambda|a_2,b_2) = \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \lambda^{a_2-1} e^{-b_2\lambda}; \lambda > 0, a_2 > 0, b_2 > 0 \quad (3.16)$$

As famílias de distribuições $\text{Gamma}(a,b)$ e $\text{GammaInvertida}(a,b)$, com valores de a e b tendendo a zero, são usualmente utilizadas na literatura definir distribuições *a priori* pouco informativas para δ e λ (no sentido de dar massa probabilística aproximadamente igual para todos os valores no suporte do parâmetro que modelam).

Especificadas as distribuições *a priori*, para fazermos inferências necessitamos encontrar as distribuições *a posteriori*. Para o problema em questão a distribuição *a posteriori* não tem forma fechada, por isto utilizaremos métodos MCMC. Iniciamos por encontrar as distribuições condicionais completas.

3.2.3 Especificação das Distribuições Condicionais Completas

As distribuições condicionais completas *a posteriori* para cada parâmetro são obtidas a partir da distribuição conjunta $f_{\tilde{\beta}, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}_\varepsilon^2 | \tilde{Y}}(\tilde{\beta}, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}_\varepsilon^2 | \tilde{Y})$. Para facilitar os cálculos será utilizada uma parametrização diferente para a distribuição Normal, que até então era da forma $N(\mu, \sigma_\varepsilon^2)$, e agora assume a forma $N(\mu, \tau)$, em que $1/\sigma_\varepsilon^2 = \tau$. A primeira consequência dessa reparametrização é que distribuição *a priori* de τ é:

$$\tau | a_3, b_3 \sim \text{Gamma}(a_3; b_3) \quad (3.17)$$

$$f_{\tau | a_3, b_3}(\tau) = \frac{b_3^{a_3}}{\Gamma(a_3)} \tau^{a_3-1} e^{-b_3 \tau} ; \tau > 0, a_3 > 0, b_3 > 0 \quad (3.18)$$

Dessa maneira a distribuição *a posteriori* dos parâmetros pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} f_{\tilde{\beta}, \tilde{\delta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\tau} | \tilde{Y}}(\tilde{\beta}, \tilde{\delta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\tau} | \tilde{y}) &\propto f_{\tilde{Y} | \tilde{\beta}, \tilde{\tau}}(\tilde{y} | \tilde{\beta}, \tilde{\tau}) f_{\tilde{\beta} | \tilde{\delta}, \tilde{\lambda}}(\tilde{\beta} | \tilde{\delta}, \tilde{\lambda}) f_{\tilde{\delta}}(\tilde{\delta}) f_{\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}) f_{\tilde{\tau}}(\tilde{\tau}) \\ &\propto \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} [f_{Y_{ij} | \beta_i, \tau}(y_{ij} | \beta_i, \tau)] f_{\beta_i | \delta, \lambda}(\beta_i | \delta, \lambda) \right\} f_{\tilde{\delta}}(\tilde{\delta}) f_{\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}) f_{\tilde{\tau}}(\tilde{\tau}) \\ &\propto \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} [f_{Y_{ij} | \beta_i, \tau}(y_{ij} | \beta_i, \tau)] f_{\beta_i | \delta, \lambda}(\beta_i | \delta, \lambda) \right\} f_{\tilde{\delta}}(\tilde{\delta}) f_{\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}) f_{\tilde{\tau}}(\tilde{\tau}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Da equação (3.19) tem-se que:

$$\begin{aligned}
 f_{\tilde{\beta}, \tilde{\delta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\tau} | \tilde{Y}}(\tilde{\beta}, \tilde{\delta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\tau} | \tilde{y}) &\propto \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left[f_{Y_{ij} | \beta_i, \tau}(y_{ij} | \beta_i, \tau) \right] f_{\beta_i | \delta, \lambda}(\beta_i | \delta, \lambda) \right\} f_{\delta}(\delta) f_{\lambda}(\lambda) f_{\tau}(\tau) \\
 &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{m_i} \left(\frac{\tau}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i} \right)^2 \right\} \\
 &\quad \prod_{i=1}^n \delta \lambda (\beta_i)^{\delta-1} \exp \left\{ -\lambda \beta_i^{\delta} \right\} \\
 &\quad \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \delta^{a_1-1} \exp\{b_1 \delta\} \\
 &\quad \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \lambda^{a_2-1} \exp\{b_2 \lambda\} \\
 &\quad \frac{b_3^{a_3}}{\Gamma(a_3)} \tau^{a_3-1} \exp\{b_3 \tau\} \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

A distribuição condicional completa de cada um dos parâmetros é dada por:

$$\begin{aligned}
 f_{\beta_i | \beta^{[-i]}, \delta, \lambda, \tau, \tilde{Y}}(\beta_i | \beta^{[-i]}, \delta, \lambda, \tau, \tilde{y}) &\propto f_{\tilde{Y} | \beta_i, \tau}(y_i | \beta_i, \tau) f_{\beta_i | \delta, \lambda}(\beta_i | \delta, \lambda) \\
 &\propto (\beta_i)^{\delta-1} \exp \left\{ -\lambda \beta_i^{\delta} \right\} \prod_{j=1}^{m_i} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i} \right)^2 \right\} \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

em que $\beta^{[-i]} = (\beta) - \beta_i = (\beta_1, \dots, \beta_n) - \beta_i$. Ou seja, $\beta^{[-i]}$ é $(n - 1)$ dimensional pois não contém o escalar β_i .

$$\begin{aligned}
 f_{\delta | \tilde{\beta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\tau}, \tilde{Y}}(\delta | \tilde{\beta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\tau}, \tilde{y}) &\propto f_{\tilde{\beta} | \delta, \lambda}(\tilde{\beta} | \delta, \lambda) f_{\delta}(\delta) \\
 &\propto \delta^{a_1-1} \exp\{b_1 \delta\} \prod_{i=1}^n \delta (\beta_i)^{\delta-1} \exp \left\{ -\lambda \beta_i^{\delta} \right\} \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\lambda|\beta,\delta,\tau,Y}(\lambda|\beta,\delta,\tau,y) &\propto f_{\beta|\delta,\lambda}(\beta|\delta,\lambda)f_{\lambda}(\lambda) \\
&\propto \lambda^{a_2-1} \exp\{b_2\lambda\} \prod_{i=1}^n \lambda \exp\{-\lambda\beta_i^\delta\} \quad (3.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\tau|\beta,\delta,\lambda,Y}(\tau|\beta,\delta,\lambda,y) &\propto f_{Y|\beta,\tau}(y|\beta,\tau)f_{\tau}(\tau) \\
&\propto \tau^{a_3-1} \exp\{b_3\tau\} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{m_i} \tau^{1/2} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i}\right)^2\right\} \quad (3.24)
\end{aligned}$$

A partir da distribuição condicional completa de cada parâmetro é possível obter amostras da distribuição $f_{\beta,\theta,\sigma_\varepsilon^2|Y}(\beta,\theta,\sigma_\varepsilon^2|y)$ conforme descrito por Gelfand e Smith (1990).

3.3 Modelo com Efeito Aleatório Lognormal

3.3.1 Construção da Função de Verossimilhança

Analogamente à Seção 3.2.1, pois tratam-se das mesmas suposições, para o modelo (3.4), com base em (3.5, 3.6 e 3.7), a função de verossimilhança pode ser escrita como na equação (3.8).

3.3.2 Especificação das Distribuições *a priori*

Define-se a distribuição *a priori* para os efeitos aleatórios β_i 's, e σ_ε^2 através de $f_{\beta_i|\theta}(\beta_i|\theta)$ e $f_{\sigma_\varepsilon^2}(\sigma_\varepsilon^2)$, respectivamente.

Defina $\tilde{\theta} = (\mu_L, \sigma_L^2)$, dessa maneira assume-se $\beta_i | \tilde{\theta} = \beta_i | (\mu_L, \sigma_L^2)^t \sim \text{Lognormal}(\mu_L, \sigma_L^2)$ como distribuição *a priori* para os efeitos aleatórios de cada perfil. Ou seja:

$$f_{\beta_i | \mu_L, \sigma_L^2}(\beta_i | \mu_L, \sigma_L^2) = \frac{1}{\beta_i \sqrt{2\pi\sigma_L^2}} \exp \left\{ -\frac{(\ln(\beta_i) - \mu_L)^2}{2\sigma_L^2} \right\} \quad (3.25)$$

$$\beta_i > 0, \mu_L = (-\infty, +\infty) \text{ e } \sigma_L^2 > 0$$

Freitas *et al.* (2010) utilizou a mesma distribuição *a priori* na equação (3.25) para os efeitos aleatórios β_i quando modelou a degradação das mesmas rodas de trem deste texto (Figura 1.2).

Assume-se que $\sigma_\varepsilon^2 | a_3, b_3 \sim \text{GammaInvertida}(a_3, b_3)$, da mesma forma estabelecida na equação (3.12).

Ainda, é possível especificar no modelo hierárquico as chamadas “hiperprioris”, isto é, $f_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}) = f_{\mu_L}(\mu_L) f_{\sigma_L^2}(\sigma_L^2)$. Aqui assumimos

$$\mu_L | a_4; b_4^2 \sim N(a_4; b_4^2) \quad (3.26)$$

$$f_{\mu_L | a_4; b_4^2}(\mu_L | a_4; b_4^2) = \left(\frac{1}{2\pi b_4^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2b_4^2} (\mu_L - a_4)^2 \right\}$$

$$\mu_L = (-\infty, +\infty), a_4 = (-\infty, +\infty) b_4 > 0 \quad (3.27)$$

$$\sigma_L^2 | a_5, b_5 \sim \text{GammaInvertida}(a_5, b_5) \quad (3.28)$$

$$f_{\sigma_L^2 | a_5, b_5}(\sigma_L^2 | a_5, b_5) = \frac{b_5^{a_5}}{\Gamma(a_5)} (\sigma_L^2)^{-(a_5+1)} e^{b_5/\sigma_L^2}; \sigma_L^2 > 0, a_5 > 0, b_5 > 0 \quad (3.29)$$

3.3.3 Especificação das Distribuições Condicionais Completas

As distribuições condicionais completas para cada parâmetro são obtidas a partir da distribuição conjunta $f_{\beta, \theta, \sigma_\varepsilon^2 | Y}(\beta, \theta, \sigma_\varepsilon^2 | y)$. Das distribuições condicionais completas é possível obter amostras da distribuição $f_{\beta, \theta, \sigma_\varepsilon^2 | Y}(\beta, \theta, \sigma_\varepsilon^2 | y)$ conforme em Gelfand e Smith (1990).

Neste texto não serão apresentadas as distribuições condicionais completas para efeitos aleatórios com distribuição Lognormal como *priori*, pois elas não serão utilizadas como argumento analítico ou teórico em nenhum momento. O software WinBUGS14 (Spiegelhalter *et al.*, 2000) permite estimar os parâmetros do modelo de degradação sem necessidade de especificar a expressão das distribuições condicionais completas.

3.4 $F_{T_i|Y}(t|y)$ Segundo Hamada (2005)

O primeiro passo da análise efetuada por Hamada (2005) consiste em encontrar a relação existente na distribuição dos efeitos aleatórios com a distribuição tempos de falha a partir da forma funcional do modelo de degradação. Ou seja, é utilizado o método analítico apresentado na Seção 2.2, com a diferença de que a estimativa dos parâmetros é obtida via inferência bayesiana.

Tomando-se como exemplo um caso no qual assume-se que os efeitos aleatórios são $\beta_i | \theta = \beta_i | \delta, \lambda \stackrel{iid}{\sim} Weibull(\delta, \lambda)$, cuja função densidade de probabilidade foi definida na equação (3.10), e seja o modelo com forma funcional como na equação (3.2), da relação resultante na equação (3.3) a função distribuição de probabilidade do tempo de falha será dada por:

$$f_{T_i | \delta^*, \lambda^*}(t | \delta^*, \lambda^*) = f_{\beta_i | \delta, \lambda}(\beta_i | \delta, \lambda) \Big|_{\beta_i = \beta_i^{-1}(t)} \left| \frac{\partial \beta_i^{-1}(t)}{\partial t} \right| \quad (3.30)$$

em que $\beta_i^{-1}(T_i) = T_i/D_f$ e $\theta^* = (\delta^*, \lambda^*)$ corresponde aos parâmetros da distribuição resultante da transformação de variável. Então segue que:

$$\begin{aligned} f_{T_i|\delta^*, \lambda^*}(t|\delta^*, \lambda^*) &= \delta \lambda \left(\frac{t}{D_f}\right)^{\delta-1} \exp\left\{-\lambda \left(\frac{t}{D_f}\right)^\delta\right\} \frac{1}{D_f} \\ &= \delta \left(\frac{\lambda}{D_f^\delta}\right) t^{\delta-1} \exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{D_f^\delta}\right) t^\delta\right\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dessa forma concluímos que se $\beta_i|\theta = \beta_i|\delta, \lambda \stackrel{iid}{\sim} Weibull(\delta, \lambda)$, então $T_i|\delta^*, \lambda^* = T_i|\delta, \left(\frac{\lambda}{D_f^\delta}\right) \stackrel{iid}{\sim} Weibull\left(\delta, \left(\frac{\lambda}{D_f^\delta}\right)\right)$.

Conseqüentemente:

$$\begin{aligned} F_{T_i|\delta^*, \lambda^*}(t|\delta^*, \lambda^*) &= F_{T_i|\delta, \left(\frac{\lambda}{D_f^\delta}\right)}\left(t\left|\delta, \left(\frac{\lambda}{D_f^\delta}\right)\right.\right) \\ &= 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{D_f^\delta}\right) t^\delta\right\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} R_{T_i|\delta^*, \lambda^*}(t|\delta^*, \lambda^*) &= R_{T_i|\delta, \left(\frac{\lambda}{D_f^\delta}\right)}\left(t\left|\delta, \left(\frac{\lambda}{D_f^\delta}\right)\right.\right) \\ &= 1 - F_{T_i|\delta^*, \lambda^*}(t|\delta^*, \lambda^*) \\ &= \exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{D_f^\delta}\right) t^\delta\right\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}
 t_{p|\delta^*,\lambda^*}(p|\delta^*,\lambda^*) &= t_{p|\delta,\left(\frac{\lambda}{D_f^\delta}\right)}\left(p\left|\delta,\left(\frac{\lambda}{D_f^\delta}\right)\right.\right) \\
 &= \left[\left(\frac{D_f^\delta}{\lambda}\right)\ln(1-p)\right]^{\frac{1}{\delta}}
 \end{aligned}
 \tag{3.34}$$

em que a equação (3.32) corresponde à distribuição acumulada dos tempos de falha (fornece a “fração de falha” até certo tempo t), a equação (3.33) corresponde à função de confiabilidade dos tempos de falha, e a equação (3.34) corresponde ao percentil de ordem p da distribuição dos tempos de falha, ou seja $t_{p|\delta^*,\lambda^*}(p|\delta^*,\lambda^*)$ é o tempo para o qual a probabilidade acumulada de falha é $p = F_{T_i|\delta^*,\lambda^*}(t|\delta^*,\lambda^*)$.

Obtidas as amostras $(\beta_{1k}, \dots, \beta_{nk}, \delta_k, \lambda_k, \sigma_{\varepsilon k}^2)$ da distribuição *a posteriori* dos parâmetros $(\beta, \theta, \tau|y) = (\beta, \delta, \lambda, \sigma_{\varepsilon}^2|y)$ dada em (3.9), obtêm-se as amostras da função distribuição acumulada *a posteriori* dos tempos de falha (dado por (3.32)) como se segue na Tabela 3.1:

Tabela 3.1: Amostra - preditiva *a posteriori* de T via Hamada (2005)

$(\beta$	δ	λ	$\sigma_{\varepsilon}^2)$	$ y$	avalie $\delta y, \lambda y$ em	$F_{T_i \delta^*,\lambda^*}(t \delta_k^*,\lambda_k^*)$
$(\beta$	δ_1	λ_1	$\sigma_{\varepsilon 1}^2)$	$ y$		$F_{T_i \delta^*,\lambda^*}(t \delta_1^*,\lambda_1^*)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		$\delta y, \lambda y$	\vdots
					\implies	
$(\beta$	δ_u	λ_u	$\sigma_{\varepsilon u}^2)$	$ y$		$F_{T_i \delta^*,\lambda^*}(t \delta_u^*,\lambda_u^*)$

em que u é o tamanho da amostra da distribuições *a posteriori*.

A partir da amostra obtida segundo o procedimento descrito na Tabela 3.1, $F_{T|Y}(t|y)$ é aproximadamente estimada como

$$\hat{F}_{T_i|Y}(t|y) = \sum_{k=1}^u \frac{F_{T_i|\delta^*,\lambda^*}(t|\delta_k^*,\lambda_k^*)}{u}
 \tag{3.35}$$

De forma análoga, das expressões 3.33 e 3.34, obtém-se, respectivamente, que

$$\hat{R}_{T_i|Y}(t|y) = \sum_{k=1}^u \frac{R_{T_i|\delta^*,\lambda^*}(t|\delta_k^*,\lambda_k^*)}{u} \quad (3.36)$$

$$\hat{t}_{i|p|y}(p|y) = \sum_{k=1}^u \frac{t_{p|\delta^*,\lambda^*}(p|\delta_k^*,\lambda_k^*)}{u} \quad (3.37)$$

Note que $F_{T_i|\delta^*,\lambda^*}(t|\delta_k^*,\lambda_k^*)$, $R_{T_i|\delta^*,\lambda^*}(t|\delta_k^*,\lambda_k^*)$ e $t_{p|\delta^*,\lambda^*}(p|\delta_k^*,\lambda_k^*)$ são objetos aleatórios, pois dependem dos parâmetros δ e λ , desta forma, intervalos de credibilidade para cada uma das quantidades de interesse nas equações (3.35), (3.36) e (3.37) podem ser encontrados tomando-se os percentis das amostras obtidas via o procedimento apresentado na Tabela 3.1 (de forma análoga para as equações (3.36) e (3.37)).

Note que todas as quantidades de interesse estimadas por Hamada (2005) resultam em estimativas para qualquer unidade da população, ou seja, tratam-se de estimativas de quantidades de interesse da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para um perfil futuro. Então, necessariamente, para o caso de Hamada (2005), $i = n + 1$ sempre. Observe também que a equação (3.35) é na verdade uma aproximação para a seguinte integral:

$$\begin{aligned} F_{T_i|Y}(t|y) &= \int_{\Xi_\theta} F_{T_i,\theta|y}(t,\theta|y) d\theta \\ &= \int_{\Xi_\theta} F_{T_i|\theta}(t|\theta) f_{\theta|y}(\theta|y) d\theta \\ &= \int_{\Xi_\theta} P(T_i \leq t|\theta) f_{\theta|y}(\theta|y) d\theta \end{aligned} \quad (3.38)$$

usando a relação na equação (3.3) e da equação (3.32) tem-se que:

$$\begin{aligned}
F_{T_i|Y}(t|y) &= \int_{\Xi_\delta} \int_{\Xi_\lambda} \left(1 - \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda}{D_f \delta} \right) t^\delta \right\} \right) f_{\delta, \lambda|y}(\delta, \lambda|y) d\delta d\lambda & (3.39) \\
&= \int_{\Xi_\theta} P \left(\beta_i D_f \leq t | \theta \right) f_{\theta|y}(\theta|y) d\theta \\
&= \int_{\Xi_\theta} P \left(\beta_i \leq \frac{t}{D_f} \middle| \theta \right) f_{\theta|y}(\theta|y) d\theta \\
&= \int_{\Xi_\theta} \int_0^{t/D_f} f_{\beta_i|\theta}(\beta_i|\theta) f_{\theta|y}(\theta|y) d\beta_i d\theta & (3.40)
\end{aligned}$$

Ainda, observa-se que a integral das equações (3.39) e (3.40) levam em consideração a distribuição *a priori* dos tempos de falha e dos efeitos aleatórios, ou seja, assume-se que a distribuição dos tempos de falha e dos efeitos aleatórios se mantém a mesma *a posteriori* sendo atualizadas apenas pela distribuição *a posteriori* de θ .

3.5 $F_{T_i|Y}(t|y)$ Segundo Robinson e Crowder (2000)

3.5.1 $F_{T_i|Y}(t|y)$ para um Perfil sob Teste

Seja o modelo geral na equação (1.3) e a forma funcional na equação (3.4), para uma situação na qual a degradação é crescente com o tempo (caso das situações práticas deste texto), segue que:

$$\begin{aligned}
 F_{T_i|Y}(t|y) &= \int_{\Xi_{\sigma_\varepsilon^2}} \int_{\Xi_{\theta}} \int_{\Xi_{\beta_i}} F_{T_i, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2 | y}(t, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2 | y) d\beta_i d\theta d\sigma_\varepsilon^2 \\
 &= \int_{\Xi_{\sigma_\varepsilon^2}} \int_{\Xi_{\theta}} \int_{\Xi_{\beta_i}} \underbrace{F_{T_i | \beta_i, \sigma_\varepsilon^2}(t | \beta_i, \sigma_\varepsilon^2)}_I f_{\beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2 | y}(\beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2 | y) d\beta_i d\theta d\sigma_\varepsilon^2
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

é a distribuição preditiva *a posteriori* do tempo de falha para um perfil de degradação sob teste.

A parte I da equação (3.41) corresponde a:

$$\begin{aligned}
 F_{T_i | \beta_i, \sigma_\varepsilon^2}(t | \beta_i, \sigma_\varepsilon^2) &= P(D(t_{ij}, \beta_i) + \varepsilon_{ij} \geq D_f | \beta_i, \sigma_\varepsilon^2) \\
 &= P\left(\left(\frac{1}{\beta_i}\right) t_{ij} + \varepsilon_{ij} \geq D_f \middle| \beta_i, \sigma_\varepsilon^2\right) \\
 &= 1 - \Phi\left(\frac{D_f - \frac{t_{ij}}{\beta_i}}{\sigma_\varepsilon} \middle| \beta_i, \sigma_\varepsilon^2\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.42}$$

As amostras da função distribuição acumulada *a posteriori* dos tempos de falha na equação são obtidas como se segue na Tabela 3.2:

Tabela 3.2: Amostra - preditiva *a posteriori* de T via Robinson e Crowder (2000)

$(\beta_{11} \cdots \beta_{n1} \quad \theta_{11} \cdots \theta_{n1} \quad \sigma_{\varepsilon 1}^2)$	$ y_{11} \cdots y_{n1}$	avale $\beta_i y, \sigma_\varepsilon^2 y$ em	$F_{T_i \beta_i, \sigma_\varepsilon^2}(t \beta_i, \sigma_\varepsilon^2)$
$(\beta_{1u} \cdots \beta_{nu} \quad \theta_u \cdots \theta_{nu} \quad \sigma_{\varepsilon u}^2)$	$ y_{1u} \cdots y_{nu}$	$\beta_i y, \sigma_\varepsilon^2 y \Rightarrow$	$F_{T_i \beta_i, \sigma_\varepsilon^2}(t \beta_{iu}, \sigma_\varepsilon^2)$

Finalmente a distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha de uma unidade

sob teste, resultante das integrais na equação (3.41) é aproximada por:

$$\hat{F}_{T_i|Y}(t|y) = \sum_{k=1}^u \frac{F_{T_i|\beta_i, \sigma_\varepsilon^2}(t|\beta_{ik}, \sigma_\varepsilon^2)}{u} \tag{3.43}$$

Dada a amostra de $F_{T_i|\beta_i, \sigma_\varepsilon^2}(t|\beta_i, \sigma_\varepsilon^2)$ na Tabela 3.2 é possível obter intervalos de credibilidade para $F_{T_i|Y}(t|y)$ tomando-se os percentis desejados.

3.5.2 $F_{T_i|Y}(t|y)$ para um Perfil Futuro

A distribuição preditiva *a posteriori* para uma unidade futura será dada pela equação 3.44, e como não é possível gerar uma amostra dos efeitos aleatórios *a posteriori* do perfil de degradação futuro, assume-se a amostra *a posteriori* de $\beta|y$ como a amostra *a posteriori* de $\beta_{n+1}|y$. A amostra de $F_{T_i|\beta_i, \sigma_\varepsilon^2}(t|\beta_i, \sigma_\varepsilon^2)$ fica como na Tabela 3.3:

$$\hat{F}_{T_{n+1}|Y}(t|y) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^u \frac{F_{T_i|\beta_i, \sigma_\varepsilon^2}(t|\beta_{ik}, \sigma_\varepsilon^2)}{nu} \tag{3.44}$$

Tabela 3.3: Amostra - preditiva *a posteriori* de um perfil futuro via Robinson e Crowder (2000)

$(\beta_{11} \dots \beta_{n1} \theta_{\sim 1} \sigma_{\varepsilon^2 1}) y_{\sim}$	avaliar $\beta y, \sigma_\varepsilon^2 y$ em	$F_{T_i \beta_i, \sigma_\varepsilon^2}(t \beta_i, \sigma_\varepsilon^2)$
$(\beta_{11} \dots \beta_{n1} \theta_{\sim 1} \sigma_{\varepsilon^2 1}) y_{\sim}$	$\beta y, \sigma_\varepsilon^2 y$	$F_{T_i \beta_i, \sigma_\varepsilon^2}(t \beta_{11}, \sigma_\varepsilon^2) \dots F_{T_i \beta_i, \sigma_\varepsilon^2}(t \beta_{n1}, \sigma_\varepsilon^2)$
\vdots	$\beta y, \sigma_\varepsilon^2 y$	\vdots
$(\beta_{1u} \dots \beta_{nu} \theta_{\sim u} \sigma_{\varepsilon^2 u}) y_{\sim}$	$\beta y, \sigma_\varepsilon^2 y$	$F_{T_i \beta_i, \sigma_\varepsilon^2}(t \beta_{1u}, \sigma_\varepsilon^2) \dots F_{T_i \beta_i, \sigma_\varepsilon^2}(t \beta_{nu}, \sigma_\varepsilon^2)$

3.6 $F_{T_i|Y}(t|y)$ Proposta

3.6.1 $F_{T_i|Y}(t|y)$ para um Perfil sob Teste

Seja o modelo geral na equação (1.3) e a forma funcional na equação (3.4), para uma situação na qual a degradação é crescente com o tempo (caso das situações práticas deste texto), segue que:

$$\begin{aligned}
 F_{T_i|Y}(t|y) &= \int_{\Xi_{\beta_i}} F_{T_i, \beta_i|y}(t, \beta_i|y) d\beta_i \\
 &= \int_{\Xi_{\beta_i}} F_{T_i|\beta_i}(t|\beta_i) f_{\beta_i|y}(\beta_i|y) d\beta_i \\
 &= \int_{\Xi_{\beta_i}} P(T_i \leq t|\beta_i) f_{\beta_i|y}(\beta_i|y) d\beta_i \\
 &= \int_{\Xi_{\beta_i}} P(\beta_i D_f \leq t|\beta_i) f_{\beta_i|y}(\beta_i|y) d\beta_i \tag{3.45}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Xi_{\beta_i}} P\left(\beta_i \leq \frac{t}{D_f} \middle| \beta_i\right) f_{\beta_i|y}(\beta_i|y) d\beta_i \\
 &= \int_{\Xi_{\beta_i}} \int_0^{t/D_f} f_{\beta_i|\theta, y}(\beta_i|\theta, y) f_{\theta|y}(\theta|y) d\beta_i d\theta \tag{3.46}
 \end{aligned}$$

Observe que a equação (3.46) é diferente da equação (3.41). A equação (3.41) considera a distribuição das medidas de degradação e a relação $T_i = D_f \beta_i$ como meio para estimação de $F_{T_i|Y}(t|y)$. Já a equação (3.46) considera a distribuição dos efeitos aleatórios e a relação $T_i = D_f \beta_i$ para estimação de $F_{T_i|Y}(t|y)$.

Na equação (3.45), a amostra para estimação de $F_{T_i|Y}(t|y)$ pode ser obtida através do seguinte procedimento descrito da Tabela 3.4:

Tabela 3.4: Amostra distribuição preditiva *a posteriori* via Proposta

$(\beta_{\sim}$	δ	λ	σ_{ε}^2	$ y_{\sim}$	avale $\beta_i y_{\sim}$ em $T_i = D_f\beta_i$	$T_i \beta_i$
$(\beta_{\sim_1}$	δ_1	λ_1	$\sigma_{\varepsilon_1}^2$	$ y_{\sim}$		$(T_i \beta_{i1})$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		$\beta_i y_{\sim}$ \implies	\vdots
$(\beta_{\sim_u}$	δ_u	λ_u	$\sigma_{\varepsilon_u}^2$	$ y_{\sim}$		$(T_i \beta_{iu})$

A estimativa de $F_{T_i|Y}(t|y)$ como aproximação da integral em (3.45) é obtida conforme se segue:

$$\hat{F}_{T_i|Y}(t|y) = \frac{[\text{Número de } T_i|\beta_i\text{'s} \leq t]}{u} \quad (3.47)$$

3.6.2 $F_{T_i|Y}(t|y)$ para um Perfil Futuro

A distribuição preditiva *a posteriori* para uma unidade futura será dada pela equação 3.48, e como não é possível gerar uma amostra dos efeitos aleatórios *a posteriori* do perfil de degradação futuro, assume-se a amostra *a posteriori* de $\beta|y_{\sim}$ como a amostra *a posteriori* de $\beta_{n+1}|y_{\sim}$, da mesma forma que em Robinson e Crowder (2000). A diferença deste procedimento para o apresentado em Robinson e Crowder (2000) é que aqui obtém-se diretamente amostras das distribuições *a posteriori* dos tempos de falha dos perfis. A amostra para estimação de $F_{T_i|Y}(t|y)$ fica como se segue na Tabela 3.5:

$$\hat{F}_{T_{n+1}|Y}(t|y) = \frac{[\text{Número de } T_i|\beta_i\text{'s} \leq t]}{nu} \quad (3.48)$$

3.6.3 $F_{T_i|Y}(t|y)$ para um Perfil Futuro Incluído na Verossimilhança

Partindo da suposição do modelo (3.4) de que $y_{i1} = 0$ para todas as unidades sob

Tabela 3.5: Amostra - preditiva do perfil futuro *a posteriori* via Proposta

$(\beta_{\mathbf{1}} \cdots \beta_{\mathbf{n}} \theta \sigma_{\varepsilon}^2)$	$ y$	avaleie $\beta_i y$	$T_i \beta_i$
$(\beta_{11} \cdots \beta_{n1} \theta_{\sim_1} \sigma_{\varepsilon 1}^2)$	$ y$	em $T_i = D_f \beta_i$	$(T_i \beta_{11}) \cdots (T_i \beta_{n1})$
$\vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$		$\xrightarrow{\beta y}$	$\vdots \quad \ddots \quad \vdots$
$(\beta_{1u} \cdots \beta_{nu} \theta_{\sim_u} \sigma_{\varepsilon u}^2)$	$ y$		$(T_i \beta_{1u}) \cdots (T_i \beta_{nu})$

teste, pode-se estender esta e as demais suposições daquele modelo para uma unidade futura. Assim, torna-se possível incorporar uma unidade futura na função de verossimilhança partindo da equação (3.49) até chegar na sua forma final em (3.50).

Seja Y_{n+1} o vetor de degradação a ser observado na nova unidade, e seja β_{n+1} o efeito aleatório associado à nova unidade. Seja β_{n+1} independente de $(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Suponha que a nova unidade terá o mesmo comportamento dos perfis de degradação que são observados para as n unidades sob teste.

As especificações da distribuição *a priori* dos efeitos aleatórios e demais parâmetros se dão exatamente da mesma forma que na Seção 3.2.2 desde que seja assumido que o efeitos aleatório $\beta_{n+1} \sim Weibull(\delta, \lambda)$.

Sob estas suposições, segue que a distribuição conjunta de $(Y_{n+1,1}, Y_{\sim}, \beta_{n+1}, \beta)$, dados θ e σ_{ε}^2 é:

$$\begin{aligned}
f_{Y_{n+1}, Y_{\sim}, \beta_{n+1}, \beta_{\sim} | \theta; \sigma_{\varepsilon}^2}(y_{n+1}, y_{\sim}, \beta_{n+1}, \beta_{\sim} | \theta; \sigma_{\varepsilon}^2) &= f_{Y^*, \beta^* | \theta; \sigma_{\varepsilon}^2}(y^*, \beta^* | \theta; \sigma_{\varepsilon}^2) \\
&= f_{Y_{n+1}, Y_{\sim} | \beta_{n+1}, \beta_{\sim}; \sigma_{\varepsilon}^2}(y_{n+1}, y_{\sim} | \beta_{n+1}, \beta_{\sim}; \sigma_{\varepsilon}^2) \\
&\quad f_{\beta_{n+1} | \theta}(\beta_{n+1} | \theta) f_{\beta_{\sim} | \theta}(\beta_{\sim} | \theta) \\
&= \left. \begin{aligned} &f_{y_{n+1} | \beta_{n+1}; \sigma_{\varepsilon}^2}(y_{n+1} | \beta_{n+1}; \sigma_{\varepsilon}^2) f_{\beta_{n+1} | \theta}(\beta_{n+1} | \theta) \\ &\prod_{i=1}^n f_{y_i | \beta_i; \sigma_{\varepsilon}^2}(y_i | \beta_i; \sigma_{\varepsilon}^2) f_{\beta_i | \theta}(\beta_i | \theta) \end{aligned} \right\} \text{I}
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
 I &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \left(y_{n+1,1} - \frac{t_{n+1,1}}{\beta_{n+1}} \right)^2 \right\} \\
 &\quad f_{\beta_{n+1}|\underline{\theta}}(\beta_{n+1}|\underline{\theta}) \prod_{i=1}^n N_{m_i} \left(\frac{1}{\beta_i} t_i; \sigma_\varepsilon^2 \right) f_{\beta_i|\underline{\theta}}(\beta_i|\underline{\theta}) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \left(y_{n+1,1} - \frac{t_{n+1,1}}{\beta_{n+1}} \right)^2 \right\} \\
 &\quad f_{\beta_{n+1}|\underline{\theta}}(\beta_{n+1}|\underline{\theta}) \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{m_i} N \left(\frac{1}{\beta_i} t_{ij}; \sigma_\varepsilon^2 \right) f_{\beta_i|\underline{\theta}}(\beta_i|\underline{\theta}) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \left(y_{n+1,1} - \frac{t_{n+1,1}}{\beta_{n+1}} \right)^2 \right\} \\
 &\quad f_{\beta_{n+1}|\underline{\theta}}(\beta_{n+1}|\underline{\theta}) \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{m_i} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i} \right)^2 \right\} f_{\beta_i|\underline{\theta}}(\beta_i|\underline{\theta}) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \left(y_{1,1} - \frac{t_{1,1}}{\beta_1} \right)^2 \right\} \cdots \\
 &\quad \cdots \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \left(y_{n+1,1} - \frac{t_{n+1,1}}{\beta_{n+1}} \right)^2 \right\} \\
 &\quad f_{\beta_{n+1}|\underline{\theta}}(\beta_{n+1}|\underline{\theta}) \prod_{i=1}^n \prod_{j=2}^{m_i} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i} \right)^2 \right\} f_{\beta_i|\underline{\theta}}(\beta_i|\underline{\theta})
 \end{aligned}$$

mas $y_{i1} = 0$, $t_{i1} = 0$, e $\beta_i|\underline{\theta}$'s são *iid* para todas as unidades, então:

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2} \right)^{(n+1)/2} f_{\beta_{n+1}|\underline{\theta}}(\beta_{n+1}|\underline{\theta}) \\
 &\quad \prod_{i=1}^n \prod_{j=2}^{m_i} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i} \right)^2 \right\} f_{\beta_i|\underline{\theta}}(\beta_i|\underline{\theta}) \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

$$f_{Y^*|\theta;\sigma_\varepsilon^2}(y^*|\theta;\sigma_\varepsilon^2) = \prod_{i=1}^{n+1} \int_{\Xi_\beta} \prod_{j=1}^{m_i} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i} \right)^2 \right\} f_{\beta_i|\theta}(\beta_i|\theta) d\beta \quad (3.50)$$

Para obter a estimativa de $F_{T_i|Y}(t|y)$ para o perfil futuro basta aplicar o procedimento apresentado na Seção 3.6.1 para β_{n+1} .

Esta mesma abordagem pode ser aplicada ao método apresentado por Robinson e Crowder (2000). Através dela também é possível fazer previsões de degradação para um perfil futuro.

A desvantagem dessa proposta é que as estimativas para o perfil futuro ficam atreladas à distribuição condicional completa apresentada na equação (3.21) e também não apresenta bons resultados sob condições de má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios. Assim, o resultado dessa proposta será sempre similar ao de Hamada (2005), porém com a vantagem de possibilitar predições de medidas de degradação para um perfil futuro.

3.7 Inconsistência Teórica em Hamada (2005)

Nas Seções anteriores do Capítulo 3 foram apresentadas duas metodologias correntes na literatura, e uma proposta para obtenção da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha em modelos de degradação. A metodologia utilizada por Hamada (2005) supõe que a distribuição dos efeitos aleatórios e dos tempos de falha se mantém a mesma *a posteriori*, sendo atualizada apenas pelas estimativas dos hiperparâmetros *a posteriori*. Tal suposição fica evidenciada pelas equações (3.39) e (3.39). Entretanto, esta suposição não parece ser válida tanto para a distribuição dos efeitos aleatórios

individuais $\beta_i|\delta,\lambda$ quanto para a distribuição conjunta de $\beta|\delta,\lambda$. Em particular, a distribuição *a posteriori* para os efeitos aleatórios individuais não possui sequer forma fechada (veja por exemplo a equação (3.21) que é a distribuição condicional completa para β_i quando $\beta_i|\delta,\lambda \sim Weibull(\delta,\lambda)$). O resultado para a distribuição conjunta de $\beta|y$ será demonstrado a seguir.

Seja o modelo construído na Seção 3.2. Seja $\delta = 1$, de modo que reduzimos a distribuição *Weibull*(δ,λ) ao seu caso simples tornando $\beta_i|\lambda \sim \exp(\lambda)$. Como a distribuição Exponencial é um caso particular da distribuição Weibull, o argumento da prova é que se o resultado não vale para um caso particular, então não vale para a família de distribuições Weibull como um todo. O objetivo é demonstrar que $\beta|\lambda$ tem distribuição diferente de $\beta|\lambda,y$. A título de facilitação nos cálculos a distribuição normal será utilizada na sua forma parametrizada pela precisão τ .

A distribuição *a posteriori* $f_{\beta|\lambda,\tau,Y}(\beta|\lambda,\tau,y)$ é dada por:

$$\begin{aligned}
 f_{\beta|\lambda,\tau,Y}(\beta|\lambda,\tau,y) &\propto \int_{\Xi_\tau} \int_{\Xi_\lambda} f_{\beta,\lambda,\tau|Y}(\beta|\lambda,\tau,y) d\lambda d\tau \\
 &\propto \int_{\Xi_\tau} \int_{\Xi_\lambda} f_{Y|\beta,\tau}(y|\beta,\tau) f_{\beta|\lambda}(\beta|\lambda) f_\lambda(\lambda) f_\tau(\tau) d\lambda d\tau \\
 &\propto \underbrace{\int_{\Xi_\lambda} f_{\beta|\lambda}(\beta|\lambda) f_\lambda(\lambda) d\lambda}_I \underbrace{\int_{\Xi_\tau} f_{Y|\beta,\tau}(y|\beta,\tau) f_\tau(\tau) d\tau}_{II} \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

De I na equação (3.51) tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Xi_\lambda} f_{\beta|\lambda}(\beta|\lambda) f_\lambda(\lambda) d\lambda &= \int_{\Xi_\lambda} \prod_n^i \lambda \exp\{-\lambda\beta_i\} \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \lambda^{a_2-1} \exp\{-b_2\lambda\} d\lambda \\
&= \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \int_{\Xi_\lambda} \lambda^n \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^n \beta_i\right\} \lambda^{a_2-1} \exp\{-b_2\lambda\} d\lambda \\
&= \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \int_{\Xi_\lambda} \underbrace{\lambda^{n+a_2-1} \exp\left\{-\lambda \left(\sum_{i=1}^n \beta_i + b_2\right)\right\}}_{\text{núcleo Gamma}\left(n+a_2, \sum_{i=1}^n \beta_i+b_2\right)} d\lambda \\
&= \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \frac{\Gamma(n+a_2)}{\left[\sum_{i=1}^n \beta_i + b_2\right]^{n+a_2}} \overbrace{\int_0^{+\infty} \text{Gamma}\left(n+a_2, \sum_{i=1}^n \beta_i + b_2\right) d\lambda}^{=1} \\
&= \frac{b_2^{a_2} \Gamma(n+a_2)}{\Gamma(a_2)} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i + b_2\right]^{-(n+a_2)} \tag{3.52}
\end{aligned}$$

De II na equação (3.51), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Xi_\tau} f_{Y|\beta,\tau}(y|\beta,\tau) f_\tau(\tau) d\tau &= \int_{\Xi_\tau} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{m_i} \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i}\right)^2\right\} \frac{b_3^{a_3}}{\Gamma(a_3)} \tau^{a_3-1} \exp\{b_3\tau\} d\tau \\
 &= \int_{\Xi_\tau} \tau^{\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2}\right)} \exp\left\{-\tau \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i}\right)^2\right]\right\} \tau^{a_3-1} \exp\{b_3\tau\} d\tau \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2}\right)} \frac{b_3^{a_3}}{\Gamma(a_3)} \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2}\right)} \frac{b_3^{a_3}}{\Gamma(a_3)} \\
 &= \int_{\Xi_\tau} \underbrace{\tau^{\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2} + a_3 - 1\right)} \exp\left\{-\tau \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i}\right)^2 + b_3\right]\right\}}_{\text{núcleo Gamma}\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2} + a_3 - 1, \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i}\right)^2 + b_3\right)} d\tau \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2}\right)} \frac{b_3^{a_3}}{\Gamma(a_3)} \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2} + a_3 - 1\right)}{\left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i}\right)^2 + b_3\right]^{\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2} + a_3 - 1\right)}} \\
 &= \int_0^\infty \underbrace{\text{Gamma}\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2} + a_3 - 1, \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i}\right)^2 + b_3\right)}_{=1} d\tau \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2}\right)} \frac{b_3^{a_3}}{\Gamma(a_3)} \Gamma\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2} + a_3 - 1\right) \\
 &= \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i}\right)^2 + b_3\right]^{-\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2} + a_3 - 1\right)} \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

Substituindo-se as equações (3.52) e (3.53) em I e II na equação (3.51), segue que:

$$\begin{aligned}
 f_{\tilde{\beta}|\lambda,\tau,\tilde{Y}}(\tilde{\beta}|\lambda,\tau,\tilde{y}) &\propto \underbrace{\frac{b_2^{a_2}\Gamma(n+a_2)}{\Gamma(a_2)} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2}\right)} \frac{b_3^{a_3}}{\Gamma(a_3)} \Gamma\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2} + a_3 - 1\right)}_{\mathbb{C}} \\
 &\left[\sum_{i=1}^n \beta_i + b_2 \right]^{-(n+a_2)} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i} \right)^2 + b_3 \right]^{-\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2} + a_3 - 1\right)} \\
 &\propto \left[\sum_{i=1}^n \beta_i + b_2 \right]^{-(n+a_2)} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left(y_{ij} - \frac{t_{ij}}{\beta_i} \right)^2 + b_3 \right]^{-\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2} + a_3 - 1\right)}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Nota-se pela equação (3.54) que a distribuição conjunta dos efeitos aleatórios *a posteriori* $\tilde{\beta}|\lambda,\tau,\tilde{y}$ não é Exponencial, logo não é Weibull, como era desejado demonstrar, e como pressupõe a metodologia de análise sugerida por Hamada (2005).

No Capítulo 4 os efeitos da metodologia utilizada por Hamada (2005) serão estudados em bancos de dados simulados.

Capítulo 4

Dados Simulados - Tempos de Falha Conhecidos

O objetivo deste Capítulo é comparar a abordagem proposta neste texto com a de Hamada (2005) e Robinson e Crowder (2000), em situações nas quais a distribuição dos efeitos aleatórios é má especificada e naquelas em que é corretamente especificada. Essa comparação será feita aplicando-se, cada uma delas, a bancos de dados simulados.

A Seção 4.1 apresenta o procedimento de geração dos dados de degradação simulados.

A Seção 4.2 apresenta as distribuições a priori, dos parâmetros, a serem utilizadas tanto no Capítulo 4 quanto no Capítulo 5.

A Seção 4.3 realiza a comparação da abordagem proposta neste texto com a de Hamada (2005) e Robinson e Crowder (2000) para uma situação de má especificação na qual os tempos de falha são conhecidos advindos de uma distribuição bimodal, de maneira que a inconsistência teórica em Hamada (2005) fica empiricamente evidente.

A Seção 4.4 realiza a comparação da abordagem proposta neste texto com a de Hamada (2005) e Robinson e Crowder (2000) para uma situação de má e correta especi-

ficação dos efeitos aleatórios, na qual os tempos de falha são conhecidamente advindos de uma distribuição Weibull. A Seção 4.5 realiza a comparação da abordagem proposta neste texto com a de Hamada (2005) e Robinson e Crowder (2000) para uma situação de má e correta especificação dos efeitos aleatórios, na qual os tempos de falha são conhecidamente advindos de uma distribuição Lognormal. Em ambas Seções verifica-se que apesar da inconsistência teórica em Hamada (2005), aquela abordagem aproxima satisfatoriamente a distribuição dos tempos de falha quando a distribuição dos efeitos aleatórios é bem especificada.

A Seção 4.6 apresenta as conclusões sobre o Capítulo 4.

4.1 Geração dos Perfis Simulados

Para ilustrar e estudar o efeito da modelagem proposta por Hamada (2005) serão gerados três bancos de dados para os quais se conhece previamente a distribuição dos tempos de falha. No primeiro deles os tempos de falha são uma mistura de duas distribuições Normais, no segundo a distribuição é Weibull e no terceiro, Lognormal. Estes casos serão tratados nas Seções 4.3, 4.4 e 4.5, respectivamente. Aqui, será apresentado o procedimento genérico assumindo-se o modelo de degradação com perfil de degradação linear apresentado na equação (3.4).

Passos da geração dos dados de degradação:

1. Gere uma amostra de tantos tempos de falha quanto desejado a partir de uma distribuição de probabilidade conhecida. Denote por t_i os tempos de falha gerados de modo que $i = 1, \dots, n$, em que n é o número de tempos de falha gerados.
2. Defina um limiar de degradação D_f
3. Utilize a equação $\beta_i = T_i/D_f$ para encontrar a amostra de efeitos aleatórios β_i

que gerarão cada perfil.

4. Defina os tempos t_j nos quais serão simuladas as medidas de degradação y_{ij} , sendo que $j = 1, \dots, m_i$, em que m_i denota o número de medidas de degradação para um perfil específico.
5. Defina o desvio padrão σ_ε do erro associado ao modelo de degradação ε_{ij} na equação (3.4).
6. Gere as medidas de degradação y_{ij} utilizando a equação (3.4) do modelo de degradação. Os erros associados a cada y_{ij} são gerados de $\varepsilon_{ij} \sim Normal(0, \sigma_\varepsilon^2)$.
7. Realize a análise dos dados de degradação utilizando os métodos e modelagem apresentados no Capítulo 3.

4.2 Distribuições *a priori* Assumidas para os Parâmetros do Modelo de Degradação

As distribuições *a priori* assumidas para os parâmetros do modelo de degradação utilizado nos Capítulos 4 e 5 são apresentados nesta Seção, pois serão repetidamente utilizadas ao longo de ambos os Capítulos.

A análise dos dados para todos os casos foi efetuada utilizando-se os softwares WinBUGS 1.4 (Spiegelhalter *et al.*, 2000) e R 2.9 (pacote R2WinBUGS) (R Development Core Team, 2005). A fim de garantir a convergência da cadeia para a distribuição *a posteriori* das estimativas dos parâmetros, assim como minimizar a autocorrelação das mesmas, foram realizadas 10.001.000 iterações da simulação MCMC, com um período de aquecimento (*burn-in*) de 1000, e saltos de 1000 para a amostragem, o que resultou em uma amostra *a posteriori* final de tamanho $u = 10.000$ para cada parâmetro

6.2. Distribuições *a priori* Assumidas para os Parâmetros do Modelo de Degradação

$(\tilde{\beta}; \tilde{\delta}, \tilde{\lambda}; \sigma_{\varepsilon}^2 | y)$. A cadeia formada pela distribuição condicional de todos os parâmetros do modelo convergiram para a distribuição *a posteriori* e apresentaram decaimento rápido dos autocorrelogramas (veja um exemplo na Figura 4.1), para todos as análises realizadas.

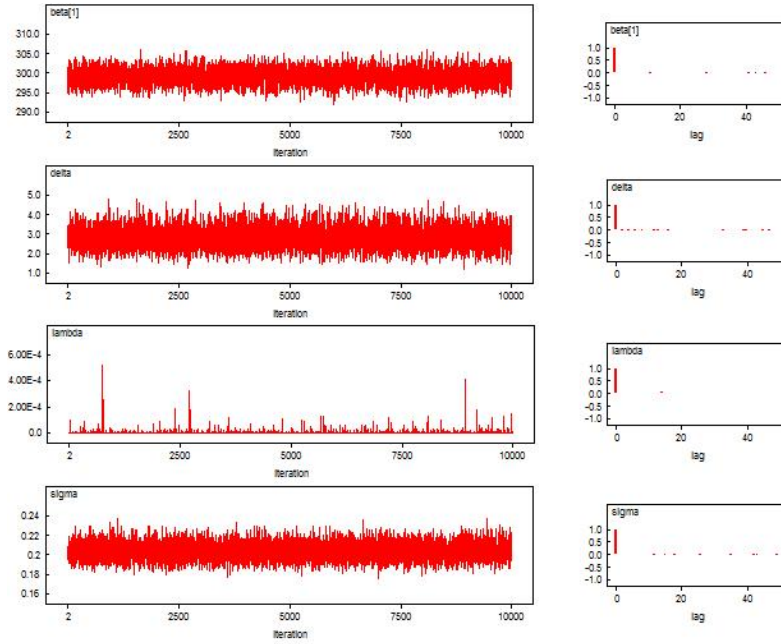


Figura 4.1: Convergência e autocorrelação das cadeias da distribuição *a posteriori* para alguns parâmetros - Assumindo $\beta_i \sim Weibull$ (Caso gerado - $T \sim Bimodal$)

4.2.1 Efeito Aleatório Weibull

São estabelecidas as seguintes distribuições *a priori* para os parâmetros do modelo (equação (4.1)):

$$\begin{aligned}
\beta_i | \theta &= \beta_i | (\delta, \lambda) \sim Weibull(\delta, \lambda) \\
\delta | a_1, b_1 &\sim Gamma(a_1; b_1) = Gamma(0,01; 0,01) \\
\lambda | a_2, b_2 &\sim Gamma(a_2; b_2) = Gamma(0,01; 0,01) \\
\sigma_\varepsilon^2 | a_3, b_3 &\sim GammaInvertida(a_3; b_3) = GammaInvertida(0,01; 0,01) \quad (4.1)
\end{aligned}$$

As distribuições *a priori* apresentadas em (4.1) são pouco informativas representando nosso pouco conhecimento sobre os parâmetros. O estabelecimento das distribuições *a priori* de δ e λ é justificável pois, vêm sendo amplamente utilizadas na literatura (inclusive em Hamada (2005)). Outra razão forte é que a distribuição $Gamma(a,b)$ coloca um pouco mais de massa de probabilidade para valores pequenos da variável aleatória quando a_i e b_i ($i = 1,2$) tendem a zero, por exemplo a distribuição $Gamma(10^{-2}, 10^{-2})$, ainda que distribuía bastante a massa de probabilidade para outros valores. No caso em questão δ e λ são hiperparâmetros de uma distribuição $Weibull(\delta, \lambda)$, que por sua vez coloca massa de probabilidade aproximadamente igual para os valores da variável aleatória que descreve (β_i 's) quando δ e λ tendem a zero. Dessa forma, é construída uma distribuição pouco informativa para os β_i 's no sentido de que todos os efeitos aleatórios são aproximadamente igualmente prováveis de ocorrer.

4.2.2 Efeito Aleatório Lognormal

São estabelecidas as seguintes distribuições *a priori* para os parâmetros do modelo (equação (4.2)):

$$\begin{aligned}
 \beta_i | \theta = \beta_i | (\mu_L, \sigma_L^2) &\sim \text{Lognormal}(\mu_L, \sigma_L^2) \\
 \mu_L | a_4, b_4^2 &\sim N(a_4; b_4^2) = N(0; 100) \\
 \sigma_L^2 | a_5, b_5 &\sim \text{GammaInvertida}(a_5; b_5) = \text{GammaInvertida}(0,01; 0,01) \\
 \sigma_\varepsilon^2 | a_3, b_3 &\sim \text{GammaInvertida}(a_3; b_3) = \text{GammaInvertida}(0,01; 0,01) \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

As distribuições *a priori* apresentadas em (4.2) são não informativas no sentido de total desconhecimento sobre os parâmetros.

4.3 Caso 1: Distribuição do Tempo até a Falha $T \sim$ Bimodal - Mistura de Duas Normais

Foram gerados vinte ($n = 20$) perfis de degradação, com ($m_i = 17$) medidas de degradação em cada perfil, sendo $y_{i1} = 0$ para todos os perfis (ou unidades), $D_f = 10$, $\sigma_\varepsilon = 0,2063$, com tempos de falha advindos de uma distribuição de probabilidade bimodal conhecida. A distribuição bimodal é na verdade a mistura de duas distribuições normais $T_1 \sim \text{Normal}(\mu_{T1}, \sigma_{T1}^2)$ e $T_1 \sim \text{Normal}(\mu_{T2}, \sigma_{T2}^2)$ conforme a equação (4.3).

$$f_T(t) = 0,5f_{T|\mu_{T1}, \sigma_{T1}^2}(t|\mu_{T1}, \sigma_{T1}^2) + 0,5f_{T|\mu_{T2}, \sigma_{T2}^2}(t|\mu_{T2}, \sigma_{T2}^2) \quad (4.3)$$

em que $\mu_{T1} = 3000$, $\sigma_{T1} = 30$, $\mu_{T2} = 7000$ e $\sigma_{T2} = 30$. Os perfis gerados podem ser observados na Figura 4.2.

No final, foram gerados dez (10) perfis de degradação advindos de cada uma das duas distribuições.

A distribuição dos efeitos aleatórios, se seguido o passo 3 da geração de dados na

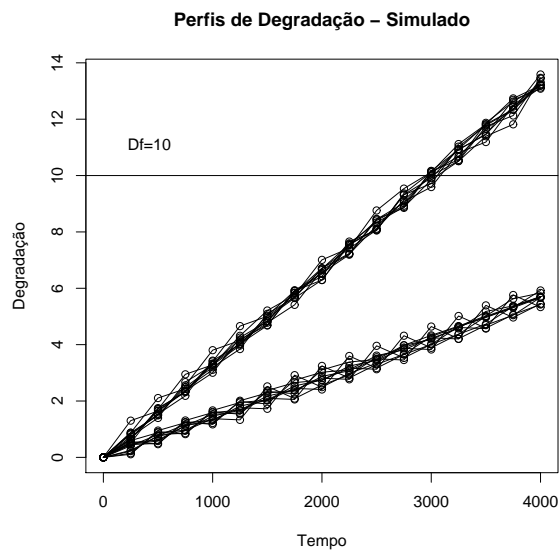


Figura 4.2: Perfis de degradação - $T \sim Bimodal$

Seção 4.1, também é bimodal como pode ser visualizado na Figura 4.3.

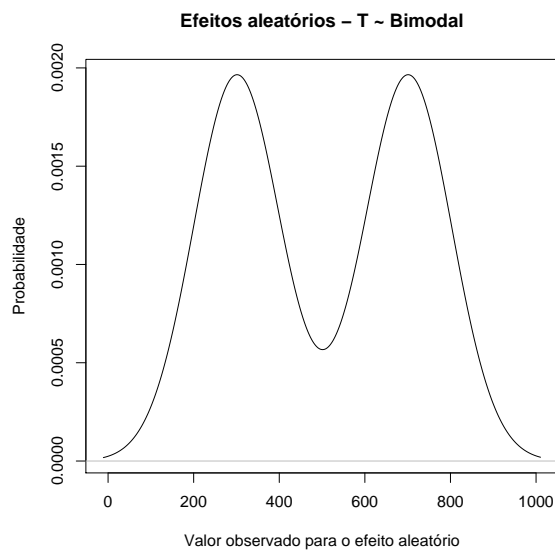


Figura 4.3: Densidade de probabilidade dos efeitos aleatórios Gerados - $T \sim Bimodal$

Para este banco de dados, as três abordagens de análise serão utilizadas sob má-especificação da distribuição dos efeitos aleatórios: Weibull (Seção 4.3.1) e Lognormal

(Seção 4.3.2).

4.3.1 Análises Supondo Efeito Aleatório Weibull

Suponha que a distribuição dos tempos de falha não seja conhecida. Se utilizado o modelo de degradação com a suposição de que os efeitos aleatórios são distribuídos segundo uma distribuição Weibull (modelo da Seção 3.2 e lembrando que $T_i|\theta^* \sim Weibull \Leftrightarrow \beta_i|\theta \sim Weibull$).

As estimativas para os efeitos aleatórios dos perfis sob teste foram efetuadas com sucesso como pode ser exemplificado na Figura 4.4. O valor real é indicado pela linha preta vertical.

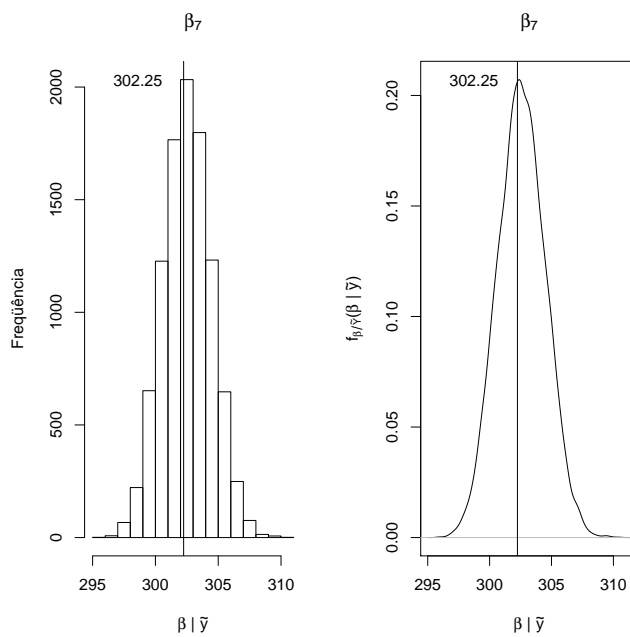
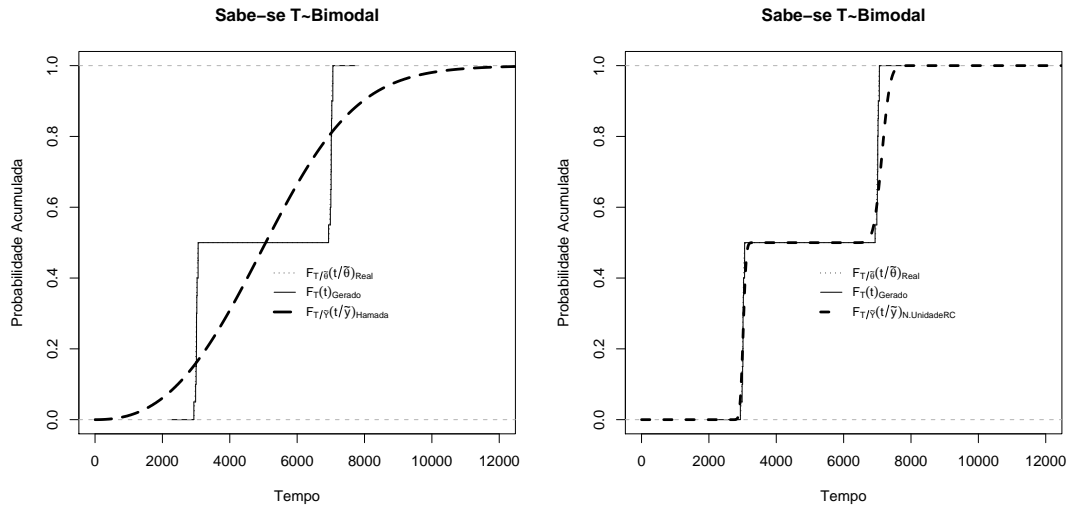


Figura 4.4: Densidade *a posteriori*: efeito aleatório do perfil 7 - Assumindo $\beta_i \sim Weibull$ (Caso gerado - $T \sim Bimodal$)

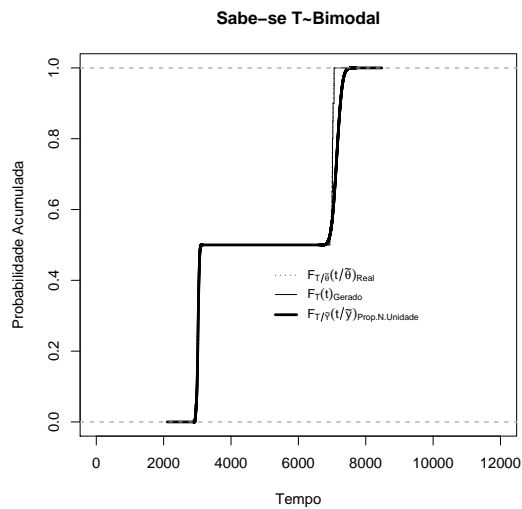
Os três métodos de estimação da distribuição preditiva *a posteriori* para uma unidade futura (perfil futuro) como apresentado na Seção 3 foram aplicadas e obteve-se

o gráfico na Figura 4.5.



(a) Hamada (2005)

(b) Robinson e Crowder (2000)



(c) Proposta

Figura 4.5: Distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para um perfil futuro assumindo $\beta_i \sim Weibull$ (Caso gerado - $T \sim Bimodal$)

Na Figura 4.5 por $F_{T|\theta}(T|\theta)_{Real}$ entenda a verdadeira distribuição de T (aquela da equação (4.3)). Por $F_T(T)_{Gerado}$ entenda a distribuição acumulada empírica T

dos vinte (20) tempos de falha gerados da equação (4.3). Entenda $F_{T|Y}(t|y)_{Hamada}$, $F_{T|Y}(t|y)_{Prop.N.Unidade}$, $F_{T|Y}(t|y)_{N.UnidadeRC}$ como a distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha de uma unidade futura (perfil futuro) obtidas via Hamada (2005) (Seção 3.4), Proposta (Seção 3.6) e Robinson e Crowder (2000) (Seção 3.5) respectivamente.

Fica claro que o método utilizado em Hamada (2005) não consegue captar a bimodalidade da distribuição real e empírica dos tempos de falha, isto ocorre porque a distribuição dos efeitos aleatórios e dos tempos de falha muda *a posteriori* (fato verificado analiticamente na Seção 3.7).

A surpresa fica por conta da Proposta deste texto e do método apresentado em Robinson e Crowder (2000), uma vez que, independentemente da distribuição dos efeitos aleatórios ter sido mal especificada, estimam muito aproximadamente a distribuição real e empírica dos tempos de falha.

4.3.2 Análises Supondo Efeito Aleatório Lognormal

Suponha que a distribuição dos tempos de falha não seja conhecida. Se utilizado o modelo de degradação com a suposição de que os efeitos aleatórios são distribuídos segundo uma distribuição Lognormal (modelo da Seção 3.3 e lembrando que $T_i|\theta^* \sim Lognormal \Leftrightarrow \beta_i|\theta \sim Lognormal$ da Seção 2.2).

São estabelecidas as mesmas distribuições *a priori* apresentadas na equação(4.2).

As estimativas para os efeitos aleatórios dos perfis sob teste foram efetuadas com sucesso como pode ser exemplificado na Figura 4.6. O valor real é indicado pela linha preta vertical.

Os métodos de estimação da distribuição preditiva *a posteriori* para uma unidade futura (perfil futuro) como apresentado na Seção 3 foram aplicadas e obteve-se o gráfico na Figura 4.7.

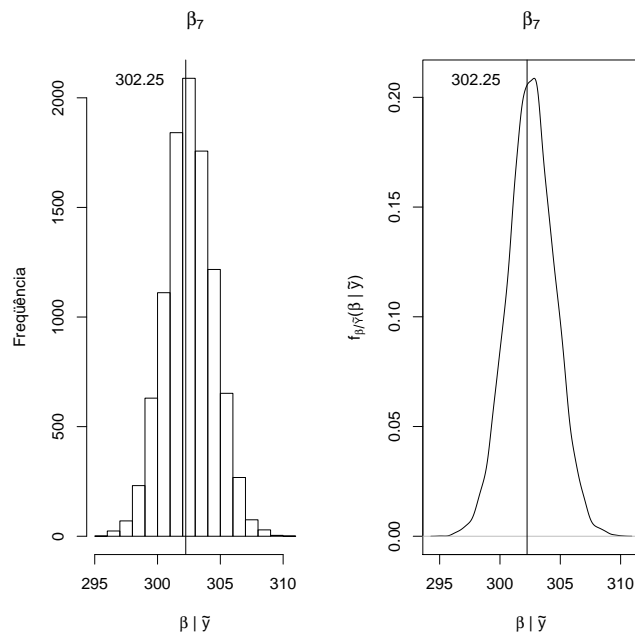


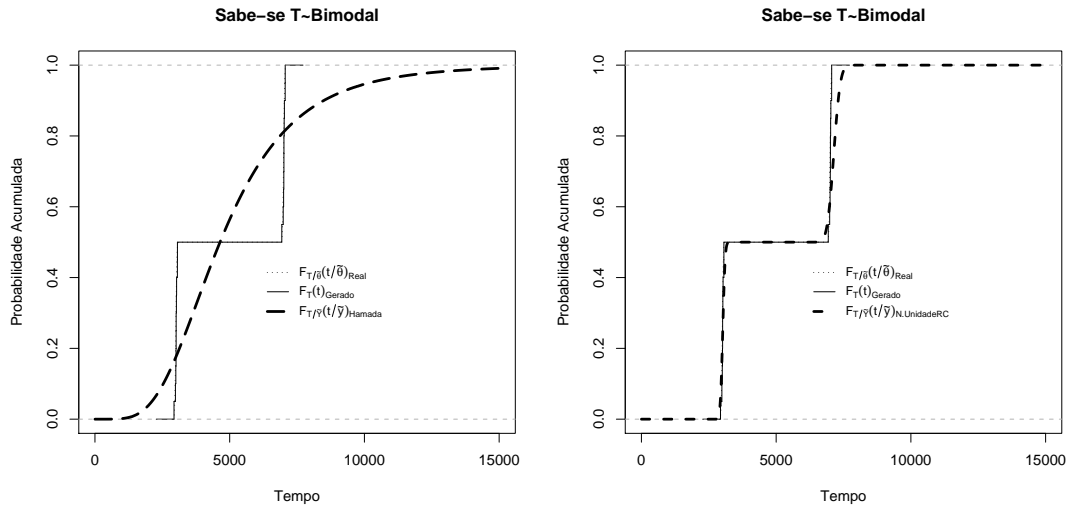
Figura 4.6: Densidade *a posteriori*: efeito aleatório do perfil 7 - Assumindo $\beta_i \sim \text{Lognormal}$ (Caso gerado - $T \sim \text{Bimodal}$)

Na Figura 4.7 fica claro que o método utilizado em Hamada (2005) não consegue captar a bimodalidade da distribuição real e empírica dos tempos de falha, isto ocorre porque a distribuição dos efeitos aleatórios e dos tempos de falha muda *a posteriori* (fato assim como verificado analiticamente na Seção 3.7).

Novamente como na seção anterior, a Proposta deste texto e o método apresentado em Robinson e Crowder (2000), independentemente da distribuição dos efeitos aleatórios ter sido mal especificada, estimam muito aproximadamente a distribuição real e empírica dos tempos de falha.

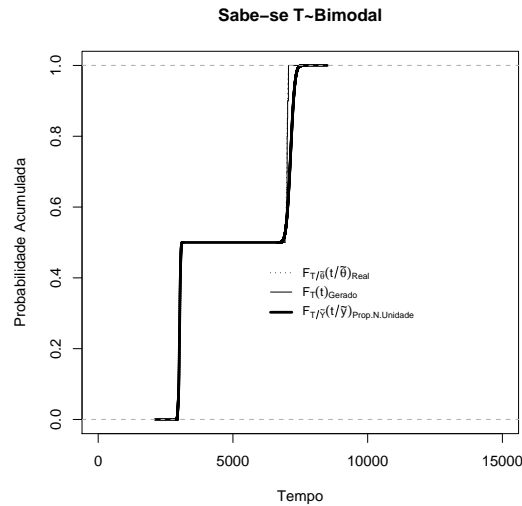
4.4 Caso 2: Distribuição do Tempo até a Falha $T \sim \text{Weibull}$

Foram gerados quinze ($n = 15$) perfis de degradação, com ($m_i = 17$) medidas de



(a) Hamada (2005)

(b) Robinson e Crowder (2000)



(c) Proposta

Figura 4.7: Distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para um perfil futuro assumindo $\beta_i \sim Lognormal$ (Caso gerado - $T \sim Bimodal$)

degradação em cada perfil, sendo $y_{i1} = 0$ para todos os perfis (ou unidades), $D_f = 10$, $\sigma_\varepsilon = 0,2063$, com tempos de falha advindos de uma distribuição de probabilidade Weibull conhecida $T \sim Weibull(\theta^*) = Weibull(\delta^*, \lambda^*) = Weibull(6,63225; 1/5487,61)$.

Os perfis gerados podem ser observados na Figura 4.8.

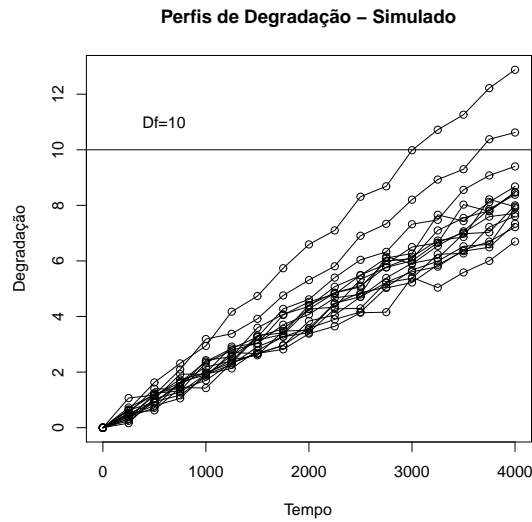


Figura 4.8: Perfis de degradação - $T \sim Weibull$

Para este banco de dados gerado as três abordagens apresentadas neste texto serão utilizadas. Na Seção 4.4.1, com a especificação da distribuição a priori correta, e sob má especificação na Seção 4.4.2.

4.4.1 Análises Supondo Efeito Aleatório Weibull

As distribuições *a priori* para os efeitos aleatórios são as mesmas apresentadas na equação(4.1).

As estimativas para os efeitos aleatórios dos perfis sob teste foram efetuadas com sucesso como pode ser exemplificado na Figura 4.9. O valor real é indicado pela linha preta vertical.

Os métodos de estimação da distribuição preditiva *a posteriori* para uma unidade futura (perfil futuro) como apresentado na Seção 3 foram aplicadas e obteve-se o gráfico na Figura 4.10.

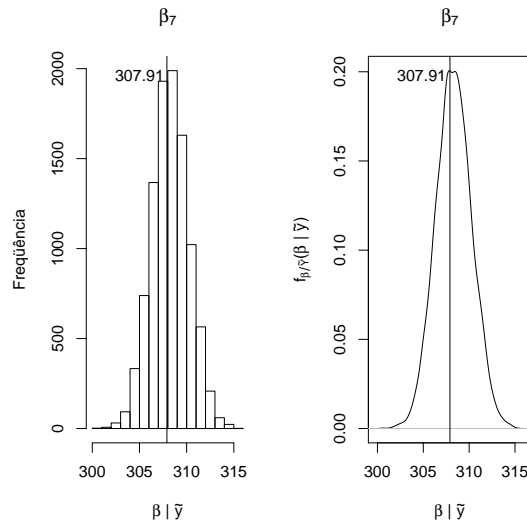


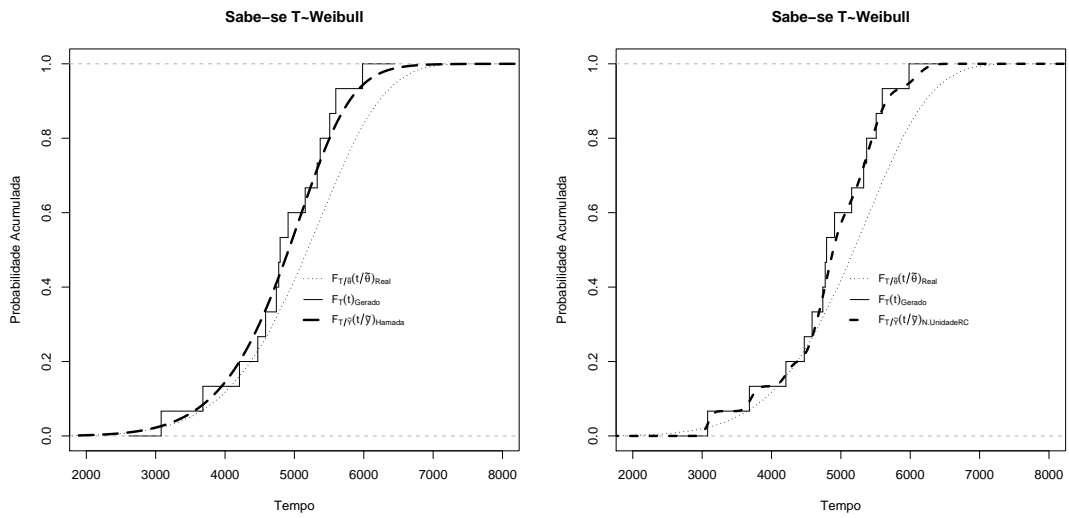
Figura 4.9: Densidade *a posteriori*: efeito aleatório do perfil 7 - Assumindo $\beta_i \sim Weibull$ (Caso gerado - $T \sim Weibull$)

Na Figura 4.10 fica claro que o método utilizado em Hamada (2005) consegue captar a distribuição empírica dos tempos de falha. Ou seja, o fato de que a distribuição dos efeitos aleatórios e dos tempos de falha muda *a posteriori* (fato verificado analiticamente na Seção 3.7), não penaliza drasticamente a estimação de $F_{T|Y}(t|y)$.

A Proposta deste texto e do método apresentado em Robinson e Crowder (2000), estimam muito aproximadamente a distribuição empírica dos tempos de falha.

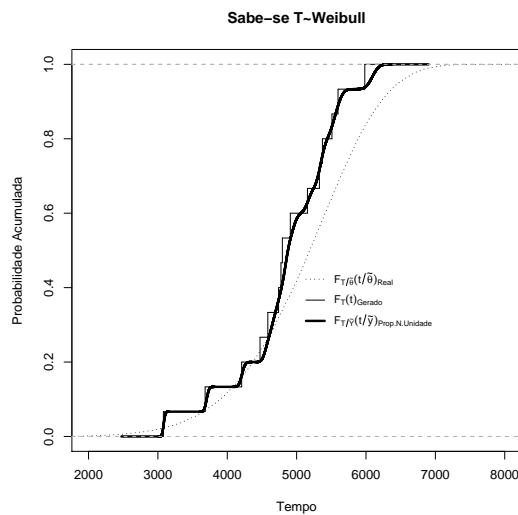
Note que a distribuição acumulada real encontra-se mais a direita das demais curvas. Isto ocorre porque a amostra gerada está sujeita ao erro Monte Carlo, e não é suficientemente grande para aproximar a distribuição real, logo as curvas estimadas das distribuições preditivas *a posteriori* se encontram mais próximas da distribuição empírica dos dados gerados.

Um fato interessante é que, como o método de Hamada (2005) aproxima bem a distribuição dos tempos de falha, é possível utilizar a Proposta para um perfil futuro incluído na verossimilhança da Seção 3.6.3 denotada por $F_{T|Y}(t|y)_{Prop.N.U.Ver}$. Pela



(a) Hamada (2005)

(b) Robinson e Crowder (2000)



(c) Proposta

Figura 4.10: Distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para um perfil futuro assumindo $\beta_i \sim Weibull$ (Caso gerado - $T \sim Weibull$)

Figura 4.11 é possível notar que $F_{T|Y}(t|\bar{y})_{Prop.N.Unidade}$ praticamente se sobrepõe a $F_{T|Y}(t|\bar{y})_{Hamada}$. Dessa maneira, seria razoável utilizar a abordagem da Seção 3.6.3 para realizar inclusive previsões de valores de degradação para uma unidade futura (tal

abordagem será efetuada quando das situações práticas com dados reais).

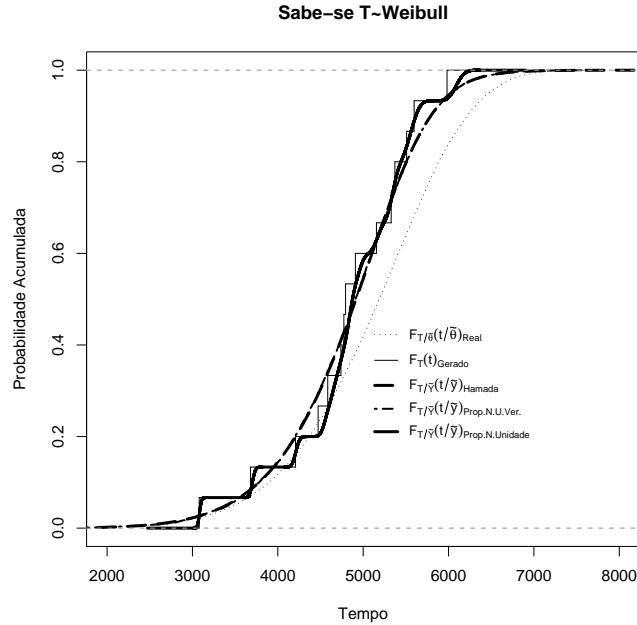


Figura 4.11: Distribuição preditiva *a posteriori* assumindo $\beta_i \sim Weibull$ (Caso gerado - $T \sim Weibull$)

4.4.2 Análises Supondo Efeito Aleatório Lognormal

A título de curiosidade será efetuada a análise assumindo-se as distribuições *a priori* para os efeitos aleatórios como Lognormal (dita má especificação como na inferência clássica).

São estabelecidas as mesmas distribuições *a priori* apresentadas na equação(4.2).

As estimativas para os efeitos aleatórios dos perfis sob teste foram efetuadas com sucesso como pode ser exemplificado na Figura 4.12. O valor real é indicado pela linha preta vertical.

Os métodos de estimação da distribuição preditiva *a posteriori* para uma unidade futura (perfil futuro) como apresentado na Seção 3 foram aplicadas e obteve-se o gráfico

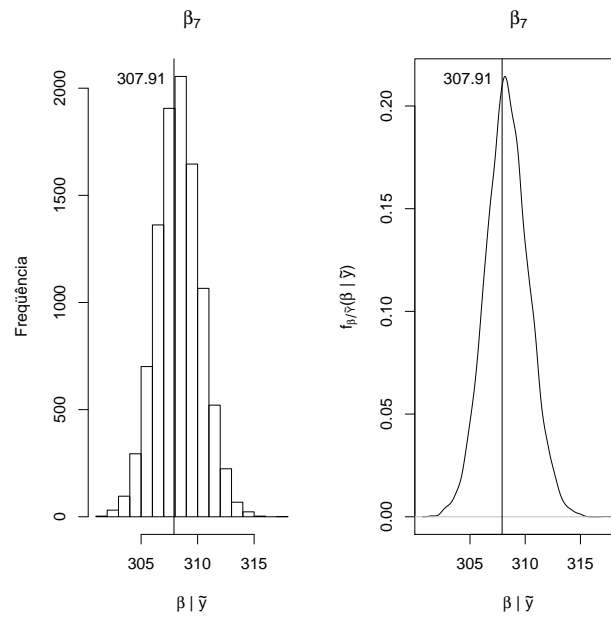
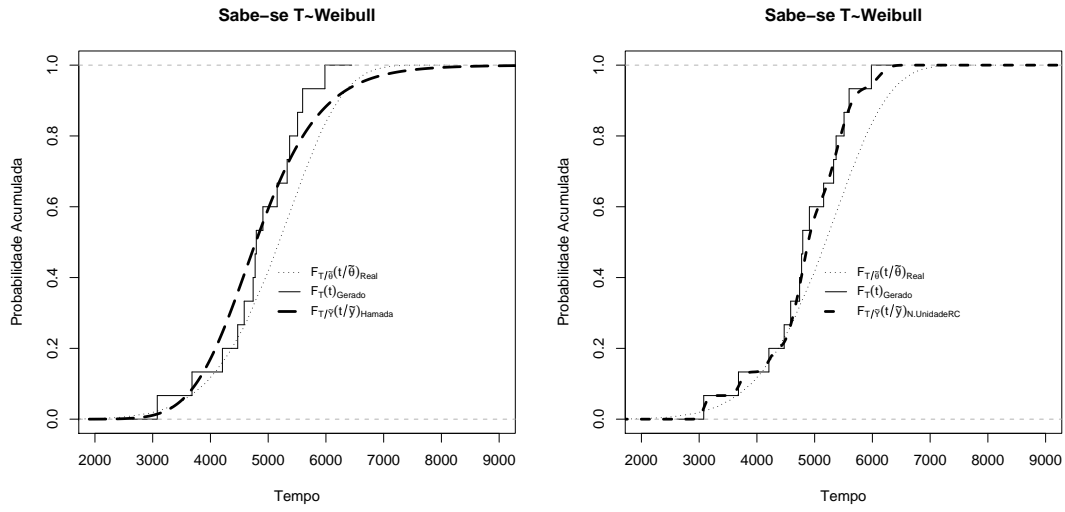


Figura 4.12: Densidade *a posteriori*: efeito aleatório do perfil 7 - Assumindo $\beta_i \sim \text{Lognormal}$ (Caso gerado - $T \sim \text{Weibull}$)

na Figura 4.13.

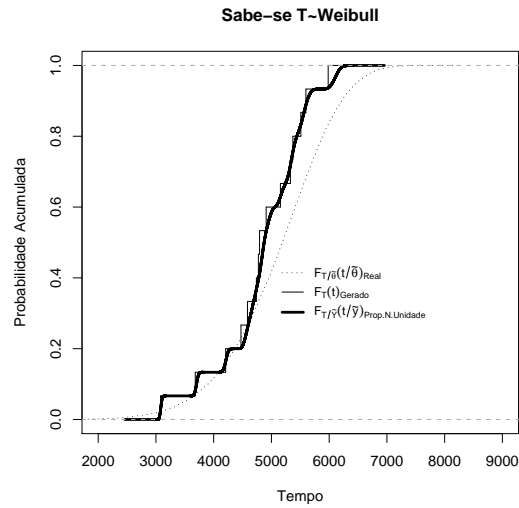
Na Figura 4.13 fica evidente que o método utilizado em Hamada (2005) não consegue captar a distribuição empírica dos tempos de falha. Ou seja, o fato de que a distribuição dos efeitos aleatórios e dos tempos de falha muda *a posteriori* (fato verificado analiticamente na Seção 3.7), penaliza a estimação de $F_{T|Y}(t|y)$.

A Proposta deste texto e do método apresentado em Robinson e Crowder (2000), estimam muito aproximadamente a distribuição empírica dos tempos de falha. Ou seja, reforça-se que ambos os métodos estão livres da má especificação dos efeitos aleatórios quando assumidas distribuições *a priori* não informativas para os parâmetros do modelo.



(a) Hamada (2005)

(b) Robinson e Crowder (2000)



(c) Proposta

Figura 4.13: Distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para um perfil futuro assumindo $\beta_i \sim Lognormal$ (Caso gerado - $T \sim Weibull$)

4.5 Caso 3: Distribuição do Tempo até a Falha $T \sim \text{Lognormal}$

Foram gerados quinze ($n = 15$) perfis de degradação, com ($m_i = 17$) medidas de degradação em cada perfil, sendo $y_{i1} = 0$ para todos os perfis (ou unidades sob teste), $D_f = 10$, $\sigma_\varepsilon = 0,2063$, com tempos de falha advindos de uma distribuição de probabilidade Lognormal conhecida $T \sim \text{Lognormal}(\theta^*) = \text{Lognormal}(\mu_L^*, \sigma_L^{2*}) = \text{Lognormal}(5000; 1/44.72)$.

Os perfis gerados podem ser observados na Figura 4.14.

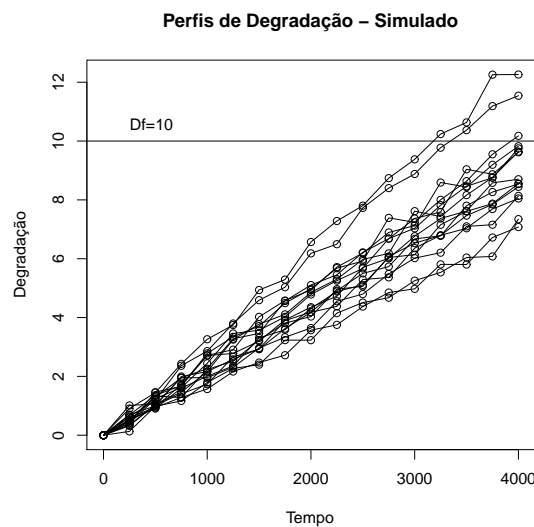


Figura 4.14: Perfis de degradação - $T \sim \text{Lognormal}$

Tal qual na Seção 4.4, as três abordagens apresentadas neste texto serão utilizadas neste banco de dados, com a má especificação do efeito aleatório (Seção 4.5.1) e especificação correta (Seção 4.5.2).

4.5.1 Análises Assumindo Efeito Aleatório Weibull

A título de curiosidade será efetuada a análise assumindo-se as distribuições *a priori* para os efeitos aleatórios como Weibull (dita má especificação como na inferência clássica).

As distribuições *a priori* para os efeitos aleatórios são as mesmas apresentadas na equação (4.1).

As estimativas para os efeitos aleatórios dos perfis sob teste foram efetuadas com sucesso como pode ser exemplificado na Figura 4.15. O valor real é indicado pela linha preta vertical.

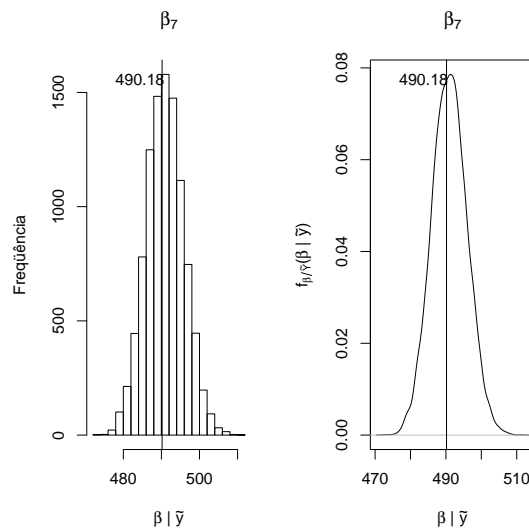
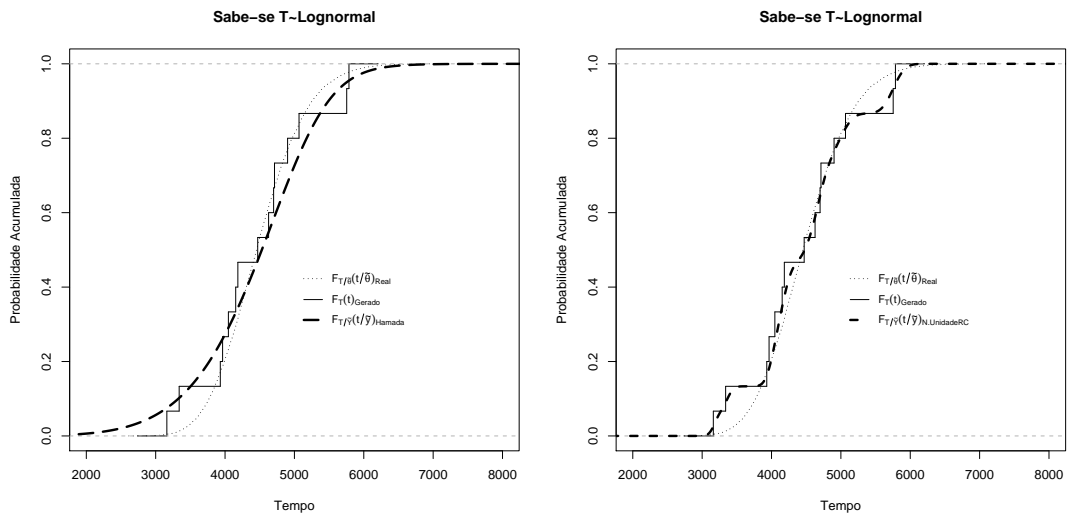


Figura 4.15: Densidade *a posteriori*: efeito aleatório do perfil 7 - Assumindo $\beta_i \sim \text{Weibull}$ (Caso gerado - $T \sim \text{Lognormal}$)

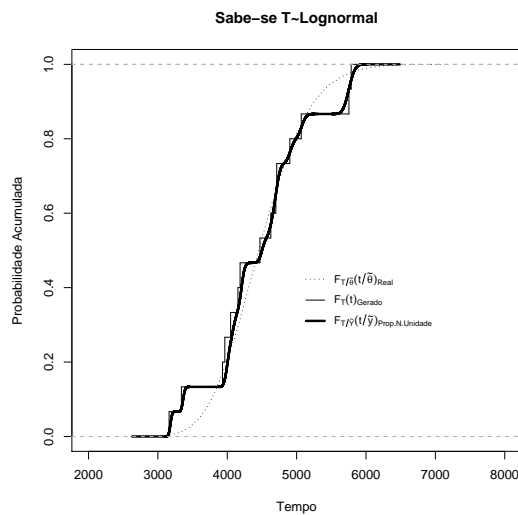
Os métodos de estimação da distribuição preditiva *a posteriori* para uma unidade futura (perfil futuro) como apresentado na Seção 3 foram aplicadas e obteve-se o gráfico na Figura 4.16.

Na Figura 4.16 observa-se que o método utilizado por Hamada (2005) oferece boa



(a) Hamada (2005)

(b) Robinson e Crowder (2000)



(c) Proposta

Figura 4.16: Distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para um perfil futuro assumindo $\beta_i \sim Weibull$ (Caso gerado - $T \sim Lognormal$)

aproximação da distribuição empírica dos tempos de falha. Ou seja, o fato de que a distribuição dos efeitos aleatórios e dos tempos de falha muda *a posteriori* (fato verificado analiticamente na Seção 3.7), não penalizou de forma grave a estimação

de $F_{T|Y}(t|y)$. Entretanto, $F_{T|Y}(t|y)$ não foi bem estimada para valores pequenos de tempo, e estes valores são bastante utilizados para determinação de garantia, logo seria preferível não utilizar os resultados do método de Hamada (2005).

A Proposta deste texto e do método apresentado em Robinson e Crowder (2000), estimam muito aproximadamente a distribuição empírica dos tempos de falha. Reforçando mais uma vez a capacidade de ambos métodos estarem livres de má especificação dos efeitos aleatórios quando assumidas distribuições *a priori* não informativas para os parâmetros do modelo.

4.5.2 Análises Supondo Efeito Aleatório Lognormal

São estabelecidas as mesmas distribuições *a priori* apresentadas na equação(4.2).

As estimativas para os efeitos aleatórios dos perfis sob teste foram efetuadas com sucesso como pode ser exemplificado na Figura 4.17. O valor real é indicado pela linha preta vertical.

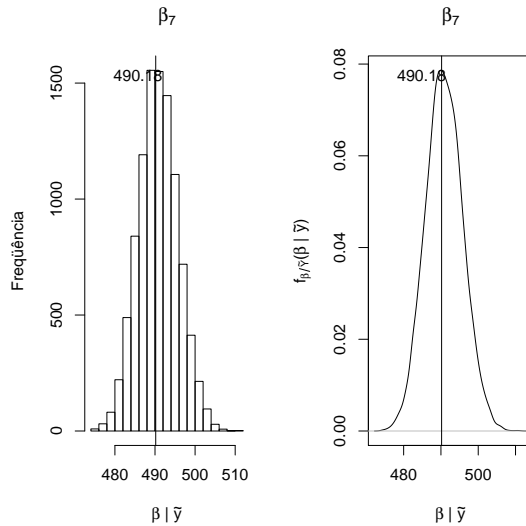
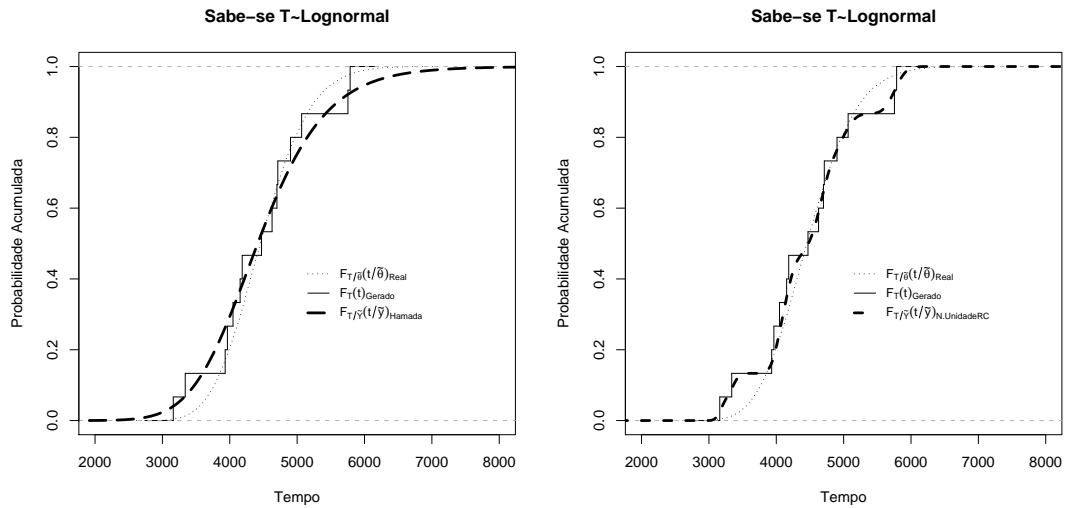


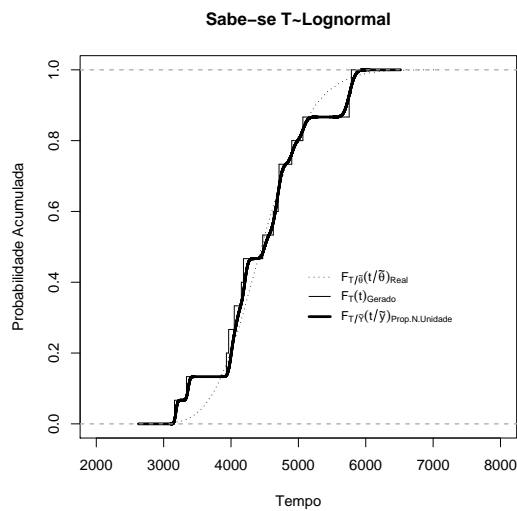
Figura 4.17: Densidade *a posteriori*: efeito aleatório do perfil 7 - Assumindo $\beta_i \sim \text{Lognormal}$ (Caso gerado - $T \sim \text{Lognormal}$)

Os métodos de estimação da distribuição preditiva *a posteriori* para uma unidade futura (perfil futuro) como apresentado na Seção 3 foram aplicadas e obteve-se o gráfico na Figura 4.18.



(a) Hamada (2005)

(b) Robinson e Crowder (2000)



(c) Proposta

Figura 4.18: Distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para um perfil futuro assumindo $\beta_i \sim Lognormal$ (Caso gerado - $T \sim Lognormal$)

Na Figura 4.18 a Proposta deste texto e do método apresentado em Robinson e Crowder (2000), estimam muito aproximadamente a distribuição empírica dos tempos de falha.

O método de Hamada (2005) também aproxima bem a distribuição dos tempos de falha, é possível utilizar a Proposta para um perfil futuro incluído na verossimilhança da Seção 3.6.3 denotada por $F_{T|Y}(t|y)_{Prop.N.U.Ver}$. Pela Figura 4.19 nota-se que $F_{T|Y}(t|y)_{Prop.N.Unidade}$ praticamente se sobrepõe a $F_{T|Y}(t|y)_{Hamada}$. Dessa maneira, seria razoável utilizar a abordagem da Seção 3.6.3 para realizar inclusive predições de valores de degradação para uma unidade futura (tal abordagem será efetuada quando das situações práticas com dados reais).

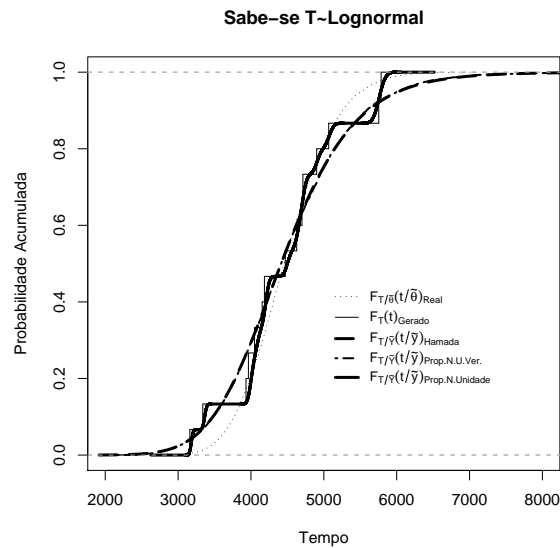


Figura 4.19: Distribuição preditiva *a posteriori* assumindo $\beta_i \sim Lognormal$ (Caso gerado - $T \sim Lognormal$)

4.6 Conclusões

Neste Capítulo foi apontada, através de bancos de dados simulados, a inconsistência

teórica presente em Hamada (2005). A inconsistência diz respeito à afirmação de que a distribuição dos efeitos aleatórios (ou dos tempos de falha, uma vez que ambos estão atrelados pela forma funcional do modelo linear de degradação) se mantém a mesma *a posteriori*. Foram gerados dados de modo que a distribuição dos tempos de falha reais é bimodal (mistura de duas normais), então através de Robinson e Crowder (2000), da proposta deste texto (métodos que dão liberdade à atualização da distribuição dos efeitos aleatórios), e do conhecimento da distribuição dos dados gerados, mostra-se que os efeitos aleatórios de fato são atualizados no procedimento bayesiano, corroborando-se assim empiricamente a inconsistência presente em Hamada (2005). Através de dados gerados a partir das distribuições Weibull e Lognormal verifica-se que, mesmo apesar da inconsistência teórica, quando o efeito aleatório não é mal especificado, o método empregado em Hamada (2005) fornece uma boa aproximação da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para unidades futuras.

Fato interessante ainda neste Capítulo é que Robinson e Crowder (2000) e a proposta deste texto sempre aproximaram muito bem a distribuição amostrada a partir da distribuição real quando assumidas distribuições *a priori* Weibull e Lognormal pouco informativas para a distribuição dos efeitos aleatórios. Outra vantagem da proposta e de Robinson e Crowder (2000) é que formas funcionais mais complexas de degradação não dificultam a utilização dessas duas abordagens. Ou seja, para estes casos dos dados gerados, são completamente livres de má especificação (com forte evidência já que conseguiram captar inclusive bimodalidade). Dessa forma, ambos os métodos podem ser utilizados para validação da metodologia de Hamada (2005) em casos práticos, dado que sempre aproximaram a distribuição gerada dos tempos de falha. A partir daí, pode-se utilizar a proposta deste texto com inclusão de uma nova unidade na verossimilhança, que por sua vez apresenta resultados extremamente parecidos com os de Hamada (2005), para realizar previsões de degradação para uma unidade futura.

Capítulo 5

Situações Práticas Revisitadas

5.1 Emissores de Laser

Na Seção 1.1.2 foram apresentados os dados dos emissores de laser (Figura 1.3). Estes dados foram originalmente analisados por Meeker e Escobar (1998), utilizando a modelagem baseada em inferência clássica. A apresentação dessa mesma base de dados foi realizada na Seção 1.1.2 desse trabalho.

Objetiva-se nesta Seção comparar os resultados obtidos em Hamada (2005) com a análise Proposta apresentada na Seção 3.6. O modelo de degradação utilizado será o mesmo apresentado na Seção 3, mais especificamente na Seção 3.2 (uma vez que Hamada (2005) assumiu que os efeitos aleatório Weibull). As análises de perfis sob teste e futuros também se encontram indicadas dentro da Seção 3.

Para o modelo (3.4), $i = 1, \dots, n = 15$ (*perfis*), $j = 1, \dots, m_i$ (*medidas*) e $\max\{m_1, \dots, m_{15}\} = 17$.

Utilizado o modelo de degradação com a suposição de que os efeitos aleatórios são distribuídos segundo uma distribuição Weibull (modelo da Seção 3.2 e lembrando que $T_i | (\theta^*) \sim Weibull \Leftrightarrow \beta_i | \theta \sim Weibull$), são estabelecidas as distribuições *a priori* para $\tilde{\theta}$

os parâmetros do modelo segundo a Seção 4.2.1.

Os métodos de estimação da distribuição preditiva *a posteriori* para uma unidade futura (perfil futuro), como apresentado na Seção 3, foram aplicadas e obteve-se o gráfico na Figura 5.1.

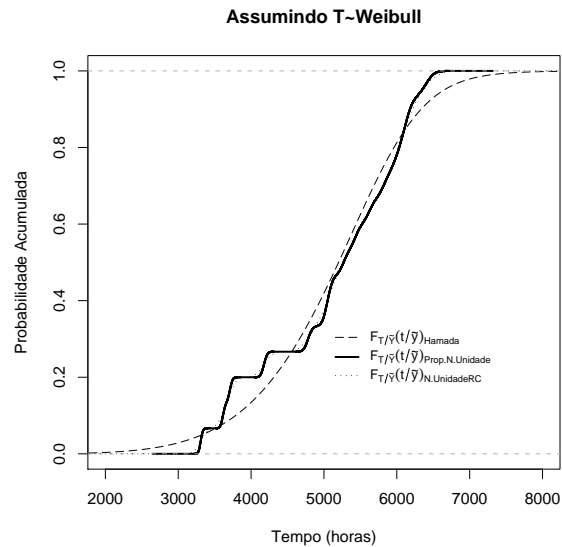


Figura 5.1: Distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para um laser futuro assumindo $\beta_i \sim Weibull$

É possível recordar da Seção 4 que quando o método de Hamada (2005) é uma boa aproximação para a distribuição preditiva *posteriori* dos tempos de falha, Hamada (2005) é uma suavização das curvas resultantes dos métodos de Robinson e Crowder (2000) e da Proposta (Seção 3.6 deste texto). Da Figura 5.1 nota-se que a aproximação de Hamada (2005) é adequada. Observe que como os métodos de Robinson e Crowder (2000) e da Proposta (Seção 3.6 deste texto) na Seção 4 apresentaram bons resultados em descrever a distribuição dos tempos de falha independente de más especificações (afirmativa válida para o caso Weibull e Lognormal), pode-se utilizá-los dessa maneira.

Na Figura 5.2 pode ser vista a distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha

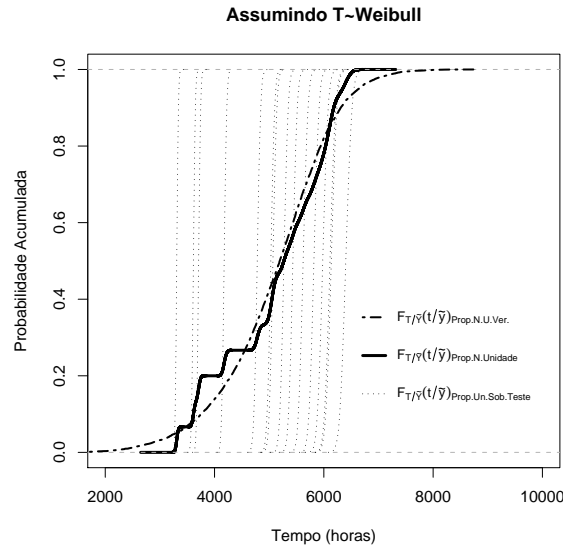


Figura 5.2: Distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para lasers sob teste e laser futuro assumindo $\beta_i \sim Weibull$

de unidades sob teste e futura (Proposta da Seção 3.6). Como visto na Seção 4.5.2, a Proposta com a nova unidade na verossimilhança apresenta resultados praticamente idênticos aos de Hamada (2005)(ver Seção 4).

Uma vantagem da Proposta em relação ao método aplicado por Hamada (2005) é o conjunto de linhas pontilhadas, em que cada uma representa a distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha de unidades sob teste. Ou seja, é possível estimar quantidades de interesse para cada unidade laser.

As estimativas das quantidades de interesse $R_{T|Y}(4500|y)$ e $t_{p|y}(0,1|y)$ e parâmetros do modelos são mostradas na Tabela 5.1. Note que todas as estimativas são similares, indicando que o modelo de Hamada (2005) é adequado e possui resultados muito similares aos propostos neste texto quando a suposição com relação à distribuição dos efeitos aleatórios está correta (veja conclusões do Capítulo 4). Poderia ser determinada também a garantia de um emissor de laser através dos resultados de $t_{p|y}(0,1|y)$, tempo para o qual a probabilidade de uma unidade futura falhar é 0,10. Note que as proba-

bilidades estimadas de um laser futuro sobreviver a 4500 ($R_{T|Y}(4500|y)$) horas de uso é alta, todas estimativas maiores que 0,70.

Tabela 5.1: Distribuição *a posteriori* das quantidades de interesse e parâmetros (Dados dos Emissores de Laser - Hamada (2005))

Parâmetro	Média	Desvio padrão	2,5%	Mediana	97,5%
δ	6,4302	1,3776	3,9710	6,3420	9,3150
λ	7,791E-11	3,982E-09	2,786E-26	4,021E-18	1,355E-11
σ_ε	0,2117	0,0098	0,1936	0,2114	0,2321
$R_{T Y}(4500 y)_{Prop.N.Unidade}$	0,7300	*	*	*	*
$R_{T Y}(4500 y)_{Prop.N.U.Ver}$	0,7500	*	*	*	*
$t_{p Y}(0,1 y)_{Prop.N.Unidade}$	3614	*	*	*	*
$t_{p Y}(0,1 y)_{Prop.N.U.Ver}$	3759,7	*	*	*	*
δ_{Hamada}	5,688	0,9496	3,6920	5,7650	7,1390
λ_{Hamada}	6,628E-11	1,348E-09	2,587E-20	1,626E-16	8,531E-11
$\sigma_{\varepsilon_{Hamada}}$	0,2063	0,0098	0,1882	0,2059	0,2266
$R_{T Y}(4500 y)_{Hamada}$	0,7107	0,0840	0,5236	0,7200	0,8477
$t_{p Y}(0,1 y)_{Hamada}$	3650	348,6	2852	3699	4206

Ainda, da Tabela 5.2 é possível obter os percentis da distribuição preditiva *a posteriori* de todas unidades sob teste. O método de Robinson e Crowder (2000) também permitiria realizar essa análise. Planos de manutenção podem ser desenvolvidos para unidades sob teste, pois são obtidas as estimativas de percentis para as mesmas (ver Robinson e Crowder (2000) para maiores detalhes da aplicação).

Tabela 5.2: Percentis da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para unidades sob teste (Dados dos Emissores de Laser - Hamada (2005))

$T_i Y$	$t_{p Y}(0,025 y)_{Proposta}$	$t_{p Y}(0,1 y)_{Proposta}$	$t_{p Y}(0,5 y)_{Proposta}$	$t_{p Y}(0,975 y)_{Proposta}$
1	3652	3671	3709	3768
2	4103	4129	4177	4253
3	5489	5533	5622	5763
4	5832	5881	5980	6136
5	5311	5353	5434	5560
6	3558	3578	3614	3671
7	5978	6034	6137	6297
8	6232	6290	6403	6583
9	4962	4999	5069	5182
10	3262	3279	3309	3357
11	5153	5194	5271	5389
12	4923	4960	5030	5139
13	4685	4719	4782	4880
14	5677	5727	5819	5966
15	5957	6010	6113	6278

A Proposta com a nova unidade inclusa na verossimilhança permite ainda executar predições de degradação para uma unidade futura, como pode ser visto na Figura 5.3. Linhas mais escuras e contínuas retratam as bandas de credibilidade de degradação uma unidade futura, linhas tracejadas mais escuras a estimativa pontual da unidade

futura, linhas tracejadas as previsões das unidades sob teste, e os círculos as medições observadas de degradação. Note que as bandas de credibilidade da unidade futura tendem a englobar a degradação das unidades sob teste. Esse gráfico é ilustrativo, uma vez que previsões com tantos passos a frente não é uma prática recomendada (e nem sempre apresenta resultados satisfatórios).

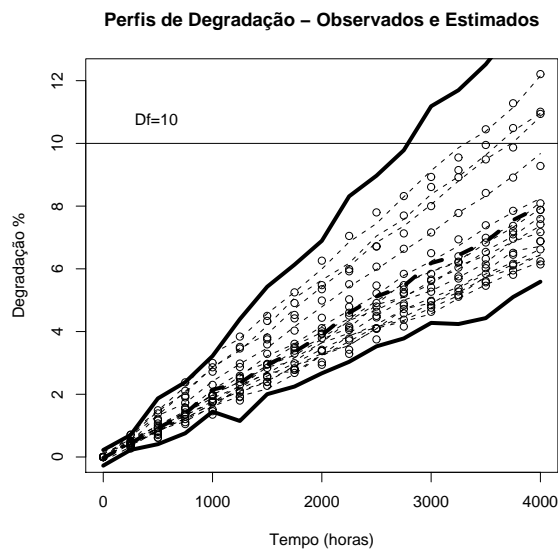


Figura 5.3: Previsões para lasers futuros e sob teste assumindo $T \sim Weibull$

5.2 Desgaste das Rodas de Trem

Na Seção 1.1.1 foram apresentados os dados de rodas de trem que inicialmente motivaram este texto. Freitas *et al.* (2010) também analisaram as rodas *MA11*, os resultados serão comparados com a metodologia Proposta na Seção 3.6.

Objetiva-se nesta Seção comparar os resultados obtidos em Freitas *et al.* (2010) (obtidos via o método de Hamada (2005)) com a análise Proposta apresentada na Seção 3.6. O modelo de degradação utilizado será o mesmo apresentado na Seção 3, (uma vez

que Freitas *et al.* (2010) assumiu que os efeitos aleatórios Weibull e Lognormal). As análises de perfis sob teste e futuros também se encontram indicadas dentro da Seção 3.

Todos resultados de Freitas *et al.* (2010) serão denotados por Hamada (2005), uma vez que os primeiros autores utilizaram a metodologia do segundo.

Para o modelo (3.4), $i = 1, \dots, n = 14$ (*perfis*), $j = 1, \dots, m_i$ (*medidas*) e $\max\{m_1, \dots, m_{14}\} = 13$.

5.2.1 Rodas de Trem - Efeito Aleatório Weibull

Utilizado o modelo de degradação com a suposição de que os efeitos aleatórios são distribuídos segundo uma distribuição Weibull (modelo da Seção 3.2 e lembrando que $T_i|\theta^* \sim Weibull \Leftrightarrow \beta_i|\theta \sim Weibull$), são estabelecidas as distribuições *a priori* para os parâmetros do modelo segundo a equação (4.1). A justificativa para essa escolha se dá da mesma maneira que na Seção 4.2.1. As análises foram conduzidas da mesma maneira que nas seções anteriores.

A distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha via Hamada (2005) acompanha bem as distribuições acumuladas livres de má especificação de Robinson e Crowder (2000) e da Proposta deste texto.

Na Figura 5.5 pode ser vista a distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha de rodas sob teste e futura (Proposta da Seção 3.6). Como visto na Seção 4.5.2, a Proposta com a nova unidade na verossimilhança apresenta resultados praticamente idênticos aos de Hamada (2005)(ver Seção 4).

As estimativas das quantidades de interesse ($MTTF|Y_{\sim}$ ou tempo médio até a falha da unidade futura a posteriori, $R_{T|Y_{\sim}}(300000|y)$, $t_{p|Y_{\sim}}(0,1|y)$, e $t_{p|Y_{\sim}}(0,5|y)$) e parâmetros do modelos são comparadas na Tabela 5.3. Note que todas as estimativas são similares, indicando que o modelo de Hamada (2005) é adequado e possui resultados

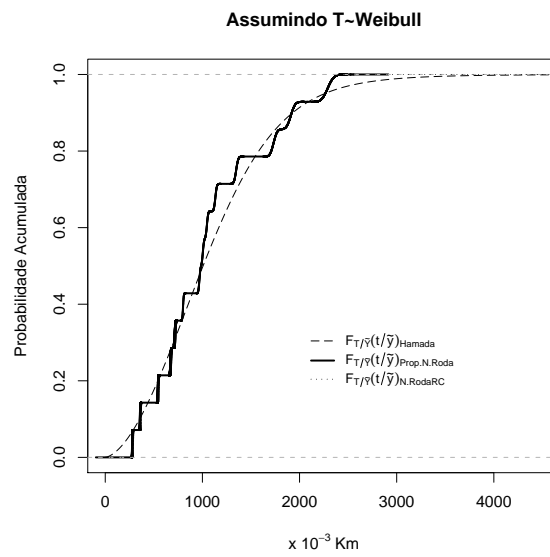


Figura 5.4: Distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para uma roda futura assumindo $\beta_i \sim Weibull$

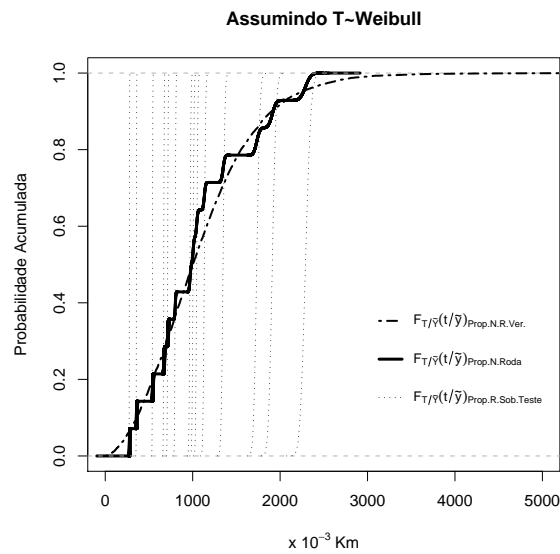


Figura 5.5: Distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para rodas sob teste e roda futura assumindo $\beta_i \sim Weibull$

muito parecidos aos propostos neste texto quando a suposição com relação à distribuição dos efeitos aleatórios está correta. Poderia ser determinada também a garantia de uma

roda através dos resultados de $t_{p|\tilde{Y}}(0,1|y)$, tempo para o qual a probabilidade de uma unidade futura falhar é 0,10. Note que as probabilidades estimadas de uma roda futura sobreviver a 300000 ($R_{T|\tilde{Y}}(300000|y)$) quilômetros de uso é alta, todas estimativas maiores que 0,90.

Tabela 5.3: Distribuição *a posteriori* das quantidades de interesse e parâmetros (Dados de Desgaste de Rodas de Trem - Freitas *et al.* (2010))

Parâmetro	Média	Desvio padrão	2,5%	Mediana	97,5%
δ	1,95	0,41	1,22	1,93	2,81
λ	0,01	0,01	0,00	0,00	0,04
σ_ε	0,94	0,05	0,85	0,94	1,06
$MTTF (\tilde{y})_{Prop.N.Unidade}(x10^3 km)$	1056,78	*	*	*	*
$MTTF (\tilde{y})_{Prop.N.U.Ver}(x10^3 km)$	1087,73	*	*	*	*
$R_{T \tilde{Y}}(300000 \tilde{y})_{Prop.N.Unidade}$	0,93	*	*	*	*
$R_{T \tilde{Y}}(300000 \tilde{y})_{Prop.N.U.Ver}$	0,92	*	*	*	*
$t_{p \tilde{Y}}(0,1 \tilde{y})_{Prop.N.Unidade}(x10^3 km)$	355,89	*	*	*	*
$t_{p \tilde{Y}}(0,1 \tilde{y})_{Prop.N.U.Ver}(x10^3 km)$	359,81	*	*	*	*
$t_{p \tilde{Y}}(0,5 \tilde{y})_{Prop.N.Unidade}(x10^3 km)$	986,37	*	*	*	*
$t_{p \tilde{Y}}(0,5 \tilde{y})_{Prop.N.U.Ver}(x10^3 km)$	1001,77	*	*	*	*
δ_{Hamada}	1,95	0,41	1,22	1,93	2,80
λ_{Hamada}	0,01	0,01	0,00	0,01	0,04
$\sigma_\varepsilon_{Hamada}$	0,99	0,06	0,88	0,99	1,11
$MTTF (\tilde{y})_{Hamada}(x10^3 km)$	1097,00	172,13	800,84	1083,00	1473,13
$R_{T \tilde{Y}}(300000 \tilde{y})_{Hamada}$	0,92	0,05	0,80	0,93	0,98
$t_{p \tilde{Y}}(0,1 \tilde{y})_{Hamada}(x10^3 km)$	382,80	118,79	163,65	378,90	624,66
$t_{p \tilde{Y}}(0,5 \tilde{y})_{Hamada}(x10^3 km)$	1011,00	170,75	688,85	1006,00	1361,00

Ainda, da Tabela 5.4 é possível obter os percentis da distribuição preditiva *a posteriori* de todas unidades sob teste. O método de Robinson e Crowder (2000) também permitiria realizar essa análise. Planos de manutenção podem ser desenvolvidos para unidades sob teste.

Tabela 5.4: Percentis da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para unidades sob teste (Dados de Desgaste de Rodas de Trem - Freitas *et al.* (2010))

$T_i \tilde{Y}$	$MTTF y_{Proposta}$ ($x10^3 km$)	$t_{p y}(0,025 \tilde{y})_{Proposta}$ ($x10^3 km$)	$t_{p y}(0,1 \tilde{y})_{Proposta}$ ($x10^3 km$)	$t_{p y}(0,5 \tilde{y})_{Proposta}$ ($x10^3 km$)	$t_{p y}(0,975 \tilde{y})_{Proposta}$ ($x10^3 km$)
1	2291,23	2196,04	2228,38	2289,98	2391,62
2	1910,99	1841,84	1866,48	1911,14	1980,44
3	1347,65	1313,62	1325,17	1347,50	1382,15
4	1004,76	985,60	992,53	1004,85	1024,10
5	669,42	661,12	663,89	669,36	677,91
6	969,50	952,49	957,88	969,43	987,14
7	1046,70	1026,41	1033,34	1046,43	1067,99
8	1733,35	1677,06	1696,31	1733,27	1791,79
9	714,02	704,55	707,78	713,94	723,88
10	1133,44	1109,57	1118,04	1133,44	1158,08
11	356,52	352,28	353,74	356,47	360,90
12	276,11	272,27	273,58	276,05	280,05
13	800,71	788,48	793,10	800,80	813,12
14	540,19	534,07	536,15	540,16	546,55

A Proposta com a nova unidade inclusa na verossimilhança permite ainda executar predições de degradação para uma roda futura, como pode ser visto na Figura 5.6. Linhas mais escuras e contínuas retratam as bandas de credibilidade de degradação uma unidade futura, linhas tracejadas mais escuras a estimativa pontual da unidade futura, linhas tracejadas as predições das unidades sob teste e os círculos indicam as medidas de degradação observadas. Note que as bandas de credibilidade da unidade futura tendem a englobar a degradação das unidades sob teste. Esse gráfico é ilustrativo, uma vez que predições com tantos passos a frente não é uma prática recomendada.

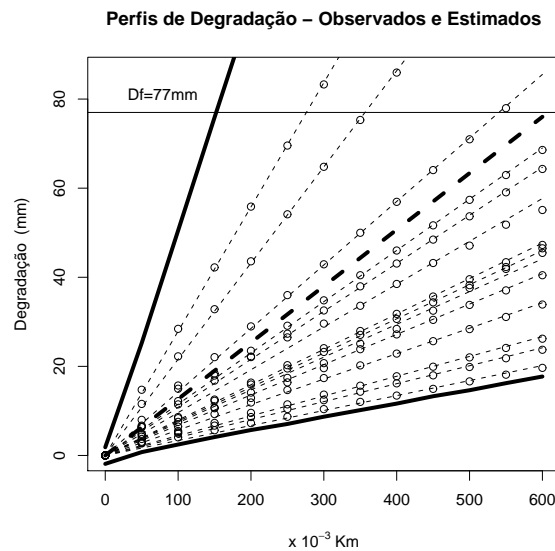


Figura 5.6: Predições para rodas futuras e sob teste assumindo $\beta_i \sim Weibull$

5.2.2 Rodas de Trem - Efeito Aleatório Lognormal

São estabelecidas as mesmas distribuições *a priori* apresentadas na equação (4.2), ou seja, não informativas no sentido de pouco conhecimento sobre os parâmetros. Na Figura 5.7 nota-se que o método de Hamada (2005) não gera boas estimativas da distribuição dos tempos de falha *a posteriori*, logo não seria adequado utilizar o método

proposto de inserção da nova unidade na verossimilhança.

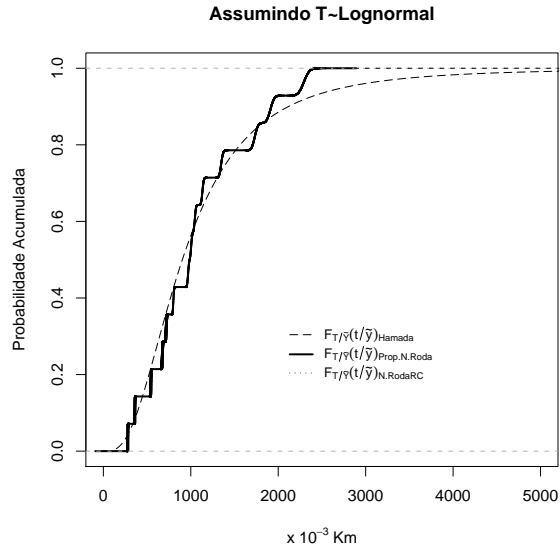


Figura 5.7: Distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para uma roda futura assumindo $\beta_i \sim \text{Lognormal}$

Como os resultados da Seção 5.2.1 foram melhores, optou-se por apenas comparar os resultados de Freitas *et al.* (2010) com os obtidos via Proposta.

As estimativas das quantidades de interesse ($MTTF|Y$ ou tempo médio até a falha da unidade futura a posteriori, $R_{T|Y}(300000|y)$, $t_{p|Y}(0,1|y)$, e $t_{p|Y}(0,5|y)$) e parâmetros do modelo são comparadas na Tabela 5.5. Note que todas as estimativas de $MTTF|Y_{\sim Prop.N.U.Ver} = 1154880$ Km e $MTTF|Y_{\sim Hamada} = 1147000$ Km são quase 100.000 Km maiores que $MTTF|Y_{\sim Prop.N.Unidade} = 1056880$ Km, indicando que o modelo de Hamada (2005) não é adequado apesar de possuir resultados parecidos aos propostos na parte inicial da curva de probabilidade acumulada. Neste caso a situação seria mais recomendável a utilização da Proposta deste texto e de Robinson e Crowder (2000), para estabelecimento de garantia para novas rodas, ou ainda, conforme a Seção 5.2.1.

Tabela 5.5: Distribuição *a posteriori* das quantidades de interesse e parâmetros (Dados de Desgaste de Rodas de Trem - Freitas *et al.* (2010))

Parâmetro	Média	Desvio padrão	2,5%	Mediana	97,5%
μ_L	2,46	0,18	2,10	2,46	2,81
σ_L	0,65	0,14	0,44	0,63	0,98
σ_ε	0,94	0,05	0,85	0,94	1,05
$MTTF (\tilde{y})_{Prop.N.Unidade}(x10^3 km)$	1056,88	*	*	*	*
$MTTF (\tilde{y})_{Prop.N.U.Ver}(x10^3 km)$	1154,88	*	*	*	*
$R_T Y(300000 \tilde{y})_{Prop.N.Unidade}$	0,93	*	*	*	*
$R_T Y(300000 \tilde{y})_{Prop.N.U.Ver}$	0,95	*	*	*	*
$t_{p \tilde{y}}(0,1 \tilde{y})_{Prop.N.Unidade}(x10^3 km)$	356,00	*	*	*	*
$t_{p \tilde{y}}(0,1 \tilde{y})_{Prop.N.U.Ver}(x10^3 km)$	390,00	*	*	*	*
$t_{p \tilde{y}}(0,5 \tilde{y})_{Prop.N.Unidade}(x10^3 km)$	987,00	*	*	*	*
$t_{p \tilde{y}}(0,5 \tilde{y})_{Prop.N.U.Ver}(x10^3 km)$	913,00	*	*	*	*
$\mu_{L Hamada}$	2,46	0,18	2,10	2,46	2,81
$\sigma_{L Hamada}$	0,65	0,14	0,44	0,62	0,98
$\sigma_\varepsilon Hamada$	0,99	0,06	0,88	0,99	1,11
$MTTF (\tilde{y})_{Hamada}(x10^3 km)$	1147,00	264,13	796,86	1101,00	1776,64
$R_T Y(300000 \tilde{y})_{Hamada}$	0,95	0,05	0,82	0,96	0,99
$t_{p \tilde{y}}(0,1 \tilde{y})_{Hamada}(x10^3 km)$	405,60	94,01	220,39	405,90	589,28
$t_{p \tilde{y}}(0,5 \tilde{y})_{Hamada}(x10^3 km)$	916,10	163,98	636,39	901,30	1264,10

Capítulo 6

Conclusão

No Capítulo 1 deste texto foram apresentados dados de degradação de rodas de trem para análise via inferência bayesiana. A percepção de inconsistências teóricas no artigo de Hamada (2005) motivou a busca de artigos que propusessem metodologias de abordagem bayesiana alternativas para dados de degradação e fomentou retorno à situação prática dos dados de degradação de emissores de laser.

No Capítulo 2 foram revisadas algumas metodologias de inferência para modelos de degradação.

No Capítulo 3, foi apresentada a abordagem bayesiana para inferência em modelos de degradação através de duas metodologias correntes na literatura (Robinson e Crowder, 2000; Hamada, 2005), e de uma desenvolvida nesta dissertação. Através da abordagem proposta neste texto, torna-se possível a obtenção da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para unidades futuras e sob teste. Ainda, é apresentada uma metodologia de inserção de uma nova unidade na função de verossimilhança que permite acessar a distribuição *a posteriori* dos tempos de falha para unidades futuras da mesma forma que em unidades sob teste, além de possibilitar predições de medidas de degradação para uma unidade não observada. Esta última metodologia é

limitada pela correta especificação dos efeitos aleatórios assim como o é a metodologia empregada por Hamada (2005). Neste Capítulo foi também apontada a inconsistência teórica presente em Hamada (2005). A inconsistência diz respeito à afirmação de que a distribuição dos efeitos aleatórios (ou dos tempos de falha, uma vez que ambos estão atrelados pela forma funcional do modelo linear de degradação) se mantém a mesma *a posteriori*. Foi realizada uma prova analítica contrária a esta suposição.

No Capítulo 4 são gerados dados de modo que a distribuição dos tempos de falha reais é bimodal (mistura de duas normais), então através de Robinson e Crowder (2000), da proposta deste texto (métodos que dão liberdade à atualização da distribuição dos efeitos aleatórios), e do conhecimento da distribuição dos dados gerados, mostra-se que os efeitos aleatórios de fato são atualizados no procedimento bayesiano, corroborando-se assim empiricamente a inconsistência presente em Hamada (2005). Através de dados gerados a partir das distribuições Weibull e Lognormal verifica-se que, apesar da inconsistência teórica, quando o efeito aleatório não é mal especificado, o método empregado em Hamada (2005) fornece uma boa aproximação da distribuição preditiva *a posteriori* dos tempos de falha para unidades futuras.

Fato interessante ainda neste Capítulo é que Robinson e Crowder (2000) e a proposta deste texto sempre aproximaram muito bem a distribuição amostrada a partir da distribuição real quando assumidas distribuições *a priori* Weibull e Lognormal pouco informativas para a distribuição dos efeitos aleatórios. Outra vantagem da proposta e de Robinson e Crowder (2000) é que formas funcionais mais complexas de degradação não dificultam a utilização dessas duas abordagens. Ou seja, para estes casos dos dados gerados, são completamente livres de má especificação (com forte evidência já que conseguiram captar inclusive bimodalidade). Dessa forma, ambos os métodos podem ser utilizados para validação da metodologia de Hamada (2005) em casos práticos, dado que sempre aproximaram a distribuição gerada dos tempos de falha. A partir daí, pode-se utilizar a proposta deste texto com inclusão de uma nova unidade na verossimilhança,

que por sua vez apresenta resultados extremamente parecidos com os de Hamada (2005), para realizar predições de degradação para uma unidade futura.

No Capítulo 5 foram revisitadas as situações práticas dos emissores de laser e das rodas de trem. Quanto aos emissores de laser, verificou-se que a abordagem de Hamada (2005) aproximava bem a distribuição dos tempos de falha, o que inclusive tornou possível realizar predições de degradação para a unidade futura através da proposta desta dissertação. Em relação aos dados das rodas de trem, observou-se que a distribuição Weibull, para o caso do uso da metodologia utilizada por Hamada (2005), era a mais adequada em descrever os tempos de falha, e conseqüentemente os efeitos aleatórios. Também foram realizadas predições de degradação para uma unidade não observada.

Primeiramente, é importante ressaltar-se que o método proposto de inclusão da nova unidade na verossimilhança também pode ser abordado segundo o método de Robinson e Crowder (2000). Segundo, as análises realizadas através de Robinson e Crowder (2000) e das propostas desta dissertação são mais informativas do ponto de vista prático, pois possibilitam realização de inferência para os perfis individuais e para perfis futuros, inclusive predições para ambos se sob condições de correta especificação. Do ponto de vista de manutenção preventiva, preditiva, e determinação de garantia, a quantidade de informação obtida com a análise é muito maior e mais fidedigna à verdadeira distribuição dos tempos de falha.

6.1 Sugestões para Pesquisas Futuras

Para estudos posteriores seria interessante avaliar, através de simulações, se Robinson e Crowder (2000) e a proposta deste texto conseguem captar de fato toda e qualquer forma de distribuição de tempos de falha em modelos de degradação (as situações mais atípicas). Outro questionamento que se faz é se essa propriedade das duas abordagens

depende do fato de as distribuições *a priori* dos efeitos aleatórios serem especificadas segundo as distribuições Weibull ou Lognormal, seria interessante avaliar outros tipos de distribuições *a priori* não informativas.

Referências Bibliográficas

- Agresti, A., Caffo, B., e Strickland-Ohman, P. (2004). Examples in which misspecification of random effects distribution reduces efficiency, and possible remedies. *Computational Statistics & Data Analysis*, 47:639–653.
- Alonso, A. e Molenberghs, G. (2008). Evaluating time to cancer recurrence as a surrogate marker for survival from an information theory perspective. *Statistical Methods in Medical Research*, 17:497–504.
- Bernardo, J. M. e Smith, A. F. M. (1994). *Bayesian Theory*. John Wiley & Sons.
- Box, G. E. P. e Cox, D. R. (1964). An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 26(2):211–252.
- Casella, G. e George, E. (1992). Explaining the gibbs sampler. *The American Statistician*, 46(3):167–174.
- Chiao, C. e Hamada, M. (1996). Using degradation data from an experiment to achieve robust reliability for light emitting diodes. *Quality And Reliability Engineering International*, 12:89–94.
- Chiao, C. e Hamada, M. (2000). Experiments with degradation data for improving reliability and for achieving robust reliability. *Quality And Reliability Engineering International*, 17:333–344.

- Chib, S. e Greenberg, E. (1995). Understanding the metropolis-hastings algorithm. *The American Statistician*, 49(4):327–335.
- Crk, V. (2000). Reliability assessment from degradation data. In *Reliability and Maintainability Symposium, 2000. Proceedings Annual*, pages 155–161.
- Doksum, K. (1991). Degradation rate models for failure time and survival data. *CWI Quarterly*, 4:195–201.
- Efron, B. (1985). Bootstrap confidence intervals for a class of parametric problems. *Biometrika*, 72(1):45–58.
- Fitzmaurice, G. M., Laird, N. M., e Ware, J. H. (2004). *Applied Longitudinal Analysis*. New York:Wiley.
- Freitas, M., Toledo, M., Colosimo, E., e Pires, M. (2009). Using degradation data to assess reliability: A case study on train wheel degradation. *Quality and Reliability Engineering International*, 25:607–629.
- Freitas, M. A., Colosimo, E. A., Santos, T. R. d., e Pires, M. C. (2010). Reliability assessment using degradation models: bayesian and classical approaches. *Pesquisa Operacional*, 30:194 – 219.
- Gamerman, D. e Lopes, H. (2006). *Markov Chain Monte Carlo*. Texts in Statistical Science. Chapman & Hall, 2 edition.
- Gelfand, A. E. e Smith, A. F. M. (1990). Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association*, 85:398–409.
- Gelman, A., Bois, F., e Jiang, J. (1996). Physiological pharmacokinetic analysis using population modeling and informative prior distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 91:1400–1412.

- Geman, S. e Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6:721–741.
- Gertsbackh, I. e Kordonskiy, K. (1969). *Models of Failure*. Springer: New York.
- Hamada, M. (2005). Using degradation data to assess reliability. *Quality Engineering*, 17:615–620.
- Hudak, S. J., Saxena, A., Bucci, R. J., e Malcolm, R. (1978). Development of standard methods of testing and analyzing fatigue crack growth rate data. Technical report afml-tr-78-40, Westinghouse R & D Center, Westinghouse Electric Corporation, Pittsburgh, PA.
- Jiang, M. e Zhang, Y. (2002). Dynamic modeling of degradation data. In *Reliability and Maintainability Symposium, 2002. Proceedings. Annual*, pages 607 –611.
- Lee, E. e Nelder, J. (1996). Hierarchical generalized linear models (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 58:619–678.
- Lindstrom, M. J. e Bates, D. M. (1990). Nonlinear mixed effects models for repeated measures data. *Biometrics*, 46(3):673–687.
- Litière, S., Alonso, S., e Molenberghs, G. (2008). The impact of a misspecified random-effects distribution on the estimation and the performance of inferential procedures in generalized linear mixed models. *Statistics in Medicine*, 27:3125–3144.
- Liu, L. e Yu, Z. (2008). A likelihood reformulation method in non-normal random effects models. *Statistics in Medicine*, 27:3105–3124.
- Lu, C. e Meeker, W. (1993). Using degradation measurements to estimate a time-to-failure distribution. . *Technometrics*, 35:161–174.

- Lu, C., Meeker, W., e Escobar, L. (1996). Using degradation measurements to estimate a time-to-failure distribution. *Statistica Sinica*, 6:531–546.
- Lu, J., Park, J., e Yang, Q. (1997). Statistical inference of a time-to-failure distribution derived from linear degradation data. *Technometrics*, 39(4):391–400.
- Meeker, W. e Escobar, L. A. (1998). *Statistical Methods for Reliability Data*. Wiley Series in Probability and Statistics: New York, 1 edition.
- Nelson, K. P., Lipsitz, S. R., Fitzmaurice, G. M., Ibrahim, J., Parzen, M., e Strawderman, R. (2006). Use of the probability integral transformation to fit nonlinear mixed-effects models with nonnormal random effects. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 15(1):39–57.
- Nelson, W. (1981). Analysis of performance-degradation data from accelerated tests. *Reliability, IEEE Transactions on*, R-30(2):149–155.
- Nelson, W. (1990). *Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans and Data Analyses*. John Wiley: New York.
- Oliveira, V. R. B. e Colosimo, E. A. (2004). Comparison of methods to estimate the time-to-failure distribution in degradation tests. *Quality and Reliability Engineering International*, 20:363–373.
- Pinheiro, J. e Bates, D. (1995). Approximations to the log-likelihood function in the nonlinear mixed-effects model. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 1(4):12–35.
- Pinheiro, J. e Bates, D. (2000). *Mixed-Effects Models in S and S-PLUS*. Statistics and Computing Series, Springer-Verlag, New York.
- Pinheiro, J., Bates, D., DebRoy, S., Sarkar, D., e the R Core team (2008). *nlme: Linear and Nonlinear Mixed Effects Models*. R package version 3.1-89.

- Pinheiro, J., Liu, C., e Wu, Y. (2001). Efficient algorithms for robust estimation in linear mixed-effects models using the multivariate t distribution. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 10:249–276.
- R Development Core Team (2005). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria.
- Robinson, M. e Crowder, M. (2000). Bayesian methods for a growth-curve degradation model with repeated measures. *Lifetime Data Analysis*, 6:357–374.
- Sobczyk, K. e Spencer, B. (1992). *Random Fatigue: From Data to Theory*. Academic Press: New York.
- Song, P., Fan, Y., e Kalbfleisch, J. (2005). Maximization by parts in likelihood inference (with discussion). *Journal of the American Statistical Association*, 100:1145–1167.
- Spiegelhalter, D., Thomas, A., e Best, N. (2000). Winbugs version 1.4 user manual.
- Su, C., Lu, J., Chen, D., e Hughes-Oliver, J. (1999). A random coefficient degradation model with random sample size. *Lifetime Data Analysis*, 5:173–183.
- Tang, L. C. e Chang, D. S. (1995). Reliability prediction using nondestructive accelerated-degradation data: case study on power supplies. *IEEE Transactions on Reliability*, 44(5148439):562 – 566.
- Toledo, M. L. G. (2007). Ensaios de degradação: estudo comparativo de métodos de análise de dados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Tseng, S., Hamada, M., e Chiao, C. (1995). Using degradation data from a factorial experiment to improve fluorescent lamp reliability. *Journal of Quality Technology*, 27:363–369.

- Verbeke, G. e Lesaffre, E. (1997). The effect of misspecifying the random-effects distribution in linear mixed effects distribution in linear mixed models for longitudinal data. *Computational Statistics & Data Analysis*, 23:541–556.
- Wakefield, J. (1996). The bayesian analysis of population pharmacokinetic models. *Journal of the American Statistical Association*, 91:62–75.
- Wakefield, J. C., Smith, A. F. M., Racine-Poon, A., e Gelfand, A. E. (1994). Bayesian analysis of linear and non-linear population models by using the gibbs sampler. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 43(1):201–221.
- Whitmore, G. e Schenkelberg, F. (1997). Modelling accelerated degradation data using wiener diffusion with a time scale transformation. *Lifetime Data Analysis*, 3:27–45. 10.1023/A:1009664101413.
- Wu, S. e Shao, J. (1999). Reliability anaysis using the least squares method in nonlinear mixed effects degradation models. *Statistica Sinica*, 9:855–877.
- Wu, S. e Shao, J. (2000). Estimation of time-to-failure distribution derived from a degradation model using fuzzy clustering. *Quality and Reliability Engineering International*, 16:261267.
- Yacout, A. M., Salvatores, S., e Orechwa, Y. (1996). Degradation analysis estimates of the time-to-failure distribution of irradiated fuel elements. *Nuclear Technology*, 113:177–189.

Anexo A

ROTINA NO R - Caso 1:

Distribuição do Tempo até a Falha

$T \sim$ Bimodal - Mistura de Duas

Normais

```
#SIMULAÇÃO DOS DADOS DE DEGRADAÇÃO - T BIMODAL#  
nperfis<-20 #número de perfis de degradação a serem gerados  
ntotal<-nperfis*17 #número total de observações de degradação  
# gerando os valores de tempos de falha estimados Mistura 0,5*N(3000,30) e  
0,5*N(7000,30)  
M1<-3000 #média da primeira amostra da distribuição normal para mistura  
DP1<-30 #desvio padrão da primeira amostra da distribuição normal para mistura  
M2<-7000 #média da segunda amostra da distribuição normal para mistura  
DP2<-30 #desvio padrão da primeira amostra da distribuição normal para mistura
```

```
set.seed(214) #fixando a semente para replicação dos perfis
ptfg1<-rnorm(nperfis/2,M1,DP1) #gerando os tempos de falha com peso = 0,5 para
a primeira normal
set.seed(214) #fixando a semente para replicação dos perfis
ptfg2<-rnorm(nperfis/2,M2,DP2) #gerando os tempos de falha com peso = 0,5 para
a segunda normal
ptfg<-c(ptfg1,ptfg2) #unindo os tempos de falha gerados
densidadeg<-density(ptfg) #cálculo da densidade dos tempos de falha
plot(densidadeg) #visualizando a fdp dos tempos de falha gerados
horas<-seq(0,15000,1)
# encontrando os coeficientes da regressão
df<-10 #estabelecendo um limiar crítico de degradação
coef<-ptfg/df #calculando os efeitos aleatórios associados a cada perfil de degradação
coef
#apresentando o gráfico que demonstra que os efeitos aleatórios também possuem
distribuição bimodal
windows()
densidadecoef<-density(coef)
plot(densidadecoef,main="Efeitos aleatórios - T Bimodal",
ylab="Probabilidade",xlab="Valor observado para o efeito aleatório")
)
# simulando os tempos observados com erro N(0,0.2063)
tempos<-seq(0,4000,250)
deg<-matrix(0,17,nperfis)
for (j in 1:nperfis)
for (i in 1:17)
set.seed(i+j)
```

```
deg[i,j]<-tempos[i]/coef[j]+rnorm(1,0,0.2063)
# organizando os dados em uma matriz d para análise
for (j in 1:nperfis)
deg[1,j]<-0
deg
Tempo<-rep(tempos,nperfis)
Unidade<-vector()
Desgaste<-vector()
k<-0
for (i in 1:nperfis)
for (j in 1:17)
Unidade[j+k]<-i
Desgaste[j+k]<-deg[j,i]
k<-k+17
unit
Desgaste
d<-cbind(Unidade,Tempo,Desgaste)
d<-as.data.frame(d)
d
# Plotando os perfis de degradação
windows()
lim=range(d$Tempo,d$Desgaste)
plot(d$Tempo,d$Desgaste,type="p",xlab="Tempo", ylab="Degradação")
for (i in 1:nperfis)
a<-i*17-16
b<-i*17
lines(d$Tempo[1:17],d$Desgaste[a:b])
```

```
abline(h=df)
legend(locator(1), "Df=10", bty="n")
title("Perfis de Degradação - Simulado")
#SUPONHA NÃO CONHECERMOS A REALIDADE, AFIRMAREMOS QUE A
DISTRIBUIÇÃO DOS EFEITOS ALEATÓRIOS É WEIBULL.#
#chamando os pacotes que realizam a comunicação do R com o WinBUGS
#packages("R2WinBUGS")
library("R2WinBUGS")
require(R2WinBUGS)
require(BRugs)
#carregando o modelo escrito na sintaxe do WinBUGS
model.file <- system.file(package = "R2WinBUGS", "model",
"WeibullModel_DISS.txt")
file.show(model.file)
#Preparação dos dados para o WinBugs
data <- list( n1=ntotal, n2=nperfis,
y=d$Desgaste,
hours=d$Tempo,
units=d$Unidade)
ibetas<-rep(500,nperfis)
#Atribuindo os valores iniciais aos parâmetros
inits <- function()
list(delta=6,lambda=0.001,tau=0.1,beta=ibetas)
#Determinação dos parâmetros a serem monitorados
parameters <- c("delta", "lambda", "sigma", "beta")
semente=1000 #fixa a semente da cadeia
#obtenção da distribuição a posteriori dos parâmetros do modelo
```

```
weib.sim <- bugs(data, inits, parameters, model.file,
n.chains = 1, n.iter = 10001000,n.burnin=1000,n.thin=1000,codaPkg=FALSE, de-
bug = FALSE, #resultado da dissertação
# n.chains = 1, n.iter = 11000, n.burnin=1000, n.thin=1,codaPkg=FALSE, debug
= FALSE, #descomente para um resultado rápido (aviso:autocorrelação)
bugs.directory = "C:/Program Files/WinBUGS14", bugs.seed=semente,
working.directory = "C:/CAMINHO", clearWD = FALSE)
#codaPkg=TRUE para obter os valores dos parâmetros
print(weib.sim)
#ANÁLISE HAMADA#
#função para calcular a função distribuição acumulada preditiva à posteriori dos
tempos de falha com efeito aleatório weibull
F_Ham<- function (t,delta,lambda,df)
d_F_t_Hamada<-vector()
F_Hamada<-vector()
for (i in 1:length(t))
d_F_t_Hamada<-1-exp(-(lambda/(df**delta))*t[i]**delta)
F_Hamada[i]<-mean(d_F_t_Hamada)
F_Hamada
#distribuição preditiva a posteriori dos parâmetros de forma e escala, respectiva-
mente
delta<-weib.sim$sims.matrix[,1]
lambda<-weib.sim$sims.matrix[,2]
#tempos nos quais será avaliada a função distribuição acumulada preditiva à pos-
teriori dos tempos de falha
horas<-seq(0,15000,1)
#obtenção da função distribuição acumulada preditiva à posteriori dos tempos de
```

falha

```
F_Hamada<-F_Ham(horas,delta,lambda,df)
#PROPOSTA#
#armazenando as amostras a posteriori dos efeitos aleatórios e variância do erro
para facilitar a manipulação
beta<-weib.sim$sims.matrix[,1:nperfis+3]
sigma<-weib.sim$sims.matrix[,3]
#amostra da distribuição preditiva a posteriori para os tempos de falha baseia-se
na relação que o modelo estabelece entre os parâmetros e os tempos de falha
tf_dados<-df*beta
#rode esta parte para verificar que o modelo estimou corretamente a distribuição
dos efeitos aleatórios gerados
for (i in 1:nperfis)
windows()
par(mfrow=c(1,2))
hist(beta[,i],main=bquote(beta[.(i)]),
ylab="Frequência",
xlab=expression(paste(beta, ",tilde(y))))
abline(v=coef[i])
legend("topleft", paste(round(coef[i],2)), bty="n")
plot(density(beta[,i]),main=bquote(beta[.(i)]),
ylab=expression(paste(f[beta/tilde(Y)],"(",beta, ",tilde(y),")")),
xlab=expression(paste(beta, ",tilde(y))))
)
abline(v=coef[i])
legend("topleft", paste(round(coef[i],2)), bty="n")
```

#rode esta parte para verificar que o modelo estimou corretamente a distribuição dos tempos de falha gerados

```

for (i in 1:nperfis)
  windows()
  par(mfrow=c(1,2))
  hist(tf_dados[,i],main=bquote(t[.(i)]),
  ylab="Frequência",xlab=expression(paste(t, ",tilde(y))))
  abline(v=ptfg[i])
  legend("topleft", paste(round(ptfg[i],2)), bty="n")
  plot(density(tf_dados[,i]),main=bquote(t[.(i)]),
  ylab=expression(paste(f[T/tilde(Y)],"(",t, ",tilde(y),")")),
  xlab=expression(paste(t, ",tilde(y))))
  abline(v=ptfg[i])
  legend("topleft", paste(round(ptfg[i],2)), bty="n")
#MÉTODO ROBINSON E CROWDER#
horas<-seq(0,15000,1) #seqüência de valores de horas para cálculo de F(t)
ttam<-length(horas) #tamanho da seqüência de horas
Ft2<-matrix(0,ttam,nperfis) #matriz onde serão armazenados as distribuições acumuladas de tempo de falha para cada unidade
F<-vector() #vetor auxiliar para cálculo de F(t|theta,dados)
z<-vector() #vetor que irá receber a padronização para a distribuição Normal(0,1)
#obtenção da função distribuição acumulada preditiva à posteriori dos tempos de falha
for (i in 1:nperfis)
  for (k in 1:ttam)
    z<--(df-horas[k]/beta[,i])/sigma
    F<-1-pnorm(z)

```



```
Ft2[k,i]<-mean(F)
FRC<-vector()
aux<-t(Ft2)
for (i in 1:ttam)
FRC[i]<-mean(aux[1:nperfis,i])
#CONFRONTO DAS ACUMULADAS DE T#
perfis<-20000 #número de perfis a serem gerados para aproximar a distribuição real
gerando os valores de tempos de falha
N(M1,DP1) e N(M2,DP2)
M1<-3000
DP1<-30
M2<-7000
DP2<-30
set.seed(214) #fixando semente para repetir os resultados
ptf1<-rnorm(perfis/2,M1,DP1) #peso de 0,5 para a amostra ter vindo dessa dis-
tribuição
set.seed(214) #fixando semente para repetir os resultados
ptf2<-rnorm(perfis/2,M2,DP2) #peso de 0,5 para a amostra ter vindo dessa dis-
tribuição
real<-c(ptf1,ptf2) #amostra suficientemente grande para aproximar a distribuição
real
#Plotando a função acumulada F(t): REAL E GERADO X HAMADA
windows()
plot(horas,F_Hamada,type="n",xlab="Tempo",
ylab="Probabilidade Acumulada",
ylim=c(0,1),xlim=c(0,12000),main="Sabe-se T Bimodal")
F_real<-ecdf(real)
```

```

F_real<-sort(F_real(real))
temp<-sort(real)
lines(temp,F_real, lty="dotted",lwd=1, col=c("black"))
legend(c(expression(F[T/tilde(theta)](t/tilde(theta))[Real])),x=5000,y=0+9.3/20,
bty="n",lty="dotted",col="black",lwd=1,cex=0.8)
F_g<-ecdf(ptfg)
lines(F_g, verticals= TRUE, do.points = FALSE, lty="solid",lwd=1,
col.hor='black', col.vert='black')
legend(c(expression(F[T](t)[Gerado])),x=5000,y=0+8/20,
bty="n",lty="solid",col="black",lwd=1,cex=0.8)
lines(horas,F_Hamada,type="l",lty="longdash",col=c("black"),lwd=3)
legend(c(expression(F[T/tilde(Y)](t/tilde(y))[Hamada])),x=5000,y=7/20,
bty="n",lty="longdash",col=c("black"),lwd=3,cex=0.8)
#Plotando a função acumulada F(t): REAL E GERADO X PROPOSTA
windows()
plot(horas,F_Hamada,type="n",xlab="Tempo",
ylab="Probabilidade Acumulada",
ylim=c(0,1),xlim=c(0,12000),main="Sabe-se T Bimodal")
lines(temp,F_real, lty="dotted",lwd=1, col=c("black"))
legend(c(expression(F[T/tilde(theta)](t/tilde(theta))[Real])),x=5000,y=0+9.3/20,
bty="n",lty="dotted",col="black",lwd=1,cex=0.8)
F_g<-ecdf(ptfg)
lines(F_g, verticals= TRUE, do.points = FALSE, lty="solid",lwd=1,
col.hor='black', col.vert='black')
legend(c(expression(F[T](t)[Gerado])),x=5000,y=0+8/20,
bty="n",lty="solid",col="black",lwd=1,cex=0.8)
F_Proposta<-ecdf(tf_dados[,1:nperfis])

```

```

lines(F_Proposta, verticals= TRUE, do.points = FALSE, lty="solid",lwd=3,
col.hor='black', col.vert='black')

legend(c(expression(F[T/tilde(Y)](t/tilde(y))[Prop.N.Unidade])),x=5000,y=0+7/20,
bty="n",lty="solid",col="black",lwd=3,cex=0.8)

#Plotando a função acumulada F(t) REAL E GERADO X ROBINSON E CROW-
DER

windows()

plot(horas,F_Hamada,type="n",xlab="Tempo",
ylab="Probabilidade Acumulada",
ylim=c(0,1),xlim=c(0,12000),main="Sabe-se T Bimodal")

lines(temp,F_real, lty="dotted",lwd=1, col=c("black"))

legend(c(expression(F[T/tilde(theta)](t/tilde(theta))[Real])),x=5000,y=0+9.3/20,
bty="n",lty="dotted",col="black",lwd=1,cex=0.8)

F_g<-ecdf(ptfg)

lines(F_g, verticals= TRUE, do.points = FALSE, lty="solid",lwd=1,
col.hor='black', col.vert='black')

legend(c(expression(F[T](t)[Gerado])),x=5000,y=0+8/20,
bty="n",lty="solid",col="black",lwd=1,cex=0.8)

lines(horas,FRC,type="l",lty="dashed",col=c("black"),lwd=3)

legend(c(expression(F[T/tilde(Y)](t/tilde(y))[N.UnidadeRC])),x=5000,y=0+7/20,
bty="n",lty="dashed",col=c("black"),lwd=3,cex=0.8)

#SUPONHA NÃO CONHECERMOS A REALIDADE, AFIRMAREMOS QUE A
DISTRIBUIÇÃO DOS EFEITOS ALEATÓRIOS É LOGNORMAL.#

#chamando os pacotes que realizam a comunicação do R com o WinBUGS
packages("R2WinBUGS")

library("R2WinBUGS")

require(R2WinBUGS)

```

```
require(BRugs)

#carregando o modelo escrito na sintaxe do WinBUGS
model.file <- system.file(package = "R2WinBUGS", "model",
"LNModel_DISS2.txt")
file.show(model.file)

#Preparação dos dados para o WinBugs
data <- list( n1=ntotal, n2=nperfis,
y=d$Desgaste,
hours=d$Tempo,
units=d$Unidade)
ibetas<-rep(500,nperfis)

#Atribuindo os valores iniciais aos parâmetros
inits <- function()
list(muL=6,tauL=0.1,tau=0.1,beta=ibetas)

#Determinação dos parâmetros a serem monitorados
parameters <- c("muL", "sigmaL", "sigma","beta")
semente=1000 #fixa a semente da cadeia
LN.sim <- bugs(data, inits, parameters, model.file,
n.chains = 1, n.iter = 10001000,n.burnin=1000,n.thin=1000,codaPkg=FALSE, de-
bug = FALSE, #resultado da dissertação
# n.chains = 1, n.iter = 11000, n.burnin=1000, n.thin=1,codaPkg=FALSE, debug
= FALSE, #descomente para um resultado rápido (aviso:autocorrelação)
bugs.directory = "C:/Program Files/WinBUGS14", bugs.seed=semente,
working.directory = "C:/CAMINHO", clearWD = FALSE)
#codaPkg=TRUE para obter os valores dos parâmetros
print(LN.sim)

#ANÁLISE HAMADA#
```

#função para calcular a função distribuição acumulada preditiva à posteriori dos tempos de falha com efeito aleatório weibull

```
F_HamL<- function (t,muL,sigmaL,df)
d_F_t_Hamada<-vector()
F_Hamada<-vector()
for (i in 1:length(t))
d_F_t_Hamada<-plnorm(t[i],(log(df)+muL),sigmaL)
F_Hamada[i]<-mean(d_F_t_Hamada)
F_Hamada
```

#tempos nos quais será avaliada a função distribuição acumulada preditiva à posteriori dos tempos de falha

```
muL<-LN.sim$sims.matrix[,1]
sigmaL<-LN.sim$sims.matrix[,2]
horas<-seq(0,15000,1)
```

#obtenção da função distribuição acumulada preditiva à posteriori dos tempos de falha

```
F_HamadaL<-F_HamL(horas,muL,sigmaL,df)
```

```
#PROPOSTA#
```

#armazenando as amostras a posteriori dos efeitos aleatórios para facilitar a manipulação

```
betaL<-LN.sim$sims.matrix[,1:nperfis+3]
sigmaL<-LN.sim$sims.matrix[,3]
```

#amostra da distribuição preditiva a posteriori para os tempos de falha baseia-se na relação que o modelo estabelece entre os parâmetros e os tempos de falha

```
tf_dadosL<-df*betaL
```

#rode esta parte para verificar que o modelo estimou corretamente a distribuição dos efeitos aleatórios gerados

```

for (i in 1:nperfis)
windows()
par(mfrow=c(1,2))
hist(betaL[,i],main=bquote(beta[.(i)]),
ylab="Frequência",xlab=expression(paste(beta, ",tilde(y))))
abline(v=coef[i])
legend("topleft", paste(round(coef[i],2)), bty="n")
plot(density(betaL[,i],main=bquote(beta[.(i)]),
ylab=expression(paste(f[beta/tilde(Y)],"(",beta, ",tilde(y),")")),
xlab=expression(paste(beta, ",tilde(y)))
)
abline(v=coef[i])
legend("topleft", paste(round(coef[i],2)), bty="n")
#rode esta parte para verificar que o modelo estimou corretamente a distribuição
dos tempos de falha gerados
for (i in 1:nperfis)
windows()
par(mfrow=c(1,2))
hist(tf_dadosL[,i],main=bquote(t[.(i)]),
ylab="Frequência",xlab=expression(paste(t, ",tilde(y))))
abline(v=ptfg[i])
legend("topleft", paste(round(ptfg[i],2)), bty="n")
plot(density(tf_dadosL[,i],main=bquote(t[.(i)]),
ylab=expression(paste(f[T/tilde(Y)],"(",t, ",tilde(y),")")),
xlab=expression(paste(t, ",tilde(y)))
abline(v=ptfg[i])
legend("topleft", paste(round(ptfg[i],2)), bty="n")

```

```
#MÉTODO ROBINSON E CROWDER#
horas<-seq(0,15000,1) #seqüência de valores de horas para cálculo de F(t)
ttam<-length(horas) #tamanho da seqüência de horas
Ft2L<-matrix(0,ttam,nperfis) #matriz onde serão armazenados as distribuições
acumuladas de tempo de falha para cada unidade
FL<-vector() #vetor auxiliar para cálculo de F(t|theta,dados)
zL<-vector() #vetor que irá receber a padronização para a distribuição Normal(0,1)
#obtenção da função distribuição acumulada preditiva à posteriori dos tempos de
falha
for (i in 1:nperfis)
for (k in 1:ttam)
zL<-(df-horas[k]/betaL[i])/sigmaL
FL<-1-pnorm(zL)
Ft2L[k,i]<-mean(FL)
FRCL<-vector()
auxL<-t(Ft2L)
for (i in 1:ttam)
FRCL[i]<-mean(auxL[1:nperfis,i])
#CONFRONTO DAS ACUMULADAS DE T#
nperfis<-20000 #número de perfis a serem gerados para aproximar a distribuição real
# gerando os valores de tempos de falha N(M1,DP1) e N(M2,DP2)
M1<-3000
DP1<-30
M2<-7000
DP2<-30
set.seed(214) #fixando semente para repetir os resultados
```

```

    ptf1<-rnorm(perfis/2,M1,DP1) #peso de 0,5 para a amostra ter vindo dessa dis-
tribuição

    set.seed(214) #fixando semente para repetir os resultados

    ptf2<-rnorm(perfis/2,M2,DP2) #peso de 0,5 para a amostra ter vindo dessa dis-
tribuição

    real<-c(ptf1,ptf2) #amostra suficientemente grande para aproximar a distribuição
real

#Plotando a função acumulada F(t): REAL E GERADO X HAMADA
windows()
plot(horas,F_HamadaL,type="n",xlab="Tempo",
ylab="Probabilidade Acumulada",
ylim=c(0,1),xlim=c(0,15000),main="Sabe-se T Bimodal")
F_real<-ecdf(real)
F_real<-sort(F_real(real))
temp<-sort(real)
lines(temp,F_real, lty="dotted",lwd=1, col=c("black"))
legend(c(expression(F[T/tilde(theta)](t/tilde(theta))[Real])),x=6000,y=0+9.3/20,
bty="n",lty="dotted",col="black",lwd=1,cex=0.8)
F_g<-ecdf(ptfg)
lines(F_g, verticals= TRUE, do.points = FALSE, lty="solid",lwd=1,
col.hor='black', col.vert='black')
legend(c(expression(F[T](t)[Gerado])),x=6000,y=0+8/20,
bty="n",lty="solid",col="black",lwd=1,cex=0.8)
lines(horas,F_HamadaL,type="l",lty="longdash",col=c("black"),lwd=3)
legend(c(expression(F[T/tilde(Y)](t/tilde(y))[Hamada])),x=6000,y=7/20,
bty="n",lty="longdash",col=c("black"),lwd=3,cex=0.8)

#Plotando a função acumulada F(t): REAL E GERADO X PROPOSTA

```



```
windows()
plot(horas,F_HamadaL,type="n",xlab="Tempo",
ylab="Probabilidade Acumulada",
ylim=c(0,1),xlim=c(0,15000),main="Sabe-se T Bimodal")
F_real<-ecdf(real)
F_real<-sort(F_real(real))
temp<-sort(real)
lines(temp,F_real, lty="dotted",lwd=1, col=c("black"))
legend(c(expression(F[T/tilde(theta)](t/tilde(theta))[Real])),x=6000,y=0+9.3/20,
bty="n",lty="dotted",col="black",lwd=1,cex=0.8)
F_g<-ecdf(ptfg)
lines(F_g, verticals= TRUE, do.points = FALSE, lty="solid",lwd=1,
col.hor='black', col.vert='black')
legend(c(expression(F[T](t)[Gerado])),x=6000,y=0+8/20,
bty="n",lty="solid",col="black",lwd=1,cex=0.8)
F_PropostaL<-ecdf(tf_dadosL[,1:nperfis])
lines(F_PropostaL, verticals= TRUE, do.points = FALSE, lty="solid",lwd=3,
col.hor='black', col.vert='black')
legend(c(expression(F[T/tilde(Y)](t/tilde(y))[Prop.N.Unidade])),x=6000,y=0+7/20,
bty="n",lty="solid",col="black",lwd=3,cex=0.8)
#Plotando a função acumulada F(t): REAL E GERADO X ROBINSON E CROW-
DER
windows()
plot(horas,F_HamadaL,type="n",xlab="Tempo",
ylab="Probabilidade Acumulada",
ylim=c(0,1),xlim=c(0,15000),main="Sabe-se T Bimodal")
F_real<-ecdf(real)
```

```
F_real<-sort(F_real(real))
temp<-sort(real)
lines(temp,F_real, lty="dotted",lwd=1, col=c("black"))
legend(c(expression(F[T/tilde(theta)](t/tilde(theta))[Real])),x=6000,y=0+9.3/20,
bty="n",lty="dotted",col="black",lwd=1,cex=0.8)
F_g<-ecdf(ptfg)
lines(F_g, verticals= TRUE, do.points = FALSE, lty="solid",lwd=1,
col.hor='black', col.vert='black')
legend(c(expression(F[T](t)[Gerado])),x=6000,y=0+8/20,
bty="n",lty="solid",col="black",lwd=1,cex=0.8)
lines(horas,FRCL,type="l",lty="dashed",col=c("black"),lwd=3)
legend(c(expression(F[T/tilde(Y)](t/tilde(y))[N.UnidadeRC])),x=6000,y=0+7/20,
bty="n",lty="dashed",col=c("black"),lwd=3,cex=0.8)
```

Anexo B

ROTINA NO R - Emissores de Laser Para Predições

```
setwd("C:/CAMINHO")
nperfis<-15 #número de perfis de degradação
ntotal<-nperfis*17 #leitura da base de dados das rodas de trem
d<-read.table('DesgLaser.txt',head=T)
horas<-seq(0,15000,1)
d
df=10 #estabelecendo um limiar crítico de degradação
# Plotando os perfis de degradação
windows()
lim=range(d$Tempo,d$Desgaste)
plot(d$Tempo,d$Desgaste,type="p",xlab="Tempo (horas)", ylab="Degradação %")
abline(h=df)
legend(locator(1), "Df=10", bty="n")
title("Perfis de Degradação - Observados e Estimados")
```

```
# Rodar apenas este para predição no tempo zero
ntotal<-ntotal+1
nperfis<-nperfis+1
d<-rbind(d,c(nperfis,0,0))
# Rodar esta parte em complemento à anterior para predições vários passos a frente
npredict<-17 #Determine a quantidade de passos a frente das predições
for (i in 1:npredict)
ntotal<-ntotal+1
d<-rbind(d,c(nperfis,i*250,NA)) # O WinBUGS realiza predições para observações
marcadas como NA

#chamando os pacotes que realizam a comunicação do R com o WinBUGS
#packages("R2WinBUGS")
library("R2WinBUGS")
require(R2WinBUGS)
require(BRugs)
model.file <- system.file(package = "R2WinBUGS", "model",
" WeibullModelDISSP.txt")
file.show(model.file)
#Preparação dos dados para o WinBugs
data <- list( n1=ntotal, n2=nperfis,
y=d$Desgaste,
hours=d$Tempo,
units=d$Unidade)
ibetas<-rep(500,nperfis)
#Atribuindo os valores iniciais aos parâmetros
inits <- function()
list(delta=6,lambda=0.001,tau=0.1,beta=ibetas)
```

```
#Determinação dos parâmetros a serem monitorados
parameters <- c("delta", "lambda", "sigma", "beta", "y.pred")
semente=1000
weib.sim <- bugs(data, inits, parameters, model.file,
# n.chains = 1, n.iter = 10001000,n.burnin=1000,n.thin=1000,codaPkg=FALSE,
debug = FALSE,
n.chains = 1, n.iter = 11000, n.burnin=1000, n.thin=1,codaPkg=FALSE, debug =
FALSE,
bugs.directory = "C:/Program Files/WinBUGS14", bugs.seed=semente,
working.directory = "C:/CAMINHO", clearWD = FALSE)
print(weib.sim)
#armazenando os resultados preditos para todas as unidades, inclusive para a in-
serida na verossimilhança (futura)
ypred<-head(weib.sim$sims.matrix[(4+nperfis):(4+nperfis+ntotal)])
y.pred<-vector()
y.pred.025<-vector()
y.pred.975<-vector()
#calculando estimativa média e bandas de credibilidade da degradação no perfil
futuro
for (i in 1:ntotal)
y.pred[i]<-mean(ypred[,i])
y.pred.025[i]<-quantile(ypred[,i],c(.025))
y.pred.975[i]<-quantile(ypred[,i],c(.975))
nperfis<-15
ntotal<-nperfis*17
#insere no gráfico as medidas de degradação preditas para os perfis sob teste
for (i in 1:nperfis)
```

```
a<-i*17-16
b<-i*17
lines(d$Tempo[1:17],y.pred[a:b],lty=c("dashed"))
#insere no gráfico as medidas de degradação preditas para o perfil futuro
lines(d$Tempo[1:17],y.pred[((nperfis+1)*17-16):((nperfis+1)*17)],
lty=c("dashed"),lwd=4,col="black")
#insere a banda inferior de credibilidade para as medidas de degradação preditas
para o perfil futuro
lines(d$Tempo[1:17],y.pred.025[((nperfis+1)*17-16):((nperfis+1)*17)],
lty=1,lwd=4,col="black")
#insere a banda superior de credibilidade para as medidas de degradação preditas
para o perfil futuro
lines(d$Tempo[1:17],y.pred.975[((nperfis+1)*17-16):((nperfis+1)*17)],
lty=1,lwd=4,col="black")
```

Anexo C

MODELO PARA WINBUGS: WEIBULL

```
#Este modelo deve ser colocado na pasta
C:/Program Files/R/R-2.8.1/library/R2WinBUGS/model
MODEL;
#verossimilhança
for( i in 1 : n1 )
y[i] ~ dnorm(mu[i],tau)
mu[i]<-hours[i]/(beta[units[i]] )
#priors
for( i in 1 : n2 )
beta[i] ~ dweib(delta,lambda)
#(forma,escala)
#hiperpriors
delta ~ dgamma(0.01,0.01)
lambda ~ dgamma(0.01,0.01)
```

$\tau \sim \text{dgamma}(0.01, 0.01)$

$\sigma < -1/\sqrt{\tau}$

Anexo D

MODELO PARA WINBUGS: LOGNORMAL

```
#Este modelo deve ser colocado na pasta
C:/Program Files/R/R-2.8.1/library/R2WinBUGS/model
MODEL;
#verossimilhança
for( i in 1 : n1 )
y[i] ~ dnorm(mu[i],tau)
mu[i]<-hours[i]/(beta[units[i]] )
#pioris
for( i in 1 : n2 )
beta[i] ~ dlnorm(muL, tauL)
#(locação,escala)
#hiperprioris
muL ~ dnorm(0,0.01)
tauL ~ dgamma(0.01,0.01)
```

```
sigmaL<-1/sqrt(tauL)
```

```
tau ~ dgamma(0.01,0.01)
```

```
sigma<-1/sqrt(tau)
```