

Adriano Lana Cherchiglia

*Implementação Sistemática da  
Regularização Implícita para Diagramas de  
Feynman a Muitos Laços*

Belo Horizonte

2011

Adriano Lana Cherchiglia

*Implementação Sistemática da  
Regularização Implícita para Diagramas de  
Feynman a Muitos Laços*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Física do Instituto de Ciências Exatas da UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de MESTRE EM FÍSICA.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Área de concentração: Teoria Quântica de Campos

Belo Horizonte

2011

# *Agradecimentos*

A Deus, por tudo.

Aos meus pais, pela formação que me deram e que me fez chegar até aqui.

À Letícia, pelo apoio em todas as horas.

À Laís, por toda a felicidade que me tem proporcionado.

Ao Alexandre e Longuinhos, pela amizade e companheirismo.

Ao Marcos, por toda a sua dedicação e amizade ao orientar-me no desenvolvimento desse trabalho.

À Carol, por tudo que me tem ensinado.

Aos amigos do grupo de TQC - Helvécio, Jean, Júnior, Gustavo e Gláucia - por tudo que tenho aprendido com eles.

Aos amigos da Física, pelos momentos de aprendizado e descontração.

Aos amigos do EJC, pelo companheirismo na fé.

Aos meus tios Luiz e Mariângela, pelo apoio e suporte financeiro dado à minha formação.

Aos meus tios, tias, primos e especialmente às minhas avós, pela convivência.

Aos funcionários do Departamento de Física, pela presteza na resolução dos mais diversos problemas.

À equipe da Biblioteca, pela cordialidade e pela ajuda na formatação desse trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

# *Resumo*

A Regularização Implícita (RI) é um esquema de regularização consistente no espaço dos momentos no qual podemos calcular diagramas de Feynman de ordens arbitrárias. Nesse trabalho apresentaremos uma implementação sistemática do método que exhibe automaticamente os termos a serem subtraídos pela fórmula de recursão de Bogoliubov. Assim, atingimos dois objetivos: mostramos que a RI respeita unitariedade, localidade e invariância de Lorentz e mostramos também que o método é consistente uma vez que somos capazes de expressar as divergências de uma amplitude a muitos laços em termos de um conjunto bem definido de integrais divergentes básicas dependentes de um momento interno apenas, o quê é a essência da RI. Além disso, nós conjecturamos que a invariância no rótulo dos momentos internos, a qual está conectada com a simetria de calibre, é uma simetria fundamental de qualquer diagrama de Feynman oriundo de uma teoria de campos renormalizável.

Palavras-chave: Teoria Quântica de Campos, Renormalização, Quebra Radiativa de Simetria.

# *Abstract*

Implicit Regularization (IR) is a consistent framework in momentum space to perform Feynman diagram calculations to arbitrary loop order. In this work we present a systematic implementation of this method that automatically displays the terms to be subtracted by Bogoliubov's recursion formula. Therefore, we achieve a twofold objective: we show that the IR program respects unitarity, locality and Lorentz invariance and that such method is consistent since we are able to display the divergent content of a multi-loop amplitude in a well defined set of basic divergent integrals in one loop momentum only which is the essence of IR. Moreover, we conjecture that momentum routing invariance in the loops, which has been shown to be connected with gauge symmetry, is a fundamental symmetry of any Feynman diagram in a renormalizable quantum field theory.

Keywords: Quantum Field Theory, Renormalization, Radiative Symmetry Breaking.

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 6
<b>2</b>	<b>Grupo de Renormalização e Método BPHZ</b>	p. 10
2.1	Grupo de Renormalização . . . . .	p. 10
2.2	Método BPHZ . . . . .	p. 12
<b>3</b>	<b>As Regras da Regularização Implícita</b>	p. 17
<b>4</b>	<b>Implementação Sistemática da Fórmula de Recursão de Bogoliubov em RI</b>	p. 24
<b>5</b>	<b>Teorias Massivas e Funções do Grupo de Renormalização</b>	p. 61
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	p. 70
	<b>Referências</b>	p. 71

# 1 *Introdução*

Uma das perguntas fundamentais que guiou o ser humano ao longo do tempo é: de que as coisas são feitas? Várias pessoas (entre elas filósofos e cientistas) tentaram responder esse questionamento e uma ideia que surgiu é que todas as coisas seriam formadas pelos mesmos blocos fundamentais os quais receberam o nome de átomos pelos gregos. Desde então, vários modelos foram propostos com o intuito de se explicar o mundo que conhecemos através dessas entidades básicas. À medida que foram sendo descobertos, os átomos, por meio de suas propriedades, puderam ser catalogados e sistematizados em um conjunto: a tabela periódica. Entretanto, logo ficou claro que eles não poderiam ser as entidades básicas postuladas pelos gregos uma vez que eles pareciam ser formados por entidades ainda menores. Ao estabelecer a existência dos prótons dentro do núcleo atômico, Rutherford permitiu que o sonho reducionista ganhasse novo alento, uma vez que a matéria não precisaria ser descrita por todos os elementos que compõe a tabela periódica (mais de cem), mas sim por apenas três partículas elementares: os elétrons, prótons e nêutrons. Entretanto, essa visão durou pouco, pois logo novas partículas foram sendo descobertas (píons, káons, etc) e uma nova sistematização teve de ser construída (por exemplo, “the Eightfold Way” proposta por Murray Gell-Mann). Finalmente, descobriu-se que os bárions (grupo no qual incluímos o próton e o nêutron) e os mésons eram constituídos por partículas ainda menores, conhecidas hoje como quarks. Assim, pôde ser construído o modelo padrão conforme conhecemos hoje e que possui os léptons (família que inclui o elétron) e os quarks como os constituintes básicos da matéria. Argumenta-se que mesmo essas partículas não são fundamentais, sendo resultado das vibrações de cordas as quais seriam então as entidades elementares da natureza. Essa afirmação entretanto ainda necessita de uma comprovação experimental, o que pode vir a ser feito à medida que novos experimentos sejam realizados.

Todo o conhecimento adquirido que foi descrito acima só pode ser obtido porque, de um ponto de vista experimental, novos aceleradores e novas técnicas foram propostas o que permitiu uma investigação mais profunda da matéria. Já de um ponto de vista teórico,

os fenômenos que envolviam as partículas elementares só puderam ser bem entendidos porque foi possível a criação de uma teoria que abrangia consistentemente a mecânica quântica (essencial para a descrição de entidades microscópicas) e a relatividade especial (necessária quando a velocidade dos objetos envolvidos aproxima-se à velocidade da luz). Essa teoria ficou conhecida como Teoria Quântica de Campos e é ela a base teórica do modelo padrão. De um ponto de vista pragmático, ela permite que quantidades como seções de choque e taxas de decaimento sejam calculadas seguindo-se os seguintes passos:

1. Modelamos as interações e partículas que desejamos estudar por uma densidade de lagrangiana de um campo clássico (o qual representará as partículas) obedecendo algumas simetrias (em geral, queremos que ela seja invariante de Lorentz e, quando aplicável, invariante de calibre também),
2. Obtemos as regras de Feynman da teoria (através da quantização canônica ou da quantização via integral de caminho),
3. Construimos, ordem a ordem na constante de acoplamento da teoria em questão, os diagramas de Feynman pertinentes ao processo físico em estudo,
4. Calculamos os diagramas até a ordem desejada,
5. Inserimos os resultados na matriz de espalhamento e calculamos os observáveis físicos desejados.

Embora pareçam à primeira vista imediatos, os passos acima escondem algumas sutilezas. Primeiro, supomos que uma teoria de perturbação na constante de acoplamento pode ser realizada, ou seja, que essa constante é pequena de modo que diagramas de ordens mais altas possam ser desprezados. Esse é o caso para a Eletrodinâmica Quântica, por exemplo.<sup>1</sup>

Segundo, ao efetuarmos os cálculos descritos pelo passo 4 podemos nos deparar com integrais divergentes. Em princípio, o aparecimento de infinitos em Teoria Quântica de Campos poderia sinalizar uma inconsistência interna e, portanto, poderíamos ser levados a descartá-la como uma teoria física. Entretanto, tais divergências podem ser consistentemente tratadas através das técnicas de regularização e renormalização. A primeira

---

<sup>1</sup>Para a Cromodinâmica Quântica, apenas no regime de altas energias a constante de acoplamento é pequena o suficiente para permitir a aplicação da teoria de perturbação. Essa característica é conhecida como liberdade assintótica e sua descoberta pelos físicos David J. Gross, H. David Politzer e Frank Wilczek rendeu-lhes o Nobel de Física de 2004.



consiste em encontrarmos uma maneira de separar as divergências da integral (as quais podem ser de dois tipos: ultravioleta, que surge quando o momento interno vai para infinito, e infravermelha, que aparece quando o momento interno vai para zero) da parte finita da mesma. Já a segunda consiste em sermos capazes de absorver os infinitos nos parâmetros livres da teoria (tais como a massa e a constante de acoplamento, por exemplo). Aqui veremos algo interessante, pois essas divergências na verdade trazem em si informações físicas, uma vez que é através delas que podemos encontrar o comportamento dos parâmetros da teoria com a energia. Ou seja, a TQC possui um resultado surpreendente: constantes tais como a massa das partículas e a constante de acoplamento da teoria dependem da escala de energia em que estamos trabalhando e não são, de fato, constantes. Esses resultados são implementados através do grupo de renormalização e das funções definidas a partir desse grupo (faremos uma breve discussão a esse respeito no capítulo 2).

Como foi dito, existem diversas técnicas de regularização. A mais óbvia é a regularização via “cut-off”. Uma vez que as divergências no ultravioleta ocorrem quando o momento interno vai para infinito, basta introduzirmos um corte ( $\Lambda$ ) na integral. Com isso, podemos avaliá-la e separamos os termos que divergem quando tomamos o limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  dos que são independentes desse parâmetro (e que, portanto, correspondem à parte finita da integral). Esse método, embora tenha sucesso em teorias mais simples (teorias com campos escalares), não pode ser aplicado em teorias de calibre uma vez que ele quebra essa simetria. Como as partículas físicas que conhecemos são descritas por teorias de calibre, foi necessário desenvolver-se uma outra técnica que preservasse tal simetria. Ela foi batizada de Regularização Dimensional e consiste em alterar as dimensões do espaço-tempo  $D$  para  $D - 2\epsilon$ . Com isso, uma vez mais somos capazes de avaliar a integral e as divergências serão dadas como pólos em  $\epsilon$ . Essa técnica foi aplicada em inúmeros casos com grande sucesso. Entretanto, ela apresenta problemas quando lidamos com teorias sensíveis a modificações nas dimensões do espaço-tempo tais como teorias supersimétricas. Sendo assim, seria desejável que tivéssemos alguma técnica que preservasse tanto as dimensões da teoria em questão quanto as suas simetrias. Uma candidata é a Regularização Implícita que tem satisfatoriamente atendido a esses dois requisitos [1]-[16]. Embora ela tenha tido sucesso em todos esses exemplos, ainda necessitávamos de uma sistematização da mesma para gráficos de Feynman a  $n$  laços de modo a preservar unitariedade, localidade e invariância de Lorentz. Desenvolver tal sistematização é o objetivo principal desse trabalho o qual pôde ser alcançado explorando-se um outro aspecto sutil da TQC: o tratamento de diagramas de Feynman com dois laços ou mais. Nesse caso, temos que usar o método do BPHZ (implementado pela fórmula de recursão

de Bogoliubov) para identificar e subtrair as divergências da maneira correta, ou seja, respeitando unitariedade, localidade e invariância de Lorentz. Descreveremos esse método e sua aplicação no capítulo 2. Ou seja, nesse trabalho apresentamos uma sistematização da RI para gráficos de Feynman arbitrários que exhibe automaticamente os termos a serem subtraídos pela fórmula de recursão de Bogoliubov. Essa discussão será apresentada nos capítulos 4 e 5.

Um outro aspecto que trataremos aqui diz respeito aos termos de superfície, que são objetos inerentes à RI e que são os responsáveis pela quebra de simetria de todas as teorias nas quais o método foi aplicado. Portanto, definimos uma versão da RI dita “Constrained Implicit Regularization” (CIR) que consiste em colocar todos esses termos iguais a zero. Nesse trabalho, consideraremos uma teoria de campo escalar e mostraremos que, se os termos de superfície não forem colocados iguais a zero, eles contaminarão os coeficientes do grupo de renormalização. Assim, somos forçados a adotar CIR o que equivale a exigir invariância de rótulo nos momentos internos. Esse resultado leva-nos a conjecturar que a invariância de rótulo nos momentos internos é uma simetria fundamental de qualquer diagrama de Feynman.

## 2 *Grupo de Renormalização e Método BPHZ*

### 2.1 Grupo de Renormalização

Conforme dissemos no capítulo anterior, a TQC permite que cálculos teóricos para taxas de decaimento e seções de choque possam ser realizados e posteriormente confrontados com os dados experimentais. Para isso, basta obtermos os elementos da matriz de espalhamento  $S$  os quais dependem das funções de Green da teoria na qual estamos trabalhando (essas, por sua vez, provêm de uma expansão perturbativa e podem, no formalismo de Feynman, ser bem representadas por diagramas). Entretanto, como as funções de Green podem ser divergentes, temos que utilizar algum esquema de renormalização de modo a torná-las finitas. Em princípio, poder-se-ia pensar que para cada esquema escolhido teríamos um resultado diferente, o que seria desastroso. Mas o que se vê é que somos livres para usar qualquer esquema de renormalização que respeite as simetrias internas da teoria, uma vez que os resultados físicos são independentes dessa escolha. Matematicamente, implementamos essa ideia através do Grupo de Renormalização o qual relaciona as diversas teorias renormalizadas (onde cada uma é oriunda de um esquema de renormalização diferente) entre si.

Um aspecto interessante desse semi-grupo é que podemos obter uma equação válida para qualquer esquema de renormalização, dita Equação do Grupo de Renormalização. Ela se baseia no fato de que cada esquema introduz um parâmetro arbitrário, dito escala do grupo de renormalização, o qual contamina as funções de Green da teoria renormalizada. Como a função de Green nua  $\Gamma_o^{(n)}$  (ou seja, ainda não-renormalizada) não possui uma dependência com esse parâmetro (o qual será denominado  $\lambda$ ) temos:

$$\lambda \frac{d\Gamma_o^{(n)}}{d\lambda} = 0. \quad (2.1)$$

Ora, mas as funções de Green não-renormalizada e renormalizada podem ser relacio-

nadas por uma constante (que absorverá as divergências) da seguinte maneira:

$$\Gamma_o^{(n)}(\{p^2\}, \{g_o\}, \{m_o\}) = Z_\Gamma^{-1} \Gamma^{(n)}(\{p^2\}, \{g(\lambda)\}, \{m(\lambda)\}, \lambda). \quad (2.2)$$

Note que na equação acima inserimos explicitamente as dependências das funções de Green com os parâmetros da teoria. No caso, os momentos externos  $\{p^2\}$ , as constantes de acoplamento nuas  $\{g_o\}$  e renormalizadas  $\{g(\lambda)\}$  e as massas nuas  $\{m_o\}$  e renormalizadas  $\{m(\lambda)\}$ . Com isso, obtemos:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d\Gamma_o^{(n)}}{d\lambda} &= \lambda \frac{d}{d\lambda} [Z_\Gamma^{-1} \Gamma^{(n)}(\{p^2\}, \{g(\lambda)\}, \{m(\lambda)\}, \lambda)] = 0 \\ &= Z_\Gamma^{-1} \left[ \frac{\lambda}{Z_\Gamma^{-1}} \frac{dZ_\Gamma^{-1}}{d\lambda} + \lambda \frac{\partial g_i}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial g_i} + \lambda \frac{\partial m_j}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial m_j} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] \Gamma^{(n)} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Uma vez que  $Z_\Gamma^{-1} \neq 0$  e  $\frac{1}{Z_\Gamma^{-1}} \frac{dZ_\Gamma^{-1}}{d\lambda} = -\frac{d \ln Z_\Gamma}{d\lambda}$  temos:

$$\left[ -\lambda \frac{d \ln Z_\Gamma}{d\lambda} + \lambda \frac{\partial g_i}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial g_i} + \lambda \frac{\partial m_j}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial m_j} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] \Gamma^{(n)} = 0. \quad (2.4)$$

Lembrando-se agora que a função de Green  $\Gamma^{(n)}$  é a função de  $n$ -pontos de uma teoria com  $k$  campos  $\phi$  (não necessariamente escalares)

$$Z_\Gamma = \prod_{l=1}^k Z_{\phi_l}^{\frac{n_l}{2}} \quad \text{onde} \quad \sum_{l=1}^k n_l = n, \quad (2.5)$$

obtemos, por fim

$$\left[ -n_l \gamma_l + \beta_i \frac{\partial}{\partial g_i} - \frac{m_j \gamma_{m_j}}{2} \frac{\partial}{\partial m_j} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] \Gamma^{(n)} = 0 \quad (2.6)$$

onde fizemos as seguintes definições:

$$\gamma_l \equiv \frac{\lambda}{2} \frac{\partial \ln Z_{\phi_l}}{\partial \lambda}, \quad \beta_i \equiv \lambda \frac{\partial g_i}{\partial \lambda}, \quad \gamma_{m_j} \equiv -\frac{2}{m_j} \lambda \frac{\partial m_j}{\partial \lambda}. \quad (2.7)$$

As constantes acima são conhecidas como funções do grupo de renormalização. Elas são calculadas a partir das divergências da teorias e fornecem resultados físicos. Por exemplo, conhecendo-se o valor da função beta  $\beta_i$  podemos prever o comportamento da constante de acoplamento  $g_i$  com a energia.

---

<sup>1</sup>Note que existe um soma implícita nas constantes de acoplamento  $g_i$  e nas massas  $m_j$ .

## 2.2 Método BPHZ

Uma vez entendida a maneira através da qual informações físicas podem ser extraídas das divergências, focaremos em um aspecto crucial do processo de renormalização que é o tratamento de gráficos de Feynman a dois laços ou mais. Nesse caso, para que o tratamento seja consistente respeitando unitariedade, localidade e invariância de Lorentz deve-se utilizar o método BPHZ. Esse foi desenvolvido por Bogoliubov, Parasiuk, Hepp and Zimmerman [17]-[19] e permitiu a generalização da subtração de Dyson para gráficos sobrepostos. O método baseia-se na fórmula da floresta a qual sistematiza, de acordo com a topologia do gráfico em questão, as subtrações necessárias para obter-se uma amplitude finita. Embora o método respeite localidade, a maneira através da qual isso se processa é um pouco obscura. Sendo assim, para evidenciar esse aspecto deve-se utilizar a fórmula de recursão de Bogoliubov a qual, embora seja equivalente ao método BPHZ, é mais próxima da linguagem de contratermos.<sup>2</sup> Será essa fórmula que utilizaremos no restante do trabalho e que nos permitirá provar que a Regularização Implícita preserva unitariedade, localidade e invariância de Lorentz. Sendo assim, no restante dessa seção apresentaremos e exemplificaremos a referida fórmula.

Seja  $G$  um diagrama de Feynman arbitrário cuja amplitude será representada por  $F_G$ . Seja  $R_G$  a operação necessária para tornar a amplitude finita e seja  $t^G$  a operação que extrai a parte divergente de  $G$ . Seja  $\bar{R}_G$  a operação necessária para se extrair as subdivergências de  $G$  as quais estão contidas em subdiagramas denotados por  $H$ . Assim,

$$R_G F_G = (1 - t^G) \bar{R}_G F_G. \quad (2.8)$$

Antes de progredirmos, necessitamos de alguma definições:

- Grau superficial de divergência: diferença entre o número de momentos internos do numerador (oriundos da métrica, dos propagadores e dos vértices) e do denominador (oriundos dos propagadores) de uma integral de Feynman  $F_H$  no limite em que os momentos vão para infinito. Será representado por  $d_H$  e se a condição  $d_H \geq 0$  for satisfeita indicará que a integral é divergente no ultravioleta.
- Diagrama de Feynman próprio: aquele que ao se cortar uma de suas linhas internas não se separa em dois diagramas. Também dito irreduzível de uma partícula.
- Parte de renormalização: subdiagrama  $H$  que é próprio e superficialmente divergente

---

<sup>2</sup>Uma discussão mais detalhada pode ser encontrada em [20].

$(d_H \geq 0)$ .

- Subdiagramas de Feynman disjuntos: aqueles que não possuem linhas internas ou vértices em comum.
- Subdiagrama de Feynman aninhado: aquele que está completamente contido em um outro diagrama.
- Subdiagramas de Feynman sobrepostos: aqueles que compartilham linhas internas e vértices mas que não estão completamente contidos um no outro.

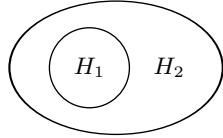
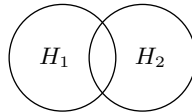
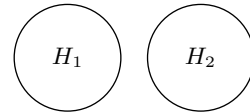


Diagrama  $H_1$  aninhado em  $H_2$



Diagramas sobrepostos



Diagramas disjuntos

Uma vez feitas todas essas definições, podemos reescrever o lado direito de (2.8) utilizando-se a fórmula de recursão de Bogoliubov dada abaixo:

$$\bar{R}_G F_G = \sum_{\psi} F_{G/\psi} \prod_{H \in \psi} (-t^H \bar{R}_H F_H), \quad (2.9)$$

onde  $\psi$  é o conjunto de partes de renormalização disjuntas de  $G$  (incluindo o conjunto vazio),

$$\psi = \{H \mid H \subset G, H = \text{próprio, disjunto}, d_H \geq 0\}, \quad (2.10)$$

e  $G/\psi$  representa o diagrama obtido de  $G$  reduzindo-se todos os  $H$  de  $\psi$  em um ponto.

Cabe salientar que a fórmula acima retira todas as subdivergências de um dado gráfico deixando apenas a divergência da ordem. (Para remover essa última basta utilizarmos a eq. 2.8). Embora a equação (2.9) contenha toda a informação de que necessitamos para o desenvolvimento dos capítulos posteriores, sua aplicação ainda não é clara. Portanto, daremos um exemplo de seu uso no gráfico abaixo:

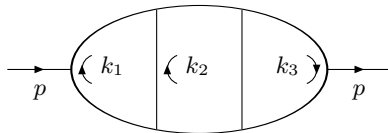
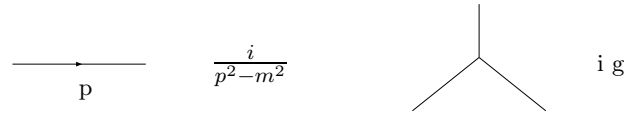
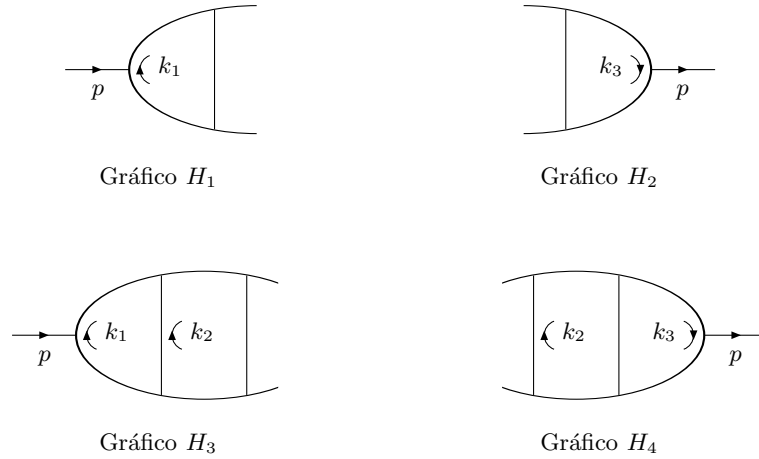


Figura 1: Gráfico  $G$

Note que o gráfico acima é oriundo da teoria escalar  $\phi_3$  em seis dimensões cujas regras de Feynman são dadas por:



Nossa primeira tarefa é identificar os subgráficos próprios de  $G$  cujo grau superficial de divergência seja não-negativo. Obtemos:



Formamos agora todos os conjuntos  $\psi$  possíveis que contêm os gráficos acima como elementos. Contando-se o conjunto vazio, teríamos 16  $\psi$  diferentes. Entretanto, a fórmula de recursão de Bogoliubov (eq. 2.9) necessita apenas dos conjuntos cujos elementos são disjuntos, ou seja, temos que lidar somente com os conjuntos abaixo:

$$\psi_1 = \{\emptyset\}, \quad \psi_2 = \{H_1\}, \quad \psi_3 = \{H_2\}, \quad \psi_4 = \{H_3\}, \quad \psi_5 = \{H_4\}, \quad \psi_6 = \{H_1, H_2\}.$$

Uma vez definidos os conjuntos  $\psi$ , a aplicação da fórmula (2.9) é trivial e fornece:

$$\bar{R}_G F_G = F_G + \sum_{i=1}^4 F_{G/H_i} (-t^{H_i} \bar{R}_{H_i} F_{H_i}) + F_{G/H_1 H_2} (-t^{H_1} \bar{R}_{H_1} F_{H_1}) (-t^{H_2} \bar{R}_{H_2} F_{H_2}). \quad (2.11)$$

Temos agora que reaplicar a equação nos termos  $\bar{R}_{H_i} F_{H_i}$  (esse é o motivo pelo qual a fórmula é dita recursiva). Ou seja, para cada  $H_i$  temos que identificar os subgráficos próprios e divergentes que ele por ventura contém e os agrupar em conjuntos  $\psi$  sob a condição de que os elementos desses conjuntos são disjuntos. Vejamos então cada caso separadamente.

Começemos com o gráfico  $H_1$  que não possui subgráficos. Sendo assim, a aplicação de  $\bar{R}_{H_1}$  terá como resultado o gráfico inicial, ou seja,

$$\bar{R}_{H_1} F_{H_1} = F_{H_1}. \quad (2.12)$$

Para o gráfico  $H_2$  obteremos um resultado análogo:

$$\bar{R}_{H_2} F_{H_2} = F_{H_2}. \quad (2.13)$$

Procedamos ao gráfico  $H_3$ . Dessa vez, temos um subgráfico próprio e divergente (gráfico  $H_1$ ) e, portanto, dois conjuntos  $\psi$  (no caso anterior, tínhamos apenas o conjunto vazio):

$$\psi_1 = \{\emptyset\}, \quad \psi_2 = \{H_1\}.$$

Desse modo, a aplicação da fórmula de recursão de Bogoliubov fornece

$$\bar{R}_{H_3} F_{H_3} = F_{H_3} + F_{H_3/H_1}(-t^{H_1} \bar{R}_{H_1} F_{H_1}). \quad (2.14)$$

Como no caso anterior, o gráfico  $H_4$  possui um resultado análogo a saber:

$$\bar{R}_{H_4} F_{H_4} = F_{H_4} + F_{H_4/H_2}(-t^{H_2} \bar{R}_{H_2} F_{H_2}). \quad (2.15)$$

Inserindo-se as equações (2.12 - 2.15) em (2.11) obtemos

$$\begin{aligned} \bar{R}_G F_G = & F_G + F_{G/H_1}(-t^{H_1} F_{H_1}) + F_{G/H_2}(-t^{H_2} F_{H_2}) + \\ & + F_{G/H_3} \{ -t^{H_3} [F_{H_3} + F_{H_3/H_1}(-t^{H_1} F_{H_1})] \} + \\ & + F_{G/H_4} \{ -t^{H_4} [F_{H_4} + F_{H_4/H_2}(-t^{H_2} F_{H_2})] \} + \\ & + F_{G/H_1 H_2}(-t^{H_1} F_{H_1})(-t^{H_2} F_{H_2}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Observando-se o resultado acima cuidadosamente vemos que ele nos fornece os contratermos que devem ser somados ao gráfico  $G$  para removermos todas as suas subdivergências. Essa conclusão torna-se mais clara caso usemos a seguinte notação gráfica:

$$\bullet_1 = (-1) \times \text{Divergência de } \begin{array}{c} \diagup \\ \triangle \\ \diagdown \end{array} = (-t^{H_i} F_{H_i}) \quad i = 1, 2$$

$$\bullet_2 = (-1) \times \text{Divergência de } \left[ \begin{array}{c} \diagup \\ \triangle \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \bullet_1 \\ \diagup \\ \triangle \\ \diagdown \end{array} \right]$$

$$= \{ -t^{H_{i+2}} [F_{H_{i+2}} + F_{H_{i+2}/H_i}(-t^{H_i} F_{H_i})] \} \quad i = 1, 2$$



Desse modo, a equação (2.16) pode ser reescrita como

$$\bar{R}_G F_G = - \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \text{diagram 6}$$

Com isso, concluímos a apresentação e consequente aplicação da fórmula de recursão de Bogoliubov. Ela será a base desse trabalho permitindo-nos demonstrar que a Regularização Implícita preserva unitariedade, localidade e invariância de Lorentz. Entretanto, antes de prosseguirmos com tal demonstração, devemos apresentar as regras da RI o qual será o tema do próximo capítulo.

### 3 *As Regras da Regularização Implícita*

Nesse capítulo, nós nos limitaremos a teorias não-massivas e integrais não-divergentes no infravermelho. A primeira restrição se justifica porque, como mostraremos no capítulo 4, para se implementar um esquema de renormalização independente da massa em Regularização Implícita (RI) precisamos somente das integrais divergentes básicas não-massivas que apresentaremos abaixo. A segunda restrição também se justifica porque, quando tivermos divergências infravermelhas, basta usarmos uma versão dual da RI no espaço das coordenadas para as escrevermos também como integrais divergentes básicas. Dessa forma, os graus de liberdade infravermelho e ultravioleta podem ser separados e consistentemente tratados [21].

Inicialmente apresentaremos, com um exemplo, qual é a estratégia da Regularização Implícita para se separar as divergências ultravioletas de um diagrama de Feynman a 1 laço e a seguir discutiremos como esse programa pode ser implementado para um diagrama de Feynman a  $n$  laços.

Seja a seguinte integral divergente oriunda de um diagrama de Feynman a 1 laço com momento externo  $p$ :

$$J \equiv \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{k^2} \frac{1}{[(k-p)^2]}. \quad (3.1)$$

Uma vez que a integral não é divergente no infravermelho, podemos adicionar um regulador  $\mu^2$  aos propagadores e tomar o limite  $\mu^2 \rightarrow 0$  ao final do cálculo. A introdução desse parâmetro é necessária porque, caso não o fizéssemos, observaríamos o aparecimento de divergências infravermelhas fictícias ao usarmos a prescrição da RI. Dessa forma, obtemos

$$J \equiv \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)} \frac{1}{[(k-p)^2 - \mu^2]}. \quad (3.2)$$

A seguir, assumimos que um regulador  $\Lambda$  está implícito na integral e utilizamos a seguinte identidade nos propagadores:

$$\frac{1}{(k-p)^2 - \mu^2} = \sum_{j=0}^{n^{(k)}-1} \frac{(-1)^j (p^2 - 2p \cdot k)^j}{(k^2 - \mu^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{n^{(k)}} (p^2 - 2p \cdot k)^{n^{(k)}}}{(k^2 - \mu^2)^{n^{(k)}} [(k-p)^2 - \mu^2]}. \quad (3.3)$$

Escolhemos o valor de  $n^{(k)}$  de modo que as integrais divergentes não possuam um denominador dependente do momento externo  $p$ . Com isso, podemos separar as integrais divergentes das finitas obtendo:

- Divergências

$$\int_k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} + \int_k \frac{2p \cdot k}{(k^2 - \mu^2)^3} + \int_k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^3} \left[ \frac{(2p \cdot k)^2}{(k^2 - \mu^2)} - p^2 \right], \quad (3.4)$$

- Parte finita

$$\int_k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^4} \left[ -4p^2(p \cdot k) + p^4 - \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^3}{(k-p)^2 - \mu^2} \right]. \quad (3.5)$$

A integral linearmente divergente é automaticamente nula e a integral quadraticamente divergente será nula ao tomarmos o limite  $\mu^2 \rightarrow 0$  [14]. Com isso, temos que lidar apenas com as divergências logarítmicas as quais são dadas por:

- Divergências logarítmicas

$$4p_\alpha p_\beta \int_k \frac{k^\alpha k^\beta}{(k^2 - \mu^2)^4} - p^2 \int_k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^3} \equiv 4p_\alpha p_\beta I_{log}^{\alpha\beta}(\mu^2) - p^2 I_{log}(\mu^2). \quad (3.6)$$

Note que as divergências foram escritas em termos de integrais divergentes básicas definidas por:

$$I_{log}^{\alpha\beta}(\mu^2) \equiv \int_k \frac{k^\alpha k^\beta}{(k^2 - \mu^2)^4}, \quad I_{log}(\mu^2) \equiv \int_k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^3}. \quad (3.7)$$

Esse será sempre o objetivo da RI, ou seja, escrever todas as divergências em termos desses objetos. Embora, já tenhamos alcançado tal objetivo para o exemplo acima, pode-se mostrar que as integrais acima estão relacionadas e, portanto, necessitamos apenas de

uma delas, no caso  $I_{log}(\mu^2)$ . A forma com que elas se relacionam é a seguinte:

$$I_{log}^{\alpha\beta}(\mu^2) = \frac{g^{\alpha\beta}}{6} I_{log}(\mu^2) + g^{\alpha\beta} \Upsilon_1. \quad (3.8)$$

Na equação anterior,  $\Upsilon_1$  é um termo de superfície o qual é arbitrário e em geral dependente da regularização empregada. Quando apresentarmos as regras da RI para um gráfico a muitos laços, discutiremos qual é a importância de tal termo para o nosso método. Por ora, ele será visto apenas como um artefato para se reduzir todas as divergências à mesma integral divergente básica.

Assim, utilizando-se a equação 3.8 obtemos:

$$J \equiv -\frac{p^2}{3} \left[ I_{log}(\mu^2) - b_6 \ln \left( -\frac{p^2}{\mu^2} \right) \right] + 4p^2 \Upsilon_1 - \frac{8p^2 b_6}{9} + O(\mu^2), \quad b_6 \equiv \frac{i^3}{2(4\pi)^{d/2}}. \quad (3.9)$$

Teríamos agora que tomar o limite  $\mu^2 \rightarrow 0$ . Entretanto, se o fizermos veremos que  $I_{log}(\mu^2)$  torna-se-á um objeto divergente tanto no ultravioleta quanto no infravermelho. Nossa próxima tarefa será encontrar uma maneira de separar essas divergências de modo a definir um objeto genuinamente divergente no ultravioleta. Alcançaremos esse objetivo através da relação de escala abaixo:

$$I_{log}(\mu^2) = I_{log}(\lambda^2) - b_6 \ln \left( \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right), \quad (3.10)$$

onde  $\lambda \neq 0$ . Dessa forma, podemos tomar o limite  $\mu^2 \rightarrow 0$  e ter como resultado final:

$$J = -\frac{p^2}{3} \left[ I_{log}(\lambda^2) - b_6 \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{8b_6}{3} - 12\Upsilon_1 \right]. \quad (3.11)$$

Uma vez que fomos capazes de implementar o programa da RI para a amplitude de um gráfico de Feynman a 1 laço, ou seja, pudemos separar todas as divergências dos momentos externos e expressá-las em termos de integrais divergentes básicas que contêm apenas um momento interno, uma pergunta natural a se fazer seria como generalizar nosso método para um diagrama a  $n$  laços com  $L$  pernas externas. Como as integrais divergentes básicas dependem apenas de um momento interno, precisamos realizar  $(n-1)$  integrações, entretanto, a ordem em que esse processo é feito não é clara *a priori*. No próximo capítulo, apresentaremos uma maneira sistemática de se escolher a ordem de integração a qual nos permitirá obter os termos a serem subtraídos pela fórmula de recursão de Bogoliubov. Considerando que essa escolha tenha sido feita, podemos redefinir os momentos internos de maneira que a integral em  $k_l$  será a  $l$ -ésima a ser realizada e ela será tipicamente da forma (no próximo capítulo apresentaremos inúmeros exemplos nos quais a relação abaixo

se verifica)

$$I^{\nu_1 \dots \nu_m} = \int_{k_l} \frac{A^{\nu_1 \dots \nu_m}(k_l, q_i)}{\prod_i [(k_l - q_i)^2 - \mu^2]} \ln^{l-1} \left( -\frac{k_l^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right), \quad (3.12)$$

onde  $l = 1 \dots n$ . Na expressão acima,  $q_i$  é um elemento (ou combinação de elementos) do conjunto  $\{p_1, \dots, p_L, k_{l+1}, \dots, k_n\}$ ,  $\int_{k_l} \equiv \int d^d k_l / (2\pi)^d$  e  $\mu^2$  é um regulador infravermelho.

Como a integral original não é divergente no infravermelho, o limite  $\mu^2 \rightarrow 0$  é bem definido e deve ser tomado ao final do cálculo. A dependência logarítmica aparece porque esse é o comportamento característico da parte finita de amplitudes não-massivas [22].  $\lambda$  é um parâmetro arbitrário não-nulo com dimensão de massa e que parametriza a liberdade que possuímos para subtrair as divergências (escala do grupo de renormalização). Ele aparece a ordem de um laço e sobrevive em ordens mais altas por meio de uma identidade matemática independente de regularização (eq. 3.19) conforme mostraremos ao fim desse capítulo. A função  $A^{\nu_1 \dots \nu_m}(k_l, q_i)$  pode conter constantes e todas as combinações possíveis de  $k_l$  e  $q_i$  compatíveis com a estrutura Lorentz. Existe uma pequena sutileza quando essa função contém um termo do tipo  $(k_l - q_i)^2$ , o qual deve necessariamente ser cancelado por um dos denominadores. A razão é que, uma vez que estamos lidando com integrais divergentes, não podemos realizar uma integração simétrica [6], [23]. Um exemplo dessa sutileza aparece no cálculo do tensor de polarização da Eletrodinâmica Quântica no qual se escrevermos  $(k_l - q_i)^2 = g_{\mu\nu}(k_l - q_i)^\mu(k_l - q_i)^\nu$  ao invés de efetuar esse cancelamento veremos que a identidade de Ward não é mais satisfeita.

Agora aplicamos as regras da Regularização Implícita. Assumindo que um regulador  $\Lambda$  está implícito na integral, podemos usar a seguinte identidade matemática nos denominadores:

$$\frac{1}{(k_l - q_i)^2 - \mu^2} = \sum_{j=0}^{n_i^{(k_l)} - 1} \frac{(-1)^j (q_i^2 - 2q_i \cdot k_l)^j}{(k_l^2 - \mu^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{n_i^{(k_l)}} (q_i^2 - 2q_i \cdot k_l)^{n_i^{(k_l)}}}{(k_l^2 - \mu^2)^{n_i^{(k_l)}} [(k_l - q_i)^2 - \mu^2]}. \quad (3.13)$$

Escolhemos os valores de  $n_i^{(k_l)}$  de modo que todas as integrais divergentes tenham um denominador livre de  $q_i$ .

Após o uso de (3.13), as integrais divergentes podem ser escritas como uma combinação

de<sup>1</sup>

$$I_{log}^{(l)}(\mu^2) \equiv \int_{k_l}^{\Lambda} \frac{1}{(k_l^2 - \mu^2)^{d/2}} \ln^{l-1} \left( -\frac{k_l^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right), \quad (3.14)$$

e

$$I_{log}^{(l)\nu_1 \dots \nu_r}(\mu^2) \equiv \int_{k_l}^{\Lambda} \frac{k_l^{\nu_1} \dots k_l^{\nu_r}}{(k_l^2 - \mu^2)^{\beta}} \ln^{l-1} \left( -\frac{k_l^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right). \quad (3.15)$$

Na fórmula acima, o subscrito *log* indica que estamos lidando com uma integral logaritmicamente divergente ( $r = 2\beta - d$ ). É importante enfatizar que apenas esse tipo de integral aparece porque integrais linearmente ou quadraticamente divergentes são sempre nulas para teorias não-massivas[14].

Embora já tenhamos reduzido todas as divergências a integrais divergentes básicas livres dos momentos externos, pode-se mostrar que as integrais definidas acima estão relacionadas. Por exemplo, no caso em que  $r = 2$  temos

$$\begin{aligned} I_{log}^{(l)\mu\nu}(\mu^2) &= g^{\mu\nu} \sum_{j=1}^l \frac{1}{2} \left( \frac{2}{d} \right)^j \frac{(l-1)!}{(l-j)!} I_{log}^{(l-j+1)}(\mu^2) - \\ &- g^{\mu\rho} \sum_{j=1}^l \frac{1}{2} \left( \frac{2}{d} \right)^j \frac{(l-1)!}{(l-j)!} \int \frac{\partial}{\partial k^\rho} \left[ \frac{k^\nu}{(k^2 - \mu^2)^{d/2}} \ln^{l-j} \left( -\frac{k^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

ou equivalentemente

$$I_{log}^{(l)\mu\nu}(\mu^2) - g^{\mu\nu} \sum_{j=1}^l a_j I_{log}^{(l-j+1)}(\mu^2) = \Upsilon_l g^{\mu\nu}, \quad a_j \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{2}{d} \right)^j \frac{(l-1)!}{(l-j)!}. \quad (3.17)$$

Na equação anterior,  $\Upsilon_1$  é um termo de superfície o qual é arbitrário e em geral dependente da regularização empregada. Foi mostrado em [1]-[6] que ao se colocar todos os termos de superfícies iguais a zero definimos uma versão da RI dita “Constrained Implicit Regularization” (CIR) e que tal ação corresponde a invocar invariância no rótulo dos momentos internos de um diagrama de Feynman arbitrário. Por outro lado, tal invariância está relacionada com a invariância de calibre e foi mostrado que adotar CIR é a condição suficiente para se assegurar a simetria da teoria [16]. Pode-se verificar que na Regularização Dimensional (RD) todos os termos de superfície são automaticamente nulos o que demonstra a compatibilidade entre CIR e RD. Em teorias de campo com

---

<sup>1</sup>Por simplicidade, usaremos ao longo do trabalho que  $I_{log}^{(1)}(\mu^2) \equiv I_{log}(\mu^2)$ .

menos simetrias, como por exemplo as teorias escalares, uma pergunta natural a fazer é se, nesse caso, a invariância de rótulo tem algum papel. Responderemos essa pergunta ao calcularmos os dois primeiros coeficientes da função  $\beta$  da teoria escalar  $\phi_6^3$  os quais são universais. Verificaremos que a arbitrariedade introduzida pelos termos de superfície não pode ser escondida em uma redefinição do esquema de renormalização. Esse resultado nos leva a conjecturar que a invariância de rótulo dos momentos internos é uma simetria fundamental de qualquer diagrama de Feynman.

Após o uso da equação anterior, podemos notar que todas as divergências podem ser escritas em função de um único objeto:

$$I_{log}^{(l)}(\mu^2) \equiv \int_{k_l}^{\Lambda} \frac{1}{(k_l^2 - \mu^2)^{d/2}} \ln^{l-1} \left( -\frac{k_l^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right). \quad (3.18)$$

Uma observação atenta da integral acima revela que ela é divergente tanto no ultravioleta quanto no infravermelho ao tomarmos o limite  $\mu^2 \rightarrow 0$ . Nossa próxima tarefa será encontrar uma maneira de separar essas divergências de modo a definir um objeto genuinamente divergente no ultravioleta. Alcançaremos esse objetivo através da relação de escala abaixo<sup>2</sup>

$$I_{log}^{(l)}(\mu^2) = I_{log}^{(l)}(\lambda^2) - \frac{b_d}{l} \ln^l \left( \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right) + b_d \sum_{k=1}^A \binom{A}{k} \sum_{j=1}^{l-1} \frac{(-1)^k (l-1)!}{k^j (l-j)!} \ln^{l-j} \left( \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right), \quad (3.19)$$

$$\lambda^2 \neq 0, \quad A \equiv \frac{(d-2)}{2}, \quad b_d \equiv \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{(-1)^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (3.20)$$

Uma vez que estamos lidando com modelos que não possuem divergências genuínas no infravermelho, a divergência encontrada acima tem que se cancelar ao se considerar a amplitude com um todo. Isso de fato ocorre porque, ao usarmos a identidade (3.13), a parte finita da amplitude também possuirá uma dependência logarítmica em  $\mu^2$  a qual cancelará exatamente a divergência infravermelha oriunda da relação de escala. No próximo capítulo apresentaremos um exemplo a  $n$  laços no qual veremos explicitamente esse cancelamento. Como mencionado antes, podemos notar que  $\lambda$  parametriza a liberdade que possuímos para subtrair as divergências e, portanto, ele se torna um candidato natural para a escala do grupo de renormalização.

O procedimento descrito deve ser repetido até que tenhamos apenas uma integral nos momentos internos e, conseqüentemente, sejamos capazes de expressar todas as di-

---

<sup>2</sup>Nessa equação, assumimos um número par de dimensões. Pode-se deduzir uma expressão similar para teorias com dimensões ímpares.

vergências em termos de  $I_{log}^{(n)}(\lambda^2)$ . Um dos objetivos do próximo capítulo é mostrar, para um diagrama de Feynman arbitrário a  $n$  laços, como esse programa pode ser sistematicamente implementado de modo a ser compatível com a fórmula de recursão de Bogoliubov.



## 4 *Implementação Sistemática da Fórmula de Recursão de Bogoliubov em RI*

Nesse capítulo desenvolveremos um algoritmo capaz de implementar RI para diagramas de Feynman a muitos laços. Ele é construído de maneira a exibir automaticamente os termos a serem subtraídos pela fórmula de recursão de Bogoliubov e, portanto, obedecendo unitariedade, localidade e invariância de Lorentz.

Para implementarmos sistematicamente a Regularização Implícita para um diagrama de Feynman a  $n$  laços, temos que adaptar a identidade (3.13), a qual foi inicialmente concebida para ordem de um laço, para ordem arbitrária uma vez que ela não fornece uma sequência natural em que as integrais devem ser realizadas. Dessa forma, nossa primeira tarefa será reescrevê-la de modo a evidenciar o comportamento divergente da amplitude quando os momentos internos vão para infinito de todas as maneiras possíveis. Considerando que  $q_i$  em (3.13) representa apenas os momentos externos e fazendo-se uma expansão binomial em  $(p_i^2 - 2p_i \cdot k)^j$  obtemos,

$$\frac{1}{(k - p_i)^2 - \mu^2} = \sum_{l=0}^{2(n_i^{(k)}-1)} f_l^{(k, p_i)} + \bar{f}^{(k, p_i)}, \quad (4.1)$$

onde fizemos as seguintes definições,

$$f_l^{(k, p_i)} \equiv \sum_{j=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \Theta(B) \binom{l-j}{j} \frac{(-p_i^2)^j (2p_i \cdot k)^{l-2j}}{(k^2 - \mu^2)^{l+1-j}}, \quad (4.2)$$

$$\bar{f}^{(k, p_i)} \equiv \frac{(-1)^{n_i^{(k)}} (p_i^2 - 2p_i \cdot k)^{n_i^{(k)}}}{(k^2 - \mu^2)^{n_i^{(k)}} [(k - p_i)^2 - \mu^2]}, \quad (4.3)$$

$$\Theta(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases},$$

$$B \equiv n_i^{(k)} + j - l, \quad [x] \equiv \max\{n \in \mathcal{Z} | n \leq x\}.$$

Os termos  $f_l^{(k, p_i)}$  foram construídos de modo que, quando  $k \rightarrow \infty$ , eles serão proporcionais a  $k^{-(l+2)}$ . Os valores de  $n_i^{(k)}$  são escolhidos de maneira a se assegurar a finitude ultravioleta do termo  $\bar{f}^{(k, p_i)}$ . A identidade acima é a base do nosso método o qual, quando aplicado em um dado diagrama de Feynman, pode ser resumido nos passos abaixo:

- A. Identifique os propagadores que dependem dos momentos externos e use a identidade (4.1) nos mesmos;
- B. Encontre o menor valor de  $n_j^{(k_i)}$  necessário para se assegurar a finitude dos termos que contém  $\bar{f}^{(k_i, p_j)}$  quando  $k_i \rightarrow \infty$  de todas as maneiras possíveis;
- C. Repita o passo anterior em todos os propagadores identificados no passo A;
- D. Identifique os termos divergentes e classifique-os de acordo com as maneiras possíveis que os momentos internos podem divergir;
- E. Use as regras da RI (na forma apresentada no capítulo 3) nos termos identificados no passo D de acordo com sua classificação;
- F. Guarde os termos que contém  $I_{log}^{(l)}(\lambda^2)$  e aplique o procedimento novamente nos demais.

Após o passo F, teremos apenas dois tipos de termos: aqueles em que  $I_{log}^{(l)}(\lambda^2)$  multiplica uma integral e aqueles em que  $I_{log}^{(l)}(\lambda^2)$  multiplica apenas constantes e/ou polinômios nos momentos externos. Os primeiros serão justamente os termos a serem cancelados pela fórmula de recursão de Bogoliubov enquanto os últimos correspondem a divergência da ordem do gráfico em questão, ou seja, após a subtração das subdivergências. Em outras palavras, nossa prescrição implementa RI de modo a exibir automaticamente os termos a serem cancelados pela fórmula de recursão de Bogoliubov.

Ilustraremos a aplicabilidade do método com alguns exemplos. Uma vez que estamos interessados apenas na estrutura das divergências, nos restringiremos a uma das teorias de campo renormalizáveis mais simples: teoria escalar  $\phi_6^3$  não-massiva. Nessa teoria, o grau superficial de divergência é dado por

$$d = 2(3 - N_B) \quad \text{onde } N_B \text{ é o número de pernas externas do gráfico.}$$

Ou seja, apenas gráficos cujo número de pernas externas é igual ou inferior a três são divergentes. Os gráficos sem pernas externas (gráficos de vácuo) já estão incluídos na constante de normalização do funcional gerador e, portanto, não precisam ser considerados

[24]. Os gráficos com uma perna externa possuem apenas divergências quadráticas e essas são sempre nulas para teorias não-massivas [14]. Desse modo, lidaremos apenas com gráficos que possuem duas ou três pernas externas e que correspondem a correções ao propagador e à função de vértice respectivamente.

Começaremos com a correção a um laço ao propagador cujo gráfico é dado por

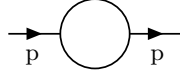


Figura 2: Gráfico  $P^{(1)}$

A amplitude correspondente a fig. 2 é escrita como

$$\Xi^{(1)} \equiv \frac{g^2}{2} \int_k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)} \frac{1}{[(k-p)^2 - \mu^2]}, \quad \int_k \equiv \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6}. \quad (4.4)$$

Note que introduzimos um regulador infravermelho nos propagadores. Usando-se a identidade (4.1) no denominador que contém o momento externo obtemos

$$\frac{\Xi^{(1)}}{g^2} = \frac{1}{2} \int_k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)} \left[ \sum_{l=0}^{2(n^{(k)}-1)} f_l^{(k,p)} + \bar{f}^{(k,p)} \right]. \quad (4.5)$$

Temos que escolher  $n^{(k)}$  de modo a garantir a finitude do termo que contém  $\bar{f}^{(k,p)}$ . Usando-se contagem de potências encontramos a restrição  $n^{(k)} > 2$  e, portanto, somos levados a fazer a escolha  $n^{(k)} = 3$ . Tendo obtido o valor de  $n^{(k)}$  podemos agora extrair os termos divergentes. Lembrando-se que  $f_l^{(k,p)}$  tem um comportamento assintótico proporcional a  $k^{-(l+2)}$  encontramos, por contagem de potências, que esses termos são dados por:

### 1. Divergência Quadrática

$$\int_k \frac{f_0^{(k,p)}}{(k^2 - \mu^2)} = \int_k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2}, \quad (4.6)$$

### 2. Divergência Linear

$$\int_k \frac{f_1^{(k,p)}}{(k^2 - \mu^2)} = \int_k \frac{2p \cdot k}{(k^2 - \mu^2)^3}, \quad (4.7)$$

### 3. Divergência Logarítmica

$$\int_k \frac{f_2^{(k,p)}}{(k^2 - \mu^2)} = \int_k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^3} \left[ \frac{(2p \cdot k)^2}{(k^2 - \mu^2)} - p^2 \right]. \quad (4.8)$$

As divergências quadrática e linear se anulam no limite  $\mu^2 \rightarrow 0$ . Já a divergência logarítmica contém dois termos os quais podem ser identificados como  $I_{log}^{\mu\nu}(\mu^2)$  e  $I_{log}(\mu^2)$  respectivamente. Usamos agora a identidade (3.17) para escrever todas as divergências em termos de  $I_{log}(\mu^2)$  e obtemos a seguinte expressão para a amplitude

$$\frac{\Xi^{(1)}}{g^2} = -\frac{p^2}{6} I_{log}(\mu^2) + 2p^2 \Upsilon_1 + \text{finito}, \quad (4.9)$$

onde  $\Upsilon_1$  é um termo de superfície. A expressão explícita para a parte finita de (4.9) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_k \frac{f_3^{(k,p)} + f_4^{(k,p)} + \bar{f}^{(k,p)}}{(k^2 - \mu^2)} &= \frac{1}{2} \int_k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^4} \left[ -4p^2(p \cdot k) + p^4 - \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^3}{(k-p)^2 - \mu^2} \right] \\ &= \frac{p^2 b_6}{6} \ln \left( -\frac{p^2}{\mu^2} \right) - \frac{4p^2 b_6}{9} + O(\mu^2), \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde  $b_6$  foi definido na eq. (3.20).

Usando-se a relação de escala (eq. 3.19) e tomando-se o limite  $\mu^2 \rightarrow 0$  obtemos finalmente que a correção a um laço para o propagador é

$$\Xi^{(1)} = -\frac{g^2 p^2}{6} \left[ I_{log}(\lambda^2) - b_6 \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{8b_6}{3} - 12\Upsilon_1 \right]. \quad (4.11)$$

De maneira semelhante obtemos a amplitude para a correção a um laço da função de vértice:

$$\begin{array}{c} | \\ \diagup \quad \diagdown \\ p_1 \quad p_2 \end{array} = -g^3 \left[ I_{log}(\lambda^2) - b_6 \ln \left( -\frac{p_1^2}{\lambda^2} \right) + 2b_6 - h(p_1, p_2) \right]$$

Figura 3: Gráfico  $V^{(1)}$

Na expressão acima,  $h(p_1, p_2)$  é uma função de  $p_1$  e  $p_2$  que se anula se  $p_2 = 0$ .

Embora os exemplos anteriores sejam simples demais para exibir os termos a serem subtraídos pela fórmula de recursão de Bogoliubov (os gráficos a um laço não contêm subdivergências), nós os apresentamos aqui para familiarizar o leitor com as regras da RI e com a identidade (4.1). Analisaremos, agora, correções a dois laços para o propagador e a função de vértice. Os gráficos necessários na renormalização do propagador são:

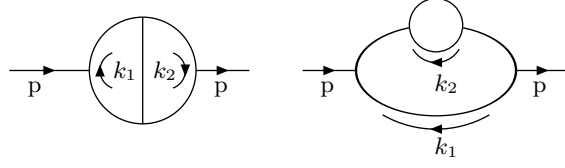


Figura 4: Gráficos  $P_A^{(2)}$  e  $P_B^{(2)}$  respectivamente

A amplitude correspondente a  $P_A^{(2)}$  é dada por

$$\frac{\Xi_A^{(2)}}{ig^4} = \frac{1}{2} \int_{k_1 k_2} \Delta(k_1) \Delta(k_1 - p) \Delta(k_1 - k_2) \Delta(k_2) \Delta(k_2 - p), \quad \Delta(k_i) \equiv \frac{1}{k_i^2 - \mu^2}. \quad (4.12)$$

Nossa primeira tarefa é aplicar a identidade (4.1) nos propagadores que dependem dos momentos externos de modo a obter

$$\int_{k_1 k_2} \Delta(k_1) \Delta(k_1 - k_2) \Delta(k_2) \left[ \sum_{l=0}^{2(n^{(k_1)}-1)} f_l^{(k_1, p)} + \bar{f}^{(k_1, p)} \right] \left[ \sum_{m=0}^{2(n^{(k_2)}-1)} f_m^{(k_2, p)} + \bar{f}^{(k_2, p)} \right]. \quad (4.13)$$

Temos agora que determinar os valores de  $n^{(k_i)}$ . Eles são escolhidos de modo a garantir a finitude dos termos que contêm  $\bar{f}^{(k_i, p)}$  quando  $k_i \rightarrow \infty$  de todas as maneiras possíveis. Consideraremos primeiro  $n^{(k_1)}$ . Os termos que contêm  $\bar{f}^{(k_1, p)}$  são

$$\begin{aligned} & \int_{k_1 k_2} \Delta(k_1) \Delta(k_1 - k_2) \Delta(k_2) \bar{f}^{(k_1, p)} \left[ \sum_{m=0}^{2(n^{(k_2)}-1)} f_m^{(k_2, p)} + \bar{f}^{(k_2, p)} \right] \\ & = \int_{k_1 k_2} \Delta(k_1) \Delta(k_1 - k_2) \Delta(k_2) \bar{f}^{(k_1, p)} \Delta(k_2 - p). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Queremos assegurar que a integral acima é finita quando  $k_1 \rightarrow \infty$ . Há dois casos:

1. Finitude quando  $k_1 \rightarrow \infty$  e  $k_2$  está fixo:  $n^{(k_1)} > 0$ ,
2. Finitude quando  $k_1 \rightarrow \infty$  e  $k_2 \rightarrow \infty$ :  $n^{(k_1)} > 2$ ,

os quais nos levam a concluir que  $n^{(k_1)}$  deve ser no mínimo 3. De maneira similar, obtemos  $n^{(k_2)} = 3$ .

Tendo obtido os valores de  $n^{(k_i)}$ , temos agora que identificar os termos divergentes contidos em (4.13) quando  $k_1$  e/ou  $k_2$  vão para o infinito. Existem três possibilidades.

Comecemos pelo caso  $k_1 \rightarrow \infty$  e  $k_2$  fixo no qual os termos divergentes são do tipo

$$\int_{k_1 k_2} \Delta(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_1 - k_2) f_l^{(k_1, p)} \left[ \sum_{m=0}^4 f_m^{(k_2, p)} + \bar{f}^{(k_2, p)} \right]. \quad (4.15)$$

Como  $f_l^{(k_1, p)}$  tem um comportamento assintótico proporcional a  $k_1^{-(l+2)}$ , obtemos, por contagem de potência, que os termos divergentes nesse caso são dados por

$$\begin{aligned} A_1^{\Xi} &\equiv \int_{k_1 k_2} \Delta(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_1 - k_2) f_0^{(k_1, p)} \left[ \sum_{m=0}^4 f_m^{(k_2, p)} + \bar{f}^{(k_2, p)} \right] \\ &= \int_{k_1 k_2} \Delta^2(k_1) \Delta(k_1 - k_2) \Delta(k_2) \Delta(k_2 - p). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Consideremos agora o caso onde  $k_2 \rightarrow \infty$  e  $k_1$  está fixo. Repetindo-se o raciocínio anterior, descobrimos que os termos divergentes são

$$\begin{aligned} A_2^{\Xi} &\equiv \int_{k_1 k_2} \Delta(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_1 - k_2) f_0^{(k_2, p)} \left[ \sum_{l=0}^4 f_l^{(k_1, p)} + \bar{f}^{(k_1, p)} \right] \\ &= \int_{k_1 k_2} \Delta^2(k_2) \Delta(k_1 - k_2) \Delta(k_1) \Delta(k_1 - p). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Finalmente consideremos o caso em que  $k_1 \rightarrow \infty$  e  $k_2 \rightarrow \infty$  simultaneamente. A escolha de  $n^{(k_i)} = 3$  ( $i = 1, 2$ ) implica que os termos divergentes devem ser do tipo

$$\int_{k_1 k_2} \Delta(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_1 - k_2) f_l^{(k_1, p)} f_m^{(k_2, p)}. \quad (4.18)$$

Por contagem de potência, obtemos a seguinte restrição para  $l$  e  $m$ :  $l + m \leq 2$ . Os casos  $l = 0$  e  $m = 0, 1, 2$  estão contidos em  $A_1^{\Xi}$  (eq. 4.16) enquanto os casos  $m = 0$  e  $l = 0, 1, 2$  estão contidos em  $A_2^{\Xi}$  (eq. 4.17). Temos que considerar, portanto, apenas o caso  $l = m = 1$  o qual fornece a expressão abaixo

$$\begin{aligned} A_3^{\Xi} &\equiv \int_{k_1 k_2} \Delta(k_2) \Delta(k_1 - k_2) \Delta(k_1) f_1^{(k_1, p)} f_1^{(k_2, p)} \\ &= \int_{k_1 k_2} \Delta^3(k_1) \Delta(k_1 - k_2) \Delta^3(k_2) (2p \cdot k_1) (2p \cdot k_2). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Resumindo, os termos divergentes são:

1. Divergências quando  $k_1 \rightarrow \infty$  e  $k_2$  está fixo

$$A_1^{\Xi} = \int_{k_1 k_2} \Delta^2(k_1) \Delta(k_1 - k_2) \Delta(k_2) \Delta(k_2 - p), \quad (4.20)$$

2. Divergências quando  $k_2 \rightarrow \infty$  e  $k_1$  está fixo

$$A_2^{\Xi} = \int_{k_1 k_2} \Delta^2(k_2) \Delta(k_1 - k_2) \Delta(k_1) \Delta(k_1 - p), \quad (4.21)$$

3. Divergências quando  $k_1 \rightarrow \infty$  e  $k_2 \rightarrow \infty$  simultaneamente

$$A_3^{\Xi} = \int_{k_1 k_2} \Delta^3(k_1) \Delta(k_1 - k_2) \Delta^3(k_2) (2p \cdot k_1) (2p \cdot k_2). \quad (4.22)$$

Assim, a parte divergente de  $\Xi_A^{(2)}$  é expressa por  $A_1^{\Xi} + A_2^{\Xi} + A_3^{\Xi} - A_4^{\Xi}$ . O último termo corresponde ao caso ( $l = m = 0$ )

$$A_4^{\Xi} \equiv \int_{k_1 k_2} \Delta(k_2) \Delta(k_1 - k_2) \Delta(k_1) f_0^{(k_1, p)} f_0^{(k_2, p)} = \int_{k_1 k_2} \Delta^2(k_2) \Delta(k_1 - k_2) \Delta^2(k_1) \quad (4.23)$$

e deve ser subtraído porque ele foi contado duas vezes.

A classificação acima dos termos divergentes em diferentes casos (podemos pensar no termo  $A_4^{\Xi}$  como a interseção dos casos  $k_1 \rightarrow \infty$  e  $k_2$  fixo,  $k_2 \rightarrow \infty$  e  $k_1$  fixo) nos fornece uma ordem natural na qual as integrais devem ser realizadas e nos permite, portanto, implementar a RI para um diagrama de Feynman a muitos laços de uma maneira sistemática. Além disso, ela exhibe automaticamente os termos a serem subtraídos pela fórmula de recursão de Bogoliubov conforme verificaremos. De maneira geral, para cada um dos casos estudados, caracterizando o comportamento divergente da amplitude quando os momentos internos vão para infinito de todas as maneiras possíveis, pode-se aplicar o formalismo desenvolvido no capítulo 3 para definir as integrais divergentes básicas. Com esse intuito usamos a identidade (3.13) em cada caso considerando  $k_l$  como o momento interno que vai para infinito. No nosso exemplo,  $k_{1(2)}$  em  $A_{1(2)}^{\Xi}$  e  $k_1$  e  $k_2$  em  $A_{3(4)}^{\Xi}$ .

Examinando-se  $A_1^{\Xi}$  e  $A_2^{\Xi}$ , podemos notar que ambos possuem a mesma estrutura e que a integral na qual vamos aplicar as regras da RI é dada por

$$\int_{k_i} \Delta^2(k_i) \Delta(k_i - k_j), \quad i, j = 1, 2 \quad \text{e} \quad i \neq j \quad (4.24)$$

Esse é a mesma amplitude do gráfico  $V_1$  (fig 3) se fizermos a identificação  $p_1 \rightarrow k_j$  e

$p_2 = 0$ . Assim, obtemos imediatamente a expressão abaixo

$$A_i^{\Xi} = \bar{A}_i^{\Xi} + \alpha_i^{\Xi}, \quad i, j = 1, 2 \quad \text{e} \quad i \neq j \quad (4.25)$$

$$\bar{A}_i^{\Xi} \equiv \int_{k_j} \Delta(k_j) \Delta(k_j - p) [I_{\log}(\lambda^2)], \quad (4.26)$$

$$\alpha_i^{\Xi} \equiv \int_{k_j} \Delta(k_j) \Delta(k_j - p) \left[ 2b_6 - b_6 \ln \left( -\frac{k_j^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right]. \quad (4.27)$$

Consideremos agora o termo  $A_3^{\Xi}$ . Uma vez que a integral em  $k_1$  é finita, podemos avaliá-la usando-se a parametrização de Feynman. Inserindo-se o resultado na integral em  $k_2$  e aplicando-se as regras da RI obtemos

$$\bar{\alpha}_3^{\Xi} \equiv A_3^{\Xi} = b_6 p^2 \left[ \frac{I_{\log}(\lambda^2)}{3} + 2\Upsilon_1 \right]. \quad (4.28)$$

De maneira similar,

$$A_4^{\Xi} = \int_{k_2} \Delta^2(k_2) \left[ I_{\log}(\lambda^2) - b_6 \ln \left( -\frac{k_2^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) + 2b_6 \right] = 0 \quad (4.29)$$

no limite  $\mu^2 \rightarrow 0$ .

Mostraremos em breve que os termos  $\bar{A}_i^{\Xi}$  ( $i = 1, 2$ ) são precisamente aqueles que serão subtraídos pela fórmula de recursão de Bogoliubov. Entretanto, antes de fazermos essa identificação, expressaremos todos os termos divergentes em função de integrais divergentes básicas, ou seja, lidaremos agora com os termos  $(\alpha_i^{\Xi})$ . Usamos a identidade (4.1) no propagador que depende do momento externo e identificamos os termos divergentes. No limite  $\mu^2 \rightarrow 0$ , o único termo que contribui é

$$\bar{\alpha}_i^{\Xi} \equiv \int_{k_j} \Delta(k_j) f_2^{(k_j, p)} \left[ -b_6 \ln \left( -\frac{k_j^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) + 2b_6 \right] \quad (4.30)$$

o qual pode ser expresso como

$$\bar{\alpha}_i^{\Xi} = b_6 p^2 \left[ \frac{I_{\log}^{(2)}(\lambda^2)}{3} - \frac{8}{9} I_{\log}(\lambda^2) + 8\Upsilon_1 - 4\Upsilon_2 \right]. \quad (4.31)$$

Dessa forma, somando-se a parte divergente de  $\Xi_A^{(2)}$  com os termos de superfície temos

$$\frac{\Xi_A^{(2)\infty}}{ig^4} \equiv \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_1^{\Xi} + \bar{\alpha}_2^{\Xi} + \bar{\alpha}_3^{\Xi} + \bar{A}_1^{\Xi} + \bar{A}_2^{\Xi}). \quad (4.32)$$



Os dois últimos termos são justamente aqueles que serão subtraídos pela fórmula de recursão de Bogoliubov. De fato, para subtrairmos as subdivergências do gráfico em questão temos que adicionar os seguintes contratermos

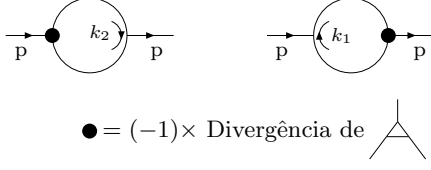


Figura 5: Contratermos para  $P_A^{(2)}$

cujas amplitudes são, respectivamente,

$$\frac{ig^4}{2} \int_{k_2} \Delta(k_2) \Delta(k_2 - p) [-I_{log}(\lambda^2)] = \frac{ig^4}{2} (-\bar{A}_1^\Xi), \quad (4.33)$$

$$\frac{ig^4}{2} \int_{k_1} \Delta(k_1) \Delta(k_1 - p) [-I_{log}(\lambda^2)] = \frac{ig^4}{2} (-\bar{A}_2^\Xi). \quad (4.34)$$

Observe que estamos adotando um esquema de subtração mínima o qual, em RI, corresponde à subtração das integrais divergentes básicas [4].

Assim, após a subtração das subdivergências obtemos

$$\frac{\bar{\Xi}_A^{(2)}}{ig^4} \equiv \frac{b_6 p^2}{6} \left[ 2I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{13}{3} I_{log}(\lambda^2) + 54\Upsilon_1 - 24\Upsilon_2 + \text{finito} \right]. \quad (4.35)$$

Analisemos agora o gráfico aninhado a dois laços ( $P_B^{(2)}$ ) cuja amplitude é

$$\frac{\bar{\Xi}_B^{(2)}}{ig^4} = \frac{1}{2} \int_{k_1 k_2} \Delta^2(k_1) \Delta(k_1 - p) \Delta(k_2) \Delta(k_1 - k_2). \quad (4.36)$$

Aplicamos a identidade (4.1) no propagador que depende do momento externo e encontramos que a escolha  $n^{(k_1)} = 3$  garante a finitude dos termos que contêm  $\bar{f}^{(k_1, p)}$  quando  $k_1 \rightarrow \infty$  de todas as maneiras possíveis. Nossa próxima tarefa é identificar os termos divergentes. O caso  $k_1 \rightarrow \infty$  e  $k_2$  fixo não possui nenhum termo enquanto o caso  $k_2 \rightarrow \infty$  e  $k_1$  fixo sim. Eles são dados por

$$\begin{aligned}
& \int_{k_1 k_2} \Delta^2(k_1) \Delta(k_1 - k_2) \Delta(k_2) \left[ \sum_{l=0}^4 f_l^{(k_1, p)} + \bar{f}^{(k_1, p)} \right] \\
&= \int_{k_1 k_2} \Delta^2(k_1) \Delta(k_1 - k_2) \Delta(k_2) \Delta(k_1 - p). \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Chamemos a integral acima de  $B_1^{\Xi}$ . Ela é a única que temos que considerar uma vez que os termos divergentes oriundos do caso  $k_1 \rightarrow \infty$  e  $k_2 \rightarrow \infty$  simultaneamente já estão nela contidos. Podemos observar que o resultado acima é justamente a amplitude inicial, entretanto, possuímos agora uma ordem natural para implementarmos a RI. Usando-se as suas regras na integral em  $k_2$  obtemos

$$B_1^{\Xi} = \bar{B}_1^{\Xi} + \beta_1^{\Xi}, \tag{4.38}$$

$$\bar{B}_1^{\Xi} \equiv \int_{k_1} \Delta(k_1) \Delta(k_1 - p) \left[ -\frac{I_{log}}{3}(\lambda^2) \right], \tag{4.39}$$

$$\beta_1^{\Xi} \equiv \int_{k_1} \Delta(k_1) \Delta(k_1 - p) \left[ 4\Upsilon_1 - \frac{8b_6}{9} + \frac{b_6}{3} \ln \left( -\frac{k_1^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right]. \tag{4.40}$$

Aplicamos o procedimento novamente em  $\beta_1^{\Xi}$  e encontramos os seguintes termos divergentes

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_1^{\Xi} &\equiv \int_{k_1} \Delta(k_1) \left[ \sum_{l=0}^2 f_l^{(k_2, p)} \right] \left[ 4\Upsilon_1 - \frac{8b_6}{9} + \frac{b_6}{3} \ln \left( -\frac{k_1^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \\
&= -\frac{p^2}{3} \left\{ \frac{b_6}{3} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{10b_6}{9} I_{log}(\lambda^2) - 4b_6 \Upsilon_2 + 4\Upsilon_1 \left[ I_{log}(\lambda^2) + \frac{2b_6}{3} - 3\Upsilon_1 \right] \right\}. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Observe que um termo de superfície (cujo valor é arbitrário) aparece multiplicando uma divergência expressa por  $I_{log}(\lambda^2)$ . Se tivéssemos adotado CIR a qual estabelece que  $\Upsilon_l = 0$  para se respeitar a invariância de rótulo nos momentos internos, esse termo não teria aparecido. Manteremos todos os termos de superfície até o final dos cálculos a dois laços com o intuito de verificar se eles têm algum papel na física de uma teoria com menos simetrias como é o caso das teorias escalares.

Desse modo, a soma da parte divergente de  $\Xi_B^{(2)}$  com os termos de superfície fornece

$$\frac{\Xi_B^{(2)\infty}}{ig^4} \equiv \frac{1}{2} (\bar{\beta}_1^{\Xi} + \bar{B}_1^{\Xi}). \tag{4.42}$$

Uma vez mais, o último termo é precisamente aquele que será subtraído pela fórmula de recursão de Bogoliubov pois o contratermo que precisamos adicionar é

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama com bolha e ponto negro} &= \frac{ig^4}{2} \int_{k_1} \Delta(k_1) \Delta(k_1 - p) \left[ \frac{1}{3} I_{log}(\lambda^2) \right] \\
 \bullet &= (-1) \times \text{Divergência de } \text{Diagrama com bolha}
 \end{aligned}$$

Figura 6: Contratermo para  $P_B^{(2)}$

Após o cancelamento da subdivergência obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{\Xi}_B^{(2)}}{ig^4} &\equiv \frac{b_6 p^2}{6} \left\{ -\frac{I_{log}^{(2)}(\lambda^2)}{3} + \frac{10}{9} I_{log}(\lambda^2) + 4\Upsilon_2 \right\} \\
 &+ \frac{p^2}{6} \left\{ -4\Upsilon_1 \left[ I_{log}(\lambda^2) + \frac{2b_6}{3} - 3\Upsilon_1 \right] + \text{finito} \right\}. \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

Observe que um termo proporcional a  $4\Upsilon_1 I_{log}(\lambda^2)$  não é subtraído como uma subdivergência uma vez que estamos adotando um esquema de subtração mínima em RI. No capítulo 5 discutiremos o que aconteceria se tivéssemos incluído o termo de superfície no contratermo.

Nesse momento, somos já capazes de escrever a correção radiativa ao propagador em ordem de dois laços, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \bar{\Xi}^{(2)} &\equiv \bar{\Xi}_A^{(2)} + \bar{\Xi}_B^{(2)} \\
 &= ig^4 \frac{p^2}{6} \left\{ \frac{5b_6}{3} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{29b_6}{9} I_{log}(\lambda^2) - 20\Upsilon_2 - 2\Upsilon_1 \left[ 2I_{log}(\lambda^2) - \frac{77b_6}{3} + 6\Upsilon_1 \right] + \text{finito} \right\}. \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

Estudemos agora a renormalização da função de vértice cuja correção a dois laços é obtida calculando-se os seguintes diagramas

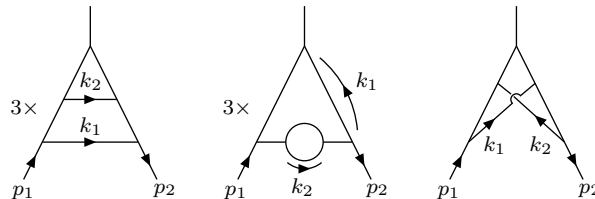


Figura 7: Gráficos  $V_A^{(2)}$ ,  $V_B^{(2)}$  e  $V_C^{(2)}$  respectivamente

A amplitude correspondente a  $V_A^{(2)}$  é dada por

$$\frac{\Lambda_A^{(2)}}{-ig^5} \equiv \int_{k_1 k_2} \Delta(k_1) \Delta(k_2 - k_1) \prod_{i=1}^2 \Delta(k_i - p_1) \Delta(k_i - p_2). \quad (4.45)$$

Aplicamos a identidade (4.1) nos propagadores que dependem dos momentos externos e fazemos a escolha  $n_1^{(k_1)} = n_2^{(k_1)} = n_1^{(k_2)} = n_2^{(k_2)} = 1$  de modo a obter

$$\int_{k_1 k_2} \Delta(k_1) \Delta(k_2 - k_1) \left[ f_0^{(k_1, p_1)} + \bar{f}^{(k_1, p_1)} \right] \left[ f_0^{(k_1, p_2)} + \bar{f}^{(k_1, p_2)} \right] \times \\ \left[ f_0^{(k_2, p_1)} + \bar{f}^{(k_2, p_1)} \right] \left[ f_0^{(k_2, p_2)} + \bar{f}^{(k_2, p_2)} \right]. \quad (4.46)$$

Os termos divergentes provêm apenas do caso  $k_2 \rightarrow \infty$  e  $k_1$  fixo e são dados por

$$A_1^\Lambda \equiv \int_{k_1 k_2} \Delta(k_1) \Delta(k_2 - k_1) f_0^{(k_2, p_1)} f_0^{(k_2, p_2)} \left[ f_0^{(k_1, p_1)} + \bar{f}^{(k_1, p_1)} \right] \left[ f_0^{(k_1, p_2)} + \bar{f}^{(k_1, p_2)} \right] \\ = \int_{k_1 k_2} \Delta(k_1) \Delta(k_2 - k_1) \Delta^2(k_2) \Delta(k_1 - p_1) \Delta(k_1 - p_2) \\ = \bar{A}_1^\Lambda + \alpha_1^\Lambda, \quad (4.47)$$

$$\bar{A}_1^\Lambda \equiv \int_{k_1} \Delta(k_1) \Delta(k_1 - p_1) \Delta(k_1 - p_2) [I_{log}(\lambda^2)], \quad (4.48)$$

$$\alpha_1^\Lambda \equiv b_6 \int_{k_1} \Delta(k_1) \Delta(k_1 - p_1) \Delta(k_1 - p_2) \left[ 2 - \ln \left( -\frac{k_1^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right]. \quad (4.49)$$

Aplicando-se o procedimento novamente em  $\alpha_1^\Lambda$  obtemos o termo divergente abaixo

$$\bar{\alpha}_1^\Lambda \equiv b_6 \int_{k_1} \Delta(k_1) f_0^{(k_1, p_1)} f_0^{(k_1, p_2)} \left[ 2 - \ln \left( -\frac{k_1^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \\ = 2b_6 I_{log}(\lambda^2) - b_6 I_{log}^{(2)}(\lambda^2). \quad (4.50)$$

Dessa maneira, a parte divergente de  $\Lambda_A^{(2)}$  é dada por

$$\Lambda_A^{(2)\infty} \equiv -ig^5 [\bar{\alpha}_1^\Lambda + \bar{A}_1^\Lambda] \quad (4.51)$$

onde o último termo é cancelado pelo contratermo

$$= -ig^5 \int_{k_1} \Delta(k_1) \Delta(k_1 - p_1) \Delta(k_1 - p_2) [-I_{log}(\lambda^2)]$$

$\bullet = (-1) \times \text{Diverg\^encia de}$

Figura 8: Contratermo para  $V_A^{(2)}$

Assim, após a subtração da subdivergência temos

$$\frac{\bar{\Lambda}_A^{(2)}}{-ig^5} \equiv b_6 \left[ -I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + 2I_{log}(\lambda^2) + \text{finito} \right]. \quad (4.52)$$

Avaliemos o gráfico  $V_B^{(2)}$  cuja amplitude é dada por

$$\frac{\Lambda_B^{(2)}}{-ig^5} \equiv \frac{1}{2} \int_{k_1 k_2} \Delta^2(k_1) \Delta(k_1 - p_1) \Delta(k_1 - p_2) \Delta(k_2) \Delta(k_2 - k_1). \quad (4.53)$$

Usamos a identidade (4.1) e fazemos a escolha  $n_1^{(k_1)} = n_2^{(k_1)} = 1$ . Os termos divergentes estão todos contidos no caso  $k_2 \rightarrow \infty$  e  $k_1$  fixo e são dados por

$$\begin{aligned} B_1^\Lambda &\equiv \int_{k_1 k_2} \Delta^2(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_2 - k_1) \left[ f_0^{(k_1, p_1)} + \bar{f}^{(k_1, p_1)} \right] \left[ f_0^{(k_1, p_2)} + \bar{f}^{(k_1, p_2)} \right] \\ &= \int_{k_1 k_2} \Delta^2(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_2 - k_1) \Delta(k_1 - p_1) \Delta(k_1 - p_2) \\ &= \bar{B}_1^\Lambda + \beta_1^\Lambda, \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\bar{B}_1^\Lambda \equiv \int_{k_1} \Delta(k_1) \Delta(k_1 - p_1) \Delta(k_1 - p_2) \left[ -\frac{I_{log}}{3}(\lambda^2) \right], \quad (4.55)$$

$$\beta_1^\Lambda \equiv \int_{k_1} \Delta(k_1) \Delta(k_1 - p_1) \Delta(k_1 - p_2) \left[ 4\Upsilon_1 + \frac{b_6}{3} \ln \left( -\frac{k_1^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) - \frac{8b_6}{9} \right]. \quad (4.56)$$

Repetindo-se o procedimento em  $\beta_1^\Lambda$  temos

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_1^\Lambda &\equiv \int_{k_1} \Delta(k_1) \prod_{i=1}^2 f_0^{(k_1, p_i)} \left[ 4\Upsilon_1 - \frac{8b_6}{9} + \frac{b_6}{3} \ln \left( -\frac{k_1^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \\ &= \frac{b_6}{3} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + 4\Upsilon_1 I_{log}(\lambda^2) - \frac{8b_6}{9} I_{log}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (4.57)$$

e, portanto, a soma da parte divergente de  $\Lambda_B^{(2)}$  com os termos de superfície é dada por

$$\frac{\Lambda_B^{(2)\infty}}{-ig^5} \equiv \frac{1}{2}(\bar{\beta}_1^\Lambda + \bar{B}_1^\Lambda). \quad (4.58)$$

O último termo é subtraído pela fórmula de recursão de Bogoliubov uma vez que o contratermo para esse gráfico é

$\bullet = (-1) \times \text{Divergência de } \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}$

Figura 9: Contratermo para  $V_B^{(2)}$

Removendo-se a subdivergência obtemos

$$\frac{\bar{\Lambda}_B^{(2)}}{-ig^5} \equiv \frac{b_6}{6} I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) - \left( \frac{4b_6}{9} - 2\Upsilon_1 \right) I_{\log}(\lambda^2) + \text{finito}. \quad (4.59)$$

Por fim, avaliaremos o gráfico  $V_C^{(2)}$ . Chamando-se a sua amplitude de  $\Lambda_C^{(2)}$  temos

$$\frac{\Lambda_C^{(2)}}{-ig^5} \equiv \frac{1}{2} \int_{k_1 k_2} \Delta(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_1 - p_1) \Delta(k_2 - p_2) \Delta(k_1 + k_2 - p_1) \Delta(k_1 + k_2 - p_2). \quad (4.60)$$

Escolhemos  $n_1^{(k_1)} = n_2^{(k_2)} = n_1^{(k_1+k_2)} = n_2^{(k_1+k_2)} = 1$  da maneira usual e encontramos que o único termo divergente provém do caso  $k_1 \rightarrow \infty$  e  $k_2 \rightarrow \infty$  simultaneamente e é dado por

$$C_1^\Lambda \equiv \int_{k_1 k_2} f_0^{(k_1, p_1)} f_0^{(k_2, p_2)} f_0^{(k_1+k_2, p_1)} f_0^{(k_1+k_2, p_2)} = \int_{k_1 k_2} \Delta^2(k_1) \Delta^2(k_2) \Delta^2(k_1 + k_2). \quad (4.61)$$

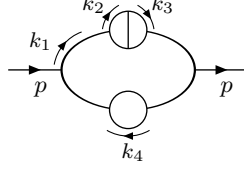
Após a integração em  $k_2$  e o uso das regras da RI temos

$$\bar{\Lambda}_C^{(2)} \equiv \Lambda_C^{(2)} = -ig^5 b_6 [I_{\log}(\lambda^2) + \text{finito}]. \quad (4.62)$$

Juntando-se todos os resultados vemos que a correção radiativa para a função de vértice a ordem de dois laços é dada por

$$\bar{\Lambda}^{(2)} \equiv \bar{\Lambda}_A^{(2)} + \bar{\Lambda}_B^{(2)} + \bar{\Lambda}_C^{(2)} = ig^5 \left[ \frac{5b_6}{2} I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) - \left( \frac{17b_6}{3} + 6\Upsilon_1 \right) I_{\log}(\lambda^2) + \text{finito} \right]. \quad (4.63)$$

Embora nosso procedimento tenha obtido sucesso em todos os casos considerados, podemos nos perguntar quão geral ele de fato é. Para responder a essa pergunta, vamos aplicá-lo ao gráfico abaixo



cuja amplitude é dada por

$$\frac{\Xi_A^{(4)}}{-ig^8} \equiv \frac{1}{4} \int_{k_1 \dots k_4} \Delta^2(k_1) \Delta^2(k_1 - p) \Delta(k_2) \Delta(k_2 - k_1) \Delta(k_2 - k_3) \times \Delta(k_3) \Delta(k_3 - k_1) \Delta(k_4) \Delta(k_4 - k_1 + p). \quad (4.64)$$

Procedendo-se da maneira usual, usamos a identidade (4.1) nos propagadores que dependem dos momentos externos e escolhemos  $n^{(k_1)} = n^{(k_4 - k_1)} = 3$ . A seguir, identificamos os termos divergentes quando os momentos internos vão para infinito de todas as maneiras possíveis. Para esse gráfico em particular, nos deparamos com uma ambiguidade uma vez que os casos  $k_{2(3)} \rightarrow \infty$  e  $k_1, k_{3(2)}, k_4$  fixos;  $k_2, k_3 \rightarrow \infty$  e  $k_1, k_4$  fixos contêm os mesmos termos a saber

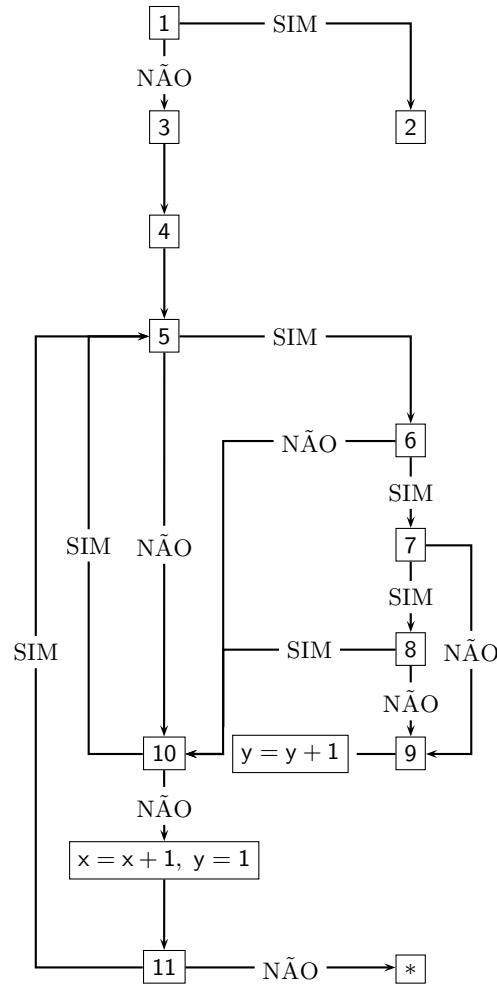
$$\int_{k_1 \dots k_4} \Delta^2(k_1) \left[ \sum_{l=0}^4 f_l^{(k_1, p)} + \bar{f}^{(k_1, p)} \right]^2 \Delta(k_2) \Delta(k_2 - k_1) \Delta(k_2 - k_3) \times \Delta(k_3) \Delta(k_3 - k_1) \Delta(k_4) \left[ \sum_{r=0}^4 f_r^{(k_4 - k_1, p)} + \bar{f}^{(k_4 - k_1, p)} \right]. \quad (4.65)$$

Assim, não é claro se devemos somar todos eles (e subtrair os termos contados duas vezes) ou se devemos considerar apenas um dos casos. Entretanto, esse não é o problema principal. Supondo-se que concordemos sobre quais casos devem ser considerados, nossa próxima tarefa seria aplicar as regras da RI (como apresentadas no capítulo 3) nos termos divergentes de acordo com a sua classificação. Em qualquer um dos casos, as integrais em  $k_{2(3)}$  serão realizadas e seremos incapazes de identificar o contratermo

$$\text{Diagram} = \frac{-ig^8}{4} \int_{k_1 \dots k_3} \Delta^2(k_1) \Delta(k_1 - p) \Delta(k_2) \Delta(k_3) \Delta(k_2 - k_1) \Delta(k_2 - k_3) \Delta(k_3 - k_1) \left[ \frac{1_{log}(\lambda^2)}{3} \right]$$

Desse modo, precisamos desenvolver um procedimento mais geral que contenha os passos A-F como um subcaso. Apresentaremos esse novo procedimento (o qual pode ser

escrito como um algoritmo) e, logo em seguida, o explicaremos passo-a-passo através do exemplo anterior. Veremos assim, que ele resolve todos esses problemas que apresentamos. O algoritmo é dado por



1. Seja  $\mathcal{S}_e$  o conjunto de subgráficos  $G_i$  que compartilham uma perna externa com o gráfico  $G$  dado. Seja  $\bar{\mathcal{S}}_e$  o conjunto complementar. O conjunto  $\bar{\mathcal{S}}_e$  é vazio?
2. Aplique o procedimento descrito anteriormente (passos A→F) à amplitude.
3. Identifique os propagadores que dependem dos momentos externos e que não pertencem a um dos subgráficos contidos em  $\bar{\mathcal{S}}_e$ . Use a identidade (4.1) em tais propagadores e obtenha os valores  $n_j^{(k_i)}$  da maneira usual.
4. Seja  $x = 0$  e  $y = 1$ . Agrupe todos os momentos internos no conjunto  $\bar{\mathcal{K}}_{x=0}^{(y=1)}$  e defina seu complemento (o qual é um conjunto vazio) por  $\mathcal{K}_{x=0}^{(y=1)}$ .
5. Existe um subgráfico  $G_i$  cujos momentos internos são exatamente aqueles agrupados em  $\bar{\mathcal{K}}_x^{(y)}$ ?



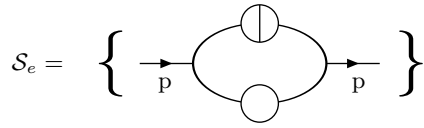
6. Existem termos divergentes quando todos os momentos internos contidos em  $\bar{\mathcal{K}}_x^{(y)}$  vão para infinito e todos os elementos de  $\mathcal{K}_x^{(y)}$  são mantidos fixos?
7. Todos os termos divergentes identificados no passo 6 foram armazenados?
8.  $\bar{\mathcal{K}}_x^{(y)}$  é um subconjunto de algum  $\bar{\mathcal{K}}_i^{(j)}$  ( $i = 0, 1, \dots, x - 1$ ) já armazenado?
9. Armazene os termos identificados no passo 6 assim como  $\bar{\mathcal{K}}_x^{(y)}$  (se  $\bar{\mathcal{K}}_x^{(y)}$  é um subconjunto de algum  $\bar{\mathcal{K}}_i^{(j)}$  já armazenado, elimine o resultado correspondente ao último).
10. Escolha uma nova combinação dos momentos internos que contenha  $x$  elementos e agrupe-os no conjunto  $\mathcal{K}_x^{(y)}$ . É possível?
11. Escolha  $x$  momentos internos e agrupe-os no conjunto  $\mathcal{K}_x^{(y)}$ . É possível?

Quando o algoritmo atingir o asterisco (\*), escrevemos todos os resultados armazenados. Cada um é classificado de acordo com o conjunto particular de momentos internos que vão para infinito. Se o conjunto possuir dois ou mais elementos, identificamos os subgráficos que os contêm e aplicamos o algoritmo nos mesmos. Por outro lado, se o conjunto contiver apenas um elemento usamos as regras da RI (da maneira apresentada no capítulo 3). Nesse ponto, guardamos os termos que já contêm  $I_{log}^{(l)}(\lambda^2)$  e aplicamos o algoritmo novamente nos demais. Eventualmente, obteremos dois tipos de termos: aqueles nos quais  $I_{log}^{(l)}(\lambda^2)$  multiplica uma integral (os quais correspondem àqueles que serão cancelados pela fórmula de recursão de Bogoliubov) e aqueles nos quais  $I_{log}^{(l)}(\lambda^2)$  multiplica apenas constantes e/ou polinômios nos momentos externos (os quais correspondem a divergência característica do gráfico em questão).

Uma vez que apresentamos o algoritmo, nossa próxima tarefa será aplicá-lo no exemplo anterior (com o intuito de familiarizar o leitor com o mesmo e de mostrar como ele resolve os problemas mencionados). No que se segue, apresentaremos o resultado fornecido pelo algoritmo após a aplicação de cada um dos seus passos.

- Passo 1 : a resposta é NÃO

$$\bar{\mathcal{S}}_e = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1: Circle with external moment } k_1-p \text{ on the left and } k_1-p \text{ on the right, and internal moment } k_4 \text{ at the top.} \\ \text{Diagram 2: Circle with external moment } k_1 \text{ on the left and } k_1 \text{ on the right, and internal moments } k_2 \text{ and } k_3 \text{ at the top.} \\ \text{Diagram 3: Triangle with external moment } k_3-k_1 \text{ on the left, } k_3 \text{ on the right, and } k_2 \text{ at the top.} \\ \text{Diagram 4: Triangle with external moment } k_2 \text{ on the left, } k_2-k_1 \text{ on the right, and } k_3 \text{ at the top.} \end{array} \right\}$$



- Passo 3

$$n^{(k_1)} = 3, \quad \Delta(k_1 - p) = \left[ \sum_{l=0}^4 f_l^{(k_1, p)} + \bar{f}^{(k_1, p)} \right].$$

- Passo 4

$$\bar{\mathcal{K}}_0^{(1)} = \{k_1 \cdots k_4\}, \quad \mathcal{K}_0^{(1)} = \emptyset$$

- Passo 5 : a resposta é SIM

Os momentos internos  $k_1 \cdots k_4$  (os quais estão contidos em  $\bar{\mathcal{K}}_{x=0}^{(y=1)}$ ) pertencem ao subgráfico do conjunto  $\mathcal{S}_e$ .

- Passo 6 : a resposta é SIM

Os termos divergentes são

$$\int_{k_1 \cdots k_4} \Delta^2(k_1) \left[ \sum_{l, l'=0}^{l+l' \leq 2} f_l^{(k_1, p)} f_{l'}^{(k_1, p)} \right] \Delta(k_2) \Delta(k_2 - k_1) \Delta(k_2 - k_3) \times \\ \Delta(k_3) \Delta(k_3 - k_1) \Delta(k_4) \Delta(k_4 - k_1 + p). \quad (4.66)$$

- Passo 7 : a resposta é NÃO

- Passo 9

Armazenamos os termos divergentes dados por (4.66) assim como  $\bar{\mathcal{K}}_{x=0}^{(y=1)} = \{k_1 \cdots k_4\}$ .

- Passo 10 : a resposta é NÃO

- Passo 11 : a resposta é SIM

Escolhemos  $k_1$  e obtemos

$$\bar{\mathcal{K}}_{x=1}^{(y=1)} = \{k_2 \cdots k_4\}, \quad \mathcal{K}_{x=1}^{(y=1)} = \{k_1\}$$

- Passo 5 : a resposta é NÃO

Nenhum subgráfico contém  $\{k_2 \cdots k_4\}$  como seus momentos internos.

- Passo 10 : a resposta é SIM

Escolhemos  $k_2$  e obtemos

$$\bar{\mathcal{K}}_{x=1}^{(y=1)} = \{k_1, k_3, k_4\}, \quad \mathcal{K}_{x=1}^{(y=1)} = \{k_2\}$$

- Passo 5 : a resposta é NÃO

Nenhum subgráfico contém  $\{k_1, k_3, k_4\}$  como seus momentos internos.

- Passo 10 : a resposta é SIM

Escolhemos  $k_3$  e obtemos

$$\bar{\mathcal{K}}_{x=1}^{(y=1)} = \{k_1, k_2, k_4\}, \quad \mathcal{K}_{x=1}^{(y=1)} = \{k_3\}$$

- Passo 5 : a resposta é NÃO

Nenhum subgráfico contém  $\{k_1, k_2, k_4\}$  como seus momentos internos.

- Passo 10 : a resposta é SIM

Escolhemos  $k_4$  e obtemos

$$\bar{\mathcal{K}}_{x=1}^{(y=1)} = \{k_1 \cdots k_3\}, \quad \mathcal{K}_{x=1}^{(y=1)} = \{k_4\}$$

- Passo 5 : a resposta é NÃO

Nenhum subgráfico contém  $\{k_1 \cdots k_3\}$  como seus momentos internos.

- Passo 10 : a resposta é NÃO

- Passo 11 : a resposta é SIM

Escolhemos  $k_1, k_2$  e obtemos

$$\bar{\mathcal{K}}_{x=2}^{(y=1)} = \{k_3, k_4\}, \quad \mathcal{K}_{x=2}^{(y=1)} = \{k_1, k_2\}$$

- Passo 5 : a resposta é NÃO

Nenhum subgráfico contém  $\{k_3, k_4\}$  como seus momentos internos.

- Passo 10 : a resposta é SIM

Escolhemos  $k_1, k_3$  e obtemos

$$\bar{\mathcal{K}}_{x=2}^{(y=1)} = \{k_2, k_4\}, \quad \mathcal{K}_{x=2}^{(y=1)} = \{k_1, k_3\}$$

- Passo  $\boxed{5}$  : a resposta é NÃO

Nenhum subgráfico contém  $\{k_2, k_4\}$  como seus momentos internos.

- Passo  $\boxed{10}$  : a resposta é SIM

Escolhemos  $k_1, k_4$  e obtemos

$$\bar{\mathcal{K}}_{x=2}^{(y=1)} = \{k_2, k_3\}, \quad \mathcal{K}_{x=2}^{(y=1)} = \{k_1, k_4\}$$

- Passo  $\boxed{5}$  : a resposta é SIM

O segundo subgráfico de  $\bar{\mathcal{S}}_e$  possui  $\{k_2, k_3\}$  como seus momentos internos.

- Passo  $\boxed{6}$  : a resposta é SIM

Os termos divergentes são

$$\int_{k_1 \dots k_4} \Delta^2(k_1) \left[ \sum_{l=0}^4 f_l^{(k_1, p)} + \bar{f}^{(k_1, p)} \right]^2 \Delta(k_2) \Delta(k_2 - k_1) \Delta(k_2 - k_3) \times \\ \Delta(k_3) \Delta(k_3 - k_1) \Delta(k_4) \Delta(k_4 - k_1 + p). \quad (4.67)$$

- Passo  $\boxed{7}$  : a resposta é NÃO

Podemos notar que (4.67) possui mais termos que (4.66).

- Passo  $\boxed{9}$

Uma vez que  $\bar{\mathcal{K}}_{x=2}^{(y=1)}$  é um subconjunto de  $\bar{\mathcal{K}}_{x=0}^{(y=1)}$ , eliminamos o resultado correspondente ao último. Assim, armazenamos apenas os termos divergentes dados por (4.67) assim como  $\bar{\mathcal{K}}_{x=2}^{(y=2)} = \{k_2, k_3\}$ .

- Passo  $\boxed{10}$  : a resposta é SIM

Escolhemos  $k_2, k_3$  e obtemos

$$\bar{\mathcal{K}}_{x=2}^{(y=2)} = \{k_1, k_4\}, \quad \mathcal{K}_{x=2}^{(y=1)} = \{k_2, k_3\}$$

- Passo  $\boxed{5}$  : a resposta é NÃO

Nenhum subgráfico contém  $\{k_1, k_4\}$  como seus momentos internos.

- Passo  $\boxed{10}$  : a resposta é SIM

Escolhemos  $k_2, k_4$  e obtemos

$$\bar{\mathcal{K}}_{x=2}^{(y=2)} = \{k_1, k_3\}, \quad \mathcal{K}_{x=2}^{(y=1)} = \{k_2, k_4\}$$

- Passo 5 : a resposta é NÃO

Nenhum subgráfico contém  $\{k_1, k_3\}$  como seus momentos internos.

- Passo 10 : a resposta é SIM

Escolhemos  $k_3, k_4$  e obtemos

$$\bar{\mathcal{K}}_{x=2}^{(y=2)} = \{k_1, k_2\}, \quad \mathcal{K}_{x=2}^{(y=2)} = \{k_3, k_4\}$$

- Passo 5 : a resposta é NÃO

Nenhum subgráfico contém  $\{k_1, k_2\}$  como seus momentos internos.

- Passo 10 : a resposta é NÃO

- Passo 11 : a resposta é SIM

Escolhemos  $k_1, k_2, k_3$  e obtemos

$$\bar{\mathcal{K}}_{x=3}^{(y=1)} = \{k_4\}, \quad \mathcal{K}_{x=3}^{(y=1)} = \{k_1, k_2, k_3\}$$

- Passo 5 : a resposta é SIM

O primeiro subgráfico de  $\bar{\mathcal{S}}_e$  possui  $\{k_4\}$  como seu momento interno.

- Passo 6 : a resposta é SIM

Os termos divergentes são

$$\int_{k_1 \cdots k_4} \Delta^2(k_1) \left[ \sum_{l=0}^4 f_l^{(k_1, p)} + \bar{f}^{(k_1, p)} \right]^2 \Delta(k_2) \Delta(k_2 - k_1) \Delta(k_2 - k_3) \times \\ \Delta(k_3) \Delta(k_3 - k_1) \Delta(k_4) \Delta(k_4 - k_1 + p). \quad (4.68)$$

- Passo 7 : a resposta é SIM

Podemos notar que (4.68) contém os mesmos termos que (4.67).

- Passo 8 : a resposta é NÃO

Uma vez que eliminamos o resultado correspondente a  $\bar{\mathcal{K}}_{x=0}^{(y=1)}$ , vemos que  $\bar{\mathcal{K}}_{x=3}^{(y=1)}$  não

é um subconjunto de algum  $\bar{\mathcal{K}}_{x=i}^{(y=j)}$  já armazenado.

- Passo 9

Armazenamos os termos divergentes dados por (4.68) assim como  $\bar{\mathcal{K}}_{x=3}^{(y=1)} = \{k_4\}$ .

- Passo 10 : a resposta é SIM

Escolhemos  $k_1, k_2, k_4$  e obtemos

$$\bar{\mathcal{K}}_{x=3}^{(y=2)} = \{k_3\}, \quad \mathcal{K}_{x=3}^{(y=2)} = \{k_1, k_2, k_4\}$$

- Passo 5 : a resposta é SIM

O quarto subgráfico de  $\bar{\mathcal{S}}_e$  possui  $\{k_3\}$  como seu momento interno.

- Passo 6 : a resposta é SIM

Os termos divergentes são

$$\int_{k_1 \cdots k_4} \Delta^2(k_1) \left[ \sum_{l=0}^4 f_l^{(k_1, p)} + \bar{f}^{(k_1, p)} \right]^2 \Delta(k_2) \Delta(k_2 - k_1) \Delta(k_2 - k_3) \times \\ \Delta(k_3) \Delta(k_3 - k_1) \Delta(k_4) \Delta(k_4 - k_1 + p). \quad (4.69)$$

- Passo 7 : a resposta é SIM

Podemos notar que (4.69) contém os mesmos termos que (4.67) e (4.68).

- Passo 8 : a resposta é SIM

Podemos notar que  $\bar{\mathcal{K}}_{x=3}^{(y=2)}$  é um subconjunto de  $\bar{\mathcal{K}}_{x=2}^{(y=1)}$ .

- Passo 10 : a resposta é SIM

Escolhemos  $k_1, k_3, k_4$  e obtemos

$$\bar{\mathcal{K}}_{x=3}^{(y=2)} = \{k_2\}, \quad \mathcal{K}_{x=3}^{(y=2)} = \{k_1, k_3, k_4\}$$

- Passo 5 : a resposta é SIM

O terceiro subgráfico de  $\bar{\mathcal{S}}_e$  possui  $\{k_2\}$  como seu momento interno.

- Passo 6 : a resposta é SIM

Os termos divergentes são

$$\int_{k_1 \cdots k_4} \Delta^2(k_1) \left[ \sum_{l=0}^4 f_l^{(k_1, p)} + \bar{f}^{(k_1, p)} \right]^2 \Delta(k_2) \Delta(k_2 - k_1) \Delta(k_2 - k_3) \times \\ \Delta(k_3) \Delta(k_3 - k_1) \Delta(k_4) \Delta(k_4 - k_1 + p). \quad (4.70)$$

- Passo 7 : a resposta é SIM

Podemos notar que (4.70) contém os mesmos termos que (4.67) e (4.68).

- Passo 8 : a resposta é SIM

Podemos notar que  $\bar{\mathcal{K}}_{x=3}^{(y=2)}$  é um subconjunto de  $\bar{\mathcal{K}}_{x=2}^{(y=1)}$ .

- Passo 10 : a resposta é SIM

Escolhemos  $k_2, k_3, k_4$  e obtemos

$$\bar{\mathcal{K}}_{x=3}^{(y=2)} = \{k_1\}, \quad \mathcal{K}_{x=3}^{(y=2)} = \{k_2, k_3, k_4\}$$

- Passo 5 : a resposta é SIM

Nenhum subgráfico tem  $\{k_1\}$  como seu momento interno.

- Passo 10 : a resposta é NÃO

- Passo 11 : a resposta é SIM

Escolhemos  $k_1, k_2, k_3, k_4$  e obtemos

$$\bar{\mathcal{K}}_{x=4}^{(y=1)} = \emptyset, \quad \mathcal{K}_{x=4}^{(y=1)} = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$$

- Passo 5 : a resposta é NÃO

- Passo 10 : a resposta é NÃO

- Passo 11 : a resposta é NÃO

Uma vez que o algoritmo atingiu (\*), escrevemos todos os resultados armazenados:

1.  $\bar{\mathcal{K}}_{x=2}^{(y=1)} = \{k_2, k_3\}$  e eq. (4.67)

$$A_1^{(4)} \equiv \int_{k_1 \cdots k_4} \Delta^2(k_1) \Delta^2(k_1 - p) \Delta(k_2) \Delta(k_2 - k_1) \Delta(k_2 - k_3) \Delta(k_3) \times \\ \Delta(k_3 - k_1) \Delta(k_4) \Delta(k_4 - k_1 + p), \quad (4.71)$$

2.  $\bar{\mathcal{K}}_{x=3}^{(y=1)} = \{k_4\}$  e eq. (4.68)

$$A_2^{(4)} \equiv \int_{k_1 \dots k_4} \Delta^2(k_1) \Delta^2(k_1 - p) \Delta(k_2) \Delta(k_2 - k_1) \Delta(k_2 - k_3) \Delta(k_3) \times \\ \Delta(k_3 - k_1) \Delta(k_4) \Delta(k_4 - k_1 + p), \quad (4.72)$$

3. Termo contado duas vezes (interseção entre os casos (1) e (2))

$$A_3^{(4)} \equiv \int_{k_1 \dots k_4} \Delta^2(k_1) \Delta^2(k_1 - p) \Delta(k_2) \Delta(k_2 - k_1) \Delta(k_2 - k_3) \Delta(k_3) \times \\ \Delta(k_3 - k_1) \Delta(k_4) \Delta(k_4 - k_1 + p). \quad (4.73)$$

O termo  $A_1^{(4)}$  é divergente quando dois momentos internos ( $k_2, k_3$ ) vão para infinito. Assim, identificamos o subgráfico que os contém e aplicamos o algoritmo novamente no mesmo. O resultado pode ser expresso com a notação gráfica abaixo <sup>1</sup>

$$\frac{ig^4}{2} \int_{k_2 k_3} \Delta(k_2) \Delta(k_2 - k_1) \Delta(k_2 - k_3) \Delta(k_3) \Delta(k_3 - k_1) \\ = ig^4 \left\{ \frac{k_1^2 b_6}{6} \left[ 2I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{13}{3} I_{log}(\lambda^2) + \text{finito} \right] + \sum_{i=2}^3 \int_{k_i} \Delta(k_i) \Delta(k_i - k_1) \left[ \frac{I_{log}(\lambda^2)}{2} \right] \right\} \\ \equiv - \text{---} \blacksquare \text{---} + \text{---} \boxed{\text{F}} \text{---} - \text{---} \textcircled{1} \text{---} - \text{---} \textcircled{1} \text{---}$$

Desse modo,  $A_1^{(4)}$  pode ser escrito como

$$\frac{-ig^8 A_1^{(4)}}{4} = \text{---} \textcircled{\blacksquare} \text{---} + \text{---} \textcircled{\boxed{\text{F}}} \text{---} - \text{---} \textcircled{\textcircled{1}} \text{---} - \text{---} \textcircled{\textcircled{1}} \text{---}$$

Foquemos agora no termo  $A_2^{(4)}$ . Uma vez que ele é divergente quando apenas um dos momentos internos vai para infinito ( $k_4$ ), simplesmente aplicamos as regras da RI e obtemos

$$\frac{g^2}{2} \int_{k_4} \Delta(k_4) \Delta(k_4 - p') = -\frac{g^2 (p')^2}{6} [I_{log}(\lambda^2) + \text{finito}] \equiv - \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \textcircled{\text{F}} \text{---}$$

onde  $p' \equiv k_1 - p$ .

Portanto,  $A_2^{(4)}$  é dado por

<sup>1</sup>No restante desse capítulo, adotaremos CIR.



$$\frac{-ig^8 A_2^{(4)}}{4} = - \text{diagram} + \text{diagram}$$

Nos resta somente o termo  $A_3^{(4)}$  o qual pode ser expresso como

ou equivalentemente

$$\frac{-ig^8 A_3^{(4)}}{4} = \text{diagram} - \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} - \text{diagram} + \text{diagram} - \text{diagram} - \text{diagram}$$

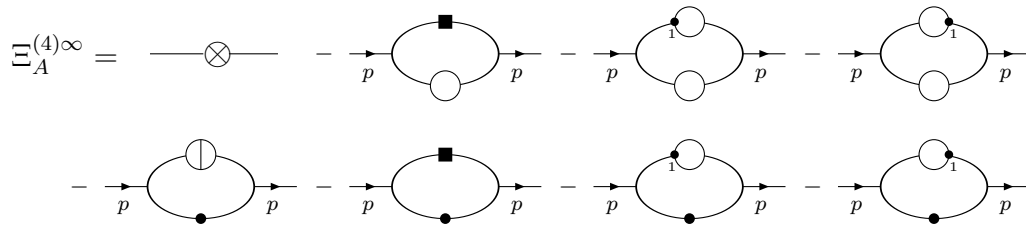
Guardamos os termos que contêm  $I_{log}^{(l)}(\lambda^2)$  e aplicamos o algoritmo novamente nos demais. Os resultados são:

$$\begin{aligned} \text{diagram} &= \text{diagram} - \text{diagram} \\ \text{diagram} &= \text{diagram} - \text{diagram} - \text{diagram} - \text{diagram} - \text{diagram} \\ \text{diagram} &= \sum_{n=0}^4 a_n(p) I_{log}^{(n)}(\lambda^2) + \text{finito} \equiv \text{diagram} + \text{diagram} \end{aligned}$$

Um breve comentário: embora não tenhamos calculado explicitamente a parte finita de  $P_A^{(2)}$  (a qual aparece em  $A_1^{(4)}$ ), pode-se mostrar que ela é da forma logaritmo mais constantes, permitindo que expressemos todas as divergências em termos de  $I_{log}^{(l)}(\lambda^2)$ .

Nesse ponto, podemos observar que todos os termos contêm  $I_{log}^{(l)}(\lambda^2)$  e que a parte divergente de  $\Xi_A^{(4)}$  é dada por

$$\Xi_A^{(4)\infty} = -\frac{ig^8}{4} \left[ A_1^{(4)} + A_2^{(4)} - A_3^{(4)} \right]$$



Como afirmamos antes, o primeiro termo (no qual  $I_{\log}^{(l)}(\lambda^2)$  multiplica apenas constantes e/ou polinômios no momento externo) corresponde à divergência típica do gráfico em questão enquanto os demais (nos quais  $I_{\log}^{(l)}(\lambda^2)$  multiplica uma integral) correspondem aos termos a serem subtraídos pela fórmula de recursão de Bogoliubov.

Para concluir esse capítulo, consideraremos gráficos a  $n$  laços. Aplicamos nosso método em dois exemplos: o primeiro continha apenas divergências aninhadas enquanto o segundo continha todos os tipos de subdivergências incluindo sobrepostas. Em ambos os casos, obtivemos sucesso uma vez que fomos capazes de exibir os termos a serem subtraídos pela fórmula de recursão de Bogoliubov e a divergência característica do gráfico em questão pôde ser escrita em termos de um conjunto bem definido de integrais divergentes básicas em um momento interno apenas. Começemos então tratando o gráfico abaixo

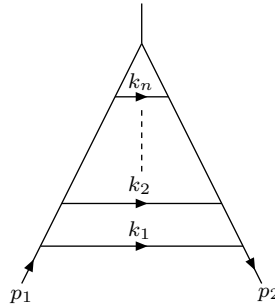


Figura 10:  $V_n$

cuja amplitude é dada por

$$\frac{A_n^\Lambda}{i^{n+1}g^{2n+1}} = \int \prod_{k_1 \dots k_n} \prod_{i=1}^n \Delta(k_i - k_{i-1}) \Delta(k_i - p_1) \Delta(k_i - p_2), \quad k_0 \equiv 0. \quad (4.74)$$

Uma vez que todos os subgráficos divergentes compartilham uma perna externa com o gráfico inicial, o algoritmo se reduz aos passos A-F. Assim, aplicamos a identidade (4.1) nos propagadores que dependem dos momentos externos e escolhemos  $n_1^{(k_i)} = n_2^{(k_i)} = 1$  onde  $i = 1 \dots n$ . Os termos divergentes provêm apenas do caso  $k_n \rightarrow \infty$  e  $k_1, \dots, k_{n-1}$

fixos e são dados por

$$\begin{aligned} \text{Div } A_n^\Lambda &\equiv \int_{k_1 \cdots k_n} \prod_{i=1}^{n-1} \Delta(k_i - k_{i-1}) \Delta(k_i - p_1) \Delta(k_i - p_2) \Delta^2(k_n) \Delta(k_n - k_{n-1}) \\ &= \bar{A}_n^\Lambda + A_{n-1}^\Lambda, \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\bar{A}_n^\Lambda \equiv \int_{k_1 \cdots k_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} \Delta(k_i - k_{i-1}) \Delta(k_i - p_1) \Delta(k_i - p_2) \left[ I_{\log}(\lambda^2) \right], \quad (4.76)$$

$$A_{n-1}^\Lambda \equiv \int_{k_1 \cdots k_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} \Delta(k_i - k_{i-1}) \Delta(k_i - p_1) \Delta(k_i - p_2) \left[ -b_6 \ln \left( -\frac{k_{n-1}^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) + 2b_6 \right]. \quad (4.77)$$

Teríamos agora que repetir o procedimento em  $A_{n-1}^\Lambda$ . Ao invés de fazer isso, vamos supor que, ao aplicarmos o nosso método em  $A_j^\Lambda$ , temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \text{Div } A_j^\Lambda &\equiv \int_{k_1 \cdots k_{j-1}} \prod_{i=1}^{j-1} \Delta(k_i - k_{i-1}) \Delta(k_i - p_1) \Delta(k_i - p_2) \times \\ &\quad \int_{k_j} \Delta^2(k_j) \Delta(k_j - k_{j-1}) \sum_{m=1}^{n-j+1} c_m^{(n-j)} \ln^{m-1} \left( -\frac{k_j^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \\ &= \bar{A}_j^\Lambda + A_{j-1}^\Lambda, \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\bar{A}_j^\Lambda = \int_{k_1 \cdots k_{j-1}} \prod_{i=1}^{j-1} \Delta(k_i - k_{i-1}) \Delta(k_i - p_1) \Delta(k_i - p_2) \left[ \sum_{m=1}^{n-j+1} c_m^{(n-j)} I_{\log}^{(m)}(\lambda^2) \right], \quad (4.79)$$

$$A_{j-1}^\Lambda = \int_{k_1 \cdots k_{j-1}} \prod_{i=1}^{j-1} \Delta(k_i - k_{i-1}) \Delta(k_i - p_1) \Delta(k_i - p_2) \left[ \sum_{m=1}^{n+2-j} c_m^{(n-j+1)} \ln^{m-1} \left( -\frac{k_{j-1}^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right]. \quad (4.80)$$

Aplicamos nossa prescrição em  $A_{j-1}^\Lambda$  e obtemos somente um termo divergente (oriundo do caso  $k_{j-1} \rightarrow \infty$  e  $k_1, \dots, k_{j-2}$  fixos)

$$\begin{aligned} \text{Div } A_{j-1}^\Lambda &= \int_{k_1 \cdots k_{j-2}} \prod_{i=1}^{j-2} \Delta(k_i - k_{i-1}) \Delta(k_i - p_1) \Delta(k_i - p_2) \times \\ &\quad \int_{k_{j-1}} \Delta^2(k_{j-1}) \Delta(k_{j-1} - k_{j-2}) \sum_{m=1}^{n+2-j} c_m^{(n-j+1)} \ln^{m-1} \left( -\frac{k_{j-1}^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right), \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\text{Div } A_{j-1}^\Lambda = \int_{k_1 \cdots k_{j-2}} \prod_{i=1}^{j-2} \Delta(k_i - k_{i-1}) \Delta(k_i - p_1) \Delta(k_i - p_2) \times \left[ \sum_{m=1}^{n+2-j} c_m^{(n-j+1)} I_{\log}^{(m)}(\mu^2) - \sum_{m=1}^{n+2-j} c_m^{(n-j+1)} I_{m-1} \right], \quad (4.82)$$

$$I_{m-1} \equiv \int_{k_{j-1}} (k_{j-2}^2 - 2k_{j-1}k_{j-2}) \Delta^3(k_{j-1}) \Delta(k_{j-1} - k_{j-2}) \ln^{m-1} \left( -\frac{k_{j-1}^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right). \quad (4.83)$$

Precisamos agora avaliar  $I_{m-1}$ . Começemos usando a identidade:

$$\ln^b(a) = \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{a^\epsilon - 1}{\epsilon} \right)^b = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{l=0}^b \binom{b}{l} \frac{a^{\epsilon(b-l)}}{\epsilon^b} (-1)^l. \quad (4.84)$$

Inserindo-a em (4.83) temos

$$I_{m-1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m-1}{l} \frac{(-1)^l}{\epsilon^{m-1}} \left( -\frac{1}{\lambda^2} \right)^{\epsilon a} I_{m-1,l} \quad (4.85)$$

onde

$$I_{m-1,l} \equiv \int_{k_{j-1}} \frac{(k_{j-2}^2 - 2k_{j-1}k_{j-2})}{(k_{j-1}^2 - \mu^2)^{3-\epsilon a}} \Delta(k_{j-1} - k_{j-2}), \quad a \equiv m - l - 1. \quad (4.86)$$

Usando-se a parametrização de Feynman em  $I_{m-1,l}$  podemos realizar a integral em  $k_{j-1}$  e obtemos

$$I_{m-1,l} = (3 - \epsilon a)(-2b_6)(-1)^{4-\epsilon a} \frac{\Gamma(1 - \epsilon a)}{\Gamma(4 - \epsilon a)} k_{j-2}^2 \int_0^1 dx \frac{(1-x)^{2-\epsilon a} (1-2x)}{[k_{j-2}^2 x(x-1) + \mu^2]^{1-\epsilon a}}. \quad (4.87)$$

Utilizando-se a identidade

$$\frac{(2x-1)k_{j-2}^2}{[\lambda^2 + \mu^2]^{1-\epsilon a}} = \frac{(\mu^2)^{\epsilon a}}{\epsilon a} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\mu^2} \right]^{\epsilon a}, \quad \lambda^2 \equiv k_{j-2}^2 x(x-1), \quad (4.88)$$

a integral, no limite de  $\mu$  pequeno, pode ser avaliada e encontramos

$$I_{m-1,l} = (3 - \epsilon a)(-2b_6)(-1)^{4-\epsilon a} \frac{\Gamma(1 - \epsilon a)}{\Gamma(4 - \epsilon a)} \left[ \frac{(\mu^2)^{\epsilon a}}{\epsilon a} - \frac{(2 - \epsilon a)(-k_{j-2}^2)^{\epsilon a}}{\epsilon a(\epsilon a + 1)(\epsilon a + 2)} \right]. \quad (4.89)$$

O resultado acima é válido sob a seguinte condição:  $a \neq 0 \Rightarrow l \neq m - 1$ . Fazendo-se

$a = 0$  em (4.87), podemos avaliar a integral, no limite de  $\mu$  pequeno, obtendo

$$I_{m-1, m-1} = -b_6 \left[ 2 - \ln \left( -\frac{k_{j-2}^2}{\mu^2} \right) \right]. \quad (4.90)$$

Juntando-se todos os resultados temos

$$I_{m-1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(-b_6)}{\epsilon^{m-1}} \left\{ \sum_{l=0}^{m-2} \binom{m-1}{l} \frac{2(-1)^l}{(2-\epsilon a)(1-\epsilon a)\epsilon a} \times \left[ \left( \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right)^{\epsilon a} - \frac{(2-\epsilon a)}{(\epsilon a+1)(\epsilon a+2)} \left( -\frac{k_{j-2}^2}{\lambda^2} \right)^{\epsilon a} \right] + (-1)^{m-1} \left[ 2 - \ln \left( -\frac{k_{j-2}^2}{\mu^2} \right) \right] \right\}. \quad (4.91)$$

Primeiro, focaremos nos termos que contêm  $\mu^2$ . Fazendo-se uma expansão em  $\epsilon a$  e colecionando-se os termos de ordem zero obtemos

$$T_{\mu^2} \equiv -2b_6(m-1)! \left[ \sum_{q=0}^m \frac{D_q}{q!(m-q)!} \ln^{m-q} \left( \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right) \right], \quad D_q \equiv \frac{d^q}{d(\epsilon a)^q} \frac{1}{(2-\epsilon a)(1-\epsilon a)} \Big|_{\epsilon=0}. \quad (4.92)$$

Na equação acima usamos a identidade

$$\left[ \sum_{l=0}^{m-2} \binom{m-1}{l} (-1)^l (m-1-l)^{m-1} \right] = 1. \quad (4.93)$$

Utilizando-se que  $\frac{D_q}{q!} = 1 - \frac{1}{2^{q+1}}$ , teremos

$$T_{\mu^2} = -2b_6 \left[ \sum_{q=1}^{m-1} \frac{(m-1)!}{(m-q)!} \ln^{m-q} \left( \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{2^{q+1}} \right) \right] - \frac{b_6}{m} \ln^m \left( \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right) - 2b_6 \frac{D_m}{m}. \quad (4.94)$$

Avaliaremos agora os termos que contêm  $k_{j-2}^2$ . Aplicando-se o mesmo procedimento acima obtemos

$$T_{k^2} \equiv -2b_6 \left[ \sum_{q=0}^m \binom{m}{q} \frac{F_q}{m} \ln^{m-q} \left( -\frac{k_{j-2}^2}{\lambda^2} \right) \right], \quad F_q \equiv \frac{d^q}{d(\epsilon a)^q} \left\{ \frac{1}{(\epsilon a+2)[(\epsilon a)^2-1]} \right\} \Big|_{\epsilon=0}. \quad (4.95)$$

É importante notar que nos resultados acima colecionamos apenas termos de ordem zero em  $\epsilon a$  por dois motivos: todos os termos de ordens superiores serão anulados ao tomarmos o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  e todos os termos de ordens inferiores se cancelam (como deveriam uma vez que eles criariam divergências fictícias no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ).

Somando-se (4.94) com (4.95) finalmente obtemos:

$$\begin{aligned}
I_{m-1} = & -2b_6 \left[ \sum_{q=0}^m \binom{m}{q} \frac{F_q}{m} \ln^{m-q} \left( -\frac{k_{j-2}^2}{\lambda^2} \right) \right] - 2b_6 \frac{D_m}{m} - \frac{b_6}{m} \ln^m \left( \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right) + \\
& + b_6 \left[ \sum_{k=1}^2 \binom{2}{k} \sum_{q=1}^{m-1} \frac{(-1)^k (m-1)!}{k^q (m-q)!} \ln^{m-q} \left( \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right) \right]. \tag{4.96}
\end{aligned}$$

Pode-se observar que os dois últimos termos correspondem à relação de escala em seis dimensões. Dessa forma, quando colocarmos o resultado acima em (4.82) e usarmos a relação de escala para reescrever  $I_{log}^{(m)}(\mu^2)$  como  $I_{log}^{(m)}(\lambda^2)$ , veremos o cancelamento de todos os termos que dependem de  $\mu^2$ . Depois disso feito obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{Div } A_{j-1}^\Lambda = & \int_{k_1 \dots k_{j-2}} \prod_{i=1}^{j-2} \Delta(k_i - k_{i-1}) \Delta(k_i - p_1) \Delta(k_i - p_2) \times \\
& \left[ \sum_{m=1}^{n-j+2} c_m^{(n-j+1)} I_{log}^{(m)}(\lambda^2) + \sum_{m=1}^{n+3-j} c_m^{(n-j+2)} \ln^{m-1} \left( -\frac{k_{j-2}^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \\
= & \bar{A}_{j-1}^\Lambda + A_{j-2}^\Lambda, \tag{4.97}
\end{aligned}$$

$$c_{m=1}^{(n-j+2)} \equiv 2b_6 \sum_{p=1}^{n+2-j} \left( \frac{F_p}{p} + \frac{D_p}{p} \right) c_p^{(n-j+1)}, \tag{4.98}$$

$$c_{m \neq 1}^{(n-j+2)} \equiv 2b_6 \sum_{p=m-1}^{n+2-j} \binom{p}{p-m+1} \frac{F_{p-m+1}}{p} c_p^{(n-j+1)}. \tag{4.99}$$

O resultado acima é justamente (4.80) com a mudança  $j \rightarrow j-1$ . Dessa forma, por indução matemática, provamos nossa suposição (lembre-se do resultado (4.75) e que  $c_1^{(0)} = 1$ ).

Agora podemos escrever a divergência do gráfico em uma fórmula compacta, a saber:

$$\text{Div } A_n^\Lambda = \sum_{j=2}^n \bar{A}_j^\Lambda + \sum_{m=1}^n c_m^{(n-1)} I_{log}^{(m)}(\lambda^2). \tag{4.100}$$

Os termos contidos no primeiro somatório serão cancelados ao aplicarmos a fórmula de recursão de Bogoliubov uma vez que os contratermos a serem adicionados são dados por

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} k_{j-1} \\ \bullet \\ \vdots \\ k_1 \\ \triangle \\ p_1 \quad p_2 \end{array} = \prod_{i=1}^{j-1} \int_{k_i} \Delta(k_i - k_{i-1}) \Delta(k_i - p_1) \Delta(k_i - p_2) \left[ - \sum_{m=1}^{n-j+1} c_m^{(n-j)} I_{\log}^{(m)}(\lambda^2) \right] \\
& \bullet = - \text{Divergência de } \begin{array}{c} \triangle \\ \vdots \\ k_j \\ p_1 - k_{j-1} \quad p_2 - k_{j-1} \end{array}
\end{aligned}$$

Vemos assim que fomos capazes de exibir os contratermos automaticamente e que a divergência do gráfico pôde ser escrita em termos de integrais divergentes básicas. Antes de procedermos para o diagrama que contém subdivergências sobrepostas gostaríamos de enfatizar um resultado que obtivemos e que será utilizado no que se segue

$$\begin{aligned}
& \int_{k_j} \Delta(k_j - k_a) \Delta^2(k_j) \left[ \sum_{m=1}^i c_m^{(i-1)} \ln^{m-1} \left( - \frac{k_j^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] = \\
& \sum_{m=1}^i c_m^{(i-1)} I_{\log}^{(m)}(\lambda^2) + \sum_{m=1}^{i+1} c_m^{(i)} \ln^{m-1} \left( - \frac{k_a^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \quad (4.101)
\end{aligned}$$

Estudemos agora o gráfico abaixo

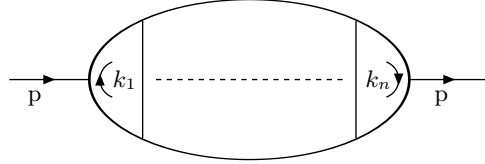


Figura 11: Gráfico  $P^{(n)}$

cuja amplitude é dada por

$$\Xi^{(n)} = \mathcal{A} \int \prod_{k_1 \dots k_n} \prod_{r=1}^n \Delta(k_r) \Delta(k_r - p) \prod_{l=2}^n \Delta(k_l - k_{l-1}) \quad \text{onde } \mathcal{A} \equiv \frac{i^{n-1} g^{2n}}{2}. \quad (4.102)$$

Antes de aplicar nosso método, vamos introduzir uma notação gráfica que nos será muito útil

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} \textcircled{i} \quad \textcircled{j} \\ \vdots \\ \textcircled{k_i} \dots \textcircled{k_j} \end{array} \equiv \mathcal{A} \int_{k_i \dots k_j} \left[ \sum_{m=1}^i c_m^{(i-1)} \ln^{m-1} \left( - \frac{k_i^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \left[ \sum_{m=1}^{n-j+1} c_m^{(n-j)} \ln^{m-1} \left( - \frac{k_j^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \times \\
& \Delta^2(k_i) \Delta^2(k_j) \Delta(k_j - k_{j-1}) \prod_{l=i+1}^{j-1} \Delta(k_l) \Delta(k_l - k_{l-1}) \Delta(k_l - p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Diagram 1} &\equiv \mathcal{A} \int_{k_i \cdots k_j} \left[ \sum_{m=1}^i c_m^{(i-1)} \ln^{m-1} \left( -\frac{k_i^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \left[ \sum_{m=1}^{n-j+1} c_m^{(n-j)} \ln^{m-1} \left( -\frac{k_j^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \times \\ &\quad \Delta^2(k_j) \prod_{l=i}^{j-1} \Delta(k_l) \Delta(k_{l+1} - k_l) \Delta(k_l - p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Diagram 2} &\equiv \mathcal{A} \int_{k_i \cdots k_j} \left[ \sum_{m=1}^i c_m^{(i-1)} \ln^{m-1} \left( -\frac{k_i^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \left[ \sum_{m=1}^{n-j+1} c_m^{(n-j)} \ln^{m-1} \left( -\frac{k_j^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \times \\ &\quad \Delta^2(k_i) \prod_{l=i+1}^j \Delta(k_l) \Delta(k_l - k_{l-1}) \Delta(k_l - p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Diagram 3} &\equiv \mathcal{A} \int_{k_i \cdots k_j} \left[ \sum_{m=1}^i c_m^{(i-1)} \ln^{m-1} \left( -\frac{k_i^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \left[ \sum_{m=1}^{n-j+1} c_m^{(n-j)} \ln^{m-1} \left( -\frac{k_j^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \times \\ &\quad \prod_{r=i}^j \Delta(k_r) \Delta(k_r - p) \prod_{l=i+1}^j \Delta(k_l - k_{l-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Diagram 4} &\equiv \mathcal{A} \left[ (-1) \times \sum_{m=1}^i c_m^{(i-1)} I_{\log}^{(m)}(\lambda^2) \right] \left[ (-1) \times \sum_{m=1}^j c_m^{(j-1)} I_{\log}^{(m)}(\lambda^2) \right] \times \\ &\quad \prod_{r=i+1}^{n-j} \int_{k_r} \Delta(k_r) \Delta(k_r - p) \prod_{l=i+2}^{n-j} \Delta(k_l - k_{l-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Diagram 5} &\equiv \mathcal{A} \int_{k_{i+1} \cdots k_j} \left[ (-1) \times \sum_{m=1}^i c_m^{(i-1)} I_{\log}^{(m)}(\lambda^2) \right] \left[ \sum_{m=1}^{n-j+1} c_m^{(n-j)} \ln^{m-1} \left( -\frac{k_j^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \times \\ &\quad \prod_{r=i+1}^j \Delta(k_r) \Delta(k_r - p) \prod_{l=i+2}^j \Delta(k_l - k_{l-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Diagram 6} &\equiv \mathcal{A} \int_{k_i \cdots k_{n-j}} \left[ \sum_{m=1}^i c_m^{(i-1)} \ln^{m-1} \left( -\frac{k_i^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \left[ (-1) \times \sum_{m=1}^j c_m^{(j-1)} I_{\log}^{(m)}(\lambda^2) \right] \times \\ &\quad \prod_{r=i}^{n-j} \Delta(k_r) \Delta(k_r - p) \prod_{l=i+1}^{n-j} \Delta(k_l - k_{l-1}) \end{aligned}$$

Vamos também definir

$$\begin{aligned} I_{i,j} &\equiv \int_{k_i \cdots k_j} \left[ \sum_{m=1}^i c_m^{(i-1)} \ln^{m-1} \left( -\frac{k_i^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \Delta^3(k_i) \left[ \sum_{m=1}^{n-j+1} c_m^{(n-j)} \ln^{m-1} \left( -\frac{k_j^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \Delta^3(k_j) \times \\ &\quad \frac{(2p \cdot k_i)(2p \cdot k_j)}{(k_{i+1} - k_i)^2 - \mu^2} \prod_{l=i+1}^{j-1} \Delta^2(k_l) \Delta(k_{l+1} - k_l). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Em todos os termos acima, consideramos que um produtório mal-definido (aquele cujo índice inferior é maior que o superior) tem valor unitário. Podemos agora usar o nosso algoritmo. Entretanto, uma vez que todos os subgráficos divergentes compartilham uma perna externa com o gráfico original, ele se reduz aos passos A-F. Sendo assim, aplicamos



a identidade (4.1) nos propagadores que dependem do momento externo, fazemos a escolha  $n^{(k_i)} = 3$  ( $i = 1 \cdots n$ ) e encontramos os seguintes termos divergentes:

1. Divergências quando  $k_1 \rightarrow \infty$  e  $k_2 \cdots k_n$  estão fixos

$$\text{Diagram 1} = - \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3}$$

The diagram shows the decomposition of a propagator with a loop on the left and a box on the right. The left loop has a vertex labeled '1'. The right box has a vertex labeled 'n'. The decomposition is into a diagram with a dot on the left loop and a vertex labeled '1' on the right box, and a diagram with a vertex labeled '2' on the left loop and a vertex labeled 'n' on the right box.

2. Divergências quando  $k_n \rightarrow \infty$  e  $k_1 \cdots k_{n-1}$  estão fixos

$$\text{Diagram 4} = - \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6}$$

The diagram shows the decomposition of a propagator with a box on the left and a loop on the right. The left box has a vertex labeled '1'. The right loop has a vertex labeled 'n'. The decomposition is into a diagram with a vertex labeled '1' on the left box and a dot on the right loop, and a diagram with a vertex labeled '1' on the left box and a vertex labeled 'n-1' on the right loop.

3. Termo contado duas vezes (interseção entre os casos (1) e (2))

$$\text{Diagram 7} = - \text{Diagram 8} - \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} + \text{Diagram 11}$$

The diagram shows the decomposition of a propagator with two overlapping loops and a box. The left loop has a vertex labeled '1'. The right loop has a vertex labeled 'n'. The box has a vertex labeled 'n-1'. The decomposition is into four diagrams: a diagram with a dot on the left loop and a vertex labeled 'n-1' on the box; a diagram with a vertex labeled '2' on the left loop and a dot on the right loop; a diagram with a dot on the left loop and a dot on the right loop; and a diagram with a vertex labeled '2' on the left loop and a vertex labeled 'n-1' on the box.

4. Divergências quando  $k_1 \cdots k_n \rightarrow \infty$  simultaneamente

$$I_{1,n}$$

Nesse ponto, guardaríamos os termos que contêm  $I_{log}^{(l)}(\lambda^2)$  e usaríamos o método novamente nos demais. Embora esse seja o procedimento geral a ser seguido, se o adotarmos teremos certa dificuldade em encontrar uma expressão analítica para a divergência do gráfico quando  $n$  é arbitrário. Dessa forma, ao invés de aplicarmos nosso método cegamente podemos notar que os resultados acima foram obtidos após o uso de (4.101) o que significa que realizamos algumas das  $n$  integrais. Nos dois primeiros casos realizamos apenas uma integral ( $k_1$  e  $k_n$  respectivamente), enquanto no terceiro realizamos as integrais em  $k_1$  e  $k_n$ . Assim, se tivéssemos realizado apenas uma das integrações, o conteúdo divergente de  $P^{(n)}$  seria dado por

$$- \text{Diagram 12} + \text{Diagram 13} - \text{Diagram 14} + \text{Diagram 15} - \text{Diagram 16} + I_{1,n}$$

The diagram shows a combination of five diagrams: a diagram with a dot on the left loop and a vertex labeled 'n' on the right box; a diagram with a vertex labeled '2' on the left loop and a vertex labeled 'n' on the right box; a diagram with a vertex labeled '1' on the left loop and a dot on the right loop; a diagram with a vertex labeled '1' on the left loop and a vertex labeled 'n-1' on the right box; and a diagram with a vertex labeled '1' on the left loop and a vertex labeled 'n' on the right loop.

Agora suponha que ao realizarmos  $i - 1$  integrais obteremos

$$\sum_{a=0}^{i-1} \left[ \text{diagram 1} \right] + \sum_{a=1}^{i-1} (-1) \times \left[ \text{diagram 2} \right] + \sum_{k=2}^i \sum_{a=1}^{k-1} I_{k-a, n-a+1} +$$

$$+ \Theta(i-2) \sum_{r=2}^{i-1} \sum_{a=1}^{r-1} (-1) \times \left[ \text{diagram 3} \right] + \sum_{a=1}^{i-1} (-1) \times \left[ \text{diagram 4} + \text{diagram 5} \right]$$

Figura 12:

Para provarmos a suposição acima, usaremos indução matemática. Começamos aplicando nosso método a um termo típico do primeiro somatório e encontramos os seguintes termos divergentes:

1. Divergências quando  $k_{i-a} \rightarrow \infty$  e  $k_{i-a+1} \cdots k_{n-a}$  estão fixos

$$\left[ \text{diagram 1} \right] = - \left[ \text{diagram 2} \right] + \left[ \text{diagram 3} \right]$$

2. Divergências quando  $k_{n-a} \rightarrow \infty$  e  $k_{i-a} \cdots k_{n-a-1}$  estão fixos

$$\left[ \text{diagram 1} \right] = - \left[ \text{diagram 2} \right] + \left[ \text{diagram 3} \right]$$

3. Termo contado duas vezes (interseção entres os casos (1) e (2))

$$\left[ \text{diagram 1} \right]$$

4. Divergências quando  $k_{i-a} \cdots k_{n-a} \rightarrow \infty$  simultaneamente

$$I_{i-a, n-a}$$

Em outras palavras, o conteúdo divergente de um termo típico do primeiro somatório é dado por

$$- \left[ \text{diagram 1} \right] + \left[ \text{diagram 2} \right] - \left[ \text{diagram 3} \right] + \left[ \text{diagram 4} \right] - \left[ \text{diagram 5} \right] + I_{i-a, n-a}$$

Figura 13:

Consideremos agora um termo típico do segundo somatório. Como procuramos o conteúdo divergente de  $P^{(n)}$  após  $i$  integrais serem realizadas, podemos reescrevê-lo conforme abaixo

Figura 14:

Inserindo-se os resultados de (fig 13) e (fig 14) em (fig 12) obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{a=0}^i \left[ \text{diagram with boxes } i+1-a \text{ and } n-a \right] + \sum_{a=1}^i (-1) \times \left[ \text{diagram with ovals } i+1-a \text{ and } n-a+1 \right] + \sum_{k=2}^{i+1} \sum_{a=1}^{k-1} I_{k-a, n-a+1} + \\ & + \Theta(i-1) \sum_{r=2}^i \sum_{a=1}^{r-1} (-1) \times \left[ \text{diagram with dots } r-a \text{ and } a \right] + \sum_{a=1}^i (-1) \times \left[ \text{diagram with box } n \text{ and dot } a \right] + \left[ \text{diagram with box } 1 \text{ and dot } a \right] \end{aligned}$$

Pode-se notar que o resultado acima é justamente o quê supomos (fig 12) se fizermos a mudança  $i \rightarrow i+1$ . Assim, por indução matemática, provamos nossa suposição e seremos capazes de identificar a divergência característica do gráfico original. Realizando-se  $n-1$  integrais temos

$$\begin{aligned} & \sum_{a=0}^{n-1} \left[ \text{diagram with boxes } n-a \text{ and } n-a \right] + \sum_{a=1}^{n-1} (-1) \times \left[ \text{diagram with ovals } i-a \text{ and } n-a+1 \right] + \sum_{k=2}^n \sum_{a=1}^{k-1} I_{k-a, n-a+1} + \\ & + \Theta(n-2) \sum_{r=2}^{n-1} \sum_{a=1}^{r-1} (-1) \times \left[ \text{diagram with dots } r-a \text{ and } a \right] + \sum_{a=1}^{n-1} (-1) \times \left[ \text{diagram with box } n \text{ and dot } a \right] + \left[ \text{diagram with box } 1 \text{ and dot } a \right] \end{aligned}$$

Ao aplicarmos nosso método no primeiro somatório encontramos que os termos divergentes dele oriundos são dados por

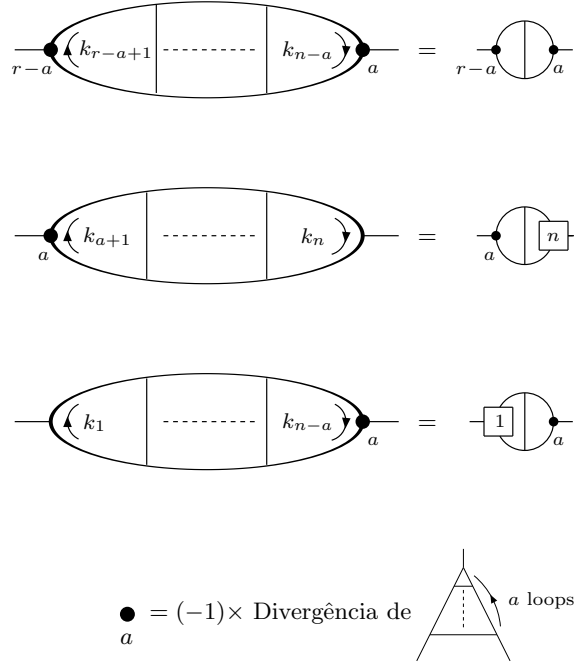
$$\begin{aligned} & p^2 \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-a} \sum_{m'=1}^{a+1} c_m^{(n-a-1)} c_{m'}^{(a)} \left[ -\frac{I_{\log}^{(m+m'-1)}(\lambda^2)}{3} + \right. \\ & \left. 2 \Theta(m+m'-2) \sum_{k=2}^{m+m'-1} \left( \frac{1}{3} \right)^k \frac{(m+m'-2)!}{(m+m'-1-k)!} I_{\log}^{(m+m'-k)}(\lambda^2) \right]. \quad (4.104) \end{aligned}$$

No segundo somatório todos os termos contêm apenas divergências quadráticas e,

portanto, eles não contribuem. O terceiro somatório pode ser avaliado e o resultado é

$$\begin{aligned}
 & p^2 \sum_{k=2}^n \sum_{a=1}^{k-1} \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{m'=1}^a c_m^{(k-2)} d_{m'}^{(n-a-k+2)} \left[ 2 \sum_{l=1}^{m+m'-1} \left( \frac{1}{3} \right)^l \frac{(m+m'-2)!}{(m+m'-1-l)!} I_{\log}^{(m+m'-l)}(\lambda^2) \right], \\
 & d_q^{(0)} \equiv c_k^{(n-j)}, \\
 & d_q^{(i)} \equiv 2b_6 \sum_{k=q}^{n-j+1} d_k^{(i-1)} \binom{k-1}{k-q} G_{k-q}, \\
 & G_q \equiv \frac{d^q}{d(\epsilon a)^q} \left[ \frac{1}{[4 - (\epsilon a)^2][1 - (\epsilon a)^2]} \right] \Bigg|_{\epsilon=0}. \tag{4.105}
 \end{aligned}$$

Os demais termos são exatamente aqueles que serão subtraídos pela fórmula de recursão de Bogoliubov uma vez que os contratermos para o gráfico em questão podem ser expressos como



Assim, a divergência característica de  $P^{(n)}$  (após a subtração das subdivergências) é dada pela soma de (4.104) com (4.105).

Pode-se observar que nosso método uma vez mais exibiu automaticamente os termos a serem subtraídos pela fórmula de recursão de Bogoliubov e nos possibilitou expressar a divergência característica do gráfico em termos de um conjunto bem-definido de integrais divergentes básicas. Portanto, podemos afirmar que o procedimento desenvolvido aqui (o qual é resumido pelo algoritmo) é a sistematização da RI para diagramas de Feynman a muitos laços. Embora os resultados até então obtidos sejam restritos a teorias

sem massas, podemos desenvolver um procedimento similar para teorias massivas o qual apresentaremos no próximo capítulo.

## 5 Teorias Massivas e Funções do Grupo de Renormalização

Nesse capítulo, generalizamos a identidade (4.1) para teorias massivas e implementamos um esquema de regularização independente da massa. O procedimento aqui desenvolvido nos permite escrever as divergências de qualquer teoria (massiva ou não) em termos do mesmo conjunto de integrais divergentes básicas por nós já apresentado e, portanto, justifica a restrição a teorias não-massivas que fizemos no capítulo anterior.

A identidade que usaremos é

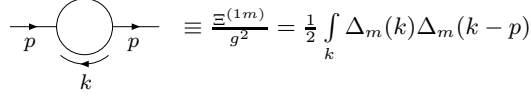
$$\frac{1}{(k-p_i)^2 - m^2 - \mu^2} = \sum_{l=0}^{2(n_i^{(k)}-1)} h_l^{(k, p_i)} + \bar{h}^{(k, p_i)}, \quad (5.1)$$

onde fizemos as definições,

$$h_l^{(k, p_i)} \equiv \sum_{j=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \Theta(n_i^{(k)} + j - l) \binom{l-j}{j} \frac{(-p_i^2 + m^2)^j (2p_i \cdot k)^{l-2j}}{(k^2 - \mu^2)^{l+1-j}} \quad (5.2)$$

$$\bar{h}^{(k, p_i)} \equiv \frac{(-1)^{n_i^{(k)}} (p_i^2 - m^2 - 2p_i \cdot k)^{n_i^{(k)}}}{(k^2 - \mu^2)^{n_i^{(k)}} [(k-p_i)^2 - m^2 - \mu^2]}. \quad (5.3)$$

Observe que, se fizermos  $m^2 \rightarrow 0$ , recuperamos a identidade (4.1). O procedimento a ser seguido é similar ao apresentado para teorias não-massivas uma vez que  $h_l^{(k, p_i)}$  também foi construído de modo que seu comportamento assintótico (quando  $k \rightarrow \infty$ ) é proporcional a  $k^{-(l+2)}$ . A diferença principal é que agora temos que aplicar a identidade (5.1) em todos os propagadores que dependem dos momentos externos e/ou da massa. Para familiarizar o leitor com essa identidade, avaliaremos a correção a um laço para o propagador



$$\text{Diagram} \equiv \frac{\Xi^{(1m)}}{g^2} = \frac{1}{2} \int_k \Delta_m(k) \Delta_m(k-p)$$

Figura 15: Gráfico  $M^{(1)}$ 

Na figura acima fizemos a seguinte definição<sup>1</sup>

$$\Delta_m(k) \equiv \frac{1}{k^2 - m^2 - \mu^2}. \quad (5.4)$$

Aplicamos (5.1) em todos os denominadores para obter (definimos que  $p_0 = 0$  e  $p_1 = p$ )

$$\frac{\Xi^{(1m)}}{g^2} = \frac{1}{2} \int_k \left[ \sum_{l=0}^{2(n_0^{(k)}-1)} h_l^{(k,0)} + \bar{h}^{(k,0)} \right] \left[ \sum_{q=0}^{2(n_1^{(k)}-1)} h_l^{(k,p)} + \bar{h}^{(k,p)} \right]. \quad (5.5)$$

Como fizemos anteriormente, escolhemos o menor valor de  $n_i^{(k)}$  ( $i = 0, 1$ ) de modo a garantir a finitude dos termos que contêm  $\bar{h}^{(k, p_i)}$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Nesse caso, encontramos que  $n_0^{(k)} = n_1^{(k)} = 3$ . Identificamos agora os termos divergentes:

1. Divergência quadrática

$$\int_k h_0^{(k,0)} h_0^{(k,p)} = \int_k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2}, \quad (5.6)$$

2. Divergência linear

$$\int_k h_0^{(k,0)} h_1^{(k,p)} = \int_k \frac{2p \cdot k}{(k^2 - \mu^2)^3}, \quad (5.7)$$

3. Divergência logarítmica

$$\int_k h_2^{(k,0)} h_0^{(k,p)} = \int_k \frac{m^2}{(k^2 - \mu^2)^3}, \quad (5.8)$$

$$\int_k h_0^{(k,0)} h_2^{(k,p)} = \int_k \left[ \frac{(2p \cdot k)^2}{(k^2 - \mu^2)^4} - \frac{(p^2 - m^2)}{(k^2 - \mu^2)^3} \right]. \quad (5.9)$$

Pode-se observar que as divergências quadrática e linear são as mesmas do caso sem massa e elas têm uma contribuição nula. Assim, após o uso das regras da RI, os termos

<sup>1</sup>Observe a introdução de um regulador infravermelho. Ele está aqui para possibilitar a aplicação da identidade (5.1)

restantes fornecem o seguinte resultado

$$\frac{\Xi^{(1m)}}{g^2} = - \left[ \left( \frac{p^2}{6} - m^2 \right) I_{\log}(\lambda^2) + \frac{p^2}{3} \Upsilon_1 + \text{finito} \right]. \quad (5.10)$$

Podemos observar que, assim como no caso acima, todos os termos divergentes dependentes da massa serão do tipo  $m^2 I_{\log}^{(l)}(\lambda^2)$  e, portanto, eles apenas aparecerão em correções ao propagador. Dessa forma, como estamos adotando um esquema de subtração mínima, não precisaremos nos preocupar em calcular as correções à função de vértice para a teoria massiva.

Procederemos agora para as correções a dois laços para o propagador. Os gráficos necessários ao cálculo podem ser encontrados na figura 4. Denominando-se  $\Xi_A^{(2m)}$  a amplitude do primeiro ( $P_A^{(2)}$ ) temos

$$\frac{\Xi_A^{(2m)}}{ig^4} = \frac{1}{2} \int_{k_1 k_2} \Delta_m(k_1) \Delta_m(k_2) \Delta_m(k_1 - k_2) \Delta_m(k_1 - p) \Delta_m(k_2 - p). \quad (5.11)$$

Usamos (5.1) e fazemos a escolha  $n_0^{(k_1)} = n_0^{(k_2)} = n_0^{(k_1-k_2)} = n_1^{(k_1)} = n_1^{(k_2)} = 3$  como anteriormente. Temos agora que identificar os termos divergentes. Começando pelo caso  $k_1 \rightarrow \infty$  e  $k_2$  fixo obtemos

$$\begin{aligned} A_{m_1}^{\Xi} &\equiv \int_{k_1 k_2} h_0^{(k_1, 0)} h_0^{(k_1-k_2, 0)} h_0^{(k_1, p)} \left[ \sum_{q=0}^4 h_q^{(k_2, 0)} + \bar{h}^{(k_2, 0)} \right] \left[ \sum_{t=0}^4 h_t^{(k_2, p)} + \bar{h}^{(k_2, p)} \right] \\ &= \int_{k_1 k_2} \Delta^2(k_1) \Delta(k_1 - k_2) \Delta_m(k_2) \Delta_m(k_2 - p). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Para o caso  $k_2 \rightarrow \infty$  e  $k_1$  fixo temos

$$\begin{aligned} A_{m_2}^{\Xi} &\equiv \int_{k_1 k_2} h_0^{(k_2, 0)} h_0^{(k_1-k_2, 0)} h_0^{(k_2, p)} \left[ \sum_{l=0}^4 h_l^{(k_1, 0)} + \bar{h}^{(k_1, 0)} \right] \left[ \sum_{s=0}^4 h_s^{(k_1, p)} + \bar{h}^{(k_1, p)} \right] \\ &= \int_{k_1 k_2} \Delta^2(k_2) \Delta(k_1 - k_2) \Delta_m(k_1) \Delta_m(k_1 - p). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Finalmente, no caso  $k_1 \rightarrow \infty$  e  $k_2 \rightarrow \infty$  simultaneamente, obtemos

$$A_{m_3}^{\Xi} \equiv \int_{k_1 k_2} h_0^{(k_1, 0)} h_0^{(k_1-k_2, 0)} h_0^{(k_2, 0)} h_1^{(k_1, p)} h_1^{(k_2, p)} + \int_{k_1 k_2} h_0^{(k_1, 0)} h_2^{(k_1-k_2, 0)} h_0^{(k_2, 0)} h_0^{(k_1, p)} h_0^{(k_2, p)} \quad (5.14)$$



$$A_{m_3}^{\Xi} = \int_{k_1 k_2} \Delta^3(k_1) \Delta(k_1 - k_2) \Delta^3(k_2) (2p \cdot k_1) (2p \cdot k_2) + \int_{k_1 k_2} m^2 \Delta^2(k_1) \Delta^2(k_2) \Delta^2(k_1 - k_2). \quad (5.15)$$

Somamos todos os termos acima e encontramos que o conteúdo divergente de  $\Xi_A^{(2m)}$  está contido na soma  $A_{m_1}^{\Xi} + A_{m_2}^{\Xi} + A_{m_3}^{\Xi} - A_{m_4}^{\Xi}$  onde o último termo é dado por<sup>2</sup>

$$A_{m_4}^{\Xi} \equiv \int_{k_1 k_2} h_0^{(k_1, 0)} h_0^{(k_1 - k_2, 0)} h_0^{(k_2, 0)} h_0^{(k_1, p)} h_0^{(k_2, p)} = \int_{k_1 k_2} \Delta^2(k_2) \Delta(k_1 - k_2) \Delta^2(k_1). \quad (5.16)$$

Como explicado no caso sem massa, usamos as regras da RI em  $k_{1(2)}$  para  $A_{m_{1(2)}}^{\Xi}$  e em  $k_1$  e  $k_2$  para  $A_{m_{3(4)}}^{\Xi}$ . Os resultados são:

$$A_{m_i}^{\Xi} = \bar{A}_{m_i}^{\Xi} + \alpha_{m_i}^{\Xi}, \quad i, j = 1, 2 \quad \text{e} \quad i \neq j \quad (5.17)$$

$$\bar{A}_{m_i}^{\Xi} \equiv \int_{k_j} \Delta_m(k_j) \Delta_m(k_j - p) [I_{\log}(\lambda^2)], \quad (5.18)$$

$$\alpha_{m_i}^{\Xi} \equiv b_6 \int_{k_j} \Delta_m(k_j) \Delta_m(k_j - p) \left[ 2 - \ln \left( -\frac{k_j^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right], \quad (5.19)$$

$$\bar{\alpha}_{m_3}^{\Xi} \equiv A_{m_3}^{\Xi} = \left[ \frac{b_6 p^2}{3} + 2b_6 m^2 \right] I_{\log}(\lambda^2) + 2b_6 p^2 \Upsilon_1, \quad (5.20)$$

$$A_{m_4}^{\Xi} = A_4^{\Xi} = 0. \quad (5.21)$$

Repetimos o procedimento em  $\alpha_{m_i}^{\Xi}$  ( $i = 1, 2$ ). No limite em que  $\mu^2 \rightarrow 0$ , obtemos os seguintes termos divergentes

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{m_i}^{\Xi} &\equiv \int_{k_j} \left[ h_0^{(k_j, 0)} h_2^{(k_j, p)} + h_2^{(k_j, 0)} h_0^{(k_j, p)} \right] \left[ 2b_6 - b_6 \ln \left( -\frac{k_j^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right) \right] \\ &= b_6 p^2 \left[ \frac{I_{\log}^{(2)}(\lambda^2)}{3} - \frac{8}{9} I_{\log}(\lambda^2) + 8\Upsilon_1 - 4\Upsilon_2 \right] + b_6 m^2 \left[ -2I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + 4I_{\log}(\lambda^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Portanto, a soma da parte divergente de  $\Xi_A^{(2m)}$  com os termos de superfície fornece o

---

<sup>2</sup>Pode-se observar que  $A_{m_4}^{\Xi}$  é justamente  $I_4$  e a discussão que segue essa equação (eq. 4.23) também se aplica aqui.

resultado abaixo

$$\frac{\Xi_A^{(2m)\infty}}{ig^4} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \bar{\alpha}_{m_i}^{\Xi} + \bar{A}_{m_1}^{\Xi} + \bar{A}_{m_2}^{\Xi} \right). \quad (5.23)$$

Uma vez mais, os dois últimos termos são justamente aqueles que serão subtraídos pela fórmula de recursão de Bogoliubov (fig. 5). Dessa forma, após o cancelamento das subdivergências temos

$$\frac{\Xi_A^{(2m)}}{ig^4} = \left[ \frac{I_{\log}^{(2)}(\lambda^2)}{3} - \frac{13}{18} I_{\log}(\lambda^2) + 9\Upsilon_1 - 4\Upsilon_2 \right] b_6 p^2 - \left[ 2I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + 5I_{\log}(\lambda^2) \right] b_6 m^2 + \text{finito}. \quad (5.24)$$

Avaliemos agora o gráfico  $P_B^{(2)}$  cuja amplitude é

$$\frac{\Xi_B^{(2m)}}{ig^4} = \frac{1}{2} \int_{k_1 k_2} \Delta_m^2(k_1) \Delta_m(k_1 - p) \Delta_m(k_2) \Delta_m(k_1 - k_2). \quad (5.25)$$

Após aplicarmos a identidade (5.1) nos propagadores e fazermos a seguinte escolha:  $n_0^{(k_1)} = n_1^{(k_1)} = n_0^{(k_1-k_2)} = n_0^{(k_2)} = 3$ , encontramos que todos os termos divergentes provêm do caso  $k_2 \rightarrow \infty$  e  $k_1$  fixo e são dados por

$$\begin{aligned} B_m^{\Xi} &\equiv \int_{k_1 k_2} \left[ h_0^{(k_2, 0)} h_0^{(k_1-k_2, 0)} + h_0^{(k_2, 0)} h_2^{(k_1-k_2, 0)} + h_2^{(k_2, 0)} h_0^{(k_1-k_2, 0)} \right] \times \\ &\quad \left[ \sum_{s=0}^4 h_s^{(k_1, p)} + \bar{h}^{(k_1, p)} \right] \left[ \sum_{l=0}^4 h_l^{(k_1, 0)} + \bar{h}^{(k_1, 0)} \right]^2 \\ &= \int_{k_1 k_2} \left[ 1 + m^2 \Delta(k_1 - k_2) + m^2 \Delta(k_2) \right] \Delta(k_2) \Delta(k_1 - k_2) \Delta_m^2(k_1) \Delta_m(k_1 - p) \\ &= \bar{B}_m^{\Xi} + \beta_m^{\Xi}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\bar{B}_m^{\Xi} \equiv \int_{k_1} \Delta_m^2(k_1) \Delta_m(k_1 - p) \left[ 2m^2 - \frac{k_1^2}{3} \right] I_{\log}(\lambda^2), \quad (5.27)$$

$$\beta_m^{\Xi} \equiv \int_{k_1 k_2} \left\{ k_1^2 \left[ \ln \left( -\frac{k_1^2 - \mu^2}{e^{8/3} \lambda^2} \right)^{\frac{b_6}{3}} + 4\Upsilon_1 \right] - m^2 \ln \left( -\frac{k_1^2 - \mu^2}{e^2 \lambda^2} \right)^{2b_6} \right\} \Delta_m^2(k_1) \Delta_m(k_1 - p). \quad (5.28)$$

Repetimos o procedimento em  $\beta_m^{\Xi}$  e, no limite  $\mu^2 \rightarrow 0$ , obtemos os termos divergentes

abaixo

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_m^\Xi &\equiv \int_{k_1} h_0^{(k_1, 0)} \left[ 2h_2^{(k_1, 0)} h_0^{(k_1, p)} + h_0^{(k_1, 0)} h_2^{(k_1, p)} \right] k_1^2 \left[ \ln \left( -\frac{k_1^2 - \mu^2}{e^{8/3} \lambda^2} \right)^{\frac{b_6}{3}} + 4\Upsilon_1 \right] \\
&\quad - 2b_6 m^2 \int_{k_1} h_0^{(k_1, 0)} h_0^{(k_1, 0)} h_0^{(k_1, p)} \ln \left( -\frac{k_1^2 - \mu^2}{e^2 \lambda^2} \right) \\
&= \left\{ \left( -\frac{b_6 p^2}{9} - b_6 m^2 \right) I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \left[ \left( \frac{10b_6}{27} - \frac{4\Upsilon_1}{3} \right) p^2 + \left( \frac{4b_6}{3} + 12\Upsilon_1 \right) m^2 \right] I_{log}(\lambda^2) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{4b_6 \Upsilon_2}{3} - \frac{8b_6 \Upsilon_1}{9} + 4(\Upsilon_1)^2 \right) p^2 \right\}. \tag{5.29}
\end{aligned}$$

Assim, encontramos que a soma da parte divergente de  $\Xi_B^{(2m)}$  com os termos de superfície é dada por

$$\frac{\Xi_B^{(2m)\infty}}{ig^4} \equiv \frac{1}{2} (\bar{\beta}_m^\Xi + \bar{B}_m^\Xi). \tag{5.30}$$

Uma vez mais, podemos notar que o último termo é subtraído pelo contratermo

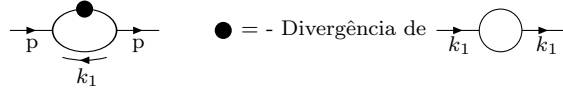


Figura 16: Contratermo para  $P_B^{(2)}$

cuja amplitude é

$$\frac{ig^4}{2} \int_{k_1} \Delta_m^2(k_1) \Delta_m(k_1 - p) \left[ - \left( 2m^2 - \frac{k_1^2}{3} \right) I_{log}(\lambda^2) \right]. \tag{5.31}$$

Portanto, após a subtração da subdivergência temos

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\Xi}_B^{(2m)}}{ig^4} &= \left\{ \left( -\frac{b_6 p^2}{18} - \frac{b_6 m^2}{2} \right) I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \left[ \left( \frac{5b_6}{27} - \frac{2\Upsilon_1}{3} \right) p^2 + \left( \frac{2b_6}{3} + 6\Upsilon_1 \right) m^2 \right] I_{log}(\lambda^2) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{2b_6 \Upsilon_2}{3} - \frac{4b_6 \Upsilon_1}{9} + 2(\Upsilon_1)^2 \right) p^2 + \text{finito} \right\}, \tag{5.32}
\end{aligned}$$

e a renormalização do propagador a dois laços é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\Xi}^{(2m)}}{ig^4} = & \left( \frac{5b_6 p^2}{18} - \frac{5b_6 m^2}{2} \right) I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \left[ \left( \frac{29b_6}{54} + \frac{2\Upsilon_1}{3} \right) p^2 - \left( \frac{17b_6}{3} + 6\Upsilon_1 \right) m^2 \right] I_{log}(\lambda^2) \\ & - \left( \frac{10b_6 \Upsilon_2}{3} - \frac{77b_6 \Upsilon_1}{9} - 2(\Upsilon_1)^2 \right) p^2 + \text{finito}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Uma vez que calculamos as correções radiativas às funções de dois e três pontos em ordem dois laços, somos capazes de avaliar as funções do grupo de renormalização. Como é usual, fazemos as definições

$$\phi_o \equiv Z_\phi^{\frac{1}{2}} \phi, \quad m_o \equiv Z_m^{\frac{1}{2}} m, \quad g_o \equiv Z_g g, \quad (5.34)$$

o que nos permite dividir a lagrangiana nua em duas partes: a lagrangiana renormalizada e os contratermos. Explicitamente,

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2] + \frac{g}{3!} \phi^3 + \frac{1}{2} [A(\partial_\mu \phi)^2 - Bm^2 \phi^2] + \frac{g}{3!} C \phi^3, \\ A \equiv & Z_\phi - 1, \quad B \equiv Z_\phi Z_m - 1, \quad C \equiv Z_g Z_\phi^{\frac{3}{2}} - 1. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Nós também definimos as funções do grupo de renormalização por

$$\gamma \equiv \frac{\lambda}{2} \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \lambda}, \quad \beta \equiv \lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda} = -g \lambda \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \lambda}, \quad \gamma_m \equiv -\frac{2}{m} \lambda \frac{\partial m}{\partial \lambda} = \lambda \frac{\partial \ln Z_m}{\partial \lambda}. \quad (5.36)$$

Supondo-se que  $A$ ,  $B$  e  $C$  têm uma expansão na constante de acoplamento  $g$  como abaixo

$$A = A_1 g^2 + A_2 g^4 + O(g^6), \quad (5.37)$$

$$B = B_1 g^2 + B_2 g^4 + O(g^6), \quad (5.38)$$

$$C = C_1 g^2 + C_2 g^4 + O(g^6), \quad (5.39)$$

obtemos

$$\ln Z_\phi = A_1 g^2 + \left( A_2 - \frac{A_1^2}{2} \right) g^4 + O(g^6), \quad (5.40)$$

$$\ln Z_m = (B_1 - A_1) g^2 + \left( B_2 - A_2 + \frac{A_1^2}{2} - \frac{B_1^2}{2} \right) g^4 + O(g^6), \quad (5.41)$$

$$\ln Z_g = \left( C_1 - \frac{3A_1}{2} \right) g^2 + \left( C_2 - \frac{3A_2}{2} + \frac{3A_1^2}{4} - \frac{C_1^2}{2} \right) g^4 + O(g^6). \quad (5.42)$$

Uma vez que  $\gamma$ ,  $\gamma_m$  e  $\beta$  podem também ser escritas como

$$\gamma = \gamma_1 g^2 + \gamma_2 g^4 + O(g^6), \quad (5.43)$$

$$\gamma_m = \gamma_m^{(1)} g^2 + \gamma_m^{(2)} g^4 + O(g^6), \quad (5.44)$$

$$\beta = \beta_1 g^3 + \beta_2 g^5 + O(g^6), \quad (5.45)$$

deduzimos as relações abaixo

$$\gamma_1 = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial A_1}{\partial \lambda}, \quad (5.46)$$

$$\gamma_2 = \beta_1 A_1 + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( A_2 - \frac{A_1^2}{2} \right), \quad (5.47)$$

$$\gamma_m^{(1)} = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} (B_1 - A_1), \quad (5.48)$$

$$\gamma_m^{(2)} = 2(B_1 - A_1) \beta_1 + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( B_2 - A_2 + \frac{A_1^2}{2} - \frac{B_1^2}{2} \right), \quad (5.49)$$

$$\beta_1 = -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( C_1 - \frac{3A_1}{2} \right), \quad (5.50)$$

$$\beta_2 = -2 \left( C_1 - \frac{3A_1}{2} \right) \beta_1 - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( C_2 - \frac{3A_2}{2} + \frac{3A_1^2}{4} - \frac{C_1^2}{2} \right). \quad (5.51)$$

Como escolhemos um esquema de subtração mínima em RI, os coeficientes  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$  são dados por (equações (5.10), (5.33), (4.63) e fig. 3)

$$A_1 = -\frac{i}{6} I_{\log}(\lambda^2), \quad (5.52)$$

$$A_2 = -\frac{5b_6}{18} I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \left( \frac{29b_6}{54} + \frac{2\Upsilon_1}{3} \right) I_{\log}(\lambda^2), \quad (5.53)$$

$$B_1 = -i I_{\log}(\lambda^2), \quad (5.54)$$

$$B_2 = -\frac{5b_6}{2} I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \left( \frac{17b_6}{3} + 6\Upsilon_1 \right) I_{\log}(\lambda^2), \quad (5.55)$$

$$C_1 = -i I_{\log}(\lambda^2), \quad (5.56)$$

$$C_2 = -\frac{5b_6}{2} I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \left( \frac{17b_6}{3} + 6\Upsilon_1 \right) I_{\log}(\lambda^2). \quad (5.57)$$

Como temos as relações

$$\lambda \frac{\partial I_{\log}(\lambda^2)}{\partial \lambda} = 2\lambda^2 \frac{\partial I_{\log}(\lambda^2)}{\partial \lambda^2} = -2b_6, \quad (5.58)$$

$$\lambda \frac{\partial I_{\log}^{(2)}(\lambda^2)}{\partial \lambda} = -2I_{\log}(\lambda^2) - 3b_6, \quad (5.59)$$

nós finalmente obtemos

$$\gamma = \frac{g^2}{12(4\pi)^3} + \frac{13g^4}{432(4\pi)^6} + \frac{ig^4}{3(4\pi)^3} \Upsilon_1 + O(g^6), \quad (5.60)$$

$$\gamma_m = \frac{5g^2}{6(4\pi)^3} + \frac{97g^4}{108(4\pi)^6} + \frac{16ig^4}{3(4\pi)^3} \Upsilon_1 + O(g^6), \quad (5.61)$$

$$\beta = -\frac{3g^3}{4(4\pi)^3} - \frac{125g^5}{144(4\pi)^6} - \frac{5ig^5}{(4\pi)^3} \Upsilon_1 + O(g^6). \quad (5.62)$$

Pode-se notar que as funções do grupo de renormalização estão contaminadas por termos de superfície arbitrários. À primeira vista, esse fato pode ser um resultado da nossa definição de subtração mínima em RI o qual corresponde apenas à subtração de integrais divergentes básicas. Entretanto, se escolhermos um outro esquema no qual subtraíamos integrais divergentes básicas e termos de superfície obteremos o mesmo resultado acima para os dois primeiros coeficientes da função  $\beta$ . Uma vez que eles são universais, temos que colocar todos os termos de superfície iguais a zero, o que corresponde a invocar invariância de rótulo para os momentos internos. Portanto, somos levados a conjecturar que a invariância de rótulo dos momentos internos é uma simetria fundamental de diagramas de Feynman.

## 6 *Conclusões*

Nesse trabalho mostramos que a Regularização Implícita (RI), a qual é uma forte candidata para ser um esquema de regularização invariante, é consistente com localidade, invariância de Lorentz e unitariedade. Isso foi alcançado através de um algoritmo que implementa RI para diagramas de Feynman a muitos laços de maneira que os termos a serem subtraídos pela fórmula de recursão de Bogoliubov são automaticamente exibidos.

Nós também demonstramos que CIR (a qual corresponde a colocar todos os termos de superfície iguais a zero e é uma condição suficiente para se assegurar invariância das funções de Green sob transformações de calibre e/ou de supersimetria) também deve ser adotada em teorias com menos simetrias como, por exemplo, as teorias com campos escalares. Esse fato nos mostra que invariância nos rótulos dos momentos internos de um gráfico de Feynman é uma simetria fundamental e todos os esquemas de regularização deveriam preservá-la. É importante observar que RI é um programa invariante a  $n$  laços que exhibe as divergências como integrais divergentes básicas. Se avaliamos essas integrais ou os termos de superfície usando-se uma regularização específica (dimensional, Pauli-Villars, etc) torna-se aparente que qualquer regularização que atribui um valor não-nulo aos termos de superfície quebra a invariância de rótulo nos momentos internos e, portanto, atribui um valor não-físico aos coeficientes universais da função  $\beta$ . Exceções a esse caso ocorrem quando lidamos com anomalias em teoria de perturbação as quais se manifestam como uma quebra na invariância de rótulo dos momentos internos [25]. Por exemplo, para exibirmos democraticamente a anomalia existente entre os setores vetorial e axial do triângulo (anomalia ABJ) os termos de superfície devem ser mantidos arbitrários como parâmetros físicos livres.

# Referências

- [1] O. A. Battistel, A. L. Mota and M. C. Nemes, *Mod. Phys. Lett. A* **13**, 1597 (1998).
- [2] A. P. Baeta Scarpelli, M. Sampaio, B. Hiller and M. C. Nemes, *Phys. Rev. D* **64**, 046013 (2001).
- [3] A. P. Baeta Scarpelli, M. Sampaio and M. C. Nemes, *Phys. Rev. D* **63**, 046004 (2001).
- [4] M. Sampaio, A. P. Baeta Scarpelli, B. Hiller, A. Brizola, M. C. Nemes and S. Gobira, *Phys. Rev. D* **65**, 125023 (2002).
- [5] M. D. Sampaio, A. P. Baeta Scarpelli, J. E. Ottoni and M. C. Nemes, *Int. J. Theor. Phys.* **45**, 436 (2006).
- [6] C. R. Pontes, A. P. Baeta Scarpelli, M. Sampaio, J. L. Acebal and M. C. Nemes, *Eur. Phys. J. C* **53**, 121 (2008).
- [7] O. A. Battistel and M. C. Nemes, *Phys. Rev. D* **59**, 055010 (1999).
- [8] D. E. Carneiro, A. P. Baeta Scarpelli, M. Sampaio and M. C. Nemes, *J. High Energy Phys.* **0312**, 044 (2003).
- [9] L. A.M. Souza, M. Sampaio and M. C. Nemes, *Phys. Lett. B* **632**, 717 (2006).
- [10] J. E. Ottoni, A. P. Baeta Scarpelli, M. Sampaio and M. C. Nemes, *Phys. Lett. B* **642**, 253 (2006).
- [11] E.W. Dias, B. Hiller, A. L. Mota, M. C. Nemes, M. Sampaio and A. A. Osipov, *Mod. Phys. Lett. A* **21**, 339 (2006).
- [12] B. Hiller, A. L. Mota, M. C. Nemes, A. A. Osipov and M. Sampaio, *Nucl. Phys. A* **769**, 53 (2006).
- [13] O. A. Battistel and G. Dallabona, *Eur. Phys. J. C* **45**, 721 (2006).
- [14] C. R. Pontes, M. C. Nemes, A. P. Baeta Scarpelli and M. Sampaio, *J. Phys. G* **34**, 2215 (2007).
- [15] A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes and B. Hiller, *Eur. Phys. J. C* **56**, 571 (2008).
- [16] E. W. Dias, A. P. Baeta Scarpelli, L. C. T. Brito, M. Sampaio and M. C. Nemes, *Eur. Phys. J. C* **55**, 667 (2008).
- [17] N. N. Bogoliubov and O. S. Parasiuk, *Acta Math.* **97**, 227 (1957); O. S. Parasiuk, *Ukrain. Mat. Zh.* **12**, 287 (1960); N. N. Bogoliubov and O. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, 4th ed. (Wiley, New York, 1980).



- [18] K. Hepp, *Commun. Math. Phys.* **2**, 301 (1966); *Lect. Notes in Physics* **2** (Springer, 1969).
- [19] W. Zimmermann, *Commun. Math. Phys.* **11**, 1 (1968); *Commun. Math. Phys.* **15**, 208 (1969).
- [20] T. Muta, *Foundations of QCD*, (World Scientific, Singapore, 1987).
- [21] H. G. Fargnoli, A. P. Baeta Scarpelli, L. C. T. Brito, B. Hiller, Marcos Sampaio, M. C. Nemes and A. A. Osipov, arXiv:1001.1543 [hep-th], submetido; H. G. Fargnoli, B. Hiller, A. P. Baeta Scarpelli, Marcos Sampaio, M. C. Nemes, arxiv:1009.2976 [hep-th], submetido.
- [22] B. Delamotte, *Am. J. Phys.* **72**, 170 (2004).
- [23] M. Perez-Victoria, *J. High Energy Phys.* **0104**, 032 (2001).
- [24] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* 2nd ed. (Cambridge University Press, UK, 1996).
- [25] S. B. Treiman, E. Witten, R. Jackiw and B. Zumino, *Current Algebra and Anomalies*, (World Scientific, Singapore, 1985).