

José Roberto Pereira Junior

*Invariância de rótulo, termos de superfície  
e simetria de calibre em diagramas de  
Feynman a um laço em eletrodinâmica  
quântica*

Belo Horizonte

2011

José Roberto Pereira Junior

*Invariância de rótulo, termos de superfície  
e simetria de calibre em diagramas de  
Feynman a um laço em eletrodinâmica  
quântica*

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE  
FEDERAL DE MINAS GERAIS, como re-  
quisito parcial para a obtenção do grau de  
MESTRE EM FÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Marcos Donizeti Ro-  
drigues Sampaio

Área de concentração: Teoria quântica de  
campos

Belo Horizonte

2011

*A Deus*

# *Agradecimentos*

Agradeço a Deus por tudo.

Agradeço aos meus pais José Roberto e Ana Maria pelo amor, orações e incentivos.

Agradeço aos meus irmãos Ricardo e Felipe pela amizade e companherismo.

Agradeço aos professores Marcos Sampaio e Maria Carolina pela oportunidade.

Agradeço aos meus familiares.

Agradeço ao Helvécio e ao Adriano, pela ajuda neste trabalho e amizade.

Agradeço aos demais alunos de tqc, Jean, Gustavo e Luellerson pela amizade.

Agradeço aos alunos da turma de 2005.

Agradeço aos funcionários do departamento.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro.

*Te vejo poeta, quando nasce o dia  
E no fim do dia, quando a noite vem!  
Te vejo poeta na flor escondida,  
No vento que instiga mais um temporal!*

*Te vejo poeta no andar das pessoas,  
Nessas coisas boas que a vida me dá!  
Te vejo poeta na velha amizade,  
Na imensa saudade que trago de lá!*

*Contudo, um poema,  
Tua obra de arte, destacasse à parte,  
Numa cruz vulgar,  
Custando o suplício de seu Filho amado,  
Mais alta expressão do ato de amar!*

*João Alexandre  
Guilherme Kerr*

# *Resumo*

O propósito do presente trabalho é entender a relação entre invariância de rótulo, termos de superfície e invariância de calibre usando a eletrodinâmica quântica como exemplo de trabalho. Discutimos duas abordagens. Por um lado, Mc Keon e colaboradores, dentro de uma abordagem em 4-dimensões, argumentam que a escolha de um rótulo particular nos momentos internos implementa invariância de calibre. Por outro lado, na abordagem discutida aqui estabelecemos invariância de rótulo como uma simetria fundamental em diagramas de Feynman. Verificamos que a fixação de termos de superfície que surgem em regularização implícita automaticamente fornecem invariância de rótulo e calibre em eletrodinâmica quântica nas amplitudes em um laço.

Palavras-chave: Diagramas de Feynman, Rótulos, Termos de Superfície, Anomalias, Simetrias.

# *Abstract*

The purpose of the present work is to shed light on the relationship between momentum routing invariance surface terms and gauge invariance using quantum electrodynamics as a working example. We discuss two approaches. On one hand, Mc Keon and collaborators, within a 4-dimensional approach, agree that choosing a particular routing in the internal momentum implements gauge invariance. On the other hand, in the approach we discuss here we establish momentum routing invariance as a fundamental symmetry of a Feynman diagrams. We verify that setting surface terms which are by products of workings in Implicit regularization automatically delivers gauge and momentum routing invariance amplitude in quantum electrodynamics at one loop order.

Keywords: Feynman Diagrams, Labels, Surface Terms, Anomalies, Symmetries.

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 9
<b>2</b>	<b>A Eletrodinâmica Quântica</b>	p. 13
2.1	Introdução . . . . .	p. 13
2.2	Eletrodinâmica quântica e simetria de calibre . . . . .	p. 13
2.2.1	A lagrangiana da eletrodinâmica quântica . . . . .	p. 14
2.2.2	Diagramas de Feynman . . . . .	p. 16
2.2.3	Integrais de trajetória . . . . .	p. 17
2.2.4	O funcional gerador e teoria perturbativa . . . . .	p. 19
2.2.5	Infinitos em teoria quântica de campos . . . . .	p. 21
<b>3</b>	<b>Regularização Implícita</b>	p. 24
3.1	Introdução . . . . .	p. 24
3.2	Sobre regularizações . . . . .	p. 24
3.2.1	Alguns métodos . . . . .	p. 25
3.3	Regularização implícita . . . . .	p. 25
3.4	Aplicação do método . . . . .	p. 27
3.4.1	Tensor de polarização do vácuo . . . . .	p. 27
3.4.2	A auto energia do elétron . . . . .	p. 34
3.4.3	Correção do vértice . . . . .	p. 35
<b>4</b>	<b>Anomalias</b>	p. 40
4.1	Introdução . . . . .	p. 40



4.2	Anomalias em teoria quântica de campos . . . . .	p. 40
4.3	Anomalia do triângulo AVV . . . . .	p. 41
<b>5</b>	<b>Conclusão e Perspectiva</b>	p. 44
	<b>Apêndice A – Matrizes de Dirac</b>	p. 46
A.1	Álgebra Clifford . . . . .	p. 46
A.1.1	Manipulações algébricas com matrizes de Dirac . . . . .	p. 47
	<b>Apêndice B – Cálculo das integrais <math>I_{\mu\nu}</math>, <math>I_\mu</math> e <math>I_2</math></b>	p. 49
B.1	Integrais . . . . .	p. 49
B.1.1	Integral $I_2$ . . . . .	p. 49
B.1.2	Integral $I_\mu$ . . . . .	p. 50
B.1.3	Integral $I_{\mu\nu}$ . . . . .	p. 51
B.2	Relação de escala . . . . .	p. 53
	<b>Referências</b>	p. 55

# 1 *Introdução*

*No princípio Deus criou os céus e a terra. Estava a terra sem forma e vazia; trevas cobriam a face do abismo, e o Espírito de Deus se movia sobre a face das águas. Disse Deus: “Haja luz”, e houve luz.*

A física moderna repousa sobre dois pilares: A teoria da relatividade especial (TRE) e a mecânica quântica (MQ). A TRE fornece a estrutura teórica para a compreensão de sistemas que se movem com velocidades próximas da velocidade da luz, tendo como postulados a invariância das leis da física entre referenciais inerciais (covariância das leis físicas) e a independência do movimento uniforme da luz para qualquer observador. Do ponto de vista matemático, existem transformações que relacionam eventos e os valores de grandezas físicas medidas por estes observadores. Elas são conhecidas como transformações de Lorentz [3], [5], [6] e [7]. A mecânica quântica por sua vez, fornece a estrutura teórica para uma compreensão do universo na escala microscópica, ou seja, na descrição de moléculas, átomos e partículas elementares [5] e [28]. A teoria quântica de campos está fundamentada sobre os conceitos da TRE e os da mecânica quântica, ou seja, junta princípios das duas teorias. Para ver como isso acontece, vamos seguir uma linha de raciocínio usando o eletromagnetismo como exemplo.

O eletromagnetismo é essencialmente uma teoria relativística, pois é consistente com as transformações de Lorentz. Isso significa que as equações de Maxwell não mudam sua forma quando submetidas a essas transformações. É também sabido que as interações eletromagnéticas desempenham um papel importante na compreensão da estrutura da matéria. As cargas e correntes associadas aos seus constituintes são as fontes do campo de radiação eletromagnética e estes por sua vez estão acoplados à matéria. A dinâmica de uma partícula de massa  $m$  e carga  $e$  num campo eletromagnético externo descrito em termos de um potencial vetor  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$  e de um potencial escalar  $\Phi = \Phi(\vec{r}, t)$  relacionados com os campos elétrico e magnético através das relações,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r}, t) \quad \text{e} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

pode ser definida através da lagrangiana:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}})^2 + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - e\Phi(\vec{r}, t). \quad (1.2)$$

Essa é uma descrição clássica do campo de radiação e permite uma passagem do que se denomina eletrodinâmica clássica para a eletrodinâmica quântica (QED) que é o assunto desse trabalho. Para exibir o caráter dual onda-partícula da luz e revelar as características quânticas da interação entre radiação e matéria, é necessário quantizar o campo de radiação, dando assim origem a uma teoria quântica de campos (TQC). Ao escrever a energia do campo eletromagnético em termos dos modos normais de vibração das componentes de Fourier dos potenciais, nota-se que ela consiste de uma superposição de osciladores harmônicos, os chamados osciladores de campo. Um dos resultados desse programa é o surgimento de fótons, os quanta do campo de radiação. Em razão disto pode-se imaginar que as entidades básicas da natureza são campos. Uma TQC é uma teoria local. Isso compatibiliza a estrutura das interações com a TRE [3], [5] e [28].

Existem quatro interações fundamentais na natureza: As interações forte (responsável pela estabilidade nuclear), fraca (responsável pelo processo de decaimento radioativo  $\beta$ , por exemplo), eletromagnética e gravitacional. O êxito da eletrodinâmica quântica levou os físicos, nas décadas de 60 e 70 a buscar caminhos análogos para alcançar o entendimento das interações forte, fraca e gravitacional em termos de mecânica quântica. Essa estratégia revelou-se imensamente frutífera com relação às interações forte e fraca, mas ainda sem sucesso em relação a interação gravitacional. Seguindo uma receita análoga a da eletrodinâmica quântica, os físicos conseguiram construir teorias quânticas de campos para as interações forte e fraca, sendo a teoria para a interação forte denominada “Quantum Chromodynamics”(QCD) e a teoria para a interação fraca “Quantum Flavor Dynamics”(QFD). Uma TQC descreve as interações como troca de partículas. A interação forte é mediada pelo Glúon, bóson vetorial não massivo com spin 1. No caso da interação fraca temos os bósons  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$ , campos massivos com spin iguais a -1. A interação eletromagnética é mediada pelo fóton, uma partícula não massiva de spin 1. Finalmente temos a gravidade, cuja tentativa de quantização se dá por meio de uma teoria conhecida como gravitação quântica. Uma consequência dessa teoria é a existência de uma partícula não massiva de spin 2 que media a interação gravitacional, o gráviton. Uma questão interessante a se notar é que a interação fraca é a única que possui campos massivos como mediadores da interação. A pergunta que se faz é; por que isso acontece? Essa diferença entre os campos serem massivos na interação fraca e não massivos nas demais provem de uma quebra de simetria. O mecanismo que explica como é gerado massa nos bósons

$W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$  é denominado mecanismo de Higgs. Ele requer a existência de um campo escalar massivo capaz de executar essa tarefa, o bóson de Higgs [3] e [4].

Desde a época de Einstein, os físicos procuram por uma teoria unificada das interações fundamentais da natureza. A unificação da interação eletromagnética com a teoria fraca da origem a interação eletrofraca. Caminhando nessa direção temos o modelo padrão da física de partículas que é a união dos campos eletrofracos com a interação forte. Cada uma das interações com exceção da gravitação é descrita como uma teoria de grupos, sendo  $U(1)$  o grupo da interação eletromagnética,  $SU(2)$  o da interação fraca e  $SU(3)$  da interação forte.  $SU(2) \otimes U(1)$  é o grupo dos campos eletrofracos e o modelo padrão é o grupo  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ . Várias previsões do modelo padrão já foram confirmadas e a expectativa é grande com relação às outras, como por exemplo a existência do bóson de Higgs. O LHC (Large Hadron Collider, localizado no CERN), irá testar de forma eficiente as previsões do modelo padrão e o limite de sua validade [3], [4] e [9].

Nesse trabalho vamos estudar a eletrodinâmica quântica. Uma TQC é descrita por uma lagrangiana que contém informação sobre o sistema. É a lagrangiana que nos fornece as equações de movimento que determinam sua evolução espaço-temporal. No caso da QED essas equações não são exatamente integráveis, ou seja, para obtermos suas soluções precisamos de técnicas perturbativas. Feynman associou aos termos da série perturbativa do funcional gerador das funções de Green, diagramas que receberam seu nome, os diagramas de Feynman. No entanto os termos da série perturbativa são expressões matemáticas complicadas que divergem, ou seja, são integrais cujo resultado após suas realizações são infinitos. Esses infinitos estão relacionados com o valor esperado do produto de campos que não são bem definidos no mesmo ponto [8]. Uma forma de lidar com essa dificuldade é através de uma técnica denominada renormalização, que consiste na adição de contra-termos na lagrangiana que cancelam esses infinitos. Entretanto, antes da renormalização precisamos regularizar a teoria. Regularização é um processo no qual os infinitos são reavaliados de forma a se saber como esses se comportam, um tipo por exemplo, é a regularização por “cutoff”. Utilizaremos neste trabalho a regularização implícita, um processo implementado no espaço dos momentos criado com o objetivo de separar as divergências nos diagramas de Feynman sem a necessidade de calculá-las explicitamente. Elas são escritas como divergências básicas, os  $I_{log}$  e  $I_{quad}$ , que são absorvidos na renormalização dos campos, massas e acoplamentos da teoria. Como exemplo de aplicação do método temos o cálculo (separação da parte finita da infinita) do tensor de polarização do vácuo, auto energia do elétron e correção do vértice com rótulos arbitrários. Verificaremos a simetria de calibre através das identidades de Ward com o intuito de ver como o rótulos

dos momentos internos estão relacionados com os termos de superfície e invariância de rótulo.

A dissertação está organizada em cinco capítulos. No capítulo 2, discutimos aspectos gerais da eletrodinâmica quântica onde deduzimos as regras de Feynman que nos permite montar os diagramas que vamos estudar. No capítulo 3, apresentamos a regularização implícita e alguns exemplos de aplicações do método. Comparamos os resultados da regularização implícita com os trabalhos do Mc Keon e colaboradores. No capítulo 4 abordamos e discutimos anomalias em TQC e finalmente no capítulo 5 concluímos o trabalho.

## 2 *A Eletrodinâmica Quântica*

*A teoria da eletrodinâmica quântica descreve a natureza como absurda do ponto de vista do senso comum. E nisso está de pleno acordo com o experimento.*

*Por isso, espero que possam aceitar a natureza como ela é; absurda.*

*Richard Feynman*

### 2.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos a eletrodinâmica quântica como uma teoria de calibre e discutiremos quantização de campos por integrais de trajetória, de onde obteremos o conceito de funcional gerador e então deduziremos as regras de Feynman para o campo de Klein-Gordon livre, exemplificando como obter as regras para outras teorias. Terminamos o capítulo discutindo infinitos em cálculos de diagramas de Feynman.

### 2.2 Eletrodinâmica quântica e simetria de calibre

Uma das idéias fundamentais em física, é a idéia de simetrias e leis de conservação. A conexão entre simetrias e leis de conservação se dá através do formalismo lagrangiano. No âmbito da teoria clássica de campos existe um teorema denominado teorema de Noether, que estabelece essa conexão. A cada transformação contínua que deixa a densidade de lagrangiana inalterada, corresponde uma corrente que satisfaz uma equação de continuidade, ou seja, uma grandeza conservada e uma constante de movimento. Por exemplo, a lei de conservação da energia está relacionada com a homogeneidade das translações no tempo, a conservação do momento linear está ligada à homogeneidade das translações espaciais e a conservação do momento angular está relacionada com a isotropia das rotações espaciais [5].

Uma teoria quântica de campos é uma teoria de muitos corpos. Um formalismo bastante apropriado para descrever a dinâmica de um sistema físico com um número grande de graus de liberdade é o método que consiste em escrever lagrangianas e pelo princípio de ação mínima de Hamilton, obter as equações de movimento que fornecem a

evolução espaço temporal do sistema que em geral são equações diferenciais acopladas. Um ingrediente básico na construção de lagrangianas em teoria quântica de campos, são as simetrias que a natureza apresenta e essas por sua vez são ditadas pela experiência. Outro ingrediente importante são os campos. São as simetrias que determinam como os campos interagem. Isso se manifesta matematicamente através da maneira pela qual como os campos se transformam e deixam a lagrangiana invariante. Essa invariância está ligada a correntes conservadas e como é sabido estas estão associadas a observáveis físicos [5] e [21].

Simetrias podem ser globais ou locais. As simetrias locais são também chamadas de simetria de calibre (Gauge). Dentro do quadro que estamos expondo, uma teoria construída sob a orientação dessa prescrição, se utilizando de simetrias locais é dita uma teoria de calibre. A teoria de calibre mais simples que existe é a eletrodinâmica quântica e é dentro desse contexto uma teoria com simetria local abeliana  $U(1)$  [3].

### 2.2.1 A lagrangiana da eletrodinâmica quântica

O objeto de preocupação da eletrodinâmica quântica é a descrição da dinâmica de um campo fermiônico massivo, o elétron. Ele é uma partícula de spin  $1/2$ . A parte livre da lagrangiana é:

$$\mathcal{L}_{livre} = \bar{\psi}(x)[i\gamma^\mu(\partial_\mu - m)]\psi(x), \quad (2.1)$$

cujas minimização fornece uma equação de movimento conhecida como equação de Dirac.  $\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$  e  $\psi(x)$  são os espinores de Dirac,  $\gamma^\mu$  são matrizes  $4 \times 4$  denominadas matrizes de Dirac e  $m$  é a massa do elétron. Entende-se aqui que  $x$  é uma notação para o quadri vetor  $x^\mu = (ct, \vec{x})$ .

Sob a transformação global  $U(1)$ :

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \exp[-i\alpha]\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \exp[i\alpha]\bar{\psi}(x), \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro que não depende das coordenadas do espaço-tempo, a lagrangiana (2.1) é invariante frente a essa transformação. Se fizermos agora  $\alpha$  depender das coordenadas do espaço-tempo ou seja,  $\alpha = \alpha(x)$  temos a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = \exp\{-i\alpha(x)\}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \exp\{i\alpha(x)\}\bar{\psi}(x). \end{aligned} \quad (2.3)$$

O termo que possui derivada em (2.1) sofrerá a seguinte transformação:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) &\rightarrow \exp\{i\alpha(x)\}\bar{\psi}(x)\partial_\mu[\exp\{-i\alpha(x)\}\psi(x)] \\
&= \exp\{i\alpha(x)\}\bar{\psi}(x)[\partial_\mu(\exp\{-i\alpha(x)\})\psi(x) + \exp\{-i\alpha(x)\}\partial_\mu\psi(x)] \\
&= \exp\{i\alpha(x)\}\bar{\psi}(x)\partial_\mu(\exp\{-i\alpha(x)\})\psi(x) + \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) \\
&= \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) + \exp\{i\alpha(x)\}\bar{\psi}(x)[-i\exp\{-i\alpha(x)\}\partial_\mu\alpha(x)]\psi(x) \\
&= \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) - i\bar{\psi}(x)\partial_\mu[\alpha(x)]\psi(x).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Vemos que esse termo ganha um fator  $-i\bar{\psi}(x)\partial_\mu[\alpha(x)]\psi(x)$ , o que nos leva obviamente concluir que a lagrangiana não é invariante sob a transformação local (2.3). No entanto queremos ter invariância da lagrangiana sob essa transformação. Sendo assim, vamos adotar a postura de exigir que (2.1) seja invariante frente a transformação local. Para que nossa missão seja bem sucedida, temos que lançar mão do conceito de derivada covariante  $D_\mu$ . Ela é definida como:

$$D_\mu\psi(x) = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi(x), \tag{2.5}$$

$A_\mu(x)$  é um campo vetorial adicional que se transforma segundo,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \tag{2.6}$$

onde  $e$  é um parâmetro livre, a constante de acoplamento elétron-fóton. A derivada assim definida possui a seguinte lei de transformação:

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow [D_\mu\psi(x)]' = \exp\{-i\alpha(x)\}[D_\mu\psi(x)]. \tag{2.7}$$

De posse desse suplemento teórico é imediato ver que (2.1) agora é invariante sob a transformação (2.3).

Vamos agora introduzir um termo na lagrangiana que corresponde a parte livre do campo vetorial  $A_\mu$ . O termo mais simples que podemos inserir que seja invariante de calibre de forma a preservar o caráter invariante da lagrangiana como um todo é:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{2.8}$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.9}$$

é o tensor do campo eletromagnético. A equação (2.8) é a parte livre da lagrangiana do campo eletromagnético.  $\mathcal{L}_M$  significa lagrangiana livre de Maxwell. Juntando todas essas



idéias podemos montar a lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)[i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu(x) - m)]\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

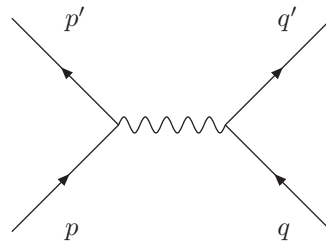
que pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)[i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu(x))]\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

A expressão vista em (2.11) é a lagrangiana da Eletrodinâmica Quântica; invariante por transformação de calibre, ou seja, com simetria abeliana U(1) e invariante de Lorentz [3], [4], [5], [6], [7] e [22].

## 2.2.2 Diagramas de Feynman

Antes de deduzir as regras de Feynman para a teoria de Klein-Gordon, daremos um exemplo de um processo que pode ser representado por um diagrama.



Esse diagrama mostra dois elétrons aproximando-se com momento  $p$  e  $q$ . O elétron com momento  $p$  emite um fóton no vértice da esquerda e o outro elétron com momento  $q$  absorve-o no vértice da direita. Ambos os elétrons tem a direção dos seus momentos modificada para  $p'$  e  $q'$  respectivamente como resultado da interação.

A física clássica explicaria isso dizendo que os elétrons exercem uma força repulsiva um sobre o outro. A teoria quântica de campos por outro lado encara esse fato de maneira diferente. O que existe na realidade é uma interação entre as partículas mediada por um campo, isto é, o fóton. Uma característica básica dessa teoria é que partículas podem ser criadas e destruídas. No diagrama em questão, o fóton é criado num vértice e destruído no outro.

De posse da lagrangiana (2.11) podemos agora obter as equações de Euler-Lagrange que neste caso são três equações de movimento cuja a solução fornece a descrição completa da dinâmica do sistema físico em questão. Essas três equações são acopladas como já mencionado e envolvem os campos  $\bar{\psi}$ ,  $\psi$  e  $A_\mu$ . Acontece que a solução exata desse sistema de equações é uma tarefa inviável, sendo assim necessária a adoção de métodos

perturbativos. Para isso vamos discutir a formulação de integrais de trajetória devida a Richard Feynman.

### 2.2.3 Integrais de trajetória

Existem algumas maneiras de quantizar campos clássicos. Para citar dois exemplos temos a quantização canônica e a quantização por integrais de trajetória [8] e [9].

Vamos desenvolver aqui o método de integrais de trajetória que se revela bastante útil no caso de quantização de teorias de calibre.

Sabemos da mecânica quântica que o estado de uma partícula no instante  $t$  é completamente especificado pelo vetor  $\psi(q, t)$ , satisfazendo a equação diferencial:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(q, t) = \hat{H}(q, t) \psi(q, t), \quad (2.12)$$

dita equação de Schroedinger. A solução da equação de Schroedinger em termos das autofunções do operador  $\hat{H}$  é:

$$\psi(q, t) = \sum_n c_n u_n(q) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right), \quad (2.13)$$

onde  $\hat{H}u_n(q) = E_n u_n(q)$ .  $u_n(q)$  é a base do espaço vetorial gerado pela solução da equação (2.12). A solução da equação de Schroedinger representada pela expressão dada em (2.13), só ficará perfeitamente estabelecida se conhecermos os  $c'_n$ s. Eles são dados por:

$$c_n = \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_n t\right) \int u_n^*(q) \psi(q, t) d^3 q. \quad (2.14)$$

A expressão (2.14) é obtida simplesmente multiplicando (2.13) a esquerda por  $u_m^*$  e depois integrando sobre todo espaço. Se o sistema estiver no estado  $\psi(q_1, t_1)$  e evoluir para  $\psi(q_2, t_2)$ , essa mudança é descrita por:

$$\psi(q_2, t_2) = \int K_F(q_2, t_2; q_1, t_1) \psi(q_1, t_1) d^3 q_1, \quad (2.15)$$

onde

$$K_F(q_2, t_2; q_1, t_1) = \sum_n u_n(q_2) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t_2\right) u_n^*(q_1) \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_n t_1\right). \quad (2.16)$$

Esse resultado por sua vez é obtido simplesmente substituindo (2.14) em (2.13), considerando os pares  $(q_1, t_1)$  e  $(q_2, t_2)$ . A quantidade expressa em (2.16) é o Kernel da equação diferencial de Schroedinger e é denominado propagador de Feynman. Podemos concluir imediatamente que para conhecermos a solução da equação de Schroedinger, é

necessário conhecer o propagador de Feynman. O propagador é interpretado então como uma densidade de probabilidade de transição de um estado para outro. Seguindo a idéia de Feynman, ao invés de ir diretamente do estado  $\psi(q_1, t_1)$  para  $\psi(q_2, t_2)$ , passamos por um estado intermediário  $\psi(q, t)$ . Aplicando repetidamente (2.15) vamos obter:

$$\psi(q_f, t_f) = \int \int K_F(q_f, t_f; q, t) K_F(q, t; q_i, t_i) \psi(q_i, t_i) d^3 q_i d^3 q, \quad (2.17)$$

onde fizemos  $q_2 = q_f$  e  $q_1 = q_i$  para facilitar a notação.

Podemos fazer  $n$  transições entre os estados inicial e final usando essa mesma idéia. Assim teremos:

$$K_F(q_f, t_f; q_i, t_i) = \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int \cdots \int d^3 q_1 \cdots d^3 q_n \langle q_f, t_f | q_n, t_n \rangle \cdots \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle. \quad (2.18)$$

Por outro lado, a mecânica quântica nos permite escrever:

$$|q_f, t_f\rangle = \exp\left[i\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right]|q_i, t_i\rangle. \quad (2.19)$$

Inserindo a equação (2.19) em (2.18) e dividindo o intervalo de tempo entre os eventos em pequenos sub intervalos de tamanho  $\tau = t_{j+1} - t_j$ , teremos  $n$  termos do tipo:

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} | \exp\left[-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\tau\right] | q_j \rangle. \quad (2.20)$$

Para cada elemento de matriz de tipo (2.20) procedemos assim:

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \exp\left[-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\tau\right] | q_j \rangle &= \langle q_{j+1} | 1 - i\frac{\hat{H}}{\hbar}\tau + \vartheta(\tau^2) | q_j \rangle \\ &= \delta(q_{j+1} - q_j) - i\frac{\tau}{\hbar} \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde termos de ordem maior ou igual a 2 em  $\tau$  foram descartados. Introduzindo uma relação de completeza  $\int dp_j |p_j\rangle \langle p_j| = 1$  no primeiro termo da equação acima chegamos em:

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \exp\left[-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\tau\right] | q_j \rangle &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_j \exp\left[i\hbar p_j(q_{j+1} - q_j)\right] \\ &\quad - i\frac{\tau}{\hbar} \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Para o termo que envolve o elemento de matriz  $\langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle$ , usamos o seguinte hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q), \quad (2.23)$$

assim temos:

$$\langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle = \frac{1}{\hbar} \int dp_j \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j) \right] \hat{H}(p_j, \bar{q}_j), \quad (2.24)$$

onde  $\bar{q}_j = \frac{1}{2}(q_j + q_{j+1})$ . Concluimos então que,

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \frac{1}{\hbar} \int dp_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [p_j (q_{j+1} - q_j) - \tau \hat{H}(p_j, \bar{q}_j)] \right\}. \quad (2.25)$$

Assim (2.18) toma a seguinte forma depois de considerar as  $n$  contribuições:

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{i\hbar\tau} \right)^{\frac{(n+1)}{2}} \int \prod_{j=1}^n dq_j \exp \left\{ \frac{i\tau}{\hbar} \sum_{j=0}^n \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{\tau} \right)^2 - V(q) \right] \right\}, \quad (2.26)$$

que no limite contínuo de  $n$  indo para infinito ( $n \rightarrow \infty$ ) será:

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \right\}. \quad (2.27)$$

$L(q, \dot{q})$  é a lagrangiana clássica. A função (2.27) é dita Funcional gerador [8].

## 2.2.4 O funcional gerador e teoria perturbativa

Uma teoria de campos quantizada pode ser definida a partir de funcionais geradores das funções de Green. Esta linguagem usando os conceitos de integrais de trajetória é adequada ao estudo de teorias de calibre. Vamos considerar por uma questão de simplicidade uma teoria de um único campo escalar  $\phi(x)$  onde  $x = (ct, \vec{x})$  e seja  $Z(J)$  o funcional gerador das funções de Green, definido por:

$$Z(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \langle 0 | T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle J(x_1) \cdots J(x_n), \quad (2.28)$$

onde

$$G^{(N)}(x_1, \cdots, x_N) = (-i)^N \frac{\delta^N}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_N)} Z(J) \Big|_{J=0}. \quad (2.29)$$

Vemos com isso que  $Z(J)$  determina as funções de Green  $G^{(N)}$  que por sua vez determinam o funcional gerador. A generalização para situações mais complexas é válida [8] e [9].

No formalismo de integrais de trajetória  $Z(J)$  é dado por:

$$Z(J) = \aleph \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int \left( \mathcal{L} + J(x)\phi(x) + \frac{i}{2} \epsilon \phi^2(x) \right) d^4x \right], \quad (2.30)$$

onde  $\mathcal{L}$  é a lagrangiana do modelo e  $\aleph$  é o fator de normalização, escolhido de modo a garantir  $Z(0) = 1$ .

Uma teoria que atende bem os nossos propósitos neste momento é a teoria de Klein-

Gordon livre cujo a lagrangiana é:

$$\mathcal{L}_{K.G} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{m^2}{2} \phi^2(x). \quad (2.31)$$

Substituindo (2.31) em (2.30) e desenvolvendo a ação no argumento da exponencial através de uma integração por partes vamos obter:

$$Z_0(J) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi - \phi J \right] \right\}. \quad (2.32)$$

Fazendo  $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$  temos que:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi - \phi J \right] \rightarrow \\ & \rightarrow \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi + \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi_0 \right] \\ & + \int \left[ \frac{1}{2} \phi_0 (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi_0 - \phi_0 J \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Se  $\phi_0$  for escolhido para satisfizer

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi_0 = J, \quad (2.34)$$

então isso fornece

$$\int d^4x \left[ \frac{1}{2} \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi - \frac{1}{2} \phi_0 J \right]. \quad (2.35)$$

Então a solução de (2.34) é dada por:

$$\phi_0(x) = - \int \Delta_F(x-y) J(y) d^4y. \quad (2.36)$$

$\Delta_F(x-y)$  é o propagador de Feynman e obedece:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \Delta_F(x) = -\delta^4(x). \quad (2.37)$$

Substituindo (2.35) e (2.36) em (2.32) vem:

$$\begin{aligned} Z_0(J) &= \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right\} \\ &\times \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi \right\} \\ &= \aleph \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right\}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde

$$\aleph = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi \right\}. \quad (2.39)$$

O propagador  $\Delta_F(x)$  tem uma representação de Fourier dada por:

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ikx)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.40)$$

A regra de Feynman associada ao propagador da expressão (2.40) é:

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ p \end{array} \quad \frac{i}{p^2 - m^2}$$

que é a regra de Feynman para o propagador livre na teoria de Klein-Gordon [5], [8] e [9].

As regras de Feynman para QED obtidas a partir de (2.11) são:

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ p \end{array} \quad \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \quad -ie\gamma^\mu$$

$$\begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ p \end{array} \quad \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$$

que são respectivamente o propagador do elétron, o vértice fundamental da QED e o propagador do fóton. Podemos construir com essas três regras a série perturbativa em todas as ordens na constante de acoplamento, ou seja, os diagramas de Feynman a  $n$  laços [3] e [8]. Nessa dissertação no entanto vamos estudar diagramas em um laço. Os gráficos necessários serão construídos no capítulo 3.

## 2.2.5 Infinitos em teoria quântica de campos

As amplitudes construídas a partir das regras de Feynman apresentam problemas já no segundo termo da série perturbativa, ou seja, em gráficos de um laço. Considere a densidade de lagrangiana para uma teoria de campo bem simples, a teoria escalar  $\phi^3$  em quatro dimensões,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{3!}\phi^3. \quad (2.41)$$

Na teoria  $\phi^3$  o gráfico de um laço mais simples (gráfico “tadpole”) apresenta o problema, conforme se vê abaixo:



$$\mu = (ig)i \int_k \frac{1}{k^2 - m^2}$$

A amplitude relacionada com o gráfico é uma integral que diverge. Para ver isto basta uma simples contagem de potências. O processo é feito como segue:

1. Conta-se o número de momentos no numerador.
2. Conta-se o número de momentos no denominador.
3. Subtrai-se o número de momentos do numerador pelo número de momentos do denominador.
4. Se o resultado for maior ou igual a zero, a integral diverge no setor ultravioleta. Se o resultado for menor que zero, a integral converge.

Com o intuito de ilustrar o problema, consideraremos a integral:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1) \Big|_0^\infty \rightarrow \infty \quad (2.42)$$

Podemos reescrever essa integral como o seguinte limite:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\lambda \frac{dx}{x+1} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} [\ln(\lambda+1)]. \quad (2.43)$$

Essa integral seria finita caso não tivéssemos que tomar o limite. Isso sugere que, para as integrais de Feynman, devemos impor um “cut-off” (corte) para o momento, ou seja, temos que ignorar a possibilidade de uma grande transferencia de momento. A integral (2.43) é logaritmicamente divergente. A auto energia do elétron e a correção do vértice que estudaremos no capítulo 3 apresentam o mesmo problema. O gráfico tadpole é quadraticamente divergente e acontece para valores altos de momento. As divergências que surgem devido a termos grandes no limite em que  $(k^2 \rightarrow \infty)$  são denominadas divergências no ultravioleta. Esse tipo parece ser intrínseco da teoria quântica de campos. Em princípio isso seria suficiente para descartar a teoria, mas com a adoção da técnica denominada renormalização, verifica-se que esses infinitos podem ser removidos redefinindo

os parâmetros da teoria, ou seja, massa e constantes de acoplamento. Outro tipo são as divergências no infravermelho, mas elas não aparecem nos gráficos desse trabalho. Esse tipo de divergência surge por exemplo, no caso de teorias não massivas no limite de baixas energias, ou seja, em que ( $k^2 \rightarrow 0$ ) [3], [17], [19], [20], [23] e [24].



## 3 Regularização Implícita

*Quando estou trabalhando num problema, nunca penso a respeito de beleza.*

*Eu penso apenas em resolver o problema.*

*Mas quando termino, se a solução não é bonita, eu sei que está errada.*

*Buckminster Fuller*

### 3.1 Introdução

Neste capítulo abordaremos aspectos específicos da regularização implícita e aplicaremos o método ao tensor de polarização do vácuo, a auto energia do elétron e a correção do vértice. O cálculo dessas amplitudes será feito com rótulo arbitrário afim de guardar os termos de superfície e assim verificar as identidades de Ward de cada processo. O objetivo é entender como esses termos de superfície afetam o conteúdo de simetria da teoria e como ela está relacionada com a arbitrariedade dos rótulos.

### 3.2 Sobre regularizações

No estudo de física e matemática, nos deparamos com situações onde é necessário lidar com indeterminações. Um exemplo é o que ocorre no cálculo de integrais que ao serem realizadas dão infinito, como no caso descrito no capítulo anterior. No entanto esses infinitos podem ser reavaliados por um processo de limite. Este artifício de analisar uma integral desta maneira, pode nos revelar resultados bastante conclusivos e trazer um esclarecimento melhor do problema. Como exemplo temos:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2)^2} \rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_\epsilon^\lambda \frac{dx}{x}. \quad (3.1)$$

Essa integral possui divergência nos dois limites de integração, ou seja, tanto no setor ultravioleta quanto no infravermelho.

### 3.2.1 Alguns métodos

O procedimento que acabamos de descrever é uma regularização, um “cut-off”, que é feito no limite inferior e (ou) superior da integral antes de tomarmos o limite para o infinito. Essa regularização é comumente usada no estudo perturbativo de processos em baixas energias, como o modelo de Nambu-Jona-Lasinio [24]. Como dissemos nos capítulos anteriores, a teoria quântica de campos revelou-se bastante frutífera na descrição de processos envolvendo espalhamentos e em cálculos de observáveis físicos. No entanto, as amplitudes ao serem calculadas produzem infinitos e a maneira de resolver esse problema é renormalizando a teoria. Antes de renormalizar porém, precisamos de regularizá-la, processo pelo qual os físicos “dão sentido” a essas integrais divergentes. Existem vários métodos de regularização como por exemplo regularização dimensional, regularização de Pauli-Villars, regularização diferencial e a regularização implícita para citar alguns [24] e [25]. Não é nosso objetivo discutir amplamente cada uma delas, mas daremos algumas idéias principais que as norteiam, concluindo com uma descrição mais detalhada e sistemática da regularização implícita na próxima seção.

A regularização de Pauli-Villars consiste em multiplicar o integrando da amplitude a ser calculada por uma distribuição reguladora  $f(k^2, \Lambda^2)$ , sendo  $\Lambda$  um parâmetro com dimensão de momento com a propriedade de que  $\lim_{\Lambda^2 \rightarrow \infty} f(k^2, \Lambda^2) = 1$ . Assim não alteramos a integral em questão. Sua característica principal é a idéia de comutar o limite com a integral. Esta operação no entanto produz um resultado não físico [24]. A regularização diferencial tem como objetivo escrever a amplitude que se quer calcular, no espaço das posições em termos de derivadas de uma função menos divergente que contém uma escala de massa logarítmica e uma prescrição de integração por partes onde um termo de superfície é eliminado. Ela tem como característica principal a não modificação da dimensionalidade do espaço-tempo ou a introdução de um regulador [24] e [25]. Em regularização dimensional o que se faz é mudar a dimensão do espaço-tempo no qual ocorrem os cálculos para  $d = n - \epsilon$  e depois tomar o limite de  $\epsilon \rightarrow 0$ . Para  $n = 4$  as correções em um laço são então escritas em termos de  $\Gamma(2 - d/2)$  que nesse caso contribui com infinito. No caso do tensor de polarização do vácuo essa divergência vai com  $1/\epsilon$  [8].

## 3.3 Regularização implícita

A regularização implícita (RI), método que estamos lançando mão neste trabalho consiste de isolar os infinitos em integrais básicas que dependam apenas do momento

interno no laço. Esse procedimento implica uma modificação na integral de modo a torná-la definida e permitir assim manipulá-la. O nome RI é dado ao método porque assumimos a presença de uma distribuição regularizadora genérica de modo implícito [16]. Vamos esquematizar esse procedimento da seguinte maneira:

$$\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \rightarrow \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \left[ \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G_{\Lambda_i}(k, \Lambda_i^2) \right] = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k). \quad (3.2)$$

Na expressão acima os  $\Lambda_i$ 's representam o conjunto de parâmetros que caracterizam a distribuição  $G_{\Lambda_i}(k, \Lambda_i^2)$ . Tal distribuição exhibe as seguintes propriedades:

1.  $G_{\Lambda_i}(k, \Lambda_i^2)$  é invariante de Lorentz,
2. Garante em particular que uma integral finita não seja modificada.

A partir de agora discutiremos os passos básicos para implementação do procedimento de RI a um laço.

1. Primeiramente identificamos a ordem da divergência da integral que se pretende realizar. Isso é feito por uma simples contagem de potência.
2. Para separar a parte finita da parte divergente, usamos a seguinte expressão:

$$\frac{1}{(k+k_i)^2 - m^2} = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (k_i^2 + 2k_i \cdot k)^j}{(k^2 - m^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{N+1} (k_i^2 + 2k_i \cdot k)^{N+1}}{(k^2 - m^2)^{N+1} [(k+k_i)^2 - m^2]}, \quad (3.3)$$

que tomando  $N = 0$  reduz-se a:

$$\frac{1}{(k+k_i)^2 - m^2} = \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{k_i^2 + 2k_i \cdot k}{(k^2 - m^2)[(k+k_i)^2 - m^2]}. \quad (3.4)$$

Usamos então recursivamente a equação (3.4) até que a divergência básica seja isolada dependendo apenas do momento interno no denominador.

3. As integrais que divergem cujo os momentos internos carregam índices de Lorentz ( $k_\mu$ ) serão expressas em função de divergências básicas e termos de superfície. Esses termos de superfície dependem da regularização e são relacionados com invariância de rótulo nos diagramas de Feynman. Essa dependência se manifesta da seguinte maneira: Os momentos  $k_i$ 's ou uma combinação deles aparecem multiplicando esses termos de superfície. Sendo assim podemos ter uma quebra de simetria de calibre. A vantagem da RI é que ela não modifica a dimensão do espaço-tempo, e como já dissemos, não exige um regulador explícito em nenhuma etapa dos cálculos. As

integrais básicas em primeira ordem ou seja, integrais vindas de diagramas em um laço são:

$$I_{log}(m^2) = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}, \quad (3.5)$$

$$I_{quad}(m^2) = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}, \quad (3.6)$$

4. Um ingrediente importante deste método são as relações de consistência (RC) que são expressas como diferenças entre integrais divergentes cujo o grau de divergência é o mesmo. As relações são as seguintes em dimensão de espaço-tempo 4-dimensional:

$$\Upsilon_{\mu\nu}^2 = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - m^2} - 2 \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2}, \quad (3.7)$$

$$\Upsilon_{\mu\nu}^0 = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} - 4 \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3}, \quad (3.8)$$

$$\Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = g_{\{\mu\nu}g_{\alpha\beta\}} \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} - 8 \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}k_{\alpha}k_{\beta}}{(k^2 - m^2)^3}, \quad (3.9)$$

$$\Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^0 = g_{\{\mu\nu}g_{\alpha\beta\}} \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - 24 \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}k_{\alpha}k_{\beta}}{(k^2 - m^2)^4}, \quad (3.10)$$

onde

$$g_{\{\mu\nu}g_{\alpha\beta\}} = (g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}). \quad (3.11)$$

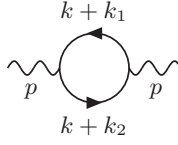
É importante ressaltar que esse procedimento pode se utilizar de qualquer regularização que seja razoável, já que passos intermediários não são comprometidos por suposições específicas. Outro ponto de relevância comparável reside no fato de que estamos utilizando rótulo arbitrário e nenhum “Shift” (mudança na variável de integração) será efetuado em passos intermediários. Isso por sua vez permite que tenhamos um certo controle sobre as possíveis ambiguidades relacionadas às arbitrariedades envolvidas nas escolhas para os rótulos [12], [13], [14] e [16]. Passamos agora a alguns exemplos onde aplicamos o método.

## 3.4 Aplicação do método

### 3.4.1 Tensor de polarização do vácuo

O tensor de polarização do vácuo é a contribuição perturbativa em primeira ordem de um processo físico denominado auto-energia do fóton. Utilizando as regras de Feynman escrevemos:

$$i\Pi_{\mu\nu} = -tr \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (ie\gamma_{\mu}) \frac{i}{\not{k} + \not{k}_1 - m} (ie\gamma_{\nu}) \frac{i}{\not{k} + \not{k}_2 - m}. \quad (3.12)$$



Desenvolvendo a equação (3.12) chegamos a:

$$\begin{aligned}
 i\Pi_{\mu\nu} &= -(-ie)^2 tr \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_{\mu} \frac{i}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_{\nu} \frac{i}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \\
 &= -(-ie)^2 tr \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma_{\mu}[(k + k_1)^{\alpha}\gamma_{\alpha} + m]i\gamma_{\nu}[(k + k_2)^{\beta}\gamma_{\beta} + m]}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]}, \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

onde usamos o fato que,

$$\frac{1}{\not{k} + \not{k}_i - m} = \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_i) - m} \frac{(\not{k} + \not{k}_i) + m}{(\not{k} + \not{k}_i) + m} = \frac{(\not{k} + \not{k}_i) + m}{[(k + k_i)^2 - m^2]}. \quad (3.14)$$

Na Última passagem em (3.14) usamos que  $(\not{k} + \not{k}_i)^2 = (k + k_i)^2$ . Assim,

$$\Pi_{\mu\nu} = ie^2 tr \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_{\mu}[(k + k_1)^{\alpha}\gamma_{\alpha} + m]\gamma_{\nu}[(k + k_2)^{\beta}\gamma_{\beta} + m]}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]}. \quad (3.15)$$

Desenvolvendo o numerador da equação (3.15) para calcular o traço sobre as matrizes de Dirac vamos obter:

$$\begin{aligned}
 &\gamma_{\mu}[(k + k_1)^{\alpha}\gamma_{\alpha} + m]\gamma_{\nu}[(k + k_2)^{\beta}\gamma_{\beta} + m] \\
 &= [(k + k_1)^{\alpha}\gamma_{\mu}\gamma_{\alpha} + m\gamma_{\mu}][\gamma_{\nu}[(k + k_2)^{\beta}\gamma_{\beta} + m]] \\
 &= (k + k_1)^{\alpha}\gamma_{\mu}\gamma_{\alpha}(k + k_2)^{\beta}\gamma_{\nu}\gamma_{\beta} \\
 &\quad + m(k + k_1)^{\alpha}\gamma_{\mu}\gamma_{\alpha}\gamma_{\nu} \\
 &\quad + m(k + k_2)^{\beta}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\beta} \\
 &\quad + m^2\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Usando que  $tr(\gamma_a\gamma_b\gamma_c) = 0$  vem:

$$\begin{aligned}
 &tr(\gamma_{\mu}[(k + k_1)^{\alpha}\gamma_{\alpha} + m]\gamma_{\nu}[(k + k_2)^{\beta}\gamma_{\beta} + m]) \\
 &= (k + k_1)^{\alpha}(k + k_2)^{\beta}tr(\gamma_{\mu}\gamma_{\alpha}\gamma_{\nu}\gamma_{\beta}) + m^2tr(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}). \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Mas

$$tr(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}) = 4g_{\mu\nu} \quad e \quad tr(\gamma_{\mu}\gamma_{\alpha}\gamma_{\nu}\gamma_{\beta}) = 4(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu})$$

de onde,

$$\begin{aligned}
& tr(\gamma_\mu[(k+k_1)^\alpha\gamma_\alpha+m]\gamma_\nu[(k+k_2)^\beta\gamma_\beta+m]) \\
&= 4(k+k_1)^\alpha(k+k_2)^\beta(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}-g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}+g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu})+4m^2g_{\mu\nu} \\
&= 4(k+k_1)_\mu(k+k_2)_\nu-4g_{\mu\nu}(k+k_1)^\alpha(k+k_2)_\alpha+4(k+k_1)_\nu(k+k_2)_\mu+4m^2g_{\mu\nu} \\
&= 4[2k_\mu k_\nu+(k_1+k_2)_\nu k_\mu+(k_1+k_2)_\mu k_\nu+(k_{1\mu}k_{2\nu}+k_{1\nu}k_{2\mu})] \\
&\quad -4g_{\mu\nu}(k+k_1)\cdot(k+k_2)+4m^2g_{\mu\nu}. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Ora,

$$[(k+k_1)-(k+k_2)]^2=(k+k_1)^2+(k+k_2)^2-2(k+k_1)\cdot(k+k_2),$$

de onde obtemos:

$$4(k+k_1)\cdot(k+k_2)=2(k+k_1)^2+2(k+k_2)^2-2(k_1-k_2)^2. \tag{3.19}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& tr(\gamma_\mu[(k+k_1)^\alpha\gamma_\alpha+m]\gamma_\nu[(k+k_2)^\beta\gamma_\beta+m]) \\
&= 4[2k_\mu k_\nu+(k_1+k_2)_\nu k_\mu+(k_1+k_2)_\mu k_\nu+(k_{1\mu}k_{2\nu}+k_{1\nu}k_{2\mu})] \\
&\quad -2(k+k_1)^2g_{\mu\nu}-2(k+k_2)^2g_{\mu\nu}+2(k_1-k_2)^2g_{\mu\nu}+4m^2g_{\mu\nu}, \tag{3.20}
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu} &= 4ie^2 \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu}{[(k+k_1)^2-m^2][(k+k_2)^2-m^2]} \\
&\quad +4ie^2(k_1+k_2)_\nu \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+k_1)^2-m^2][(k+k_2)^2-m^2]} \\
&\quad +4ie^2(k_1+k_2)_\mu \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{[(k+k_1)^2-m^2][(k+k_2)^2-m^2]} \\
&\quad +4ie^2(k_{1\mu}k_{2\nu}+k_{1\nu}k_{2\mu}) \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2-m^2][(k+k_2)^2-m^2]} \\
&\quad -2ie^2g_{\mu\nu} \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)^2}{[(k+k_1)^2-m^2][(k+k_2)^2-m^2]} \\
&\quad -2ie^2g_{\mu\nu} \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_2)^2}{[(k+k_1)^2-m^2][(k+k_2)^2-m^2]} \\
&\quad +4ie^2m^2g_{\mu\nu} \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2-m^2][(k+k_2)^2-m^2]} \\
&\quad +2ie^2(k_1-k_2)^2g_{\mu\nu} \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2-m^2][(k+k_2)^2-m^2]}. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Subtraindo e somando ( $m^2$ ) ao numerado dos termos,

$$\begin{aligned} & -2ie^2 g_{\mu\nu} \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)^2}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\ & -2ie^2 g_{\mu\nu} \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_2)^2}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}, \end{aligned}$$

obtemos:

$$\begin{aligned} & -2ie^2 g_{\mu\nu} \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)^2 - m^2 + m^2}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\ & -2ie^2 g_{\mu\nu} \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_2)^2 - m^2 + m^2}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\ & = -2ie^2 g_{\mu\nu} \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_1)^2 - m^2} \\ & \quad -2ie^2 g_{\mu\nu} \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_2)^2 - m^2} \\ & -4ie^2 g_{\mu\nu} \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \end{aligned}$$

Assim obtemos finalmente que:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu} & = 4ie^2 \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\ & + 4ie^2 (k_1 + k_2)_\nu \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\ & + 4ie^2 (k_1 + k_2)_\mu \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\ & + 4ie^2 (k_{1\mu} k_{2\nu} + k_{1\nu} k_{2\mu}) \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\ & - 2ie^2 g_{\mu\nu} \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_1)^2 - m^2} - 2ie^2 g_{\mu\nu} \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_2)^2 - m^2} \\ & + 2ie^2 (k_1 - k_2)^2 g_{\mu\nu} \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Neste trabalho estamos preocupados em estudar invariância de rótulo e termos de superfície, por isso não vamos calcular a parte finita das integrais acima; isso está feito em [16]. Vamos apenas separar as divergências e escrever as integrais em termos de  $I_{log}'$ s e dos termos de superfície. Temos que nos preocupar com as seguintes integrais:

$$I_1 = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_i)^2 - m^2}, \quad (3.23)$$

$$I_2 = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}, \quad (3.24)$$

$$I_{\mu} = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}, \quad (3.25)$$

$$I_{\mu\nu} = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (3.26)$$

No processo de separação da divergência das integrais acima utilizaremos a identidade (3.4).

Vamos exibir o método manipulando a integral (3.23). As outras integrais serão discutidas nos apêndices. Na presente seção vamos nos restringir a usar diretamente seus resultados.

Seguindo então a prescrição feita ao longo dessa seção, obtemos um resultado para a presente integral. Consideramos então (3.23) vem,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_i)^2 - m^2} \\ &= \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} - \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)}{(k^2 - m^2)[(k+k_i)^2 - m^2]} \\ &= I_{quad}(m^2) - \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)}{(k^2 - m^2)} \left[ \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)}{(k^2 - m^2)[(k+k_i)^2 - m^2]} \right] \\ &= I_{quad}(m^2) - \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2} + \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^2[(k+k_i)^2 - m^2]} \\ &= I_{quad}(m^2) - k_i^2 I_{log}(m^2) + \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)}{(k^2 - m^2)[(k+k_i)^2 - m^2]} \right] \\ &= I_{quad}(m^2) - k_i^2 I_{log}(m^2) + \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^3} + \text{Parte Finita} \\ &= I_{quad}(m^2) - k_i^2 I_{log}(m^2) + k_i^{\mu} k_i^{\nu} \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} \\ &\quad + \text{Parte Finita}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Usando as relações de consistência temos:

$$\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} - \Upsilon_{\mu\nu}^0. \quad (3.28)$$



Substituindo (3.28) em (3.27) obtemos:

$$\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_i)^2 - m^2} = I_{quad}(m^2) - k_i^\mu k_i^\nu \Upsilon_{\mu\nu}^0. \quad (3.29)$$

A parte finita é zero nesse caso pois, quando a realizamos ocorre um cancelamento mútuo [16].

Esse resultado junto com o resultado das outras integrais após algumas manipulações algébricas nos permite então escrever:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu} = & \tilde{\Pi}_{\mu\nu} + 4 \left[ \Upsilon_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2) \Upsilon_{\mu\nu}^0 + \frac{1}{3}(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\alpha k_2^\beta) \Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^0 \right. \\ & \left. - (k_1 + k_2)^\alpha (k_1 + k_2)_\mu \Upsilon_{\nu\alpha}^0 - \frac{1}{2}(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta) g_{\mu\nu} \Upsilon_{\alpha\beta}^0 \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu} = \frac{4}{3}(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) I_{log}(m^2) + \text{Parte Finita} \quad (3.31)$$

é a parte transversa do tensor. Verificando a identidade de Ward associada temos:

$$\begin{aligned} p^\mu \Pi_{\mu\nu} = & p^\mu \tilde{\Pi}_{\mu\nu} + 4 \left[ p^\mu \Upsilon_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2) p^\mu \Upsilon_{\mu\nu}^0 + \frac{1}{3} p^\mu (k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\alpha k_2^\beta) \Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^0 \right. \\ & \left. - p^\mu (k_1 + k_2)^\alpha (k_1 + k_2)_\mu \Upsilon_{\nu\alpha}^0 - \frac{1}{2} p^\mu (k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta) g_{\mu\nu} \Upsilon_{\alpha\beta}^0 \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} p^\mu \tilde{\Pi}_{\mu\nu} &= \frac{4}{3}(p^2 p^\mu g_{\mu\nu} - p^\mu p_\mu p_\nu) I_{log}(m^2) \\ &= \frac{4}{3}(p^2 p_\nu - p^2 p_\nu) I_{log}(m^2) = 0 \end{aligned}$$

Parametrizando os  $k_i$ 's como,

$$\begin{aligned} k_1 &= (\lambda - 1)p, \\ k_2 &= \lambda p, \end{aligned} \quad (3.33)$$

temos,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu} = & 4 \left\{ \Upsilon_{\mu\nu}^2 - \frac{p^2}{2} [(\lambda - 1)^2 + \lambda^2] \Upsilon_{\mu\nu}^0 \right. \\ & + \frac{1}{3} [(\lambda - 1)^2 p^\alpha p^\beta + \lambda^2 p^\alpha p^\beta + \lambda(\lambda - 1) p^\alpha p^\beta] \Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^0 - (2\lambda - 1)^2 p^\alpha p_\mu \Upsilon_{\nu\alpha}^0 \\ & \left. - \frac{1}{2} [(\lambda - 1)^2 p^\alpha p^\beta + \lambda^2 p^\alpha p^\beta] g_{\mu\nu} \Upsilon_{\alpha\beta}^0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Escrevendo,

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{\mu\nu}^2 &= m^2 r g_{\mu\nu} \\
\Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^0 &= s(g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) \\
\Upsilon_{\mu\nu}^0 &= t g_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{3.35}$$

onde  $r, s$  e  $t$  são constantes adimensionais, obtemos após manipulações álgebras:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu} &= 4 \left\{ \left( \frac{m}{p} \right)^2 r p^2 g_{\mu\nu} - \frac{p^2}{2} [(\lambda - 1)^2 + \lambda^2] t g_{\mu\nu} \right. \\
&\quad + \frac{1}{3} [(\lambda - 1)^2 + \lambda^2 + \lambda(\lambda - 1)] s (p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu + p_\nu p_\mu) \\
&\quad \left. - (2\lambda - 1)^2 p_\nu p_\mu t - \frac{1}{2} [(\lambda - 1)^2 + \lambda^2] t p^2 g_{\mu\nu} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Então,

$$p^\mu \Pi_{\mu\nu} = 4p^2 p_\nu \left\{ \left( \frac{m}{p} \right)^2 r - [(\lambda - 1)^2 + \lambda^2 + \lambda(\lambda - 1)] s - [(\lambda - 1)^2 + \lambda^2 + (2\lambda - 1)^2] t \right\}. \tag{3.37}$$

Para satisfazer a identidade de ward  $p^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$  temos duas possibilidades:

1. Ou fazemos escolhas particulares de rótulo,
2. Ou exigimos que os termos de superfície sejam nulos.

Se a decisão for pela escolha de rótulo, podemos encontrar a partir de (3.37) a seguinte relação:

$$\left( \frac{m}{p} \right)^2 r - [(\lambda - 1)^2 + \lambda^2 + \lambda(\lambda - 1)] s - [(\lambda - 1)^2 + \lambda^2 + (2\lambda - 1)^2] t. \tag{3.38}$$

A equação (3.38) nos mostra que para um dado  $\lambda$ ,  $r$ ,  $s$  e  $t$  estão relacionados de formas distintas. Vamos tomar por exemplo  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 2$  e  $\lambda = 3$  para vizualizarmos a dependência dos rótulos com os termos de superfície.

$$\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \left( \frac{m}{p} \right)^2 r = s - 2t \tag{3.39}$$

$$\lambda = 1 \quad \rightarrow \quad \left( \frac{m}{p} \right)^2 r = s - 2t \tag{3.40}$$

$$\lambda = 2 \quad \rightarrow \quad \left( \frac{m}{p} \right)^2 r = 7s - 14t \tag{3.41}$$

$$\lambda = 3 \quad \rightarrow \quad \left( \frac{m}{p} \right)^2 r = 19s - 38t. \tag{3.42}$$

Por exemplo no caso de  $\lambda = 1$  temos que,

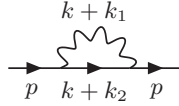
$$\left(\frac{m}{p}\right)^2 r = s - 2t. \quad (3.43)$$

Se fizermos  $r = 0$  em (3.43) recuperamos o resultado encontrado em [13].

Por outro lado se fizermos  $r = s = t = 0$  em (3.37) obtemos  $p^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$  para qualquer valor de  $\lambda$ , ou seja, a simetria de calibre é satisfeita para qualquer rótulo.

### 3.4.2 A auto energia do elétron

Um dos processos mais simples pertinentes à eletrodinâmica quântica é dito auto-energia do elétron. Tal processo é caracterizado por duas linhas fermiônicas externas e descreve a propagação do elétron na presença de uma interação. Novamente utilizando as regras de Feynman escrevemos:



$$\begin{aligned} -i\Sigma &= \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ie\gamma_\mu) \left[ i \frac{(k+k_2)_\alpha \gamma^\alpha + m}{(k+k_2)^2 - m^2} \right] \\ &\times (-ie\gamma_\nu) \left[ -\frac{1}{(k+k_1)^2} \left( g^{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu}{(k+k_1)^2} \right) \right] \\ &= ie^2 \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g^{\mu\nu} \gamma_\mu \frac{(k+k_2)_\alpha \gamma^\alpha + m}{(k+k_2)^2 - m^2} \frac{\gamma_\nu}{(k+k_1)^2} \\ &- ie^2 (1-\xi) \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{(k+k_2)_\alpha \gamma^\alpha + m}{(k+k_2)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu}{(k+k_1)^4}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Vamos escolher o calibre de Feynman para efetuar os cálculos, ou seja,  $\xi = 1$ .

Ficamos com:

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{\xi=1} &= ie^2 \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma_\nu \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{(k+k_1)^2 [(k+k_2)^2 - m^2]} \\ &+ ie^2 [k_{2\alpha} \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma_\nu + m\gamma^2] \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_1)^2 [(k+k_2)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Olhando para a expressão (3.45) notamos que precisamos de estudar as integrais  $I_3$  e  $I_\alpha$  escritas logo abaixo nas expressões (3.46) e (3.47). Mas seus resultados são os mesmo que já obtemos no cálculo de  $I_2$  e  $I_\mu$ . Uma olhada superficial nos leva a concluir que temos

aqui divergência no infravermelho, mas introduzindo a relação de escala vemos que essa divergência não existe [12] e [16]. Sendo assim,

$$I_3 = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_1)^2[(k+k_2)^2-m^2]} = I_{log}(m^2) + \text{Parte Finita}, \quad (3.46)$$

e

$$\begin{aligned} I_{\alpha} &= \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\alpha}}{(k+k_1)^2[(k+k_2)^2-m^2]} \\ &= -\frac{1}{2}(k_1+k_2)_{\alpha} I_{log}(m^2) + \frac{1}{2}(k_1+k_2)^{\beta} \Upsilon_{\alpha\beta}^0 \\ &\quad + \text{Parte Finita}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Substituindo (3.46) e (3.47) em (3.45) chegamos em:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\xi=1} &= 2e^2\gamma^{\alpha} \left[ -\frac{1}{2}(k_1+k_2)_{\alpha} I_{log}(m^2) + \frac{1}{2}(k_1+k_2)^{\beta} \Upsilon_{\alpha\beta}^0 \right] \\ &\quad 2e^2\not{k}_2 I_{log}(m^2) - 4me^2 I_{log}(m^2) \\ &\quad + \text{Parte Finita}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

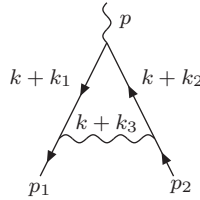
onde  $\gamma^2 = 4$  e  $\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha}\gamma_{\nu} = -2\gamma^{\alpha}$ , ver apêndice.

Logo,

$$\Sigma_{\xi=1} = -e^2[(\not{p} - 4m)I_{log}(m^2) + (k_1+k_2)^{\beta}\gamma^{\alpha}\Upsilon_{\alpha\beta}^0] + \text{Parte Finita}. \quad (3.49)$$

### 3.4.3 Correção do vértice

Esse processo constituído de uma linha externa bosônica e duas fermiônicas representa a interação básica da eletrodinâmica quântica e é por isso denominado vértice básico da QED. Sendo assim os diagramas que correspondem a uma expansão perturbativa são denominados correção do vértice. Utilizando as regras de Feynman montamos a amplitude:



$$\begin{aligned}
-ie\Lambda_\mu &= \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ie\gamma_\beta) \left[ i \frac{(k+k_2)_\sigma \gamma^\sigma + m}{(k+k_2)^2 - m^2} \right] (-ie\gamma_\mu) \left[ i \frac{(k+k_1)_\rho \gamma^\rho + m}{(k+k_1)^2 - m^2} \right] \\
&\quad (-ie\gamma_\alpha) \left[ \frac{(-1)g^{\alpha\beta}}{(k+k_3)^2} \right] \\
&= -ie^3 \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\beta (k+k_2)^\sigma \gamma_\sigma \gamma_\mu (k+k_1)^\rho \gamma_\rho \gamma^\beta}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2]} \\
&\quad -ime^3 \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\beta (k+k_2)^\sigma \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma^\beta}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2]} \\
&\quad -ime^3 \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\beta \gamma_\mu (k+k_1)^\rho \gamma_\rho \gamma^\beta}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2]} \\
&\quad -im^2 e^3 \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\beta \gamma_\mu \gamma^\beta}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2]}, \tag{3.50}
\end{aligned}$$

assim obtemos:

$$\begin{aligned}
-ie\Lambda_\mu &= -ie^3 \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma^\beta \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\sigma k^\rho}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2]} \\
&\quad + \text{Parte Finita.} \tag{3.51}
\end{aligned}$$

Usando a álgebra de Clifford podemos mostrar que  $\gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma^\beta k^\sigma k^\rho = -4\not{k}k_\mu + 2\gamma_\mu k^2$ .

Obtemos então:

$$\begin{aligned}
-ie\Lambda_\mu &= i4e^3 \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}k_\mu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2]} \\
&\quad -i2e^3 \gamma_\mu \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2]} \\
&\quad + \text{Parte Finita.} \tag{3.52}
\end{aligned}$$

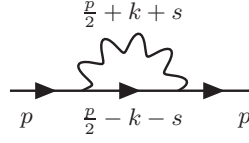
Fazendo manipulações no integrando de (3.52), usando (3.4) para isolar a divergência básica e utilizando as relações de consistência vamos obter:

$$-ie\Lambda_\mu = -ie^3 \gamma^\nu \Upsilon_{\mu\nu}^0 - ie^3 \gamma_\mu I_{\log}(m^2) + \text{Parte Finita.} \tag{3.53}$$

Assim,

$$\Lambda_\mu = e^2 \gamma^\nu \Upsilon_{\mu\nu}^0 + e^2 \gamma_\mu I_{\log}(m^2) + \text{Parte Finita.} \tag{3.54}$$

Antes de discutir a identidade de Ward envolvendo a auto energia do elétron e a correção do vértice, vamos apresentar os resultados do McKeon [26] e então comparar com o nosso resultado. Para a auto-energia do elétron ele usa o seguinte rótulo:



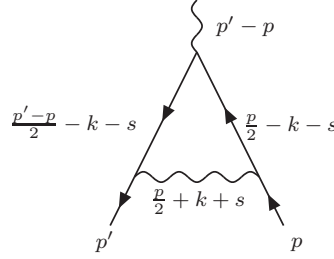
que fornece;

$$-e \frac{\partial}{\partial p_\eta} \Sigma(p) = -2e^3 \frac{\partial}{\partial p_\eta} \left( \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{2} p - k - \not{s} \right) \int_0^1 dx \{ [k + s + \frac{1}{2} p(1-2x)]^2 + p^2 x(1-2x) \}^{-2} \right). \quad (3.55)$$

Efetuada uma mudança de variável, fazendo  $k \rightarrow k + s + \frac{1}{2} p(1-2x)$ , obtém-se um termo de superfície que depende do parâmetro  $s$ . Temos:

$$-e \frac{\partial}{\partial p_\eta} \Sigma(p) = -2e^3 \left[ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left( \frac{(1-x)\gamma^\eta}{[k^2 + x(1-x)p^2]^2} - \frac{4x(1-x)^2 p^\eta \not{p}}{[k + x(1-x)p^2]^3} \right) - \frac{i}{32\pi^2} \frac{\partial \not{s}}{\partial p_\eta} \right]. \quad (3.56)$$

Para a correção do vértice temos:



que fornece;

$$\Lambda^\eta(p, q) = -2e^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{[-xk^2\gamma^\eta + 2x(1-x)^2 p^2 \gamma^\eta - 4x(1-x)^2 \not{p} p^\eta]}{[k^2 + x(1-x)p^2]^3}. \quad (3.57)$$

Verificando a Identidade de Ward envolvendo as expressões (3.57) e (3.56) obtém-se:

$$\begin{aligned} -e \frac{\partial}{\partial p_\eta} \Sigma(p) - \Lambda^\eta(p, q) &= 2e^3 \left( \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)^2 p^2 \gamma^\eta}{[k^2 + x(1-x)p^2]^3} + \frac{i}{32\pi^2} \frac{\partial \not{s}}{\partial p} \right) \\ &= \frac{ie^3}{16\pi^2} \left( \frac{1}{2} \gamma^\eta + \frac{\partial \not{s}}{\partial p_\eta} \right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

A identidade de Ward (3.58) é satisfeita se,

$$\frac{1}{2} \gamma^\eta + \frac{\partial \not{s}}{\partial p_\eta} = 0. \quad (3.59)$$

Então temos:

$$\gamma^\beta \frac{\partial s_\beta}{\partial p_\eta} = -\frac{1}{2} \gamma^\eta. \quad (3.60)$$

Seja  $s = Ap$ , onde  $A$  é uma constante. Assim temos,

$$\begin{aligned} A\gamma^\beta \frac{\partial p_\beta}{\partial p_\eta} &= -\frac{1}{2} \gamma^\eta \\ \rightarrow A\gamma^\beta \delta_\beta^\eta &= -\frac{1}{2} \gamma^\eta \\ \rightarrow A\gamma^\eta &= -\frac{1}{2} \gamma^\eta. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Logo  $A = -\frac{1}{2}$  e portanto  $s = -\frac{p}{2}$ , a simetria de calibre é obtida para esse valor de  $s$ , ou seja, com um rótulo particular.

Vamos verificar a identidade de Ward do resultado obtido via RI. Da expressão (3.49) obtemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma_{\xi=1} &= -e^2 \left[ \frac{\partial}{\partial p^\mu} (\not{p} - 4m) I_{\log}(m^2) + \frac{\partial}{\partial p^\mu} (2\lambda - 1) p^\beta \gamma^\alpha \Upsilon_{\alpha\beta}^0 \right] + \text{Parte Finita} \\ &= -e^2 \left[ \gamma_\rho \frac{\partial}{\partial p^\mu} p^\rho I_{\log}(m^2) + (2\lambda - 1) \frac{\partial}{\partial p^\mu} p^\beta \gamma^\alpha \Upsilon_{\alpha\beta}^0 \right] \\ &\quad + \text{Parte Finita} \\ &= -e^2 \left[ \gamma_\mu I_{\log}(m^2) + (2\lambda - 1) \gamma^\alpha \Upsilon_{\mu\alpha}^0 \right] \\ &\quad + \text{Parte Finita}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde usamos a parametrização (3.33).

Temos que:

$$\Lambda_\mu = -\frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma, \quad (3.63)$$

Assim:

$$\begin{aligned} e^2 \gamma^\nu \Upsilon_{\mu\nu}^0 + e^2 \gamma_\mu I_{\log}(m^2) &= e^2 \left[ \gamma_\mu I_{\log}(m^2) + (2\lambda - 1) \gamma^\alpha \Upsilon_{\mu\alpha}^0 \right] \\ &\quad + \text{Parte Finita}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Usando que  $\Upsilon_{\mu\nu}^0 = r g_{\mu\nu}$  e  $\Upsilon_{\mu\alpha}^0 = s g_{\mu\alpha}$ , obtemos após uma pequena manipulação algébrica:

$$r = (2\lambda - 1)s. \quad (3.65)$$

A identidade de Ward (3.63) é satisfeita sob a condição  $r = s = 0$  para qualquer valor

de  $\lambda$ . Isso implica que a simetria de calibre não depende do rótulo que escolhemos se os termos de superfície são nulos. A simetria de calibre é também implementada se ao invés de fazermos  $r = s = 0$  escolhermos  $\lambda = 1$  em (3.65). No trabalho do Mckeon [26], temos  $s = -p/2$ .



## 4 *Anomalias*

*Tudo o que pode acontecer, acontece.*

*Murray Gell-Mann*

### 4.1 Introdução

Neste capítulo faremos uma apresentação histórica da importância de anomalias em TQC e sua relevância para explicação de fatos experimentais. Posteriormente discutiremos a anomalia do triângulo AVV que está relacionada com uma amplitude de probabilidade que não satisfaz simultaneamente as identidades de Ward quiral e axial.

### 4.2 Anomalias em teoria quântica de campos

Simetrias e suas correspondentes leis de conservação desempenham um papel importante em descrever as forças fundamentais da natureza. No entanto, pode acontecer que uma determinada lei de conservação, válida na teoria clássica, seja violada na versão quantizada. Isso é denominado anomalia. Na verdade isso não é tão surpreendente, sabemos agora que as “ingênuas” concepções clássicas são demolidas pelos efeitos quânticos. Exemplos familiares são as relações de incerteza de posição e momento da teoria de Heisenberg. Por que então as anomalias são tão extraordinárias em TQC?

A base da moderna TQC, teoria de calibre (Gauge), é o princípio de simetria de calibre. Uma anomalia, a violação de uma corrente classicamente conservada, sinaliza a quebra de simetria de calibre e, em consequência, a ruína da consistência da teoria. Evitando por um lado (que pode ser possível), leva a um severo vínculo no conteúdo físico da teoria; por exemplo, a predição do quark top. Por outro lado, anomalias são também necessárias para descrever certos fatos experimentais. É esta dupla característica que torna anomalias tão importantes para a física.

As anomalias que vamos considerar neste trabalho são as axiais ou anomalia quiral correspondendo a uma corrente axial ou corrente axial fermiônica. A descoberta da anomalia axial tem uma longa história. Ela começa em 1949 com Jack Steinberger (1949), que cal-

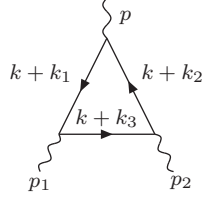
colou em seu doutorado um diagrama de Feynman pion-nucleon ( $\pi$ -N), na tentativa de descrever o decaimento  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Independentemente H.Fukuda e Y.Miyamoto (1949) realizaram cálculos semelhantes. O modelo de Steinberger's  $\pi$ -N contendo um vértice  $\gamma_5$  estava em excelente concordância com o experimento. Entretanto, sua comparação com uma amplitude  $\pi$ -N contendo um vértice  $\gamma_\mu\gamma_5$  (que, como nós conhecemos agora, corresponde a identidade de ward axial), é claro, falha. Observando esse quebra-cabeça, Steinberger deixou a teoria e se tornou um prêmio nobel em física experimental. Dois anos depois, em 1951, Julian Schwinger apontou que a conservação da corrente axial em QED, uma consequência imediata da simetria axial, é violada quando o operador corrente é apropriadamente regularizado. Depois de 12 anos de pausa foi Ken Johnson (1963), quem observou que em QED bidimensional sem massa não se pode ter ambas as conservações de calibre e a conservação da corrente axial. No entanto, pequena atenção foi dada à importância desse resultado nos anos subsequentes. Nos anos 60 a álgebra de correntes de Gell-Mann tornou-se bastante popular, e neste âmbito, invocando PCAC (Partial conservation of the axial current), Sutherland e Veltman provaram o teorema que o pion neutro não pode decair em dois fótons, em contradição com os experimentos. Impressionado com a análise de seu amigo Martinos Veltman, John S. Bell do Cern salientou que “o assunto de algebra corrente não deve ser concluído até que este quebra-cabeças seja resolvido”. Em 1969 Bell e Jackiw resolveram o quebra-cabeça  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  usando o modelo  $\sigma$ : A anomalia, a quebra quântica da simetria axial, corrige a taxa de decaimento do teorema de Sutherland-Veltman por uma quantidade que está em excelente concordância com o experimento. Independentemente no mesmo ano, Stephan L. Adler do instituto de estudos avançados em Princeton, chegou a conclusões semelhantes, trabalhando em eletrodinâmica espinorial [11].

### 4.3 Anomalia do triângulo AVV

Embora a presença de simetrias numa teoria física seja um fato fundamental e importante, sua quebra é necessária para descrever a variedade de configurações da mesma. Um exemplo é o que ocorre na gravitação newtoniana, embora o campo gravitacional seja esféricamente simétrico, a órbita dos planetas são elípticas. Outro exemplo é a quebra de simetria que ocorre na descrição das interações fundamentais. Os bósons intermediadores da interação forte (Glúons), eletromagnética (fótons) e gravitacional (grávitons, caso eles existam), são não massivos enquanto que no caso da interação fraca ( $Z^0$ ,  $W^+$  e  $W^-$ ), são massivos. Uma consequência desse fato é a suposta existência de um campo escalar

massivo capaz de gerar massa nos bóson mediadores da interação fraca, o bóson de Higgs.

Em abordagens perturbativas, é usual tratar anomalias de modo que o próprio método de regularização escolha onde a simetria deve ser quebrada. A regularização dimensional por exemplo escolhe a priori que a anomalia esteja na parte axial. Esta no entanto, não é uma linha que gostaríamos de seguir, mas que a própria física implicasse isso. A RI faz a escolha a posteriori, ou seja, mantém as duas identidades de Ward arbitrárias até o fim dos cálculos. A anomalia AVV com rótulo arbitrário é escrita como:



$$T_{\mu\nu\alpha}^{AVV} = -tr \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \gamma_{\mu} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_{\nu} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma_{\alpha} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \right\} + \text{Termos Cruzados}, \quad (4.1)$$

onde os  $k'_i$ 's estão relacionados com os momentos externos  $p$ ,  $q$  e  $p+q$  tal que  $k_2 - k_3 = p+q$ ,  $k_1 - k_3 = p$  e  $k_2 - k_1 = q$ . Então podemos parametrizar os  $k'_i$ 's como:

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha p + (\beta - 1)q, \\ k_2 &= \alpha p + \beta q, \\ k_3 &= (\alpha - 1)p + (\beta - 1)q, \end{aligned} \quad (4.2)$$

para qualquer  $\alpha$  e  $\beta$ . Usando o quadro da RI ela nos permite escrever:

$$T_{\mu\nu\alpha}^{AVV} = \tilde{T}_{\mu\nu\alpha}^{AVV}(p, q) + 4i\alpha_1(\alpha - \beta + 1)\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(p - q)^{\beta}, \quad (4.3)$$

onde temos  $\Upsilon_{\mu\nu}^0 \equiv \alpha_1 g_{\mu\nu}$  e  $\tilde{T}_{\mu\nu\alpha}^{AVV}(p, q)$  uma função do momento externo livre de parâmetros arbitrários que no limite de massa zero satisfaz:

$$p^{\mu} \tilde{T}_{\mu\nu\alpha}^{AVV}(p, q) = -\frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^{\mu} q^{\beta} \quad (4.4)$$

$$q^{\nu} \tilde{T}_{\mu\nu\alpha}^{AVV}(p, q) = \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^{\beta} q^{\nu} \quad (4.5)$$

$$(p + q)^{\alpha} \tilde{T}_{\mu\nu\alpha}^{AVV}(p, q) = 0. \quad (4.6)$$

Assim as identidades de Ward levam a:

$$p^\mu T_{\mu\nu\alpha}^{AVV} = \left[ -\frac{1}{4\pi^2} - 4i\alpha_1(\alpha - \beta + 1) \right] \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\mu q^\beta \quad (4.7)$$

$$q^\nu T_{\mu\nu\alpha}^{AVV} = \left[ \frac{1}{4\pi^2} + 4i\alpha_1(\alpha - \beta + 1) \right] \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\beta q^\nu \quad (4.8)$$

$$(p + q)^\alpha T_{\mu\nu\alpha}^{AVV} = -8i\alpha_1(\alpha - \beta + 1) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta, \quad (4.9)$$

que ilustram a conexão entre termos de superfície e rótulo arbitrário. A redefinição das variáveis  $\alpha_1(\alpha - \beta + 1) = i(1 - a)/(32\pi^2)$ , para  $a$  arbitrário fornece:

$$p^\mu T_{\mu\nu\alpha}^{AVV} = -\frac{1}{8\pi^2}(1 + a) \epsilon_{\mu\nu\alpha\rho} p^\mu q^\rho, \quad (4.10)$$

$$(p + q)^\alpha T_{\mu\nu\alpha}^{AVV} = \frac{1}{4\pi^2}(1 - a) \epsilon_{\mu\nu\alpha\rho} p^\alpha q^\rho, \quad (4.11)$$

que evidentemente mostram que a anomalia transita entre a axial e vetorial. Ou seja, escolhendo  $a = 1$ , (4.11) é satisfeita e (4.10) é quebrada; escolhendo  $a = -1$ , o contrário. Vemos com isso que as duas identidades de Ward não podem ser satisfeitas simultaneamente [25].

No caso do decaimento do pión neutron em dois fótons, a quebra de simetria ocorre na parte vetorial (quebra da IWV) e é conservada na axial. Já no decaimento do próton a IWV é preservada e a IWA é quebrada. Uma característica importante da RI é que ela trata as identidades de Ward vetorial e axial no mesmo pé de igualdade, ou seja, apresenta a anomalia uniformemente entre elas. Outra característica importante da RI é que ela deixa clara a influência das ambiguidades relativas a arbitrariedade dos rótulos. Ressaltamos sobre a origem das ambiguidades e parâmetros livres, bem como sobre a importância de apresentar a anomalia uniformemente entre as identidades de Ward, que decorrem a partir de um gráfico de Feynman salvo que a física diga o contrário. Em outras palavras, a física deve escolher onde a simetria é preservada ou quebrada, não o método de regularização. Esta característica proporciona uma espécie de teste para regularizações e concluímos que a RI é um bom palco para estudar anomalias do ponto de vista de diagramas de Feynman.

## 5 *Conclusão e Perspectiva*

O objetivo desse trabalho era discutir a relação dos termos de superfície com os rótulos dos momentos internos em diagramas de Feynman a um laço, e ver como é possível relacioná-los com invariância de calibre. Vimos que os momentos internos no laço aparecem multiplicando os termos de superfície e assim tivemos que fazer uma escolha.

1. Ou escolhíamos um rótulo para satisfazer as identidades do Ward, ou seja, para implementar a simetria de calibre,
2. Ou exigíamos que os termos de superfície fossem nulos para preservação da simetria de calibre.

Nos trabalhos do McKeon [1], [2] e [26], a simetria de calibre é preservada sob uma escolha de rótulo. Ele propõe que as inconsistências em integrais de Feynman são devidas a “shifts” nas variáveis de integração, concluindo que os termos de superfície surgem para alguns valores de dimensões. Em nosso trabalho não fizemos nenhum “shift” e ainda assim os termos de superfície estão presentes nos resultados. Adotamos a postura de exigir que os termos de superfície sejam nulos.

O que concluímos disto é que termos de superfície nulos implicam a simetria de calibre e invariância de rótulo.

No estudo do triângulo AVV entendemos que a RI é uma ferramenta poderosa pois apresenta a anomalia uniformemente entre as identidades de Ward, ou seja, trata a IWV e a IWA em mesmo pé de igualdade. Em outras palavras, ela garante que a física é responsável pela escolha de onde a simetria é preservada ou quebrada. Concluímos então que a RI é um bom método para estudar anomalias do ponto de vista de diagramas de Feynman.

Uma perspectiva almejada é ver em teorias com menos conteúdo de simetria se os termos de superfície não aparecem em parâmetros relevantes (físicos) da mesma (por

exemplo na função beta até dois laços) e estabelecer uma conexão precisa entre termos de superfície e invariância de rótulo.

# APÊNDICE A – Matrizes de Dirac

*Até onde as leis da matemática se referem à realidade, não há certeza;  
e até onde há certeza, elas não se referem à realidade.*

*Albert Einstein*

## A.1 Álgebra Clifford

As matrizes de Dirac obedecem a seguinte álgebra:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.1})$$

Com essa regra de anti-comutação podemos mostrar os seguintes resultados:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = \gamma^2 = 4, \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu = -2\gamma_\nu. \quad (\text{A.3})$$

Traço

$$tr(1) = 4, \quad (\text{A.4})$$

$$tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

$$tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4(g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}), \quad (\text{A.6})$$

$$tr(\gamma_5) = 0, \quad (\text{A.7})$$

onde  $\gamma_5 \equiv i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$

$$tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (\text{A.9})$$

### A.1.1 Manipulações algébricas com matrizes de Dirac

Mostraremos (A.2), (A.3) e (A.6) como exemplo.

Começemos por (A.2):

$$\begin{aligned}
 \gamma^\mu \gamma_\mu &= g^{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_\mu \\
 &= g^{\mu\nu} (2g_{\mu\nu} - \gamma_\mu \gamma_\nu) \\
 &= 2g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma_\nu.
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Por outro lado sabemos que  $\gamma^\mu \gamma_\mu = \gamma^\nu \gamma_\nu = \gamma^2$ .

Logo:

$$\begin{aligned}
 \gamma^2 &= 2g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} - \gamma^2 \\
 \rightarrow \gamma^2 &= g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4.
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Para mostra (A.3) vamos utilizar o resultado demonstrado acima.

$$\begin{aligned}
 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu &= (2g_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu) \gamma^\mu \\
 &= 2\gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\mu \\
 &= 2\gamma_\nu - 4\gamma_\nu \\
 &= -2\gamma_\nu
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Finalmente vamos calcular o traço (A.6).

$$\begin{aligned}
 tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) &= tr[\gamma_\mu \gamma_\nu (2g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta)] \\
 &= 2g_{\alpha\beta} tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) - tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\alpha) \\
 &= 8g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - tr[\gamma_\mu (2g_{\nu\beta} - \gamma_\beta \gamma_\nu) \gamma_\alpha] \\
 &= 8g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - 8g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + tr(\gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\alpha) \\
 &= 8g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - 8g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + tr[(2g_{\mu\beta} - \gamma_\beta \gamma_\mu) \gamma_\nu \gamma_\alpha] \\
 &= 8g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - 8g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + 8g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} - tr(\gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha).
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Usando a propriedade  $tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$ , temos que  $tr(\gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha) = tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta)$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) &= 8g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - 8g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + 8g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} - tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) \\
 \rightarrow 2tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) &= 8g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - 8g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + 8g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}.
 \end{aligned} \tag{A.14}$$



Sendo assim:

$$\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4(g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}), \quad (\text{A.15})$$

como queriamos mostrar.

# *APÊNDICE B – Cálculo das integrais $I_{\mu\nu}$ , $I_\mu$ e $I_2$*

*Na vida o que importa não é o quanto você sabe bater,  
mas o quanto você consegue apanhar e ainda permanecer de pé.  
Rocky Balboa*

## B.1 Integrais

### B.1.1 Integral $I_2$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\
 &= \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \\
 &\quad - \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2[(k+k_1)^2 - m^2]} \\
 &\quad - \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2[(k+k_2)^2 - m^2]} \\
 &\quad + \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

Assim,

$$I_2 = I_{\log}(m^2) + \text{Parte Finita}. \tag{B.2}$$

### B.1.2 Integral $I_\mu$

$$\begin{aligned}
I_\mu &= \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\
&= \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \\
&\quad - \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)k_\mu}{(k^2 - m^2)^2[(k+k_1)^2 - m^2]} \\
&\quad - \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)k_\mu}{(k^2 - m^2)^2[(k+k_2)^2 - m^2]} \\
&\quad + \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)k_\mu}{(k^2 - m^2)^2[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}, \tag{B.3}
\end{aligned}$$

usando novamente (3.4), considerando as integrais nulas e juntando a parte finita obtemos:

$$I_\mu = - \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} - \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} + \text{Parte Finita}, \tag{B.4}$$

mas,

$$\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} = 2k_i^\alpha \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} \tag{B.5}$$

usando as relações de consistência vem:

$$\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} = \frac{1}{4} g_{\mu\alpha} I_{\log}(m^2) - \frac{1}{4} \Upsilon_{\mu\alpha}^0 \tag{B.6}$$

substituindo (B.6) em (B.5) obtemos:

$$\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} = \frac{1}{2} k_{i\mu} I_{\log}(m^2) - \frac{1}{2} k_i^\alpha \Upsilon_{\mu\alpha}^0 \tag{B.7}$$

substituindo então (B.7) em (B.4) chegamos a:

$$I_\mu = -\frac{1}{2} k_{1\mu} I_{\log}(m^2) + \frac{1}{2} k_1^\alpha \Upsilon_{\mu\alpha}^0 - \frac{1}{2} k_{2\mu} I_{\log}(m^2) + \frac{1}{2} k_2^\alpha \Upsilon_{\mu\alpha}^0 + \text{Parte Finita}, \tag{B.8}$$

concluimos então;

$$I_\mu = -\frac{1}{2} (k_1 + k_2)_\mu I_{\log}(m^2) + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)^\alpha \Upsilon_{\mu\alpha}^0 + \text{Parte Finita} \tag{B.9}$$

### B.1.3 Integral $I_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu} &= \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\
&= \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \\
&\quad - \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2[(k+k_1)^2 - m^2]} \\
&\quad - \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2[(k+k_2)^2 - m^2]} \\
&\quad + \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}, \tag{B.10}
\end{aligned}$$

ora,

$$\begin{aligned}
&\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2[(k+k_i)^2 - m^2]} \\
&= \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \left[ \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)}{(k^2 - m^2)[(k+k_i)^2 - m^2]} \right] \\
&= \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} - \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)^2 k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3[(k+k_i)^2 - m^2]} \\
&= k_i^2 \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} \\
&\quad - \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)^2 k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} \left[ \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)}{(k^2 - m^2)[(k+k_i)^2 - m^2]} \right] \\
&= k_i^2 \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} - 4k_i^{\alpha}k_i^{\beta} \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\alpha}k_{\beta}k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4} \\
&\quad + \text{Parte Finita.} \tag{B.11}
\end{aligned}$$

Assim obtemos:

$$\begin{aligned}
&\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k)k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2[(k+k_i)^2 - m^2]} \\
&= k_i^2 \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} \\
&\quad - 4k_i^{\alpha}k_i^{\beta} \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\alpha}k_{\beta}k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4} \\
&\quad + \text{Parte Finita.} \tag{B.12}
\end{aligned}$$

Das relação de consistência obtemos respectivamente:

$$\int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} I_{\log}(m^2) - \frac{1}{4} \Upsilon_{\mu\nu}^0, \quad (\text{B.13})$$

e

$$\int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu} k_{\nu} k_{\alpha} k_{\beta}}{(k^2 - m^2)^4} = \frac{1}{24} (g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}) I_{\log}(m^2) - \frac{1}{24} \Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^0, \quad (\text{B.14})$$

usando então (B.13) e (B.14) em (B.12) chegamos a:

$$\begin{aligned} & \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k) k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2 [(k + k_i)^2 - m^2]} \\ &= \frac{1}{12} k_i^2 g_{\mu\nu} I_{\log}(m^2) - \frac{1}{3} k_{i\mu} k_{i\nu} I_{\log}(m^2) \\ & \quad - \frac{1}{4} k_i^2 \Upsilon_{\mu\nu}^0 + \frac{1}{6} k_i^{\alpha} k_i^{\beta} \Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^0 \\ & \quad + \text{Parte Finita} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} & \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k) k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2 [(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \\ &= \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k) k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4} \\ & \quad - \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)^2 (k_2^2 + 2k_2 \cdot k) k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4 [(k + k_1)^2 - m^2]} \\ & \quad - \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)^2 k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4 [(k + k_2)^2 - m^2]} \\ & \quad + \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)^2 (k_2^2 + 2k_2 \cdot k)^2 k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4 [(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \\ &= 4k_1^{\alpha} k_2^{\beta} \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu} k_{\nu} k_{\alpha} k_{\beta}}{(k^2 - m^2)^4}, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

que usando a relação novamente as relações de consistência obtemos o resultado:

$$\begin{aligned} & \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k) k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2 [(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \\ &= \frac{1}{6} (k_1 \cdot k_2) g_{\mu\nu} I_{\log}(m^2) + \frac{1}{6} k_{1\mu} k_{2\nu} I_{\log}(m^2) + \frac{1}{6} k_{1\nu} k_{2\mu} I_{\log}(m^2) - \frac{1}{6} k_1^{\alpha} k_2^{\beta} \Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^0 \\ & \quad + \text{Parte Finita}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Juntando esses resultados obtemos finalmente:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu} &= -\frac{1}{12}(k_1 - k_2)^2 g_{\mu\nu} I_{\log}(m^2) \\
&+ \frac{1}{6}(2k_{1\mu}k_{1\nu} + k_{1\mu}k_{2\nu} + k_{1\nu}k_{2\mu} + 2k_{2\mu}k_{2\nu}) I_{\log}(m^2) \\
&+ \frac{1}{4}(k_1^2 + k_2^2) \Upsilon_{\mu\nu}^0 \\
&- \frac{1}{6}(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\alpha k_2^\beta) \Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^0 \\
&+ \text{Parte Finita.}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

## B.2 Relação de escala

Seja

$$I_{\log}(m^2) = \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}. \tag{B.19}$$

Diferenciando essa equação com respeito a  $m^2$  obtemos:

$$\frac{d}{dm^2} I_{\log}(m^2) = 2 \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^3}. \tag{B.20}$$

Ora, a integral em (B.20) é finita e pode ser facilmente calculada. Vamos usar o seguinte resultado:

$$\int^\Lambda \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + 2k \cdot q - m^2)^\alpha} = \frac{(-1)^\alpha}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} i \frac{\Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}}. \tag{B.21}$$

Tomando  $n = 4$ ,  $\alpha = 3$  e  $q = 0$  temos:

$$\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^3} = -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3)} \frac{1}{m^2} = -\frac{b}{2m^2}, \tag{B.22}$$

onde  $b = \frac{i}{(4\pi)^2}$ ,  $\Gamma(1) = 1$  e  $\Gamma(3) = 2$ . Assim

$$\frac{d}{dm^2} I_{\log}(m^2) = -2 \frac{b}{2m^2} = -\frac{b}{m^2}. \tag{B.23}$$

Integrando essa equação diferencial obtemos:

$$\int_{\lambda_1^2}^{\lambda_2^2} dI_{\log}(m^2) = -b \ln(m^2) \Big|_{\lambda_1^2}^{\lambda_2^2}. \tag{B.24}$$

O que implica

$$I_{log}(\lambda_2^2) - I_{log}(\lambda_1^2) = -b[\ln(\lambda_2^2) - \ln(\lambda_1^2)] = -b \ln\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right). \quad (\text{B.25})$$

Os  $\lambda_i$ 's são arbitrários. Então fazendo  $\lambda_2^2 = \mu^2$  e  $\lambda_1^2 = m^2$  obtemos finalmente que:

$$I_{log}(\mu^2) = I_{log}(m^2) - b \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right). \quad (\text{B.26})$$

A equação (B.26) é dita relação de escala.

## *Referências*

- [1] V. Elias, G. McKeon and R. B. Mann, Physical Review D 28 (1983) 1978-1992.
- [2] G. McKeon, V. Elias, R. B. Mann and F. B. Little, Physical Review D 34 (1986) 619626.
- [3] E. M. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Westview Press (1995) 842p.
- [4] C. Quigg, Gauge Theories of Strong, Weak and Electromagnetic interactions, The Benjamin/Cummings Publishing, Inc (1983) 334p.
- [5] M. O. C. Gomes, Teoria Quântica dos Campos, edusp (2002) 458p.
- [6] M. Srednicki, Quantum Field Theory, Cambridge (2007) 641p.
- [7] D. Griffiths, Introduction to Elementary Particles, John Wiley Sons, Inc (2004) 392p.
- [8] L. H. Ryder, Quantum Field Theory, 2nd ed, Cambridge University Press (1986) 487p.
- [9] B. Hatfield, Quantum Field Theory of Point Particles and Strings, Perseus Book Cambridge, Massachusetts (1992) 734p.
- [10] A. Zee, Quantum Field Theory in a Nutshell, 2nd ed, Princeton University Press (2010) 518p.
- [11] R. A. Bertlmann, Anomalies in Quantum Field Theory, Oxford Science Publications Press (1996) 566p.
- [12] M. Sampaio, A. P. B. Scarpelli, B. Hiller, M. Brizola, M. C. Nemes and S. Gobira, Physical Review D 65 (2002) 0203261.
- [13] A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio and M.C. Nemes, Physical Review D 63 (2001) 0010285.
- [14] A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, B. Hiller, Physical Review D 64 (2001) 0102108.
- [15] M. Sampaio, M. C. Nemes, A. M. Souza, Phys. Lett. B 632 (2006) 717-724.
- [16] O. A. Battistel and G. Dallabona, Eur. Phys. J. C 45, (2006) 721-743.
- [17] R. Jackiw, arXiv:hep-th/9602122v1 22 Feb (1996).
- [18] R. Jackiw, International Journal of Modern Physics B (2000) 2011-2021.



- [19] G. Cynolter and E. Lendvai, (2010) ITP-BUDAPEST-646.
- [20] F. Wilczek, *Rev. Mod. Phys.* (1999) 71:S85-S95.
- [21] François G, in “Symmetries in Physics”, Proceedings of the fifth “Seminaire Rhodanien de Physique”, (1998) 9712154.
- [22] D. E. Soper, *Quantum Electrodynamics*, University of Oregon (2001).
- [23] D. E. Soper, *Renormalization of quantum electrodynamics*, University of Oregon (2001).
- [24] E. W. Dias, Tese de Doutorado, Generalização do procedimento de Regularização implícita para ordens superiores em teorias de calibre abelianas, Departamento de Física, Universidade Federal de Minsa Gerais, (2008) 178p.
- [25] A. P. B. Scarpelli, Tese de Doutorado, Arbitrariedades em um Método de Regularização no Espaço dos Momentos n-dimensional, Departamento de Física, Universidade Federal de Minsa Gerais, (2001) 62p.
- [26] V. Elias, G. McKeon, S. B. Phillips and R. B. Mann, *Physical Letters B* 133 (1983) 83-90.
- [27] F. B. Little, R. B. Mann, V. Elias and D. G. C McKeon, *Physical Review D* 32 (1985) 2707-2712.
- [28] A. F. R. de Toledo Piza, *Mecânica Quântica*, edusp (2003) 605p.