



**Universidade Federal de Minas Gerais**  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

---

# **Detecção de Falhas em Sistemas Dinâmicos**

## **Sujeitos a Retardo no Tempo**

### **e Incertezas Paramétricas**

Dissertação de Mestrado submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

**Jansenn Silveira Rocha**

Engenheiro Eletricista – UFMG

Especialista em Engenharia de Manutenção – IEC-PUC/MG

**Orientador:** Prof. Dr. Fernando de Oliveira Souza

**Co-orientador:** Prof. Dr. Walmir Matos Caminhas

09 de Julho – 2012

Universidade Federal de Minas Gerais  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica

**Deteccção de Falhas em Sistemas Dinâmicos  
Sujeitos a Retardo no Tempo e Incertezas  
Paramétricas**

**Autor: Jansenn Silveira Rocha**

**Orientador: Prof. Dr. Fernando de Oliveira Souza**

**Co-orientador: Prof. Dr. Walmir Matos Caminhas**

**Dissertação de mestrado** submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Sistemas de Computação e Telecomunicações.**

Banca Examinadora

Leonardo Amaral Mozelli, Dr. .... DETEM/CAP/UFSJ  
Marcos Flávio Silveira Vasconcelos D'Angelo, Dr. .. DCC/UNIMONTES  
Fernando de Oliveira Souza, Dr. .... DELT/EE/UFMG  
Walmir Matos Caminhas, Dr. .... DELT/EE/UFMG

Belo Horizonte, MG

09 de Julho/2012

**"Detecção de Falhas em Sistemas Dinâmicos Sujeitos a Retardo no Tempo e Incertezas Paramétricas"**

**Jansenn Silveira Rocha**


Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 09 de julho de 2012.

Por:



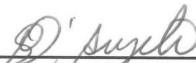
**Prof. Dr. Fernando de Oliveira Souza**  
DELT (UFMG) - Orientador



**Prof. Dr. Walmir Matos Caminhas**  
DELT (UFMG) - Co-Orientador



**Prof. Dr. Leonardo Amaral Mozelli**  
DETEM (CAP/UFSJ)



**Prof. Dr. Marcos Flavio Silveira Vasconcelos D'Angelo**  
DCC (UNIMONTES)

# Resumo

Esta dissertação propõe uma estratégia para detecção de falhas em sistemas lineares a tempo contínuo, sujeitos a retardo no tempo e incertezas paramétricas, baseada no projeto de filtros robustos como observadores de estado. O projeto do filtro é baseado na teoria de Lyapunov-Krasovskii e em desigualdades matriciais lineares (LMIs - do inglês: *Linear Matrix Inequalities*). A partir do resíduo gerado entre as saídas do sistema e do observador, um limiar de operação normal é calculado. Assim, quando o resíduo é maior que este limiar de operação normal o sistema é considerado em falha. Exemplos numéricos ilustram a eficiência do método proposto.

**Palavras-chave:** Desigualdade matricial linear, Lyapunov-Krasovskii, sistemas lineares, retardo no tempo, parâmetros incertos, análise de estabilidade, projeto de filtro, detecção de falha.

# Abstract

This master thesis proposes a strategy for fault detection in continuous time linear systems, subject to time-delay and uncertain parameters, based on robust filter design as state observers. The filter design is based on Lyapunov-Krasovskii theory and on linear matrix inequalities (LMIs). From the residue generated between the outputs of the system and the observer, a normal operating threshold is calculated. Therefore, when the residue is greater than this normal operation threshold the system is considered in fault. Numerical examples illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** Linear matrix inequality (LMI), Lyapunov-Krasovskii, linear systems, time-delay, parameter uncertainties, stability analysis, filter project, failure detection.

# **Agradecimentos**

Agradeço à minha família, Pai, Mãe e aos meus Irmãos pelo apoio. Agradeço à minha noiva, Isabel, companheirismo e paciência ao me ajudar a concluir mais este projeto. Agradeço aos meus orientadores, professor Fernando de Oliveira Souza e professor Walmir Matos Caminhas pela orientação durante o desenvolvimento do trabalho. Agradeço também à Gerdau Açominas pelo incentivo ao desenvolvimento deste trabalho.

# Sumário

<b>Notações e Definições</b>	<b>vi</b>
<b>Acrônimos</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Justificativa e objetivos . . . . .	1
1.2 Revisão bibliográfica . . . . .	2
1.3 Formulação do problema . . . . .	4
1.4 Organização do trabalho . . . . .	7
<b>2 Análise de Estabilidade</b>	<b>9</b>
2.1 Sistemas sujeitos a retardo constante no tempo . . . . .	9
2.2 Sistemas sujeitos a retardo variante no tempo . . . . .	13
2.3 Sistema incerto sujeito a retardo variante no tempo . . . . .	17
2.4 Exemplos numéricos . . . . .	20
<b>3 Projeto do Filtro</b>	<b>25</b>
3.1 Sistemas precisamente conhecidos . . . . .	26
3.2 Sistemas incertos . . . . .	29
3.3 Exemplos numéricos . . . . .	33
<b>4 Detecção de Falha</b>	<b>40</b>
4.1 Função de decisão escolhida . . . . .	41
4.2 Exemplos numéricos . . . . .	41
<b>5 Conclusões</b>	<b>53</b>
<b>A Exemplo de Vértices do Politopo</b>	<b>55</b>
A.1 Matrizes incertas $A(\alpha)$ e $A_r(\alpha)$ . . . . .	55
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>59</b>

# Notações e Definições

$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times m}$	- conjunto dos números reais, dos números reais positivos, dos vetores reais de $n$ componentes e das matrizes reais de dimensão $n \times m$ .
$\  \cdot \ $	- norma vetorial ou matricial.
$\mathcal{L}_2$	- denota o espaço de Lebesgue das funções de quadrado integrável no intervalo $[0, \infty)$ .
$\mathcal{H}_\infty$	- representa todas as matrizes de transferência $H(s)$ racionais com coeficientes reais, estáveis e próprias, com $\  H \ _\infty < \infty$ .
$\gamma$	- é o nível de atenuação de ruídos para um sistema representado pela matriz de transferência $H(s)$ se satisfaz $\  H \ _\infty < \gamma$ , com $\gamma \in \mathbb{R}_+$ .
$I$	- denota uma matriz identidade de dimensão apropriada.
$0$	- denota uma matriz nula de dimensão apropriada.
$\det(\cdot)$	- determinante de uma matriz.
$*$	- denota os termos matriciais simétricos em relação a diagonal principal.
$\mathcal{M}^T, \mathcal{M}^{-1}, \mathcal{M}^{-T}$	- denota transposto, inverso e transposto inverso da matriz $\mathcal{M}$ .
$\mathcal{M} > 0$ ( $\mathcal{M} \geq 0$ )	- denota que a matriz $\mathcal{M}$ é definida (semi-definida) positiva.
$\mathcal{M} < 0$ ( $\mathcal{M} \leq 0$ )	- denota que a matriz $\mathcal{M}$ é definida (semi-definida) negativa.
$\text{sm}\{\mathcal{M}\}$	- forma compacta que representa: $\mathcal{M} + \mathcal{M}^T$ .

# Acrônimos

- FDI - Detecção e Isolação de Falha - do inglês: “Fault Detection and Isolation”
- FD - Detecção de Falha - do inglês: “Fault Detection”
- LMI - Desigualdade Matricial Linear - do inglês: “Linear matrix inequality”
- QTA - Análise Qualitativa de Tendências - do inglês: “Qualitative Trend Analysis”
- RNA - “Redes Neurais Artificiais”



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Justificativa e objetivos

Os estudos sobre detecção de falhas baseados no uso de observadores se iniciaram na década de 1970. Os processos industriais impulsionaram os estudos neste âmbito, os quais visavam principalmente a detecção de falhas em seus instrumentos, que geralmente causam perdas significativas [Clark, 1978].

No início, as aplicações limitavam-se na detecção de falhas em sistemas lineares. A evolução, já no final da década de 1970, veio com o desenvolvimento de métodos de detecção de falhas em processos baseados em modelagem e na estimação de parâmetros e estados, conforme apresentados em [Isermann, 1984].

A relevância da detecção de falhas em sistemas dinâmicos está na detecção segura de falhas garantindo um aumento do grau de confiabilidade dos processos representados por estes sistemas. Em alguns casos, a detecção antecipada da falha reduz o índice de paradas na linha de produção, de perda material, de perda de qualidade e, até mesmo, na redução de acidentes que podem envolver pessoas [D'Angelo et al., 2010].

Considerando o exposto acima, o objetivo deste trabalho é desenvolver um sistema de detecção de falhas, baseado no uso de filtros robustos, para sistemas lineares sujeitos a retardo no tempo e incertezas paramétricas. O trabalho consiste no projeto de filtros robustos, que permite o cálculo do resíduo entre o sistema e o estimador robusto, assim

é usada uma função de desempenho adequada, cujo limiar determina a fronteira entre o processo em operação normal e em falha.

## 1.2 Revisão bibliográfica

Os primeiros trabalhos sobre detecção de falhas foram baseados no uso de observadores, as motivações para este método estavam nos processos industriais representados por sistemas dinâmicos, nos quais as variáveis medidas são monitoradas afim de se detectar as falhas.

Conforme apresentado em [Isermann and Ballé, 1997], as falhas nos sistemas dinâmicos podem ser classificadas em três grupos:

- i) Falhas abruptas: provocam rapidamente desvios nas condições de operação normal dos processos;
- ii) Falhas incipientes: provocam lentamente desvios graduais nas condições de operação normal dos processos;
- iii) Falhas intermitentes, ou esporádicas: que podem aparecer e desaparecer a qualquer momento.

Métodos FDI podem ser caracterizados de acordo com os métodos de detecção e com os métodos de isolamento de falha. Os métodos de detecção de falhas baseados em modelos variam sua forma de detecção de acordo com as variáveis disponíveis para medição, entre os quais, como apresentado em [Isermann and Ballé, 1997], podemos citar: observadores ou estimadores de estado; equações/relações de paridade; identificação e estimação de parâmetros; filtros passa-banda; análise espectral; estimação de máxima entropia; estimação de média e variância; teste de razão de verossimelhança; T-teste e teste soma.

Entre os métodos de isolamento de falhas, segundo [Isermann and Ballé, 1997], podemos citar os mais relevantes: métodos probabilísticos; distâncias geométricas; RNA e agrupamento nebuloso.

Diversos outros métodos foram desenvolvidos principalmente derivando e/ou combinando os métodos citados acima [Isermann and Ballé, 1997], [D'Angelo et al., 2010].

Os métodos FDI apresentados são divididos em métodos quantitativos [Venkatasubramanian et al., 2003c], [Venkatasubramanian et al., 2003b]: observadores, modelos estatísticos, redes neurais, relações de paridade, filtros de Kalman; e em métodos qualitativos [Venkatasubramanian et al., 2003a], [Venkatasubramanian et al., 2003b]: modelos causais, sistemas especialistas, QTA . Entre os métodos de detecção quantitativos, os observadores/filtros fazem parte dos métodos mais utilizados recentemente, neste caso geralmente é utilizado um sinal que representa a inconsistência entre o sinal esperado e o sinal com falha.

Os métodos baseados em observadores/filtros, em grande parte dos trabalhos, são utilizados para caracterizar sistemas com entradas desconhecidas, as quais podem representar características como incertezas e não-linearidades do sistema [Chen and Patton, 1999]. O bom desempenho dos observadores na detecção de falhas abruptas em sistemas com entradas desconhecidas é um tema amplamente explorado em [Caminhas and Takahashi, 2001] e [D'Angelo et al., 2010].

Entre os trabalhos existentes, focados na detecção de falhas em sistemas dinâmicos sujeitos a retardo no tempo, alguns são dedicados a sistemas de tempo discreto tais como [Wang et al., 2008], [Zhang et al., 2008] e [Yong et al., 2010], sendo que no primeiro o retardo é considerado no estado, enquanto, no segundo e terceiro o retardo é considerado no laço de realimentação da saída. Ademais, em ambos trabalhos os retardos são considerados constantes.

Os trabalhos focados na detecção de falhas em sistemas de tempo contínuo sujeitos a retardo no tempo podem ser divididos em dois grupos; o grupo **G1**, que considera o retardo constante no tempo,  $r$ , e o grupo **G2**, mais realista, que considera o retardo variante no tempo,  $r(t)$ . Entre os trabalhos mais recentes neste campo, podemos citar [Zhang-qing and Xian-zhong, 2007], [Su and Ji, 2007], [Chen and Li, 2008], [Gao and Jiang, 2008] e [Li and Yang, 2009], os quais se enquadram no grupo **G1**; e os relevantes artigos [Ke and Bin, 2008], [Meskin and Khorasani, 2009], [Karimi et al., 2009] e [Wang et al., 2010], que se enquadram no grupo **G2**.

Por meio de uma simples análise comparativa, espera-se que para sistemas sujeitos a retardo constante no tempo, o modelo de um filtro apropriado também leve em conta este mesmo retardo constante, como apresentado em [Zhang-qing and Xian-zhong, 2007], [Su and Ji, 2007], [Chen and Li, 2008], [Gao and Jiang, 2008] e [Li and Yang, 2009]. Por outro lado, quando o sistema considerado está sujeito a retardo variante no tempo, é natural inferir que o modelo para um filtro apropriado deve considerar o mesmo retardo variante no tempo que o sistema está sujeito, assim este tipo de filtro foi considerado nos seguintes trabalhos [Ke and Bin, 2008] e [Karimi et al., 2009]. Note que a implementação deste tipo de filtro necessita da medição em tempo real do valor do retardo no tempo, sendo esta uma tarefa complicada. Assim, a maioria dos projetos que consideram o sistema sujeito a retardo variante no tempo não levam em conta o valor do retardo no modelo do filtro, o que fatalmente pode prejudicar seu desempenho, veja por exemplo [Wang et al., 2010].

Portanto, considerando o exposto no parágrafo anterior, este trabalho propõe uma estratégia de detecção de falha alternativa para sistemas sujeitos a retardo variante no tempo, a qual é baseada em um modelo de filtro robusto que leva em conta um retardo constante tempo que corresponde a estimativa do valor médio do retardo que o sistema está sujeito. Assim, o modelo do filtro considerado aqui se aproxima mais do modelo do processo e sua implementação não necessita da medição em tempo real do valor do retardo. Na próxima seção é apresentado em mais detalhes o problema considerado neste trabalho.

### 1.3 Formulação do problema

Na Figura 1.1 é apresentado o diagrama de blocos geral do problema de detecção de falhas considerado neste trabalho, sendo que, a parte destacada na figura nomeada como  $\mathcal{FD}$  representa um método de detecção de falha. Nesta figura assume-se que o processo

pode ser representado pela classe de sistemas sujeitos a retardo no tempo descrita por:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_r x(t - r(t)) + Bw(t) \\
 z(t) &= Cx(t) + C_r x(t - \tau) + Dw(t) \\
 y(t) &= Lx(t) + L_r x(t - r(t)) + L_w w(t) \\
 x(t) &= \phi(t), \forall t \in [-\max\{r(t)\}, 0],
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

sendo  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  o vetor de estados,  $w(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  o vetor de entradas exógenas,  $z(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$  o vetor de saída a ser estimado,  $y(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  o vetor de saída medida,  $\phi(t)$  é a condição inicial do sistema e  $r(t)$  é o retardo variante no tempo. Particularmente, é considerado o retardo no tempo da forma:  $r(t) = \tau + \eta(t)$ , sendo  $\tau$  um valor nominal e  $\eta(t)$  uma perturbação, possivelmente variante no tempo, podendo assumir valores positivos e negativos; satisfazendo:  $|\eta(t)| \leq \mu < \tau$ , sendo  $\mu$  conhecido. Portanto, o retardo no tempo é definido no intervalo,  $r(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ .

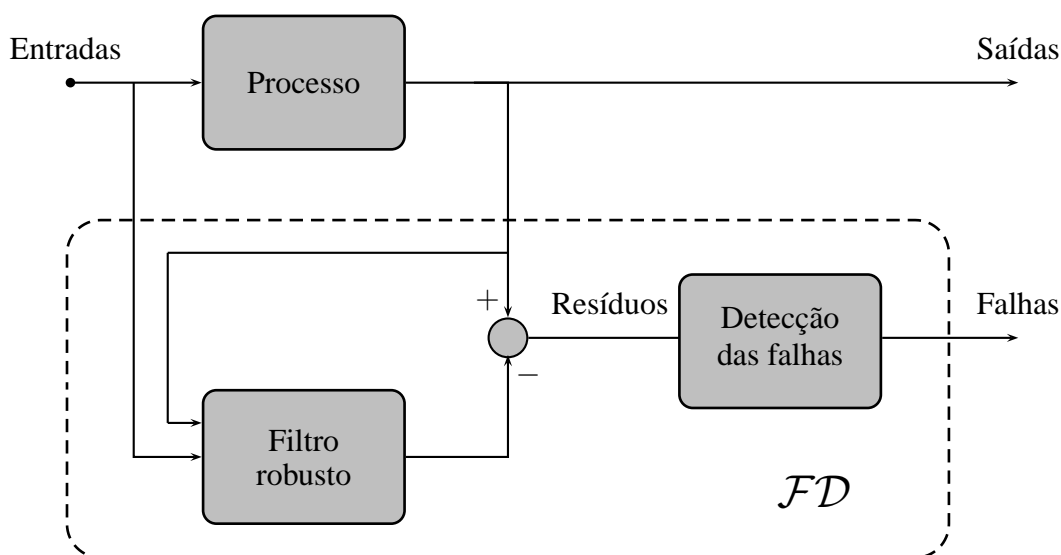


Figura 1.1: Diagrama de blocos geral do problema de detecção de falhas.

O método  $\mathcal{FD}$  destacado na Figura 1.1 deve essencialmente considerar relevantes parâmetros do processo, portanto, no presente trabalho o método  $\mathcal{FD}$  considerado contém um filtro robusto, apresentado na Figura 1.1. Este filtro tem como objetivo gerar estima-

tivas,  $\hat{z}(t)$ , do sinal  $z(t)$  baseado no vetor  $y(t)$  de saídas medidas do sistema em (1.1). Para realizar esta tarefa, neste trabalho é proposto um método de projeto de um filtro *admissível*, i.e., assintoticamente estável, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_f \hat{x}(t) + A_{\tau f} \hat{x}(t - \tau) + B_f y(t) \\ \hat{z}(t) &= C_f \hat{x}(t) + C_{\tau f} \hat{x}(t - \tau) + D_f y(t) \\ \hat{x}(t) &= 0, \forall t \in [-\tau, 0],\end{aligned}\tag{1.2}$$

sendo as matrizes  $A_f$ ,  $A_{\tau f}$ ,  $B_f$ ,  $C_f$ ,  $C_{\tau f}$  e  $D_f$  variáveis a serem determinadas. Observe que a estrutura do filtro considerado acima não leva em conta o valor exato do retardo variante no tempo  $r(t)$ , e sim o valor nominal deste retardo,  $\tau$ . Portanto, o filtro considerado não necessita da medição do valor do retardo em tempo real.

Baseado a estrutura do filtro robusto apresentada acima, podemos então estabelecer a dinâmica do erro de filtragem ou dos resíduos,  $\tilde{z}(t) \triangleq z(t) - \hat{z}(t)$ . Usando a identidade:

$$x(t - r(t)) = x(t - \tau) - \int_{r(t)}^{\tau} \dot{x}(t - \xi) d\xi,$$

a dinâmica do erro de filtragem é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{A}_{\tau} \tilde{x}(t - \tau) + \tilde{B} w(t) - \tilde{A}_r \int_{r(t)}^{\tau} \dot{\tilde{x}}(t - \xi) d\xi \\ \tilde{z}(t) &= \tilde{C} \tilde{x}(t) + \tilde{C}_{\tau} \tilde{x}(t - \tau) + \tilde{D} w(t),\end{aligned}\tag{1.3}$$

sendo  $\tilde{x}(t) \triangleq [x^T(t) \ x^T(t) - \hat{x}^T(t)]^T$ ,  $\tilde{z}(t) \triangleq z(t) - \hat{z}(t)$  e

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ A - B_f L - A_f & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ B - B_f L_w \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_{\tau} &= \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ A_r - B_f L_r - A_{\tau f} & A_{\tau f} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_r = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ A_r - B_f L_r & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{C} &= \begin{bmatrix} C - D_f L - C_f & C_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = D - D_f L_w, \\ \tilde{C}_{\tau} &= \begin{bmatrix} C_{\tau} - D_f L_r - C_{\tau f} & C_{\tau f} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Finalmente, considerando o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  da forma:

$$J(t) \triangleq \int_0^\infty [\tilde{z}^T(t)\tilde{z}(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)] dt, \quad (1.5)$$

com  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ , podemos definir o problema de filtragem considerado neste trabalho. O índice  $\mathcal{H}_\infty$  é amplamente explorado no desenvolvimento de filtros robustos para sistemas a tempo contínuo [Duan et al., 2006], [Souza et al., 2008a], [Souza et al., 2008b], [Nobrega et al., 2008], [Li and Yang, 2009], tanto para sistema em tempo discreto [Takahashi et al., 1997].

**Problema de filtragem:** *Determine um filtro estável como em (1.2) que garanta um nível pré-determinado de atenuação de distúrbios,  $\gamma$ , para a dinâmica do erro de filtragem com retardo no tempo em (1.3), tal que o ganho  $\mathcal{L}_2$  satisfaça:*

$$\sup_{w(t) \in \mathcal{L}_2} \frac{\|\tilde{z}(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} < \gamma,$$

ou, em outras palavras, o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  satisfaz  $J(t) < 0$ .

Além do filtro robusto, o método  $\mathcal{FD}$  destacado na Figura 1.1 também contém o bloco detecção de falhas, este bloco corresponde a uma função de decisão que determina se o processo apresenta alguma falha a partir do resíduo gerado entre as saídas do processo e do filtro. O bloco de decisão escolhido projetado a partir de um valor de limiar de decisão calculado em um período de tempo no qual o processo pode ser considerado sem falha ou *normal*. Então, uma vez que o resíduo gerado entre as saídas do processo e do filtro é superior ao valor de limiar, por comparação simples, o processo será considerado *em falha* pelo bloco de decisão.

## 1.4 Organização do trabalho

O restante deste trabalho é organizado como se segue: no Capítulo 2 são desenvolvidos métodos de análise de estabilidade formulados em termos de LMIs (desigualdades

---

matriciais lineares, do inglês: “Linear Matrix Inequalities”) para sistemas sujeitos a retardo no tempo. Sendo que, são tratados em subseções diferentes, sistemas sujeitos a retardo constante, sistemas sujeitos a retardo variante no tempo e sistemas incertos sujeitos a retardo variante no tempo. Estes métodos de análise de estabilidade serão usados como ponto de partida para o desenvolvimento do método de projeto de filtro, apresentado no Capítulo 3. Nesse capítulo, são considerados em subseções diferentes, sistemas precisamente conhecidos e sistemas incertos. No Capítulo 4 é apresentada a função de decisão escolhida, assim o método de detecção de falhas proposto nesse trabalho é completado. Ademais, ainda nesse capítulo, são apresentados exemplos numéricos, com a finalidade de verificar a eficiência do método proposto. Por fim, o Capítulo 5 apresenta as conclusões acerca do trabalho desenvolvido.



# Capítulo 2

## Análise de Estabilidade

Neste capítulo são apresentadas condições formuladas em LMIs para a análise de estabilidade de sistemas lineares sujeitos a retardo no tempo. Serão apresentadas condições que consideram: *i*) sistemas precisamente conhecidos, sujeitos a retardo constante e retardo variante no tempo, e *ii*) sistemas incertos sujeitos a retardo variante no tempo.

### 2.1 Sistemas sujeitos a retardo constante no tempo

Considere o sistema (1.1) apresentado no capítulo anterior sujeito a retardo constante no tempo,  $r(t) = \tau$ , e com entrada exógena nula,  $\omega(t) = 0$ , ou seja, considere o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_r x(t - r(t)) \\ x(t) &= \phi(t), \forall t \in [-\max\{r(t)\}, 0].\end{aligned}\tag{2.1}$$

A seguir, é proposta uma condição dependente do retardo no tempo para a análise de estabilidade do sistema apresentado acima.

**Teorema 2.1.** *Considere o sistema em (2.1). Seja dado  $\tau > 0$ , escalar para o valor do retardo no tempo. Então, o sistema em (2.1) é assintoticamente estável, se existirem matrizes com dimensões  $n \times n$ :  $F, G, P = P^T, S = S^T, Q, R_1, R_2 = R_2^T, R_3$ , tais que*

as LMIs a seguir, sejam satisfeitas:

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ * & \frac{1}{\tau}S \end{bmatrix} > 0, \quad (2.2)$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2^T \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (2.3)$$

e

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta & P + A^T G^T - F + \tau R_2^T & F A_r - Q + \frac{1}{\tau} R_3 & -\frac{1}{\tau} R_2 \\ * & \tau R_3 - G - G^T & G A_r & Q \\ * & * & -\frac{1}{\tau} R_3 - S & \frac{1}{\tau} R_2 \\ * & * & * & -\frac{1}{\tau} R_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.4)$$

sendo  $\theta = \text{sm}\{Q + F A\} + S + \tau R_1 - \frac{1}{\tau} R_3$ .  $\square$

**Demonstração:** Considere o funcional de Lyapunov-Krasovskii candidato:

$$\begin{aligned} V_\tau(x_t) &= x^T(t) P x(t) + 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 Q x(t + \xi) d\xi \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t \bar{x}^T(\xi) \bar{R} \bar{x}(\xi) d\xi ds \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 x^T(t + \xi) S x(t + \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.5)$$

sendo  $\bar{x}^T(\xi) = [x^T(\xi) \quad \dot{x}^T(\xi)]$  e  $\bar{R}$  definido em (2.3).

Inicialmente, é demonstrado que este funcional satisfaz:  $V_\tau(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ), se as LMIs (2.2) e (2.3) são satisfeitas.

Aplicando a desigualdade de integrais quadráticas conhecida como desigualdade de

Jensen [Gu et al., 2003, Cor. B.9] no funcional de Lyapunov-Krasovskii (2.5) tem-se

$$\begin{aligned}
V_\tau(x_t) &\geq x^T(t)Px(t) + 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 Qx(t+\xi)d\xi \\
&\quad + \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t \bar{x}^T(\xi)\bar{R}\bar{x}(\xi)d\xi ds \\
&\quad + \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi)d\xi S \int_{-\tau}^0 x(t+\xi)d\xi \\
&= \chi^T \begin{bmatrix} P & Q \\ * & \frac{1}{\tau}S \end{bmatrix} \chi \\
&\quad + \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t \bar{x}^T(\xi)\bar{R}\bar{x}(\xi)d\xi ds,
\end{aligned}$$

sendo  $\chi^T = [x^T(t) \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi)d\xi]$ .

Portanto, baseado na desigualdade acima, uma condição suficiente para satisfazer a condição:  $V_\tau(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ), é garantir que as LMIs (2.2) e (2.3) sejam satisfeitas. Note que as LMIs (2.2) e (2.3) garantem que os dois primeiros termos da equação anterior sejam definidos positivos.

Agora é demonstrado que a derivada do funcional em (2.5) satisfaz a condição:  $\dot{V}_\tau(x_t) \leq -\epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ), se a LMI em (2.4) é satisfeita.

Então, diferenciando o funcional em (2.5) ao longo das trajetórias do sistema em (2.1), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\tau(x_t) &= 2\dot{x}^T(t)Px(t) + 2\dot{x}^T(t) \int_{-\tau}^0 Qx(t+\xi)d\xi \\
&\quad + 2x^T(t)Qx(t) - 2x^T(t)Qx(t-\tau) \\
&\quad + \tau\bar{x}^T(t)\bar{R}\bar{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \bar{x}^T(\xi)\bar{R}\bar{x}(\xi)d\xi \\
&\quad + x^T(t)Sx(t) - x^T(t-\tau)Sx(t-\tau) \\
&= 2\dot{x}^T(t)Px(t) + 2\dot{x}^T(t) \int_{-\tau}^0 Qx(t+\xi)d\xi \\
&\quad + 2x^T(t)Qx(t) - 2x^T(t)Qx(t-\tau) \\
&\quad + \tau\bar{x}^T(t)\bar{R}\bar{x}(t) - \int_{-\tau}^0 \bar{x}^T(t+\xi)\bar{R}\bar{x}(t+\xi)d\xi \\
&\quad + x^T(t)Sx(t) - x^T(t-\tau)Sx(t-\tau).
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Jensen [Gu et al., 2003, Cor. B.9] na equação anterior tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_\tau(x_t) \leq & 2\dot{x}^T(t)Px(t) + 2\dot{x}^T(t) \int_{-\tau}^0 Qx(t+\xi)d\xi \\ & + 2x^T(t)Qx(t) - 2x^T(t)Qx(t-\tau) \\ & + \tau \bar{x}^T(t) \bar{R} \bar{x}(t) \\ & - \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^0 \bar{x}^T(t+\xi)d\xi \bar{R} \int_{-\tau}^0 \bar{x}(t+\xi)d\xi \\ & + x^T(t)Sx(t) - x^T(t-\tau)Sx(t-\tau). \end{aligned}$$

Finalmente, considerando o sistema sujeito a retardo no tempo em (2.1) e duas matrizes quaisquer de dimensões apropriadas,  $F$  e  $G$ , tem-se:

$$0 = 2 [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] \{-\dot{x}(t) + Ax(t) + A_r x(t-\tau)\}. \quad (2.6)$$

Assim, usando a definição de  $\bar{R}$  em (2.3), substituindo  $\bar{x}^T(\cdot)$  por  $[x^T(\cdot) \ \dot{x}^T(\cdot)]$ , adicionando o termo nulo em (2.6) na desigualdade acima obtém-se:

$$\dot{V}(x_t) \leq \zeta^T \Theta \zeta, \quad (2.7)$$

sendo

$$\zeta^T = [x^T(t) \ \dot{x}^T(t) \ x^T(t-\tau) \ \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi)d\xi]$$

e  $\Theta$  em (2.4).

Portanto, baseado na desigualdade em (2.7), se a LMI em (2.4) é satisfeita, então a condição:  $\dot{V}_\tau(x_t) \leq -\epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ) é atendida, completando a demonstração. ■

## 2.2 Sistemas sujeitos a retardo variante no tempo

Considere o sistema (1.1), apresentado no capítulo anterior, com entrada exógena nula,  $\omega(t) = 0$ , ou seja, considere o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_r x(t - r(t)) \\ x(t) &= \phi(t), \forall t \in [-\max\{r(t)\}, 0]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A seguir é apresentada uma condição dependente do retardo no tempo para a análise de estabilidade do sistema em (2.8).

**Teorema 2.2.** *Considere o sistema em (2.8) sendo que  $r(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ . Sejam dados  $\tau > 0$ , escalar para o valor nominal do retardo no tempo, e  $\mu \geq 0$ , um limitante superior para a perturbação do retardo no tempo  $r(t)$ . Então, o sistema em (2.8) é assintoticamente estável, se existirem matrizes com dimensões  $n \times n$ :  $F, G, P = P^T, S = S^T, Q, R_1, R_2 = R_2^T, R_3, U = U^T$  tais que as LMIs em (2.2), (2.3) e a LMI a seguir, sejam satisfeitas:*

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \theta & P + A^T G^T - F + \tau R_2^T & F A_r - Q + \frac{1}{\tau} R_3 & -\frac{1}{\tau} R_2 & \mu F A_r \\ * & \tau R_3 - G - G^T + 2\mu U & G A_r & Q & \mu G A_r \\ * & * & -\frac{1}{\tau} R_3 - S & \frac{1}{\tau} R_2 & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\tau} R_1 & 0 \\ * & * & * & * & -\mu U \end{bmatrix} < 0, \quad (2.9)$$

sendo  $\theta = \text{sm}\{Q + F A\} + S + \tau R_1 - \frac{1}{\tau} R_3$ . □

**Demonstração:** Considere o funcional de Lyapunov-Krasovskii candidato:

$$\begin{aligned}
V_r(x_t) &= x^T(t)Px(t) + 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 Qx(t+\xi)d\xi \\
&+ \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t \bar{x}^T(\xi)\bar{R}\bar{x}(\xi)d\xi ds \\
&+ \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi)Sx(t+\xi)d\xi \\
&+ \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+s-\tau}^t \dot{x}^T(\xi)U\dot{x}(\xi)d\xi ds,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

sendo  $\bar{x}^T(\xi) = [x^T(\xi) \ \dot{x}^T(\xi)]$  e  $\bar{R}$  definido em (2.3). Note que o funcional acima contém um termo diferente do funcional em (2.5), este termo foi adicionado para lidar com o retardo variante no tempo  $r(t)$ .

Inicialmente, é demonstrado que este funcional satisfaz:  $V_r(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ), se as LMIs (2.2), (2.3) e (2.9) são satisfeitas.

Aplicando a desigualdade de Jensen [Gu et al., 2003, Cor. B.9] no funcional de Lyapunov-Krasovskii (2.10) tem-se

$$\begin{aligned}
V_r(x_t) &\geq x^T(t)Px(t) + 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 Qx(t+\xi)d\xi \\
&+ \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t \bar{x}^T(\xi)\bar{R}\bar{x}(\xi)d\xi ds \\
&+ \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi)d\xi S \int_{-\tau}^0 x(t+\xi)d\xi \\
&+ \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+s-\tau}^t \dot{x}^T(\xi)U\dot{x}(\xi)d\xi ds \\
&= \chi^T \begin{bmatrix} P & Q \\ * & \frac{1}{\tau}S \end{bmatrix} \chi \\
&+ \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t \bar{x}^T(\xi)\bar{R}\bar{x}(\xi)d\xi ds \\
&+ \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+s-\tau}^t \dot{x}^T(\xi)U\dot{x}(\xi)d\xi ds,
\end{aligned}$$

sendo  $\chi^T = [x^T(t) \ \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi)d\xi]$ .

Portanto, baseado na desigualdade acima, uma condição suficiente para satisfazer a

condição:  $V_r(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ), é garantir que as LMIs (2.2), (2.3) e (2.9) sejam satisfeitas. Note que as LMIs (2.2) e (2.3) garantem que os dois primeiros termos da equação anterior sejam definidos positivos e o elemento  $5 \times 5$  da LMI (2.9) garante que o terceiro termo também seja definido positivo.

Agora é demonstrado que a derivada do funcional em (2.10) satisfaz a condição:  $\dot{V}_r(x_t) \leq -\epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ), se a LMI em (2.9) é satisfeita. Entretanto, antes do cálculo da derivada de  $V_r(x_t)$  é introduzido um termo nulo que permite desacoplar as matrizes do sistema das matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii.

Considerando o sistema sujeito a retardo no tempo em (2.8) e duas matrizes quaisquer de dimensões apropriadas,  $F$  e  $G$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
0 &= 2 [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] \{-\dot{x}(t) + Ax(t) + A_r x(t - r(t))\} \\
&= 2 [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] \left\{ -\dot{x}(t) + Ax(t) + A_r x(t - \tau) - A_r \int_{r(t)}^{\tau} \dot{x}(t - \xi) d\xi \right\} \\
&= 2 [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] \{-\dot{x}(t) + Ax(t) + A_r x(t - \tau)\} + v(t),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

sendo<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}
v(t) &= -2 [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] A_r \int_{r(t)}^{\tau} \dot{x}(t - \xi) d\xi \\
&\leq \left| \int_{t-\tau-\eta(t)}^{t-\tau} [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] A_r U^{-1} A_r^T [F^T x(t) + G^T \dot{x}(t)] ds \right| \\
&\quad + \left| \int_{t-\tau-\eta(t)}^{t-\tau} \dot{x}^T(s) U \dot{x}(s) ds \right| \\
&\leq \mu [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] A_r U^{-1} A_r^T [F^T x(t) + G^T \dot{x}(t)] \\
&\quad + \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{x}^T(s) U \dot{x}(s) ds.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

<sup>1</sup>Usando a identidade:  $2a^T b \leq a^T X a + b^T X^{-1} b$  se, e somente se,  $X > 0$  para  $a, b \in \mathbb{R}^n$ .

Então, diferenciando o funcional em (2.10) ao longo das trajetórias do sistema em (2.8), obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{V}_r(x_t) &= 2\dot{x}^T(t)Px(t) + 2\dot{x}^T(t) \int_{-\tau}^0 Qx(t+\xi)d\xi \\ &\quad + 2x^T(t)Qx(t) - 2x^T(t)Qx(t-\tau) \\ &\quad + \tau \bar{x}^T(t)\bar{R}\bar{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \bar{x}^T(\xi)\bar{R}\bar{x}(\xi)d\xi \\ &\quad + x^T(t)Sx(t) - x^T(t-\tau)Sx(t-\tau) \\ &\quad + 2\mu\dot{x}^T(t)U\dot{x}(t) - \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{x}^T(s)U\dot{x}(s)ds,\end{aligned}$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{V}_r(x_t) &= 2\dot{x}^T(t)Px(t) + 2\dot{x}^T(t) \int_{-\tau}^0 Qx(t+\xi)d\xi \\ &\quad + 2x^T(t)Qx(t) - 2x^T(t)Qx(t-\tau) \\ &\quad + \tau \bar{x}^T(t)\bar{R}\bar{x}(t) - \int_{-\tau}^0 \bar{x}^T(t+\xi)\bar{R}\bar{x}(t+\xi)d\xi \\ &\quad + x^T(t)Sx(t) - x^T(t-\tau)Sx(t-\tau) \\ &\quad + 2\mu\dot{x}^T(t)U\dot{x}(t) - \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{x}^T(s)U\dot{x}(s)ds.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Jensen [Gu et al., 2003, Cor. B.9] na equação anterior tem-se

$$\begin{aligned}\dot{V}_r(x_t) &\leq 2\dot{x}^T(t)Px(t) + 2\dot{x}^T(t) \int_{-\tau}^0 Qx(t+\xi)d\xi \\ &\quad + 2x^T(t)Qx(t) - 2x^T(t)Qx(t-\tau) \\ &\quad + \tau \bar{x}^T(t)\bar{R}\bar{x}(t) \\ &\quad - \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^0 \bar{x}^T(t+\xi)d\xi \bar{R} \int_{-\tau}^0 \bar{x}(t+\xi)d\xi \\ &\quad + x^T(t)Sx(t) - x^T(t-\tau)Sx(t-\tau) \\ &\quad + 2\mu\dot{x}^T(t)U\dot{x}(t) - \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{x}^T(s)U\dot{x}(s)ds.\end{aligned}$$

Finalmente, usando a definição de  $\bar{R}$  em (2.3), substituindo  $\bar{x}^T(\cdot)$  por  $[x^T(\cdot) \ \dot{x}^T(\cdot)]$ , adicionando o termo nulo em (2.11) e considerando o limitante superior para  $v(t)$  em



(2.12), na desigualdade acima obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r(x_t) \leq & \zeta^T \Theta \zeta + 2\mu \dot{x}^T(t) U \dot{x}(t) \\ & + \mu [x^T(t) F + \dot{x}^T(t) G] A_r U^{-1} A_r^T [F^T x(t) + G^T \dot{x}(t)], \end{aligned} \quad (2.13)$$

sendo

$$\zeta^T = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \quad x^T(t - \tau) \quad \int_{-\tau}^0 x^T(t + \xi) d\xi]$$

e  $\Theta$  em (2.4).

Ademais, (2.13) pode ser rescrita da forma

$$\dot{V}_r(x_t) \leq \zeta^T \hat{\Theta} \zeta, \quad (2.14)$$

sendo que  $\hat{\Theta}$  é equivalente a  $\bar{\Theta}$  em (2.9) pelo complemento de Schur.

Portanto, baseado na desigualdade em (2.14) e aplicando o complemento de Schur em  $\hat{\Theta}$ , se a LMI em (2.9) é satisfeita, então a condição:  $\dot{V}_r(x_t) \leq -\epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ) é atendida, completando a demonstração. ■

## 2.3 Sistema incerto sujeito a retardo variante no tempo

Inicialmente, note que a condição apresentada no Teorema 2.2 se reduz a condição apresentada no Teorema 2.1 quando  $\mu = 0$ , ou seja, quando  $r(t) = \tau$ . Sendo assim, o Teorema 2.1 é um caso particular do Teorema 2.2. Portanto, nesta seção a condição de análise de estabilidade apresentada na seção anterior para sistemas sujeitos a retardo no variante tempo é estendida para o caso em que os parâmetros do sistema não são precisamente conhecidos.

Considerando o contexto de condições de análise de estabilidade baseadas em LMIs, existem duas principais representações para sistemas incertos sujeitos a retardo no tempo: a limitada em norma e a politópica. Neste trabalho é escolhida a abordagem politópica, a qual é apresentada a seguir.

## Sistemas com incertezas poliedrais

Neste trabalho usa-se a variável  $\alpha$  para representar os parâmetros incertos em um sistema. A classe de sistemas lineares na forma (2.8), mas com incertezas paramétricas, é representada da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + A_r(\alpha)x(t - r(t)), \quad (2.15)$$

sendo que as matrizes  $A(\alpha)$  e  $A_r(\alpha)$  não são precisamente conhecidas, mas pertencem a um domínio politópico  $\mathcal{P}$  com vértices conhecidos  $A_i$  e  $A_{r,i}$  dado por

$$\mathcal{P} = \left\{ A(\alpha), A_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n} : [A(\alpha) \ A_r(\alpha)] = \sum_{i=1}^N \alpha_i [A_i \ A_{r,i}]; \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1; \alpha_i \geq 0 \right\}. \quad (2.16)$$

Assim, qualquer  $A(\alpha)$  e  $A_r(\alpha)$  em  $\mathcal{P}$  podem ser escritas como uma combinação convexa dos vértices  $A_i$  e  $A_{r,i}$  em termos de  $\alpha$ , sendo  $\alpha_i \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ .

No contexto de análise de estabilidade de sistemas com incertezas poliedrais, o conceito de estabilidade quadrática, amplamente utilizado na literatura, tem como principal característica ser independente dos parâmetros incertos. Ou seja, o conceito de estabilidade quadrática garante a estabilidade do sistema para todo domínio de incerteza independente de qualquer tipo de variação dos parâmetros incertos. Nesse trabalho, o conceito de estabilidade quadrática é utilizado e a condição de análise de estabilidade proposta é apresentada a seguir.

Portanto, considerado o sistema incerto sujeito a retardo no tempo em (2.15) e o conceito de estabilidade quadrática é apresentado o seguinte resultado.

**Teorema 2.3.** *Considere o sistema em (2.15),  $r(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  e suponha que as matrizes deste sistemas pertençam ao domínio politópico  $\mathcal{P}$  (2.16). Sejam dados  $\tau > 0$ , escalar para o valor nominal do retardo no tempo, e  $\mu \geq 0$ , um limitante superior para a perturbação do retardo no tempo  $r(t)$ . Então, o sistema em (2.15) é assintoticamente estável, se existirem matrizes com dimensões  $n \times n$ :  $F, G, P = P^T, S = S^T, Q, R_1, R_2 = R_2^T, R_3, U = U^T$  tais que as LMIs em (2.2), (2.3) e as LMIs a seguir, sejam*

satisfeitas para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ :

$$\bar{\Theta}_i = \begin{bmatrix} \theta & P + A_i^T G^T - F + \tau R_2^T & F A_{r,i} - Q + \frac{1}{\tau} R_3 & -\frac{1}{\tau} R_2 & \mu F A_{r,i} \\ * & \tau R_3 - G - G^T + 2\mu U & G A_{r,i} & Q & \mu G A_{r,i} \\ * & * & -\frac{1}{\tau} R_3 - S & \frac{1}{\tau} R_2 & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\tau} R_1 & 0 \\ * & * & * & * & -\mu U \end{bmatrix} < 0, \quad (2.17)$$

na qual  $v$  representa os vértices do politopo  $\mathcal{P}$  e  $\theta = \text{sm}\{Q + F A_i\} + S + \tau R_1 - \frac{1}{\tau} R_3$ .  $\square$

**Demonstração:** Esta demonstração segue exatamente os mesmos passos da demonstração do Teorema 2.2, considerando o sistema incerto em (2.15) considerando o funcional em (2.10).

Inicialmente, note que a condição  $V_r(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ) não leva em conta a dinâmica do sistema. Assim, uma condição suficiente para satisfazer a condição:  $V_r(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ), é garantir que as LMIs (2.2), (2.3) e (2.17) sejam satisfeitas. Esta conclusão segue diretamente da demonstração do Teorema 2.2.

Agora é demonstrado que a derivada do funcional em (2.10) satisfaz a condição:  $\dot{V}_r(x_t) \leq -\epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ), se a LMI em (2.17) é satisfeita. Seguindo os mesmos passos na demonstração do Teorema 2.2 e considerando o domínio politópico  $\mathcal{P}$  (2.16) chegamos na seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r(x_t) \leq & \sum_{i=1}^N \alpha_i \zeta^T \Theta_i \zeta + \sum_{i=1}^N \alpha_i 2\mu \dot{x}^T(t) U \dot{x}(t) \\ & + \mu [x^T(t) F + \dot{x}^T(t) G] \left( \sum_{v=1}^k \alpha_v A_{r,i} \right) U^{-1} \left( \sum_{v=1}^{\kappa} \alpha_v A_{r,i}^T \right) [F^T x(t) + G^T \dot{x}(t)], \end{aligned} \quad (2.18)$$

sendo

$$\zeta^T = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \quad x^T(t - \tau) \int_{-\tau}^0 x^T(t + \xi) d\xi]$$

e  $\Theta_i$  definido como  $\Theta$  em (2.4) adicionando o índice subscrito  $i$  nas matrizes  $A$  e  $A_r$ .

Ademais, (2.18) pode ser rescrita na seguinte forma:

$$\dot{V}_r(x_t) \leq \zeta^T \Theta(\alpha_i) \zeta, \quad (2.19)$$

sendo que  $\Theta(\alpha_i)$  pelo complemento de Schur é equivalente a

$$\sum_{v=1}^{\kappa} \alpha_i \bar{\Theta}_i,$$

assim uma condição suficiente para garantir que (2.19) seja satisfeita é garantir que  $\bar{\Theta}_i < 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ . Portanto, se as LMIs em (2.17) são satisfeitas para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ , então a condição:  $\dot{V}_r(x_t) \leq -\epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ) é atendida, completando a demonstração. ■

## 2.4 Exemplos numéricos

Nesta seção são apresentados três exemplos. O primeiro analisa a estabilidade de um sistema sujeito a retardo no tempo por meio do Teorema 2.1, o segundo analisa a estabilidade de um sistema sujeito a retardo variante no tempo por meio do Teorema 2.2 e o terceiro analisa a estabilidade de um sistema incerto sujeito a retardo variante no tempo por meio do Teorema 2.3.

Para a implementação das LMIs propostas foi utilizado o pacote computacional do MATLAB: LMI Control Toolbox (LMIC) [Gahinet et al., 1995].

**Exemplo 2.1.** *Considere o seguinte sistema*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0,9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t - \tau),$$

sendo  $\tau$  um retardo no tempo constante.

Portanto, aplicando o Teorema 2.1 considerando alguns valores para  $\tau$  a Tabela 2.1 é obtida.

	$\tau$								
<b>Análise</b>	0	1	2	3	4	4,35	4,46	4,47	4,48
Estável	X	X	X	X	X	X	X	X	
Instável									X

Tabela 2.1: Análise de Estabilidade do sistema com retardo constante.

Sabe-se, por meio de métodos analíticos que o sistema acima é estável até o máximo retardo  $\tau = 6,17$ , veja por exemplo [Gu et al., 2003, pág. 192]. Assim, é claro que o método proposto é conservador. Uma alternativa para reduzir este conservadorismo é considerar métodos de discretização do funcional de Lyapunov-Krasovskii [Gu et al., 2003]. Entretanto, no presente trabalho optou-se por não utilizar métodos de discretização pois estes aumentam a complexidade do problema de otimização a medida que o número de partições aumenta.

**Exemplo 2.2.** Considere o seguinte sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0,9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t - r(t)),$$

sendo que  $r(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ .

Neste exemplo é realizado o seguinte teste, dado um valor de  $\tau$  é aplicado o Teorema 2.2 para encontrar o valor máximo de  $\mu$ , tal que, o sistema permaneça estável. Assim, usando os resultados encontrados, a Figura 2.1 é obtida. Esta figura deixa claro que quando maior o valor nominal do retardo no tempo  $\tau$  menor é a perturbação  $\mu$  que este retardo pode estar sujeito para o sistema manter a estabilidade.

O autor desconhece um método analítico exato capaz de lidar com o sistema apresentado neste exemplo, destacando uma vantagem do método numérico proposto.

**Exemplo 2.3.** Considere o seguinte sistema

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + A_r(\alpha)x(t - r(t)), \quad (2.20)$$

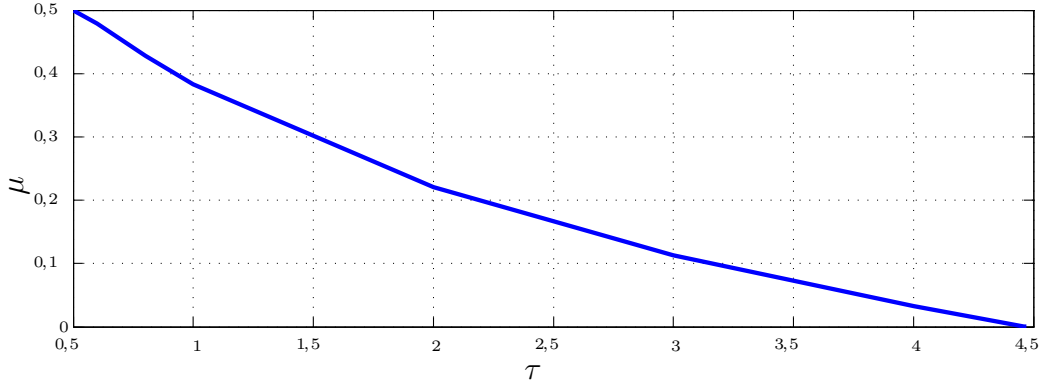


Figura 2.1: Máximo  $\mu$  permissível para um dado  $\tau$ . Para o máximo retardo nominal  $\tau = 4,47s$  o valor de variação máxima foi  $\mu = 0,0001$ .

com  $r(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  e

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} -2p_1(t) & 0 \\ 0 & -0,9p_2(t) \end{bmatrix}, \quad A_r(\alpha) = \begin{bmatrix} -1p_3(t) & 0 \\ -1p_4(t) & -1p_5(t) \end{bmatrix},$$

nas quais as incertezas impostas aos parâmetros das matrizes são independentes e todas pertencem a um mesmo intervalo:  $p_i \in [0,9, 1,1]$  para  $i = 1, \dots, 5$ . Assim, as matrizes incertas deste sistema pertencem a um domínio politópico como definido em (2.16) com  $N = 32$  vértices, que são apresentados no Apêndice A.

Com o intuito de verificar a eficiência do método proposto neste exemplo é realizado o seguinte teste, considerando um valor de  $\tau$  fixo aplicaremos o Teorema 2.3 para encontrar o máximo valor de  $\mu$ , tal que o sistema permaneça estável. A Tabela 2.2 apresenta os resultados obtidos.

		$p_i(t) \in [0,9, 1,1] \quad \forall i = 1, \dots, 5$				
$\tau$	0,5	0,6	0,8	1	2	2,4
$\mu$	0,4202	0,3877	0,3287	0,2758	0,0677	0,0007

Tabela 2.2: Análise de estabilidade sistema incerto em (2.20) com incerteza de  $\pm 10\%$  nos parâmetros.

Em seguida, o teste realizado acima é repetido quatro vezes, mas considerando o percentual de incerteza diferente em cada caso. São considerados os seguintes percentuais

de incerteza: 0,5%, 1%, 2%, 5% e os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6, respectivamente.

$p_i(t) \in [0,995, 1,005] \quad \forall i = 1, \dots, 5$								
$\tau$	0,5	0,6	0,8	1	2	3	4	4,25
$\mu$	0,5	0,4737	0,4223	0,3774	0,2122	0,102	0,0185	0,0002

Tabela 2.3: Análise de estabilidade sistema incerto em (2.20) com incerteza de  $\pm 0,5\%$  nos parâmetros.

$p_i(t) \in [0,99, 1,01] \quad \forall i = 1, \dots, 5$								
$\tau$	0,5	0,6	0,8	1	2	3	4	4,05
$\mu$	0,4977	0,4688	0,417	0,3716	0,204	0,091	0,0047	0,0008

Tabela 2.4: Análise de estabilidade sistema incerto em (2.20) com incerteza de  $\pm 1\%$  nos parâmetros.

$p_i(t) \in [0,98, 1,02] \quad \forall i = 1, \dots, 5$							
$\tau$	0,5	0,6	0,8	1	2	3	3,73
$\mu$	0,4884	0,4591	0,4064	0,3601	0,1876	0,0694	0,0005

Tabela 2.5: Análise de estabilidade sistema incerto em (2.20) com incerteza de  $\pm 2\%$  nos parâmetros.

Assim, usando os resultados encontrados, a Figura 2.2 é obtida, a qual apresenta as curvas de  $\tau \times \max\{\mu\}$  de acordo com as Tabelas 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6. Assim, como no exemplo anterior, esta figura deixa claro que quando maior o valor nominal do retardo no tempo  $\tau$  menor é a perturbação  $\mu$  que este retardo pode estar sujeito para o sistema manter a estabilidade. E também, quanto maior a incerteza nos parâmetros menores os valores de  $\tau$  e  $\mu$  para que a estabilidade seja mantida.

		$p_i(t) \in [0,95, 1,05] \quad \forall i = 1, \dots, 5$					
$\tau$	0,5	0,6	0,8	1	2	3	3,05
$\mu$	0,4615	0,431	0,3758	0,3269	0,1405	0,0069	0,0011

Tabela 2.6: Análise de estabilidade sistema incerto em (2.20) com incerteza de  $\pm 5\%$  nos parâmetros.

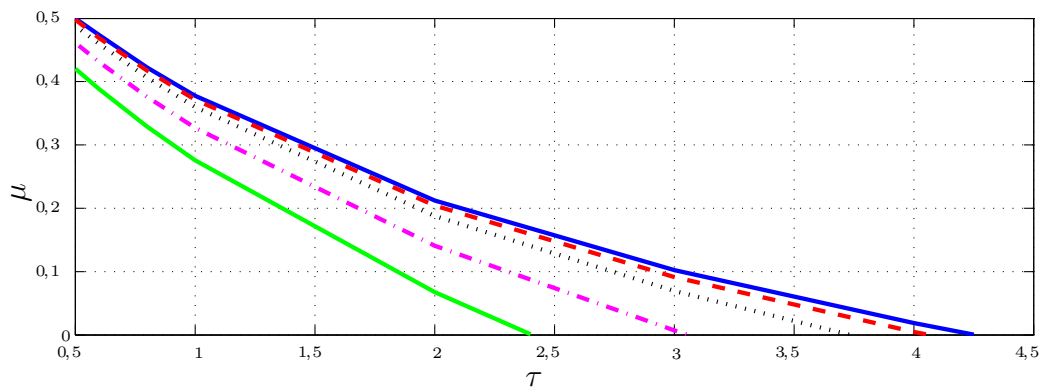


Figura 2.2: Curvas de  $\tau \times \max\{\mu\}$  de acordo com as Tabelas 2.2(em linha contínua verde), 2.3(em linha contínua azul), 2.4(em linha tracejada vermelha), 2.5(em linha pontilhada preta) e 2.6(em linha traço-ponto magenta).



# Capítulo 3

## Projeto do Filtro

Neste capítulo são apresentadas condições formuladas em LMIs para o projeto de filtros robustos, LMIs também são exploradas em [Henry and Zolghadri, 2004] para o projeto de filtro para sistemas sem retardo, diferentemente desta proposta. Para o projeto de filtros robustos com a forma apresentada no Capítulo 1 em (1.2) e reescrito a seguir por conveniência:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_f \hat{x}(t) + A_{\tau f} \hat{x}(t - \tau) + B_f y(t) \\ \hat{z}(t) &= C_f \hat{x}(t) + C_{\tau f} \hat{x}(t - \tau) + D_f y(t) \\ \hat{x}(t) &= 0, \quad \forall t \in [-\tau, 0],\end{aligned}$$

sendo as matrizes  $A_f$ ,  $A_{\tau f}$ ,  $B_f$ ,  $C_f$ ,  $C_{\tau f}$  e  $D_f$  variáveis a serem determinadas. Observe que a estrutura do filtro considerado acima não leva em conta o valor exato do retardo variante no tempo  $r(t)$ , e sim o valor nominal deste retardo,  $\tau$ . Portanto, o filtro considerado não necessita da medição do valor do retardo em tempo real.

O erro ou resíduo de filtragem é definido como,  $\tilde{z}(t) \triangleq z(t) - \hat{z}(t)$ , sendo  $z(t)$  o vetor de saída do sistema a ser estimado como definido em (1.1). Assim, é considerado o seguinte índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  da forma:

$$J(t) \triangleq \int_0^\infty [\tilde{z}^T(t) \tilde{z}(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t)] dt, \quad (3.1)$$

com  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ .

Neste capítulo são apresentadas condições de projeto de filtros robustos para: *i*) sistemas precisamente conhecidos sujeitos a retardo variante no tempo, e *ii*) sistemas incertos sujeitos a retardo variante no tempo.

A seguir são apresentados os resultados deste capítulo.

### 3.1 Sistemas precisamente conhecidos

Considere o sistema sujeito a retardo no tempo, apresentado anteriormente no Capítulo 1 em (1.1), reescrito a seguir por conveniência:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_r x(t - r(t)) + Bw(t) \\ z(t) &= Cx(t) + C_\tau x(t - \tau) + Dw(t) \\ y(t) &= Lx(t) + L_r x(t - r(t)) + L_w w(t) \\ x(t) &= \phi(t), \forall t \in [-\max\{r(t)\}, 0].\end{aligned}\tag{3.2}$$

O teorema a seguir apresenta uma condição LMI para o projeto de filtro robusto para o sistema acima.

**Teorema 3.1.** *Considere o sistema sujeito a retardo no tempo em (3.2) (apresentado no Capítulo 1 em (1.1)) com  $r(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ . Sejam dados  $\tau > 0$ , escalar para o valor nominal do retardo no tempo,  $\mu \geq 0$ , um limitante superior para a perturbação do retardo no tempo  $r(t)$  e dois escalares de ajuste,  $\delta_1$  e  $\delta_2$ . O problema de filtragem (apresentado no Capítulo 1, pág. 7) é factível se existirem matrizes  $\bar{A}_f, \bar{A}_{\tau f}, G_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\bar{B}_f \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\bar{C}_f, \bar{C}_{\tau f} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $\bar{D}_f \in \mathbb{R}^{q \times m}$ ,  $F_1, G_1 \in \mathbb{R}^{2n \times n}$  e  $P = P^T, Q, R_1 = R_1^T, R_2, R_3 = R_3^T, S = S^T, U = U^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ , tais que as LMIs em (2.2) e (2.3) sejam satisfeitas e*

$$\tilde{\Theta} < 0,\tag{3.3}$$

sendo que os elementos não nulos de  $\tilde{\Theta}$  nas posições  $(i, j)$  para  $i, j = 1, 2, \dots, 7$ , defini-

dos aqui por  $\tilde{\Theta}_{(i,j)}$ , são dados por

$$\begin{aligned}
\tilde{\Theta}_{(1,1)} &= \text{sm}\{F_1 A \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_\delta (G_2 A - \bar{B}_f L) \mathcal{I}_1 + Q \\
&\quad + \mathcal{I}_\delta \bar{A}_f (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1)\} + S + \tau R_1 - \frac{1}{\tau} R_3, \\
\tilde{\Theta}_{(1,2)} &= \{G_1 A \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_I (G_2 A - \bar{B}_f L) \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_I \bar{A}_f (\mathcal{I}_2 \\
&\quad - \mathcal{I}_1)\}^T - F_1 \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_\delta G_2 \mathcal{I}_2 + P + \tau R_2^T, \\
\tilde{\Theta}_{(1,3)} &= (F_1 A_r + \mathcal{I}_\delta G_2 A_r) \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_\delta \bar{A}_{\tau f} (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1) \\
&\quad - Q + \frac{1}{\tau} R_3, \\
\tilde{\Theta}_{(1,4)} &= -\frac{1}{\tau} R_2 \\
\tilde{\Theta}_{(1,5)} &= \mu (F_1 + \mathcal{I}_\delta G_2) A_r \mathcal{I}_1, \\
\tilde{\Theta}_{(1,6)} &= F_1 B + \mathcal{I}_\delta (G_2 B - \bar{B}_f L_w), \\
\tilde{\Theta}_{(1,7)} &= \mathcal{I}_1^T (C^T - L^T \bar{D}_f^T) + (\mathcal{I}_2^T - \mathcal{I}_1^T) \bar{C}_f^T, \\
\tilde{\Theta}_{(2,2)} &= \text{sm}\{-G_1 \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_I G_2 \mathcal{I}_2\} + \tau R_3 + 2\mu U, \\
\tilde{\Theta}_{(2,3)} &= (G_1 A_r + \mathcal{I}_I G_2 A_r) \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_I \bar{A}_{\tau f} (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1), \\
\tilde{\Theta}_{(2,4)} &= Q, \quad \tilde{\Theta}_{(2,5)} = \mu (G_1 + \mathcal{I}_I G_2) A_r \mathcal{I}_1, \\
\tilde{\Theta}_{(2,6)} &= G_1 B + \mathcal{I}_I (G_2 B - \bar{B}_f L_w), \\
\tilde{\Theta}_{(3,3)} &= -S - \frac{1}{\tau} R_3, \\
\tilde{\Theta}_{(3,4)} &= \frac{1}{\tau} R_2, \\
\tilde{\Theta}_{(3,7)} &= \mathcal{I}_1^T (C_\tau^T - L_r^T \bar{D}_f^T) + (\mathcal{I}_2^T - \mathcal{I}_1^T) \bar{C}_{\tau f}^T, \\
\tilde{\Theta}_{(4,4)} &= -\frac{1}{\tau} R_1, \quad \tilde{\Theta}_{(5,5)} = -\mu U, \quad \tilde{\Theta}_{(6,6)} = -\gamma^2 I, \\
\tilde{\Theta}_{(6,7)} &= D^T - L_w^T D_f^T, \quad \tilde{\Theta}_{(7,7)} = -I,
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_I &= \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}, & \mathcal{I}_\delta &= \begin{bmatrix} \delta_1 I \\ \delta_2 I \end{bmatrix}, \\
\mathcal{I}_1 &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T, & \mathcal{I}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Em caso afirmativo, as matrizes do filtro em (1.2) são dadas por:  $A_f = G_2^{-1} \bar{A}_f$ ,  $A_{\tau f} = G_2^{-1} \bar{A}_{\tau f}$ ,  $B_f = G_2^{-1} \bar{B}_f$ ,  $D_f = \bar{D}_f$ ,  $C_f = \bar{C}_f$  e  $C_{\tau f} = \bar{C}_{\tau f}$ .  $\square$

**Demonstração:** Inicialmente é demonstrado que, se as LMIs em (2.2), (2.3) e (3.3)

são satisfeitas, a dinâmica do erro de filtragem em (1.3) com as matrizes do filtro dadas em (1.4) é assintoticamente estável. Neste caso, as condições dadas no Teorema 2.2 também são satisfeitas. O primeiro passo é definir a seguinte estrutura para as matrizes  $F$  e  $G$  no Teorema 2.2,

$$F = [F_1 \ \mathcal{I}_\delta G_2], \quad G = [G_1 \ \mathcal{I}_I G_2], \quad (3.5)$$

sendo,  $F_1, G_1$  matrizes  $2n \times n$ ,  $G_2$  uma matriz  $n \times n$ ,  $\mathcal{I}_I$  e  $\mathcal{I}_\delta$  definidos em (3.4). É possível demonstrar por meio de transformações de congruência que a escolha acima para  $G$  é sem perda de generalidade [Duan et al., 2006].

Considerando que as LMIs em (2.2), (2.3) e (3.3) são satisfeitas com  $F$  e  $G$  definidas em (3.5), o elemento  $\tilde{\Theta}_{(2,2)}$  deve ser definido negativo, para que a LMI (3.3) seja satisfeita, sendo que  $R_3$  deve ser definido positivo para que a LMI em (3.3) seja satisfeita e  $U$  deve ser definido positivo para que  $\tilde{\Theta}_{(5,5)} < 0$ . Implicando que a matriz  $G_2$  é não singular.

Portanto, sendo dadas as matrizes  $F$  e  $G$  em (3.5) e  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{A}_r$  e  $\tilde{A}_r$  em (1.4), nota-se que se as LMIs em (2.2), (2.3) e (3.3) são satisfeitas, então as LMIs no Teorema 2.2 também são satisfeitas.

Para o critério  $\mathcal{H}_\infty$ , note que se (1.3) é estável, considerando condições iniciais nulas, i.e.,  $V(\tilde{x})|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  e  $V(\tilde{x})|_{\phi(t)=0} = 0$ , respectivamente, então (3.1) satisfaz ( $\forall w(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ ):

$$\begin{aligned} J(t) &\leq \int_0^\infty [\tilde{z}^T(t)\tilde{z}(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)] dt \\ &\quad + V(\tilde{x}_t)|_{t \rightarrow \infty} - V(\tilde{x}_t)|_{\phi(t_0)=0} \\ &= \int_0^\infty [\tilde{z}^T(t)\tilde{z}(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(\tilde{x}_t)] dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Portanto, a LMI em (3.3) garante que  $J(t) < 0$ , sendo esta obtida seguindo os mesmos passos no Teorema 2.2, porém considerando  $w(t) \neq 0$  em (2.6), escolhendo  $F$  e  $G$  como em (3.5), utilizando as matrizes do erro de filtragem em (1.4) e, finalmente, aplicando o complemento de Schur. ■

## 3.2 Sistemas incertos

Considere o sistema sujeito a retardo no tempo, apresentado anteriormente em (1.1), agora apresentando incertezas paramétricas, assim como em (2.15), outros trabalhos como [Weng et al., 2008] também considera sistemas sujeitos a incertezas paramétricas porém com retardo constante no tempo, diferentemente aqui utilizaremos sistemas com retardo variante no tempo. A variável  $\alpha$  é utilizada para representar os parâmetros incertos no sistema, assim o sistema incerto é descrito como:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + A_r(\alpha)x(t - r(t)) + Bw(t) \\
 z(t) &= Cx(t) + C_\tau x(t - \tau) + Dw(t) \\
 y(t) &= Lx(t) + L_r x(t - r(t)) + L_w w(t) \\
 x(t) &= \phi(t), \forall t \in [-\max\{r(t)\}, 0],
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

sendo que as matrizes  $A(\alpha)$  e  $A_r(\alpha)$  não são precisamente conhecidas, mas pertencem a um domínio politópico  $\mathcal{P}$  com vértices conhecidos  $A_i$  e  $A_{r,i}$  dado em (2.16) e reescrito a seguir

$$\mathcal{P} = \left\{ A(\alpha), A_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n} : [A(\alpha) \ A_r(\alpha)] = \sum_{i=1}^N \alpha_i [A_i \ A_{r,i}]; \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1; \alpha_i \geq 0 \right\}. \tag{3.8}$$

Assim, qualquer  $A(\alpha)$  e  $A_r(\alpha)$  em  $\mathcal{P}$  podem ser escritas como uma combinação convexa dos vértices  $A_i$  e  $A_{r,i}$  em termos de  $\alpha$ , sendo  $\alpha_i \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ .

As condições de projeto do filtro para sistemas incertos são apresentadas a seguir.

**Teorema 3.2.** *Considere o sistema sujeito a retardo no tempo em (3.7) com  $r(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  e suponha que as matrizes deste sistemas pertençam ao domínio politópico  $\mathcal{P}$  (2.16). Sejam dados  $\tau > 0$ , escalar para o valor nominal do retardo no tempo,  $\mu \geq 0$ , um limitante superior para a perturbação do retardo no tempo  $r(t)$  e dois escalares de ajuste,  $\delta_1$  e  $\delta_2$ . O problema de filtragem (apresentado no Capítulo 1, pág. 7) é factível se existirem matrizes  $\bar{A}_f, \bar{A}_{\tau f}, G_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\bar{B}_f \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\bar{C}_f, \bar{C}_{\tau f} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $\bar{D}_f \in \mathbb{R}^{q \times m}$ ,  $F_1, G_1 \in \mathbb{R}^{2n \times n}$  e  $P = P^T, Q, R_1 = R_1^T, R_2, R_3 = R_3^T, S = S^T, U = U^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ , tais que*

as LMIs em (2.2) e (2.3) sejam satisfeitas e para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ , as LMIs a seguir também sejam simultaneamente satisfeitas:

$$\tilde{\Theta}_i < 0, \quad (3.9)$$

sendo que os elementos não nulos de  $\tilde{\Theta}_i$  nas posições  $(k, m)$  para  $k, m = 1, 2, \dots, 7$ , definidos aqui por  $\tilde{\Theta}_{(k,m)i}$ , são dados por

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{(1,1)i} &= \text{sm}\{F_1 A_i \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_\delta (G_2 A_i - \bar{B}_f L) \mathcal{I}_1 + Q \\ &\quad + \mathcal{I}_\delta \bar{A}_f (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1)\} + S + \tau R_1 - \frac{1}{\tau} R_3, \\ \tilde{\Theta}_{(1,2)i} &= \{G_1 A_i \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_I (G_2 A_i - \bar{B}_f L) \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_I \bar{A}_f (\mathcal{I}_2 \\ &\quad - \mathcal{I}_1)\}^T - F_1 \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_\delta G_2 \mathcal{I}_2 + P + \tau R_2^T, \\ \tilde{\Theta}_{(1,3)i} &= (F_1 A_{r,i} + \mathcal{I}_\delta G_2 A_{r,i}) \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_\delta \bar{A}_{\tau f} (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1) \\ &\quad - Q + \frac{1}{\tau} R_3, \\ \tilde{\Theta}_{(1,4)} &= -\frac{1}{\tau} R_2 \\ \tilde{\Theta}_{(1,5)i} &= \mu (F_1 + \mathcal{I}_\delta G_2) A_{r,i} \mathcal{I}_1, \\ \tilde{\Theta}_{(1,6)i} &= F_1 B + \mathcal{I}_\delta (G_2 B - \bar{B}_f L_w), \\ \tilde{\Theta}_{(1,7)i} &= \mathcal{I}_1^T (C^T - L^T \bar{D}_f^T) + (\mathcal{I}_2^T - \mathcal{I}_1^T) \bar{C}_f^T, \\ \tilde{\Theta}_{(2,2)i} &= \text{sm}\{-G_1 \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_I G_2 \mathcal{I}_2\} + \tau R_3 + 2\mu U, \\ \tilde{\Theta}_{(2,3)i} &= (G_1 A_{r,i} + \mathcal{I}_I G_2 A_{r,i}) \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_I \bar{A}_{\tau f} (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1), \\ \tilde{\Theta}_{(2,4)i} &= Q, \quad \tilde{\Theta}_{(2,5)} = \mu (G_1 + \mathcal{I}_I G_2) A_{r,i} \mathcal{I}_1, \\ \tilde{\Theta}_{(2,6)i} &= G_1 B + \mathcal{I}_I (G_2 B - \bar{B}_f L_w), \\ \tilde{\Theta}_{(3,3)i} &= -S - \frac{1}{\tau} R_3, \\ \tilde{\Theta}_{(3,4)} &= \frac{1}{\tau} R_2, \\ \tilde{\Theta}_{(3,7)i} &= \mathcal{I}_1^T (C_\tau^T - L_r^T \bar{D}_f^T) + (\mathcal{I}_2^T - \mathcal{I}_1^T) \bar{C}_{\tau f}^T, \\ \tilde{\Theta}_{(4,4)i} &= -\frac{1}{\tau} R_1, \quad \tilde{\Theta}_{(5,5)} = -\mu U, \quad \tilde{\Theta}_{(6,6)} = -\gamma^2 I, \\ \tilde{\Theta}_{(6,7)i} &= D^T - L_w^T D_f^T, \quad \tilde{\Theta}_{(7,7)} = -I, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_I &= \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}, & \mathcal{I}_\delta &= \begin{bmatrix} \delta_1 I \\ \delta_2 I \end{bmatrix}, \\ \mathcal{I}_1 &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T, & \mathcal{I}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (3.10)$$

na qual  $v$  representa os vértices do polítopo  $\mathcal{P}$ . Em caso afirmativo, as matrizes do filtro em (1.2) são dadas por:  $A_f = G_2^{-1} \bar{A}_f$ ,  $A_{\tau f} = G_2^{-1} \bar{A}_{\tau f}$ ,  $B_f = G_2^{-1} \bar{B}_f$ ,  $D_f = \bar{D}_f$ ,  $C_f = \bar{C}_f$  e  $C_{\tau f} = \bar{C}_{\tau f}$ .  $\square$

**Demonstração:** Esta demonstração segue exatamente os mesmos passos da demonstração do Teorema 3.2, considerando o sistema incerto em (3.7) e o funcional em (2.10). Inicialmente é demonstrado que, se as LMIs em (2.2), (2.3) e (3.9) são satisfeitas, a dinâmica do erro de filtragem em (1.3) descrita como em (3.11), mas com as matrizes do filtro modificadas dadas em (3.12) é assintoticamente estável. Neste caso, as condições dadas no Teorema 2.3 também são satisfeitas.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}(\alpha) \tilde{x}(t) + \tilde{A}_\tau(\alpha) \tilde{x}(t - \tau) + \tilde{B} w(t) - \tilde{A}_r(\alpha) \int_{r(t)}^{\tau} \dot{\tilde{x}}(t - \xi) d\xi \\ \tilde{z}(t) &= \tilde{C} \tilde{x}(t) + \tilde{C}_\tau \tilde{x}(t - \tau) + \tilde{D} w(t), \end{aligned} \quad (3.11)$$

sendo  $\tilde{x}(t) \triangleq [x^T(t) \ x^T(t) - \hat{x}^T(t)]^T$ ,  $\tilde{z}(t) \triangleq z(t) - \hat{z}(t)$  e

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\alpha) &= \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ A(\alpha) - B_f L - A_f & A_f \end{bmatrix}, & \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B \\ B - B_f L_w \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_\tau(\alpha) &= \begin{bmatrix} A_r(\alpha) & 0 \\ A_r(\alpha) - B_f L_r - A_{\tau f} & A_{\tau f} \end{bmatrix}, & \tilde{A}_r(\alpha) &= \begin{bmatrix} A_r(\alpha) & 0 \\ A_r(\alpha) - B_f L_r & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{C} &= \begin{bmatrix} C - D_f L - C_f & C_f \end{bmatrix}, & \tilde{D} &= D - D_f L_w, \\ \tilde{C}_\tau &= \begin{bmatrix} C_\tau - D_f L_r - C_{\tau f} & C_{\tau f} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Portanto como apresentado em (3.8), a equação da dinâmica do erro de filtragem em (3.11) e as matrizes em (3.12) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}(t) &= \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \tilde{A}_i \right) \tilde{x}(t) + \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \tilde{A}_{\tau,i} \right) \tilde{x}(t - \tau) + \tilde{B}w(t) \\
&\quad - \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \tilde{A}_{r,i} \right) \int_{r(t)}^{\tau} \dot{\tilde{x}}(t - \xi) d\xi \\
\tilde{z}(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{C}_{\tau}\tilde{x}(t - \tau) + \tilde{D}w(t),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

sendo  $\tilde{x}(t) \triangleq [x^T(t) \ x^T(t) - \hat{x}^T(t)]^T$ ,  $\tilde{z}(t) \triangleq z(t) - \hat{z}(t)$  e

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(\alpha) &= \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \tilde{A}_i \right) = \begin{bmatrix} \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i A_i \right) & 0 \\ \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i A_i \right) - B_f L - A_f & A_f \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ A_i - B_f L - A_f & A_f \end{bmatrix}, \\
\tilde{B} &= \begin{bmatrix} B \\ B - B_f L_w \end{bmatrix}, \\
\tilde{A}_{\tau}(\alpha) &= \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \tilde{A}_{\tau,i} \right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \begin{bmatrix} A_{r,i} & 0 \\ A_{r,i} - B_f L_r - A_{\tau f} & A_{\tau f} \end{bmatrix}, \\
\tilde{A}_r(\alpha) &= \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \tilde{A}_{r,i} \right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \begin{bmatrix} A_{r,i} & 0 \\ A_{r,i} - B_f L_r & 0 \end{bmatrix}, \\
\tilde{C} &= \begin{bmatrix} C - D_f L - C_f & C_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = D - D_f L_w, \\
\tilde{C}_{\tau} &= \begin{bmatrix} C_{\tau} - D_f L_r - C_{\tau f} & C_{\tau f} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Assim, a equação da dinâmica do erro de filtragem em (3.13) pode ser reescrita em uma forma mais compacta:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}(t) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \left( \tilde{A}_i \tilde{x}(t) + \tilde{A}_{\tau,i} \tilde{x}(t - \tau) + \tilde{B}w(t) - \tilde{A}_{r,i} \int_{r(t)}^{\tau} \dot{\tilde{x}}(t - \xi) d\xi \right) \\
\tilde{z}(t) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \left( \tilde{C} \tilde{x}(t) + \tilde{C}_{\tau} \tilde{x}(t - \tau) + \tilde{D}w(t) \right)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

O primeiro passo é definir a seguinte estrutura para as matrizes  $F$  e  $G$  no Teorema 2.3,

$$F = [F_1 \ \mathcal{I}_{\delta} G_2], \quad G = [G_1 \ \mathcal{I}_I G_2], \tag{3.16}$$



sendo,  $F_1, G_1$  matrizes  $2n \times n$ ,  $G_2$  uma matriz  $n \times n$ ,  $\mathcal{I}_I$  e  $\mathcal{I}_\delta$  definidos em (3.4). É possível demonstrar por meio de transformações de congruência que a escolha acima para  $G$  é sem perda de generalidade [Duan et al., 2006].

Considerando que as LMIs em (2.2), (2.3) e (3.3) são satisfeitas com  $F$  e  $G$  definidas em (3.16), o elemento  $\tilde{\Theta}_{(2,2)i}$  deve ser definido negativo, para que a LMI (3.9) seja satisfeita, sendo que  $R_3$  deve ser definido positivo para que a LMI em (3.9) seja satisfeita e  $U$  deve ser definido positivo para que  $\tilde{\Theta}_{(5,5)i} < 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ . Implicando que a matriz  $G_2$  é não singular.

Portanto, sendo dadas as matrizes  $F$  e  $G$  em (3.16) e  $\tilde{A}(\alpha)$ ,  $\tilde{A}_\tau(\alpha)$  e  $\tilde{A}_r(\alpha)$  em (3.14), nota-se que se as LMIs em (2.2), (2.3) e (3.3) são satisfeitas, então as LMIs no Teorema 2.3 também são satisfeitas.

Para o critério  $\mathcal{H}_\infty$ , da mesma forma como adotado no Teorema 3.1, note que se (3.11) é estável, considerando condições iniciais nulas, i.e.,  $V(\tilde{x})|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  e  $V(\tilde{x})|_{\phi(t)=0} = 0$ , respectivamente, então (3.1) satisfaz ( $\forall w(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ ):

$$\begin{aligned} J(t) &\leq \int_0^\infty [\tilde{z}^T(t)\tilde{z}(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)] dt \\ &\quad + V(\tilde{x}_t)|_{t \rightarrow \infty} - V(\tilde{x}_t)|_{\phi(t_0)=0} \\ &= \int_0^\infty [\tilde{z}^T(t)\tilde{z}(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(\tilde{x}_t)] dt. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Neste caso  $\tilde{z}(t)$  é definido conforme a Equação (3.15), portanto, a LMI em (3.9) garante que  $J(t) < 0$ , sendo esta obtida seguindo os mesmos passos no Teorema 2.3, porém considerando  $w(t) \neq 0$  em (2.6), escolhendo  $F$  e  $G$  como em (3.16), utilizando as matrizes do erro de filtragem em (3.14) e, finalmente, aplicando o complemento de Schur.

■

### 3.3 Exemplos numéricos

Nesta seção são apresentados três exemplos números de projeto de filtro robusto usando os métodos apresentados anteriormente. Os três exemplos consideram sistemas sujeitos a retardo variante no tempo, mas o primeiro considera um sistema precisamente

conhecido e os demais consideram um sistema incerto.

**Exemplo 3.1.** *Considere o seguinte sistema*

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_r x(t - r(t)) + Bw(t) \\
 z(t) &= Cx(t) + C_\tau x(t - \tau) + Dw(t) \\
 y(t) &= Lx(t) + L_r x(t - r(t)) + L_w w(t) \\
 x(t) &= \phi(t), \forall t \in [-\max\{r(t)\}, 0],
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

com  $L_w = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0,9 \end{bmatrix}, A_r = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 D &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, L_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Para ilustração considere que  $r(t) = 2 + 0,1 \cos(t)$ , assim  $r(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  com  $\tau = 2$ ,  $\mu = 0,1$  e  $|w(t)| \leq 0,01$ . Assim, aplicando o Teorema 3.1, utilizando  $\delta_1 = 1$  e  $\delta_2 = 10$ , é projetado um filtro da forma em (1.2) com as seguintes matrizes:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline A_{\tau f} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} -5,5970 & -7,5225 & 3,9577 \\ -4,6866 & -13,983 & 6,7810 \\ \hline -2,9027 & -0,6390 & \\ -2,6705 & -2,2237 & \end{array} \right],$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} C_f & D_f \\ \hline C_{\tau f} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 4,9467 & -1,9612 & 0,9667 \\ -0,4947 & 0,1961 & 0,4033 \\ \hline 1,1622 & -0,2317 & \\ -0,1162 & 0,0232 & \end{array} \right].$$

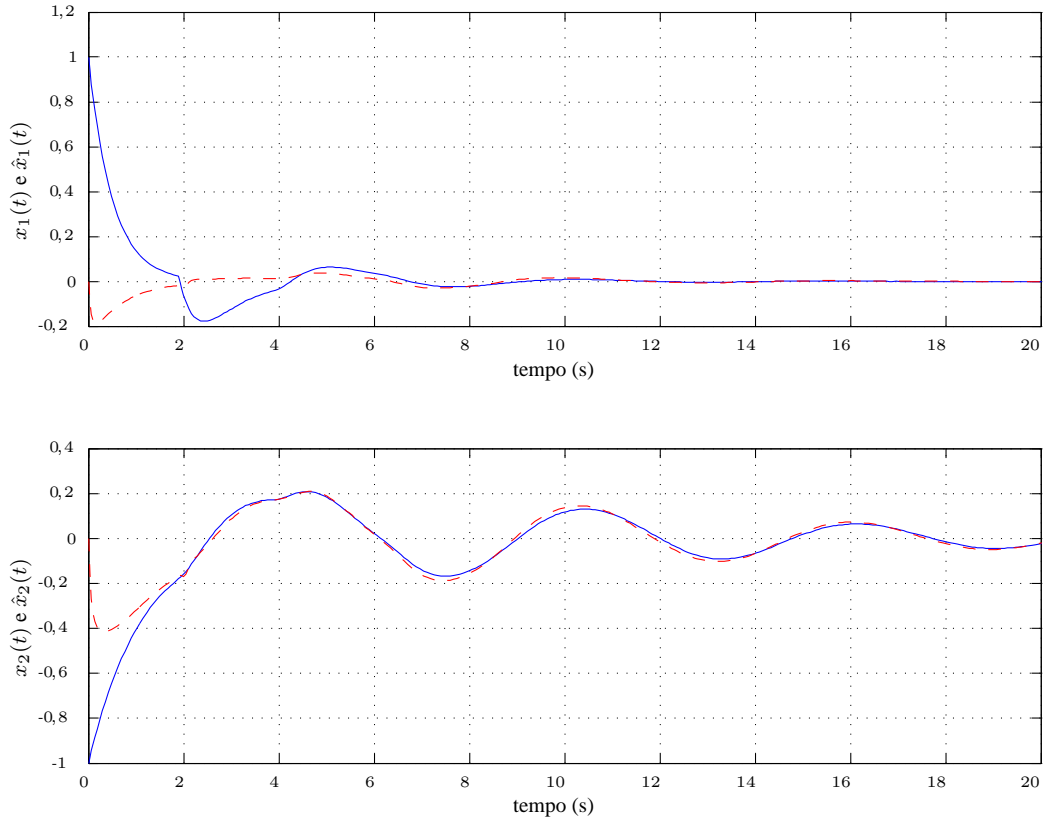


Figura 3.1: Estados do sistema  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  (em linha contínua) e estados estimados  $\hat{x}_1(t)$  e  $\hat{x}_2(t)$  (em linha tracejada) - Exemplo 3.1.

A Figura 3.1 apresenta os estados do sistema e os estados estimados por meio do filtro projetado. Nota-se que, para  $\tau = 2$ , na Figura 3.1 o intervalo de tempo  $[0s, 2s]$  é considerado como tempo de convergência do algoritmo de simulação, uma vez que, não existem valores com o retardo  $\tau$  para os estados.

**Exemplo 3.2.** Considere o seguinte sistema sujeito a retardo variante no tempo com incerteza nos parâmetros:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + A_r(\alpha)x(t - r(t)) + Bw(t) \\
 z(t) &= Cx(t) + C_r x(t - \tau) + Dw(t) \\
 y(t) &= Lx(t) + L_r x(t - r(t)) + L_w w(t) \\
 x(t) &= \phi(t), \forall t \in [-\max\{r(t)\}, 0],
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

com  $L_w = 0$ ,

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} -2p_1(t) & 0 \\ 0 & -0,9p_2(t) \end{bmatrix}, A_r(\alpha) = \begin{bmatrix} -1p_3(t) & 0 \\ -1p_4(t) & -1p_5(t) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, L_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

nas quais as incertezas ( $p_i(t)$  para  $i = 1, \dots, 5$ ) impostas aos parâmetros das matrizes  $A(\alpha)$  e  $A_r(\alpha)$  são independentes e todas pertencem a um mesmo intervalo. Assim, as matrizes incertas deste sistema pertencem a um domínio politópico como definido em (2.16) com  $N = 32$  vértices.

Para ilustração considere que  $p_i(t) \in [0,995, 1,005]$  para todo  $i = 1, \dots, 5$ ,  $|w(t)| \leq 0,01$  e que  $r(t) = 4 + 0,01 \cos(t)$ , assim  $r(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  com  $\tau = 4$ ,  $\mu = 0,01$ . Então, aplicando o Teorema 3.2, utilizando  $\delta_1 = 5$  e  $\delta_2 = 12$  é projetado um filtro da forma em (3.15) para este sistema, sendo que as matrizes do filtro são dadas a seguir:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline A_{\tau f} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} -5,7769 & -5,1468 & 3,5468 \\ -4,4332 & -12,1778 & 7,7577 \\ \hline -2,6554 & -0,1702 & \\ -1,6547 & -1,3920 & \end{array} \right],$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} C_f & D_f \\ \hline C_{\tau f} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 3,8571 & -0,8442 & 0,5777 \\ -0,3857 & 0,0844 & 0,4422 \\ \hline 1,2467 & -0,0349 & \\ -0,1247 & 0,0035 & \end{array} \right].$$

A Figura 3.2 apresenta 32 simulações dos estados do sistema considerando todos vértices possíveis de  $A(\alpha)$  e  $A_r(\alpha)$  de acordo com as variações de  $p_i(t)$  e os estados estimados por meio do filtro projetado. Na Figura 3.2 a sobreposição das curvas faz

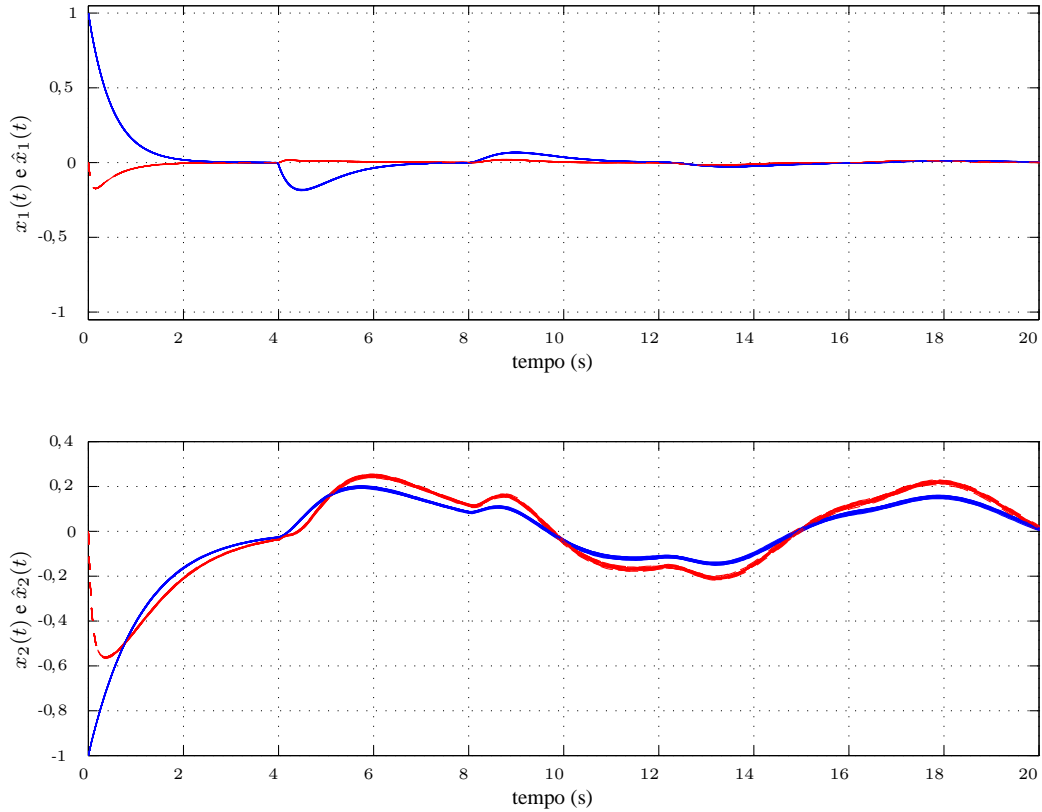


Figura 3.2: Estados do sistema  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  (em linha contínua) para os 32 vértices da Equação (3.19) e estados estimados  $\hat{x}_1(t)$  e  $\hat{x}_2(t)$  do filtro (em linha tracejada) - Exemplo 3.2.

com que as mesmas sejam diferenciadas somente pelas cores azul e vermelho, estados do sistema e estados do filtro, respectivamente. Nesse caso o intervalo de convergência é  $[0s, 4s]$ , para  $\tau = 4$ .

**Exemplo 3.3.** Considere o seguinte sistema sujeito a retardo variante no tempo com incerteza nos parâmetros, descrito como a seguir:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + A_r(\alpha)x(t - r(t)) + Bw(t) \\
 z(t) &= Cx(t) + C_\tau x(t - \tau) + Dw(t) \\
 y(t) &= Lx(t) + L_r x(t - r(t)) + L_w w(t) \\
 x(t) &= \phi(t), \forall t \in [-\max\{r(t)\}, 0],
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

com  $L_w = 0$ ,

$$\begin{aligned}
A(\alpha) &= \begin{bmatrix} -2p_1(t) & 0 \\ 0 & -0,9p_2(t) \end{bmatrix}, A_r(\alpha) = \begin{bmatrix} -1p_3(t) & 0 \\ -1p_4(t) & -1p_5(t) \end{bmatrix}, \\
B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
D &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, L_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

nas quais as incertezas ( $p_i(t)$  para  $i = 1, \dots, 5$ ) impostas aos parâmetros das matrizes  $A(\alpha)$  e  $A_r(\alpha)$  são independentes e todas pertencem a um mesmo intervalo. Assim, as matrizes incertas deste sistema pertencem a um domínio politópico como definido em (2.16) com  $N = 32$  vértices.

Para ilustração considere que  $p_i(t) \in [0,99, 1,01]$  para todo  $i = 1, \dots, 5$ ,  $|w(t)| \leq 0,01$  e que  $r(t) = 2 + 0,1 \cos(t)$ , assim  $r(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  com  $\tau = 2$ ,  $\mu = 0,1$ . Portanto, o sistema considerado neste exemplo é o mesmo considerado no Exemplo 3.1, mas agora sujeito a incertezas diferentes nos parâmetros das matrizes  $A(\alpha)$  e  $A_r(\alpha)$ . Assim, aplicando o Teorema 3.2, utilizando  $\delta_1 = 1$  e  $\delta_2 = 10$  é projetado um filtro da forma em (3.15) para este sistema, sendo que as matrizes do filtro podem ser dadas a seguir:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline A_{\tau f} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} -5,6181 & -7,3002 & 3,8542 \\ -4,7211 & -14,2391 & 6,9317 \\ \hline -3,4582 & -0,5568 & \\ -3,4574 & -2,1659 & \end{array} \right],$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} C_f & D_f \\ \hline C_{\tau f} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 5,0598 & -1,8264 & 0,8954 \\ -0,5060 & 0,1826 & 0,4105 \\ \hline 1,4192 & -0,2416 & \\ -0,1419 & 0,0242 & \end{array} \right],$$

A Figura 3.3 apresenta 32 simulações dos estados do sistema e os estados estimados por meio do filtro projetado para cada uma das combinações dos vértices possíveis de

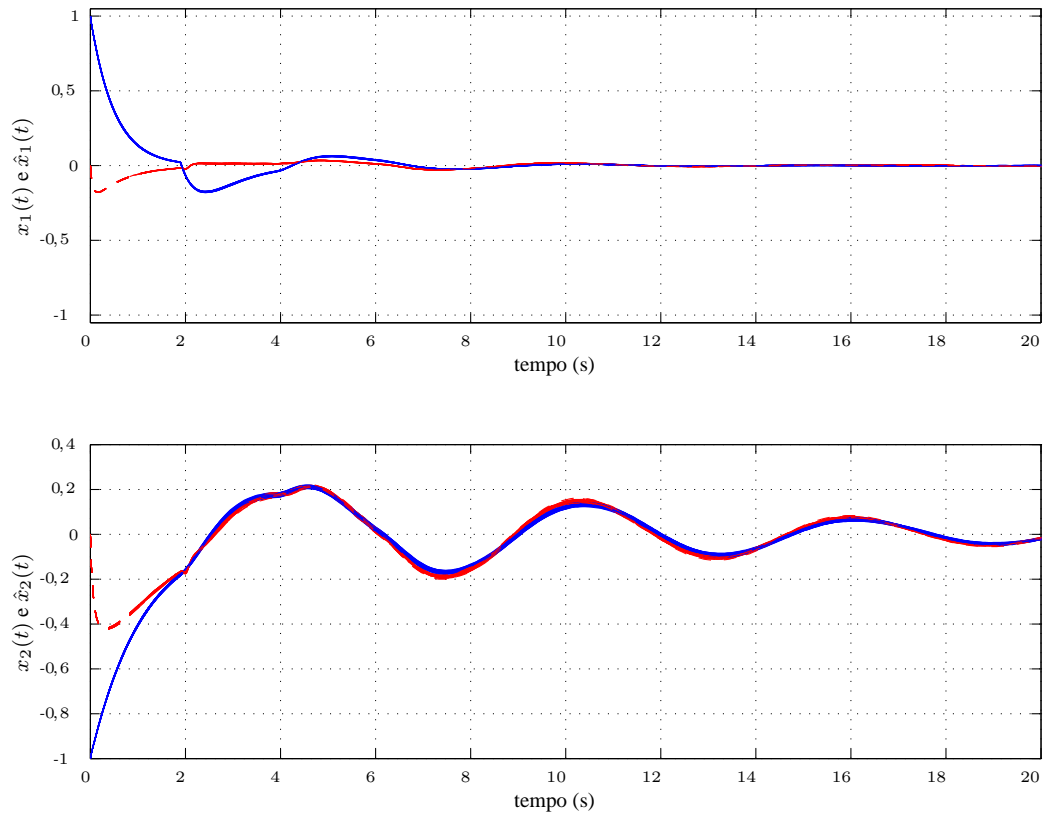


Figura 3.3: Estados do sistema  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  (em linha contínua) para os 32 vértices da Equação (3.20) e estados estimados  $\hat{x}_1(t)$  e  $\hat{x}_2(t)$  do filtro (em linha tracejada) - Exemplo 3.3.

$A(\alpha)$  e  $A_r(\alpha)$  de acordo com as variações dadas de  $p_i(t)$  para  $i = 1, \dots, 5$ . Na Figura 3.3 a sobreposição das curvas faz com que as mesmas sejam diferenciadas somente pelas cores azul e vermelho, estados do sistema e estados do filtro, respectivamente.

O exemplo apresentado mostra, portanto, a eficiência da técnica proposta no projeto de filtros para sistemas com incertezas poliedrais, descrito na Seção 3.2.

## Capítulo 4

# Detecção de Falha

Como parte importante de todo método FDI, a função de decisão é usada para discernir entre o sistema em operação normal e em falha. Neste trabalho a função de decisão utiliza o erro de filtragem gerado pela diferença entre o valor da saída real do sistema e o valor da saída gerada pelo filtro. Para detecção da falha, um limiar de decisão é determinado tomando como referência um intervalo de valores do erro de filtragem relativo ao sistema em operação normal. Uma vez determinado o limiar de detecção, a falha será detectada quando os valores do erro de filtragem forem superiores ao valor deste limiar, ou seja, o sistema será considerado *em falha*.

Em um sistema FDI, tão importante quando determinar as condições de operação normal de um determinado processo é determinar com maior precisão e rapidez o instante no qual o estado de operação do processo passa de *normal* para em *falha*.

Entre os parâmetros que servem para qualificar um FDI estão o índice de falsos positivos e o de falsos negativos, que representam, respectivamente, a taxa de eventos que o sistema de detecção de falhas errou ao considerar o estado de operação do sistema em *falha* e a taxa de eventos considerados erroneamente *normal* quando a falha realmente ocorreu.

A função de decisão considerada neste trabalho é apresentada na próxima seção.



## 4.1 Função de decisão escolhida

A função de decisão escolhida neste trabalho é apresentada em [Wang et al., 2010] e devido sua eficiência também é considerada aqui. Esta função de decisão é apresentada abaixo:

**Função de decisão** [Wang et al., 2010] – *A função de decisão é definida como:*

$$J_r(\nu) = \|\tilde{z}(t)\|_{2,\nu} = \left( \int_0^\nu \tilde{z}(\tau)^T \tilde{z}(\tau) d\tau \right)^{1/2}, \quad (4.1)$$

sendo  $\nu$  o intervalo de tempo de avaliação do resíduo de erro de estimação,  $\tilde{z}(t)$ . Ademais, o valor do limiar de decisão é dado por

$$J_{th} = \sup_{w(t) \in \mathcal{L}_2, f(t)=0} J_r(T), \quad (4.2)$$

sendo  $T$  um intervalo de tempo para a avaliação da função de decisão no qual o sistema opera normalmente, isto é a falha  $f(t)$  é nula, e em regime permanente.

## 4.2 Exemplos numéricos

Nesta seção são apresentados três exemplos numéricos. Os três exemplos consideram sistemas sujeitos a retardo variante no tempo, mas o primeiro considera um sistema precisamente conhecido e os demais consideram um sistema incerto.

**Exemplo 4.1.** *Novamente para o sistema descrito no Exemplo 3.1:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_r x(t - r(t)) + Bw(t) \\ z(t) &= Cx(t) + C_r x(t - \tau) + Dw(t) \\ y(t) &= Lx(t) + L_r x(t - r(t)) + L_w w(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad \forall t \in [-\max\{r(t)\}, 0], \end{aligned} \quad (4.3)$$

com  $L_w = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0,9 \end{bmatrix}, A_r = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 D &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, L_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

e as matrizes do filtro, calculadas no capítulo anterior:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline A_{\tau f} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} -5,5970 & -7,5225 & 3,9577 \\ -4,6866 & -13,983 & 6,7810 \\ \hline -2,9027 & -0,6390 & \\ -2,6705 & -2,2237 & \end{array} \right],$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} C_f & D_f \\ \hline C_{\tau f} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 4,9467 & -1,9612 & 0,9667 \\ -0,4947 & 0,1961 & 0,4033 \\ \hline 1,1622 & -0,2317 & \\ -0,1162 & 0,0232 & \end{array} \right].$$

Portanto, com o propósito de simulação, um sinal de falha é aplicado nos dois estados do sistema durante o intervalo de tempo  $[10s, 12s]$ , sendo que esta falha corresponde a um pulso de amplitude unitária. A Figura 4.1 apresenta os estados do sistema e os estados do filtro, na qual fica claro a presença da falha.

Assim, escolhendo o intervalo de tempo  $[2s, 6s]$ , antes da ocorrência da falha, consideramos  $T = [2s, 6s]$  em (4.2) calculando o limiar  $J_{th} = 0,3814$ . Portanto, utilizando o limiar  $J_{th} = 0,3814$  em  $\|\tilde{z}(t)\|_2$ , como apresentado na Figura 4.2 a falha no sistema é detectada no instante  $t = 10,41s$ , portanto a falha é detectada após  $0,41s$  do acontecimento real da falha. Na Figura 4.3 é apresentado o valor da saída do FD em função do tempo, onde o tempo de detecção da falha é representado graficamente.

**Exemplo 4.2.** Considere o sistema descrito na Seção 3.3 no Exemplo 3.2:

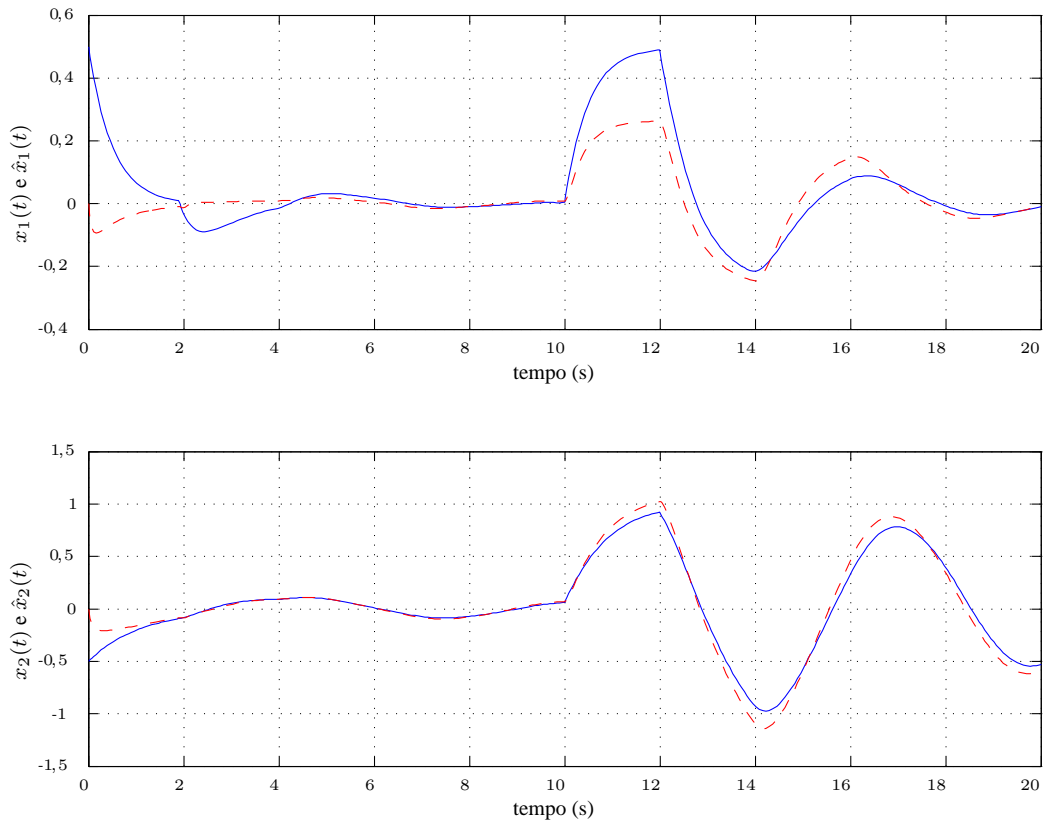


Figura 4.1: Estados do sistema  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  (em linha contínua) e estados estimados  $\hat{x}_1(t)$  e  $\hat{x}_2(t)$  (em linha tracejada) - Exemplo 4.1.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + A_r(\alpha)x(t - r(t)) + Bw(t) \\
 z(t) &= Cx(t) + C_\tau x(t - \tau) + Dw(t) \\
 y(t) &= Lx(t) + L_r x(t - r(t)) + L_w w(t) \\
 x(t) &= \phi(t), \forall t \in [-\max\{r(t)\}, 0],
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

com  $L_w = 0$ ,

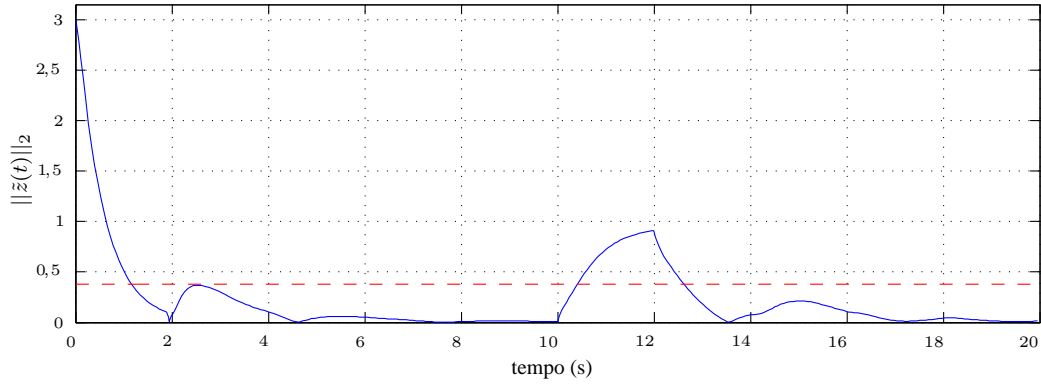


Figura 4.2: Análise do erro de estimação para detecção de falha, destacando  $J_{th} = 0,3814$  com a linha tracejada - Exemplo 4.1.

$$\begin{aligned}
 A(\alpha) &= \begin{bmatrix} -2p_1(t) & 0 \\ 0 & -0,9p_2(t) \end{bmatrix}, A_r(\alpha) = \begin{bmatrix} -1p_3(t) & 0 \\ -1p_4(t) & -1p_5(t) \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 D &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, L_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

nas quais as incertezas ( $p_i(t)$  para  $i = 1, \dots, 5$ ) impostas aos parâmetros das matrizes  $A(\alpha)$  e  $A_r(\alpha)$  são independentes e todas pertencem a um mesmo intervalo.

Para ilustração considere que  $p_i(t) \in [0,995, 1,005]$  para todo  $i = 1, \dots, 5$ ,  $|w(t)| \leq 0,01$  e que  $r(t) = 4 + 0,01 \cos(t)$ , assim  $r(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  com  $\tau = 4$ ,  $\mu = 0,01$ . Assim, aplicando o Teorema 3.2, utilizando  $\delta_1 = 5$  e  $\delta_2 = 12$  é projetado um filtro da

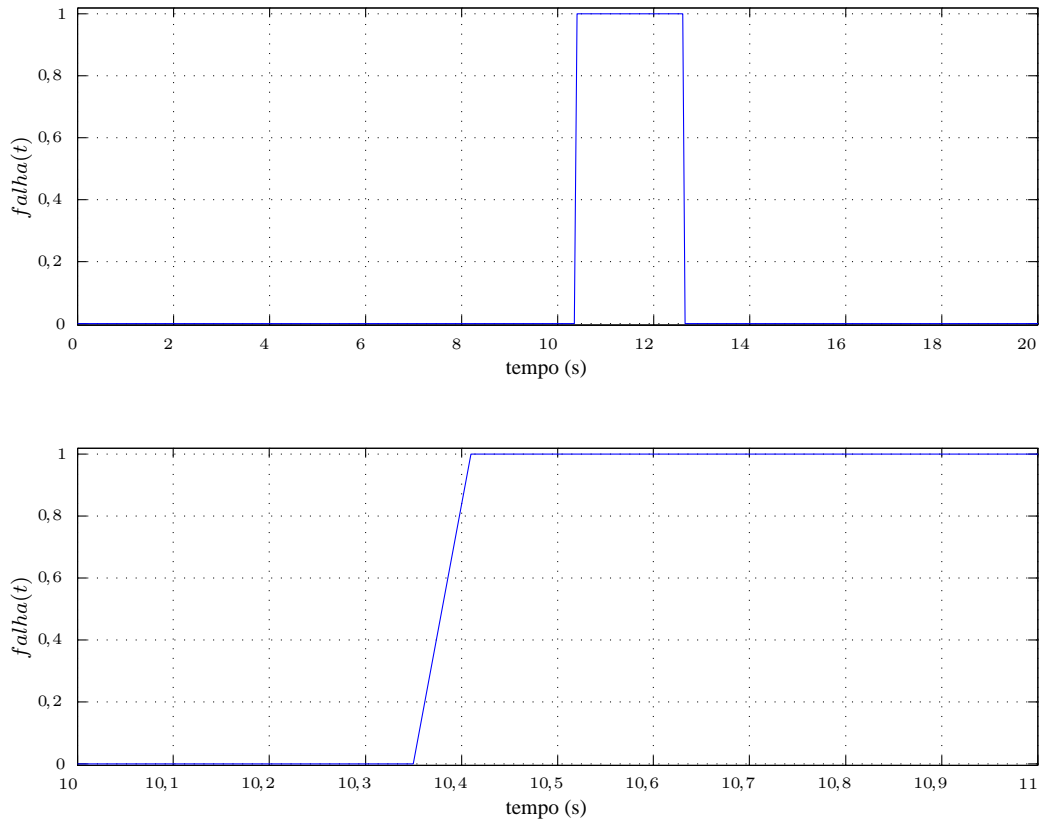


Figura 4.3: Detecção da Falha o sistema precisamente conhecido,  $f_{alha}(t) = 1$  significa falha detectada (gráfico inferior apresenta um ampliação no momento de detecção) - Exemplo 4.1.

forma em (3.15) para este sistema, sendo que as matrizes do filtro:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline A_{\tau f} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} -5,7769 & -5,1468 & 3,5468 \\ -4,4332 & -12,1778 & 7,7577 \\ \hline -2,6554 & -0,1702 & \\ -1,6547 & -1,3920 & \end{array} \right],$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} C_f & D_f \\ \hline C_{\tau f} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 3,8571 & -0,8442 & 0,5777 \\ -0,3857 & 0,0844 & 0,4422 \\ \hline 1,2467 & -0,0349 & \\ -0,1247 & 0,0035 & \end{array} \right].$$

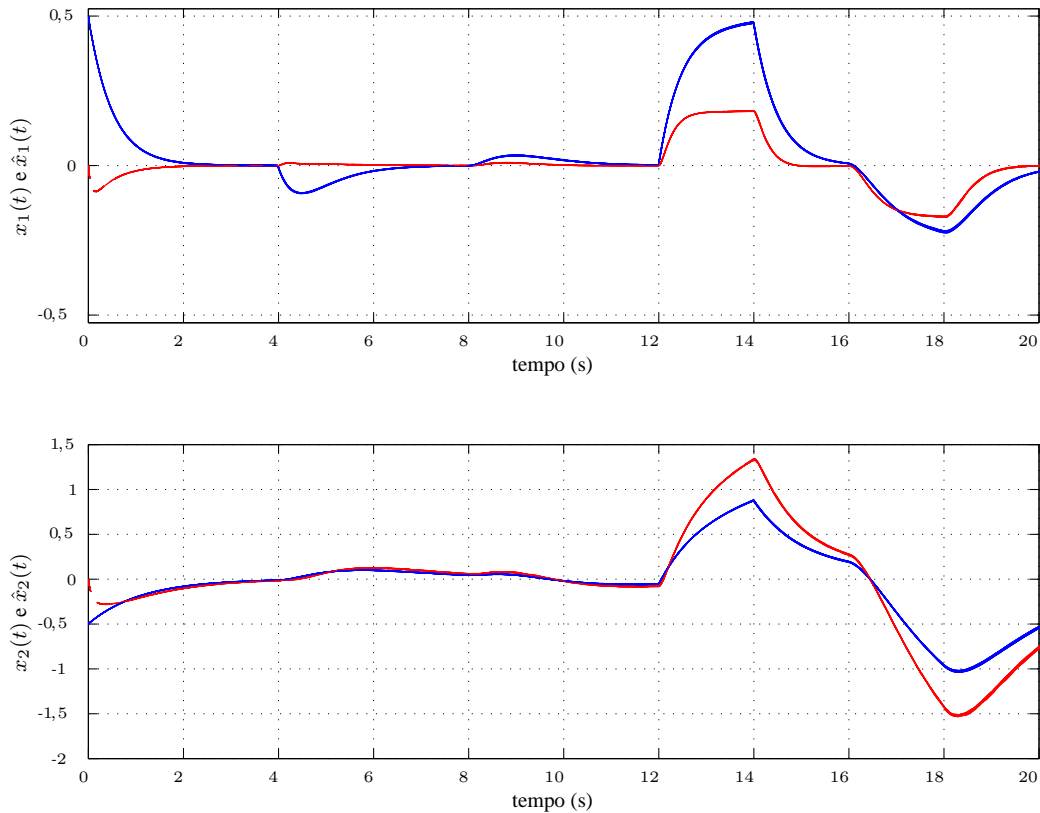


Figura 4.4: Estados do sistema  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  (em linha contínua) para dos 32 vértices da Equação (3.19) e estados estimados  $\hat{x}_1(t)$  e  $\hat{x}_2(t)$  do filtro (em linha tracejada) - Exemplo 4.2.

Da mesma forma como feito no exemplo anterior, com o propósito de simulação, um sinal de falha é aplicado nos dois estados do sistema durante o intervalo de tempo  $[12s, 14s]$ , sendo que esta falha corresponde a um pulso de amplitude unitária. A Figura 4.4 apresenta os estados do sistema, considerando todos os seus 32 vértices, e os estados do filtro, na qual fica claro a presença da falha.

Assim, escolhendo o intervalo de tempo  $[4s, 8s]$ , antes da ocorrência da falha, consideramos  $T = [4s, 8s]$  em (4.2). Portanto, realizamos simulações para os  $N = 32$  vértices do sistema e calculamos os limiares  $J_{th,i}$ , os quais juntamente com os valores  $\|\tilde{z}(t)\|_2$  são apresentados na Figura 4.5.

Para a definição do limiar de detecção para o sistema incerto foi adotado o critério de máximo valor, ou seja, o  $J_{th} = \max\{J_{th,i}\}$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ , sendo  $N = 32$ .

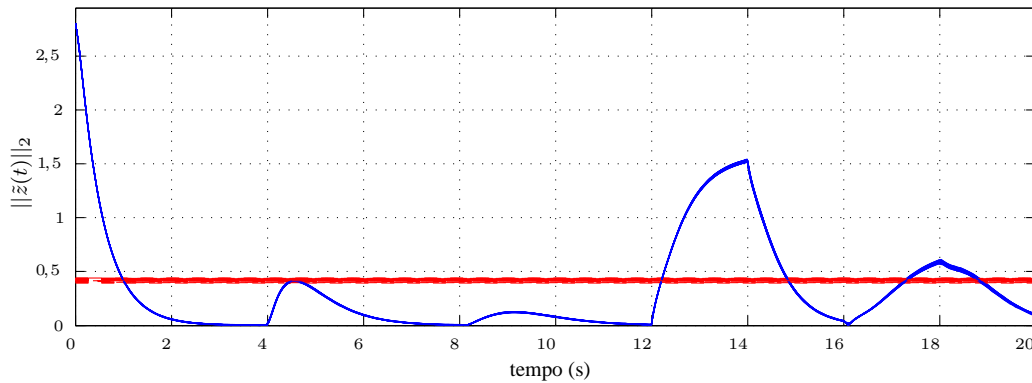


Figura 4.5: Análise do erro de estimação para detecção de falha dos 32 vértices do polítopo, destacando o módulo do resíduo (em linha contínua) e os limiares de detecção  $J_{th,i}$  (em linha tracejada) - Exemplo 4.2.

Para este sistema calculamos  $J_{th} = 0,4390$  e a Figura 4.6 apresenta este valor em linha tracejada e outras duas curvas, uma para o vértice com o menor tempo de detecção da falha e outra para o vértice com maior tempo, sendo ambos valores muito próximos:  $t_{\min} = 12,22s$  e  $t_{\max} = 12,29s$ . Na Figura 4.7 são apresentados os valores da saída do FD em função do tempo, onde os tempos de detecção da falha,  $t_{\min}$  e  $t_{\max}$ , são representados graficamente.

Neste exemplo é importante salientar, como apresentado nas Figura 4.5 e Figura 4.6, um segundo momento onde o limiar  $J_{th}$  é excedido pelo valor da função de avaliação do resíduo. Este segundo momento seria considerado uma falha, entretanto para sistemas sujeitos a retardo no tempo, há influência por parte dos estados passados, ou seja atrasados, na saída. Tendo em vista esta consideração, o FD deve, portanto, estar apto a ignorar um falso alarme de falha que pode ocorrer em um pequeno intervalo de tempo após a ocorrência da falha real, a duração deste intervalo de tempo está relacionado com o valor do retardo no tempo.

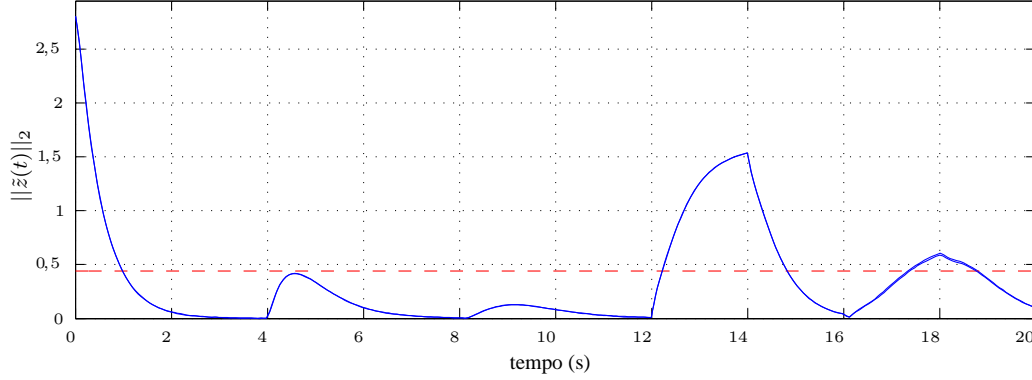


Figura 4.6: Análise do erro de estimação para detecção de falha para 2 vértices de máximo e mínimo tempos de detecção, destacando o módulo do resíduo (em linha contínua) e o limiar de detecção  $J_{th}$  (em linha tracejada) - Exemplo 4.2.

**Exemplo 4.3.** Considere o sistema descrito na Seção 3.3 Exemplo 3.3:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + A_r(\alpha)x(t - r(t)) + Bw(t) \\
 z(t) &= Cx(t) + C_\tau x(t - \tau) + Dw(t) \\
 y(t) &= Lx(t) + L_r x(t - r(t)) + L_w w(t) \\
 x(t) &= \phi(t), \forall t \in [-\max\{r(t)\}, 0],
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

com  $L_w = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 A(\alpha) &= \begin{bmatrix} -2p_1(t) & 0 \\ 0 & -0,9p_2(t) \end{bmatrix}, A_r(\alpha) = \begin{bmatrix} -1p_3(t) & 0 \\ -1p_4(t) & -1p_5(t) \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 D &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, L_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

nas quais as incertezas  $(p_i(t))$  para  $i = 1, \dots, 5$  impostas aos parâmetros das matrizes  $A(\alpha)$  e  $A_r(\alpha)$  são independentes e todas pertencem a um mesmo intervalo.

Para ilustração considere que  $p_i(t) \in [0,99, 1,01]$  para todo  $i = 1, \dots, 5$ ,  $|w(t)| \leq 0,01$  e que  $r(t) = 2 + 0,1 \cos(t)$ , assim  $r(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  com  $\tau = 2$ ,  $\mu = 0,1$ .



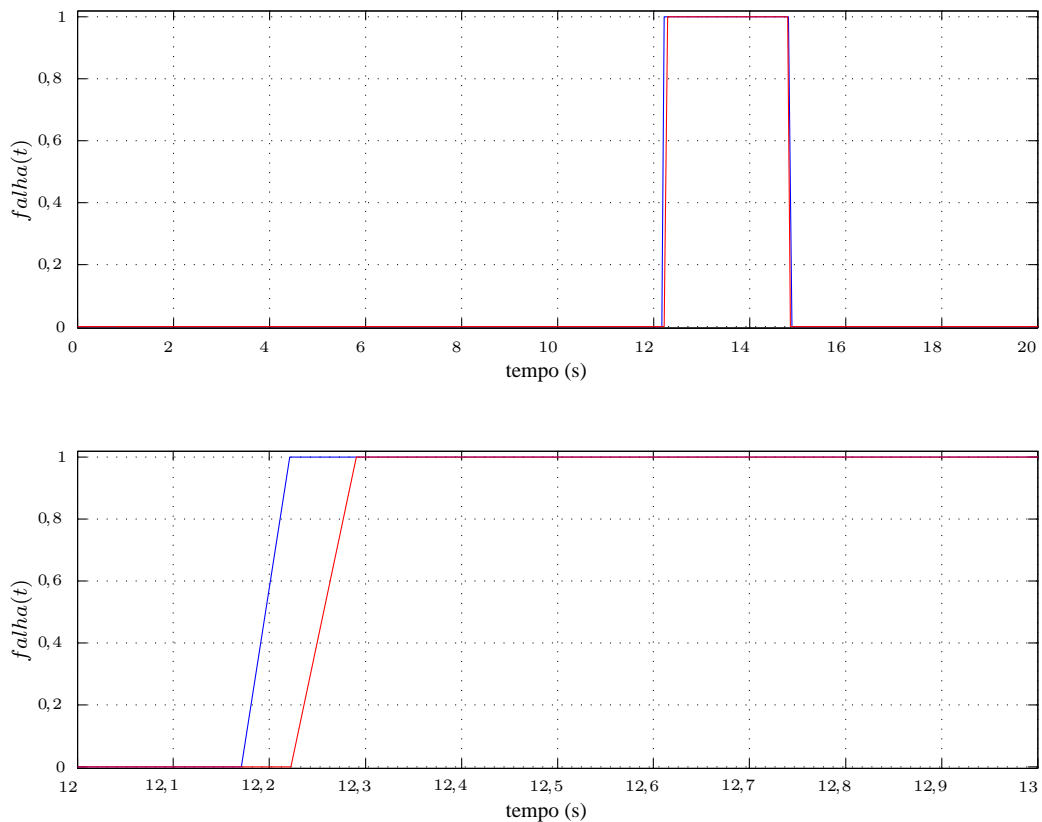


Figura 4.7: Detecção da Falha para 2 vértices de máximo (em linha vermelha) e mínimo (em linha azul) tempos de detecção, valor  $falha(t) = 1$  significa falha detectada (gráfico inferior apresenta um ampliação no momento de detecção) - Exemplo 4.2.

*Portanto, o sistema considerado neste exemplo é o mesmo considerado no Exemplo 3.1, mas agora sujeito a incertezas diferentes nos parâmetros das matrizes  $A(\alpha)$  e  $A_r(\alpha)$ . Assim, aplicando o Teorema 3.2, utilizando  $\delta_1 = 1$  e  $\delta_2 = 10$  é projetado um filtro da forma em (3.15) para este sistema, sendo que as matrizes do filtro são dadas a seguir:*

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline A_{\tau f} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} -5,6181 & -7,3002 & 3,8542 \\ -4,7211 & -14,2391 & 6,9317 \\ \hline -3,4582 & -0,5568 & \\ -3,4574 & -2,1659 & \end{array} \right],$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} C_f & D_f \\ \hline C_{\tau f} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 5,0598 & -1,8264 & 0,8954 \\ -0,5060 & 0,1826 & 0,4105 \\ \hline 1,4192 & -0,2416 & \\ -0,1419 & 0,0242 & \end{array} \right],$$

Portanto, considerando a mesma idéia nos exemplos anteriores utilizamos  $T \in [2s, 6s]$  em (4.2), para este sistema as curvas dos estados do sistema são apresentadas na Figura 4.8, portanto são analisados 32 sinais de resíduos e calculados 32 limiares de detecção como em (4.2). Ademais, com o propósito de simulação, um sinal de falha é aplicado no sistema em  $T_f \in [10s, 12s]$ .

Portanto, realizamos simulações para os  $N = 32$  vértices do sistema e calculamos o limiar  $J_{th,i}$ , os quais juntamente com os valores  $\|\tilde{z}(t)\|_2$  são apresentados na Figura 4.9.

Para a definição do limiar de detecção para o sistema incerto foi considerado  $J_{th} = \max\{J_{th,i}\}$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ . Assim, obtemos  $J_{th} = 0,3987$  e a Figura 4.10 apresenta este valor em linha tracejada e outras duas curvas, uma para o vértice com o menor tempo de detecção da falha e outra para o vértice com maior tempo, sendo ambos valores muito próximos:  $t_{\min} = 10,37s$  e  $t_{\max} = 10,44s$ . Na Figura 4.11 são apresentados os valores da saída do FD em função do tempo, onde os tempos de detecção da falha,  $t_{\min}$  e  $t_{\max}$ , são representados graficamente.

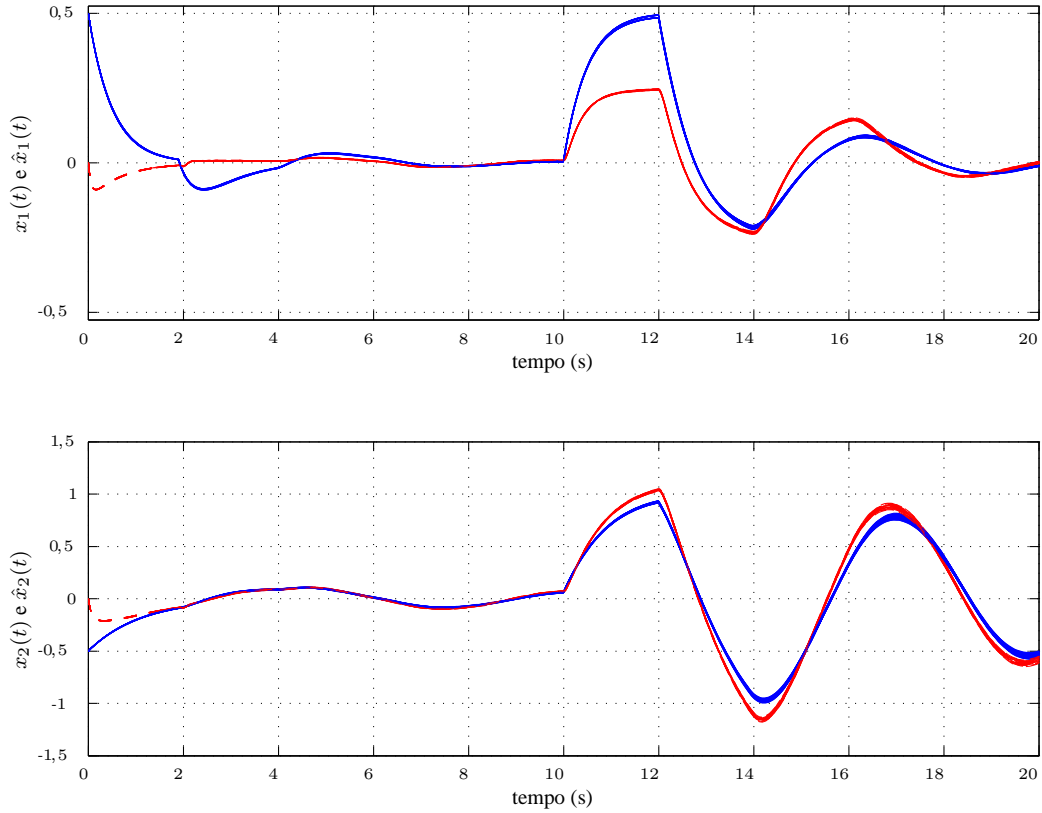


Figura 4.8: Estados do sistema  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  (em linha contínua) para dos 32 vértices da Equação (3.20) e estados estimados  $\hat{x}_1(t)$  e  $\hat{x}_2(t)$  do filtro (em linha tracejada) - Exemplo 4.3.

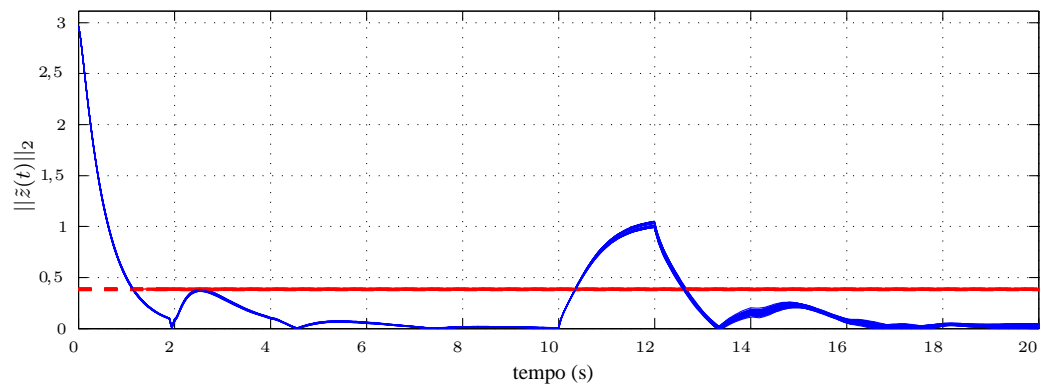


Figura 4.9: Análise do erro de estimação para detecção de falta dos 32 vértices do polítopo, destacando o módulo do resíduo (em linha contínua) e os limiares de detecção  $J_{th,i}$  (em linha tracejada) - Exemplo 4.3.

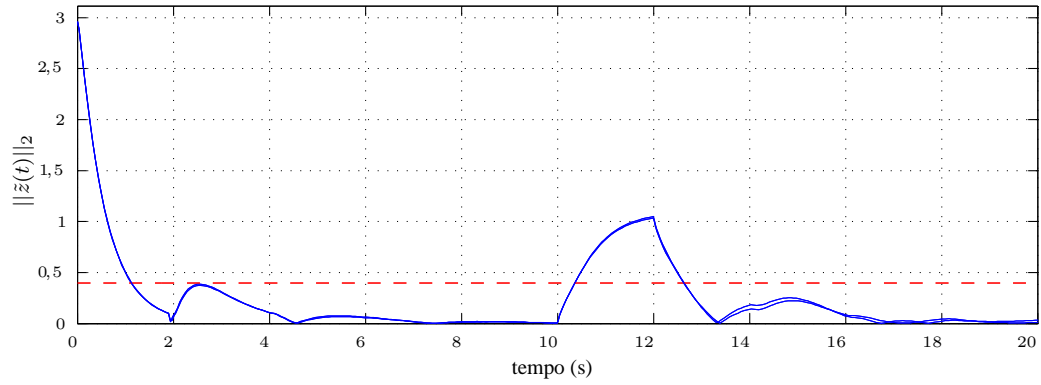


Figura 4.10: Análise do erro de estimação para detecção de falha para 2 vértices de máximo e mínimo tempos de detecção, destacando o módulo do resíduo (em linha contínua) e o limiar de detecção  $J_{th}$  (em linha tracejada) - Exemplo 4.3.

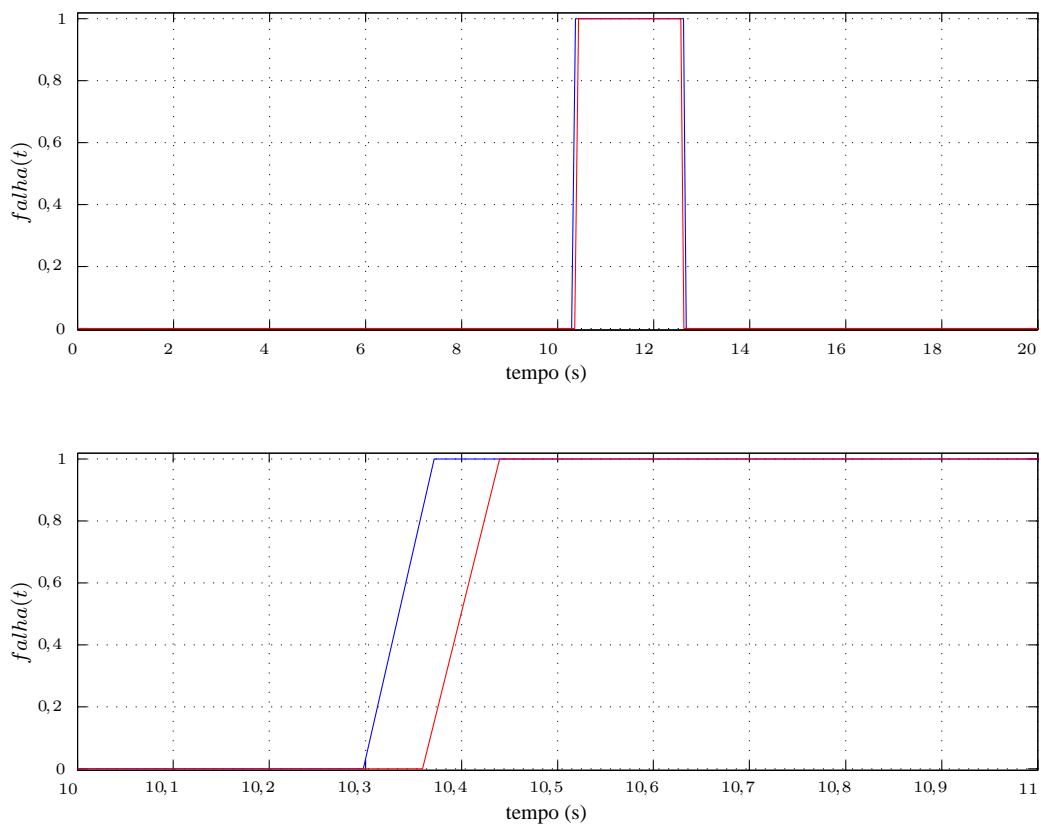


Figura 4.11: Detecção da Falha para 2 vértices de máximo (em linha vermelha) e mínimo (em linha azul) tempos de detecção, valor  $falha(t) = 1$  significa falha detectada (gráfico inferior apresenta um ampliação no momento de detecção) - Exemplo 4.3.

# Capítulo 5

## Conclusões

Neste trabalho foi proposto um método de detecção de falha, baseado em filtros robustos, para processos que são modelados como sistemas lineares de tempo contínuo sujeitos a retardo variante no tempo e a incertezas paramétricas. Sendo que, os métodos de projeto dos filtros robustos são formulados em termos de desigualdades matriciais lineares, as quais podem ser resolvidas de forma eficiente por meio de algoritmos de otimização numérica.

Ressalta-se que a capacidade de projetar um filtro robusto, cujo modelo leva em consideração a estimativa do valor médio do retardo no tempo é um diferencial entre os trabalhos já apresentados para o fim de detecção de falha. Posto isso, o modelo do filtro se aproxima mais do modelo do sistema, mas sem a necessidade de medir o valor do retardo em tempo real.

O método de análise de estabilidade proposto neste trabalho, que é a base para o desenvolvimento do método de projeto, fornece os limites do valor do retardo no tempo e das incertezas paramétricas, que devem ser respeitados na fase de projeto. O método de análise de estabilidade proposto não considera técnicas de discretização do funcional de Lyapunov-Krasovskii, entretanto, sabe-se que esta técnica reduz o conservadorismo das condições formuladas em LMIs, mas aumenta o custo computacional.

No método de projeto foi considerado dois parâmetros ajustáveis,  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , que tornam a tarefa de projetar mais complicada, mas por outro lado, torna possível ajustar índices de

desempenho do filtro, tais como reduzir os ganhos de seus parâmetros ou reduzir o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ .

Vale salientar, que como pode ser observado nos exemplos numéricos, quando se considera sistemas sujeitos a retardo no tempo, a identificação da *falha* em um dado instante poderá implicar na ocorrência de uma segunda falha tempos depois. Estes tempos, como observado nos exemplos, são da ordem do valor do retardo no tempo. Esta segunda *falha* que pode corresponder a um falso alarme, é devido a característica intrínseca do sistema sujeito a retardo no tempo depender de seu histórico temporal, sendo assim, para o cálculo da função de decisão, valores de resíduo gerados durante a ocorrência de falha são levados em conta o que pode acabar indicando para o sistema de detecção uma nova falha.

Portanto, considera-se que o trabalho apresentado obteve sucesso no desenvolvimento de um método de detecção e isolamento de falha, baseado no projeto de filtros robustos como observadores de estado, para sistemas lineares a tempo contínuo sujeitos a retardo no tempo e incertezas paramétricas. Devido o método proposto ser formulado em termos de LMIs o projeto do filtro é uma tarefa simples e rápida. Exemplos numéricos ao longo do texto ilustraram a eficiência do método proposto.

Por fim, destaca-se que parte dos resultados gerados nesta dissertação estão aceitos para publicação [Rocha et al., 2012].

# Apêndice A

## Exemplo de Vértices do Politopo

### A.1 Matrizes incertas $A(\alpha)$ e $A_r(\alpha)$

Dadas as matrizes  $A(\alpha)$  e  $A_r(\alpha)$  definidas a seguir:

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} -2p_1(t) & 0 \\ 0 & -0,9p_2(t) \end{bmatrix}, \quad A_r(\alpha) = \begin{bmatrix} -1p_3(t) & 0 \\ -1p_4(t) & -1p_5(t) \end{bmatrix},$$

nas quais as incertezas impostas aos parâmetros das matrizes são independentes e todas pertencem a um mesmo intervalo:  $p_i \in [0,9, 1,1]$  para  $i = 1, \dots, 5$ . Assim, as matrizes incertas deste sistema pertencem a um domínio politópico como definido em (2.16) com  $N = 32$  vértices, para ilustração seus vértices são apresentados abaixo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,1} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -0,9 & -0,9 \end{bmatrix},$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,2} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -0,9 & -1,1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,3} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -1,1 & -0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,4} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -1,1 & -1,1 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,5} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -0,9 & -0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,6} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -0,9 & -1,1 \end{bmatrix},$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,7} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -1,1 & -0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,8} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -1,1 & -1,1 \end{bmatrix},$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,9} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -0,9 & -0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,10} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -0,9 & -1,1 \end{bmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,11} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -1,1 & -0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,12} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -1,1 & -1,1 \end{bmatrix},$$



$$A_{13} = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,13} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -0,9 & -0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_{14} = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,14} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -0,9 & -1,1 \end{bmatrix},$$

$$A_{15} = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,15} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -1,1 & -0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_{16} = \begin{bmatrix} -1,8 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,16} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -1,1 & -1,1 \end{bmatrix},$$

$$A_{17} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,17} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -0,9 & -0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_{18} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,18} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -0,9 & -1,1 \end{bmatrix},$$

$$A_{19} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,19} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -1,1 & -0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_{20} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,20} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -1,1 & -1,1 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,21} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -0,9 & -0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,22} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -0,9 & -1,1 \end{bmatrix},$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,23} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -1,1 & -0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_{24} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,81 \end{bmatrix}, \quad A_{r,24} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -1,1 & -1,1 \end{bmatrix},$$

$$A_{25} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,25} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -0,9 & -0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_{26} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,26} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -0,9 & -1,1 \end{bmatrix},$$

$$A_{27} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,27} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -1,1 & -0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_{28} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,28} = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 \\ -1,1 & -1,1 \end{bmatrix},$$

$$A_{29} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,29} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -0,9 & -0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_{30} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,30} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -0,9 & -1,1 \end{bmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,31} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -1,1 & -0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} -2,2 & 0 \\ 0 & -0,99 \end{bmatrix}, \quad A_{r,32} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0 \\ -1,1 & -1,1 \end{bmatrix},$$

# Referências Bibliográficas

- [Caminhas and Takahashi, 2001] Caminhas, W. and Takahashi, R. (2001). Dynamic system failure detection and diagnosis employing sliding mode observers and fuzzy neural networks. In *IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference, 2001. Joint 9th*, volume 1, pages 304 –309 vol.1.
- [Chen and Patton, 1999] Chen, J. and Patton, R. J. (1999). *Robust Model-Based Fault Diagnosis For Dynamic Systems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [Chen and Li, 2008] Chen, Z. and Li, Y. (2008). Robust fault detection for stochastic time-delay systems with sensor nonlinearities. In *Intelligent Control and Automation, 2008. WCICA 2008. 7th World Congress on*, pages 6373 –6376.
- [Clark, 1978] Clark, R. (1978). Instrument fault detection. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, AES-14(3):456 –465.
- [D’Angelo et al., 2010] D’Angelo, M. F. S. V., Palhares, R. M., Caminhas, W. M., Takahashi, R. H. C., Maia, R. D., Lemos, A. P., and Inácio, M. J. (2010). Detecção de falhas: uma revisão com aplicações. In *XVIII Congresso Brasileiro de Automática - CBA2010*, pages 1–46, Bonito - MS, Brasil.
- [Duan et al., 2006] Duan, Z., Zhang, J., Zhang, C., and Mosca, E. (2006). Robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for uncertain linear systems. *Automatica*, 42(11):1919 – 1926.
- [Gahinet et al., 1995] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J., and Chilali, M. (1995). LMI control toolbox: For use with matlab. *The MATH WORKS Inc., Natick*.
- [Gao and Jiang, 2008] Gao, Z. and Jiang, B. (2008). Delay-dependent robust fault detection for a class of nonlinear time-delay systems. In *Systems and Control in Aerospace and Astronautics, 2008. ISSCAA 2008. 2nd International Symposium on*, pages 1 –6.
- [Gu et al., 2003] Gu, K., Kharitonov, V., and Chen, J. (2003). *Stability of Time-Delay Systems*. Control Engineering. Birkhäuser.
- [Henry and Zolghadri, 2004] Henry, D. and Zolghadri, A. (2004). Robust fault diagnosis in uncertain linear parameter-varying systems. In *Systems, Man and Cybernetics, 2004 IEEE International Conference on*, volume 6, pages 5165 – 5170 vol.6.

- [Isermann, 1984] Isermann, R. (1984). Process fault detection based on modeling and estimation methods - a survey. *Automatica*, 20(4):387 – 404.
- [Isermann and Ballé, 1997] Isermann, R. and Ballé, P. (1997). Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes. *Control Engineering Practice*, 5(5):709 – 719.
- [Karimi et al., 2009] Karimi, H., Zapateiro, M., and Luo, N. (2009). Robust fault detection filter design for a class of linear systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations. In *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on*, pages 1038–1043.
- [Ke and Bin, 2008] Ke, Z. and Bin, J. (2008). Analysis and design of adaptive fault estimation for time-varying delay systems. In *Control Conference, 2008. CCC 2008. 27th Chinese*, pages 38–42.
- [Li and Yang, 2009] Li, X.-J. and Yang, G.-H. (2009). LMI-based  $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_\infty$ ; observer design in low frequency domain with application in fault detection. In *American Control Conference, 2009. ACC '09.*, pages 4316 –4321.
- [Meskin and Khorasani, 2009] Meskin, N. and Khorasani, K. (2009). Fault detection and isolation of distributed time-delay systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(11):2680 –2685.
- [Nobrega et al., 2008] Nobrega, E. G., Abdalla, M. O., and Grigoriadis, K. M. (2008). Robust fault estimation of uncertain systems using an LMI-based approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(18):1657–1680.
- [Rocha et al., 2012] Rocha, J. S., Souza, F. O., and Caminhas, W. M. (2012). Detecção de falhas em sistemas sujeitos a retardo variante no tempo. In *XIX Congresso Brasileiro de Automática - CBA2012*, Campina Grande - PB, Brasil. Por aparecer.
- [Souza et al., 2008a] Souza, F. O., Palhares, R. M., and Barbosa, K. A. (2008a). New improved delay-dependent  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for uncertain neutral systems. *IET Control Theory and Applications*, 2(12):1033–1043.
- [Souza et al., 2008b] Souza, F. O., Palhares, R. M., Barbosa, K. A., and de Oliveira, M. C. (2008b). Projeto de filtro  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas sujeitos a retardo no tempo. In *XVII Congresso Brasileiro de Automática - CBA2008*, Juiz de Fora, Brasil.
- [Su and Ji, 2007] Su, X. and Ji, Z. (2007). Studies on the fault diagnosis of uncertain linear time-delay systems. In *Control and Automation, 2007. ICCA 2007. IEEE International Conference on*, pages 820 –824.

- [Takahashi et al., 1997] Takahashi, R., Palhares, R., and Peres, P. (1997). Discrete-time singular observers:  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  optimality and unknown inputs. In *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, volume 5, pages 4810 –4815 vol.5.
- [Venkatasubramanian et al., 2003a] Venkatasubramanian, V., Rengaswamy, R., and Kavuri, S. N. (2003a). A review of process fault detection and diagnosis: Part II: Qualitative models and search strategies. *Computers and Chemical Engineering*, 27(3):313 – 326.
- [Venkatasubramanian et al., 2003b] Venkatasubramanian, V., Rengaswamy, R., Kavuri, S. N., and Yin, K. (2003b). A review of process fault detection and diagnosis: Part III: Process history based methods. *Computers and Chemical Engineering*, 27(3):327 – 346.
- [Venkatasubramanian et al., 2003c] Venkatasubramanian, V., Rengaswamy, R., Yin, K., and Kavuri, S. N. (2003c). A review of process fault detection and diagnosis: Part I: Quantitative model-based methods. *Computers and Chemical Engineering*, 27(3):293 – 311.
- [Wang et al., 2010] Wang, D., Shi, P., and Wang, W. (2010). Robust fault detection for continuous-time switched delay systems: an linear matrix inequality approach. *Control Theory Applications, IET*, 4(1):100 –108.
- [Wang et al., 2008] Wang, H., Tian, Z., Shi, S., and Weng, Z. (2008). A fault detection and isolation scheme based on parity space method for discrete time-delay system. In *Intelligent Control and Automation, 2008. WCICA 2008. 7th World Congress on*, pages 6411 –6414.
- [Weng et al., 2008] Weng, Z., Patton, R., and Cui, P. (2008). Robust fault estimation for linear parameter-varying time-delay systems. In *Control and Automation, 2008 16th Mediterranean Conference on*, pages 292 –296.
- [Yong et al., 2010] Yong, Z., Huajing, F., and Sheng, F. (2010). Observer-based fault detection for nonlinear networked systems with random packet dropout and time-varying delay. In *Control Conference (CCC), 2010 29th Chinese*, pages 4278 –4282.
- [Zhang et al., 2008] Zhang, Y., Chen, Y., Meng, Q., and Wang, T. (2008). Fault detection of networked control systems based on kalman filter. In *Innovative Computing Information and Control, 2008. ICICIC '08. 3rd International Conference on*, page 348.
- [Zhang-qing and Xian-zhong, 2007] Zhang-qing, Z. and Xian-zhong, Z. (2007). Fault detection based on the states observer for networked control systems with uncertain

long time-delay. In *Automation and Logistics, 2007 IEEE International Conference on*, pages 2320 –2324.