

Não-localidade em sistemas quânticos

Dissertação de Mestrado

Gláucia Murta Guimarães

Orientador: Marcelo de Oliveira Terra Cunha

Co-orientador: Daniel Cavalcanti

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Fevereiro de 2012

Agradecimentos

Um mestrado não se resume apenas ao trabalho aqui apresentado, por isso gostaria de agradecer a todos aqueles que de alguma forma fizeram parte desse processo de formação.

Agradeço ao Marcelo por ser um grande orientador desde o início (que já foi no meio). Por todos os ensinamentos e conselhos. Por tanto me motivar e me inspirar. E por sempre dosar tão bem a liberdade e a cobrança.

Ao Daniel agradeço a total disponibilidade desde a primeira conversa, e a paciência e disposição em me guiar pelo estudo que resultou nessa dissertação.

Aos meus pais, agradeço o amor que sempre dedicaram a mim e os valores que me formaram, e principalmente por me permitirem estar aqui hoje. À Bizy, minha irmã preferida, agradeço por ser uma ótima amiga e por ter me ajudando tanto nesse período conturbado.

Ao Érico agradeço por ter sido um grande companheiro e pelos vários conselhos (e peço desculpas por muitas vezes ainda não estar preparada para ouvi-los).

Ao Professor Emmanuel, agradeço o apoio num dos momentos mais difíceis. Foi muito importante para que eu pudesse ter tranquilidade para tomar grandes decisões.

Agradeço à Bárbara, que mesmo tendo horários tão apertados me dedicou bastante atenção e deu grandes ajudas para esse trabalho final. Ao Mateus e ao Marco Túlio, agradeço os vários toques na dissertação e a imensa ajuda com o latex. Agradeço também pelas ótimas discussões de física, matemática entre outros assuntos. Vocês são grandes amigos.

Ao grupo de TQC, Helvécio, Adriano, Jean, Júnior e Gustavo agradeço pelos nossos estudos em grupo, e ao Professor Marcos Sampaio pela orientação inicial. Ao pessoal do EnLight agradeço a receptividade.

Aos professores que tanto contribuíram para minha formação agradeço por todas as lições, em especial ao Mário, à Carolina, ao Plascak, ao Emmanuel, ao Marcos Pimenta, e ao Fernando, que me apresentou à Informação Quântica. Agradeço também à Shirley e à Clarice pela total disposição em ajudar e por tornarem a biblioteca um ponto de apoio para nossos trabalhos.

Agradeço a todos os amigos da física, que tornam os cafés tão agradáveis e o ambiente tão aconchegante. Em especial à Amanda e ao Campolina por serem grandes amigos e continuarem presentes desde o começo.

Conteúdo

Prólogo	1
1 Mecânica Quântica	4
1.1 Pré-requisitos	4
1.2 Postulados da Teoria Quântica	5
1.2.1 Qubits	6
1.2.2 Sobre a estrutura de produto tensorial	7
1.2.3 Operador densidade	8
1.2.4 O formalismo das medições quânticas	12
1.3 Emaranhamento	15
1.3.1 Emaranhamento de estados puros	15
1.3.2 Critérios de separabilidade	19
1.3.3 Extensões simétricas de estados quânticos	21
1.3.4 Quantificadores de emaranhamento	23
1.3.5 Sistemas multipartites	24
1.4 O Paradoxo de EPR	25
2 Conjunto das Correlações	28
2.1 Conjunto das Correlações I:	
O Cenário $(2, 2, 2)$	28
2.1.1 O Cenário $(2, 2, 2)$	28
2.1.2 O Conjunto das Correlações	29
2.1.3 O Conjunto das Correlações Não-Sinalizadoras	30
2.1.4 O Conjunto das Correlações Locais	32
2.1.5 As correlações quânticas	36
2.1.6 Desigualdades CHSH	39
2.1.7 Resultados sobre a existência de modelos locais	45
2.2 Conjunto das Correlações II:	
Cenários mais gerais	50
2.2.1 Cenários mais gerais	50
2.2.2 Facetas do politopo clássico	51

2.2.3	Mais resultados sobre a existência de modelos locais . . .	51
3	Emaranhamento \Leftrightarrow Não-localidade?	54
3.1	Estados separáveis	54
3.2	Estados Puros	55
3.2.1	Dois qubits	55
3.2.2	Sistemas bipartites	57
3.2.3	Sistemas multipartites	58
3.3	Estados de Werner	62
4	Cenários mais gerais	66
4.1	Não-localidade escondida	66
4.1.1	Medições consecutivas	66
4.1.2	Testes coletivos	71
4.1.3	Conjectura de Peres	73
4.2	Ativação de não-localidade	74
4.2.1	Muitas cópias	74
4.2.2	Redes quânticas	75
	Considerações finais	80
A	Apêndice	81

Resumo

Uma das estranhas consequências da estrutura matemática da teoria quântica é a existência de correlações que não podem ser explicadas por teorias realistas locais. Nesta dissertação vamos nos dedicar ao estudo da não-localidade quântica. Estudaremos a estrutura matemática dos conjuntos formados pela estatística de resultados de um experimento de correlação. Veremos como as hipóteses clássicas de realismo local impõem restrições a esses conjuntos, e que as correlações geradas pela mecânica quântica são capazes de violar tais restrições. Investigando o caráter não-local dos estados quânticos, veremos que emaranhamento é uma condição necessária para a existência de correlações não-locais, mas que não é suficiente. Abordaremos novos cenários, recentemente propostos para o estudo de não-localidade, que vêm estreitando ainda mais a relação entre emaranhamento e não-localidade.

Abstract

One of the strange consequences of the mathematical structure of quantum theory is the existence of correlations that can not be explained by local realistic theories. This dissertation is devoted to the study of quantum nonlocality. We study the mathematical structure of the sets formed by the statistical results of correlation experiments. We show how the classical hypotheses of local realism impose restrictions on these sets, and that the correlations generated by quantum mechanics are able to violate such restrictions. Investigating the nonlocal character of quantum states, we see that entanglement is a necessary condition for the existence of nonlocal correlations, but it is not sufficient. We also discuss new scenarios recently proposed for the study of nonlocality, which are further strengthening the relationship between entanglement and nonlocality.

Prólogo

Em uma palestra apresentada na prestigiosa ‘Messenger Lecture’ da Universidade de Cornell¹, Richard Feynman fez a seguinte afirmação:

“There was a time when the newspaper said that only twelve men understood the theory of relativity. I do not believe there ever was such a time. There might have been a time when only one man did, because he was the only guy who caught on, before he wrote his paper. But after people read the paper a lot of people understood the theory of relativity in some way or other, certainly more than twelve. On the other hand, I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.”

Um tanto perigosa e desanimadora, tal afirmação deve ser tomada com muito cuidado. Mais profunda do que parece, ela se refere a essência, ou talvez falta de essência, da teoria quântica. Diferente de toda a nossa base de pensamento clássico a mecânica quântica causa enormes angústias se tentamos entrar no campo de perguntar “como isso pode ser como é?”

Em seu livro [2], Itamar Pitowsky discute o que faz da relatividade uma teoria imediatamente compreendida e da mecânica quântica uma teoria que “ninguém entende”². O ponto é que por mais estranha ou complicada que seja a teoria da relatividade, ela tem um princípio físico como axioma do qual toda a teoria segue. Já para mecânica quântica, embora matematicamente bem estabelecida, não conhecemos o princípio físico que faz com que ela seja como ela é.

Em geral, uma mudança revolucionária na física teórica ocorre quando um velho princípio é abandonado e substituído por outro. No caso da relatividade especial, é possível apontar o princípio físico que “carrega o fardo da revolução”: *a constância da velocidade da luz em qualquer referencial inercial*. Uma vez aceito esse princípio, o que não é um pequeno passo, toda a

¹As sete aulas apresentadas por Feynman foram transcritas para o livro *The Character of Physical Law* [1]. O vídeo das aulas pode ser encontrado no youtube.

²Bastante recomendada a leitura da Introdução do livro do Pitowsky.

teoria segue. Já para a teoria quântica, qual princípio físico podemos apontar como o gerador revolução?

Pitowsky discute alguns candidatos. O princípio da incerteza (enunciado da forma: “Existem grandezas físicas complementares, como posição e momento, e não é possível descrever um sistema físico simultaneamente em termos de grandezas complementares.”) não é propriamente uma lei da física, ele é muito mais uma lei meta-física, i.e. ele fala sobre como devem ser as teorias físicas e não sobre uma teoria em particular.

Um segundo candidato seria o princípio da superposição. Entretanto este fala sobre vetores de estado quântico que, na interpretação mais comum da mecânica quântica, não têm realidade física. O que tem significado físico são as probabilidades que podem ser calculadas a partir deles e não os vetores em si. Portanto como dizer que este é um princípio físico?

E assim por diante, a revolução teórica gerada pela mecânica quântica parece resistir a uma descrição do tipo: “A lei física A foi abandonada e substituída pela lei física B ”. Pitowsky atribui essa dificuldade em definir um princípio físico para a mecânica quântica à principal razão de porque “ninguém entende mecânica quântica”.

Na falta de um princípio que nos guie no entendimento da teoria só nos resta explorar toda a sua estrutura matemática e ver suas consequências, para que possamos investigar melhor os aspectos em que essa teoria difere da física clássica.

Uma das estranhas consequências dessa estrutura matemática será o foco de estudo desta dissertação: a não-localidade quântica, que revela que a mecânica quântica não pode ser explicada com a visão clássica que temos do mundo.

Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) [3], explorando um dos mais intrigantes aspectos de sistemas quânticos compostos: o emaranhamento, apontaram as estranhas consequências dessa propriedade. Na época EPR atribuíram essa estranheza a uma possível incompletude da teoria quântica. Anos depois John Bell formalizou os argumentos de EPR em uma condição matemática que deveria ser obedecida por qualquer teoria realista local (a essência da física clássica). Bell mostrou também que a mecânica quântica pode violar essas condições.

Nesta dissertação vamos nos dedicar ao estudo da não-localidade quântica. Com o advento da teoria da informação quântica a não-localidade ganhou espaço pois foi identificada como um recurso para a realização de tarefas, como por exemplo a distribuição quântica de chaves criptográficas [4], redução da complexidade de comunicação, entre outras. Desde então “*é difícil encontrar uma edição da Physical Review que não menciona desigualdades de Bell, não-localidade ou, no topo da lista, ‘a potencial relevância*

desse trabalho para o processamento de informação quântica’ ”[5]. Não vamos focar em sua utilidade como recurso, uma introdução pode ser encontrada em [6], vamos nos concentrar na investigação do caráter não-local dos estados quânticos. Veremos que emaranhamento é necessário para que um estado quântico seja não-local, mas que não é suficiente. Abordaremos novos cenários, recentemente propostos para o estudo de não-localidade, que vêm estreitando ainda mais a relação entre emaranhamento e não-localidade.

O capítulo 1 se dedica a uma rápida revisão de mecânica quântica, explicitando alguns conceitos que serão úteis ao longo do texto. São apresentados os postulados da teoria, explicando melhor alguns pontos que não são comumente abordados nos livros introdutórios de mecânica quântica. Em seguida partimos para a definição de emaranhamento e algumas de suas propriedades. O leitor habituado ao formalismo da teoria quântica pode apenas dar uma rápida olhada nos tópicos abordados e partir para o capítulo 2.

O capítulo 2 se dedica à formulação matemática de não-localidade. São definidos os experimentos de correlação e partimos, então, para o estudo do conjunto formado pela estatística de resultados desses experimentos. Analisamos as restrições que as hipóteses da física clássica impõem a esse conjunto e apresentamos alguns resultados sobre o conjunto das correlações geradas pela mecânica quântica. Veremos que a mecânica quântica viola as restrições impostas pelo realismo local clássico.

No capítulo 3 nos perguntamos quais estados quânticos podem apresentar esse comportamento não-clássico. Veremos que, para estados puros, emaranhamento é uma condição necessária e suficiente para a existência de correlações não-locais, mas existem estados mistos emaranhados capazes de gerar apenas correlações clássicas.

No capítulo 4 são explorados os cenários mais gerais que foram propostos para o estudo de não-localidade. Veremos como esses novos cenários estreitam ainda mais a relação entre emaranhamento e não-localidade.

“So do not take the lecture too seriously, feeling that you really have to understand in terms of some model what I am going to describe, but just relax and enjoy it.” (Feynman [1])

Capítulo 1

Mecânica Quântica

Como discutido no Prólogo, a mecânica quântica carece de um princípio físico que justifique seu comportamento, portanto vamos tratá-la apenas como um conjunto de regras e ver as consequências que podem ser deduzidas a partir dessas regras. Este capítulo não tem a pretensão de ser um texto didático para o aprendizado de mecânica quântica, por isso espera-se que o leitor já tenha sido introduzido no assunto. O objetivo é fazer uma rápida revisão dos postulados da teoria, e de conceitos e resultados que serão úteis ao longo do texto, explorando melhor os tópicos que não são comumente abordados nos textos introdutórios. Para uma introdução aos conceitos e formalismos básicos da teoria quântica, [7] e [8] são boas referências. Para uma introdução a um formalismo mais avançado, que também será utilizado neste texto, ver [9](capítulo 2), [10] e [11].

1.1 Pré-requisitos

O pré-requisito para o estudo de Mecânica Quântica é um bom conhecimento de álgebra linear, e análise funcional no caso de sistemas de dimensão infinita. Nesta dissertação só trabalharemos com sistemas de dimensão finita, portanto um bom conhecimento de álgebra linear é suficiente para acompanhar o texto.

Uma notação mnemônica, que auxilia bastante o trato da mecânica quântica, foi introduzida por Paul Dirac, chamada *Notação de Dirac*.

Na notação de Dirac os elementos de um espaço vetorial V são denotados $|v\rangle$, e os elementos do espaço dual V^* são denotados $\langle v|$. Dessa forma o produto interno de dois vetores u e v é simplesmente escrito como $\langle u|v\rangle$. A utilidade dessa notação deve ficar mais clara ao longo do texto.

1.2 Postulados da Teoria Quântica

A Mecânica Quântica é uma teoria intrinsecamente probabilística. Ela fala sobre testes e sobre as probabilidades de cada um dos possíveis resultados serem obtidos. Portanto suas previsões só podem ser testadas quando preparamos igualmente um grande número de cópias do sistema e agimos igualmente sobre todas elas. Assim, um sistema quântico é uma idealização matemática de um ensemble de sistemas preparados da mesma forma.

Postulado 1 (Estado quântico). *A todo sistema quântico isolado existe um espaço de Hilbert associado (um espaço vetorial completo com produto interno) denominado espaço de estados. O sistema é completamente descrito por um vetor unitário no espaço de estados.*

Postulado 2 (Evolução temporal). *A evolução temporal do estado de um sistema quântico fechado é descrita pela equação de Schrödinger:*

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle ,$$

onde H é um operador hermitiano denominado Hamiltoniano do sistema.

Assim, o estado do sistema em um certo instante de tempo se relaciona com o estado num instante posterior através de um operador unitário¹:

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle .$$

Postulado 3 (Medições). *Cada medição quântica é descrita por um conjunto de operadores $\{M_m\}$ que atuam no espaço de estados, denominados operadores de medida . O índice m indica os possíveis resultados obtidos na medição, i.e., alternativas clássicas distintas.*

O processo de medição é descrito da seguinte forma: se o estado do sistema antes da medição é $|\psi\rangle$, então a probabilidade de se obter o resultado m é dada por:

$$p_m = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle ,$$

e uma vez obtido o resultado m , o sistema, logo após a medição, passa a ser descrito pelo estado

$$|\psi_m\rangle = \frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}} .$$

¹No caso de o Hamiltoniano do sistema ser independente do tempo, o operador de evolução temporal é da forma $U(t, t_0) = e^{-\frac{iH}{\hbar}(t-t_0)}$.

Os operadores de medida devem obedecer à relação de completeza

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I ,$$

expressando o fato de que a soma das probabilidades sobre todos os resultados é igual a 1.

Postulado 4 (Sistemas Compostos). *O espaço de estados de um sistema quântico composto é o produto tensorial dos espaços de estados dos sistemas físicos individuais, $\mathcal{H}_{1\dots n} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$.*

Nos postulados, *sistema quântico fechado* se refere a um sistema que não interage com nenhum outro sistema quântico. As interações com sistemas clássicos (i.e., sistemas que podem ser bem descritos classicamente) são incorporadas no Hamiltoniano, e o sistema é considerado fechado ainda que esse Hamiltoniano dependa do tempo.

Vamos agora ao estudo de alguns tópicos com o objetivo de clarear o entendimento dos postulados apresentados.

1.2.1 Qubits

O sistema quântico mais simples não trivial é aquele que possui apenas dois níveis, cujo espaço de estados é $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^2$ (por exemplo o spin de um elétron que possui duas alternativas classicamente distintas: “spin pra cima” e “spin pra baixo”). Tal sistema é também chamado de qubit em analogia a um bit clássico.

Um bit clássico é uma variável aleatória que pode assumir dois valores, por exemplo 0 ou 1. Um qubit é um sistema quântico em que essas duas alternativas são atribuídas a estados ortogonais, $|0\rangle$ e $|1\rangle$, que formam uma base para o espaço de estados. Uma vez que superposições lineares de estados quânticos são também estados quânticos, os qubits também podem se encontrar em uma combinação dessas duas alternativas.

O estado geral de um qubit pode ser escrito na forma:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 .$$

Uma importante ferramenta no estudo de qubits são as *matrizes de Pauli*:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Todos os operadores hermitianos que levam de \mathbb{C}^2 em \mathbb{C}^2 podem ser representados na forma² $aI + \vec{b} \cdot \vec{\sigma}$, onde $a \in \mathbb{R}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, e $\vec{b} \cdot \vec{\sigma}$ representa o operador

$$b_x \sigma_x + b_y \sigma_y + b_z \sigma_z = b_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + b_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A base canônica $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, em geral, é tomada como sendo formada pelos auto-estados do operador σ_z , com autovalores $+1$ e -1 respectivamente.

Medir o observável σ_z é como realizar uma medição com os operadores de medida $\{M_0 = |0\rangle\langle 0|, M_1 = |1\rangle\langle 1|\}$, onde obter a resposta correspondente M_0 corresponde a obter o autovalor $+1$ e M_1 corresponde a obter o autovalor -1 de σ_z . As probabilidades de cada resultado no estado geral $|\psi\rangle$ são:

$$p_{+1} = \langle \psi | M_0^\dagger M_0 | \psi \rangle = \langle \psi | 0 \rangle \langle 0 | \psi \rangle = |\alpha|^2,$$

$$p_{-1} = \langle \psi | M_1^\dagger M_1 | \psi \rangle = \langle \psi | 1 \rangle \langle 1 | \psi \rangle = |\beta|^2.$$

1.2.2 Sobre a estrutura de produto tensorial

Vamos detalhar um pouco mais essa operação sobre o espaço de estados de sistemas compostos, como feito em [11].

Sejam V e W espaços vetoriais complexos. O produto tensorial desses espaços, denotado $V \otimes W$, é o espaço vetorial gerado pelos vetores da forma $|v\rangle \otimes |w\rangle$, onde $|v\rangle \in V$ e $|w\rangle \in W$, que obedecem às relações:

1. $(\lambda|v\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes (\lambda|w\rangle) = \lambda(|v\rangle \otimes |w\rangle)$;
2. $(|u\rangle + |v\rangle) \otimes |w\rangle = |u\rangle \otimes |w\rangle + |v\rangle \otimes |w\rangle$;
3. $|v\rangle \otimes (|w\rangle + |z\rangle) = |v\rangle \otimes |w\rangle + |v\rangle \otimes |z\rangle$;
4. Se V e W possuem produto escalar, então define-se o produto escalar em $V \otimes W$ por

$$(\langle u| \otimes \langle z|)(|v\rangle \otimes |w\rangle) = \langle u|v\rangle \langle z|w\rangle ;$$

para $|u\rangle, |v\rangle \in V$, $|w\rangle, |z\rangle \in W$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Como $V \otimes W$ é gerado por vetores da forma $|v\rangle \otimes |w\rangle$, combinações lineares desses elemento também são vetores de $V \otimes W$, e portanto também

²As matrizes de Pauli junto com a identidade formam uma base para o espaço das matrizes 2×2 , portanto toda matriz pode ser escrita como combinação linear destas. Em particular, as matrizes hermitianas podem ser escritas com coeficientes reais.

são estados quânticos admissíveis. Veremos mais adiante que essa, aparentemente ingênua, característica da Mecânica Quântica é a fonte do que será discutido nesta dissertação: estados emaranhados e correlações não-locais.

Notação: muitas vezes, para não sobrecarregar demais a escrita, o produto tensorial de vetores também será denotado por:

$$|v\rangle \otimes |w\rangle \equiv |v\rangle|w\rangle \equiv |vw\rangle .$$

1.2.3 Operador densidade

Até aqui assumimos conhecimento completo acerca do estado do sistema. Entretanto, muitas vezes não temos acesso a esse conhecimento, então precisamos colocar a estatística clássica no tratamento de nosso sistema.

Por exemplo, podemos ter uma fonte que prepara um dos estados $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$, com probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n , respectivamente. Como não sabemos qual estado foi preparado, podemos descrever o sistema por um ensemble $\{(p_i, |\psi_i\rangle)\}$, que quer dizer que o sistema está no estado $|\psi_i\rangle$ com probabilidade p_i . Com essas considerações, somadas aos postulados aplicados a cada um dos estados $|\psi_i\rangle$, descrevemos tudo que é possível sobre nosso sistema.

Entretanto, existe uma ferramenta muito mais prática para tratar estados dessa forma: os *operadores densidade*³. Com esse formalismo, nosso sistema é descrito por um operador que atua no espaço de estados:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| .$$

Teorema 1.1 (Caracterização dos operadores densidade). *Um operador ρ sobre o espaço de estados \mathcal{H} é o operador densidade de um ensemble $\{(p_i, |\psi_i\rangle)\}$, $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}$ se e somente se satisfizer as seguintes condições:*

1. (Normalização) $\text{tr } \rho = 1$.
2. (Positividade) $\rho \geq 0$ i.e., $\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0 \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}$.

³Essa não é a maneira mais geral de introduzir os operadores densidade. Aqui estamos dando aos vetores de estado um status mais fundamental. Ao invés disso podemos simplesmente tomar os estados quânticos como sendo operadores positivos de traço 1 que atuam no espaço de Hilbert associado ao sistema, sem nos preocuparmos em passar pela descrição de vetores de estado.

Demonstração.

(\Rightarrow) Seja $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$.
Então,

$$\text{tr } \rho = \sum_i p_i \text{tr} (|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) = \sum_i p_i = 1.$$

Agora tome um vetor arbitrário $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \langle\phi|\rho|\phi\rangle &= \sum_i p_i \langle\phi|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\phi\rangle \\ &= \sum_i p_i |\langle\phi|\psi_i\rangle|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Seja ρ um operador positivo de traço 1.

Como ρ é positivo, possui uma decomposição espectral com autovalores positivos:

$$\rho = \sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j| \quad ; \quad \lambda_j \geq 0,$$

em que os vetores $|j\rangle$ são ortogonais. A condição sobre o traço implica que $\sum_j \lambda_j = 1$. Portanto o operador ρ representa o ensemble $\{(\lambda_j, |j\rangle)\}$. \square

Vamos denotar por $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ o conjunto dos operadores positivos e de traço 1 que atuam em \mathcal{H} .

Um ponto importante que deve ser ressaltado é que embora todo operador densidade possa ser escrito em termos do ensemble associado a sua decomposição espectral, como enunciado no Teorema 1.1, diferentes ensembles podem dar origem a um mesmo operador densidade, i.e. um operador densidade não é unicamente definido como combinação convexa de estados puros. Por exemplo, o estado

$$\rho = \frac{1}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{3}{4}|1\rangle\langle 1|$$

também pode ser escrito como a combinação convexa

$$\rho = \frac{1}{4}|\phi\rangle\langle\phi| + \frac{1}{4}|\varphi\rangle\langle\varphi| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|,$$

onde $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ e $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

No caso em que sabemos que o sistema se encontra num estado específico $|\psi\rangle$, o seu operador densidade é

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|.$$

Note que este operador possui um único autovalor não nulo (igual a 1), e não pode ser escrito como combinação convexa de outros estados. Os estados dessa forma são ditos **estados puros**, caso contrário temos um **estado misto**.

Podemos agora reescrever os postulados da teoria quântica usando o formalismo de operadores densidade:

Postulado 1 (Estados quânticos). *A todo sistema quântico isolado existe um espaço de Hilbert associado (um espaço vetorial completo com produto interno) denominado espaço de estados. O sistema é completamente descrito pelo seu operador densidade, que é um operador positivo de traço 1 que atua no espaço de estados.*

Postulado 2 (Evolução temporal). *A evolução temporal do operador densidade de um sistema quântico fechado é descrita pela equação de Heisenberg⁴:*

$$i\hbar\frac{d\rho}{dt} = [H, \rho],$$

onde H é um operador hermitiano denominado Hamiltoniano do sistema.

Assim, o estado do sistema em um certo instante de tempo se relaciona com o estado num instante posterior através de uma transformação unitária⁵

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0).$$

Postulado 3 (Medições). *As medições quânticas são descritas por operadores de medida $\{M_m\}$ que atuam no espaço de estados.*

Se o estado do sistema antes da medição for ρ , então a probabilidade de se obter o resultado m é dada por:

$$p_m = \text{tr} \left(M_m^\dagger M_m \rho \right),$$

e uma vez obtido o resultado m , o sistema, logo após a medição, passa a ser descrito pelo estado

$$\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr} \left(M_m^\dagger M_m \rho \right)}.$$

⁴O análogo da equação de Schrödinger para o operador densidade.

⁵Em geral, a evolução do estado de um sistema quântico é descrita por mapas completamente positivos que preservam o traço (mapas CPTP).

Postulado 4 (Sistemas Compostos). *O espaço de estados de um sistema quântico composto é o produto tensorial dos espaços de estados dos sistemas físicos individuais, $\mathcal{H}_{1\dots n} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$.*

Existe ainda outra situação em que, mesmo começando com estados puros, somos levados a considerar estados mistos: quando queremos olhar apenas para uma parte de um sistema composto.

Se tivermos conhecimento completo de um sistema composto por duas partes, A e B , com espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B respectivamente, mas o vetor de estado desse sistema não for da forma de um produto de estados, $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$, não é possível definirmos um vetor de estado que descreva o sistema A . Por exemplo, se o estado do sistema composto AB é o vetor

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2,$$

qual é o estado do sistema A ? Não há como atribuir um vetor de estado a esse sistema. Já no formalismo de operador densidade é possível definir um operador densidade que caracteriza o sistema A :

Definição 1.1 (Operador densidade reduzido). *Se ρ é o operador densidade que descreve o sistema composto AB , então é possível atribuir um operador densidade que descreve o estado do sistema A , chamado operador densidade reduzido:*

$$\rho_A = \text{tr}_B \rho. \quad (1.1)$$

Analogamente pode-se definir ρ_B , o operador densidade reduzido do sistema B .

A operação tr_B é o traço parcial sobre o sistema B , e é definida da seguinte forma:

Considerando um sistema bipartido, sejam $\{|i_A\rangle\}$ e $\{|j_B\rangle\}$ bases ortonormais para \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , então um operador densidade pode ser escrito nessa base como

$$\rho = \sum_{i,j,i',j'} \rho_{ij,i'j'} |i_A\rangle \langle i'_A| \otimes |j_B\rangle \langle j'_B|,$$

e assim

$$\begin{aligned}
 \text{tr}_B \rho &\equiv \sum_l \langle l_B | \rho | l_B \rangle \\
 &= \sum_l \langle l_B | \left(\sum_{i,j,i',j'} \rho_{ij,i'j'} |i_A\rangle \langle i'_A| \otimes |j_B\rangle \langle j'_B| \right) | l_B \rangle \\
 &= \sum_{i,i'} \sum_l \rho_{il,i'l} |i_A\rangle \langle i'_A|.
 \end{aligned}$$

Não é óbvio que o operador densidade reduzido ρ_A seja de fato uma descrição para o estado do sistema A . A razão para tal escolha é que o traço parcial é uma operação que dá origem à descrição correta de medições realizadas nos subsistemas de um sistema composto. Por exemplo, se queremos fazer uma medição local em A (i.e. uma medição que envolve apenas o sistema A), $\{M_{mA} \otimes I_B\}$, temos que a probabilidade de obter o resultado m é dada por

$$\begin{aligned}
 p_m &= \text{tr} \left[\left(M_{mA}^\dagger M_{mA} \otimes I_B \right) \rho \right] \\
 &= \text{tr} \left[\sum_{i,j,i',j'} \rho_{ij,i'j'} \left(M_{mA}^\dagger M_{mA} |i\rangle \langle i'| \right) \otimes \left(I_B |j\rangle \langle j'| \right) \right] \\
 &= \sum_{k,l} \langle k | \otimes \langle l | \left[\sum_{i,j,i',j'} \rho_{ij,i'j'} \left(M_{mA}^\dagger M_{mA} |i\rangle \langle i'| \right) \otimes \left(I_B |j\rangle \langle j'| \right) \right] |k\rangle \otimes |l\rangle \\
 &= \sum_k \langle k | M_{mA}^\dagger M_{mA} \left(\sum_{i,i'} \sum_l \rho_{il,i'l} |i\rangle \langle i'| \right) |k\rangle \\
 &= \text{tr} \left(M_{mA}^\dagger M_{mA} \rho_A \right).
 \end{aligned}$$

É importante notar que, para estados mistos, o conhecimento dos estados parciais não determina o estado global. Em geral $\rho_{AB} \neq \rho_A \otimes \rho_B$.

1.2.4 O formalismo das medições quânticas

Em muitos textos de Mecânica Quântica o conceito de medida apresentado é apenas um caso particular do postulado 3: as medições projetivas. Por essa razão vamos olhar com mais cuidado para essa questão.

Medições projetivas

Medição projetiva é um caso particular do postulado 3 em que os operadores de medida, M_m , satisfazem:

$$M_m^\dagger M_{m'} = M_m M_{m'} = \delta_{m,m'} M_m .$$

Para medições projetivas, o número máximo de resultados distintos que se pode obter em uma medição é igual a dimensão do sistema.

Vamos denotar por P_m os operadores de medida no caso de medições projetivas. Reescrevendo as condições satisfeitas por eles

$$P_i = P_i^\dagger , \quad P_i = P_i^2 ,$$

vemos que são projetores.

As medições projetivas podem ser associadas a medições de observáveis (que geralmente são apresentadas nos livros introdutórios de Mecânica Quântica). Um observável O é um operador hermitiano que atua no espaço de estados. Uma vez que todo operador auto-adjunto é diagonalizável, o observável tem uma decomposição espectral:

$$O = \sum_m m P_m ; \quad m \in \mathbb{R} ,$$

onde P_m é o projetor no subespaço correspondente ao autovalor m de O . Os autovalores de O são associados aos possíveis resultados da medição. A probabilidade de obter o autovalor m é dada por

$$p_m = \text{tr}(P_m \rho) ,$$

e, obtido o resultado m , o estado do sistema é projetado no subespaço correspondente a esse autovalor

$$\rho_m = \frac{P_m \rho P_m}{\text{tr}(P_m \rho)} .$$

POVMs

Em algumas aplicações não estamos preocupados com o estado do sistema após a medição, mas apenas com as probabilidades dos diferentes resultados. O formalismo de POVM permite determinar essas probabilidades sem o conhecimento exato dos operadores de medida.

Como vimos no Postulado 3, a probabilidade de obter o resultado m dado que foi feita a medição correspondente ao conjunto de operadores $\{M_m\}$ é dada por

$$p_m = \text{tr} \left(M_m^\dagger M_m \rho \right).$$

Vamos definir então:

$$\Pi_m \equiv M_m^\dagger M_m.$$

O conjunto de operadores $\{\Pi_m\}$ obedece às seguintes condições:

- $\Pi_m \geq 0$;
- $\sum_m \Pi_m = I$.

Com essas especificações o conjunto $\{\Pi_m\}$ é denominado um **POVM** (do inglês *Positive Operator-Valued Measure*), e seus elementos Π_m são denominados **elementos de POVM**.

O conhecimento dos elementos de POVM é suficiente para determinar as probabilidades de um experimento: $p_m = \text{tr}(\Pi_m \rho)$. Entretanto, conhecendo apenas os operadores Π_m , não é possível determinar os operadores de medida M_m , pois existe uma família de operadores distintos tal que $M_m^\dagger M_m = \Pi_m$.

Para medições generalizadas, o número de resultados em um experimento não é limitado pela dimensão do sistema, mas sim pela partição feita do operador identidade, que está sujeita apenas às condições que os elementos de POVM devem obedecer.

Vimos, portanto, que a medição de observáveis pode ser vista como um caso particular de uma definição mais geral. Entretanto, esse formalismo mais geral (que por vezes não é citado nos livros de Mecânica Quântica) pode ser reduzido ao formalismo anterior se aumentarmos o sistema considerado.

Teorema 1.2 (Teorema de Naimark). *Dado um POVM $\{\Pi_m\}$ que atua em \mathcal{H} , é possível encontrar um sistema auxiliar, com espaço de estados \mathcal{H}' , tal que existem transformação unitária U e medição projetiva $\{P_m\}$ que atuam em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$, e*

$$\text{tr}(\Pi_m \rho) = \text{tr} \left[P_m U (\rho \otimes |0\rangle\langle 0|) U^\dagger \right],$$

onde $|0\rangle\langle 0|$ é um estado de referência no sistema auxiliar.

O Teorema de Naimark mostra que todo POVM pode ser visto como uma medição projetiva em um sistema maior (um sistema composto pelo sistema estudado e um sistema auxiliar). A demonstração desse teorema pode ser encontrada nas notas de aula do John Watrous [12](aula 5).

1.3 Emaranhamento

Uma curta e boa introdução a teoria do emaranhamento pode ser encontrada na referência [13]. Para um estudo mais aprofundado ver [14]. Nesta seção vamos nos concentrar em sistemas compostos de duas partes, sistemas bipartidos. E ao final vamos apenas discutir alguns pontos referente a sistemas multipartites.

Considere um sistema composto cujo espaço de Hilbert associado é $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

Definição 1.2. Um estado $\rho_{AB} \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ é dito **separável** se

$$\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i \quad ; \quad p_i \geq 0 \quad , \quad \sum_i p_i = 1 . \quad (1.2)$$

*Caso contrário o estado do sistema é dito **emaranhado**.*

Estados separáveis podem ser preparados utilizando apenas operações locais (em cada parte separadamente) e comunicação clássica, classe de operações tão comum que recebeu a sigla **LOCC** (do inglês *Local Operations and Classical Communication*). Por exemplo, Alice pode ter uma ferramenta clássica que sorteia um número $i = 1, \dots, n$ com probabilidade p_i . Assim, Alice faz o sorteio e comunica o resultado para Bob. Se foi obtido o resultado i , Alice prepara localmente o estado ρ_A^i e Bob prepara ρ_B^i . Alice repete o procedimento inúmeras vezes, de forma que eles obtenham um ensemble descrito por $\{(p_i, \rho_A^i \otimes \rho_B^i)\}$ que está associado ao operador densidade $\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i$.

1.3.1 Emaranhamento de estados puros

Para estados puros a definição 1.2 se reduz a:

Definição 1.3. Um estado $|\psi\rangle_{AB} \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é dito **fatorável** se

$$|\psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_B \quad ; \quad |\phi\rangle_A \in \mathcal{H}_A, \quad |\varphi\rangle_B \in \mathcal{H}_B . \quad (1.3)$$

*Caso contrário o estado do sistema é dito **emaranhado**.*

Uma ferramenta muito importante no estudo do emaranhamento de estados puros é a Decomposição de Schmidt.

Teorema 1.3 (Decomposição de Schmidt). *Dado um estado puro $|\psi\rangle$ do sistema composto AB , existem conjuntos de estados ortonormais, $\{|\mu^A\rangle\}$ e $\{|\mu^B\rangle\}$, em \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B respectivamente, tais que*

$$|\psi\rangle = \sum_{\mu=1}^d \sqrt{\lambda_\mu} |\mu^A\rangle |\mu^B\rangle \quad ; \quad \sum_{\mu} \lambda_\mu = 1 \quad , \quad \lambda_\mu \geq 0 \quad ,$$

onde $d = \min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\}$.

A demonstração que apresentaremos segue a referência [13]. Uma demonstração mais direta, que utiliza a decomposição em valores singulares, pode ser encontrada em [9]. Vamos a algumas observações antes da demonstração:

Considerando a validade da decomposição de Schmidt temos que os operadores densidade reduzidos dos subsistemas serão

$$\rho_A = \sum_{\mu} \lambda_{\mu} |\mu^A\rangle \langle \mu^A| \quad , \quad \rho_B = \sum_{\mu} \lambda_{\mu} |\mu^B\rangle \langle \mu^B| \quad ,$$

onde cada $|\mu^A\rangle$ é autovetor de ρ_A com autovalor λ_{μ} , e $|\mu^B\rangle$ é autovetor de ρ_B com autovalor λ_{μ} . Assim temos que ρ_A e ρ_B possuem os mesmos autovalores não-nulos, com autovetores correspondentes aos vetores usados na decomposição de Schmidt.

Demonstração. Sem perda de generalidade, seja $d = \dim \mathcal{H}_A$ e $D = \dim \mathcal{H}_B$ com $d \leq D$. Vamos considerar o operador densidade reduzido do sistema A escrito na sua decomposição espectral:

$$\rho_A = \sum_{\mu=1}^d \lambda_{\mu} |\mu^A\rangle \langle \mu^A| \quad ; \quad \langle \mu'^A | \mu^A \rangle = \delta_{\mu\mu'} \quad \text{e} \quad \sum_{\mu} \lambda_{\mu} = 1 \quad .$$

Como nossa notação já indica, essa será a base de Schmidt do sistema A .

Agora considere o mapa

$$S_{\psi} : \mathcal{H}_A \longrightarrow \mathcal{H}_B$$

definido nos vetores da base de \mathcal{H}_A como

$$S_{\psi}(|\mu^A\rangle) = \sum_{j=1}^D |j^B\rangle \langle \mu^A j^B | \psi \rangle \equiv |\tilde{\mu}^B\rangle \in \mathcal{H}_B \quad ,$$

onde $\{|j^B\rangle\}$ é uma base ortonormal arbitrária para \mathcal{H}_B , e S_{ψ} é estendido por linearidade a todo vetor de \mathcal{H}_A .

Os d vetores $|\tilde{\mu}^B\rangle$ definidos dessa forma são ortogonais:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\mu}^B | \tilde{\mu}^B \rangle &= \left(\sum_j \langle j^B | \langle \psi | \mu^A j^B \rangle \right) \left(\sum_{j'} |j'^B\rangle \langle \mu^A j'^B | \psi \rangle \right) \\ &= \sum_j \langle \mu^A j^B | \psi \rangle \langle \psi | \mu^A j^B \rangle \\ &= \langle \mu^A | \rho_A | \mu^A \rangle \\ &= \lambda_\mu \delta_{\mu\mu'} ,\end{aligned}$$

então, a partir de $\{|\tilde{\mu}^B\rangle\}$ podemos definir o conjunto de vetores ortonormais $\{|\mu^B\rangle\}$:

$$|\mu^B\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{\lambda_\mu}} |\tilde{\mu}^B\rangle .$$

Vamos verificar que $\{|\mu^B\rangle\}$ são autovetores de ρ_B com autovalores λ_μ . Escrito na base $\{|\mu^A j^B\rangle\}$:

$$\begin{aligned}\rho_B &= \text{tr}_A |\psi\rangle \langle \psi| \\ &= \text{tr}_A \left(\sum_{\mu, j, \mu', j'} [\langle \mu^A j^B | \psi \rangle \langle \psi | \mu'^A j'^B \rangle] |\mu^A j^B\rangle \langle \mu'^A j'^B| \right) \\ &= \sum_{j, j'} \sum_{\mu'} (\langle \mu'^A j^B | \psi \rangle \langle \psi | \mu'^A j'^B \rangle) |j^B\rangle \langle j'^B| ,\end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned}\rho_B |\mu^B\rangle &= \left[\sum_{j, j'} \sum_{\mu'} (\langle \mu'^A j^B | \psi \rangle \langle \psi | \mu'^A j'^B \rangle) |j^B\rangle \langle j'^B| \right] \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_\mu}} \sum_{j''} |j''^B\rangle \langle \mu^A j''^B | \psi \rangle \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_\mu}} \sum_{j, j'} \sum_{\mu'} (\langle \mu'^A j^B | \psi \rangle \langle \psi | \mu'^A j'^B \rangle) \langle \mu^A j'^B | \psi \rangle |j^B\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_\mu}} \sum_{\mu', j} \left[|j^B\rangle \langle \mu'^A j^B | \psi \rangle \left(\sum_{j'} \langle \mu^A j'^B | \psi \rangle \langle \psi | \mu'^A j'^B \rangle \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_\mu}} \sum_{\mu', j} |j^B\rangle \langle \mu'^A j^B | \psi \rangle \lambda_\mu \delta_{\mu\mu'} \\ &= \lambda_\mu |\mu^B\rangle .\end{aligned}$$

Portanto cada $|\mu^B\rangle$ é autovetor de ρ_B com respectivo autovalor λ_μ . Como

$$\rho_B \geq 0, \quad \text{tr } \rho_B = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{\mu=1}^d \lambda_\mu = 1,$$

todos os autovalores restantes de ρ_B devem ser nulos.

Com essas definições:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{\mu=1}^d \sum_{j=1}^D |\mu^A j^B\rangle \langle \mu^A j^B | \psi \rangle \\ &= \sum_{\mu} |\mu^A\rangle \otimes |\tilde{\mu}^B\rangle \\ &= \sum_{\mu} \sqrt{\lambda_\mu} |\mu^A\rangle \otimes |\mu^B\rangle. \end{aligned}$$

□

Os conjuntos de vetores $\{|\mu^A\rangle\}$ e $\{|\mu^B\rangle\}$ são chamados **bases de Schmidt** para o estado $|\psi\rangle$, e $\sqrt{\lambda_\mu}$ são os **coeficientes de Schmidt**. É importante notar que a decomposição de Schmidt começa pelo vetor $|\psi\rangle$ e as bases são escolhidas a partir dele. Vetores distintos exibirão bases de Schmidt distintas. Os coeficientes de Schmidt sempre podem ser escolhidos reais e positivos, basta acrescentar uma fase aos vetores da base de Schmidt se necessário.

O número de coeficientes λ_μ não-nulos é chamado **número de Schmidt** para o estado $|\psi\rangle$.

Emaranhamento não é criado nem destruído por operações unitárias locais. E o número de Schmidt é preservado por essas transformações. De fato, se $\sum_{\mu} \sqrt{\lambda_\mu} |\mu^A\rangle \otimes |\mu^B\rangle$ é a decomposição de Schmidt para $|\psi\rangle$ então:

$$U^A \otimes U^B |\psi\rangle = \sum_{\mu} \sqrt{\lambda_\mu} (U^A |\mu^A\rangle) \otimes (U^B |\mu^B\rangle).$$

Assim, as propriedades de emaranhamento de um estado puro de um sistema bipartido estão inteiramente contidas nos seus coeficientes de Schmidt.

É direto ver que o estado $|\psi\rangle$ é fatorável se e somente se o seu número de Schmidt é 1. E o maior número de Schmidt possível para o estado $|\psi\rangle$ é d . Para todos os quantificadores de emaranhamento o estado maximamente emaranhado de \mathcal{H} , que denotaremos $|\Phi_d\rangle$, é aquele com o maior número de termos possível e todos com coeficientes iguais

$$|\Phi_d\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{\mu=1}^d |\mu^A\rangle \otimes |\mu^B\rangle.$$

Vale aqui uma analogia com probabilidades: para um número finito de eventos, a distribuição de probabilidades que contém menos informação é aquela que dá probabilidades iguais a todos os possíveis eventos. Uma vez que emaranhamento está relacionado ao fato de não podermos determinar ao certo o estado de cada parte, é razoável que o estado com máximo emaranhamento tenha o maior número de Schmidt possível com todos os coeficientes iguais⁶.

A unidade fundamental de emaranhamento é o e-bit, tomado como o emaranhamento do estado:

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

também chamado de singlete ou estado de EPR (por razões que veremos mais adiante). Note que esse é um estado maximamente emaranhado para $d = 2$, com as bases de Schmidt $\{|0\rangle, -|1\rangle\}_A$ e $\{|1\rangle, |0\rangle\}_B$.

Um bom quantificador de emaranhamento para estados puros bipartidos é a entropia de von Neumann do estado reduzido [9]. A entropia de von Neumann de um estado quântico é dada por

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log \rho),$$

onde o logaritmo é calculado na base 2.

Assim podemos caracterizar o emaranhamento de um estado puro por⁷:

$$E(|\psi\rangle_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B) = -\sum_{\mu} \lambda_{\mu} \log \lambda_{\mu},$$

onde λ_{μ} são os quadrados dos coeficientes de Schmidt do estado $|\psi\rangle_{AB}$.

1.3.2 Critérios de separabilidade

A definição 1.2 dada para estados separáveis, embora precisa não é uma definição operacional. Muitas vezes não conseguimos afirmar se um estado pode ou não ser escrito na forma (1.2).

Precisamos portanto de critérios computacionalmente operacionais, i.e., procedimentos tais que dado um estado ρ , a aplicação de uma dada operação

⁶Para sistemas de dimensão infinita, a maioria dos estados tem um número infinito de λ_{μ} 's. Como a soma desses coeficientes é finita, apenas um número limitado deles contribui significativamente para a decomposição do estado. Esse número efetivo de termos é medido pelo número de Schmidt, definido para sistemas de dimensão infinita como $K = 1/\sum_{\mu} \lambda_{\mu}^2 = 1/\text{tr}(\rho_A^2) = 1/\text{tr}(\rho_B^2)$ (para mais detalhes ver [15]).

⁷Essa expressão corresponde à entropia clássica de Shannon do vetor de probabilidades composto pelo quadrado dos coeficientes de Schmidt (ver [9]).

permite dizer se um estado é separável ou emaranhado. Nesta seção veremos um desses critérios, e o que ocorre é que a resposta não é dicotômica, e temos um terceiro caso em que o procedimento não é conclusivo.

Critério de Peres-Horodecki

Seja \mathcal{O} o conjunto dos operadores que atuam em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Considere a operação **transposição parcial** definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_A : \mathcal{O}(\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{H}) \\ T_A(X_{AB}) &= X_{AB}^{T_A} \\ X_{AB} &= \sum_{i,j,k,l} c_{i,k,j,l} |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l| \longmapsto X_{AB}^{T_A} = \sum_{i,j,k,l} c_{i,k,j,l} |j\rangle\langle i| \otimes |k\rangle\langle l|. \end{aligned}$$

Note que T_A é uma operação que preserva o traço.

O critério de Peres [16] parte da observação que se ρ é um operador densidade, a sua transposta, $\rho^T = \rho^*$, também é um operador densidade pois é positiva e de traço 1.

Agora considere $\rho_{AB} \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ um estado separável

$$\rho_{AB} = \sum_k p_k \rho_A^k \otimes \rho_B^k.$$

Como a transposição é uma operação linear, sua transposta parcial é dada por

$$\rho_{AB}^{T_A} = \sum_k p_k (\rho_A^k)^T \otimes \rho_B^k.$$

Como ρ_A^k são operadores densidade, $(\rho_A^k)^T$ também são, e assim temos que $\rho_{AB}^{T_A} \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$.

Critério de Peres (Positividade da transposição parcial). *Se $\rho_{AB}^{T_A} \not\geq 0$ então ρ_{AB} é emaranhado.*

O critério de Peres é uma condição suficiente para que um estado seja emaranhado. Peres chegou a cogitar que tal condição seria também necessária, mas M., P. e R. Horodecki [17] mostraram que o critério é necessário e suficiente apenas para sistemas compostos com dimensões 2×2 e 2×3 , mas para dimensões maiores tal condição não é necessária.

Na referência [17] os autores mostram que a propriedade essencial de que Peres se utilizou é que a transposição é um *mapa positivo que não é completamente positivo*.

Definição 1.4. *Seja $\mathcal{L}(\mathcal{O}(\mathcal{H}_1), \mathcal{O}(\mathcal{H}_2))$ o conjunto dos mapas lineares que levam operadores de $\mathcal{O}(\mathcal{H}_1)$ em $\mathcal{O}(\mathcal{H}_2)$. Um mapa $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{O}(\mathcal{H}_1), \mathcal{O}(\mathcal{H}_2))$ é dito um **mapa positivo** se*

$$\Lambda(\sigma) \geq 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{O}(\mathcal{H}_1) ; \sigma \geq 0 .$$

*Um mapa $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{O}(\mathcal{H}_{A_1}), \mathcal{O}(\mathcal{H}_{A_2}))$ é dito um **mapa completamente positivo** quando é positivo e suas extensões triviais são também positivas*

$$\Lambda \otimes I(\sigma_{A_1 B}) \geq 0 \quad \forall \sigma_{A_1 B} \in \mathcal{O}(\mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_B) ; \sigma_{A_1 B} \geq 0 , \quad \forall \mathcal{H}_B .$$

O mesmo argumento que mostra que a transposição parcial de um estado separável é um operador positivo, também mostra que todo mapa positivo, quando aplicado a estados separáveis, resulta em operadores positivos. Seguindo nesse raciocínio os Horodeccy⁸ mostraram o seguinte resultado:

Crítério Horodecki (Mapas positivos). *Um estado $\rho_{AB} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ é separável se, e somente se, para todo mapa positivo $\Lambda : \mathcal{O}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{H}_B)$,*

$$\Lambda \otimes I(\rho_{AB}) \geq 0 .$$

Um resultado devido a S. L. Woronowicz [18] diz que: todo mapa positivo $\Lambda : \mathcal{O}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{H}_B)$, para $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2$, ou $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^3$ e $\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2$ (e equivalentemente $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^2$ e $\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^3$), pode ser escrito na forma

$$\Lambda = \Lambda_1^{CP} + \Lambda_2^{CP} \circ T ,$$

onde Λ_i^{CP} são mapas completamente positivos e T é a transposição⁹. Assim, segue como corolário do critério Horodecki que o critério de Peres é necessário e suficiente para sistemas compostos com dimensões 2×2 e 2×3 .

Em [20], P. Horodecki exibiu exemplos de estados emaranhados com transposta parcial positiva. Estados com transposta parcial positiva são chamados **estados PPT** (do inglês *positive partial transpose*).

1.3.3 Extensões simétricas de estados quânticos

Definição 1.5. *Um estado quântico bipartite ρ_{AB} é dito k -extensível em B se existe um estado de $k + 1$ partes, $\rho_{AB_1 \dots B_k}$, tal que*

$$\rho_{AB_j} \equiv \text{tr}_{\setminus B_j} \rho_{AB_1 \dots B_k} = \rho_{AB} \quad \forall j \in \{1, \dots, k\} .$$

⁸Horodeccy é o plural de Horodecki.

⁹A demonstração do teorema de Woronowicz em uma linguagem mais moderna e voltada para a teoria de informação quântica pode ser encontrada em [19].

$\text{tr}_{\setminus B_j}$ denota tomar o traço sobre todos os sistemas B_i exceto para $i = j$.

Nesse caso dizemos que ρ_{AB} possui uma k -extensão simétrica em B . Analogamente o estado pode ter uma extensão simétrica em A .

Se um estado quântico é separável, $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$, ele possui k -extensão simétrica para todo $k \in \mathbb{N}$, tanto na parte A quanto na parte B . Basta tomar:

$$\rho_{AB_1B_2\dots B_k} = \rho_A \otimes \rho_{B_1} \otimes \rho_{B_2} \otimes \dots \otimes \rho_{B_k}$$

onde $\rho_{B_i} = \rho_B$ para todo i , e de maneira análoga definimos uma extensão simétrica na parte A .

Um resultado interessante é que o converso também é verdade:

Teorema 1.4. *Um estado bipartite ρ_{AB} é separável se e somente se ρ_{AB} é k -extensível $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Esse resultado foi demonstrado na referência [21].

Um exemplo de estados que possuem extensão simétrica mas que não são separáveis é a família de estados com espaço de Hilbert $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$:

$$\rho_{AB}^k = \frac{1}{k} |\Phi\rangle\langle\Phi|_{AB} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{I_A}{2} \otimes |2\rangle\langle 2|_B,$$

onde $|\Phi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ é o estado maximamente emaranhado em dimensão 2.

Para todo k finito existe um estado nessa família que possui k extensão simétrica. Fixado um k , o estado ρ_{AB}^k é k -extensível, sua k -extensão é facilmente construída

$$\begin{aligned} \rho_{AB_1B_2\dots B_k} &= \frac{1}{k} \left(|\Phi\rangle\langle\Phi|_{AB_1} \otimes |2\rangle\langle 2|_{B_2} \otimes \dots \otimes |2\rangle\langle 2|_{B_k} \right) \\ &\quad + \frac{1}{k} \left(|\Phi\rangle\langle\Phi|_{AB_2} \otimes |2\rangle\langle 2|_{B_1} \otimes \dots \otimes |2\rangle\langle 2|_{B_k} \right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{k} \left(|\Phi\rangle\langle\Phi|_{AB_k} \otimes |2\rangle\langle 2|_{B_1} \otimes \dots \otimes |2\rangle\langle 2|_{B_{k-1}} \right). \end{aligned}$$

Entretanto este estado não pode ter extensão simétrica para todo número natural, pois usando o critério de Peres podemos verificar que para k finito o estado ρ_{AB}^k é emaranhado.

1.3.4 Quantificadores de emaranhamento

Com o desenvolvimento da teoria quântica da informação, o emaranhamento foi identificado como um recurso para realização de tarefas como teleportação de estados quânticos [22], distribuição quântica de chaves criptográficas [4], entre outras. Assim torna-se necessário quantificá-lo para saber quanto recurso possui um estado quântico.

Existem diferentes quantificadores de emaranhamento, nesta seção vamos apresentar alguns exemplos.

Emaranhamento destilável

Uma vez que o estado maximamente emaranhado de dois qubits (o estado de EPR por exemplo) é uma unidade de emaranhamento para ser usado como recurso, podemos estar interessados em saber quantos pares desses estados podemos extrair de um estado quântico utilizando apenas LOCC.

Um procedimento que converte um certo número n de cópias de um estado ρ_{AB} em m cópias do estado maximamente emaranhado de 2-qubits, $|\Phi_2\rangle\langle\Phi_2| \equiv \Phi_2$, é dito um *protocolo de destilação de emaranhamento*

$$\rho_{AB}^{\otimes n} \xrightarrow{LOCC} \Phi_2^{\otimes m} .$$

Um quantificador de emaranhamento, o **emaranhamento destilável**, pode ser tomado como a taxa ótima sobre todos os possíveis protocolos de destilação. Sua definição precisa é

$$E_D(\rho_{AB}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{LOCC} \frac{m}{n} . \quad (1.4)$$

Custo de emaranhamento

Uma outra questão de interesse é saber quanto recurso é necessário para criar um estado quântico ρ_{AB} . Assim podemos considerar protocolos que convertem n cópias de Φ_2 em m cópias de ρ_{AB} utilizando apenas operações locais e comunicação clássica

$$\Phi_2^{\otimes n} \xrightarrow{LOCC} \rho_{AB}^{\otimes m} .$$

A taxa ótima sobre todos os possíveis protocolos nos dá um segundo quantificador de emaranhamento, o **custo de emaranhamento**

$$E_C(\rho_{AB}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{LOCC} \frac{n}{m} . \quad (1.5)$$

Em geral $E_D(\rho_{AB}) \leq E_C(\rho_{AB})$, assim, se usamos uma certa quantidade de recurso (estados maximamente emaranhados) para formar um estado quântico, esse recurso pode não ser mais totalmente recuperado. Um resultado interessante é que para estados puros vale a igualdade [23], mostrando que nesse caso a utilização de recursos é reversível.

Teorema 1.5. *Para todo estado puro $|\psi_{AB}\rangle$*

$$E_C(|\psi\rangle\langle\psi|) = E_D(|\psi\rangle\langle\psi|) = S(\rho_A) .$$

A demonstração desse resultado envolve muitos conceitos de teoria da informação quântica e foge do escopo deste texto. Uma demonstração pode ser encontrada nas notas de aula do John Watrous (aula 17) [12].

Emaranhamento preso

Em [24] M., P. e R. Horodecki mostraram que uma condição necessária para que um estado seja destilável é que ele viole o critério de Peres, i.e. que $\rho_{AB}^{TA} \not\geq 0$.

Entretanto vimos na seção 1.3.2 que, para sistemas de dimensões maiores que 2×2 e 2×3 , o critério de Peres não é suficiente para que um estado seja separável, e que existem estados emaranhados tais que $\rho_{AB}^{TA} \geq 0$, os estados PPT emaranhados. Isso mostra o seguinte resultado:

Proposição 1.1 (Emaranhamento preso). *Existem estados emaranhados tais que $E_D(\rho_{AB}) = 0$. Tais estados são ditos ter emaranhamento preso.*

1.3.5 Sistemas multipartites

Para sistemas multipartites, embora a definição de estados separáveis se estenda naturalmente, passamos a ter diferentes tipos de emaranhamento. Podemos ter emaranhamento apenas entre algumas partes do sistema, por exemplo, no estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B) \otimes |0\rangle_C ,$$

o terceiro sistema está totalmente descorrelacionado dos dois primeiros. Ou ainda todas as partes podem estar quânticamente correlacionadas, caso em que temos o chamado *emaranhamento genuíno*.

E mesmo o emaranhamento genuíno pode se mostrar de diferentes tipos. Em [25] os autores mostraram que para três qubits existem dois tipos de

emaranhamento genuíno tripartite. Exemplos são os estados

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle),$$

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle).$$

Ambos são maximamente emaranhados, com emaranhamento genuíno, mas to talmente distintos no sentido de que um não pode ser levado no outro por LOCC (ainda que probabilisticamente).

Mais discussões sobre emaranhamento de sistemas multipartites podem ser encontrados em [14].

1.4 O Paradoxo de EPR

Em 1935 Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) [3] publicaram o artigo intitulado ‘*Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*’, onde utilizavam as consequências de uma das principais características de sistemas quânticos compostos: o emaranhamento, e questionavam se a mecânica quântica seria uma teoria completa.

Vamos reproduzir o argumento de EPR numa formulação posterior feita por David Bohm [26], que é matematicamente muito mais simples, pois ao contrário de EPR trabalha com um sistema de dimensão finita, mas contém toda a essência da discussão de EPR.

EPR começam argumentando que qualquer que seja o significado atribuído ao termo “*completa*”, o seguinte requerimento para uma teoria completa parece necessário:

- Todo elemento de realidade deve ter um elemento correspondente na teoria.

Definição 1.6 (Elemento de Realidade). *Se, sem perturbar de qualquer forma o sistema, o valor de uma quantidade física puder ser determinado com certeza (i.e. com probabilidade 1), então existe um elemento de realidade correspondente a essa quantidade física.*

Outra hipótese crucial utilizada pelos autores é que

- Não há ação a distância, operações realizadas em uma parte do sistema não podem perturbar instantaneamente outra parte afastada desta.

Os critérios utilizados pelos autores para caracterizar uma teoria completa refletem uma corrente filosófica de como ver a natureza, o **realismo local**. *Realismo* é atribuir existência intrínseca, independente de observação, às propriedades físicas de um sistema. Assim medições apenas revelam os valores pré-existentes das propriedades observadas. *Realismo local* é a premissa de que essas propriedades são localmente atribuídas aos sistemas, e a única forma de modificá-las é intervindo diretamente no sistema.

Seguindo nesse raciocínio, EPR consideram um estado emaranhado entre dois sistemas que se encontram afastados. Na reformulação de Bohm o sistema considerado são duas partículas de spin $1/2$ no estado singlete

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 1_B\rangle - |1_A 0_B\rangle),$$

onde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ são os auto-estados do spin na direção \hat{z} ($S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$), com autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$ respectivamente.

O singlete tem spin total nulo, portanto é invariante quando as mesmas rotações são aplicadas nos dois sistemas, i.e., se quisermos escrevê-lo em termos dos auto-estados de spin numa direção arbitrária \vec{v} ele apresenta as mesmas correlações:

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+_A -_B\rangle - |-_A +_B\rangle),$$

onde $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ são os auto-estados do spin na direção \vec{v} , com autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$. Nesse estado, se realizarmos a medição do mesmo observável nas duas partes, os resultados obtidos sempre serão anti-correlacionados (obtido $+\hbar/2$ na parte A , o resultado da parte B é $-\hbar/2$ e vice-versa).

Agora considere que S_z é medido na partícula A e é obtido o resultado $+\hbar/2$, daí concluímos que se S_z for medido na parte B o resultado será $-\hbar/2$. Uma vez que as duas partes estão afastadas a medição realizada em A não pode perturbar o sistema B . Portanto mesmo sem realizar a medição podemos determinar o valor de S_z em B com probabilidade 1. Assim, segundo o critério de EPR, S_z é um elemento de realidade do sistema B .

Fazendo o mesmo raciocínio para S_x , também poderíamos concluir que S_x é um elemento de realidade em B .

Uma vez que a medição ou não de uma componente de spin no sistema A não pode perturbar o sistema B , e que A pode escolher qualquer direção para medir que o resultado do sistema B estará determinado com probabilidade 1, temos uma maneira de determinar o spin da partícula B nas direções x ou z sem perturbá-la. Portanto, segundo o critério de EPR, deve haver, simultaneamente, elementos de realidade correspondentes ao spin da partícula B nas direções x e z .

Entretanto, na mecânica quântica, se duas grandezas são descritas por observáveis X e Y que não comutam, $[X, Y] \neq 0$, como é o caso de S_x e S_z , não é possível definir um estado quântico em que os resultados das medições de ambos os observáveis podem ser determinados simultaneamente (não existem auto-estados comuns de X e Y). Segundo as definições de EPR, segue dessa impossibilidade que a mecânica quântica seria uma teoria incompleta. E, portanto, deveria haver uma teoria mais completa, compatível com a mecânica quântica, que desse conta desses elementos de realidade.

Em 1964, John Bell [27] sistematizou os argumentos de EPR apresentando as condições matemáticas que uma teoria realista local completa deveria obedecer. Condições que desde então foram amplamente estudadas e generalizadas para vários sistemas de várias dimensões e hoje são chamadas **desigualdades de Bell**.

Bell mostrou que a mecânica quântica viola tais condições, e portanto o argumento de EPR de que ela seria incompleta não é mais válido, pois suas hipóteses não são satisfeitas pela mecânica quântica: *a mecânica quântica não é uma teoria realista local* (muitas vezes diremos apenas que a mecânica quântica é uma teoria *não-local*).

Resta saber se a natureza não é realista local. Desde os anos 70 vários experimentos foram realizados, cujos resultados mostraram concordância com as previsões da mecânica quântica. Entretanto, devido a existência de possíveis “furos” nas configurações experimentais, denominados *loopholes*, não se pode afirmar definitivamente que as correlações observadas são de fato não-locais, pois esses furos abrem espaço para que essas correlações aparentemente não-locais sejam modeladas dentro das hipóteses de realismo local. Mais detalhes sobre os *loopholes* e referências sobre os experimentos realizados podem ser encontrados em [28] (seção 4.7).

Nesta dissertação vamos nos dedicar ao estudo da não-localidade quântica, investigando nos próximos capítulos o caráter não local de alguns estados quânticos.

Capítulo 2

Conjunto das Correlações

Experimentos de correlação são caracterizados pela comparação de resultados obtidos em diferentes eventos. Após várias realizações do experimento, as correlações são as distribuições de probabilidades conjuntas dos resultados obtidos¹.

Neste capítulo vamos discutir as propriedades e restrições dos conjuntos formados pelas distribuições de probabilidade obtidas num experimento de correlação. Veremos que as restrições impostas pelo realismo local clássico são violadas pela mecânica quântica. Experimentos de correlação são uma boa maneira de invalidar a física clássica, pois não dependem de nenhum modelo particular, apenas da estatística dos resultados obtidos no experimento. Na seção 2.1 vamos nos restringir ao cenário não trivial mais simples, para clareza e melhor entendimento dos principais conceitos. Na seção 2.2 discutiremos alguns resultados para os cenários mais gerais.

2.1 Conjunto das Correlações I: O Cenário $(2, 2, 2)$

2.1.1 O Cenário $(2, 2, 2)$

O cenário não trivial mais simples para um experimento de correlação consiste de duas partes A e B (Alice e Bob), onde cada parte pode escolher uma entre duas possíveis medições para realizar, cada uma com dois possíveis resultados (como esquematizado na figura 2.1). Tal cenário será denotado

¹Aqui estamos adotando uma visão frequentista da teoria de probabilidades. Há também a visão axiomática, formalizada pelos axiomas de Kolmogorov, que dá à teoria de probabilidades um caráter mais matemático. As duas visões se relacionam através da Lei dos Grandes Números. Para uma introdução à teoria de probabilidades ver [29].

(2, 2, 2), onde a notação indica o número de partes, o número de medições por parte e o número de resultados por medição, respectivamente.

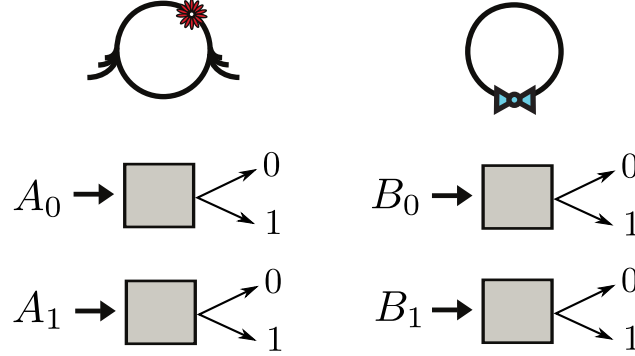


Figura 2.1: Alice pode escolher realizar a medição A_0 ou A_1 , cada uma com os dois possíveis resultados 0 ou 1. Analogamente Bob pode escolher entre as medições dicotômicas B_0 ou B_1 .

2.1.2 O Conjunto das Correlações

No cenário (2,2,2) as correlações existentes entre os possíveis eventos podem ser descritas por um vetor de 16 componentes, cujas componentes são dadas pelas probabilidades

$$p_{a,b|A_x,B_y} ,$$

onde $p_{a,b|A_x,B_y}$ representa a probabilidade² de Alice medir A_x e obter o resultado a e Bob medir B_y e obter o resultado b . Portanto o conjunto das probabilidades vive num espaço de dimensão ≤ 16 .

Por comodidade podemos representar esse vetor por uma matriz 4×4 :

$$\mathbf{p}_{a,b|A,B} = \begin{pmatrix} p_{0,0|0,0} & p_{0,1|0,0} & p_{0,0|0,1} & p_{0,1|0,1} \\ p_{1,0|0,0} & p_{1,1|0,0} & p_{1,0|0,1} & p_{1,1|0,1} \\ p_{0,0|1,0} & p_{0,1|1,0} & p_{0,0|1,1} & p_{0,1|1,1} \\ p_{1,0|1,0} & p_{1,1|1,0} & p_{1,0|1,1} & p_{1,1|1,1} \end{pmatrix} ,$$

onde as condições para que esse objeto represente probabilidades são:

$$\text{Positividade: } p_{a,b|A_x,B_y} \geq 0 \quad \forall \quad a, b, A_x, B_y ; \quad (2.1)$$

²Quando for claro o contexto usaremos também a notação $p_{a,b|x,y}$.

$$\text{Normalização: } \sum_{a,b} p_{a,b|A_x,B_y} = 1 \quad \forall \quad A_x, B_y . \quad (2.2)$$

Com as quatro restrições de normalização temos apenas 12 parâmetros livres para descrever nosso vetor de probabilidades, e, portanto, podemos dizer que o conjunto das correlações do cenário (2,2,2) vive em \mathbb{R}^{12} . Vamos denotar esse conjunto por \mathcal{P} .

O conjunto das correlações é um conjunto convexo, pois a soma convexa de vetores de probabilidade,

$$\mathbf{p}_{a,b|A,B} = \sum_j c_j \mathbf{p}_{a,b|A,B}^j \quad ; \quad \mathbf{p}_{a,b|A,B}^j \in \mathcal{P} \quad \forall \quad j, \quad \sum_j c_j = 1 ,$$

é também um vetor de probabilidade, pois obedece à condição (2.2):

$$\begin{aligned} \sum_{a,b} p_{a,b|A_x,B_y} &= \sum_{a,b} \sum_j c_j p_{a,b|A_x,B_y}^j \\ &= \sum_j c_j \sum_{a,b} p_{a,b|A_x,B_y}^j \\ &= \sum_j c_j = 1 . \end{aligned}$$

Os pontos extremais de um conjunto convexo (ou pontos puros, ou vértices) são aqueles que não podem ser escritos como combinação convexa de outros. Eles são os pontos determinísticos no caso do conjunto das correlações \mathcal{P} , i.e., cujas probabilidades valem 0 ou 1. Dada a condição de normalização, para cada A_x e B_y fixados temos 4 possibilidades distintas, portanto ao todo são $4^4 = 256$ pontos extremais.

Um conjunto convexo com um número finito de pontos extremais é chamado **politopo convexo**, portanto podemos dizer que o conjunto \mathcal{P} é um politopo convexo de dimensão 12 com 2^8 vértices.

2.1.3 O Conjunto das Correlações Não-Sinalizadoras

Suponha que Alice e Bob tenham acesso apenas aos resultados de seus respectivos experimentos, assim a descrição individual de cada parte é dada pelas probabilidades marginais:

$$p_{a|A_x,B_y} = \sum_b p_{a,b|A_x,B_y} \quad \text{e} \quad p_{b|A_x,B_y} = \sum_a p_{a,b|A_x,B_y} .$$

Note que nessa expressão, ainda que as probabilidades dos resultados obtidos por Alice não dependam do resultado de Bob, elas podem depender da configuração geral do experimento, i.e. da medição que Bob escolhe fazer.

Considere agora que a escolha das medições a serem realizadas é feita sem que Alice e Bob se comuniquem. Se as probabilidades obtidas por Alice, na medição de A_0 por exemplo, dependessem da medição feita por Bob, então Alice, ao realizar o experimento, poderia ter informação sobre qual medição Bob escolheu fazer, se B_0 ou B_1 . Dessa forma Bob poderia enviar uma mensagem para Alice através da escolha de sua medição.

Definição 2.1 (Não-sinalização). *Uma distribuição de probabilidades conjuntas é não-sinalizadora se:*

$$\sum_b p_{a,b|A_x,B_0} = \sum_b p_{a,b|A_x,B_1} \quad \forall a, A_x, \quad (2.3a)$$

$$\sum_a p_{a,b|A_0,B_y} = \sum_a p_{a,b|A_1,B_y} \quad \forall b, B_y. \quad (2.3b)$$

A condição de não-sinalização garante que as duas partes do sistema não trocam informação entre si. Com ela as probabilidades marginais de cada parte ficam bem definidas $p_{a|A_x} := p_{a|A_x,B_y}, \forall B_y$ e $p_{b|B_y} := p_{b|A_x,B_y}, \forall A_x$.

As condições (2.3) restringem o espaço das possíveis correlações, mas note que nem todas as oito restrições acima são independentes. Pela condição de normalização (2.2):

$$\sum_b p_{0,b|A_x,B_0} = 1 - \sum_b p_{1,b|A_x,B_0} \quad \forall A_x,$$

portanto

$$\sum_b p_{0,b|A_x,B_0} = \sum_b p_{0,b|A_x,B_1} \Rightarrow \sum_b p_{1,b|A_x,B_0} = \sum_b p_{1,b|A_x,B_1}.$$

e analogamente para (2.3b). Assim, temos no máximo quatro novas restrições. É possível mostrar que essas quatro restrições são independentes, portanto o número de parâmetros livres para descrever o conjunto das correlações não-sinalizadoras se reduz a 8. Vamos denotar \mathcal{NS} o conjunto das correlações que obedecem à condição de não-sinalização.

O conjunto das correlações não-sinalizadoras é também um conjunto convexo pois, se $\mathbf{p}_{a,b|A,B}^j$ obedece à condição de não-sinalização, então

$$\mathbf{p}_{a,b|A,B} = \sum_j c_j \mathbf{p}_{a,b|A,B}^j \quad ; \quad \sum_j c_j = 1,$$

também obedece:

$$\begin{aligned} \sum_b p_{a,b|A_x,B_0} - \sum_b p_{a,b|A_x,B_1} &= \sum_b \sum_j c_j p_{a,b|A_x,B_0}^j - \sum_b \sum_j c_j p_{a,b|A_x,B_1}^j \\ &= \sum_j c_j \left(\sum_b p_{a,b|A_x,B_0}^j - \sum_b p_{a,b|A_x,B_1}^j \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para definir o conjunto \mathcal{NS} , partimos de um politopo de dimensão 12 e fizemos apenas restrições lineares, (2.3a) e (2.3b), aos seus elementos. Restrições lineares definem hiperplanos no conjunto das correlações, e um subconjunto de um politopo limitado por hiperplanos forma também um politopo. Ao todo \mathcal{NS} possui 24 pontos extremais (os 16 pontos locais que veremos na próxima seção e as 8 caixas PR que veremos na seção 2.1.6). Assim o conjunto das correlações não-sinalizadoras³ é um politopo convexo de dimensão 8, e $\mathcal{NS} \subset \mathcal{P}$.

2.1.4 O Conjunto das Correlações Locais

A condição de não-sinalização não impede que os resultados de Alice e Bob estejam correlacionados, em geral temos

$$p_{a,b|A_x,B_y} \neq p_{a|A_x} p_{b|B_y}. \quad (2.4)$$

Entretanto, quando o experimento em questão trata de dois eventos espacialmente separados (por exemplo, Alice e Bob realizam seus experimentos em laboratórios distintos), algumas restrições devem ser feitas às possíveis correlações entre seus resultados.

Segundo a teoria da relatividade, duas regiões do espaço-tempo \mathcal{M}_A e \mathcal{M}_B têm separação tipo-espaço se \mathcal{M}_A não intercepta o cone de luz de \mathcal{M}_B , e nem \mathcal{M}_B intercepta o cone de luz de \mathcal{M}_A . Nesse caso nenhum sinal pode ser transmitido entre eles com uma velocidade que não seja superior à da luz. Portanto não pode haver nenhuma correlação entre seus resultados (no sentido da eq. (2.4)), a menos que tal correlação tenha sido criada no passado comum, P , dos dois eventos (ver figura 2.2).

Seja \mathcal{M}_A a região do espaço-tempo associada ao evento probabilístico: Alice faz a medição A_x e obtém o resultado a , e analogamente \mathcal{M}_B é associado ao evento: Bob realiza o experimento B_y e obtém o resultado b . Se quisermos que os eventos \mathcal{M}_A e \mathcal{M}_B tenham algum tipo de correlação apenas

³Um estudo do politopo não-sinalizador no cenário (2, 2, 2) e em cenários mais gerais pode ser encontrado em [30].

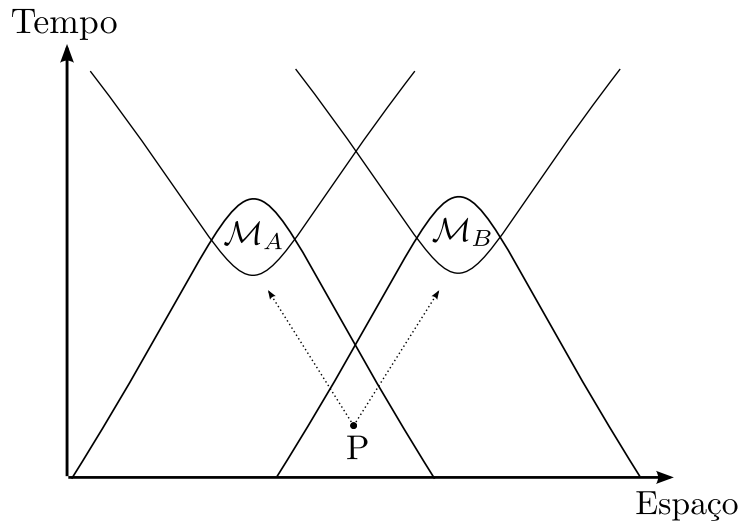


Figura 2.2: Eventos com separação tipo-espaço.

quando informação puder ser transmitida entre eles com velocidade igual ou inferior à da luz, devemos assumir que todas as correlações existentes entre \mathcal{M}_A e \mathcal{M}_B tiveram origem no passado comum dos dois eventos. Essa é a chamada hipótese de **causalidade local**⁴, ou, simplesmente, **hipótese de localidade**.

Definição 2.2 (Localidade). *Seja λ uma coleção de variáveis que descreve todas as possíveis causas locais de dois eventos \mathcal{M}_A e \mathcal{M}_B espacialmente separados. A condição de localidade diz que, uma vez conhecido λ , nenhum outro fator é capaz de correlacionar os eventos \mathcal{M}_A e \mathcal{M}_B , i.e.:*

$$p_{a,b|A_x,B_y,\lambda} = p_{a|A_x,\lambda} p_{b|B_y,\lambda} .$$

Na falta do conhecimento da variável λ , o experimento pode ser descrito tomando a média sobre todos os seus possíveis valores:

$$p_{a,b|A_x,B_y} = \int_{\Lambda} q_{\lambda} p_{a|A_x,\lambda} p_{b|B_y,\lambda} d\lambda , \quad (2.5)$$

onde q_{λ} é a distribuição de probabilidades da variável oculta λ .

Assim, segundo a hipótese de localidade, qualquer correlação observada entre \mathcal{M}_A e \mathcal{M}_B é fruto da ignorância a respeito de algum conjunto de

⁴Note que implicitamente também assumimos realismo, pois de certa forma estamos supondo que as probabilidades associadas ao experimento já existiam, independente de as medições serem realizadas ou não.

variáveis λ . As variáveis λ podem representar, por exemplo, estratégias previamente combinadas por Alice e Bob para realização do experimento.

Se as probabilidades $p_{a,b|A_x,B_y}$ de um dado experimento puderem ser escritas na forma (2.5) para algum conjunto de variáveis λ e distribuição q_λ , elas serão ditas **correlações locais**. Caso contrário, i.e., se não existir nenhum conjunto de variáveis λ tal que as correlações entre \mathcal{M}_A e \mathcal{M}_B possam ser escritas na forma (2.5), dizemos que as correlações são **não-locais**.

Seja \mathcal{L} o conjunto das correlações que obedecem à condição de localidade.

Proposição 2.1. $\mathcal{L} \subset \mathcal{NS}$.

Demonstração. De fato toda correlação local obedece à condição de não-sinalização:

$$\begin{aligned} p_{a|A_x,B_y} &= \sum_b \int_{\Lambda} q_\lambda p_{a|A_x,\lambda} p_{b|B_y,\lambda} d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} q_\lambda p_{a|A_x,\lambda} \left(\sum_b p_{b|B_y,\lambda} \right) d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} q_\lambda p_{a|A_x,\lambda} d\lambda \\ &= p_{a|A_x} , \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p_{b|A_x,B_y} &= \sum_a \int_{\Lambda} q_\lambda p_{a|A_x,\lambda} p_{b|B_y,\lambda} d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} q_\lambda \left(\sum_a p_{a|A_x,\lambda} \right) p_{b|B_y,\lambda} d\lambda \\ &= p_{b|B_y} . \end{aligned}$$

□

Podemos representar as probabilidades marginais de cada parte, $p_{a|A_x}$ e $p_{b|B_y}$, por um vetor de 4 componentes:

$$\mathbf{p}_{a|A} = \begin{pmatrix} p_{0|A_0} \\ p_{1|A_0} \\ p_{0|A_1} \\ p_{1|A_1} \end{pmatrix} , \quad \mathbf{p}_{b|B} = \begin{pmatrix} p_{0|B_0} \\ p_{1|B_0} \\ p_{0|B_1} \\ p_{1|B_1} \end{pmatrix} .$$

Os pontos determinísticos do conjunto das correlações locais são aqueles em que as probabilidades marginais são também determinísticas, i.e.:

$$\mathbf{p}_{a|A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{p}_{b|B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim o conjunto das correlações locais possui 16 pontos determinísticos.

Proposição 2.2. *Todo vetor $\mathbf{p}_{a,b|A,B} \in \mathcal{L}$ pode ser escrito como soma convexa dos 16 pontos determinísticos de \mathcal{L} .*

Demonstração. Considere um vetor de probabilidades em \mathcal{L} :

$$p_{a,b|A_x,B_y} = \int_{\Lambda} q_{\lambda} p_{a|A_x,\lambda} p_{b|B_y,\lambda} d\lambda.$$

Todas as probabilidades marginais podem ser escritas como

$$p_{a|A_x,\lambda} = \sum_{i=1}^4 c_{a,i}(\lambda) p_{a|A_x}^i; \quad \sum_{i=1}^4 c_{a,i}(\lambda) = 1,$$

e

$$p_{b|B_y,\lambda} = \sum_{j=1}^4 c_{b,j}(\lambda) p_{b|B_y}^j; \quad \sum_{j=1}^4 c_{b,j}(\lambda) = 1,$$

onde $p_{a|A_x}^i$ e $p_{b|B_y}^j$ são as probabilidades marginais determinísticas. Então

$$\begin{aligned} p_{a,b|A_x,B_y} &= \int_{\Lambda} q_{\lambda} \sum_{i,j=1}^4 c_{a,i}(\lambda) c_{b,j}(\lambda) p_{a|A_x}^i p_{b|B_y}^j d\lambda \\ &= \sum_{i,j=1}^4 \left(\int_{\Lambda} q_{\lambda} c_{a,i}(\lambda) c_{b,j}(\lambda) d\lambda \right) p_{a|A_x}^i p_{b|B_y}^j \\ &= \sum_{i,j=1}^4 \tilde{c}_{i,j} p_{a|A_x}^i p_{b|B_y}^j, \end{aligned}$$

e os coeficientes $\tilde{c}_{i,j}$ satisfazem as condições necessárias:

$$\tilde{c}_{i,j} = \int_{\Lambda} q_{\lambda} c_{a,i}(\lambda) c_{b,j}(\lambda) d\lambda \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i,j=1}^4 \tilde{c}_{i,j} = 1 .$$

□

Vemos portanto que os pontos determinísticos são os pontos extremais desse conjunto, uma vez que não podem ser escritos como combinação convexa de outros, e qualquer vetor de \mathcal{L} pode ser escrito como soma convexa desses 16 pontos.

Vamos agora analisar a dimensão do conjunto das correlações locais. A hipótese de localidade, embora restrinja ainda mais as possíveis correlações, não diminui o número de parâmetros livres necessários para descrevê-las. Note que ao escrever uma probabilidade qualquer como soma convexa de pontos puros temos 16 parâmetros, os $\tilde{c}_{i,j}$, e apenas as oito condições anteriores para impor a eles (normalização e não-sinalização). Assim, \mathcal{L} é um politopo convexo de dimensão 8, com 2^4 pontos extremais, contido no politopo não-sinalizador.

2.1.5 As correlações quânticas

Até aqui vimos como as condições de não-sinalização e de localidade limitam o conjunto das possíveis correlações. Vamos agora analisar as correlações que podem ser obtidas em um experimento com sistemas quânticos.

O conjunto das correlações quânticas \mathcal{Q} , no cenário $(2, 2, 2)$, é formado pelos vetores de probabilidade que podem ser escritos na forma:

$$p_{a,b|A_x,B_y} = \text{tr} \left[\rho \left(\Pi_{A_x}^a \otimes \Pi_{B_y}^b \right) \right]$$

onde $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ é um estado quântico, $\{\Pi_{A_x}^a\}$ e $\{\Pi_{B_y}^b\}$ são POVMs em \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B respectivamente, i.e.

$$\sum_a \Pi_{A_x}^a = I_A ; \quad \Pi_{A_x}^a \geq 0 \quad \forall a \quad \text{e} \quad \sum_b \Pi_{B_y}^b = I_B ; \quad \Pi_{B_y}^b \geq 0 \quad \forall b ,$$

e \mathcal{H}_A é o espaço de Hilbert do sistema de Alice e \mathcal{H}_B o espaço de Hilbert do sistema de Bob.

Proposição 2.3. *\mathcal{Q} é um conjunto convexo.*

Demonstração. Tome dois vetores de probabilidade pertencentes a \mathcal{Q} :

$$\begin{aligned} p_{a,b|A_x,B_y}^{(1)} &= \text{tr} \left[\rho_1 \left(\Pi_{A_x}^{a(1)} \otimes \Pi_{B_y}^{b(1)} \right) \right], \\ p_{a,b|A_x,B_y}^{(2)} &= \text{tr} \left[\rho_2 \left(\Pi_{A_x}^{a(2)} \otimes \Pi_{B_y}^{b(2)} \right) \right], \end{aligned}$$

onde $\rho_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_{B_1})$, e $\{\Pi_{A_x}^{(1)}\}$, $\{\Pi_{B_y}^{(1)}\}$ são POVMs em \mathcal{H}_{A_1} e \mathcal{H}_{B_1} respectivamente. Analogamente $\rho_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{A_2} \otimes \mathcal{H}_{B_2})$, e $\{\Pi_{A_x}^{(2)}\}$, $\{\Pi_{B_y}^{(2)}\}$ são POVMs em \mathcal{H}_{A_2} e \mathcal{H}_{B_2} .

Queremos analisar a combinação convexa de $\mathbf{p}_{a,b|A,B}^{(1)}$ e $\mathbf{p}_{a,b|A,B}^{(2)}$ e ver se o resultado é um vetor de \mathcal{Q} , i.e., se existem espaços de Hilbert $\mathcal{H}_{A'}$ e $\mathcal{H}_{B'}$, $\rho' \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{A'} \otimes \mathcal{H}_{B'})$ e POVMs nesses espaços tais que:

$$c p_{a,b|A_x,B_y}^{(1)} + (1-c) p_{a,b|A_x,B_y}^{(2)} = \text{tr} \left[\rho' \left(\Pi_{A_x}^{a'} \otimes \Pi_{B_y}^{b'} \right) \right]. \quad (2.6)$$

Vamos assumir $\dim \mathcal{H}_{A_1} = \dim \mathcal{H}_{A_2}$ e $\dim \mathcal{H}_{B_1} = \dim \mathcal{H}_{B_2}$, para o caso geral ver Apêndice A. Considere o estado

$$\rho' = c \rho_1 \otimes |00\rangle\langle 00| + (1-c) \rho_2 \otimes |11\rangle\langle 11| \in D(\mathcal{H}_{A'} \otimes \mathcal{H}_{B'}),$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{A'} &= \mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathbb{C}_{\hat{A}}^2, \\ \mathcal{H}_{B'} &= \mathcal{H}_{B_1} \otimes \mathbb{C}_{\hat{B}}^2, \end{aligned}$$

e \hat{A} e \hat{B} são sistemas auxiliares de dois níveis que se encontram, respectivamente, com Alice e Bob. Defina

$$\begin{aligned} \Pi_{A_x}^{a'} &= \Pi_{A_x}^{a(1)} \otimes |0\rangle\langle 0| + \Pi_{A_x}^{a(2)} \otimes |1\rangle\langle 1|, \\ \Pi_{B_y}^{b'} &= \Pi_{B_y}^{b(1)} \otimes |0\rangle\langle 0| + \Pi_{B_y}^{b(2)} \otimes |1\rangle\langle 1|, \end{aligned}$$

POVMs em $\mathcal{H}_{A'}$ e $\mathcal{H}_{B'}$.

Com essas definições verifica-se que

$$\begin{aligned} \text{tr}_{A'B'} \left[\rho' \left(\Pi_{A_x}^{a'} \otimes \Pi_{B_y}^{b'} \right) \right] &= \text{tr}_{A'B'} \left[c \rho_1 \left(\Pi_{A_x}^{a(1)} \otimes \Pi_{B_y}^{b(1)} \right) \otimes |00\rangle\langle 00| \right. \\ &\quad \left. + (1-c) \rho_2 \left(\Pi_{A_x}^{a(2)} \otimes \Pi_{B_y}^{b(2)} \right) \otimes |11\rangle\langle 11| \right] \\ &= c \text{tr}_{A_1 B_1} \left[\rho_1 \left(\Pi_{A_x}^{a(1)} \otimes \Pi_{B_y}^{b(1)} \right) \right] \\ &\quad + (1-c) \text{tr}_{A_2 B_2} \left[\rho_2 \left(\Pi_{A_x}^{a(2)} \otimes \Pi_{B_y}^{b(2)} \right) \right] \\ &= c p_{a,b|A_x,B_y}^{(1)} + (1-c) p_{a,b|A_x,B_y}^{(2)}. \end{aligned}$$

Logo

$$c \mathbf{p}_{a,b|A,B}^{(1)} + (1 - c) \mathbf{p}_{a,b|A,B}^{(2)} \in \mathcal{Q}.$$

□

Proposição 2.4. $\mathcal{Q} \subset \mathcal{NS}$.

Demonstração. O conjunto das correlações quânticas também obedece à condição de não-sinalização:

$$\begin{aligned} \sum_b p_{a,b|A_x,B_y} &= \sum_b \text{tr} \left[\rho \left(\Pi_{A_x}^a \otimes \Pi_{B_y}^b \right) \right] \\ &= \text{tr} \left[\rho \left(\Pi_{A_x}^a \otimes \left(\sum_b \Pi_{B_y}^b \right) \right) \right] \\ &= \text{tr} \left(\rho_A \Pi_{A_x}^a \right) \\ &= p_{a|A_x}, \end{aligned}$$

onde a probabilidade marginal é definida como:

$$p_{a|A_x} \equiv \text{tr} \left(\rho_A \Pi_{A_x}^a \right), \quad (2.7)$$

em que ρ_A é o operador densidade reduzido do sistema de Alice, como definido em (1.1). Analogamente obtemos $p_{b|B_y}$. □

Veremos na próxima seção que a mecânica quântica pode gerar correlações que não satisfazem a condição de localidade. Portanto o conjunto das correlações quânticas se encontra entre o politopo local e o politopo não-sinalizador.

O conjunto \mathcal{Q} não é um politopo. Na referência [31] Lluís Masanes analisa um conjunto um pouco diferente do que estamos analisando aqui, cujos elementos são vetores da forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p_{a=b|0,0} - p_{a \neq b|0,0} \\ p_{a=b|0,1} - p_{a \neq b|0,1} \\ p_{a=b|1,0} - p_{a \neq b|1,0} \\ p_{a=b|1,1} - p_{a \neq b|1,1} \end{pmatrix}.$$

Ele apresenta um conjunto de desigualdades não-lineares que é condição necessária e suficiente para que um vetor \mathbf{x} possa ser obtido com mecânica

quântica. Note que diferentes pontos do nosso conjunto de correlações são associados a um mesmo vetor \mathbf{x} , assim obedecer as desigualdades apresentadas por Masanes não é suficiente para garantir que um vetor de correlação pertence a \mathcal{Q} . Entretanto, o conjunto de vetores $\mathbf{p}_{a,b|A,B}$ é mapeado no conjunto de vetores \mathbf{x} por uma transformação linear. Portanto, se \mathcal{Q} foi levado, por uma transformação linear, num conjunto limitado por desigualdades não-lineares, isso nos permite concluir que \mathcal{Q} não é um politopo.

2.1.6 Desigualdades CHSH

Todo politopo tem duas representações equivalentes:

- **Caracterização por pontos extremais:** o politopo é formado pelo fecho convexo do conjunto de pontos extremais, i.e. por todas as combinações convexas dos pontos extremais.
- **Caracterização por facetas:** as facetas são hiperplanos que limitam o politopo e podem ser descritas por desigualdades lineares (como as condições de positividade (2.1), por exemplo). Assim, um vetor de correlação pertence a um dado politopo se e somente se satisfaz todas as desigualdades lineares que definem suas facetas.

Até aqui caracterizamos os conjuntos de correlação através de seus pontos extremais (e das facetas triviais que são as condições de positividade⁵), agora vamos olhar para a caracterização em termos de facetas. Por razões históricas, discutidas na seção 1.4, as facetas não-triviais do politopo local são chamadas **desigualdades de Bell**.

No cenário (2,2,2), além das facetas de positividade, temos facetas descritas pelas desigualdades CHSH.

As desigualdades CHSH foram propostas em 1969 por J. Clauser, M. Horne, A. Shimony e R. Holt [32]. Elas são as únicas desigualdades de Bell no cenário (2, 2, 2), como veremos na seção 2.1.7, e são famosas por serem as primeiras desigualdades de Bell passíveis de verificação experimental.

Considere a expressão:

$$\begin{aligned} \beta_{CHSH} \equiv & p_{a=b|A_0,B_0} - p_{a \neq b|A_0,B_0} + p_{a=b|A_0,B_1} - p_{a \neq b|A_0,B_1} \\ & + p_{a=b|A_1,B_0} - p_{a \neq b|A_1,B_0} - p_{a=b|A_1,B_1} + p_{a \neq b|A_1,B_1} , \end{aligned} \quad (2.8)$$

⁵As condições de normalização e não-sinalização são responsáveis por reduzir a dimensão do conjunto em questão, e portanto não definem facetas.

onde

$$\begin{aligned} p_{a=b|A_x, B_y} &= p_{0,0|A_x, B_y} + p_{1,1|A_x, B_y} , \\ p_{a \neq b|A_x, B_y} &= p_{1,0|A_x, B_y} + p_{0,1|A_x, B_y} . \end{aligned}$$

Podemos também definir o correlator $E(A_x, B_y) \equiv p_{a=b|A_x, B_y} - p_{a \neq b|A_x, B_y}$, e escrever:

$$\beta_{CHSH} = E(A_0, B_0) + E(A_0, B_1) + E(A_1, B_0) - E(A_1, B_1) . \quad (2.9)$$

Outras três relações são obtidas permutando o sinal de menos entre os correlatores.

Apenas com as condições (2.1) e (2.2), temos que

$$-4 \leq \beta_{CHSH} \leq 4 . \quad (2.10)$$

CHSH em teorias realistas locais:

Assumindo realismo local, existem λ e q_λ tais que

$$\begin{aligned} p_{a=b|A_x, B_y} &= \int_{\Lambda} q_\lambda (p_{0|A_x, \lambda} p_{0|B_y, \lambda} + p_{1|A_x, \lambda} p_{1|B_y, \lambda}) d\lambda , \\ p_{a \neq b|A_x, B_y} &= \int_{\Lambda} q_\lambda (p_{0|A_x, \lambda} p_{1|B_y, \lambda} + p_{1|A_x, \lambda} p_{0|B_y, \lambda}) d\lambda . \end{aligned}$$

Usando a condição de normalização (2.2), podemos escrever

$$\begin{aligned} \beta_{CHSH} = 2 \int_{\Lambda} q_\lambda &\left[(2p_{0|A_0, \lambda} - 1)(p_{0|B_0, \lambda} + p_{0|B_1, \lambda} - 1) \right. \\ &\left. + (2p_{0|A_1, \lambda} - 1)(p_{0|B_0, \lambda} - p_{0|B_1, \lambda}) \right] d\lambda . \end{aligned}$$

Para os pontos extremais de \mathcal{L} o termo entre colchetes vale ± 1 , daí segue que

$$-2 \leq \beta_{CHSH} \leq 2 . \quad (2.11)$$

Considerando as outras três relações obtidas permutando o sinal dos correlatores na expressão de β_{CHSH} , temos ao todo 8 desigualdades de Bell limitando o politopo local juntamente com as facetas triviais de positividade.

CHSH na Mecânica Quântica:

Sejam A_0 e A_1 duas medições distintas que Alice pode escolher realizar e, analogamente, sejam B_0 e B_1 medições de Bob.

Vamos considerar que os possíveis resultados das medições são -1 ou $+1$ ao invés de 0 ou 1 , mas note que o valor de β_{CHSH} não depende dos valores que a e b podem assumir (inclusive nem precisam ser números, basta que tenhamos duas opções: sim-não, horizontal-vertical).

Calculando o valor esperado do evento: Alice mede A_x e Bob B_y temos:

$$\begin{aligned} \langle A_x B_y \rangle &= \sum_{a=\pm 1} \sum_{b=\pm 1} ab p_{a,b|A_x, B_y} \\ &= p_{1,1|A_x, B_y} - p_{1,-1|A_x, B_y} - p_{-1,1|A_x, B_y} + p_{-1,-1|A_x, B_y} \\ &= p_{a=b|A_x, B_y} - p_{a \neq b|A_x, B_y} . \end{aligned}$$

Isso nos motiva a definir os operadores

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_x &= \Pi_{A_x}^0 - \Pi_{A_x}^1 , \\ \mathbf{B}_y &= \Pi_{B_y}^0 - \Pi_{B_y}^1 . \end{aligned}$$

em que $\{\Pi_{A_x}^0, \Pi_{A_x}^1\}$ são os elementos de POVM da medição A_x e $\{\Pi_{B_y}^0, \Pi_{B_y}^1\}$ os elementos de POVM de B_y . Seja $\|\cdot\|$ a norma definida como o maior valor singular de um operador⁶. Uma vez que os elementos de POVM satisfazem $\sum_a \Pi_{A_x}^a = I$ e $\Pi_{A_x}^a \geq 0$ temos que $\|\mathbf{A}_x\| \leq 1$, e analogamente $\|\mathbf{B}_y\| \leq 1$.

Podemos então associar um observável⁷ à desigualdade CHSH:

$$\mathcal{B}_{CHSH} \equiv \mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1 ,$$

Assim temos que

$$\langle \mathcal{B}_{CHSH} \rangle = \beta_{CHSH} .$$

Com o operador \mathcal{B}_{CHSH} em mãos, podemos calcular seu valor esperado para um estado quântico qualquer e verificar se as correlações geradas pela mecânica quântica são locais, i.e. se respeitam $|\beta_{CHSH}| \leq 2$.

⁶Essa definição é equivalente a $\|X\| = \sup_{\|v\|=1} \|Xv\|$, onde v são os elementos do espaço vetorial sobre o qual o operador X atua. Para operadores hermitianos, isso equivale ao módulo do maior autovalor, em módulo, do operador.

⁷Note que os operadores \mathbf{A}_x e \mathbf{B}_y são observáveis no sentido de serem operadores auto-adjuntos. Entretanto aqui, os possíveis resultados das medições não estão associados aos seus autovalores e auto-espacos (a não ser para o caso de medições projetivas), ainda sim o valor esperado desses operadores equivale ao valor esperado das medições A_x e B_y .

Um simples exemplo mostra que a mecânica quântica viola as restrições impostas pela condição de localidade. Considere que Alice e Bob compartilham o singleto

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle),$$

e podem realizar as medições dos observáveis

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \sigma_z \quad , \quad \mathbf{A}_1 = \sigma_x . \\ \mathbf{B}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_z + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x \quad , \quad \mathbf{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_z - \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x . \end{aligned}$$

Calculando o valor esperado do operador \mathcal{B}_{CHSH} para esse estado temos que a desigualdade CHSH é violada:

$$\begin{aligned} \langle \Psi^- | \mathcal{B}_{CHSH} | \Psi^- \rangle &= \langle \Psi^- | \mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1 | \Psi^- \rangle \\ &= -2\sqrt{2} . \end{aligned}$$

Um resultado devido a Boris Tsirelson mostra que essa é a máxima violação que se pode obter com mecânica quântica:

Teorema 2.1. $\|\mathcal{B}_{CHSH}\| \leq 2\sqrt{2}$.

Demonstração. Vamos calcular

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_{CHSH})^2 &= (\mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1)^2 \\ &\leq 4I - [\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1] \otimes [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1] , \end{aligned}$$

onde $[X, Y] \equiv XY - YX$ representa o comutador dos operadores X e Y . Essa desigualdade de operadores⁸ foi derivada em [33].

Dado um operador V , vale que:

$$\begin{aligned} \|[V, W]\| &= \|VW - WV\| \leq 2\|V\|\|W\| , \\ \|V \otimes W\| &= \|V\|\|W\| , \\ \|V^2\| &= \|V\|^2 . \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_{CHSH}\|^2 &\leq 4 + 4\|\mathbf{A}_0\|\|\mathbf{A}_1\|\|\mathbf{B}_0\|\|\mathbf{B}_1\| \\ &\leq 8 \\ &\Downarrow \\ \|\mathcal{B}_{CHSH}\| &\leq 2\sqrt{2} . \end{aligned}$$

□

⁸Dois operadores X e Y obedecem à relação $X \leq Y$ se $Y - X$ é um operador positivo.

Corolário 2.1 (Cota de Tsirelson). *Assumindo os postulados da mecânica quântica o valor de β_{CHSH} é limitado por $|\beta_{CHSH}| \leq 2\sqrt{2}$.*

Caixas de Popescu-Rohrlich

Vimos que a mecânica quântica pode gerar correlações que violam alguma das desigualdades que delimitam o politopo das correlações locais. Mas vimos também, que essa violação é limitada pela cota de Tsirelson, que é inferior ao máximo permitido para correlações em geral.

Ao invés de questionar porque a mecânica quântica viola a desigualdade CHSH, Sandu Popescu e Daniel Rohrlich [34] se perguntaram porque ela não viola mais? De onde vem essa cota? Uma possível resposta é que essa cota deriva da estrutura de espaço de Hilbert da mecânica quântica, mas o que isso significa? Qual seria o princípio físico limitador do conjunto das correlações que se pode obter com mecânica quântica?

Em busca desse princípio Popescu e Rohrlich assumem dois axiomas:

- Não-localidade: seria responsável pelas correlações quânticas violarem CHSH algumas vezes,
- Não-sinalização: seria responsável por limitar essa violação,

e se perguntam: quais teorias dão origem a correlações não-locais mas ainda preservam não-sinalização?

Eles exibem então o seguinte exemplo de correlação, as chamadas caixas de Popescu-Rohrlich (**caixas PR**):

$$\begin{aligned}
 p_{1,1|A_0,B_0} &= p_{-1,-1|A_0,B_0} = 1/2 , \\
 p_{1,1|A_0,B_1} &= p_{-1,-1|A_0,B_1} = 1/2 , \\
 p_{1,1|A_1,B_0} &= p_{-1,-1|A_1,B_0} = 1/2 , \\
 p_{1,-1|A_1,B_1} &= p_{-1,1|A_1,B_1} = 1/2 , \\
 &\text{e zero nos outros casos .}
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Essa distribuição é não-sinalizante pois:

$$\begin{aligned}
 p_{a|A_x,B_0} &= p_{a|A_x,B_1} = 1/2 \quad \forall \quad a, A_x , \\
 p_{b|A_0,B_y} &= p_{b|A_1,B_y} = 1/2 \quad \forall \quad b, B_y .
 \end{aligned}$$

Entretanto

$$\beta_{CHSH} = 4 ,$$

e portanto tais correlações não podem ser obtidas com mecânica quântica⁹.

Trocando os papéis das probabilidades nulas e das que valem $1/2$ obtemos outra distribuição não-sinalizadora com $\beta_{CHSH} = -4$. E alternando os papéis de A_0 e A_1 , e B_0 e B_1 obtemos caixas que violam maximamente as outras desigualdades CHSH. Portanto, ao todo temos 8 caixas PR, que fazem parte do conjunto de pontos extremais do politopo \mathcal{NS} .

Assim Popescu e Rohrlich mostraram que não-sinalização não é suficiente para delimitar o conjunto das correlações quânticas. Qual seria então o princípio limitador do conjunto \mathcal{Q} ? As buscas por esse princípio ainda seguem em aberto. Um candidato é o princípio de causalidade da informação [35], que em essência estabelece que a comunicação de m bits clássicos pode gerar um ganho de informação de no máximo m bits. Para $m = 0$, o princípio de causalidade da informação se reduz à condição de não-sinalização. Em [36] é mostrado que parte da fronteira do conjunto quântico pode ser recuperada por esse princípio, mas se ele é suficiente ainda não se sabe.

Resumindo os resultados obtidos até aqui temos

$$\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{Q} \subsetneq \mathcal{NS} \subsetneq \mathcal{P} .$$

A figura 2.3 esquematiza a relação entre esses conjuntos.

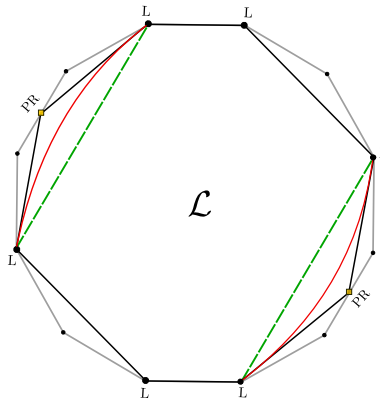


Figura 2.3: \mathcal{P} é representado pelo polígono maior. L são os pontos extremais do politopo local e PR as caixas de Popescu-Rohrlich. As linhas tracejadas em verde são desigualdades de Bell, e a parte da fronteira do conjunto \mathcal{Q} que não é linear é representada pela curva vermelha. É importante ressaltar que a figura não ilustra o fato de que \mathcal{P} vive num espaço de dimensão maior que os demais conjuntos.

⁹Daí o nome “caixas”, não existe um sistema físico ou estratégias capazes de simular tais correlações, por isso pensamos apenas em caixas-pretas que, dadas as medições de entrada, retornam os resultados de saída.

2.1.7 Resultados sobre a existência de modelos locais

Nesta seção vamos discutir um conjunto de resultados, apresentados por Arthur Fine [37] em 1982, que são bastante interessantes e esclarecedores. Eles caracterizam completamente o politopo clássico no cenário $(2, 2, 2)$ e criam intuições sobre os cenários mais gerais¹⁰.

Teorema 2.2 (Fine). *Considere um experimento de correlação no cenário $(2, 2, 2)$. As seguintes proposições são equivalentes:*

- (1) *Existe um modelo de variáveis ocultas local para $p_{a,b|A_x,B_y}$.*
- (2) *Existe um modelo de variáveis ocultas local determinístico para $p_{a,b|A_x,B_y}$, i.e., conhecido λ as probabilidades valem 0 ou 1.*
- (3) *Existe uma distribuição de probabilidades conjunta consistente¹¹ para todas as medições, $p_{(a,a',b,b'|A_0,A_1,B_0,B_1)}$.*
- (4) *Existem distribuições triplas consistentes, $p_{(a,b,b'|A_0,B_0,B_1)}$ e $p_{(a',b,b'|A_1,B_0,B_1)}$, que geram uma distribuição bem definida $p_{b,b'|B_0,B_1}$.*
- (5) *As desigualdades CHSH são satisfeitas.*

Demonstração.

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

(\Leftarrow) Um modelo de variáveis ocultas determinístico é um caso particular de um modelo de variáveis ocultas geral.

(\Rightarrow) Suponha que exista λ e q_λ tais que as probabilidades do experimento podem ser descritas por

$$p_{a,b|A_x,B_y} = \int_{\Lambda} q_\lambda p_{a|A_x,\lambda} p_{b|B_y,\lambda} d\lambda.$$

Defina uma nova variável oculta:

$$\lambda' = \lambda'(\lambda, \mu_1, \mu_2),$$

¹⁰Note que faremos uma demonstração bastante redundante para o Teorema 2.2 (menos passos são suficientes para provar o teorema). Isso porque a estrutura das demonstrações é quase tão interessante quanto o teorema em si e também nos ajuda a criar intuições para os cenários mais gerais.

¹¹Consistente no sentido de que as marginais concordam com os resultados do experimento.

e as probabilidades

$$p'_{0|A_x, \lambda'} = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \mu_1 \leq p_{0|A_x} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

$$p'_{1|A_x, \lambda'} = \begin{cases} 1, & \text{se } p_{0|A_x} \leq \mu_1 \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

$$p'_{0|B_y, \lambda'} = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \mu_2 \leq p_{0|B_y} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

$$p'_{1|B_y, \lambda'} = \begin{cases} 1, & \text{se } p_{0|B_y} \leq \mu_2 \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

Seja \tilde{q} a distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$, então

$$\begin{aligned} p_{a,b|A_x, B_y} &= \int_{\Lambda} q_{\lambda} p_{a|A_x, \lambda} p_{b|B_y, \lambda} d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} q_{\lambda} \left(\int_0^1 \tilde{q}_{\mu_1} p'_{a|A_x, \lambda, \mu_1} d\mu_1 \right) \left(\int_0^1 \tilde{q}_{\mu_2} p'_{b|B_y, \lambda, \mu_2} d\mu_2 \right) d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} \int_0^1 \int_0^1 q_{\lambda} \tilde{q}_{\mu_1} \tilde{q}_{\mu_2} p'_{a|A_x, \lambda, \mu_1} p'_{b|B_y, \lambda, \mu_2} d\mu_2 d\mu_1 d\lambda \\ &= \int_{\Lambda'} q'_{\lambda'} p'_{a|A_x, \lambda'} p'_{b|B_y, \lambda'} d\lambda', \end{aligned}$$

onde $q'_{\lambda'} = q_{\lambda} \tilde{q}_{\mu_1} \tilde{q}_{\mu_2}$ e

$$\int_{\Lambda'} q'_{\lambda'} d\lambda' = \int_{\Lambda} \int_0^1 \int_0^1 q_{\lambda} \tilde{q}_{\mu_1} \tilde{q}_{\mu_2} d\mu_2 d\mu_1 d\lambda = 1.$$

Dessa forma o experimento também pode ser descrito por um modelo de variáveis ocultas determinístico.

(2) \Leftrightarrow (3)

(\Rightarrow) Suponha que exista um modelo de variáveis ocultas determinístico que reproduz os resultados do experimento de correlação, i.e., existem variáveis ocultas λ tais que

$$p_{a,b|A_x, B_y} = \int_{\Lambda} q_{\lambda} p_{a|A_x, \lambda} p_{b|B_y, \lambda} d\lambda,$$

onde $p_{a|A_x,\lambda}$ e $p_{b|B_y,\lambda}$ valem 0 ou 1.

Defina

$$p_{a,a',b,b'|A_0,A_1,B_0,B_1} \equiv \int_{\Lambda} q\lambda p_{a|A_0,\lambda} p_{a'|A_1,\lambda} p_{b|B_0,\lambda} p_{b'|B_1,\lambda} d\lambda .$$

Segue que as probabilidades marginais dessa distribuição correspondem às descritas pelo modelo determinístico local. Por exemplo:

$$\begin{aligned} p_{a,b|A_0,B_0} &= \sum_{a',b'} p_{a,a',b,b'|A_0,A_1,B_0,B_1} \\ &= \int_{\Lambda} q\lambda p_{a|A_0,\lambda} \left(\sum_{a'} p_{a'|A_1,\lambda} \right) p_{b|B_0,\lambda} \left(\sum_{b'} p_{b'|B_1,\lambda} \right) d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} q\lambda p_{a|A_0,\lambda} p_{b|B_0,\lambda} d\lambda . \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Suponha que exista uma distribuição de probabilidade conjunta para A_0, A_1, B_0 e B_1 , $p_{(a,a',b,b'|A_0,A_1,B_0,B_1)}$, tal que suas probabilidades marginais reproduzem os resultados do experimento de correlação. Podemos construir um modelo determinístico local da seguinte forma:

Seja λ_i um conjunto de quatro variáveis, $\lambda_i = (a_i, a'_i, b_i, b'_i)$, cujas componentes assumem os valores 0 ou 1. Defina

$$\begin{aligned} p_{a|A_0,\lambda_i} &= \delta_{a,a_i} , & p_{a'|A_1,\lambda_i} &= \delta_{a',a'_i} , \\ p_{b|B_0,\lambda_i} &= \delta_{b,b_i} , & p_{b'|B_1,\lambda_i} &= \delta_{b',b'_i} , \end{aligned}$$

e

$$q\lambda_i = P_{(a_i,a'_i,b_i,b'_i|A_0,A_1,B_0,B_1)} .$$

Assim as correlações do experimento podem ser descritas por um modelo determinístico em que os λ_i 's são variáveis ocultas e $q\lambda_i$ é a distribuição de probabilidade da variável discreta λ_i :

$$p_{a,b|A_x,B_y} = \sum_{i=1}^{16} q\lambda_i p_{a|A_x,\lambda_i} p_{b|B_y,\lambda_i} .$$

De fato:

$$\begin{aligned} p_{a,b|A_0,B_0} &= \sum_i q\lambda_i p_{a|A_0,\lambda_i} p_{b|B_0,\lambda_i} \\ &= \sum_i P_{(a_i,a'_i,b_i,b'_i|A_0,A_1,B_0,B_1)} \delta_{a,a_i} \delta_{b,b_i} \\ &= \sum_{i:a_i=a,b_i=b} P_{(a_i,a'_i,b_i,b'_i|A_0,A_1,B_0,B_1)} \\ &= \sum_{a',b'} P_{(a,a',b,b'|A_0,A_1,B_0,B_1)} , \end{aligned}$$

que, por hipótese, reproduz os resultados do experimento.

(3) \Leftrightarrow (4)

(\Rightarrow) A existência de $p_{(a,b,b'|A_0,B_0,B_1)}$, $p_{(a',b,b'|A_1,B_0,B_1)}$ e $p_{b,b'|B_0,B_1}$ bem definidos segue diretamente da distribuição conjunta $p_{(a,a',b,b'|A_0,A_1,B_0,B_1)}$.

(\Leftarrow) Suponha que existam $p_{(a,b,b'|A_0,B_0,B_1)}$, $p_{(a',b,b'|A_1,B_0,B_1)}$ e $p_{b,b'|B_0,B_1}$. Defina

$$p_{(a,a',b,b'|A_0,A_1,B_0,B_1)} \equiv \frac{p_{(a,b,b'|A_0,B_0,B_1)}p_{(a',b,b'|A_1,B_0,B_1)}}{p_{b,b'|B_0,B_1}},$$

$$p_{(a,a',b,b'|A_0,A_1,B_0,B_1)} \equiv 0 \quad \text{se } p_{b,b'|B_0,B_1} = 0.$$

É direto verificar que suas marginais produzem as probabilidades requeridas.

(4) \Leftrightarrow (5)

(\Rightarrow) Suponha que existam as distribuições $p_{(a,b,b'|A_0,B_0,B_1)}$, $p_{(a',b,b'|A_1,B_0,B_1)}$ e $p_{b,b'|B_0,B_1}$, e considere também a distribuição conjunta obtida a partir destas. Podemos então derivar as seguintes relações:

$$\begin{aligned} p_{0,0,0|A_0,B_0,B_1} &= p_{0,0,0,0|A_0,A_1,B_0,B_1} + p_{0,1,0,0|A_0,A_1,B_0,B_1} \\ &\leq p_{0,0|A_1,B_1} + p_{1,0|A_1,B_0} \\ &= p_{0,0|A_1,B_1} + p_{0|B_0} - p_{0,0|A_1,B_0} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} p_{1,0,0|A_0,B_0,B_1} &= p_{1,0,0,0|A_0,A_1,B_0,B_1} + p_{1,1,0,0|A_0,A_1,B_0,B_1} \\ &\leq p_{0,0|A_1,B_0} + p_{1,0|A_1,B_1} \\ &= p_{0,0|A_1,B_0} + p_{0|B_1} - p_{0,0|A_1,B_1} \end{aligned} \quad (2.14)$$

e também

$$\begin{aligned} 0 \leq p_{0,1,1|A_0,B_0,B_1} &= p_{0|A_0} - p_{0,0,1|A_0,B_0,B_1} \\ &\quad - p_{0,1,0|A_0,B_0,B_1} - p_{0,0,0|A_0,B_0,B_1} \\ &= p_{0|A_0} - p_{0,0|A_0,B_0} - p_{0,0|A_0,B_1} + p_{0,0,0|A_0,B_0,B_1} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq p_{1,1,1|A_0,B_0,B_1} &= p_{1|A_0} - p_{1,0|A_0,B_0} - p_{1,0|A_0,B_1} + p_{1,0,0|A_0,B_0,B_1} \\ &= 1 - p_{0|A_0} - p_{0|B_0} + p_{0,0|A_0,B_0} - p_{0|B_1} \\ &\quad + p_{0,0|A_0,B_1} + p_{1,0,0|A_0,B_0,B_1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Substituindo (2.13) em (2.15) e (2.14) em (2.16) chegamos à relação:

$$-1 \leq p_{0,0|A_0,B_0} + p_{0,0|A_0,B_1} + p_{0,0|A_1,B_0} - p_{0,0|A_1,B_1} - p_{0|A_0} - p_{0|B_0} \leq 0 \quad (2.17)$$

Essa relação é conhecida como **desigualdade CH** e foi proposta em 1974 por Clauser e Horne [38]. Para ver que ela é equivalente a desigualdade CHSH apresentada anteriormente basta notar que:

$$p_{0|A_x} = \frac{1 + E(A_x)}{2}$$

$$p_{0,0|A_x,B_y} = \frac{1 + E(A_x, B_y) + E(A_x) + E(B_y)}{4}$$

onde $E(A_x) \equiv p_{0|A_x} - p_{1|A_x}$, e substituindo em (2.17) chegamos a

$$-2 \leq E(A_0, B_0) + E(A_0, B_1) + E(A_1, B_0) - E(A_1, B_1) \leq 2 .$$

As outras três desigualdades são obtidas fazendo o mesmo raciocínio ora trocando A_0 por A_1 , ora B_0 por B_1 , e ora trocando ambos.

(\Leftarrow) Essa demonstração é um tanto extensa e as técnicas utilizadas não serão de utilidade para o restante do texto. O leitor curioso pode encontrá-la em [37].

□

A equivalência de (1) e (2) mostra que se nos restringimos a modelos de variáveis ocultas determinísticos não diminuimos o conjunto das possíveis correlações. Toda a aleatoriedade do sistema pode ser transportada para a distribuição da variável oculta λ . Na visão dos conjuntos de vetores de correlação, apresentados nas seções anteriores, esse resultado segue como consequência de todos os pontos extremais do politopo local serem determinísticos.

A equivalência de (1) e (5) mostra que o politopo local no cenário (2, 2, 2) é completamente caracterizado pela desigualdade CHSH, como já havíamos comentado.

Das proposições (3) e (4) vemos que a existência de um modelo de variáveis ocultas local está intimamente ligado a existência de uma distribuição conjunta consistente para todos os eventos envolvidos no experimento. Se pensarmos nos sistemas quânticos, tal consistência é muitas vezes proibida pela existência de experimentos incompatíveis.

As proposições (1), (2) e (3) são diretamente estendidas para os cenários mais gerais e suas equivalências também seguem da estrutura das demonstrações aqui apresentadas.

A proposição (4) não tem uma extensão trivial para cenários mais gerais, talvez apenas para alguns cenários particulares (veremos um deles na seção 2.2.3).

As desigualdades CHSH certamente não são suficientes para a existência de um modelo de variáveis ocultas local nos casos gerais, e são necessárias outras desigualdades para caracterizar o politopo local. Se estendermos a proposição (5) para todas as desigualdades de Bell de um dado cenário, então teremos sua equivalência com a existência de um modelo de variáveis ocultas local.

2.2 Conjunto das Correlações II: Cenários mais gerais

2.2.1 Cenários mais gerais

Em geral, um experimento de correlação é caracterizado por:

- número de partes;
- número de possíveis medições em cada parte;
- número de possíveis resultados de cada medição.

Podemos caracterizar esse cenário pela notação:

$$(r_{11}, \dots, r_{1m_1}; r_{21}, \dots, r_{2m_2}; r_{n1}, \dots, r_{nm_n}) ,$$

onde r_{ij} é o número de possíveis resultados da medição j da parte i . Por exemplo $(3, 3; 2, 2, 4)$ denota um cenário de duas partes em que a primeira pode escolher entre duas medições com três possíveis resultados cada, e a segunda pode escolher entre três medições, duas com dois possíveis resultados e uma com quatro possíveis resultados.

Para um cenário de n partes, onde cada parte pode realizar o mesmo número de medições m , cada uma com o mesmo número de possíveis resultados r , usamos a notação simplificada

$$(n, m, r) .$$

2.2.2 Facetas do politopo clássico

Para os cenários mais gerais a desigualdade CHSH é uma condição necessária mas não é mais suficiente para delimitar o politopo local.

A complexidade do problema cresce bastante se saímos do cenário mais simples $(2, 2, 2)$. No cenários (n, m, r) o vetor de correlações é um vetor de $(mr)^n$ componentes. Assim, a tarefa de encontrar o menor conjunto de desigualdades, que é completo no sentido que as desigualdades são satisfeitas se e somente se as correlações são locais, é um problema bastante complicado, cuja complexidade computacional cresce exponencialmente com os parâmetros n , m e r [2]. Portanto, soluções completas só são conhecidas para casos em que simetrias podem ser exploradas, por exemplo o caso $(n, 2, 2)$ [39], ou para valores pequenos de (n, m, r) onde a computação atual permite uma abordagem por força bruta. Em [40] são estudados o caso $(2, 3, 2)$, e o caso em que um observador pode escolher entre 2 medições dicotômicas e o outro pode escolher entre k medições, e ainda, é apresentada a lista completa das desigualdades (a menos de simetrias) para o caso $(3, 2, 2)$. Alguns outros casos resolvidos são listados em [28].

Mais detalhes e referências sobre a complexidade de encontrar as desigualdades no caso geral e os casos resolvidos podem ser encontrados nos artigos de revisão [41], [42].

2.2.3 Mais resultados sobre a existência de modelos locais

Um resultado interessante para um experimento de correlação entre n partes espacialmente separadas é¹²:

Proposição 2.5. *Considere um experimento com medições locais em n partes. Se a estatística de resultados das medições nas n partes admite um modelo de variáveis ocultas local, então a estatística de resultados de medições em k partes, condicionadas a um resultado particular das medições nas outras $(n - k)$ partes, também admite um modelo de variáveis ocultas local.*

Demonstração. Vamos fazer a demonstração para $n = 3$. Mas esta pode ser facilmente estendida para um maior número de partes.

Considere um experimento de correlação entre 3 partes, em que cada parte pode escolher uma entre um conjunto de possíveis medições, cada uma com um certo número de resultados. Dizer que esse experimento admite um

¹²A demonstração apresentada aqui segue a mesma linha de raciocínio da referência [43] para a demonstração da Proposição 4.1.

modelo de variáveis ocultas local é dizer que as distribuições de probabilidade conjuntas dos possíveis resultados podem ser escritas na forma:

$$p_{a,b,c|A_x,B_y,C_z} = \int_{\Lambda} q_{\lambda} p_{a|A_x,\lambda} p_{b|B_y,\lambda} p_{c|C_z,\lambda} d\lambda \quad (2.18)$$

para algum conjunto de variáveis λ e distribuição q_{λ} .

Agora considere a distribuição de probabilidades conjunta nas partes A e B condicionada a obtenção de um resultado particular na parte C :

$$p_{a,b|c,A_x,B_y,C_z} = \frac{p_{a,b,c|A_x,B_y,C_z}}{\sum_{a,b} p_{a,b,c|A_x,B_y,C_z}} .$$

Usando o modelo local para a distribuição conjunta das 3 partes, (2.18), temos:

$$\begin{aligned} p_{a,b|c,A_x,B_y,C_z} &= \frac{\int_{\Lambda} q_{\lambda} p_{a|A_x,\lambda} p_{b|B_y,\lambda} p_{c|C_z,\lambda} d\lambda}{\sum_{a,b} \int_{\Lambda} q_{\lambda} p_{a|A_x,\lambda} p_{b|B_y,\lambda} p_{c|C_z,\lambda} d\lambda} \\ &= \frac{\int_{\Lambda} q_{\lambda} p_{a|A_x,\lambda} p_{b|B_y,\lambda} p_{c|C_z,\lambda} d\lambda}{p_{c|C_z}} \\ &= \int_{\Lambda} q'_{c,C_z,\lambda} p_{a|A_x,\lambda} p_{b|B_y,\lambda} d\lambda , \end{aligned}$$

em que $p_{c|C_z} = \int_{\Lambda} p_{c|C_z,\lambda} d\lambda$, e

$$q'_{c,C_z,\lambda} = \frac{q_{\lambda} p_{c|C_z,\lambda}}{p_{c|C_z}}$$

é uma distribuição de probabilidades independente das medições feitas nas partes A e B . Portanto a estatística dos resultados obtidos por A e B , condicionado ao resultado c na parte C , admite um modelo de variáveis ocultas local. □

A contrapositiva da Proposição 2.5 garante que, se restrito a um resultado particular de $(n - k)$ partes, k partes exibem correlações não-locais, então as n partes formam um sistema não-local.

Outro resultado interessante, para o caso de estados quânticos, segue das construções feitas por Fine para demonstração do Teorema 2.2. Esse resultado foi demonstrado primeiramente na referência [44].

Considere ρ_{AB} um estado k -extensível em B . Lembrando a definição 1.5, existe $\rho_{AB_1 B_2 \dots B_k}$ tal que

$$\text{tr}_{B_j} \rho_{AB_1 \dots B_k} = \rho_{AB} \quad \forall B_j .$$

Proposição 2.6. *Se Alice e Bob compartilham o estado k -extensível ρ_{AB} então existe um modelo de variáveis ocultas local para um experimento de correlação em que Bob pode escolher entre k possíveis medições e Alice pode escolher entre n medições, $\forall n \in \mathbb{N}$, todas com qualquer número de possíveis resultados.*

Demonstração. Considere um experimento de correlação em que Alice e Bob compartilham o estado k -extensível ρ_{AB} , Bob pode escolher uma entre k possíveis medições e Alice pode escolher uma entre n medições. Defina

$$P(a_i, b_1, \dots, b_k | A_i, B_1, \dots, B_k) \equiv \text{tr} \left[\left(\Pi_{A_i}^{a_i} \otimes \Pi_{B_1}^{b_1} \otimes \dots \otimes \Pi_{B_k}^{b_k} \right) \rho_{AB_1 \dots B_k} \right] \quad \forall A_i. \quad (2.19)$$

Note que daí segue uma distribuição conjunta para as medições B_j :

$$P(b_1, \dots, b_k | B_1, \dots, B_k) = \text{tr} \left[\left(\Pi_{B_1}^{b_1} \otimes \dots \otimes \Pi_{B_k}^{b_k} \right) \rho_{B_1 \dots B_k} \right],$$

onde $\rho_{B_1 \dots B_k} = \text{tr}_A \rho_{AB_1 \dots B_k}$. Pelas propriedades dos estados k -extensíveis as distribuições (2.19) são bem definidas e apresentam as marginais requeridas, por exemplo

$$\begin{aligned} P(a_1, b_1 | A_1, B_1) &= \sum_{b_2, \dots, b_k} P(a_1, b_1, \dots, b_k | A_1, B_1, \dots, B_k) \\ &= \text{tr} \left[\left(\Pi_{A_1}^{a_1} \otimes \Pi_{B_1}^{b_1} \otimes \left(\sum_{b_2} \Pi_{B_2}^{b_2} \right) \dots \otimes \left(\sum_{b_k} \Pi_{B_k}^{b_k} \right) \right) \rho_{AB_1 B_2 \dots B_k} \right] \\ &= \text{tr} \left[\left(\Pi_{A_1}^{a_1} \otimes \Pi_{B_1}^{b_1} \otimes I_{B_2} \dots \otimes I_{B_k} \right) \rho_{AB_1 B_2 \dots B_k} \right] \\ &= \text{tr} \left[\left(\Pi_{A_1}^{a_1} \otimes \Pi_{B_1}^{b_1} \right) \rho_{AB_1} \right] \\ &= \text{tr} \left[\left(\Pi_{A_1}^{a_1} \otimes \Pi_{B_1}^{b_1} \right) \rho_{AB} \right]. \end{aligned}$$

Seguindo a demonstração da equivalência (3) \Leftrightarrow (4) do Teorema 2.2 vamos definir uma distribuição de probabilidades conjunta para todas as medições do experimento:

$$P(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k | A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_k) \equiv \frac{P(a_1, b_1, \dots, b_k | A_1, B_1, \dots, B_k) \dots P(a_n, b_1, \dots, b_k | A_n, B_1, \dots, B_k)}{\left[P(b_1, \dots, b_k | B_1, \dots, B_k) \right]^{n-1}}.$$

As marginais corretas seguem das propriedades dos estados k -extensíveis.

A partir da distribuição conjunta para todos os observáveis é possível construir um modelo de variáveis ocultas local como feito no Teorema 2.2. \square

Capítulo 3

Emaranhamento \Leftrightarrow Não-localidade?

De agora em diante vamos nos concentrar nas correlações geradas pela mecânica quântica.

Neste capítulo vamos analisar quais estados quânticos são capazes de exibir correlações não-locais. Veremos que emaranhamento é uma condição necessária para não-localidade, mas não é suficiente. Existem exemplos de estados emaranhados cujas correlações admitem uma descrição por um modelo de variáveis ocultas local.

3.1 Estados separáveis

Considere um estado separável qualquer, de um sistema composto por n subsistemas:

$$\rho = \sum_i p_i \rho_1^i \otimes \rho_2^i \otimes \dots \otimes \rho_n^i \quad ; \quad p_i \geq 0 \quad , \quad \sum_i p_i = 1 .$$

Para todas as medições locais, $\{\Pi_{A_{x_1}} \otimes \Pi_{A_{x_2}} \otimes \dots \otimes \Pi_{A_{x_n}}\}$, realizadas nesse sistema, as correlações obtidas são da forma

$$\begin{aligned} p(a_1, \dots, a_n | A_{x_1}, \dots, A_{x_n}) &= \text{tr} \left[\rho \left(\Pi_{A_{x_1}}^{a_1} \otimes \Pi_{A_{x_2}}^{a_2} \otimes \dots \otimes \Pi_{A_{x_n}}^{a_n} \right) \right] \\ &= \text{tr} \left[\left(\sum_i p_i \rho_1^i \otimes \dots \otimes \rho_n^i \right) \left(\Pi_{A_{x_1}}^{a_1} \otimes \dots \otimes \Pi_{A_{x_n}}^{a_n} \right) \right] \\ &= \sum_i p_i \text{tr} \left(\rho_1^i \Pi_{A_{x_1}}^{a_1} \right) \text{tr} \left(\rho_2^i \Pi_{A_{x_2}}^{a_2} \right) \dots \text{tr} \left(\rho_n^i \Pi_{A_{x_n}}^{a_n} \right) \\ &= \sum_i p_i p_{a_1 | A_{x_1}}^i p_{a_2 | A_{x_2}}^i \dots p_{a_n | A_{x_n}}^i \quad , \end{aligned}$$

que é uma distribuição de probabilidades classicamente correlacionada, e portanto pode ser simulada por um modelo de variáveis ocultas local. Assim vemos que todo estado separável só pode dar origem a correlações locais.

Vamos agora partir para a análise de estados emaranhados.

3.2 Estados Puros

Em [45, 46] foi mostrado que todo estado puro bipartite emaranhado viola alguma desigualdade de Bell. Em seguida, Popescu e Rohrlich [47] generalizaram esse resultado para todo estado puro emaranhado, com qualquer número de partes. Em seus enunciados Popescu e Rohrlich consideraram apenas estados genuinamente emaranhados de n parte, mas com pequenas modificações, sua demonstração pode ser estendida para todo tipo de emaranhamento como veremos nesta seção.

3.2.1 Dois qubits

Teorema 3.1 (2 qubits). *Todo estado puro de 2 qubits emaranhado viola a desigualdade CHSH para alguma escolha de observáveis \mathbf{A}_0 , \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_0 e \mathbf{B}_1 .*

Demonstração. Um estado puro de 2 qubits pode ser escrito usando a decomposição de Schmidt na forma:

$$|\psi\rangle = \lambda_1|0\rangle|0\rangle + \lambda_2|1\rangle|1\rangle ,$$

onde λ_1, λ_2 são números reais positivos e $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$. $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ são bases para \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B e podem representar diferentes direções de spin em cada sistema.

Vimos que um estado é emaranhado se e somente se ele possui pelo menos dois coeficientes de Schmidt não-nulos. Portanto, para que um estado de 2 qubits seja emaranhado, devemos ter $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$.

Uma vez que se tratam de sistemas de 2 níveis podemos escolher os observáveis da forma:

$$\mathbf{A}_0 = \vec{a}_0 \cdot \vec{\sigma} , \quad \mathbf{A}_1 = \vec{a}_1 \cdot \vec{\sigma} , \quad \mathbf{B}_0 = \vec{b}_0 \cdot \vec{\sigma} , \quad \mathbf{B}_1 = \vec{b}_1 \cdot \vec{\sigma} ,$$

onde os eixos são escolhidos de forma que $|0\rangle, |1\rangle$ sejam autovetores de σ_z tanto na parte A quanto na parte B , e $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{b}_0, \vec{b}_1$ são vetores unitários em \mathbb{R}^3 . A demonstração do teorema consiste em escolher esse conjunto de vetores unitários de forma que alguma das desigualdades CHSH seja violada.

Vamos considerar o operador

$$\mathcal{B}_{CHSH} = \mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1 .$$

Para nossa escolha de observáveis temos que:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}_{CHSH} \rangle = & \langle \vec{a}_0 \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b}_0 \cdot \vec{\sigma} \rangle - \langle \vec{a}_0 \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b}_1 \cdot \vec{\sigma} \rangle \\ & + \langle \vec{a}_1 \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b}_0 \cdot \vec{\sigma} \rangle + \langle \vec{a}_1 \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b}_1 \cdot \vec{\sigma} \rangle . \end{aligned}$$

Calculando o valor esperado de cada termo no estado $|\psi\rangle$ obtemos:

$$\langle \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{b} \cdot \vec{\sigma} \rangle_{\psi} = a_z b_z + 2\lambda_1 \lambda_2 (a_x b_x - a_y b_y) .$$

Agora considere

$$\begin{aligned} \vec{a}_0 &= (0, 0, 1) , \\ \vec{a}_1 &= (1, 0, 0) , \\ \vec{b}_0 &= (\sin \beta, 0, \cos \beta) , \\ \vec{b}_1 &= (\sin \beta', 0, \cos \beta') . \end{aligned}$$

Dessa forma temos que

$$\langle \mathcal{B}_{CHSH} \rangle_{\psi} = \cos \beta - \cos \beta' + 2\lambda_1 \lambda_2 (\sin \beta + \sin \beta') .$$

Escolhendo

$$\begin{aligned} \cos \beta = -\cos \beta' &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4(\lambda_1 \lambda_2)^2}} , \\ \sin \beta = \sin \beta' &= \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\sqrt{1 + 4(\lambda_1 \lambda_2)^2}} , \end{aligned}$$

obtemos finalmente que, para essas medições

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}_{CHSH} \rangle_{\psi} &= 2\sqrt{1 + 4(\lambda_1 \lambda_2)^2} \\ &> 2 \quad \text{se } \lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2 . \end{aligned}$$

□

Portanto, para algum conjunto de medições, todo estado puro emaranhado de 2 qubits exibe correlações que não podem ser simuladas por teorias realistas locais.

É importante notar que as medições escolhidas para que haja violação dependem explicitamente do estado $|\psi\rangle$ através de suas bases e seus coeficientes de Schmidt. Diferentes estados vão requerer que diferentes observáveis sejam medidos para que correlações não-locais sejam observadas.

3.2.2 Sistemas bipartites

Teorema 3.2 (Sistemas bipartites). *Todo estado puro bipartite emaranhado exibe correlações não-locais para algum conjunto de medições.*

Demonstração. Usando a decomposição de Schmidt, um estado puro de um sistema bipartite $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ pode ser escrito na forma

$$|\psi\rangle = \lambda_1|0\rangle|0\rangle + \lambda_2|1\rangle|1\rangle + \dots + \lambda_d|d-1\rangle|d-1\rangle,$$

onde $d = \min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\}$.

Redefinindo os índices se necessário, temos que $|\psi\rangle$ é emaranhado se e somente se $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$, mas agora $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leq 1$.

Por conveniência, podemos escrever $|\psi\rangle$ ressaltando a sua componente no subespaço $\{|0\rangle, |1\rangle\}_A \otimes \{|0\rangle, |1\rangle\}_B$:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \left(\frac{\lambda_1|0\rangle|0\rangle + \lambda_2|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \right) \\ &\quad + \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left(\frac{\lambda_3|2\rangle|2\rangle + \dots + \lambda_d|d-1\rangle|d-1\rangle}{\sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2}} \right) \\ &= \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} |\psi_{01}\rangle + \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2} |\psi_{01}^\perp\rangle \end{aligned}$$

onde $|\psi_{01}\rangle$ é um vetor normalizado no subespaço $\{|0\rangle, |1\rangle\}_A \otimes \{|0\rangle, |1\rangle\}_B$, e $|\psi_{01}^\perp\rangle$ é um vetor normalizado no seu complemento ortogonal.

Defina os observáveis:

$$A_0, A_1, B_0, B_1 = \begin{cases} \vec{a}_0 \cdot \vec{\sigma}, \vec{a}_1 \cdot \vec{\sigma}, \vec{b}_0 \cdot \vec{\sigma}, \vec{b}_1 \cdot \vec{\sigma} \text{ respectivamente, nos subespaços} \\ \{|0\rangle, |1\rangle\} \text{ de } \mathcal{H}_A \text{ e } \mathcal{H}_B; \\ I \text{ nos subespaços } \{|2\rangle, \dots, |d-1\rangle\} \text{ de } \mathcal{H}_A \text{ e } \mathcal{H}_B; \end{cases}$$

com os vetores unitários $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{b}_0$ e \vec{b}_1 definidos em função dos coeficientes do estado $|\psi_{01}\rangle$ como na demonstração do Teorema 3.1.

Como esses operadores não conectam o subespaço $\{|0\rangle, |1\rangle\}_A \otimes \{|0\rangle, |1\rangle\}_B$ e seu complemento ortogonal temos que:

$$\langle \psi | \mathcal{B}_{CHSH} | \psi \rangle = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \langle \psi_{01} | \mathcal{B}_{CHSH} | \psi_{01} \rangle + (1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) \langle \psi_{01}^\perp | \mathcal{B}_{CHSH} | \psi_{01}^\perp \rangle$$

O valor esperado de $\langle \psi_{01} | \mathcal{B}_{CHSH} | \psi_{01} \rangle$ já foi computado na demonstração do Teorema 3.1 e é estritamente maior que 2. Para $\langle \psi_{01}^\perp | \mathcal{B}_{CHSH} | \psi_{01}^\perp \rangle$ temos

$$\langle \psi_{01}^\perp | \mathcal{B}_{CHSH} | \psi_{01}^\perp \rangle = \langle \psi_{01}^\perp | 2I | \psi_{01}^\perp \rangle = 2.$$

Portanto $\langle \psi | \mathcal{B}_{CHSH} | \psi \rangle$ é a combinação convexa de um número maior que 2 com um número igual a 2 o que implica $\langle \psi | \mathcal{B}_{CHSH} | \psi \rangle > 2$. Explicitamente:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \mathcal{B}_{CHSH} | \psi \rangle &= 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sqrt{1 + 4 \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2}} + 2(1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\ &> 2 \text{ se } \lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2. \end{aligned}$$

□

3.2.3 Sistemas multipartites

Teorema 3.3 (Sistemas n -partites). *Todo estado puro emaranhado de n partes exibe correlações não-locais para algum conjunto de medições locais em cada parte.*

Antes de partir para a demonstração do teorema vamos a alguns resultados preliminares que serão importantes para sua demonstração.

Considere o conjunto $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ e seja $\{C, D\}$ uma partição de \mathcal{N} , i.e. $C \cap D = \emptyset$ e $C \cup D = \mathcal{N}$. Da mesma forma seja $\{E, F\}$ uma outra partição de \mathcal{N} diferente de $\{C, D\}$.

Proposição 3.1. *Seja $|\psi\rangle$ um estado puro de um sistema de n partes. Se $|\psi\rangle = |\psi_C\rangle \otimes |\psi_D\rangle$ e $|\psi\rangle = |\psi_E\rangle \otimes |\psi_F\rangle$, então*

$$|\psi\rangle = |\psi_{C \cap E}\rangle \otimes |\psi_{C \cap F}\rangle \otimes |\psi_{D \cap E}\rangle \otimes |\psi_{D \cap F}\rangle,$$

onde $|\psi_X\rangle$ representa um estado puro entre as partes que compõem o conjunto X .

Demonstração. Seja $|\psi\rangle$ um estado puro tal que:

$$|\psi\rangle = |\psi_C\rangle \otimes |\psi_D\rangle, \quad (3.1a)$$

$$|\psi\rangle = |\psi_E\rangle \otimes |\psi_F\rangle. \quad (3.1b)$$

Vamos olhar para o estado reduzido das partes que compõem o conjunto C . Por (3.1a) temos que

$$\begin{aligned} \rho_C &= \text{tr}_D(|\psi_C\rangle\langle\psi_C| \otimes |\psi_D\rangle\langle\psi_D|) \\ &= |\psi_C\rangle\langle\psi_C| \end{aligned}$$

é um estado puro. Agora, por (3.1b) temos

$$\begin{aligned} \rho_C &= \text{tr}_D(|\psi_E\rangle\langle\psi_E| \otimes |\psi_F\rangle\langle\psi_F|) \\ &= \text{tr}_{D \cap E}(|\psi_E\rangle\langle\psi_E|) \otimes \text{tr}_{D \cap F}(|\psi_F\rangle\langle\psi_F|) \\ &= \rho_{C \cap E} \otimes \rho_{C \cap F}. \end{aligned}$$

Uma vez que $\rho_{C \cap E} \otimes \rho_{C \cap F} = |\psi_C\rangle\langle\psi_C|$, afirmamos que $\rho_{C \cap E}$ e $\rho_{C \cap F}$ são estados puros. De fato, escrevendo $\rho_{C \cap E}$ e $\rho_{C \cap F}$ em sua decomposição espectral temos

$$\begin{aligned}\rho_{C \cap E} &= \sum_i \lambda_i |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|, \\ \rho_{C \cap F} &= \sum_j \mu_j |\mu_j\rangle\langle\mu_j|,\end{aligned}$$

e portanto

$$\rho_{C \cap E} \otimes \rho_{C \cap F} = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j |\lambda_i \mu_j\rangle\langle\lambda_i \mu_j|$$

é um estado puro se e somente se $\lambda_i \neq 0$ para um único valor de i e $\mu_j \neq 0$ para um único valor de j , o que implica que $\rho_{C \cap E}$ e $\rho_{C \cap F}$ são estados puros. Portanto temos que

$$|\psi_C\rangle = |\psi_{C \cap E}\rangle \otimes |\psi_{C \cap F}\rangle.$$

Da mesma forma obtemos

$$|\psi_D\rangle = |\psi_{D \cap E}\rangle \otimes |\psi_{D \cap F}\rangle.$$

E assim

$$|\psi\rangle = |\psi_{C \cap E}\rangle \otimes |\psi_{C \cap F}\rangle \otimes |\psi_{D \cap E}\rangle \otimes |\psi_{D \cap F}\rangle.$$

□

A proposição mostra que se existem duas partições distintas em que $|\psi\rangle$ é escrito como um produto de estados puros, então $|\psi\rangle$ também é um produto de estados puros se tomamos o menor refinamento comum dessas partições.

Vamos agora enunciar um resultado que é a chave para a demonstração do Teorema 3.3.

Lema 3.1. *Para todo estado emaranhado de n partes $|\psi\rangle$, existe uma projeção em um estado produto de $(n-2)$ partes do sistema, que deixa as duas partes restantes em um estado emaranhado.*

Demonstração. Vamos fazer a demonstração por contradição.

Suponha falsa a conclusão do lema, i.e., para quaisquer $(n-2)$ partes, toda projeção em um produto de estados desses sistemas deixa os dois sistemas restantes em um estado produto.

Seja $\{|e^i\rangle_j\}$ uma base no espaço do j -ésimo sistema. Considere então a projeção:

$$\left(\langle e^{i_3}|_3 \langle e^{i_4}|_4 \dots \langle e^{i_n}|_n\right) |\psi\rangle = |\phi\rangle_1 |\varphi\rangle_2 .$$

Por hipótese o estado dos sistemas 1-2 é um estado produto para toda escolha de i_3, i_4, \dots, i_n , que, em geral, depende da projeção escolhida:

$$\begin{aligned} |\phi\rangle_1 &= |\phi(i_3, i_4, \dots, i_n)\rangle_1 , \\ |\varphi\rangle_2 &= |\varphi(i_3, i_4, \dots, i_n)\rangle_2 . \end{aligned}$$

Agora suponha que escolhemos um vetor diferente para a projeção no sistema 3, $|e^{i'_3}\rangle_3$. Então $|\phi\rangle_1$ ou $|\varphi\rangle_2$ devem permanecer inalterados a menos de uma fase global, pois, se ambos mudassem com i_3 , projetando o sistema 3 em uma combinação linear de $|e^{i_3}\rangle_3$ e $|e^{i'_3}\rangle_3$, produziríamos um estado emaranhado para os sistemas 1-2.

Repetindo o mesmo argumento para as projeções nas outras partes, concluimos que cada índice só pode aparecer em um dos estados, $|\phi\rangle_1$ ou $|\varphi\rangle_2$, mas não em ambos.

Portanto, renumerando os subespaços, podemos dizer que:

$$\begin{aligned} |\phi\rangle_1 &= |\phi(i_3, i_4, \dots, i_k)\rangle_1 , \\ |\varphi\rangle_2 &= |\varphi(i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_n)\rangle_2 . \end{aligned}$$

Dadas essas considerações podemos escrever o estado $|\psi\rangle$ da forma¹

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \left(\sum_{i_3, \dots, i_n} |e^{i_3}\rangle_3 \dots |e^{i_n}\rangle_n \langle e^{i_3}|_3 \dots \langle e^{i_n}|_n \right) |\psi\rangle \\ &= \sum_{i_3, \dots, i_n} |\phi(i_3, i_4, \dots, i_k)\rangle_1 |\varphi(i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_n)\rangle_2 |e^{i_3}\rangle_3 \dots |e^{i_n}\rangle_n \\ &= \left(\sum_{i_3, \dots, i_k} |\phi(i_3, i_4, \dots, i_k)\rangle_1 |e^{i_3}\rangle_3 \dots |e^{i_k}\rangle_k \right) \\ &\quad \otimes \left(\sum_{i_{k+1}, \dots, i_n} |\varphi(i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_n)\rangle_2 |e^{i_{k+1}}\rangle_{k+1} \dots |e^{i_n}\rangle_n \right) , \end{aligned}$$

e concluimos que existe uma bipartição do sistema em que $|\psi\rangle$ é um produto de estados puros, onde o sistema 1 se encontra em uma das partes e o sistema 2 na outra.

¹Note que apenas estamos multiplicando $|\psi\rangle$ pelo operador identidade nos subespaços $3, \dots, n$.

Fixando o sistema 1 e repetindo todo o argumento variando o segundo sistema, obteremos diferentes bipartições em que $|\psi\rangle$ é escrito como um produto de estados puros. E, para todo $j \in \{2, 3, \dots, n\}$, existe pelo menos uma bipartição em que o sistema 1 e o sistema j se encontram em partes distintas. Pela Proposição 3.1 existe uma partição refinada em que $|\psi\rangle$ é um produto de estados puros e o sistema 1 se encontra num estado puro fatorado dos demais.

Fixando os outros sistemas no lugar do sistema 1 concluiremos que, para cada sistema j , existe uma partição em que $|\psi\rangle$ é um produto de estados puros e o sistema j se encontra num estado puro fatorado dos demais. Novamente usando a Proposição 3.1 temos que $|\psi\rangle$ pode ser escrito na forma

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle ,$$

e portanto é um estado separável.

Assim, se $|\psi\rangle$ é um estado emaranhado, deve haver pelo menos uma projeção num estado produto de $(n - 2)$ partes tal que as duas partes restantes são deixados em um estado emaranhado. \square

Agora estamos prontos para provar o Teorema 3.3.

Demonstração do Teorema 3.3. Seja $|\psi\rangle$ um estado emaranhado de n partes. Pelo Lema 3.1, existe uma projeção em um produto de estados de $(n - 2)$ partes tal que as duas partes restantes se encontram num estado emaranhado.

Considere as distribuições de probabilidades conjuntas de medições nessas duas partes, dado que as $(n - 2)$ partes foram projetadas no produto de estados adequado. Pelo Teorema 3.2 é possível encontrar um conjunto de medições tal que suas estatísticas violam a desigualdade CHSH.

Pela Proposição 2.5, se a estatística de resultados de medições em 2 partes, condicionada a um resultado particular de medições nas outras $(n - 2)$ partes, exhibe correlações não-locais, então a estatística de resultados de medições nas n partes é não-local. \square

Portanto vimos que, para estados puros, emaranhamento é condição necessária e suficiente para existência de correlações não-locais em sistemas quânticos. Poderíamos ingenuamente pensar que este resultado vale também para estados mistos, uma vez que estes são apenas combinações convexas de estados puros, entretanto veremos que esse não é o caso.

3.3 Estados de Werner

Em 1989 [48] Reinhard F. Werner mostrou que existem estados emaranhados que não apresentam não-localidade em qualquer cenário, se apenas medições projetivas locais são realizadas no sistema. A demonstração se dá através da construção explícita de um modelo de variáveis ocultas local para uma classe de estados emaranhados. É nesse mesmo artigo que surge a definição precisa de estados separáveis e emaranhados.

Para que o problema fosse tratável, Werner considerou apenas estados altamente simétricos de sistemas bipartites, com $\mathcal{H}_A \cong \mathcal{H}_B \cong \mathbb{C}^d$. Os estados considerados, hoje conhecidos como estados de Werner, são aqueles que permanecem invariantes quando a mesma transformação unitária é aplicada localmente a ambos os sistemas:

$$W = (U \otimes U)W(U^\dagger \otimes U^\dagger) \quad \forall U \text{ unitária em } \mathbb{C}^d .$$

Pode-se mostrar² que todo operador que comuta com todas as unitárias da forma $(U \otimes U)$ é combinação linear dos operadores identidade I e operador de troca V definido por:

$$V(|\phi\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_B) = |\varphi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B ,$$

portanto W é da forma $\gamma I + \delta V$.

Para matrizes densidade temos ainda a restrição $\text{tr} W = 1$, assim o conjunto de estados $(U \otimes U)$ -invariantes é caracterizado por um único parâmetro. Podemos escolhê-lo como:

$$\omega \equiv \text{tr}(VW) .$$

Como $V^2 = I$ e $V^\dagger = V$, temos que o parâmetro ω , que representa o valor esperado desse operador no estado W , pode variar de $-1 \leq \omega \leq 1$.

Os estados de Werner são, portanto, da forma

$$W(\omega) = \frac{1}{d^3 - d} [(d - \omega)I + (d\omega - 1)V] \quad ; \quad -1 \leq \omega \leq 1 . \quad (3.2)$$

Proposição 3.2. *Um estado de Werner é separável $\Leftrightarrow \omega = \text{tr}(VW) \geq 0$.*

Usando o critério de Peres é fácil ver que W^{TA} possui autovalor negativo para $\omega < 0$, e portanto W é emaranhado para esses valores de ω . A demonstração de que, para todo $\omega \geq 0$, W é um estado separável pode ser

²Uma demonstração é encontrada no próprio artigo do Werner.

encontrada no artigo do Werner [48].

Werner construiu um modelo de variáveis ocultas local para quaisquer medições projetivas no estado (3.2) com parâmetro

$$\omega_W = -1 + \frac{d+1}{d^2}.$$

Note que $\omega_W < 0$ para $d \geq 2$, portanto $W(\omega_W)$ é um estado emaranhado.

Pela convexidade do conjunto das correlações locais, combinações convexas de correlações locais é local, portanto o modelo de Werner segue para todo $\omega \geq \omega_W$. Em [49], o modelo local de Werner para $d = 2$ foi estendido para o parâmetro $\omega \approx -0,49$.

Em 2002, Jonathan Barrett [50] estendeu as ideias de Werner construindo um modelo local para uma classe de estados emaranhados, incluindo quaisquer medições POVM. O modelo construído por Barrett foi para as correlações geradas pelo estado de Werner com parâmetro

$$\omega_B = \frac{1}{d} - \frac{(d-1)^{d-1}}{d^{d+1}}(3d-1),$$

que é negativo para $d \geq 2$.

A tabela a seguir mostra a comparação entre os parâmetros de Werner e de Barrett em função da dimensão. Vemos que a medida em que a dimensão dos sistemas aumenta, o parâmetro ω_W do modelo local de Werner vai se aproximando de -1 , e portanto vai cobrindo praticamente todos os estados emaranhados da classe de estados considerada, os $(U \otimes U)$ -invariantes. Já o parâmetro de Barrett vai ficando cada vez mais próximo dos estados separáveis com o aumento da dimensão.

	ω_W	ω_B
d=2	-0,250	-0,125
d=3	-0,556	-0,062
d=4	-0,688	-0,040
d=5	-0,760	-0,029
d=6	-0,806	-0,023
d=7	-0,837	-0,019

Barrett mostrou ainda, que a existência de um modelo de variáveis ocultas local para um estado quântico ρ implica a existência de um modelo de

variáveis ocultas local para todo estado $\tilde{\rho}$ obtido a partir de ρ por operações locais, i.e. para todo estado $\tilde{\rho}$ tal que

$$\tilde{\rho} = \sum_{i,j} M_i \otimes N_j \rho M_i^\dagger \otimes N_j^\dagger,$$

onde $\sum_i M_i^\dagger M_i = I$ e $\sum_j N_j^\dagger N_j = I$.

De fato, dada a existência de um modelo de variáveis ocultas local para as probabilidades conjuntas geradas por experimentos com o estado ρ , um modelo para $\tilde{\rho}$ pode ser construído da seguinte forma:

Defina

$$\tilde{p}_{a|A_x,\lambda} \equiv p_{a|A'_x,\lambda},$$

onde a medição A'_x é definida pelos elementos de POVM

$$\Pi_{A'_x}^a = \sum_i M_i^\dagger \Pi_{A_x}^a M_i.$$

Note que $\sum_a \Pi_{A'_x}^a = I$. Da mesma forma

$$\tilde{p}_{b|B_y,\lambda} \equiv p_{b|B'_y,\lambda},$$

onde a medição B'_y é definida pelos elementos de POVM

$$\Pi_{B'_y}^b = \sum_j N_j^\dagger \Pi_{B_y}^b N_j.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} q_{\lambda} \tilde{p}_{a|A_x,\lambda} \tilde{p}_{b|B_y,\lambda} d\lambda &= \text{tr} \left[\rho \left(\Pi_{A'_x}^a \otimes \Pi_{B'_y}^b \right) \right] \\ &= \sum_{i,j} \text{tr} \left[\rho \left(M_i^\dagger \Pi_{A_x}^a M_i \otimes N_j^\dagger \Pi_{B_y}^b N_j \right) \right] \\ &= \sum_{i,j} \text{tr} \left[(M_i \otimes N_j) \rho (M_i^\dagger \otimes N_j^\dagger) (\Pi_{A_x}^a \otimes \Pi_{B_y}^b) \right] \\ &= \text{tr} \left[\tilde{\rho} (\Pi_{A_x}^a \otimes \Pi_{B_y}^b) \right]. \end{aligned}$$

Dessa forma Barrett estendeu ainda mais a classe de estados que admite um modelo de variáveis ocultas local. Todos os estados que podem ser obtidos por operações locais a partir de um estado local é também local para quaisquer medições que sejam realizadas.

Uma outra parametrização dos estados de Werner

Uma outra maneira, comumente utilizada, de parametrizar os estados de Werner é:

$$W = \frac{2\alpha}{d(d-1)}\mathbf{A} + (1-\alpha)\frac{I}{d^2},$$

onde \mathbf{A} é o projetor no subespaço anti-simétrico. As duas parametrizações se relacionam por

$$\alpha = \frac{1-d\omega}{d+1}.$$

Os subespaços simétrico \mathbb{S} e anti-simétrico \mathbb{A} são auto-espaços do operador de troca V , com autovalores $+1$ e -1 respectivamente, e são gerados por vetores tais que $|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_{BA}$ para \mathbb{S} , e $|\psi\rangle_{AB} = -|\psi\rangle_{BA}$ para \mathbb{A} .

O projetor no subespaço anti-simétrico para dimensão $d \times d$ pode ser escrito na forma

$$\mathbf{A} = \sum_{i < j; i, j=0}^{d-1} |S_{ij}\rangle\langle S_{ij}|,$$

onde

$$|S_{ij}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|i\rangle_A |j\rangle_B - |j\rangle_A |i\rangle_B).$$

É interessante notar que para $d = 2$ o subespaço anti-simétrico é gerado por um único estado: o singlete, e nesse caso o estado de Werner é da forma

$$W_2 = \alpha |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + (1-\alpha)\frac{I}{4}.$$

Capítulo 4

Cenários mais gerais

Até aqui não-localidade quântica foi estudada no seguinte cenário: Alice e Bob (ou mais partes) compartilham uma cópia de um estado quântico ρ e cada um pode escolher uma entre um certo conjunto de medições a serem realizadas, cada medição com um conjunto de possíveis resultados (figura 4.1).

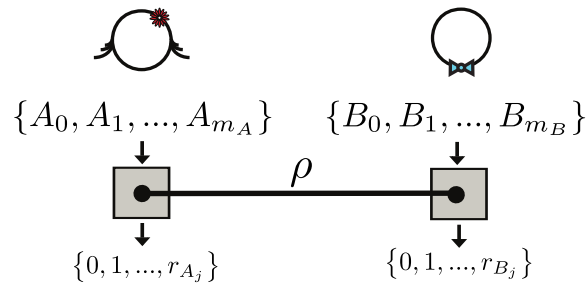


Figura 4.1: Cenário padrão no estudo de não-localidade quântica.

Neste capítulo veremos os cenários mais gerais que foram propostos para o estudo de não-localidade. Muitos resultados são bastante recentes e deixam várias perspectivas de continuidade.

4.1 Não-localidade escondida

4.1.1 Medições consecutivas

Em 1995 Sandu Popescu [51] propôs um novo cenário para o estudo de não-localidade. Ele considerou experimentos de correlação envolvendo a realização de medições consecutivas em cada parte.

Popescu considerou um sistema composto por duas partículas espacialmente separadas (uma com Alice e outra com Bob) no estado:

$$W = \frac{1}{d^2} \left(2 \sum_{i < j; i, j=1}^d |S_{ij}\rangle \langle S_{ij}| + \frac{1}{d} I \right) \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d), \quad (4.1)$$

Note que (4.1) é o estado de Werner com o parâmetro $\alpha = \frac{d-1}{d}$, que corresponde ao parâmetro para o qual Werner criou um modelo local para medições projetivas.

O procedimento consiste na realização de duas medições projetivas consecutivas em cada uma das partículas:

• **1ª medição:**

Alice aplica a medição correspondente ao projetor¹

$$P = |1\rangle \langle 1|_A + |2\rangle \langle 2|_A,$$

e Bob aplica

$$Q = |1\rangle \langle 1|_B + |2\rangle \langle 2|_B.$$

Após realizar a medição e anotar os resultados Alice e Bob escolhem entre medir os observáveis \mathbf{A}_0 ou \mathbf{A}_1 e \mathbf{B}_0 ou \mathbf{B}_1 , que serão usados para testar a validade da desigualdade CHSH.

• **2ª medição:** Os observáveis que Alice e Bob podem escolher medir são da forma

$$\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1 \left\{ \begin{array}{l} * \text{ Possuem 3 autovalores distintos: } -1, 0 \text{ e } 1; \\ * 1 \text{ e } -1 \text{ são autovalores não-degenerados com autovetores} \\ \text{pertencentes ao subespaço gerado por } \{|1\rangle_A, |2\rangle_A\} \text{ para } \mathbf{A}_x \\ \text{e } \{|1\rangle_B, |2\rangle_B\} \text{ para } \mathbf{B}_y; \\ * 0 \text{ corresponde ao restante do espaço, } \{|3\rangle_A, \dots, |d\rangle_A\} \text{ e} \\ \{|3\rangle_B, \dots, |d\rangle_B\}; \\ * \text{ A parte não degenerada é escolhida de forma a gerar} \\ \text{máxima violação da desigualdade CHSH para o singlete} \\ \langle S_{12} | \mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1 | S_{12} \rangle = 2\sqrt{2}. \end{array} \right.$$

¹Aplicar a medição correspondente ao projetor P é fazer uma medição com duas possíveis respostas, cujos operados de medida são $\{P, I - P\}$.

Vamos agora analisar o que ocorre se começamos com um ensemble de sistemas no estado W e o submetemos às duas medições descritas. De acordo com os resultados obtidos na primeira medição o ensemble original se divide em 4 subensembles:

$$\{P = 0, Q = 0\}; \{P = 0, Q = 1\}; \{P = 1, Q = 0\}; \{P = 1, Q = 1\}.$$

O ponto chave no argumento de Popescu é que se o ensemble original é classicamente correlacionado então cada um desses subensembles também deve apresentar apenas correlações locais.

Vamos então considerar o subensemble $\{P = 1, Q = 1\}$. Este subensemble é descrito pelo estado

$$\begin{aligned} W' &= \frac{1}{N}(P \otimes Q)W(P \otimes Q) \\ &= \frac{2d}{2d+4} \left(\frac{1}{2d} I_{(2 \times 2)} + |S_{12}\rangle\langle S_{12}| \right), \end{aligned}$$

onde N é uma constante de normalização e $I_{(2 \times 2)}$ atua como identidade no subespaço $\{|1\rangle_A, |2\rangle_A\} \otimes \{|1\rangle_B, |2\rangle_B\}$ e como o operador nulo no restante do espaço. Para este estado temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}_{CHSH} \rangle &= \text{tr} [W'(\mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1)] \\ &= \frac{2d}{2d+4} 2\sqrt{2} \\ &> 2 \text{ para } d \geq 5. \end{aligned}$$

Portanto, embora exista um modelo de variáveis ocultas local que simula todas as correlações que surgem quando apenas uma medição projetiva é realizada em cada parte, tal modelo não é capaz de descrever as correlações que surgem quando duas medições projetivas consecutivas são realizadas.

Para melhor entender esse resultado vamos comparar o caso em que \mathbf{A}_0 ou \mathbf{A}_1 e \mathbf{B}_0 ou \mathbf{B}_1 são medidos diretamente no estado original W , com o caso em que P e Q são medidos primeiro.

De acordo com a mecânica quântica, as correlações entre os resultados das medições $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1$ são as mesmas em ambos os casos, pois esses operadores comutam com P e Q . Entretanto, um modelo de variáveis ocultas local pode simular essas correlações no primeiro caso mas não no segundo. Isso porque para um modelo de variáveis ocultas as duas situações são drasticamente diferentes.

Suponha que \mathbf{A}_0 ou \mathbf{A}_1 é medido na partícula de Alice diretamente no estado original. A mecânica quântica impõe que uma medida de \mathbf{A}_0 dê 0 com

a mesma probabilidade que uma medida de \mathbf{A}_1 (uma vez que os subespaços correspondentes a esse autovalor são idênticos). Num modelo de variáveis ocultas isso quer dizer que

$$\int_{\Lambda} q_{\lambda} p_{0|A_0, \lambda} d\lambda = \int_{\Lambda} q_{\lambda} p_{0|A_1, \lambda} d\lambda ,$$

mas

$$\int_{\Lambda} q_{\lambda} p_{0|A_0, \lambda} d\lambda = \int_{\Lambda} q_{\lambda} p_{0|A_1, \lambda} d\lambda \not\Rightarrow p_{0|A_0, \lambda} = p_{0|A_1, \lambda} .$$

O mesmo vale para a soma das probabilidades de obter 1 e -1 :

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} q_{\lambda} [p_{1|A_0, \lambda} + p_{-1|A_0, \lambda}] d\lambda &= \int_{\Lambda} q_{\lambda} [p_{1|A_1, \lambda} + p_{-1|A_1, \lambda}] d\lambda \\ &\Downarrow \\ p_{1|A_0, \lambda} + p_{-1|A_0, \lambda} &= p_{1|A_1, \lambda} + p_{-1|A_1, \lambda} . \end{aligned}$$

O significado dessas relações é que a partícula de Alice, em alguns pares do ensemble original, pode ter uma variável oculta de acordo com a qual, se ela é sujeita a uma medição de \mathbf{A}_0 dará como resultado $+1$ ou -1 , mas se ela é sujeita à medição de \mathbf{A}_1 dará 0 . Um comportamento similar pode caracterizar a partícula de Bob em alguns pares. A liberdade para escolher entre $+1$, -1 e 0 , dependendo da medição à qual a partícula é sujeita, é vital para o sucesso do modelo de variáveis ocultas de Werner. Por outro lado, se a partícula é submetida primeiro a uma medida de P , ela se “compromete” a fornecer, numa medida subsequente tanto de \mathbf{A}_0 quanto de \mathbf{A}_1 , ou ± 1 ou 0 , dependendo do valor obtido para P , antes mesmo de saber qual das medições será realizada. Nesse ponto nenhum modelo de variáveis ocultas local é capaz de simular o comportamento da mecânica quântica.

Żukowski e os Horodeccy [43] formalizaram o resultado apresentado por Popescu e analisaram a estrutura genérica de modelos locais de variáveis ocultas para experimentos envolvendo sequências de medições:

Um modelo de variáveis ocultas local para as probabilidades conjuntas de uma experimento deve ter a forma:

$$p_{a,b|A,B} = \int_{\Lambda} q_{\lambda} p_{a|A, \lambda} p_{b|B, \lambda} d\lambda , \quad (4.2)$$

onde λ é uma variável oculta, e q_{λ} é a distribuição de probabilidades dessa variável que é independente das medições A e B .

Usualmente, para analisar as estatísticas produzidas pela mecânica quântica A e B são tratados como medições únicas. Entretanto, a mecânica

quântica nos permite prever a estatística de resultados de experimentos mais complicados. Vamos considerar A e B como uma sequência de medições:

$$A = (A^1, \dots, A^k) \quad \text{e} \quad B = (B^1, \dots, B^k),$$

então (4.2) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} P(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k | A^1, \dots, A^k, B^1, \dots, B^k) = \\ \int_{\Lambda} q_{\lambda} P(a_1, \dots, a_k | A^1, \dots, A^k, \lambda) P(b_1, \dots, b_k | B^1, \dots, B^k, \lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Agora podemos nos perguntar se a estatísticas dos resultados prevista pela mecânica quântica para experimentos consecutivos pode ser descrita por um modelo local.

Proposição 4.1. *Em um experimento com medições consecutivas, em que as medições são escolhidas independentemente dos resultados anteriores, se um subensemble apresenta correlações não locais então o ensemble total não admite um modelo de variáveis ocultas local da forma (4.3).*

Demonstração. Por simplicidade vamos nos restringir a um experimento composto de 2 medições consecutivas em cada parte. O caso geral segue diretamente.

Considerando duas medições consecutivas, suponha que exista um modelo de variáveis ocultas local que descreve os resultados do experimento:

$$P(a_1, a_2, b_1, b_2 | A^1, A^2, B^1, B^2) = \int_{\Lambda} q_{\lambda} P(a_1, a_2 | A^1, A^2, \lambda) P(b_1, b_2 | B^1, B^2, \lambda) d\lambda. \quad (4.4)$$

A probabilidade de obter a_2 e b_2 na medição de A^2 e B^2 dado que a medição de A^1 e B^1 produziu os resultados a_1 e b_1 é

$$P(a_2, b_2 | a_1, b_1, A^1, A^2, B^1, B^2) = \frac{P(a_1, a_2, b_1, b_2 | A^1, A^2, B^1, B^2)}{\sum_{a_2, b_2} P(a_1, a_2, b_1, b_2 | A^1, A^2, B^1, B^2)}. \quad (4.5)$$

Substituindo (4.4) em (4.5) temos

$$\begin{aligned} P(a_2, b_2 | a_1, b_1, A^1, A^2, B^1, B^2) &= \int_{\Lambda} \frac{P(a_1, a_2 | A^1, A^2, \lambda) P(b_1, b_2 | B^1, B^2, \lambda)}{P(a_1, b_1 | A^1, A^2, B^1, B^2)} q_{\lambda} d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} \frac{P(a_2 | a_1, A^1, A^2, \lambda) P(a_1 | A^1, A^2, \lambda) P(b_2 | b_1, B^1, B^2, \lambda) P(b_1 | B^1, B^2, \lambda)}{P(a_1, b_1 | A^1, A^2, B^1, B^2)} q_{\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

onde

$$P(a_1, b_1 | A^1, A^2, B^1, B^2) = \sum_{a_2, b_2} P(a_1, a_2, b_1, b_2 | A^1, A^2, B^1, B^2)$$

e similarmente para $p_{(a_1|A^1, A^2, \lambda)}$ e $p_{(b_1|B^1, B^2, \lambda)}$.

Vamos agora impor a condição que a escolha do observável A^2 é feita somente após a medição de A^1 ser completada e seu resultado determinado, e analogamente para B^1 e B^2 . A hipótese de causalidade local implica que as probabilidades $p_{(a_1|A^1, A^2, \lambda)}$, $p_{(b_1|B^1, B^2, \lambda)}$ e $p_{(a_1, b_1|A^1, A^2, B^1, B^2)}$ não podem depender de A^2 e B^2 .

Dada uma escolha de medições A^1 e B^1 , e certas respostas a_1 e b_1 , vamos denotar esse conjunto de condições por $X \equiv A^1, B^1, a_1, b_1$. Então a distribuição de probabilidades condicional pode ser escrita como:

$$p_{(a_2, b_2|A^2, B^2, X)} = \int_{\Lambda} q_{X, \lambda} p_{(a_2|A^2, X, \lambda)} p_{(b_2|B^2, X, \lambda)} d\lambda, \quad (4.6)$$

onde

$$q_{X, \lambda} = \frac{p_{(a_1|A^1, \lambda)} p_{(b_1|B^1, \lambda)} q_{\lambda}}{p_{(a_1, b_1|A^1, B^1)}}.$$

Note que $q_{X, \lambda}$ é uma distribuição de probabilidades independente de A^2 e B^2 , e portanto a expressão para as probabilidades condicionais adquire a forma padrão de modelos de variáveis ocultas locais, (4.2). Isso implica que as probabilidades condicionais também devem satisfazer as desigualdades de Bell.

Portanto se após o processo de pós-seleção um dado subensemble viola uma desigualdade de Bell, temos que o ensemble total não pode ser descrito por um modelo de variáveis ocultas local para medições consecutivas. \square

As correlações não-locais exibidas nesse cenário são chamadas **não-localidade escondida** por ser necessário um processo de pós-seleção dos resultados para que as correlações não-locais sejam reveladas.

4.1.2 Testes coletivos

O procedimento de Popescu não leva a violação de CHSH do estado de Werner se dimensões menores que 5×5 são consideradas. Entretanto, Asher Peres [52] mostrou que para dimensões menores os estados de Werner também podem apresentar não-localidade, basta que sejam tomadas várias cópias do estado e realizadas operações conjuntas sobre elas.

Considere o estado de Werner:

$$W_2 = \alpha |\psi^-\rangle\langle\psi^-| + (1 - \alpha) \frac{I}{4} \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2).$$

Suponha que Alice e Bob compartilham n pares do estado W_2 , i.e., eles compartilham o estado

$$W_2^{\otimes n} = W_2 \otimes W_2 \otimes \dots \otimes W_2 .$$

Tendo em mãos esse sistema Alice e Bob podem testar suas partículas coletivamente.

Peres mostrou que mesmo quando a matriz densidade ρ obedece a desigualdade CHSH (ainda que considerando a possibilidade de medições consecutivas) é possível que $\rho \otimes \rho \otimes \dots \otimes \rho$ viole essa desigualdade². O procedimento consiste de Alice e Bob realizarem operações conjuntas nas partículas que se encontram com cada parte de modo a obter estados maximamente emaranhados (figura 4.2).

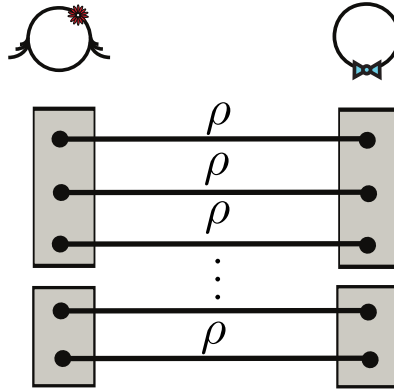


Figura 4.2: Cenário de testes coletivos. Alice e Bob podem realizar operações conjuntas em suas partículas.

O protocolo de Peres consiste nas seguintes etapas:

- 1º) Alice e Bob sujeitam suas n partículas a transformações unitárias locais adequadamente escolhidas, U para Alice e V para Bob.
- 2º) Em seguida, cada parte aplica o teste $\{|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|\}$ nas partículas $2, 3, \dots, n$.

²Um resultado muito interessante nessa linha, devido a Lluís Masanes e colaboradores [53], mostra que, para todo estado emaranhado bipartido σ , existe um estado emaranhado ρ que não viola CHSH (considerando a possibilidade de medições consecutivas e muitas cópias), tal que $\rho \otimes \sigma$ viola CHSH. Infelizmente, o correr do tempo nos impediu de explorar esse trabalho nesta dissertação.

- 3º)** Após completar as medições nas partículas $2, 3, \dots, n$, Alice e Bob partem para testar as partículas 1, escolhendo uma entre duas possíveis medições a serem realizadas, A_0 ou A_1 e B_0 ou B_1 .

O problema então se resume a encontrar as transformações U e V ótimas tais que, para um resultado particular das medições nas partículas $2, 3, \dots, n$ (por exemplo, se em todas as medições for obtida a resposta 0), os resultados nas partículas 1 desse subensemble violem a desigualdade CHSH para alguma escolha de medições A_0, A_1, B_0 e B_1 .

Note que esse é um procedimento que envolve pós-seleção de resultados, portanto, assim como no resultado de Popescu, se trata de não-localidade escondida.

Peres resolveu o problema numericamente, considerando algumas simplificações nas transformações U e V , para n até 4. O resultado obtido foi que com o aumento de n a desigualdade CHSH era violada para valores de α cada vez menores.

Para $n = 5$ a solução ótima não foi possível de encontrar devido à complexidade computacional requerida. Peres considerou então transformações particulares, U e V , e para $\alpha = 1/2$ (parâmetro para o qual Werner criou o modelo local), Peres obteve $\beta_{CHSH} = 2,0087$.

Portanto, mesmo se um modelo de variáveis ocultas local prevê corretamente as estatísticas de pares de partículas quando estas são testadas separadamente por dois observadores distantes, um comportamento não-local pode surgir quando vários pares são testados conjuntamente.

4.1.3 Conjectura de Peres

Os protocolos para exibição de não-localidade escondida apresentados acima estão intimamente ligados à destilação de emaranhamento. O primeiro no caso em que emaranhamento pode ser destilado de um estado, com certa probabilidade, utilizando uma única cópia, e o segundo para o caso em que são necessárias várias cópias para destilação. Daí segue que qualquer estado destilável pode violar uma desigualdade de Bell, ainda que seja necessário considerar várias cópias e pós-seleção.

Essas dentre outras questões levaram Peres a conjecturar [54] que os estados com emaranhamento preso (os estados emaranhados PPT, por exemplo) não violariam nenhuma desigualdade de Bell, mesmo se considerados esses cenários mais gerais.

A conjectura de Peres foi inicialmente formulada no caso bipartite, embora Peres tenha mencionado uma extensão multipartite. Em seguida, duas diferentes extensões da conjectura de Peres para o caso multipartite vêm

sendo consideradas, que são baseadas em diferentes definições de destilação de emaranhamento multipartite (mais detalhes e referências ver [55]).

A primeira extensão usa uma definição mais forte de destilabilidade multipartite, na qual as partes não podem se agrupar afim de fazer medições conjuntas dentro do grupo para destilar emaranhamento. Essa versão da conjectura de Peres já havia sido refutada por W. Dür [56].

A segunda extensão usa uma definição mais fraca de destilabilidade multipartite, na qual as partes podem se agrupar para realizar medições no protocolo de destilação. Nesse caso a classe de estados com emaranhamento preso é muito mais restrita. Ainda assim, recentemente, Vértesi e Brunner [55] exibiram uma família de estados emaranhados de 3 qubits que é separável (e portanto PPT) em qualquer bipartição, mas que para um estado específico dessa família (encontrado computacionalmente) uma desigualdade de Bell tripartite é violada.

Assim a conjectura de Peres se mostrou falsa para estados multipartites. Entretanto para o caso bipartite ela ainda continua em aberto e merece ser investigada. A veracidade da conjectura de Peres para o caso bipartite relacionaria não-localidade à existência de emaranhamento disponível para uso.

4.2 Ativação de não-localidade

4.2.1 Muitas cópias

Em vista dos resultados apresentados na seção anterior podemos nos perguntar se não seria possível obter não-localidade a partir de uma medição direta em várias cópias de um estado quântico, sem recorrer a nenhum tipo de pós-seleção.

Em [57], Miguel Navascués e Tamás Vértesi se concentram nesses cenários e na violação da desigualdade CHSH em particular. Eles mostram a existência de estados ρ_1 e ρ_2 tais que $\rho_1^{\otimes N}$ e $\rho_2^{\otimes N}$ não violam a desigualdade CHSH para qualquer N , mas com $\rho_1 \otimes \rho_2$ é possível obter violação. E usando esses resultados eles constroem um estado $\tilde{\rho}$ que não viola CHSH, mas tomando apenas 2 cópias, $\tilde{\rho}^{\otimes 2}$, é possível obter violação. A técnica utilizada pelos autores é bastante geral e fornece uma maneira sistemática de construir exemplos de ativação de não-localidade.

Vamos denotar por S_B^2 o conjunto dos estados quânticos que são 2-extensíveis em B , e analogamente S_A^2 o conjunto dos estados 2-extensíveis em A (ver definição 1.5). Se um estado bipartido $\rho_1 \in S_B^2$ então $\rho_1^{\otimes N}$ também é 2-extensível em B . E como vimos na Proposição 2.6, estados 2-extensíveis

admitem um modelo de variáveis ocultas local se Bob pode escolher entre 2 medições e Alice entre qualquer número de medições. Assim temos que $\rho_1^{\otimes N}$ não viola a desigualdade CHSH para qualquer N . Da mesma forma temos que, se $\rho_2 \in S_A^2$ então $\rho_2^{\otimes N}$ também não viola CHSH para qualquer N .

A ideia é que, mesmo que $\rho_1 \in S_B^2$ e $\rho_2 \in S_A^2$, $\rho_1 \otimes \rho_2$ não necessariamente admite uma 2-extensão e portanto pode violar CHSH.

Eles definem o operador CHSH que atua em $\rho_1 \otimes \rho_2$:

$$\mathcal{B}_{CHSH} = M_{AA'}^0 \otimes N_{BB'}^0 + M_{AA'}^0 \otimes N_{BB'}^1 + M_{AA'}^1 \otimes N_{BB'}^0 - M_{AA'}^1 \otimes N_{BB'}^1,$$

e buscam computacionalmente o conjunto de estados e medições que maximiza $\langle \mathcal{B}_{CHSH} \rangle$. No caso de obter violação da desigualdade CHSH diremos que os estados apresentam ativação de não-localidade CHSH.

Os autores realizaram o processo de otimização para estados de dimensão 2×2 , 3×3 , 4×4 e 5×5 , obtendo máxima violação de 2,040167 para dois pares de qutrits³. Os estados e as medições podem ser encontrados em [59].

Utilizando essa construção os autores mostram que dados dois estados, $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$, que apresentam ativação de não-localidade CHSH, com $\rho_1 \otimes \rho_2$ violando CHSH de $2 + \Delta$, é possível construir um estado $\tilde{\rho} \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^{4d} \otimes \mathbb{C}^{4d})$ tal que $\tilde{\rho}$ não viola CHSH, mas $\tilde{\rho}^{\otimes 2}$ apresenta uma violação de $2 + \Delta/4$.

Usando a mesma técnica, eles exibem também um estado que apresenta ativação da desigualdade CGLMP para 3 respostas (uma desigualdade de Bell para o cenários (2,2,3)), e deixam em perspectiva possíveis adaptações de suas técnicas para ativação de outras desigualdades de Bell.

4.2.2 Redes quânticas

Outro esquema para investigar ativação de não-localidade foi proposto recentemente por Daniel Cavalcanti e colaboradores [60, 61]. Eles consideraram um cenário ainda mais geral para o estudo de não-localidade: **as redes quânticas**. Nesse cenário L cópias de um estado quântico n -partite ρ são distribuídas entre N partes, espacialmente separadas, de acordo com uma certa configuração, como ilustrado na figura 4.3. Se correlações não-locais são observadas nessa rede dizemos que ρ é um **recurso não-local**.

A grande vantagem do cenário de redes quânticas é que ele abre a possibilidade de considerar protocolos no qual um subconjunto das partes projeta as partes restantes num estado quântico não-local. E, pela Proposição 2.5, se existem medições em $(N - k)$ partes tais que, para um resultado particular,

³Com esse resultado os autores resolveram o problema n° 21 da Lista de Problemas em aberto na Informação Quântica, [58].

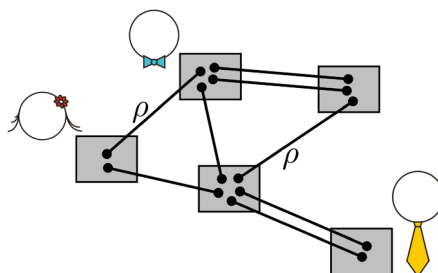


Figura 4.3: Cenário de redes quânticas. L cópias de um estado quântico n -partite ρ são distribuídas entre N partes.

as k partes restantes são deixadas em um estado não-local, então o estado inicial é necessariamente não-local.

Utilizando esse cenário, os autores exibiram vários exemplos de ativação de não-localidade, i.e., estados quânticos que são locais se consideramos uma única cópia e um certo conjunto de medições, mas que se tornam não locais se distribuídos numa rede, considerando o mesmo conjunto de medições.

Vamos discutir alguns dos resultados obtidos nesses trabalhos.

Considere o estado isotrópico em um sistema composto com espaço de Hilbert $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

$$\rho_I = p|\Phi_2\rangle\langle\Phi_2| + (1-p)\frac{I}{4},$$

i.e., uma mistura do estado maximamente emaranhado e do estado maximamente misto, pesada pelo parâmetro p .

Pelo resultado de Barrett [50] para extensão de modelos locais, este estado possui modelo local para os mesmos valores de p que o estado de Werner W_2 , pois é obtido deste por uma transformação local:

$$\rho_I = I \otimes \sigma_y \left(p|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + (1-p)\frac{I}{4} \right) I \otimes \sigma_y.$$

Assim, de acordo com alguns resultados vistos anteriormente e outros resultados encontrados da literatura, ρ_I tem as seguintes propriedades locais:

- é separável para $p < \frac{1}{3}$ [48];
- possui modelo local para medições projetivas para $p < 0,66$ [49];
- possui modelo local para qualquer tipo de medição para $p < 0,42$ [50];

- viola uma desigualdade de Bell para $p > 0,706$ [62].

Agora considere ρ_I compartilhado por $N + 1$ partes em uma rede com configuração estrela, como ilustrado na figura 4.4.

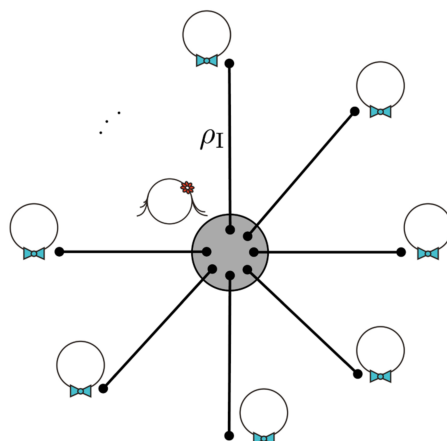


Figura 4.4: Alice compartilha N cópias no estado quântico ρ_I com diferentes observadores.

Um resultado obtido por Sen De e colaboradores [63] mostra que, se Alice projeta todos os seus qubits no estado $|GHZ\rangle = (|0\dots 0\rangle + |1\dots 1\rangle)/\sqrt{2}$, o estado restante das N partes viola uma desigualdade de Bell para

$$p > p_N = \frac{2}{\pi} 2^{1/N} .$$

Portanto, se considerarmos que Alice faz a medição

$$A_0 = \left\{ \Pi_{A_0}^0 = |GHZ\rangle\langle GHZ|_A, \Pi_{A_0}^1 = (I - |GHZ\rangle\langle GHZ|_A) \right\} ,$$

obtido o resultado 0, as partes restantes são deixadas em um estado não-local para todo $p > p_N$. De acordo com a Proposição 2.5, o estado da rede é não-local, e portanto ρ_I é um recurso não-local para esses valores de p .

Para $N = 7$ o parâmetro p já ultrapassa o valor conhecido para o qual há violação com 1 cópia, $p_7 < 0,706$. Para $N = 21$ temos $p_{21} < 0,66$, que adentra a região para a qual existe um modelo de variáveis ocultas local para medições projetivas. No limite de muitas partes $p_\infty \rightarrow 0,64$. Essas propriedades são resumidas na figura 4.5.

Portanto temos uma ativação da não-localidade de ρ_I : um estado local, se considerada uma cópia e medições projetivas, se torna não local em uma

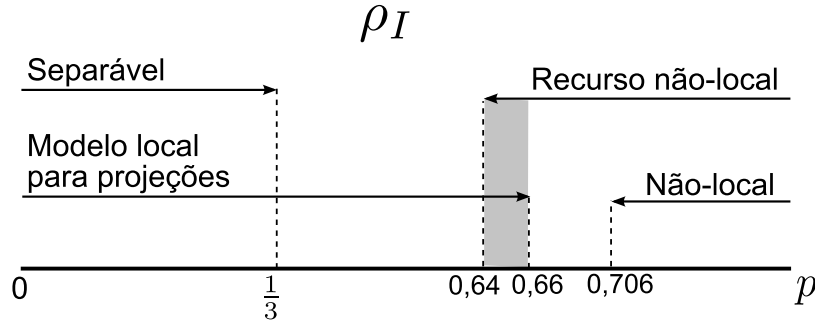


Figura 4.5: Propriedades não-locais do estado isotrópico em função do parâmetro p .

rede de configuração estrela com medições projetivas. E já com $N = 7$, a região de não-localidade conhecida para uma cópia é ultrapassada. Portanto, se pensarmos em não-localidade como um recurso para realização de tarefas, um uso muito melhor da não-localidade de um estado quântico é adquirido simplesmente distribuindo várias cópias desse estado numa rede.

Outro exemplo de ativação [61] é obtido com um estado k -extensível para um sistema com espaço de Hilbert $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$:

$$\rho_{AB}^k = \frac{1}{k} |\Phi\rangle\langle\Phi|_{AB} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{I_A}{2} \otimes |2\rangle\langle 2|_B,$$

onde $|\Phi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ é o estado maximamente emaranhado em dimensão 2.

Como vimos anteriormente, na Proposição 2.6, esse estado possui modelo local se Bob pode escolher uma entre k medições para realizar, com qualquer número de respostas, e Alice pode escolher entre um número arbitrário de medições.

Vamos então considerar duas cópias desse estado compartilhadas numa rede de 3 partes. Bob compartilha uma cópia do estado ρ^k com Alice e outra com Charlie (figura 4.6), ficando com a parte de qutrits de ambos os estados. Assim o estado da rede é

$$\rho_{AB}^k \otimes \rho_{CB'}^k.$$

Bob pode então aplicar a medição

$$B_0 = \left\{ \Pi_{B_0}^0 = |\Phi\rangle\langle\Phi|_{BB'}, \Pi_{B_0}^1 = I_{BB'} - |\Phi\rangle\langle\Phi|_{BB'} \right\},$$

e uma vez obtido o resultado 0, Alice e Charlie ficam no estado maximamente emaranhado, $|\Phi\rangle_{AC}$, que viola uma desigualdade de Bell se cada parte pode escolher entre 2 possíveis medições. Pela Proposição 2.5, o estado da rede é não-local e ρ^k é um recurso não local.

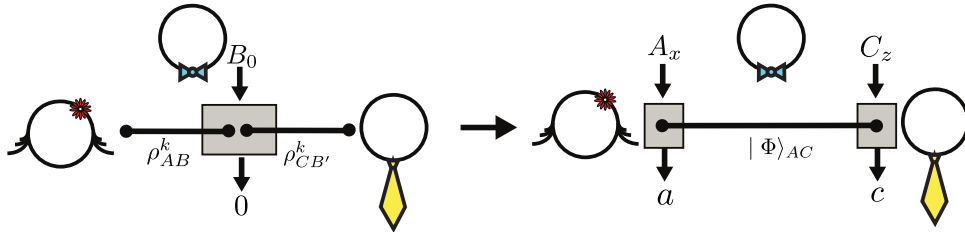


Figura 4.6: Bob compartilha duas cópias do estado k -extensível ρ^k , uma com Alice e outra com Charlie.

Note que esse resultado vale para qualquer k . Isso significa que existem estados que só geram correlações locais em cenários que envolvem um número arbitrário (finito) de medições em uma parte e um número qualquer de medições na outra parte, mas duas cópias de tal estado numa rede é capaz de produzir correlações não-locais com apenas duas medições a serem escolhidas nas partes A e C e uma única medição na parte B .

Nesta seção vimos diferentes exemplos onde a não-localidade de estados quânticos é ativada em cenários particulares. Ainda não foi encontrado nenhum estado local para qualquer cenário que apresente ativação de não-localidade. A busca desse exemplo é de grande importância para a melhor compreensão da relação entre emaranhamento e não-localidade, e para determinar se não-localidade é realmente um recurso não-aditivo. De qualquer forma, esses novos cenários mostram que a não-localidade de estados quânticos pode ser revelada muito mais facilmente se saímos da restrição de uma única cópia.

Considerações finais

Estudamos a estrutura matemática dos conjuntos formados pela estatística de resultados de um experimento de correlação. Vimos como as hipóteses clássicas de realismo local impõem restrições a esses conjuntos, e que as correlações geradas pela mecânica quântica são capazes de violar tais restrições.

Partimos então para o estudo da não-localidade quântica. Para estados puros, vimos que emaranhamento é condição necessária e suficiente para a existências de correlações não-locais. Já para estados mistos, existem estados emaranhados que só exibem correlações locais no cenário padrão de não-localidade.

Apresentamos os cenários mais gerais, recentemente propostos, para o estudo de não-localidade. Vimos que tais cenários vêm estreitando ainda mais a relação entre emaranhamento e não-localidade. Explorando protocolos de destilação de emaranhamento é possível exibir não-localidade em todo estado destilável. E considerando medições conjuntas em várias cópias, ou ainda, várias cópias distribuídas em uma rede quântica, é possível obter ativação de não-localidade para um dado cenário.

Esses novos cenários criam várias perspectivas de estudo, há ainda várias possibilidades a serem consideradas: diferentes configurações de redes e protocolos de operações locais podem ser explorados. Uma investigação de quais os tipos de estados emaranhados podem apresentar não-localidade nesses novos cenários, pode levar a um melhor entendimento da não-localidade quântica. Fica então a expectativa de poder dar contribuições nessa busca.

Apêndice A

Apêndice

Na demonstração da Proposição 2.3, assumimos $\dim \mathcal{H}_{A_1} = \dim \mathcal{H}_{A_2}$ e $\dim \mathcal{H}_{B_1} = \dim \mathcal{H}_{B_2}$. Para o caso geral precisamos estender os operadores densidade e os elementos de POVM para os espaços de dimensões maiores. Neste apêndice vamos formalizar essa extensão.

Considere $\rho_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_{B_1})$, e $\{\Pi_{A_x}^{(1)}\}, \{\Pi_{B_y}^{(1)}\}$ POVMs em \mathcal{H}_{A_1} e \mathcal{H}_{B_1} respectivamente. E, $\rho_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{A_2} \otimes \mathcal{H}_{B_2})$, e $\{\Pi_{A_x}^{(2)}\}, \{\Pi_{B_y}^{(2)}\}$ POVMs em \mathcal{H}_{A_2} e \mathcal{H}_{B_2} .

Seja

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}_A &= \max\{\dim \mathcal{H}_{A_1}, \dim \mathcal{H}_{A_2}\}, \\ \dim \mathcal{H}_B &= \max\{\dim \mathcal{H}_{B_1}, \dim \mathcal{H}_{B_2}\}. \end{aligned}$$

A extensão trivial de ρ_1 para $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, ρ_1^* , é definida por

$$\langle ij | \rho_1^* | kl \rangle = \begin{cases} \rho_{1ijkl} & \text{se } |ij\rangle, |kl\rangle \in \mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_{B_1} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Da mesma forma a extensão de ρ_2 a $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é:

$$\langle ij | \rho_2^* | kl \rangle = \begin{cases} \rho_{2ijkl} & \text{se } |ij\rangle, |kl\rangle \in \mathcal{H}_{A_2} \otimes \mathcal{H}_{B_2} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os POVMs $\{\Pi_{A_x}^{(1)}\}, \{\Pi_{B_y}^{(1)}\}, \{\Pi_{A_x}^{(2)}\}, \{\Pi_{B_y}^{(2)}\}$ são estendidos para \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Pi_{A_x}^{a(1)*} &= \Pi_{A_x}^{a(1)} \oplus \frac{1}{2} I_{A_1^\perp}, \\ \Pi_{B_y}^{b(1)*} &= \Pi_{B_y}^{b(1)} \oplus \frac{1}{2} I_{B_1^\perp}, \end{aligned}$$

onde $I_{A_1^\perp}$ é o operador identidade no subespaço de \mathcal{H}_A ortogonal a \mathcal{H}_{A_1} , e analogamente para $I_{B_1^\perp}$.

Da mesma forma os POVMs de \mathcal{H}_{A_2} e \mathcal{H}_{B_2} são estendidos para

$$\begin{aligned}\Pi_{A_x}^{a(2)*} &= \Pi_{A_x}^{a(2)} \oplus \frac{1}{2} I_{A_2^\perp}, \\ \Pi_{B_y}^{b(2)*} &= \Pi_{B_y}^{b(2)} \oplus \frac{1}{2} I_{B_2^\perp}.\end{aligned}$$

Note que com essas definições

$$\text{tr} \left[\rho_1^* \left(\Pi_{A_x}^{a(1)*} \otimes \Pi_{B_y}^{b(1)*} \right) \right] = \text{tr} \left[\rho_1 \left(\Pi_{A_x}^{a(1)} \otimes \Pi_{B_y}^{b(1)} \right) \right],$$

e analogamente para o sistema 2.

Agora, a demonstração da Proposição 2.3 para o caso geral segue, definindo:

$$\rho' = c\rho_1^* \otimes |00\rangle\langle 00| + (1-c)\rho_2^* \otimes |11\rangle\langle 11| \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{A'} \otimes \mathcal{H}_{B'}) ; 0 \leq c \leq 1$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{A'} &= \mathcal{H}_A \otimes \mathbb{C}_A^2, \\ \mathcal{H}_{B'} &= \mathcal{H}_B \otimes \mathbb{C}_B^2.\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}\Pi_{A_x}^{a'} &= \Pi_{A_x}^{a(1)*} \otimes |0\rangle\langle 0| + \Pi_{A_x}^{a(2)*} \otimes |1\rangle\langle 1|, \\ \Pi_{B_y}^{b'} &= \Pi_{B_y}^{b(1)*} \otimes |0\rangle\langle 0| + \Pi_{B_y}^{b(2)*} \otimes |1\rangle\langle 1|.\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] R. P. Feynman, *The character os physical law*. The M.I.T Press, 1965.
- [2] I. Pitowsky, *Quantum probability-quantum logic*. Springer-Verlag (Lectures Notes in Physics), 1989.
- [3] A. Einstein, B. Podolsky, e N. Rosen, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?,” *Physical Review*, v 47, 777-780 (1935).
- [4] A. K. Ekert, “Quantum cryptography based on Bell’s theorem,” *Physical Review Letters*, v 67, n 6, 661-663 (1991).
- [5] N. Gisin, “Bell inequalities: many questions, a few answers,” *arXiv:quant-ph/0702021v2* (2007).
- [6] M. T. C. Quintino, *Não-localidade como recurso para comunicação*. Monografia, UFMG, 2010.
- [7] D. J. Griffiths, *Introduction to quantum mechanics*. Prentice Hall, 1994.
- [8] J. J. Sakurai, *Modern quantum mechanics Rev. ed.* Addison-Wesley, 1994.
- [9] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Computação quântica e informação quântica*. Bookman, 2005.
- [10] B. Amaral, A. T. Baraviera, e M. O. T. Cunha, *Mecânica quântica para matemáticos em formação*. IMPA, 2011.
- [11] M. O. T. Cunha, *Noções de informação quântica*. IMPA, 2007.
- [12] J. Watrous, *Theory of quantum information*. 2011.
<http://www.cs.uwaterloo.ca/~watrous/CS766/>.

- [13] A. F. R. de Toledo Piza, “Sistemas quânticos compostos e emaranhamento, sistemas quânticos abertos e decoerência,” *Notas de aula, Escola de Física Teórica-USP* (2009).
<http://www.fma.if.usp.br/~piza/EFT/2009.pdf>.
- [14] M. O. T. Cunha, *Emaranhamento: caracterização, manipulação e consequências*. Tese de Doutorado, UFMG, 2005.
- [15] M. U. Karelín, “The Schmidt number of pure continuous-variable bipartite entangled states and the method of its calculation,” *Optics and Spectroscopy*, v 103, n 2, 193-195 (2007).
- [16] A. Peres, “Separability criterion for density matrices,” *Physical Review Letters*, v 77, n 8, 1413-1415 (1996).
- [17] M. Horodecki, P. Horodecki, e R. Horodecki, “Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions,” *Physics Letters A*, v 223, issue 1-2, 1-8 (1996).
- [18] S. L. Woronowicz, “Positive maps of low dimensional matrix algebras,” *Reports on Mathematical Physics* v 10, 165-183 (1976).
- [19] M. A. Santos, *Fundamentos matemáticos da separabilidade quântica*. Monografia, UFMG, 2010.
- [20] P. Horodecki, “Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition,” *Physics Letters A*, v 232, 333-339 (1997).
- [21] A. C. Doherty, P. A. Parrilo, e F. M. Spedalieri, “Complete family of separability criteria,” *Physical Review A*, v 69, 022308 (2004).
- [22] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, e W. K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels,” *Physical Review Letters*, v 70, 1895-1899 (2012).
- [23] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, e W. K. Wootters, “Mixed-state entanglement and quantum error correction,” *Physical Review A*, v 54, 3824-3851 (1996).
- [24] M. Horodecki, P. Horodecki, e R. Horodecki, “Mixed-state entanglement and distillation: is there a “bound” entanglement in nature?,” *Physical Review Letters*, v 80, 5239-5242 (1998).

- [25] W. Dür, G. Vidal, e J. I. Cirac, “Three qubits can be entangled in two inequivalent ways,” *Physical Review A*, v 62, 062314 (2000).
- [26] D. Bohm, *Quantum theory*. Prentice-Hall, 1951.
- [27] J. S. Bell, “On the Einteins Podolsky Rosen paradox,” *Physics* 1, 195-200 (1964).
- [28] R. L. da Silva Rabelo, *Não-localidade quântica: matemática e fundamentos*. Dissertação de Mestrado, UFMG, 2010.
- [29] B. N. B. Lima, L. M. Cioletti, M. O. T. Cunha, e G. A. Braga, *Entropia: introdução à teoria matemática da (des)informação*. II Biental da SBM, 2004. <http://www.mat.ufmg.br/~tcunha/entropia.pdf>.
- [30] J. Barrett, N. Linden, S. Massar, S. Pironio, S. Popescu, e D. Roberts, “Nonlocal correlations as an information-theoretic resource,” *Physical Review A*, v 71, 022101 (2005).
- [31] L. Masanes, “Necessary and sufficient condition for quantum-generated correlations,” *arXiv:quant-ph/0309137v1* (2003).
- [32] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, e R. A. Holt, “Proposed experimental to test local hidden-variable theories,” *Physical Review Letters*, vol 23, n 15, 880-884 (1969).
- [33] L. Khalfin e B. Tsirelson, “Quantum and quasi-classical analogs of Bell inequalities,” *Symposium on the Foundations of Modern Physics*, 441-460 (1985).
- [34] S. Popescu e D. Rohrlich, “Quantum nonlocality as an axiom,” *Foundations of Physics*, vol 24, n 3, 379-385 (1994).
- [35] M. Pawłowski, T. Paterek, D. Kaszlikowski, V. Scarani, A. Winter, e M. Żukowski, “Information causality as a physical principle,” *Nature* 461, 1101-1104 (2009).
- [36] J. Allcock, N. Brunner, M. Pawłowski, e V. Scarani, “Recovering part of the boundary between quantum and nonquantum correlations from information causality,” *Physical Review A*, v 80, 040103(R) (2009).
- [37] A. Fine, “Hidden variables, joint probability, and the Bell inequalities,” *Physical Review Letters*, vol 48, n 5, 291-295 (1982).

- [38] J. F. Clauser e M. A. Horne, “Experimental consequences of objective local theories,” *Physical Review D*, v 10, 526-535 (1974).
- [39] M. Żukowski e Č. Brukner, “Bell’s theorem for general N-qubit states,” *Physical Review Letters* 88, 210401 (2002).
- [40] C. Śliwa, “Symmetries of the Bell correlation inequalities,” *Physics Letters A*, v 317, 165-168 (*quant-ph 0305190*) (2003).
- [41] R. F. Werner e M. M. Wolf, “Bell inequalities and entanglement,” *Quantum Information & Computation*, v 1 (2001).
- [42] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, e S. Wehner *Em preparação* (2012).
- [43] M. Żukowsky, R. Horodecki, M. Horodecki, e P. Horodecki, “Generalized quantum measurements and local realism,” *Physical Review A*, v 58, n 3, 1694-1698 (1998).
- [44] B. M. Terhal, A. C. Doherty, e D. Schwab, “Symmetric extensions of quantum states and local hidden variable theories,” *Physical Review Letters*, v 90, 157903 (2003).
- [45] N. Gisin, “Bell’s inequality holds for all non-product states,” *Physics Letters A*, v 154, n 5-6, 201-202 (1991). correções de typos podem ser encontradas em: *Phys. Lett. A*, v 167,233 (1992) (S.M.Barnett, S.J.D.Phoenix).
- [46] V. Capasso, D. Fortunato, e F. Selleri, “Sensitive observables of quantum mechanics,” *International Journal of Theoretical Physics*, V 7, n 5 (1973).
- [47] S. Popescu e D. Rohrlich, “Generic quantum nonlocality,” *Physics Letters A*, v 166, n 5-6, 293-297 (1992).
- [48] R. F. Werner, “Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model,” *Physical Review A*, vol 40, n 8, 4277-4281 (1989).
- [49] A. Acín, N. Gisin, e B. Toner, “Grothendieck’s constant and local models for noisy entangled quantum states,” *Physical Review A*, v 73, 062105 (2006).

- [50] J. Barrett, “Nonsequential positive-operator-valued measurements on entangled mixed states do not always violate a Bell inequality,” *Physical Review A*, vol 65, 042302 (2002).
- [51] S. Popescu, “Bell’s inequalities and density matrices: revealing “hidden” nonlocality,” *Physical Review Letters*, vol 74, n 14, 2619-2622 (1995).
- [52] A. Peres, “Collective tests for quantum nonlocality,” *Physical Review A*, v 54, n 4, 2685-2689 (1996).
- [53] Ll. Masanes, Y. Liang, e A. C. Doherty, “All bipartite entangled states display some hidden nonlocality,” *Physical Review Letters*, v 100, 090403 (2008).
- [54] A. Peres, “All the Bell inequalities,” *Foundations of Physics*, v 29, n 4, 589-614 (1999).
- [55] T. Vértesi e N. Brunner, “Quantum nonlocality does not imply entanglement distillability,” *Physical Review Letters*, v 108, 030403 (2012).
- [56] W. Dür, “Multipartite bound entangled states that violate Bell’s inequality,” *Physical Review Letters*, v 87, 230402 (2001).
- [57] M. Navascués e T. Vértesi, “Activation of nonlocal quantum resources,” *Physical Review Letters*, v 106, 060403 (2011).
- [58] O. Krueger e R. Werner, “Some Open Problems in Quantum Information Theory,” *arXiv:quant-ph/0504166v1* (2005).
- [59] M. Navascués e T. Vértesi, “Data on activation of the CHSH inequality,” http://www.atomki.hu/TheorPhys/CHSH_activation/.
- [60] D. Cavalcanti, M. L. Almeida, V. Scarani, e A. Acín, “Quantum networks reveal quantum nonlocality,” *Nature Communications* 2, 184 (2011).
- [61] D. Cavalcanti, R. Rabelo, e V. Scarani, “Nonlocality tests enhanced by a third observer,” *Physical Review Letters*, v 108, 040402 (2012).
- [62] T. Vértesi, “More efficient Bell inequalities for Werner states,” *Physical Review A*, v 78, 032112 (2008).
- [63] A. S. De, U. Sen, Č. Brukner, V. Bužek, e M. Żukowski, “Entanglement swapping of noisy states: A kind of superadditivity in nonclassicality,” *Physical Review A*, v 72, 042310 (2005).