UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
Programação de Pós-Graduação em Educação:
Conhecimento e Inclusão Social

Bruna Karla Silva Reginaldo

ARGUMENTAÇÃO EM ATIVIDADES INVESTIGATIVAS NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA

Belo Horizonte
2012

Bruna Karla Silva Reginaldo

ARGUMENTAÇÃO EM ATIVIDADES INVESTIGATIVAS NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais (FAE/UFMG): Conhecimento e Inclusão Social, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Professora Dra Jussara de Loiola Araújo.

Belo Horizonte
2012

Bruna Karla Silva Reginaldo

ARGUMENTAÇÃO EM ATIVIDADES INVESTIGATIVAS NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais (FAE/UFMG): Conhecimento e Inclusão Social, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Profa. Dra. Jussara de Loiola Araújo – Orientadora

Instituto de Ciências Exatas – ICEX/UFMG

Prof. Dr. Airton Carrião Machado

Colégio Técnico da Escola de Educação Básica e Profissional da UFMG

Profa. Dra. Maria Manuela Martins Soares David

Faculdade de Educação – UFMG

Profa. Dra. Maria Clara Rezende Frota

Pontifícia Universidade Católica – MG

Profa. Dra. Silvania Souza do Nascimento

Faculdade de Educação - UFMG

Belo Horizonte, 22 de agosto de 2012

Ao meu pai, Artur, e à minha mãe, Maria José, por me ensinarem que tudo é possível, basta sonhar, acreditar e lutar para alcançar os objetivos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por sempre iluminar meu caminho e por colocar tantas pessoas boas nele, com as quais pude contar, principalmente, nos momentos de dificuldade. Agora, tenho a oportunidade de registrar meus agradecimentos a elas.

Agradeço aos meus pais, sempre presentes, pelo incentivo e apoio incondicional aos meus estudos e aos meus objetivos. Obrigada por me acompanharem aos congressos, por assistirem às minhas apresentações e sempre dizerem que foram ótimas!

Agradeço ao meu pai por ser um exemplo de dedicação, empenho e superação. Você me ensinou que desistir nunca é uma opção, que, por mais difícil que a vida seja, não adianta lamentar, que é preciso ter força de vontade para vencer obstáculos e alcançar nossas metas. Obrigada por sempre incentivar meus estudos. O sonho de ter o título de mestre era seu, aos poucos se tornou meu... E, agora, esse sonho já é realidade!

Agradeço à minha mãe, sempre presente, pelo apoio, incentivo e por ler meus textos e sempre achá-los o máximo, mesmo sem entender nada... Obrigada pelos momentos de carinho e de escuta.

Agradeço à minha irmã, Marcella, pelo apoio, por torcer e comemorar as minhas conquistas, mesmo por telefone! Obrigada, Marcella e também Robert, pelos momentos de descontração, como as idas ao cinema e as partidas de jogos de videogame.

Aos meus avós, Zé Marques e Santinha, por me apoiarem, darem incentivo e torcerem, bem como pelo gravador que foi um instrumento muito valioso para esta pesquisa! Vó Santinha, mesmo nos momentos mais difíceis da vida você se mostra sempre alegre e forte. Essa força foi a minha inspiração para concluir esta dissertação!

Ao meu namorado, João Paulo, por me ajudar a superar os momentos de angústia e nervosismo. Obrigada por comemorar, junto comigo, as minhas vitórias. Obrigada por me acompanhar em todos os congressos, seja em São Paulo ou Recife. A distância não teve importância, você esteve sempre comigo para me apoiar.

A todos os meus tios: Elen, Fernando, Eduardo, Agnes, Diana e Magali. Em especial, ao meu tio Eduardo, por me ajudar nas formatações de artigos enviados aos congressos e por me socorrer em minhas “dúvidas tecnológicas”. Obrigada, tio Eduardo e também Agnes, por compreenderem minha ausência no casamento de vocês devido aos compromissos do mestrado. Obrigada, tia Elen, minha madrinha, por me ajudar sempre que precisei. Sei que posso contar com sua disponibilidade e criatividade!

À Ceinha, pelos cuidados não só comigo, mas com toda a minha família! Obrigada por organizar meu quarto e por fazer almoço nas horas que eu tinha disponíveis, ainda que fosse às 10h30min da manhã!

Ao meu cachorrinho, Lucky, meu fiel companheiro e amigo de todas as horas. Está comigo desde que eu tenho 12 anos de idade e até hoje me faz companhia em todos os momentos, inclusive nos de estudos. Sempre estava dormindo em cima dos meus pés, me fazendo companhia enquanto estudava, até mesmo nas madrugadas. Ao levantar, você acordava e ia sempre comigo a onde quer que eu fosse.

À Jussara, pelas orientações dadas desde o GEPEMNT, que me fizeram crescer muito tanto como pessoa quanto pesquisadora. Deixo registrada a minha profunda gratidão e admiração por você, como pessoa e como profissional. Agradeço por você compartilhar seus conhecimentos acadêmicos, sua forma de escrita. Agradeço pelo incentivo, por acreditar e por fazer sentir-me capaz. Agradeço pelos momentos de escuta e pelos conselhos dados. Obrigada por não dar respostas prontas, mas por mostrar como procurá-las.

À Teresinha Kawasaki, por esclarecer dúvidas que tive durante a escrita desta dissertação e pela experiência compartilhada em uma das disciplinas do curso de Pedagogia.

A todos os colegas da Pós, professores e funcionários, com os quais pude aprender mais e pude contar durante a caminhada.

À Alessandra, por me socorrer nos momentos de angústia, seja por telefone ou por e-mail, a qualquer hora.

Ao Wanderley, por ser o “suplente” da Jussara e me orientar nos momentos em que tive dúvidas. Suas contribuições foram muito importantes para a realização deste trabalho.

Aos colegas do grupo de orientação: Diva, Joicy, Wanderley, Alessandra, Rutyele, Ilaine, Edimilson e Ana Paula, pelas contribuições valiosas dadas a este trabalho. Obrigada pelas leituras realizadas aos meus textos, críticas e sugestões!

À Joicy, pelos momentos de escuta e pelos conselhos dados. Obrigada por compartilhar suas experiências do mestrado e por me tranquilizar, dizendo “é assim mesmo, vai dar certo!”.

À Cibelle, amiga que conheci na faculdade. Entramos juntas na graduação e no mestrado. Obrigada pelo apoio, momentos de escuta e pelos trabalhos que realizamos

juntas nas disciplinas da Pós.

À Ana Catarina, por ler parte deste trabalho e dar significativas contribuições a ele. Obrigada pelo apoio dado e pela ajuda nas disciplinas cursadas. Agradeço, também, pela filmadora e gravadores emprestados!

Aos colegas do Neusa Rocha, em especial à Márcia e à Vanilda, pelo apoio e incentivo dados. À Simone, por me consolar nos momentos difíceis, me aconselhar e dividir suas experiências comigo. À Patrícia, pelos momentos de escuta. À Luciana e à Nara, por compartilharem suas experiências do mestrado e por dizerem que tudo ia dar certo. À Andreia, por fazer a correção do “Abstract” desta pesquisa. À Janaina, por fazer a revisão desta dissertação.

Agradeço aos amigos dos meus pais, que hoje são também meus amigos, Marília, Lucas, Vera e Toninho, pelos momentos de descontração no clube e pela torcida.

Agradeço à professora que participou desta pesquisa pela enorme contribuição dada a este trabalho e pela disponibilidade. Sua participação e envolvimento foram essenciais. Muito obrigada!

À minha terapeuta, Daniela, por me ajudar a encontrar a Bruna “grande” dentro de mim, que é o meu suporte. Obrigada por me ajudar a seguir em frente e por ajudar a sentir-me mais confiante e mais forte.

Ao Airton, por me ensinar os primeiros passos de ser professor... Agradeço por me receber no COLTEC como estagiária e, depois, como professora, e compartilhar comigo sua experiência. Obrigada por me incentivar a ingressar no mestrado, pelas contribuições dadas ao meu projeto de pesquisa e pelas sugestões de leituras.

Agradeço aos professores que aceitaram participar da banca e pelas contribuições dadas a este trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa concedida.

Enfim, agradeço a todos meus familiares, amigos e todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram com esta pesquisa, que souberam entender minhas ausências, meus momentos de incertezas e minhas constantes mudanças de humor.

Dever de Sonhar

“Eu tenho uma espécie de dever, dever de sonhar, de sonhar sempre,
pois sendo mais do que um espetáculo de mim mesmo,
eu tenho que ter o melhor espetáculo que posso.
E, assim, me construo a ouro e sedas, em salas
supostas, invento palco, cenário para viver o meu sonho
entre luzes brandas e músicas invisíveis.”

Fernando Pessoa

RESUMO

Buscou-se, por meio desta pesquisa, compreender como se desencadeia e se desenvolve a argumentação matemática dos estudantes em uma atividade de investigação matemática. Visando alcançar esse objetivo, uma sequência de quatro atividades investigativas foi realizada em três turmas do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de Belo Horizonte. Durante o desenvolvimento dessas atividades, foram realizadas intervenções apoiadas nos referenciais teóricos sobre argumentação (BOAVIDA, 2005), investigações na aula de Matemática (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009) e nas experiências vivenciadas com esse tipo de atividade, como professora de matemática. A abordagem metodológica adotada é qualitativa e os instrumentos de coleta de dados foram: *observação participante* (FLICK, 2009), notas em caderno de campo, gravações em áudio e vídeo e relatórios produzidos pelos alunos. A análise dos dados foi realizada de forma indutiva e é apresentada em três partes. Com a intenção de mostrar que é possível identificar argumentação dos alunos em atividades de investigação, na primeira parte, são descritas e analisadas situações em que ocorreu argumentação. Na segunda, são relatadas e analisadas as intervenções realizadas pela professora e pela pesquisadora e seus desdobramentos que contribuíram para o desenvolvimento da argumentação dos alunos. Na terceira parte, são descritos e analisados os obstáculos vivenciados durante a realização das atividades investigativas, que atravancaram o desenvolvimento da argumentação. Os resultados apontam que os estudantes da escola básica são capazes de argumentar nas aulas de Matemática de diversas formas: refutar por meio de contraexemplo, provar com o uso de um recurso não discursivo, demonstrar, dentre outras. É possível desencadear e desenvolver a argumentação matemática dos alunos por meio da realização de intervenções, como, por exemplo, apresentar a eles as formas de argumentação. A falta de tempo, outras prioridades, falta de domínio da linguagem algébrica, dentre outros, se configuraram obstáculos para a argumentação dos alunos, mas podem ser contornados. É importante que o professor compreenda o que é argumentação, para além do seu significado no senso comum, e quais são as formas de argumentar, que ele estimule seus alunos a justificarem e a desenvolverem habilidades de argumentação. Para isso, é necessário que o professor mude os tipos de atividades, bem como a forma de sua condução, não permanecendo apenas no paradigma do exercício, e que os estudantes aceitem o convite para participar dessas atividades (SKOVSMOSE, 2000).

Palavras-chave: Argumentação Matemática. Investigação Matemática. Educação Matemática.

ABSTRACT

We tried, through this research, to understand how students' mathematical argumentation triggers and develops in a mathematical investigative activity. In order to achieve this goal a sequence of four investigative activities was performed in three classes in the 9th grade in elementary education at a school in the Municipality of Belo Horizonte. During the development of these activities, operations supported on theoretical arguments (BOAVIDA, 2005), investigations in mathematics class (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009), and as a mathematics teacher myself the experiences with this type of activity were carried out. The methodological approach adopted is qualitative and the instruments of data collection were *participant observation* (FLICK, 2009), notes, audio and video, and reports produced by the students. Data analysis was performed inductively and it is presented in three parts. To show that it is possible to identify students' arguments in investigative activities, in the first part situations are described and analyzed in which there was argument. In the second the interventions made by the teacher and researcher and its consequences which contributed to the development of students' arguments are reported and analyzed. In the third part the obstacles experienced in carrying out investigative activities, which disrupted the development of the argument are described and analyzed. The results indicate that the basic school students are able to argue about mathematics in several ways: by refuting counter example, to prove with the use of a non discursive resource, among others. You can initiate and develop students' mathematical reasoning through the use of interventions, for example, present to them the forms of argument. The lack of time, other priorities, lack of knowledge of the algebraic language, among others were obstacles to students' arguments, but they can be circumvented. It is important to the teacher understand what is argument, in addition to its meaning in common sense, and what are the forms of argument, which encourages students to develop and justify reasoning abilities. Therefore, it is necessary for the teacher to change the types of activities, as well as the manner of their class form, not just staying in the exercise paradigm, and that students accept the invitation to participate in these activities (SKOVSMOSE, 2000).

Keywords: Mathematical Argumentation. Mathematical Investigation. Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino de matemática nas escolas, na maior parte do tempo, é marcado por características da educação tradicional. De acordo com Alrø e Skovsmose (2004), uma aula tradicional tem a seguinte organização: o professor apresenta conceitos e técnicas aos estudantes, eles as aplicam de forma direta em exercícios que, em sua maioria, são de um livro didático e o professor faz a correção. Essa organização coloca o exercício como uma parte fundamental da aula. Skovsmose (2000) denomina esse modelo de *paradigma do exercício*.

A aplicação direta de técnicas e a repetição de exercícios podem fazer com que o aluno atue mecanicamente, dificultando a valorização da produção matemática, do raciocínio e do aprendizado com o erro. De acordo com Skovsmose (2000), uma característica marcante do paradigma do exercício é que há apenas uma resposta correta. Assim, o aluno pode ser influenciado a pensar que qualquer atividade proposta nas aulas de matemática também possui uma única resposta e que encontrá-la é o maior objetivo a ser alcançado.

Segundo esse autor, o paradigma do exercício pode ser desafiado pelos *cenários para investigação*, que são aqueles em que os alunos são convidados a realizarem explorações, formularem questões e a procurarem explicações. Para ele, o cenário para investigação pode constituir um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são responsáveis pelo processo.

A atividade de investigação pode envolver o aluno desde o início por propor uma situação ou problema aberto em que ele deverá encontrar e definir um ponto de partida para buscar uma solução, procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, refletir e generalizar (OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1996). A resolução de exercícios, por si só, é uma atividade limitante quando comparada a uma atividade que envolve investigação (ALRØ; SKOVSMOSE, 2004).

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), a atividade de investigação possui quatro etapas: a primeira envolve reconhecimento da situação, exploração e formulação de questões; a segunda refere-se à formulação de conjecturas; a terceira inclui a realização de testes e, consequentemente, o refinamento das conjecturas; e, na última etapa, ocorrem a argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado.

Entretanto, em minhas experiências com atividades de investigação, como professora, incomodava-me a ausência da argumentação. Sobretudo na discussão feita após a etapa de exploração, os alunos relatavam as conjecturas levantadas e os resultados obtidos, sem a preocupação de verificar se o que foi observado é verdadeiro, de justificar e, se possível, de generalizar. Nesse caso, não há uma preocupação em buscar argumentos matemáticos para fundamentar uma ideia, reduzindo a quarta etapa, proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), a um simples relato.

No entanto, considero que o cenário para investigação é um paradigma com potencialidade para desenvolver a argumentação, já que a exploração pode proporcionar um repertório de ideias que ajudam na elaboração de argumentos. Sendo assim, a argumentação pode ser trabalhada nas atividades de investigação de forma mais natural para o estudante.

A preocupação com argumentação se justifica pelo fato de a fundamentação e a justificação de ideias através de argumentos matemáticos serem partes importantes do estudo da matemática e devem ser tratadas na sala de aula com o máximo rigor possível, adequando sua complexidade para cada nível de ensino. O aluno deve ser levado a enriquecer sua argumentação de forma potencializada e coerente com a conjectura a ser validada. Ele deve ser instigado a argumentar, a sentir a necessidade de fundamentar suas ideias e justificá-las.

Essas inquietações me motivaram a escrever um projeto de pesquisa para investigar o que desencadeia a argumentação dos alunos em atividades de investigação. Porém, o processo vivenciado ao longo da pesquisa fez com que eu mudasse essa proposta. Assim, a partir da próxima seção, descrevo com mais detalhes a minha trajetória profissional e o processo da elaboração da pergunta de pesquisa.

1.1 Trajetória pessoal e construção da pergunta de pesquisa

A minha formação como professora de matemática teve início em 2004, quando comecei o curso de matemática na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Mas, confesso que, inicialmente, não era a minha intenção ser professora. Meu objetivo era me formar em Matemática e, em seguida, cursar Engenharia.

Porém, em 2006, comecei a estudar e a me envolver com a área de Educação Matemática. Consegui uma bolsa para participar do Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Novas Tecnologias (GEPEMNT[1]), do qual faziam parte estudantes da graduação, pesquisadores e professores das áreas de Matemática, Educação Matemática e Comunicação. As atividades do grupo tinham como tema o uso de tecnologias em situações de ensino e aprendizagem de matemática.

[1] Grupo sediado no Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da UFMG, coordenado pelas

O interesse pela Educação Matemática começou a crescer, principalmente pelo tema investigação matemática, pois era recorrente nas pesquisas do grupo. Além disso, os integrantes do grupo elaboravam oficinas de investigação que eram oferecidas e aplicadas para professores e estudantes de graduação e da escola básica, que agendavam visitas à UFMG e a congressos de Educação Matemática.

Esse interesse pela área de Educação Matemática me fez optar pela licenciatura. E, ainda em 2006, cursei a disciplina "Tecnologias e Educação Matemática", ofertada no curso de licenciatura como optativa. Dessa forma, pude estudar mais sobre teorias da Educação Matemática e novas tecnologias e participar de oficinas que envolviam investigação matemática.

Nas duas experiências, tanto no GEPEMNT quanto na disciplina, pude perceber a motivação e o envolvimento de alunos e professores ao participar de atividades investigativas. Nesses momentos, havia muita discussão entre os participantes que compartilhavam seus resultados.

Em 2007, passei a participar do Projeto de Ensino Fundamental de Jovens e Adultos - 2º segmento – (PROEF 2) da Escola de Educação Básica e Profissional da UFMG, no qual comecei a lecionar em uma turma constituída por operários que trabalhavam no projeto Campus 2000[2], também da UFMG. Todos eles interromperam os estudos no Ensino Fundamental por motivos diversos, principalmente por causa de trabalho, e a maior parte deles trazia consigo o medo de voltar a estudar matemática.

Dessa maneira, procurava envolvê-los no processo de ensino e de aprendizagem de matemática para que os conteúdos e a própria aula fizessem sentido para eles. Apliquei, em minhas aulas, atividades de investigação que envolveram o uso do computador, calculadora e dobraduras. Com esse tipo de atividade, pude notar que o envolvimento dos alunos era maior e que eles se saíam melhor nas provas, aplicando nas questões propostas as conclusões matemáticas obtidas por eles nas atividades de investigação.

Naquele mesmo ano, me formei no curso de licenciatura em matemática e, em 2008, passei a lecionar no Colégio Técnico da UFMG, o COLTEC, permanecendo lá por 2 anos. As atividades promovidas nessa escola eram de natureza investigativa. Durantes as aulas, os conceitos eram desenvolvidos por meio de resolução de problemas e, depois, o conteúdo era sistematizado no quadro. Porém, um aspecto presente nas aulas gerava um desconforto em mim: o momento em que eram realizadas demonstrações matemáticas. A maior parte dos

[2] O Campus 2000 é um projeto de reforma e modernização de prédios e edificações da UFMG no campus da Pampulha.

alunos não tinha interesse em aprender e aqueles que tentavam acompanhar as etapas de uma demonstração realizada no quadro mostravam dificuldade em compreendê-la e em realizar novas demonstrações. Pude notar que essa etapa da aula não fazia sentido para os estudantes e gerava desmotivação entre eles.

Em minhas aulas do Ensino Médio, em outra escola, incentivava os alunos a realizarem demonstrações de leis e teoremas que surgem no estudo dos conteúdos como, por exemplo, lei dos senos e lei dos cossenos. Nesses momentos, pude perceber que para alguns alunos foi essencial entenderem a demonstração da lei para compreenderem o conteúdo, que já tinha sido tratado experimentalmente e também apresentado em aula expositiva. Porém, a maior parte dos alunos não se interessou pela realização de demonstrações, considerando difícil e desnecessário fazê-las.

As experiências com investigação levaram-me a adotá-la como uma estratégia de ensino. Percebi que, tanto em turmas do Ensino Fundamental quanto em turmas do Ensino Médio, os alunos participam mais e conseguem aplicar conceitos matemáticos obtidos na investigação em outras atividades propostas em sala de aula. E, a partir desses conceitos, muitos estudantes compreendem melhor os conteúdos trabalhados em sala. Além disso, a aula expositiva no final desse processo se torna mais significativa.

De acordo com Fonseca (2002), a investigação é uma atividade importante que deve ser incluída no currículo escolar e, dessa forma, os professores precisam aprender a implementá-la junto aos seus alunos.

A competência *investigação* e *compreensão*, citada nos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN e nas Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN+ (BRASIL, 1998), aborda a capacidade de o aluno enfrentar e resolver problemas, utilizando os conceitos das ciências da natureza e da matemática. Ela é indicada a ser desenvolvida com os alunos do Ensino Médio por meio de resoluções de problemas. Mas acredito que as atividades de investigação matemática também podem desenvolver essa competência, inclusive para alunos do Ensino Fundamental, uma vez que elas envolvem a resolução de uma situação ou problema aberto, na qual o aluno é convidado a explorar, conjecturar, testar e generalizar.

Entretanto, em minhas experiências com investigações, sentia a ausência da argumentação e, sobretudo, da demonstração. Não é comum provar teoremas na sala de aula, uma vez que, na maior parte do tempo, a aula fica dividida em exposição de conteúdos e resolução de exercícios, assim como também não é comum presenciar momentos de discussão entre professor e alunos sobre ideias, conceitos, pontos de vista... De acordo com Fusco, Silva e Almouloud (2007), a falta de ênfase no ensino da demonstração em matemática, nos Ensinos Fundamental e Médio, pode ser consequência do planejamento das aulas pelo professor, que atende, preferencialmente, às necessidades da sua clientela, desconsiderando a importância de iniciar o aluno “a justificar, a provar e a demonstrar alguns resultados a fim de torná-los indiscutíveis” (p. 1), a partir do 8º ano do Ensino Fundamental.

Assim, percebo que há uma deficiência na execução da quarta etapa de uma atividade de investigação, como proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), e considero que fundamentar e justificar as ideias através de argumentos matemáticos é uma parte importante do estudo da matemática e deve ser tratada na sala de aula com o máximo rigor possível, adequando sua complexidade para cada nível de ensino.

O trabalho com investigação matemática, como aluna e como professora, e as reflexões teóricas a partir de leituras como a de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), proporcionaram algumas inquietações sobre o tema argumentação. Segundo esses autores, a argumentação faz parte da atividade de investigação matemática. Como eu notava a ausência da argumentação, passei então a querer compreender como desencadear a argumentação dos estudantes e se é possível desenvolver a capacidade argumentativa deles, para que eles possam, de forma autônoma, analisar e verificar a veracidade de suas conjecturas elaboradas em uma atividade investigativa. E, sobretudo, comunicá-las de forma adequada no contexto de ensino da matemática. Dessa forma, a pergunta diretriz desta pesquisa é: **Como se desencadeia e se desenvolve a argumentação matemática dos alunos em uma atividade investigativa?**

1.2 Objetivos

Busco, por meio desta pesquisa, identificar e compreender como se desencadeia e se desenvolve a argumentação matemática dos alunos em uma atividade investigativa.

Dessa forma, proponho os seguintes objetivos específicos:

- Descrever e analisar as situações em que ocorreu a argumentação dos alunos na atividade de investigação.
- Analisar as interações professor-aluno e aluno-aluno no desencadeamento da argumentação.

- Caracterizar os argumentos, matemáticos ou não, utilizados pelos alunos na atividade de investigação.
- Analisar as interações professor-aluno e aluno-aluno no desenvolvimento da argumentação.
- Identificar as formas de argumentação apresentadas pelos alunos.

Devo acrescentar que, embora a demonstração esteja mais presente no campo formal da matemática, não descarto a possibilidade de ela estar presente nas aulas da educação básica. Não obstante, busco também, por meio desta pesquisa, outras formas de validar e justificar afirmações diferentes da demonstração matemática, tanto orais quanto escritas.

1.3 Revisão de literatura

Em um levantamento bibliográfico inicial, encontrei poucos trabalhos[3] que tratam a argumentação dos alunos na perspectiva da atividade de investigação. Autores como Ponte e Segurado (1998) e Braumann (2002) falam da importância da etapa da verificação das conjecturas, mas não encontrei muita reflexão sobre esse tema. Como a atividade de investigação proporciona um repertório de ideias que podem ajudar na argumentação matemática, acredito que desenvolver a argumentação na sala de aula por meio da atividade de investigação pode ser mais natural para o aluno. Acredito também que se faz necessário um estudo maior nesse campo, que poderá enriquecer a atividade de investigação na sala de aula e estimular a autonomia e capacidade de argumentação matemática do estudante.

Nesta seção vou apresentar algumas dissertações sobre argumentação e prova, com o propósito de justificar a relevância desta pesquisa e discutir como elas se relacionam com os objetivos aqui propostos. Em seguida, destaco o trabalho de Boavida (2005), cujo objetivo é apresentar uma discussão sobre aspectos que influenciam o desenvolvimento da argumentação, que se aproxima do objetivo desta pesquisa.

No ano de 2005, o Grupo de Pesquisa em Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM), da PUC/SP, deu início ao projeto denominado Argumentação e Prova na Matemática Escolar – AprovaME – que contou com a participação de 6 professores pesquisadores e 28 professores colaboradores. A intenção era mapear as concepções dos

[3] Em levantamento no site do IBICT, Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia, <http://bdtd.ibict.br/>, foram encontrados 19 trabalhos por meio da busca das palavras-chave: argumentação matemática, investigação matemática, educação matemática. Porém, nenhum deles discute a argumentação em atividades de investigação matemática. Utilizando como palavras-chave: "argumentação matemática, investigação matemática", nenhum trabalho foi encontrado.

alunos sobre argumentação e prova, formar grupos colaborativos, com professores e pesquisadores, para elaborar situações de ensino e aprendizagem de provas, formular recomendações sobre o papel da argumentação e da prova no currículo escolar de matemática, dentre outros objetivos.

Nesse projeto, foram desenvolvidos dois questionários, um sobre álgebra e um sobre geometria, que foram aplicados pelos professores colaboradores a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio, totalizando 1998 alunos. Esses alunos tinham entre 14 e 16 anos e eram de escolas da rede estadual, municipal e particular de ensino no estado de São Paulo.

Encontrei cinco dissertações relacionadas a esse projeto. Doro (2007) analisou as respostas dos estudantes ao responderem o questionário sobre geometria. Dois objetivos de sua pesquisa se aproximam com os objetivos aqui propostos: investigar se os alunos são capazes de apresentar argumentos matematicamente válidos e quais as formas de apresentação de argumentos.

Esse autor concluiu que 26,3% dos alunos não responderam e não apresentaram justificativas para as questões propostas, 41,7% apresentaram respostas incorretas com justificativas sem informação pertinente e 1,9% dos alunos apresentaram respostas corretas com justificativas consideradas satisfatórias. Não houve apresentação de prova formal e os argumentos apresentados pelos alunos envolviam uma linguagem natural com evidências empíricas. Para Doro (2007), a falta de apresentação de justificativas pode ser consequência da ausência de conhecimentos geométricos específicos e de processos cognitivos insuficientes.

Santos (2007) analisou as respostas dos estudantes referentes ao questionário sobre álgebra. Seus objetivos eram: mapear as concepções sobre argumentação e prova dos alunos e formular recomendações sobre argumentação e prova no currículo escolar de Matemática. Do total de 3996 respostas, 323 continham justificativas com informações pertinentes e 789 estavam em branco ou sem justificativa.

O autor considerou então que o processo da argumentação e prova dos estudantes na escola básica é falho. Para ele, isso pode ser consequência da falta de ênfase que é dada à argumentação e prova nas aulas de matemática, já que muitos professores relataram na entrevista, realizada durante a sua pesquisa, que em poucos momentos das aulas eles utilizam a demonstração para explicar resultados matemáticos como as fórmulas.

Outra conclusão de Santos (2007) foi que o processo da justificativa dos alunos é baseado em exemplos empíricos, marcado pela ausência da construção de argumentações válidas. Ele relatou sobre a grande utilização de argumentos empíricos pelos alunos, acompanhada do uso da linguagem materna, assim como concluiu Doro (2007), uma vez que o uso da linguagem algébrica é pouco disseminado nas escolas.

Para Santos (2007), é importante incluir o processo da prova nas aulas da educação básica, sem exigir dos alunos a produção de provas formais e demonstrações de acordo com o rigor matemático conhecido. Inicialmente, o professor pode pedir aos alunos que justifiquem suas respostas, pois, assim, o aluno tentará verificar a validade de um resultado, criando hipóteses e uma lógica para explicá-lo. Dessa forma, ele estará aprendendo a justificar.

A pesquisa de Ferreira (2008) também tinha como tema a prova algébrica. No entanto, seu foco era investigar as justificativas apresentadas pelos estudantes em uma das questões propostas no questionário sobre álgebra. Esse autor destacou o baixo desempenho dos alunos, uma vez que 85,1% deles não apresentaram justificativas ou apresentaram justificativas erradas.

Ferreira (2008) concluiu que o baixo índice de justificativas apresentadas pode ser consequência da falta de solicitação aos alunos de justificativas para suas respostas nas aulas de Matemática. Além disso, ele destacou que a demonstração de teoremas não é uma prática comum entre os professores, como foi revelado pelos estudantes entrevistados durante a realização da pesquisa.

Dentre as respostas apresentadas pelos alunos, esse autor encontrou poucas justificativas matematicamente válidas, sem o uso de uma linguagem formal, com predominância do uso de cálculos em detrimento do uso de propriedades algébricas, assim como concluiu Santos (2007).

Cruz (2008) analisou a 4ª edição reformulada da coleção didática “Matemática e realidade”, de Gelson lezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, da editora Atual. Sua pesquisa faz parte de uma das ramificações do projeto AProvaME, que consiste em analisar coleções didáticas para verificar como são abordadas a argumentação e prova.

O objetivo de Cruz (2008) era analisar como a argumentação e prova são abordadas na coleção didática escolhida por ele, nos capítulos sobre teorema fundamental da aritmética e teorema de Pitágoras. Esse autor concluiu que a coleção não tem como objetivo desenvolver habilidades de argumentação e prova nos alunos, uma vez que os autores utilizaram a argumentação e prova como recursos para apresentar conhecimentos matemáticos. Cruz

(2008) não encontrou discussão e reflexão sobre a veracidade do teorema fundamental da álgebra, que foi apresentado como uma evidência e, com relação ao teorema de Pitágoras, mesmo tendo sido demonstrado, não foram encontradas atividades relacionadas à sua demonstração.

Pereira (2007) analisou situações de aprendizagem envolvendo argumentações e provas em um ambiente informatizado. Sua intenção era elaborar uma sequência de atividades sobre números racionais para envolver os alunos no processo da prova matemática e avaliar o papel da ferramenta Microsoft Excel no trabalho empírico deles. Seis estudantes, organizados em duplas, de uma escola particular da cidade de Santos, em São Paulo, participaram da pesquisa.

Esse autor concluiu que o trabalho em dupla proporcionou interações entre os alunos, possibilitando a discussão e formulação de hipóteses. O uso da ferramenta Microsoft Excel permitiu aos estudantes o teste e a observação de diversos casos ao mesmo tempo, possibilitando a formulação de conjecturas e a busca pela validação delas. Sendo assim, essa ferramenta potencializou o trabalho empírico dos alunos que puderam, também, encontrar contraexemplos para refutar conjecturas falsas. Para Pereira (2007), o ensino de provas deve focar em tarefas que incentivam o levantamento de conjecturas sobre proposições não familiares aos alunos, para que eles sintam a necessidade de prová-las.

Em suas pesquisas, Doro (2007), Santos (2007) e Ferreira (2008) apontaram para uma falha no processo de argumentação e prova na escola básica, destacando o baixo percentual de justificativas com informações pertinentes apresentadas pelos alunos. As provas consideradas matematicamente válidas, por esses autores, contaram com o uso de linguagem informal e a predominância da utilização de evidências empíricas. Não foram encontradas provas formais.

Além disso, eles destacaram a falta de ênfase que é dada ao processo de argumentação e prova nas aulas de Matemática, sendo assim, as competências envolvidas nesse processo não são desenvolvidas nos alunos. O desenvolvimento dessas competências também não é objetivo da coleção didática analisada por Cruz (2008). A demonstração foi utilizada como recurso para apresentação de conteúdos e as atividades propostas aos estudantes não fizeram referência a ela.

Pereira (2007) destacou que as interações entre os alunos podem contribuir para o processo da prova matemática. O ambiente informatizado permitiu aos estudantes a elaboração de hipóteses e a busca por sua validação ou busca de contraexemplos para sua refutação. Esse autor indicou a proposta de tarefas que incluem proposições não familiares aos alunos para despertar a necessidade de prová-las.

As conclusões obtidas por esses cinco autores reforçam os objetivos desta pesquisa, bem como a necessidade de investigar como desencadear e desenvolver a argumentação dos alunos. É importante destacar que nesta pesquisa o trabalho com argumentação será desenvolvido a partir da realização de atividades de investigação matemática que não foram contempladas nas dissertações apresentadas acima. Ressalto, também, que a análise da interação professor-aluno e aluno-aluno no desencadeamento e no desenvolvimento da argumentação é um dos objetivos desta pesquisa e que difere das pesquisas mencionadas.

Aspectos que influenciam o desenvolvimento da argumentação na sala de aula foram discutidos no trabalho de Boavida (2005). A autora acompanhou o trabalho de duas professoras de matemática do 3º ciclo do ensino básico e desenvolveu um projeto cujos objetivos eram: analisar o trabalho dessas duas professoras que visavam envolver os alunos na realização de argumentações; analisar a organização e preparação das aulas, identificando aspectos que influenciam o desenvolvimento da argumentação e os desafios desse processo; desenvolver um projeto de investigação colaborativa para refletir sobre as práticas das professoras focadas em experiências de argumentação.

As professoras, com a ajuda do grupo de pesquisa criado, buscaram propor situações em que os alunos formulassem conjecturas e as testassem, produzindo argumentos e interagindo com a turma. Para o grupo, a produção de demonstrações não foi desconsiderada como uma oportunidade de provar e garantir a validade de conjecturas. Porém, o foco do trabalho foi criar situações em que os estudantes formulassem e testassem conjecturas, produzindo provas que, durante a realização de testes, resistissem à refutação[4].

A autora evidencia que desenvolver a argumentação na sala de aula é um trabalho complexo, mas não impossível, cabendo ao professor criar e manter uma cultura na sala de aula em que os alunos se envolvam em argumentações. Os desafios encontrados ao longo desse processo devem ser enfrentados, dando atenção aos discursos[5] dos alunos e levando em consideração aspectos afetivos e sociais nos quais a turma está inserida.

No trabalho são apresentados objetivos de ação que orientam o desenvolvimento da argumentação na sala de aula:

---

[4] O termo refutação será mais bem discutido no capítulo 5.

[5] A palavra discurso acompanha o uso feito por Boavida (2005), que se refere ao uso da linguagem natural, oral ou escrita. Nesse sentido, figuras, dados numéricos ou algébricos são considerados elementos não discursivos.

- Promover e apoiar a formulação e prova de conjecturas, destacando a importância e a compreensão desse tipo de atividade;
- Valorizar os momentos de formulação de conjecturas;
- Compreender o significado de prova e conjectura, bem como a necessidade de realizar provas;
- Explorar situações de desacordo;
- Incentivar e promover interações entre os alunos.

Boavida (2005) cita três aspectos que podem facilitar o trabalho com argumentação na sala de aula: selecionar ou criar enunciados para propor atividades abertas, explorar profundamente essas tarefas e realizar um levantamento de questões e materiais que podem desencadear episódios de argumentação e discussões na turma.

As estratégias adotadas pelas professoras para promover o envolvimento dos alunos com argumentação foram: conceituar os termos conjectura, prova e contraexemplo, analisar conjuntamente as conjecturas elaboradas pelos alunos e avaliar as conjecturas com o objetivo de descartar as falsas.

O trabalho de Boavida (2005) se aproxima do tema desta pesquisa, porém os objetivos específicos aqui são diferentes: descrever momentos em que ocorreu a argumentação na sala de aula, analisar as interações professor-aluno e aluno-aluno no desenvolvimento da argumentação, caracterizar os argumentos dos estudantes e identificar as formas de argumentação utilizadas por eles. Essa autora apenas dá pistas de como o professor pode agir e conduzir atividades de argumentação.

Destaco que, em minhas experiências, como professora, há um distanciamento entre a teoria e a prática, ou seja, mesmo propondo discussões na sala de aula e incentivando os alunos a justificarem suas opiniões e fundamentarem suas ideias através de conceitos matemáticos, os momentos em que isso acontece são raros e não alcançam a maior parte da turma.

Sendo assim, por meio desta pesquisa, busco compreender como se desencadeia e se desenvolve a argumentação dos alunos em atividades de investigação, descrever esse processo e caracterizar os argumentos dos alunos, para compreender a realização desse processo na sala de aula e facilitar o trabalho com provas e demonstrações. Para a sua realização, pretendo me orientar pelas considerações presentes nos trabalhos citados nesta seção, nos referenciais teóricos que serão apresentados nos capítulos 3 e 5 e em minhas experiências com atividades investigativas.

1.4 Organização da dissertação

Esta dissertação está organizada em oito capítulos, incluindo esta introdução, as referências bibliográficas e os anexos.

No capítulo 2, justifico a escolha por uma abordagem qualitativa nesta pesquisa, faço uma descrição do processo de escolha dos sujeitos e apresento os procedimentos metodológicos utilizados na coleta de dados.

Os referenciais teóricos em que me apoiei para a realização das atividades de investigação matemática são apresentados no capítulo 3. Os questionamentos que surgiram durante o planejamento e a realização das atividades investigativas, bem como a reflexão sobre eles, também são descritos nesse capítulo.

No capítulo 4, apresento o contexto em que a pesquisa foi realizada, descrevendo o espaço da escola e o perfil das turmas que participaram do trabalho de campo, e apresento as atividades investigativas realizadas.

O capítulo 5 está dividido em duas partes. Na primeira, apresento os referenciais teóricos sobre argumentação, definindo e caracterizando a argumentação nos diferentes campos teóricos em que ela se divide, e apresento o modelo de Toulmin (2006) para análise de argumentos. Na segunda parte, apresento os referenciais teóricos sobre argumentação matemática, destaco as diferentes formas de argumentar e apresento o modelo “Cooperação Investigativa”, proposto por Alrø e Skovsmose (2004).

No capítulo 6, descrevo como os dados coletados no trabalho de campo desta pesquisa foram organizados e apresento a forma de análise escolhida.

A análise dos dados é apresentada no capítulo 7, que está dividido em quatro partes. Na primeira, descrevo situações em que encontrei argumentação, na segunda, discuto sobre o desenvolvimento da argumentação dos estudantes, na terceira, descrevo os obstáculos vivenciados durante a realização das atividades investigativas, e, por fim, na quarta parte, faço uma síntese da análise realizada.

No último capítulo, o 8, apresento as considerações sobre o processo da argumentação dos alunos nas atividades investigativas realizadas nesta pesquisa e aponto possibilidades para pesquisas futuras. Em seguida, apresento as referências bibliográficas utilizadas no processo de escrita desta dissertação e os anexos.

2 METODOLOGIA 1: abordagem metodológica e coleta de dados

Neste capítulo, destaco as características de uma pesquisa qualitativa, justificando a escolha metodológica por este tipo de abordagem neste trabalho. Em seguida, apresento a descrição sobre a etapa de escolha dos sujeitos e, finalmente, os procedimentos metodológicos utilizados na coleta de dados.

2.1 A abordagem metodológica

Considerando que a intenção desta pesquisa é responder a pergunta: **Como se desencadeia e se desenvolve a argumentação dos alunos em uma atividade investigativa?**, propus objetivos como descrever e analisar momentos em que ocorreu argumentação, analisar interações entre os alunos, entre eles e o professor e caracterizar os argumentos utilizados pelos alunos. Estes estão relacionados com uma abordagem qualitativa, uma vez que, de acordo com D'Ambrosio (2006), a pesquisa qualitativa "lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas." (p.19). Além disso, o foco de uma pesquisa com esse tipo de abordagem é "entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes." (D'AMBROSIO, 2006, p.10).

A presença do termo **como** na pergunta diretriz revela o caráter descritivo da apresentação da análise dos dados, que é característico de uma pesquisa qualitativa, de acordo com Araújo e Borba (2006).

Bogdan e Biklen (1994) apresentam cinco características de pesquisas qualitativas, enfatizando que a falta de uma delas não descaracteriza esse tipo de abordagem:

- Nesse tipo de pesquisa, o ambiente natural é a fonte direta dos dados e o investigador é o instrumento principal. Isso pode contribuir para uma melhor compreensão das ações ali ocorridas.
- Os dados coletados são apresentados e analisados em forma de palavras ou imagens, sendo, então, uma pesquisa de caráter descritivo.
- O principal interesse do investigador é o processo e não o resultado ou o produto.
- A análise realizada pelo investigador é indutiva, ou seja, a partir de dados de casos particulares, são construídas hipóteses para compreender casos gerais. No processo

de análise as coisas estão mais amplas e abertas, tornando-se mais específicas e fechadas no final, assemelhando-se à imagem de um funil.

- O significado tem extrema importância na pesquisa qualitativa. Assim, os pesquisadores, inseridos no local natural de pesquisa, buscam apreender as perspectivas de seus participantes.

As cinco características apresentadas acima estão presentes nesta pesquisa. Os dados foram coletados por mim por meio de gravações em áudio e vídeo, notas no caderno de campo e relatórios produzidos pelos alunos, visando compreender melhor as suas ideias. Esses dados foram analisados[6] de forma indutiva e apresentados de maneira descritiva. Meu principal interesse estava no processo e não apenas no resultado. Portanto, a escolha de uma abordagem qualitativa é mais adequada para esta pesquisa.

2.2 Os procedimentos metodológicos para a coleta de dados

Na fase de escrita do projeto desta pesquisa, optei por realizar a coleta de dados na escola em que eu trabalhava, em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental. Os estudantes dessa turma já haviam participado de atividades de investigação e, também, por ser uma das professoras da escola, eu tinha autorização, por parte da direção, para fazer a coleta de dados ali. Além disso, o professor da turma também havia concordado em participar da pesquisa. Esta escolha era coerente, pois

> a escolha do campo onde serão colhidos os dados, bem como dos participantes é proposital, isto é, o pesquisador os escolhe em função das questões de interesse do estudo e também das condições de acesso e permanência no campo e disponibilidade dos sujeitos. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 86)

Porém, na época da coleta de dados, eu estava trabalhando em outra escola e não encontrei disponibilidade de horários para fazer a pesquisa com a turma. Para Bogdan e Biklen (1994), as pesquisas qualitativas são marcadas tanto pela diversidade quanto pela flexibilidade e, sendo assim, seu planejamento não é engessado nem submetido a regras definidas e precisas. Dessa forma, tentei procurar por outras turmas que já tivessem contato com atividades de investigação.

[6] Os procedimentos de análise serão apresentados no capítulo 6.

Devido à dificuldade em encontrar uma turma com esse perfil, decidi realizar a pesquisa com uma professora de matemática que eu conhecia e que concordou em participar. Ela trabalhava na rede municipal de Belo Horizonte e lecionava em três turmas do 9º ano e uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental, no turno da manhã. Optei por coletar dados em uma de suas turmas do 9º ano, pois acreditava que, por eles estarem no último ano do Ensino Fundamental, deveriam ter maior domínio de conteúdos, além de maior maturidade, e isso poderia contribuir para o desenvolvimento da argumentação.

É importante destacar que nem a professora nem os estudantes tinham experiência com atividades investigativas, mas isso não acarretaria um prejuízo à pesquisa. Pelo contrário, o surgimento e o desenvolvimento da argumentação nesse contexto só enriqueceriam os resultados do trabalho. Isso permitiria que eu acompanhasse o processo da investigação desde o início, observando aspectos que contribuíram para o desencadeamento e o desenvolvimento da argumentação dos alunos, além de servir de inspiração para professores, que não têm experiência com investigação, realizarem esse tipo de atividade nas aulas de matemática.

Em uma conversa inicial com a professora, ficou combinado que eu iria assistir às aulas em cada uma das três turmas de 9º ano e, ao longo do trabalho de campo, eu iria escolher uma dessas turmas para focalizar as questões que norteiam a pesquisa. Porém, na etapa da coleta de dados, decidi realizar as atividades investigativas nas três turmas para ampliar a possibilidade de desencadear e desenvolver a argumentação dos alunos. Isso está de acordo com Miles e Huberman (1984) apud Bogdan e Biklen (1994), uma vez que a escolha dos sujeitos, "que proporciona variação máxima de participantes é, geralmente, a de maior utilidade em pesquisas qualitativas". Assim, eu poderia encontrar diferentes perfis de alunos: líderes, excluídos, passivos, etc., e analisar a atuação daqueles que se aproximassem das questões relativas desta pesquisa.

As três turmas de 9º ano tinham quatro aulas de matemática por semana nas segundas, terças, quintas e sextas-feiras, sendo que este último dia era dedicado à aula de geometria. Devido à minha disponibilidade de horários, acompanhei as três turmas nas terças e quintas-feiras. Sendo assim, no primeiro dia do trabalho de campo, assisti às aulas da professora nessas turmas para conhecê-los, explicar o que era e como seria realizada a pesquisa e fazer anotações sobre as aulas no caderno de campo, como o conteúdo estudado e o comportamento dos estudantes. Dessa forma, inicialmente, adotei a observação não-participante como procedimento metodológico. De acordo com Flick (2009), esse tipo de observação "abstém-se das intervenções no campo" (p. 204).

A partir da segunda aula, dei início à realização das atividades investigativas que foram coordenadas por mim e pela professora. Nós orientamos os alunos durante a realização das atividades e esclarecemos as dúvidas que surgiram. Além disso, visando identificar e descrever os momentos que desencadearam a argumentação dos estudantes, realizei intervenções em alguns momentos da investigação, por exemplo, questionando opiniões ou citando contraexemplos, de forma a provocar a argumentação dos alunos, orientando a professora sobre como conduzir as discussões com a turma, entre outras.

Essas intervenções foram apoiadas nos referenciais teóricos sobre argumentação (BOAVIDA, 2005), investigações na aula de matemática (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009) e em minhas experiências como professora. As orientações dadas à professora eram feitas anteriormente às aulas de cada turma, antes dos alunos entrarem na sala de aula e às quintas-feiras, no horário de planejamento que ela tinha durante a semana, disponibilizado pela escola. Nesse horário, conversávamos sobre o desenvolvimento das atividades e fazíamos uma avaliação do que ocorreu, decidindo quais seriam as intervenções necessárias.

Assim, na fase da realização das atividades investigativas, o procedimento metodológico adotado foi a observação participante. De acordo com Flick (2009), esse tipo de observação é caracterizado pela influência do pesquisador no que é observado, devido à sua participação. É importante ressaltar que o foco da pesquisa é o aluno, porém, as interações com a professora também foram registradas e analisadas.

De acordo com Flick (2009), um problema relativo à observação participante “é que nem todos os fenômenos podem ser observados nas situações” (p. 213). Porém, para auxiliar no registro dos dados a serem analisados, os seguintes recursos foram utilizados: notas do caderno de campo, filmagens, gravações em áudio e relatórios produzidos pelos estudantes.

A coleta de dados durou cerca de dois meses e foi interrompida devido à saída da professora da escola. Ela passou em um concurso para lecionar em uma escola em outra cidade. Dessa forma, foi possível realizar quatro atividades de investigação, sendo que cada uma delas foi desenvolvida em três aulas de 60 minutos.

3 INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

Antes da realização desta pesquisa, eu já tinha conhecimento teórico e prático sobre investigações. Porém, durante a elaboração e a realização das atividades investigativas, ao longo do trabalho de campo, surgiram muitas questões que me fizeram retornar aos referenciais teóricos. Inicialmente, eu queria garantir que as atividades planejadas fossem classificadas como investigativas. Então, meu primeiro questionamento foi: que características uma atividade deveria ter, a priori, para que ela pudesse ser considerada investigativa? Além disso, tive dúvidas sobre quais passos deveria seguir durante a condução das atividades para que ocorressem as quatro etapas propostas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009).

Neste capítulo, apresento reflexões sobre esses e outros questionamentos que surgiram no trabalho de campo desta pesquisa e os referenciais teóricos em que me apoiei para a realização das atividades de investigação.

3.1 Investigar em Matemática e na aula de Matemática

A palavra investigar assume, no senso comum, significados como pesquisar, analisar, examinar com atenção. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), esse termo faz referência ao trabalho dos matemáticos que procuram descobrir relações e identificar propriedades de objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos. Isso pode exigir tempo, dedicação e criatividade dos matemáticos.

Segundo esses autores, a investigação matemática se desenvolve em quatro etapas que podem ocorrer simultaneamente: na primeira, os matemáticos reconhecem a situação, realizam explorações e formulam questões; na segunda, eles organizam os dados para formular conjecturas; na terceira, eles realizam testes das conjecturas elaboradas e aquelas que não resistem aos testes são refutadas, podendo ser reformuladas e testadas novamente; na última etapa, os matemáticos procuram justificar e comunicar as suas conjecturas a outros matemáticos, momento em que ocorre argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado. Cada etapa pode ser visualizada na tabela a seguir.

Tabela 1 - Momentos na realização de uma investigação matemática

Exploração e formulação de questões	▪ Reconhecer uma situação problemática ▪ Explorar a situação problemática ▪ Formular questões
Conjecturas	▪ Organizar dados ▪ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	▪ Realizar testes ▪ Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	▪ Justificar uma conjectura ▪ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 21

Uma atividade de investigação, de acordo com Oliveira, Segurado e Ponte (1996), é aquela "em que é dada ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, reflectir e generalizar" (p.2). Dessa forma, para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), a investigação assume características próprias dentro da matemática, levando a um processo de formulação de conjecturas, que devem ser testadas e provadas. E ainda acrescentam que esse trabalho de investigação dos matemáticos está ao alcance dos alunos na sala de aula de matemática.

Para eles, incluir a investigação nos trabalhos em sala de aula não significa que o professor deve propor problemas muito complicados ou sofisticados, mas, sim, levar os alunos a atuarem como matemáticos, estudando questões que geram dúvidas, formulando questões que os interessam e procurando respostas de modo fundamentado e rigoroso, no quanto isso for possível. Esse é o propósito da investigação no contexto da sala de aula para esses autores.

Porém, a atividade de investigação não costuma fazer parte do cotidiano escolar, já que é comum encontrar aulas de matemática apoiadas no modelo tradicional de ensino. Segundo Alrø e Skovsmose (2004), nesse modelo, "o livros-texto desempenha um papel central, em que o professor explica a nova matéria de matemática, os alunos resolvem exercícios sobre a matéria e correções de soluções e de erros caracterizam a estrutura geral de uma aula[7].” (p. 5). Essa organização coloca o exercício como uma parte fundamental da aula. Skovsmose (2000) denomina esse modelo de *paradigma do exercício*.

É comum perceber uma postura mais passiva dos alunos no modelo tradicional, pois eles observam a aplicação de estratégias pelo professor na resolução de exercícios e as reproduzem em exercícios semelhantes. A aplicação direta de técnicas envolvidas nesse processo e a sua prática repetitiva podem fazer com que o aluno atue mecanicamente, dificultando a valorização da produção matemática, do raciocínio e do aprendizado com o erro. O aluno também pode ser influenciado a pensar que, além dos exercícios, qualquer problema matemático tem uma única solução correta e encontrá-la é o maior objetivo a ser alcançado.

Isso se opõe à postura mais ativa que o aluno deve ter em uma atividade investigativa, uma vez que é ele quem deve pesquisar, elaborar conjecturas, testar e prová-las, com a ajuda do professor. Assim, para Alrø e Skovsmose (2004), a resolução de exercícios por si só é uma atividade limitante quando comparada a uma atividade que envolve investigação. Além disso, de acordo com Skovsmose (2000), ela pode desafiar o paradigma do exercício, contribuindo para que o aluno se engaje ativamente em seu processo de aprendizagem.

Para esse autor, um dos principais objetivos da investigação é desenvolver a *materacia*, ou seja, a “competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela matemática” (p. 2), que vai além do desenvolvimento de habilidades matemáticas. Isso revela a sua proximidade com a Educação Matemática Crítica. Assim, o interesse desse autor pela investigação está na reflexão sobre a matemática e como ela interfere em nossa sociedade, uma vez que ela faz parte de nossa cultura tecnológica, política e econômica, e não apenas como um assunto a ser ensinado e aprendido.

Araújo et al (2008) discutem as diferenças entre as perspectivas de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) e Skovsmose (2000) sobre investigação. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), a investigação pode ser compreendida como uma simulação, na sala de aula, do trabalho dos matemáticos profissionais. Nesse sentido, os autores buscam simular um ambiente semelhante ao da prática dos matemáticos de criação de matemática. Já para Skovsmose (2000), o principal objetivo da investigação é criar uma contraposição ao paradigma do exercício através de uma proposta de exploração e justificação matemática pelos alunos. Segundo o autor, o trabalho com investigação proporciona um questionamento

---

[7] Tradução de: “the textbook plays a predominant role, where the teacher explains the new mathematical topics, where students solve exercises within the subject, and where correction of solutions and mistakes characterize the overall structure of a lesson.” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2004, p. 5)

sobre a natureza da matemática e o seu papel na sociedade, o que mostra sua aproximação com a Educação Matemática Crítica. Assim, há um distanciamento entre os objetivos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), que pretendem simular na sala de aula o trabalho de produção matemática pelos matemáticos, e Skovsmose (2000), que se preocupa com o desenvolvimento da materacia.

Um ambiente que proporciona um trabalho com investigação é chamado, por Skovsmose (2000), de *cenário para investigação*. Nele, os estudantes são convidados pelo professor, por meio da pergunta "O que acontece se...?", a explorarem, formularem questões e a buscarem explicações.

Mas a realização da investigação depende da aceitação do convite pelos alunos. Uma mesma atividade pode desencadear um cenário para investigação para um grupo de alunos e para outro não, que pode ter outras prioridades no momento do convite. Assim, uma atividade não pode ser considerada como um cenário para investigação a priori.

Skovsmose (2000) diferencia o paradigma do exercício do cenário para investigação levando em consideração três referências (à matemática pura, à semi-realidade e à realidade), que buscam a produção de significados pelos alunos para os conceitos matemáticos e para as atividades. A distinção entre exercício e cenário para investigação, combinada com as três referências, gera os seis tipos de ambientes de aprendizagem definidos por Skovsmose (2000), que podem ser visualizados na tabela a seguir:

Tabela 2 - Ambientes de aprendizagem

	Exercícios	Cenário para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: SKOVSMOSE, 2000, p. 8

Com relação aos ambientes com referência à matemática pura, as atividades propostas se referem apenas à matemática. Exemplos disso são: simplificação de uma expressão como $12x - 5y - (x + 7y) + 3x$, que configura o ambiente 1, e exploração em tabelas com números ou de figuras geométricas, que caracteriza o ambiente 2.

Nos ambientes que se referem à semi-realidade, as atividades tratam de uma situação artificial, ou seja, a questão carrega elementos da realidade, mas ela foi construída para a sua proposição. Exemplo que caracteriza o ambiente 3: Um granjeiro quer cercar seu galinheiro que possui formato retangular, com 6 metros de comprimento e 4,5 metros de largura. Se o metro do arame custa R$5,60, quanto o granjeiro vai gastar se ele pretende construir uma cerca com cinco voltas completas de arame em torno do galinheiro?

A "corrida de cavalos" é um exemplo de atividade do ambiente 4:

> A pista de corrida é desenhada na lousa e onze cavalos – 2, 3, 4 ..., 12 – estão prontos para iniciar. Dois dados são jogados; a partir da soma dos números tirados, marca-se uma cruz no diagrama. Como mostra a figura, a soma 6 apareceu três vezes, mais vezes que as outras somas. O cavalo 6, portanto, tornou-se o grande vencedor, seguido pelos cavalos 7 e 10. (SKOVSMOSE, 2000, p.10)

Figura 1 - O terreno da corrida de cavalos

			X							
			X	X			X			
X	X		X	X	X	X	X		X	
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	2

Fonte: SKOVSMOSE, 200, p.10

Já as atividades que se referem às situações reais fazem parte dos ambientes 5 e 6. Um exemplo de atividade do ambiente 5 é um exercício com perguntas elaboradas a partir de um gráfico de população ou situação econômica de uma determinada região. O projeto "Energia", apresentado por Skovsmose (2000), é um exemplo que caracteriza o ambiente 6. Nesse projeto, os estudantes aprenderam a fazer modelos *input-output* em situações de cálculo de consumo e gasto de energia (em kJ) e depois aplicaram esse conhecimento na agricultura, fazendo cálculos, como a quantidade de energia usada na preparação de um campo.

Skovsmose (2000) salienta que a linha vertical que divide os ambientes entre o paradigma do exercício e o cenário para investigação, apresentados na tabela 2, é, sem dúvida, uma linha muito densa. Cabe ao professor encarar isso como uma variedade de possibilidades para atuar em sala de aula, devendo "mover-se entre os diferentes ambientes" (p. 14). Além disso, essa linha não é rígida, já que um exercício pode originar uma atividade investigativa e vice-versa.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), as atividades investigativas podem envolver os alunos ativamente na aprendizagem, fazendo com que eles mobilizem recursos cognitivos e habilidades matemáticas para formular questões a serem estudadas. A passividade dá lugar à ação e à busca de novas descobertas. O aluno se torna sujeito, ou seja, o ator principal do seu aprendizado. Assim, o aluno poderá ter a oportunidade de pensar e fazer sua própria matemática. Outros autores concordam e acreditam que é importante fazer com que os alunos se interessem por investigações:

> "...elas podem dar aos alunos um sabor da Matemática em construção e do trabalho criativo e independente[8]. (p. 157) [Os alunos podem] generalizar a partir da observação de casos, [usar] argumentos indutivos, argumentos por analogia, reconhecer ou extrair um conceito matemático de uma situação concreta[9]." (PÓLYA, 1965, p. 101)

Dessa forma, as aulas de Matemática podem ir além do ensinar e aprender conteúdos, discutindo e mostrando ao aluno parte do que já foi produzido em matemática. Para Braumann (2002), não basta entender a matemática que já está feita, o aluno deve ser capaz de fazer investigação adequada a cada nível de ensino, compreendendo os conhecimentos adquiridos nesse processo, percebendo a utilidade da matemática e a possibilidade de intervir no mundo.

> Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (BRAUMANN, 2002, p. 5)

De acordo com Oliveira, Segurado e Ponte (1996), para que uma atividade possa ser caracterizada como investigativa, é necessário que ela tenha uma proposta desafiadora para os estudantes e que os métodos de resolução e a resposta não estejam imediatamente acessíveis a eles, como ocorrem em exercícios. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), a relação entre as atividades de investigação e a resolução de problemas é muito próxima. Assim, faz-se necessário uma distinção entre exercícios, problemas e atividades investigativas.

3.2 Exercícios, problemas e investigação matemática

Existem distinções entre exercícios, problemas e atividades investigativas. A proposição de exercícios é um recurso muito utilizado pelo professor, sobretudo no paradigma

---

[8] Tradução de: "... they may give the student a taste of mathematics in the making, of independent creative work." (PÓLYA, 1965, p.157)

[9] Tradução de: "… generalizing from observed cases, inductive arguments, arguments from analogy, recognizing a mathematical concept in, or extracting it from, a concrete situation." (PÓLYA, 1965, p. 101)

do exercício, para que os alunos pratiquem o conteúdo lecionado em uma determinada aula de Matemática. A resolução de exercícios, de acordo com Pólya (1978, apud PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009), envolve a aplicação de métodos já conhecidos, podendo variar o grau de dificuldade, requerendo mais habilidade na aplicação de mais de um método para alcançar a sua solução. Um exemplo de exercício seria: Resolva a equação $x + \frac{1}{3} = 2x$.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), tanto o problema quanto o exercício apresentam, no enunciado, os dados e o que é pedido, de forma clara e objetiva, sem ambiguidades. Além disso, a solução, normalmente única, é conhecida pelo professor e a resposta dada pelo aluno está certa ou errada.

Porém, a resolução de um problema não envolve a aplicação direta de métodos conhecidos, como no exercício. Um exemplo de problema seria: Como formar 10 quadrados com 16 palitos de fósforo?

Segundo Onuchic (2011), a resolução de problemas é considerada uma metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática. Nesse sentido, um problema é proposto como ponto de partida para a orientação da aprendizagem e a construção do conhecimento é feita por meio de sua resolução de forma colaborativa entre professor e alunos.

Para esta autora, as aulas que envolvem resolução de problemas podem ter a seguinte organização:

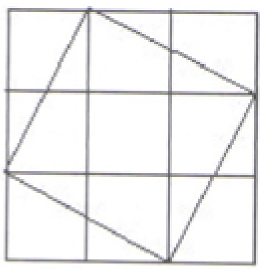
1) Seleção de um problema que proporcionará a construção de um conceito novo. Esse tipo de problema recebe o nome de problema gerador.
2) Leitura individual do aluno do problema gerador.
3) Divisão dos alunos em grupos e leitura do problema gerador em conjunto. Se necessário, esclarecimento das dúvidas referentes ao enunciado do problema.
4) Resolução do problema pelos grupos de forma cooperativa e colaborativa.
5) Observação e incentivo do professor ao trabalho dos alunos. Nessa etapa, o professor deve ser um mediador, levando os alunos a pensar e a trocar ideias entre eles. Além disso, ele deve atender às dificuldades apresentadas por eles.
6) Registro das diferentes resoluções do problema gerador no quadro pelos representantes dos grupos.
7) Análise e discussão das resoluções apresentadas. Nesse momento, o professor é o mediador da discussão e deverá incentivar a participação dos alunos, esclarecendo suas dúvidas.
8) Busca pelo consenso do resultado correto.

9) Formalização do conteúdo que deve ser registrado pelo professor, destacando os conceitos e procedimentos envolvidos na resolução do problema gerador.

Nos livros-textos de matemática podem ser encontradas seções destinadas a resoluções de problemas sobre os conteúdos tratados em cada capítulo do livro. Nesse caso, nos problemas são propostas questões e o estudante deve interpretá-las e buscar um método matemático que ele já conhece para resolvê-las. Um exemplo seria: Lucas recebia R$60,00 de mesada. Ele pediu para o seu pai aumentá-la, pois o lanche da cantina de sua escola que custava R$3,50 aumentou para R$4,20. Ele passou a receber R$67,00 de mesada. Esse valor é proporcional ao aumento do lanche?

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), a relação entre problema e investigação é estreita, pois "uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver." (p. 16)

No entanto, esses autores salientam que uma atividade investigativa se diferencia do problema e também do exercício, por tratar de uma situação ampla e não bem definida, que depende do ponto de partida dado pelo investigador. Dessa forma, em uma mesma atividade investigativa podem ser encontrados diferentes resultados. Portanto, não há como saber previamente a solução de uma atividade investigativa. Um exemplo desse tipo de atividade seria:

> Num quadrado podem-se inscrever outros quadrados. De entre estes, considera aqueles cujos vértices são pontos de interseção das quadrículas com os lados do quadrado inicial. Na figura, você pode observar um quadrado 3x3, com um quadrado inscrito, nas condições descritas atrás.
>
> 
>
> 1. Num quadrado como este, quantos quadrados nestas condições poderá inscrever? E em quadrados 4x4? E 5x5?
> 2. Com base nos quadrados que já desenhou e alargando o seu estudo a quadrados com dimensões diferentes, investigue possíveis relações entre os quadrados inscritos e o quadrado inicial. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 66)

Ainda que soubesse de antemão as diferenças entre atividades de investigação, exercícios e problemas, que foram abordadas nesta seção, encontrei dificuldade em produzir uma atividade investigativa. A minha preocupação era garantir que ela recebesse essa caracterização. Nesse momento, esbarrei com as diferenças entre problemas e atividades de investigação. O roteiro da primeira atividade elaborada e aplicada na realização da pesquisa se encontra no anexo.

Dessa primeira atividade, eu já conhecia a resposta. Porém, os estudantes não conheciam os métodos para resolver as situações propostas e nem mesmo o número π, que faz parte da fórmula do perímetro da circunferência. Sendo assim, ela pode ser considerada um problema ou uma atividade investigativa?

Esses questionamentos fizeram-me retornar ao referencial teórico e percebi que não é possível garantir, de antemão, que uma atividade seja caracterizada como investigativa, uma vez que, de acordo com Skovsmose (2000), é necessário convidar os alunos a participarem da investigação e que ser ou não investigativa dependerá do aceite dos estudantes ao convite. Para esse autor, até mesmo um exercício pode gerar uma investigação. Dessa forma, é preciso verificar, após a aplicação da atividade, se os alunos levantaram questões que eles desejaram estudar, elaborando conjecturas, realizando testes e provas.

Os alunos podem recusar o convite por motivos diversos. Pode ser que os estudantes já conheçam os passos para chegar à resposta, pode ser que o tema da investigação não desperte o interesse e a curiosidade dos alunos para pesquisar e formular questões que eles queiram estudar, ou que eles tenham outras prioridades no momento da atividade. Nesse caso, é preciso avaliar, após a aplicação da atividade, os motivos que levaram os alunos a recusarem o convite.

Outra indagação que tive foi sobre a postura dos estudantes diante da proposta de uma situação aberta em que eles deveriam se posicionar e levantar questões para estudar. Como os alunos estavam habituados com aulas expositivas e resolução de exercícios, o que desencadeava uma postura mais passiva dos alunos em relação ao processo de ensino e aprendizagem, possivelmente eles teriam dificuldade em entender o que era uma atividade investigativa e em realizar com autonomia a exploração das situações propostas e a elaboração de conjecturas.

Assim sendo, a exemplo de Jordane (2007), decidi propor uma sequência de atividades na qual as primeiras eram mais direcionadas, ou seja, com mais perguntas que orientavam os estudantes a obterem a resposta, e as últimas mais abertas, sem ter uma pergunta que o aluno deveria responder, mas uma situação proposta em que ele deveria procurar regularidades e formular suas próprias questões. O roteiro da última atividade proposta aos alunos está no anexo.

Tanto o roteiro da primeira atividade quanto o da quarta podem proporcionar um trabalho com investigação na sala de aula. Ainda que o primeiro roteiro tenha perguntas mais direcionadas, isso não exclui a possibilidade dos estudantes formularem suas próprias questões para investigar e elaborar conjecturas, testá-las e prová-las.

Como foi dito, há diferenças entre problemas e atividades investigativas, porém, a relação entre elas é estreita. Para que uma atividade seja considerada investigativa, não basta que ela tenha uma situação aberta, mas que o aluno aceite o convite para participar dela. Tanto um exercício quanto um problema podem originar uma atividade investigativa e vice-versa.

Feita a discussão entre as diferenças entre exercícios, problemas e atividades investigativas, a partir de agora, faz-se necessário uma descrição detalhada sobre as fases de uma atividade investigativa em sua realização na sala de aula.

3.3 A atividade investigativa na sala de aula

No contexto da sala de aula, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), uma atividade investigativa ocorre geralmente em três fases realizadas em uma ou mais aulas: na primeira, o professor faz uma introdução da tarefa à turma, apresentando a questão a ser investigada; na segunda, os alunos realizam a investigação, individualmente ou em grupos; na terceira, o professor propõe à turma uma *discussão* onde todos relatam suas conclusões.

A seguir, apresento com mais detalhes as três fases propostas por esses autores.

3.3.1 A introdução da tarefa

Segundo os autores, essa fase é breve, mas muito importante para o curso da atividade. Nesse momento, o professor deve fazer uma introdução da tarefa a ser realizada pelos alunos, oferecendo uma orientação geral, esclarecendo o que é investigar e o que é esperado deles nesse tipo de atividade, e, em seguida, dar orientações específicas da atividade proposta. É preciso ter cuidado para não direcionar a exploração dos estudantes, pois a interpretação da questão proposta faz parte da atividade investigativa e cabe aos alunos fazerem isso de forma autônoma.

3.3.2 O desenvolvimento da atividade investigativa

No segundo momento da investigação, para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), o professor assume um papel de retaguarda. Ele deve acompanhar os trabalhos dos alunos e oferecer apoio quando necessário. Durante a realização da atividade, espera-se que os estudantes realizem explorações, formulem questões, conjecturas, testes, reformulação e justificação de conjecturas e avaliação do trabalho.

3.3.2.1 Exploração e formulação de questões e conjecturas

Para esses autores, é preciso um tempo maior para a fase de exploração, pois é nela que os alunos compreendem melhor o sentido da tarefa proposta e começam a formular suas questões e conjecturas. Essa formulação feita pelos alunos acontece a partir da observação e manipulação dos dados apresentados na tarefa e também por analogia a outras conjecturas. O professor deve ficar atento e intervir quando os estudantes insistirem em seguir uma direção ineficaz na exploração.

3.3.2.2 Testando conjecturas

Na fase de realização de testes, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), os alunos começam a compreender quando uma conjectura pode ser refutada ou considerada verdadeira. Entretanto, há uma tendência dos alunos a aceitarem uma determinada conjectura após a terem verificado certo número de exemplos. Nesse caso, o professor pode intervir em dois momentos: durante a realização da investigação pelos alunos, individualmente ou em grupos, ou durante a *discussão* com a turma, estimulando a procura de contraexemplos.

3.3.2.3 Justificando as conjecturas

No momento da conclusão do trabalho, para esses autores, os estudantes costumam tratar suas conjecturas como conclusões sem realizar nenhum processo de justificação. Esse processo muitas vezes é esquecido ou deixado para segundo plano durante a realização de investigações. Mas é importante que o professor faça com que os alunos compreendam que as conjecturas são afirmativas provisórias, sendo necessário testá-las e prová-las para que sejam consideradas verdadeiras.

O processo da prova matemática pode ser inserido aos poucos nas atividades investigativas. Inicialmente, o professor pode levar os alunos a buscarem justificativas aceitáveis para a conjectura, baseados em seus próprios conhecimentos. Na medida em que os alunos passam a compreender melhor esse processo e desenvolvem suas habilidades, a realização de provas pode se tornar mais fácil. A justificação de conjecturas deve ser um trabalho contínuo na atividade investigativa, pois o aluno precisa compreender que o ato de justificar suas afirmações é necessário e não apenas uma tarefa imposta pelo professor.

3.3.3 A discussão

Segundo os autores, nesta etapa final da investigação, os estudantes comunicam os seus resultados, compartilhando com toda a turma suas conclusões e estratégias para resolver a questão proposta, ocorrendo a sistematização das principais ideias. O professor deve ser um mediador da discussão e, ao mesmo tempo, deve estimular os alunos a se questionarem.

Ademais, esse é um bom momento para que os alunos desenvolvam sua capacidade de argumentação e de justificação. Para tanto, o professor pode mostrar alguns modelos de prova matemática, fazendo com que os estudantes comecem a entender o sentido de uma demonstração matemática.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), ao planejar uma atividade investigativa, o professor pode saber como começá-la, mas não como irá acabar. Cada aluno pode seguir um caminho, reagir de uma maneira à intervenção do professor e, assim, são vários elementos imprevisíveis que podem ocorrer. Além disso, há o "risco de propostas de trabalho investigativo resultarem na simples aplicação de procedimentos rotineiros, como fazer tabelas ou procurar regularidades" (p. 10).

Dessa forma, o professor tem um papel decisivo na atividade de investigação, que vai desde a escolha da questão a ser proposta até a forma como ele a conduz, apoiando os trabalhos dos alunos. Para Oliveira, Segurado e Ponte (1996), é preciso que o professor "demonstre forte espírito investigativo, aceitando caminhos de exploração imprevistos, colocando-se a si mesmo novas perguntas e admitindo ideias alternativas" (p. 9).

Além disso, para que a atividade investigativa ocorra em todas as etapas apresentadas nesta seção, é preciso que o aluno conheça cada etapa e o que ele deve fazer em cada uma delas. Para isso, esse tipo de atividade não pode ser uma atividade isolada, que ocorre de vez em quando: é preciso estimular os estudantes e a melhor maneira é fazendo investigações.

Foi possível realizar quatro atividades investigativas durante o período do trabalho de capo desta pesquisa. Elas serão apresentadas de forma mais detalhada no próximo capítulo, como também será apresentada uma descrição do contexto em que a pesquisa foi realizada.

4 DESCREVENDO A PRÁTICA

Neste capítulo, apresento, na seção 4.1, o contexto em que a pesquisa foi realizada, na qual faço uma descrição do espaço da escola e do perfil das três turmas envolvidas. Em seguida, na seção 4.2, faço uma apresentação das quatro atividades investigativas propostas no trabalho de campo desta pesquisa.

4.1 Contexto

O trabalho de campo desta pesquisa foi desenvolvido em três turmas do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de Belo Horizonte, no turno da manhã. A escolha da escola e das turmas, como foi dito na seção 2.2, não seguiu meu critério inicial que era que os alunos tivessem alguma experiência com atividade de investigação. Ela ocorreu a partir da aceitação de uma professora de matemática que eu conhecia em participar da pesquisa, que a partir de agora chamarei de Maria, para preservar sua identidade, por questões éticas. Na época da coleta de dados, a professora Maria era aluna da pós-graduação em Educação e licenciada em Matemática.

A escola fica localizada em um bairro da regional nordeste de Belo Horizonte e oferece desde a Educação Infantil, que é ministrada na Unidade Municipal de Educação Infantil (UMEI), anexa à escola, até os anos finais do Ensino Fundamental. À noite, ela também oferece o ensino na modalidade Educação de Jovens e Adultos (EJA). Além disso, durante o período da manhã e da tarde, funciona o Projeto Escola Integrada, no qual os estudantes passam o dia na escola e, além de ter aulas de português, matemática e outros, participam de atividades pedagógicas e oficinas. De modo geral, os alunos matriculados nessa escola são de classe baixa ou média, que residem em vilas próximas à escola ou em bairros vizinhos.

No Projeto Escola Integrada, os alunos que estudam regularmente no turno da manhã almoçam na escola e, na parte da tarde, são divididos em grupos para participarem de oficinas. Essas oficinas acontecem em salas alugadas de uma igreja evangélica do bairro. Apenas as oficinas de informática e as oficinas em que os estudantes realizavam as tarefas para casa aconteciam nas dependências da escola. Às 16h00min, esses alunos retornam para a escola, lancham e voltam para casa. Os alunos que estudam regularmente no turno da tarde chegam à escola às 8h30min, tomam café da manhã e são divididos em grupos para participarem das oficinas. Às 12h00min, eles retornam para a escola, almoçam, têm um tempo livre e depois vão para as salas de aula. Não são todos os estudantes da escola que participam do Projeto Escola Integrada, pois a adesão, por parte das famílias, é facultativo e não há vagas para todos.

O ano letivo é dividido em trimestres e, apesar de as avaliações serem quantificadas em notas, os alunos recebem o boletim com conceitos que vão do A ao E, por matéria. As notas são convertidas em conceitos no final do trimestre, por meio de porcentagem, que vem de um padrão da prefeitura, que é o mesmo para todas as escolas da rede municipal. Nesse sistema, o conceito A corresponde às notas entre 86 e 100%, o conceito B corresponde às notas entre 66 e 85%, o C entre 50 a 65%, o D entre 30 a 49% e, o E, abaixo de 30%. Assim, ter conceito D ou E corresponde a ficar abaixo da média, ou seja, ter nota inferior a 50%.

Nessa escola, até o ano de 2009, só havia repetência no final do segundo e do terceiro ciclo, ou seja, após o 6º e o 9º ano (cada ciclo é formado por 3 anos). A partir de 2010, os estudantes do terceiro ciclo que ficaram com conceitos D ou E no ano anterior tiveram que fazer dependência, ou seja, passaram para o ano seguinte, mas tiveram que fazer estudos autônomos e intensivos na disciplina com conceito D ou E.

De acordo com os padrões da prefeitura de Belo Horizonte, para as disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática, o aluno faz estudos intensivos nos quais ele tem aulas presenciais duas vezes por semana (com uma carga total de 18 horas de aulas) e depois faz uma prova. Nas demais disciplinas, são oferecidos estudos autônomos, nos quais o aluno estuda por conta própria a matéria escolhida pelo professor, que também decide se avaliará o aluno por meio de um trabalho ou uma prova. Normalmente, essa recuperação é realizada no início do ano, nos meses de março e abril e, caso o aluno não recupere, ele fica retido no final do ano.

A estrutura da escola é diversificada: 18 salas de aula, 1 biblioteca, 1 sala de informática, 1 sala de vídeo, 1 sala de leitura que funcionava como sala de intervenção pedagógica (alfabetização de alunos), 1 depósito para guardar materiais, 2 salas de coordenação, 1 sala de professores, 1 sala para a direção, 1 secretaria, 1 cantina, na qual era oferecida merenda aos estudantes e almoço para os alunos da Escola Integrada, 1 pátio, 1 quadra coberta e um espaço, próximo à quadra, que era aproveitado para as aulas de Educação Física. Além disso, outro espaço também foi adaptado como sala de aula para atender ao projeto de reforço escolar de matemática que acontecia na parte da manhã e à tarde e para ser usado pelos alunos da Escola Integrada, para a realização de oficinas.

Ainda assim, o espaço físico era considerado um problema na escola. Apesar da variedade de espaços, as salas de aula eram pequenas e, constantemente, os estudantes tinham que buscar carteiras em outras salas. Todas as salas de aula eram utilizadas pelas turmas regulares nos turnos da manhã e da tarde. Por isso, os estudantes da escola integrada tinham que utilizar outros espaços para suas atividades. Eles ocupavam o laboratório de informática, a sala reformada para oficinas e salas alugadas de uma igreja evangélica do bairro. Dessa forma, era complicado realizar aulas em outros ambientes que não fosse a própria sala de aula dos alunos.

No período da coleta de dados, tentei agendar uma oficina no laboratório de informática, mas não foi possível devido à sua utilização para atender ao projeto da escola integrada. Havia uma pequena disponibilidade de horário às segundas-feiras na parte da manhã, o que impossibilitava realizar uma atividade com as três turmas. Mesmo que optasse por fazer com apenas uma delas, seria complicado dar uma continuidade na oficina devido ao espaçamento de uma semana entre uma aula e outra.

Cada professor ficava fixo em uma sala, que era chamada de sala ambiente, na qual ele lecionava durante todo o turno. Eram os estudantes que trocavam de sala de acordo com os horários de cada aula. O professor era responsável por trancar a sala durante o recreio e após as aulas.

Durante o recreio, os estudantes ficavam no pátio e na quadra e eram supervisionados pelos funcionários da escola e por um guarda municipal. Se necessário, esse guarda poderia fazer uma intervenção e fazer uma ocorrência, como em uma situação que envolvesse uma briga entre alunos. Em casos mais graves, a polícia militar era acionada.

Apesar disso, a escola era considerada tranquila. No turno da manhã, não havia ocorrência de violência extrema como agressão aos professores, por exemplo. Entretanto, presenciei conflitos entre alunos no recreio e na sala de aula, durante a coleta de dados da pesquisa. Há um caso de agressão doméstica de uma aluna que participou da pesquisa. Esse caso era conhecido pela escola, que já havia acionado o conselho tutelar e órgãos devidos. Porém esse problema ainda persistia.

No período da coleta de dados, eu acompanhei as três turmas denominadas 901, 902 e 903, de 9º ano da professora Maria, às terças e às quintas-feiras. Sendo assim, foi possível acompanhar 2 aulas por semana em cada turma, sendo que cada aula durava 60 minutos.

A turma 901 era composta por 16 meninas e 14 meninos, totalizando 30 estudantes, com idades entre 14 e 15 anos. Quatro desses alunos eram repetentes, inclusive em

Matemática. Três eram novatos na escola, sendo que um deles estudava anteriormente em uma instituição particular de Belo Horizonte. Uma aluna dessa turma, que chamarei de Tatiana, estava grávida de aproximadamente 7 meses.

De acordo com a professora Maria, na turma havia quatro alunos que se destacavam devido ao compromisso com os estudos e às boas notas: Fernando, Eduardo, Elen e Agnes. Fernando e Eduardo já estudavam juntos há 8 anos e eram muito amigos. Eles se ajudavam durante as aulas e competiam em relação às notas. A professora disse que, em geral, a turma era bastante comprometida com os estudos, mesmo aqueles estudantes que mostravam ter dificuldade na matemática. Não havia grande problema disciplinar, apenas conversa excessiva em alguns momentos das aulas.

Na turma 902 também havia 30 alunos, sendo que 14 eram meninas e 16 eram meninos, com idades entre 14 e 15 anos. Cinco alunos eram repetentes, inclusive em matemática. Segundo a professora Maria, nove estudantes eram destaque na sala, sendo que uma aluna sempre tirava notas altas na matéria. Havia uma aluna de inclusão[10], devido a uma paralisia cerebral que ela sofreu quando era mais nova.

A aluna tinha dificuldade em acompanhar o ritmo da turma, mas fazia todas as atividades propostas pela professora Maria juntamente com os colegas. Pude perceber que ela conseguia se envolver com a matéria e com a turma. Em geral, era uma turma muito agitada, pois a maior parte dos alunos conversava bastante. Além disso, havia um aluno que tinha muitos problemas disciplinares na escola, como a prática da pichação. Nas aulas de matemática, ele era muito disperso e conversava demais.

A turma 903 tinha 30 estudantes, 18 meninas e 12 meninos, com idades entre 14 e 15 anos. Seis alunos eram novatos na escola, sendo que um veio de uma escola particular e dois eram de cidades do interior do Vale de Jequitinhonha e de São Paulo. Quatro eram repetentes, sendo que um deles fazia aula de reforço de matemática fora da escola, mas tinha muita dificuldade em acompanhar as aulas.

Nessa turma também havia uma aluna de inclusão, porém, diferentemente do que acontecia na turma 902, ela não conseguia acompanhar os colegas. A professora Maria me contou que ela foi diagnosticada com a síndrome do cromossomo 18, que resulta de uma trissomia no cromossomo 18, provocando atraso no crescimento, atraso mental, má formação do coração, dentre outras características. Assim, ela tinha uma acompanhante contratada pela

[10] Os alunos que eram considerados de inclusão apresentavam alguma deficiência, seja ela física, mental, sensorial, cognitiva ou emocional.

prefeitura que a ajudava a realizar atividades diferenciadas. Maria disse, também, que ela passava a maior parte das aulas na biblioteca, junto com sua acompanhante.

Cinco estudantes da turma 903 eram considerados destaques na sala, sendo que uma delas era considerada uma liderança dentro de um grupo da sala, pois ela explicava a matéria e ajudava os colegas a realizar as atividades. Segundo a professora Maria, essa era a turma que concentrava mais alunos com dificuldades em matemática, o que não foi proposital, pois a turma foi aberta com uma quantidade pequena de estudantes e as vagas foram preenchidas à medida que os alunos iam se matriculando na escola.

Além disso, na turma havia o aluno que mais tinha problema disciplinar em todas as três turmas de 9º ano. A professora relatou que ele se expressava de forma imprópria e ofensiva na sala de aula, ameaçava os colegas de agressão física caso entrassem em conflito com ele, entre outros problemas disciplinares. Muitos alunos pediram para trocar de sala quando souberam que iriam ser da sala dele. Porém, a escola não atendeu ao pedido, já que as outras turmas já estavam cheias.

Esse aluno não se envolvia com as matérias, não fazia as atividades e não registrava toda a matéria passada no quadro. Ele recebia diversas ocorrências devido a esse comportamento, mas não as devolvia assinadas pela família. Sua família já havia sido chamada na escola por motivos disciplinares, inclusive devido a uma agressão física, e o aluno já havia sido encaminhado para o Conselho Tutelar e para a Promotoria da Infância e Juventude. Ele morava na esquina da rua da escola, num casebre de dois cômodos.

Foi nesse contexto que planejei e realizei as quatro atividades investigativas visando desencadear e desenvolver a argumentação dos alunos. A partir de agora, apresento uma discussão sobre a elaboração das atividades.

4.2 Atividades

Uma vez que o objetivo desta pesquisa é investigar como se desencadeia e se desenvolve a argumentação dos alunos em atividades de investigação matemática, era necessário que eu propusesse atividades investigativas aos estudantes participantes da coleta de dados. Como eles não tiveram contato com esse tipo de atividade anteriormente à pesquisa, então, a exemplo de Jordane (2007), optei por iniciar com atividades com roteiros que tinham um número maior de perguntas para orientar a investigação dos alunos.

Sendo assim, decidi por propor uma sequência de atividades em que as primeiras eram mais direcionadas, ou seja, com mais perguntas propostas, e as últimas mais abertas, ou seja, os alunos é que deveriam formular suas próprias perguntas para investigar. A intenção era proporcionar uma transição entre as aulas às quais eles estavam acostumados e as atividades investigativas.

Tomada a decisão da sequência de atividades, dei início ao planejamento das mesmas. Como eu não tinha conhecimento prévio sobre quais conteúdos os alunos já haviam estudado, decidi ter uma conversa inicial com a professora da turma para solicitar a ela sugestões de temas para as atividades. Dessa forma, as atividades seriam planejadas de acordo com os conteúdos já estudados pelos alunos ou de acordo com algum conteúdo que eles estariam estudando no momento da realização da coleta de dados.

A professora me disse que os estudantes estavam aprendendo sobre operações com polinômios e que o próximo assunto a ser estudado era a circunferência. De acordo com ela, os alunos aprenderam, no ano anterior, sobre os elementos da circunferência, raio e diâmetro, mas não conheciam o número π. Desse modo, propus a ela uma atividade com o objetivo de obter uma fórmula para o cálculo do comprimento de uma circunferência.

No encontro posterior, mostrei para a professora o roteiro da primeira atividade. Ela concordou e decidimos que, a partir da segunda aula que eu acompanhasse em cada uma, iniciaríamos o trabalho com investigação nas três turmas. Além disso, combinamos que cada atividade seria desenvolvida em três aulas e que seriam realizadas quatro ou cinco atividades. A professora Maria, que desde sua aceitação em participar da pesquisa sempre demonstrou boa vontade e abertura em relação à aplicação das atividades, não colocou restrições quanto à quantidade de aulas necessárias para a realização das mesmas.

O objetivo da primeira atividade era a obtenção de uma fórmula que permitisse o cálculo do comprimento de uma circunferência. Para isso, os alunos receberiam objetos com formato circular, barbante, régua e calculadora. O roteiro ficou dividido em duas partes.

Na primeira parte, para orientar a investigação, propus uma tabela na qual os estudantes deveriam preencher com os valores do comprimento da circunferência dos objetos recebidos, do diâmetro e da razão entre o valor do comprimento e do diâmetro. Em seguida, os alunos deveriam escrever uma relação para calcular o comprimento de uma circunferência. Na segunda, os alunos deveriam investigar o que acontece com o valor do comprimento de uma circunferência ao alterar o valor de seu raio. O roteiro dessa atividade se encontra em anexo.

Como foi discutido anteriormente, é possível notar a presença de perguntas que direcionam a investigação dos alunos. Porém, esse direcionamento não impede que os estudantes formulem outras questões que queiram pesquisar a respeito da circunferência, como, por exemplo, a proporcionalidade entre raio e comprimento.

Para a segunda oficina, sugeri à professora Maria que fosse sobre a pavimentação do chão da sala com polígonos regulares. Ela concordou e me deu uma atividade que ela realizou com outras turmas em anos anteriores sobre o assunto.

A partir da atividade, propus um roteiro dividido em duas partes. Na primeira, os alunos deveriam completar uma tabela com perguntas sobre se o polígono pavimentava o chão e quantos polígonos eram necessários para que ocorresse essa pavimentação. Para isso, os estudantes receberiam polígonos regulares confeccionados em papel. Porém, eles não receberiam todos os polígonos listados tabela e, sendo assim, deveriam criar estratégias para verificar quais deles pavimentavam o chão. Na segunda parte, foi proposto aos alunos que combinassem tipos diferentes de polígonos regulares para pavimentar o chão. Esse roteiro está no anexo.

Essa atividade também possui perguntas formuladas para orientar a investigação dos alunos. Porém, o direcionamento dado à investigação é menor que a primeira. Uma vez que os estudantes já haviam vivenciado todas as etapas de uma atividade investigativa, na primeira atividade, eles já teriam alguma experiência e mais autonomia para investigar suas próprias questões.

Para a terceira atividade, propus à professora Maria um roteiro sobre sequências de quadrados, elaborado a partir de Jordane (2007). Nesse roteiro, a atividade ficou dividida em três partes, sendo que o grau de dificuldade da sequência aumentava de uma parte para outra.

Seguindo a mesma ideia das atividades anteriores, a primeira parte tem perguntas mais direcionadas e em quantidade maior do que nas outras duas partes. Assim, na terceira parte, os alunos teriam que formular suas próprias questões para investigar. Para a realização da atividade, os estudantes receberiam palitos de fósforo para ajudar na compreensão das sequências. O roteiro dela se encontra no anexo.

Finalmente, a última atividade foi retirada de um dos referenciais teóricos escolhidos: Ponte, Brocardo e Oliveira (2009). Optei por essa atividade por ser mais aberta que as outras três anteriores e também porque, no momento em que eu iria aplicá-la, os alunos estariam estudando o conteúdo sobre potenciação. Assim, seria uma boa oportunidade para eles colocarem em prática o conteúdo estudado em sala. O roteiro dessa atividade está no anexo.

As quatro atividades apresentadas nesta seção foram realizadas de acordo com o seguinte cronograma da coleta de dados, planejado, igualmente, para cada uma das três turmas:

Tabela 3 - Cronograma da coleta de dados

Aula	Procedimento
1ª	Observação de aulas nas turmas.
2ª	Introdução da atividade sobre cálculo do comprimento de uma circunferência e observação participante durante a sua realização.
3ª	Observação participante durante a continuação da realização da primeira atividade.
4ª	Observação participante durante a discussão dos resultados com a turma.
5ª	Introdução da atividade sobre pavimentação do chão da sala e observação participante durante a sua realização.
6ª	Observação participante durante a continuação da realização da segunda atividade.
7ª	Observação participante durante a discussão dos resultados com a turma.
8ª	Introdução da atividade sobre sequências de quadrados e observação participante durante a sua realização.
9ª	Observação participante durante a continuação da realização da terceira atividade.
10ª	Observação participante durante a discussão dos resultados com a turma.
11ª	Introdução da atividade sobre potências de 2 e observação participante durante a sua realização.
12ª	Observação participante durante a continuação da realização da quarta atividade.
13ª	Observação participante durante a discussão dos resultados com a turma.

Fonte: Elaborada pela autora

Neste capítulo, apresentei o contexto em que a pesquisa foi realizada e uma descrição detalhada sobre os sujeitos envolvidos e das atividades que foram desenvolvidas durante o período da coleta de dados. Como meu objetivo é buscar compreender como se desencadeia e se desenvolve a argumentação matemática desses estudantes nas atividades descritas nesta seção, faz-se necessário, a partir de agora, apresentar uma discussão teórica sobre argumentação e argumentação matemática.

5 ARGUMENTAÇÃO E ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresento os referenciais teóricos sobre argumentação e argumentação matemática em que me apoiei. Assim, ele fica dividido em duas partes.

Na primeira, dedicada à argumentação, faço um breve histórico da argumentação na antiguidade, uma vez que o contexto na qual a argumentação surgiu e se definiu como um campo teórico nos ajuda a compreender o conceito de argumento. Em seguida, caracterizo e apresento as definições de argumentação nos diferentes campos teóricos em que ela se divide e, por fim, apresento o modelo de análise de argumentos proposto por Toulmin (2006).

A segunda parte deste capítulo destina-se à argumentação matemática. Apresento a definição de argumento na matemática, destacando as diferentes formas de argumentar, dentre elas a prova e a demonstração. Indico também outro modelo para analisar interações no cenário para investigação, o modelo “Cooperação Investigativa” (Modelo-CI), proposto por Alrø e Skovsmose (2004).

5.1 Argumentação

Argumentação é um termo presente no cotidiano das pessoas e pode ser encontrado em jornais, revistas, livros didáticos das diversas áreas do conhecimento, dentre outros. É comum dizer que uma pessoa está argumentando sobre algo ou então ouvir a expressão “mas qual é o seu argumento?”. No dia a dia, as pessoas se deparam com situações em que elas defendem suas ideias apresentando razões ou justificativas para sustentar suas conclusões. Assim, de acordo com Velasco (2010),

> Em diversas situações cotidianas nos vemos diante da necessidade de justificar, de oferecer razões, de explicar qual a sustentação de nossas afirmações. Seja para convencer alguém de algo, seja para termos certeza em relação às nossas próprias ações, frequentemente temos de buscar entender e/ou explicar o porquê de algumas conclusões. Há, ainda, casos em que uma afirmação somente é considerada verdadeira se for muito bem justificada, como nos cenários científico e jurídico. Em todas essas situações, faz-se necessário argumentar. (VELASCO, 2010, p.35)

E na sala de aula de matemática, os alunos argumentam? Geralmente, as aulas de matemática são marcadas por características do ensino tradicional, se enquadrando no *paradigma do exercício* (SKOVSMOSE, 2000), no qual o ensino de conteúdos é feito essencialmente por meio de aulas expositivas e por resolução de exercícios. Dessa forma, os alunos não são incentivados a discutirem sobre ideias matemáticas e a desenvolver o seu poder argumentativo.

Acredito que em uma aula tradicional pode haver argumentação, pois, mesmo em uma aula expositiva, o aluno pode questionar o professor e querer apresentar e discutir sobre um ponto de vista diferente do que foi apresentado a ele. Contudo, acredito também que esse tipo de situação não favorece o surgimento de oportunidades de discussão e elaboração de justificativas por parte dos estudantes.

A atividade investigativa, pela sua própria estrutura, favorece oportunidades para discussões e situações em que justificativas são necessárias. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), a argumentação faz parte da atividade de investigação. Mas, ainda assim, em minhas experiências como professora, não percebia um envolvimento dos alunos para argumentar.

Então, será que a argumentação está mesmo presente na sala de aula? Os estudantes entendem o que significa esse termo e como eles devem argumentar nas aulas de matemática?

Para refletir sobre essas perguntas, é preciso estar claro o que é argumentar e o que é argumentar em matemática. Assim, na primeira seção, dedico-me à compreensão do que é argumentação e para isso considero relevante apresentar um breve histórico dela. Como ficará claro, a argumentação nem sempre esteve presente em nossa sociedade, surgindo apenas com a necessidade de resolver conflitos de opiniões e, após séculos, se constituiu e se consolidou como campo teórico.

5.1.1 Um breve histórico da argumentação na Grécia Antiga

Nesta subseção, apresento um breve panorama do desenvolvimento da argumentação na Grécia Antiga, com base nas ideias de Eemeren, Grootendorst e Kruiger (1987), discutidas no *Handbook of Argumentation Theory*.

Na antiguidade grega, não se discutia sobre o mundo e sobre sua formação. Era uma sociedade rígida e dogmática, que acreditava que a natureza e a ordem social e política eram regidos pela vontade dos deuses. Qualquer tentativa de questionamento era considerada uma ofensa contra os deuses e a pessoa deveria prestar contas sobre seu ato. Assim, não havia espaço para discussões e, dessa forma, não havia argumentação.

Essa situação começou a mudar a partir do século V a.C., quando surgiram tentativas de explicações, de forma racional, sobre a criação do mundo e fenômenos da natureza. Como essas tentativas eram, muitas vezes, conflitantes, as pessoas começaram a questionar a veracidade das opiniões e o que poderia ser considerada uma boa opinião.

As defesas de opiniões eram feitas por meio de argumentos. Os sofistas gregos, professores itinerantes que ensinavam argumentação e habilidades políticas e sociais, foram o primeiro grupo a questionar o que seria considerada boa argumentação e como decidir qual é a melhor. Para eles, a melhor argumentação era aquela que convencia o outro, uma vez que esse era o objetivo de quem defendia uma opinião. Por isso, um bom argumentador era aquele que convencia, mas o teor de seus argumentos não era necessariamente verdadeiro: bastava que a pessoa à qual o argumento se dirigia aceitasse suas opiniões.

Os sofistas eram considerados excelentes oradores, capazes de argumentar sobre qualquer assunto sorteado em um concurso de debate. Dessa forma, o ensino dos sofistas despertou grande interesse na sociedade grega. O que eles consideravam uma boa oratória, ou seja, uma oratória convincente, era visto como um meio de obter sucesso na vida pública.

A argumentação, e, sobretudo o que seria considerada uma boa argumentação, se tornou um assunto de grande interesse devido a dois motivos principais: comparação de argumentos em pontos de vistas opostos e a prática da política e do direito. Nesta, acima do interesse por uma boa argumentação, estava o interesse por uma argumentação eficaz. Em Atenas, no século V, por exemplo, os envolvidos em disputas legais deveriam defender o seu caso perante um juiz e, assim, era vantajoso saber colocar bons argumentos.

O campo da argumentação ganhou força a partir das teorias de Aristóteles publicadas em seus livros. Para ele, é possível obter novos conhecimentos por meio da argumentação. E, para tanto, os argumentos podem ser classificados em dois tipos: silogismo dedutivo e silogismo indutivo.

No silogismo dedutivo, a conclusão é consequência do que foi afirmado ou assumido em um conjunto de declarações, que são chamadas de premissas. Assim, se as premissas são verdadeiras, a conclusão também será. Um exemplo disso seria a dedução: todos os estados têm uma capital. Minas Gerais é um estado. Logo, Minas Gerais tem uma capital.

No silogismo indutivo, casos específicos são abordados nas premissas e, a partir disso, são feitas conclusões gerais. Um exemplo disso seria: "O timoneiro treinado é o melhor; o cocheiro treinado é o melhor; por isso um homem treinado geralmente é o melhor em seu campo[11]." (EEMEREN; GROOTENDORST; KRUIGER, 1987, p. 58).

[11] Tradução de: the trained helsman is the Best; the treined charioteer is the best; therefore a trained man is generally the best in his field. (EEMEREN; GROOTENDORST; KRUIGER, 1987, p. 58)

Outra distinção entre argumentos, proposta por Aristóteles, de acordo com Eemeren, Grootendorst e Kruiger (1987), se refere à finalidade do argumento. Argumentos destinados à obtenção de conhecimento certo e seguro são chamados de argumentos apodíticos ou demonstrativos. Podemos encontrar argumentos desse tipo principalmente na matemática. Nesses argumentos, as premissas são indubitavelmente verdadeiras e, por consequência, a conclusão também o é.

Já os argumentos dialéticos são aqueles que têm por objetivo levar a opiniões ou pontos de vistas geralmente aceitos. Esses argumentos eram aprovados por uma maioria de sábios ou por sábios mais famosos da época, mas nem todos, necessariamente, os consideravam aceitáveis. Nesse caso, as premissas são geralmente aceitas, então a conclusão também é geralmente aceita.

E os argumentos retóricos são aqueles que visam o convencimento de uma audiência. Nesse caso, as premissas são escolhidas com o intuito de convencer o público. Aqui, não se questiona a validade das premissas, mas o seu poder de persuasão. Um argumento considerado inválido apoditicamente pode funcionar bem retoricamente.

Os três tipos de argumentos propostos por Aristóteles e suas características podem ser visualizados na tabela seguinte.

Tabela 4 - Os três tipos de argumentos de Aristóteles[12]

Argumentos	Demonstrativo	Dialético	Retórico
Objetivo	Certeza	Aceitabilidade	Persuasão
Status das premissas	Evidentemente verdadeiro	Aceitável	Persuasivo para uma audiência
Dedução	Válido	Válido	Persuasivo para uma audiência
Teoria	Lógica	Dialética	Retórica

Fonte: EEMEREN; GROOTENDORST; KRUIGER, 1987, p. 59

A seguir, apresento uma breve discussão de suas três teorias: (a) lógica clássica, (b) dialética e (c) retórica.

---

[12] Tradução de:

Arguments	Demonstrative	Dialectical	Rhetorical
Objective	Certainty	Acceptability	Cogency
Status of premisses	Evidently true	Acceptable	Cogent for audience
Deduction	Valid	Valid	Cogent for audience
Theory	Logic	Dialectic	Rhetoric

(EEMEREN; GROOTENDORST; KRUIGER, 1987, p. 59)

a) A lógica clássica

Aristóteles, em sua teoria lógica, se preocupava principalmente com os silogismos dedutivos. Segundo ele, um silogismo é composto de três sentenças, das quais duas são as premissas e uma é a conclusão. Um silogismo do tipo tratado por Aristóteles é:

> (1) Todos os seres humanos são mortais
> (2) Todos os australianos são seres humanos
> (3) Todos os australianos são mortais[13] (EEMEREN; GROOTENDORST; KRUIGER, 1987, p. 60)

Nesse exemplo, a afirmativa (1) é chamada de *premissa maior*. Nela, a palavra "humanos" tem a função de sujeito na frase. Já a afirmativa (2) é chamada de *premissa menor* e a palavra "humanos" exerce a função de predicado. A afirmativa (3) é chamada de *conclusão*. Essa divisão ocorre porque o predicado de uma conclusão é chamado de termo maior e a afirmativa onde ele aparece é chamada de premissa maior. O sujeito da conclusão é chamado de termo menor e a afirmativa que o contém é chamada de premissa menor. Já o termo que aparece nas duas premissas e não aparece na conclusão é chamado de termo do meio.

Aristóteles tratava apenas de argumentos que contêm afirmações categóricas, e, dessa forma, muitos argumentos não se enquadram nesse estudo, pois muitos deles contêm declarações singulares, ou seja, declarações que se referem a um indivíduo e não a um grupo, como no exemplo:

> "Todos os humanos são mortais
> Sócrates é um humano
> Sócrates é mortal.[14]" (EEMEREN; GROOTENDORST; KRUIGER, 1987, p. 63)

b) A dialética

---

[13] Tradução de: "(1) All humans are mortal
(2) All Australians are humans
(3) All Australians are mortal" (EEMEREN; GROOTENDORST; KRUIGER, 1987, p. 60).

[14] Tradução de: "All humans are mortal
Socrates is a human
Socrates is mortal" (EEMEREN; GROOTENDORST; KRUIGER, 1987, p. 63).

Originalmente, a dialética é o termo usado para representar uma técnica de argumentação em discursos ou debates, na qual o orador assume uma tese e a partir dela obtém uma conclusão incompatível. Assim, a tese é refutada.

Um dos exemplos mais antigos dessa técnica, de acordo com Eemeren, Grootendorst e Kruiger (1987), é a prova de que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Nessa prova, assume-se que $\sqrt{2}$ é um número racional e, a partir desse ponto de partida, uma conclusão incompatível é deduzida. Dessa forma, a tese é refutada e, finalmente, é concluído que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

A seguir, apresento essa prova. Essa técnica argumentativa é chamada de redução ao impossível ou prova indireta.

Figura 2 - Redução ao impossível ou prova indireta

Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional. Então, ele pode ser representado na forma $\frac{p}{q}$, na qual o máximo divisor comum entre *p* e *q* seja igual a 1. Assim, temos:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2q^2$$

Logo, p^2 é par e, portanto, *p* é par. Podemos chamar *p* = 2k, k ∈ Z e substituir na relação anterior:

$$(2k)^2 = 2q^2$$

$$4k^2 = 2q^2$$

$$2k^2 = q^2$$

Logo, q^2 é par e, portanto, q é par. Mas, isso é um absurdo, pois, por hipótese, o máximo divisor comum entre *p* e *q* é igual a 1. Portanto, concluímos que $\sqrt{2}$ não é racional.

Fonte: Elaborada pela autora

Para Aristóteles, o termo dialética tinha um significado mais amplo. Ela era considerada como a arte de argumentar a favor e contra, por meio da utilização de premissas que não são evidentemente verdadeiras, podendo ser usadas como concessões. Mas as premissas devem ser aceitas por, pelo menos, um dos interlocutores. Aristóteles sistematizou um conjunto de instruções para a realização de um debate, informando possíveis movimentos que o adversário poderia executar, truques psicológicos que podem ser usados para enganar o oponente, dentre outros.

Esse campo da teoria da argumentação, portanto, se caracteriza pela presença de premissas geralmente aceitas, que podem ser falsas, mas é importante que pelo menos um dos interlocutores aceite essas premissas.

c) A retórica

A retórica é considerada a arte da persuasão. Por meio dela, busca-se persuadir alguém ou uma plateia sobre qualquer assunto. Os assuntos podem ser divididos em três gêneros: *iudiciale*, que se refere a assuntos jurídicos, *deliberativum*, que se refere às situações políticas, e *demonstrativum*, que se refere a ocasiões festivas ou cerimoniais.

Em todos os gêneros, o público é o fator mais relevante, pois, na prática da retórica, os meios de persuasão são escolhidos com o objetivo de atender o público. Há dois tipos de meios de persuasão: o *intrínseco*, no qual o orador usa suas próprias habilidades para convencer o público, e o *extrínseco*, no qual o orador pode se apoiar em materiais existentes como testemunhas e documentos.

Acerca dos meios intrínsecos de persuasão, Aristóteles os divide em três tipos: *ethos*, *pathos* e *logos*. Um orador que utiliza *ethos* em seu discurso convence um público sobre o seu ponto de vista transmitindo confiança e bom caráter. Caso o orador se apoie em sentimentos para convencer um público, ele então utiliza *pathos*. Um orador usa *logos* quando ele usa argumentos para convencer o público.

Portanto, esse campo teórico se baseia em técnicas de persuasão para convencer o público. Elas podem se apoiar nas habilidades do orador ou nos argumentos que ele utiliza para sustentar seu ponto de vista.

Eemeren, Grootendorst e Kruiger (1987) destacam que o estudo da argumentação não surgiu a partir da consolidação de uma única teoria. Atualmente, podemos encontrar uma variedade de teorias no campo da argumentação que se diferenciam quanto suas concepções. Porém, a fonte das teorias de argumentação encontra-se na Lógica, Dialética e Retórica. Essas teorias foram sistematizadas por Aristóteles e divulgadas por meio de suas publicações. Elas foram aprimoradas e a partir delas surgiram outras teorias como a pragmática lógica de Walton (2006) e a nova retórica de Billig (2008). Toulmin (2006) também partiu da teoria de Aristóteles e criou seu modelo, questionando a lógica. Esse modelo será apresentado com mais detalhes na seção *5.1.3*.

Antes de apresentar e caracterizar esse modelo, farei, na próxima seção, uma discussão sobre a definição do termo argumentação baseada nas ideias de Eemeren, Grootendorst e Kruiger (1987).

5.1.2 Argumentação e suas sete características principais

De acordo com Eemeren, Grootendorst e Kruiger (1987), o significado de argumentação é composto por sete características: "é uma atividade social, intelectual e verbal que serve para justificar ou refutar uma opinião, composta por um conjunto de declarações e direcionada para a obtenção da aprovação de uma audiência.[15]" (p.7). Cada uma dessas características é necessária para essa composição e a reunião delas se torna uma condição suficiente para se falar em argumentação, mesmo havendo outras características.

A argumentação é considerada uma *atividade social* para esses autores. Ela pode estar presente em uma discussão entre duas ou mais pessoas, na qual cada uma delas apresenta argumentos. Também é considerada argumentação quando uma pessoa delibera consigo mesma, pensando em argumentos prós e contras. Mas a argumentação é mais bem percebida quando há interação entre duas ou mais pessoas que podem reagir a cada argumento apresentado por um interlocutor que participa da discussão.

Ao argumentar, uma pessoa funda seus argumentos em seu pensamento, agindo de forma consciente e levando em consideração a razão. Não há espaço para impulsos ou reflexos inconscientes. Assim, para Eemeren, Grootendorst e Kruiger (1987), a argumentação é uma *atividade intelectual*.

Segundo esses autores, a argumentação não ocorre sem o uso da linguagem, sendo assim, ela é considerada uma *atividade verbal*. Uma pessoa defende uma opinião, nega alguma afirmação ou faz uma declaração por meio de palavras que podem ser expressas na

---

[15] Tradução de: "is a social, intellectual, verbal activity serving to justify or refute an opinion, consisting of a constellation of statements and directed towards obtaining the approbation of an audience." (EEMEREN; GROOTENDORST; KRUIGER, 1987, p.7).

forma oral ou escrita, em linguagem coloquial ou formal, que fazem parte da lógica e da matemática. Meios não-verbais também podem fazer parte de uma argumentação, por exemplo, os gestos. Todavia, eles não podem substituir completamente o uso da linguagem verbal.

Uma argumentação pode ser iniciada por discordância de opiniões. Uma pessoa, ao expressar sua opinião sobre determinado assunto, pode provocar a interação com uma segunda pessoa, que pode discordar da opinião dada, tendo dúvidas a respeito da coerência dela, ou tendo uma opinião contrária.

Assim, de acordo com Eemeren, Grootendorst e Kruiger (1987), o tema da argumentação é a disputa de opiniões, visto que ela é uma *questão de opiniões*. Contudo, o ato de expressar uma opinião não tem um significado limitante em relação à argumentação. Uma pessoa que defende uma opinião ou expressa uma opinião contrária, expõe a sua concepção sobre um determinado assunto, ou seja, ela realmente acredita no que fala e se compromete com sua ideia.

Por isso, o principal intuito da argumentação é resolver conflitos de opiniões. Segundo esses autores, a argumentação é voltada para a *justificação ou refutação de opiniões*, ou seja, a defesa de uma opinião tem o sentido de justificar a ideia proposta e o ataque a uma opinião tem o sentido de refutá-la. Essas duas atividades não acontecem de forma independente, elas podem estar ambas presentes em uma mesma discussão entre duas ou mais pessoas que discordam sobre um determinado ponto de vista.

Para Eemeren, Grootendorst e Kruiger (1987), a argumentação é composta por um *conjunto de declarações*, por meio das quais uma pessoa tenta justificar ou refutar uma opinião. Os argumentos utilizados a favor de uma opinião são chamados *pró-argumentos* e argumentos utilizados contra uma opinião são chamados de *contra-argumentos*.

Um argumento pode ser composto unicamente de *pró-argumentos* a favor de uma única opinião ou de *contra-argumentos* que atacam uma mesma opinião. Quando isso acontece, Eemeren, Grootendorst e Kruiger (1987) os classificam como *argumentação simples*. Se argumentos simples formam uma cadeia de argumentos relacionados para reforçar uma mesma opinião, eles são classificados por esses autores como *argumentação composta*.

Quem argumenta a favor ou contra uma opinião tem como objetivo convencer a quem está argumentando e a audiência que está envolvida nesta discussão. O argumentador espera que a audiência aprove seus argumentos, fazendo uma avaliação racional deles, sem apelar para tradições, preconceitos ou emoções. Esses elementos podem fazer parte de uma avaliação dos argumentos, mas não podem ser os únicos critérios da avaliação. Portanto, de acordo com Eemeren, Grootendorst e Kruiger (1987), a argumentação tem por objetivo *obter a aprovação de uma audiência*.

De acordo com Velasco (2010), a argumentação possui as seguintes propriedades:

1) Os argumentos são compostos por um conjunto de sentenças que declaram alguma informação sobre o mundo;
2) As sentenças que constituem o argumento devem ser encadeadas, ou seja, devem estar relacionadas entre si;
3) As sentenças que são premissas em um argumento podem constituir uma conclusão em outro argumento e vice versa, ou seja, não são considerados termos absolutos;
4) A conclusão pode ser encontrada em qualquer uma das sentenças que constituem o argumento, não é necessário que seja a última sentença;
5) Um argumento não pode ser um conjunto vazio de sentenças declarativas;
6) Um argumento é composto por um conjunto finito de sentenças declarativas.

A negação e a proibição podem fazer parte da composição de um argumento, mas Charaudeau (2008) destaca que esses termos não devem ser chamados de argumentação, pois eles podem existir de forma autônoma. Em uma *negação*, o interlocutor apenas rejeita uma afirmação, enquanto que na *refutação*, que é um movimento argumentativo, uma afirmação é demonstrada como falsa. Já em uma *proibição*, o interlocutor impõe ao outro um determinado comportamento.

Para esse autor, a argumentação pode ser apresentada sob três formas: a *dialógica*, na qual ocorre uma interlocução, a *escrita* ou a *oratória*, na qual a argumentação ocorre de maneira monolocutiva, ou seja, uma pessoa controla o discurso, como em uma palestra.

Para identificar e analisar um argumento proveniente de qualquer uma dessas três formas, é possível utilizar o modelo de Toulmin (2006). Assim, faz-se necessária sua apresentação e caracterização a partir de agora.

5.1.3 O modelo de Toulmin

Ao fazer uma afirmação, uma pessoa tem a intenção de que a outra pessoa, ou o grupo a qual ela dirigiu a afirmação, aceite o que foi dito por ela. Essa aceitação, de acordo com Toulmin (2006), pode depender da reputação do orador, mas é necessário verificar se é uma afirmação bem fundada, ou seja, “sempre se pode, em cada caso, contestar a asserção e pedir que se preste atenção aos fundamentos em que a asserção se baseia (suporte, dados, fatos, evidências, indícios, considerações, traços) dos quais dependem os méritos da asserção." (p.16)

Para esse autor, são os argumentos que apoiam uma afirmação e ele propõe um modelo de análise para classificar, avaliar e criticar os argumentos. Segundo ele, produzimos argumentos para diversas finalidades, mas a principal delas é validar uma afirmação, ou seja, a função primária do argumento é a justificatória.

Dessa maneira, vejo uma proximidade entre essa ideia de Toulmin e um dos objetivos que considero importante (e de certa forma ausente) para uma atividade investigativa: justificar conjecturas. Portanto, considero adequado usar esse modelo para analisar os episódios que ocorreram no trabalho de campo desta pesquisa.

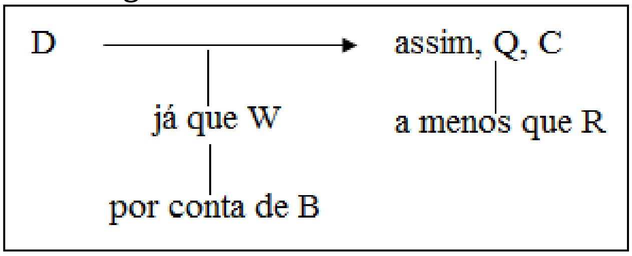
Os argumentos apresentados com a finalidade de justificar alegações, de acordo com Toulmin (2006), podem ser de vários tipos, assim como as próprias alegações podem pertencer a diversos campos do conhecimento. Esse autor define o termo *campo* de argumentos para discutir sobre esse assunto. Argumentos do mesmo tipo lógico são considerados como argumentos que pertencem a um mesmo campo e argumentos de tipos lógicos diferentes pertencem a campos diferentes.

Para esse autor, mesmo que exista uma infinidade de campos de argumento, há semelhanças no modelo e no procedimento de argumentos justificatórios. Então, ele apresenta um modelo de análise de argumentos que atende as suas características *campo-dependentes*, ou seja, que variam de acordo com o campo no qual pertence o argumento, e *campo-invariáveis*, ou seja, que não variam de acordo com o campo a qual pertencem os argumentos.

Na teoria de Aristóteles, a composição de um argumento é formada por três proposições: premissa menor, premissa maior e conclusão. Toulmin (2006) questiona a simplicidade desse padrão e se por meio dele é possível classificar todos os elementos de um argumento.

Além disso, ele discute sobre a aplicabilidade da teoria lógica de Aristóteles. Para ele, há um distanciamento entre uma conclusão obtida por meio de uma demonstração lógica e uma conclusão obtida em uma situação corriqueira. Assim, a partir do questionamento sobre a aplicação da lógica na avaliação de argumentos cotidianos, Toulmin (2006) apresenta a estrutura de um argumento que pode ser representada por meio do esquema a seguir.

Figura 3 - O modelo de Toulmin

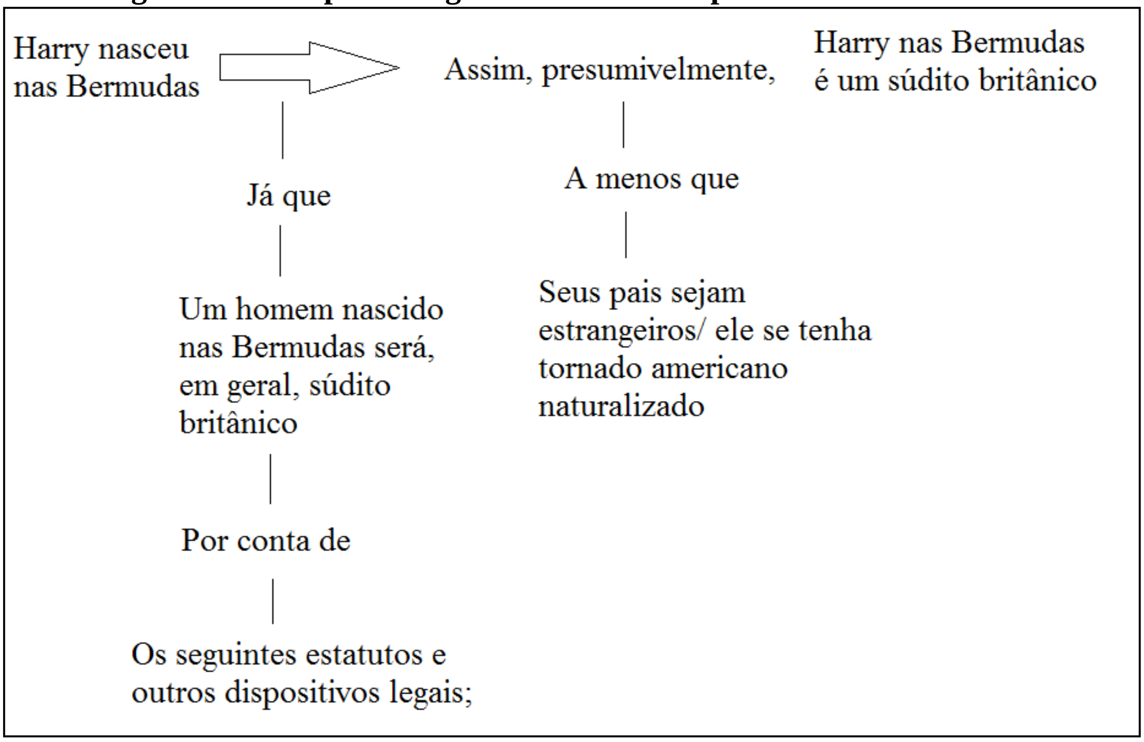


Fonte: TOULMIN, 2006, p. 150

Nesse esquema, D representa os dados do argumento, que são fatos apresentados para apoiar uma conclusão, C; W representa as garantias, que são afirmações gerais que funcionam como pontes que permitem a passagem dos dados à conclusão; B representa o apoio das garantias, que são afirmações categóricas que funcionam como avais para as garantias, ou seja, reforçam a autoridade das garantias; R representa as condições de refutação, que indicam as circunstâncias nas quais se deve deixar de lado a autoridade das garantias; Q representa o qualificador modal, que indica a força conferida pela garantia no passo dos dados à conclusão; C representa a conclusão ou alegação.

A seguir, apresento um argumento analisado por esse modelo:

Figura 4 - Exemplo de argumento analisado pelo modelo de Toulmin



Fonte: TOULMIN, 2006, p. 151

De acordo com Toulmin (2006), uma asserção é fundamentada por fatos que podem ser apresentados quando ela é desafiada. Esses fatos são os dados do argumento. Contudo, ainda assim a asserção pode continuar sendo desafiada e, por isso, torna-se necessária a apresentação de novas informações para comprovar a coerência da conclusão. Elas não são consideradas como dados adicionais, mas proposições gerais ou regras que tornam legítima a passagem dos dados à conclusão. Essas proposições são as garantias.

Esse autor destaca a diferença entre dados e garantias. Enquanto os dados são recorridos de modo explícito em um argumento, as garantias são recorridas de modo implícito. Isso acontece devido à diferença entre a função assumida pelos dados e pelas garantias em argumentos. As garantias são afirmações gerais que legitimam a passagem dos dados à conclusão e os dados são fatos apresentados para apoiar a conclusão.

As garantias podem conceder diferentes graus de força para a conclusão, de acordo com Toulmin (2006). Assim, podem ser inseridos advérbios nos argumentos, que são chamados de qualificadores modais. Por exemplo, quando a passagem dos dados à conclusão é considerada provisória, ou só autorizada sob certas condições, podem ser usados os advérbios: provavelmente ou presumivelmente. Também podem ser apresentadas as condições de refutação que apontam as situações em que a autoridade da garantia deve ser desconsiderada.

Caso a alegação continue sendo desafiada, mesmo sendo apresentados os dados, as garantias, os qualificadores e as condições de refutação, há um outro aval para as garantias, segundo Toulmin (2006): o apoio. Esse apoio dependerá do campo a qual pertence o argumento.

O autor destaca a diferença entre apoio, garantia e dados. As garantias são consideradas como afirmações hipotéticas que autorizam a passagem dos dados à conclusão. Já o apoio é constituído de afirmações categóricas para dar suporte às garantias, assim como os dados dão suporte à conclusão. Esses suportes se diferenciam na medida em que os dados devem ser expostos em um argumento, mas o apoio pode ficar subtendido caso a afirmação não seja desafiada.

Toulmin (2006) também deixa claro as diferenças entre apoio, qualificador e condições de refutação. Enquanto o primeiro fornece motivos para se aceitar, de uma forma geral, uma garantia, o segundo especifica o grau de força da conclusão e o terceiro expõe as condições em que devem ser refutadas as garantias.

O modelo de Toulmin apresentado nesta seção pode ser utilizado para analisar argumentos na forma oral ou escrita. Porém, ele pode ser aplicado em qualquer argumento matemático? Uma justificativa matemática pode ser apresentada sob a forma de operações, deduções, generalizações, demonstrações... Assim, a partir de agora, é necessário definir e apresentar uma discussão teórica sobre argumentação matemática.

5.2 Argumentação matemática

O interesse pela argumentação na sala de aula de matemática é recente e vem ganhando mais espaço e atenção a partir dos anos 80, com o objetivo de discutir o problema da especificidade da prova matemática (BOAVIDA, 2005). De acordo com Resende (2008), provar é uma atividade importante da matemática e não pode ser desconsiderada nos diferentes níveis de ensino, seja na educação básica ou superior.

Para Harel e Sowder (1998 apud Resende, 2008), a prova se refere a um processo de remover dúvidas e convencer outros a respeito da veracidade de uma conjectura. Nela, estão incluídas dois sub-processos: o da verificação e o da persuasão. No primeiro, um indivíduo o utiliza para remover suas dúvidas, já no segundo, ele o utiliza para remover dúvidas de outros indivíduos.

De acordo com Boero (1999), a prova é parte do aprendizado cultural e cognitivo, no qual é necessário entrar na cultura de teoremas e teorias matemáticas. Nesse processo, competências específicas à elaboração e prova de conjecturas são desenvolvidas levando em consideração conhecimentos teóricos. Segundo esse autor, o processo de produção e prova de conjecturas pode ser descrito nas fases a seguir, que não ocorrem, necessariamente, separadamente ou de forma linear:

1) Elaboração de uma conjectura, na qual ocorrem processos como: identificação e exploração do problema, busca por regularidades, elaboração de argumentos para comprovar a sua plausibilidade;
2) Formulação da afirmação de acordo com convenções compartilhadas;
3) Exploração da validade da conjectura;
4) Seleção dos argumentos em forma de cadeia dedutiva;
5) Organização dos argumentos selecionados em uma prova, de acordo com padrões matemáticos;
6) Aproximação de uma prova formal. Nesta fase pode ocorrer a falta de algum teorema matemático e, sendo assim, a prova produzida é considerada próxima a uma prova formal.

Isso acontece, pois é praticamente impossível realizar uma prova completamente formal, mesmo que, para a maioria dos matemáticos, ela possa ser alcançada.

A prova pode assumir diversas funções como: validar e explicar, propostas por Nasser e Tinoco (2003), sistematizar, descobrir e comunicar, citadas por Bell (1976 apud Nasser e Tinoco, 2003). A função de validar corresponde a comprovar a veracidade de um resultado. Explicar ou elucidar é o mesmo que mostrar os motivos pelo qual um resultado é considerado verdadeiro. Sistematizar corresponde à preparação para o domínio do processo dedutivo. A descoberta significa o encontro de novos resultados. E a comunicação corresponde à transmissão do conhecimento matemático.

Para Nasser e Tinoco (2003), existem diferentes tipos de prova como a Formal, a Ingênua, a Justificativa Pragmática e a prova denominada de Recorrência a uma autoridade. A *prova formal* é aquela que parte de hipóteses e, por meio do encadeamento do raciocínio ou de teoremas, conclui-se que o resultado é verdadeiro. A *prova ingênua* é considerada uma argumentação aceitável, podendo ter níveis variados de rigor, dependendo da escolaridade e da idade do aluno que a realiza. A *justificativa pragmática* é uma prova baseada em casos particulares para atestar a veracidade de uma afirmação. A *recorrência a uma autoridade* é uma prova em que uma afirmativa é considerada verdadeira baseada na fala do professor ou no livro-texto. No *exemplo crucial*, o raciocínio é desenvolvido por meio de um exemplo ao invés de um caso geral. E na *justificativa gráfica*, o resultado é apresentado como verdadeiro por meio de uma figura.

Provar e demonstrar são constantemente vistos como sinônimos. Garnica (2001), por exemplo, considera que prova e demonstração tem o mesmo significado. São consideradas como formas rigorosas de argumentação para validar raciocínios, sendo voltadas para a prática profissional e científica.

Por sua vez, Resende (2008) destaca que a prova possui sentido mais amplo que a demonstração, uma vez que podemos encontrar diferentes tipos e níveis de provas e, em contrapartida, a demonstração tem um formato mais rígido. Torna-se necessário, então, fazer uma distinção entre os termos *explicação, prova* e *demonstração*.

De acordo com Balacheff (1982 apud Almouloud, 2007)[16], a explicação tem a função de comunicar sobre a veracidade de uma afirmação a uma pessoa ou a um grupo. Se essa explicação for aceita, ela passa a ser considerada como uma prova para este grupo, mesmo se ela for uma proposição falsa. Já uma demonstração é um caso particular de prova. Ela possui

---

[16] BALACHEFF, Nicolas. *Preuve et démonstration en mathématiques au collège*. Recherches em Didactique des Matémathiques, Grenoble, v. 3, n. 3, 1982. p. 261-304

regras próprias. Através de deduções e regras lógicas mostra-se que a afirmação é verdadeira. Essa é a única prova aceita como legítima para os matemáticos.

Assim, para Balacheff (1982 apud Resende, 2008), provar significa apresentar razões ou explicações com o objetivo de explicitar a veracidade de uma afirmação, sendo aceita por um determinado grupo. Já a demonstração é constituída de uma sequência de enunciados que são obtidos de outros por meio de um processo dedutivo, obedecendo a regras determinadas e bem definidas.

Nesta pesquisa, vou considerar a distinção entre prova e demonstração proposta por Balacheff (1982 apud Almouloud, 2007), uma vez que essas formas de argumentar se diferenciam pelo nível de rigor. E, como foi apresentado nesta seção, há diversos tipos de prova, algumas menos e outras mais rigorosas.

Além disso, esse autor define a prova como uma explicação que é aceita por um determinado grupo e, sendo assim, o grupo é convencido. Essa definição está diretamente relacionada com o objetivo de quem argumenta, a favor ou contra, que é convencer a quem o argumento se destina. Portanto, caso o aluno consiga convencer o colega ou a turma através de sua argumentação, vou considerar como prova.

De acordo com Garnica (2001), é difícil encontrar uma linguagem formal e sofisticada do ponto de vista matemático no cotidiano da sala de aula da escola básica. Entretanto, é possível desenvolver esse tipo de linguagem, pois há uma formalização natural que é exigida pela matemática como códigos, símbolos específicos e regras de formação. Dessa forma, é preciso refletir e estudar sobre a forma da sua utilização na sala de aula.

Para esse autor, a linguagem se manifesta por diferentes meios, por exemplo, pela escrita, pela oralidade, pelos gestos e pelo pictórico. Por esses meios, na matemática, ela se apresenta na forma de dois discursos: o “científico” e o “pedagógico”.

O discurso “científico” aparece, principalmente, em pesquisas feitas por profissionais matemáticos com o intuito de produzir conhecimento matemático (novo), discutir e divulgá-lo por meio de textos científicos orientados pela linguagem formal definida pela Lógica. Já o discurso “pedagógico” ocorre em diferentes situações de ensino e aprendizagem e se referem à apropriação de conteúdos matemáticos (já prontos) na sala de aula (GARNICA, 2001).

O discurso científico pode contribuir, juntamente com o discurso pedagógico, para a comunicação na sala de aula. Os estudantes podem buscar, no discurso científico, recursos para fundamentar suas opiniões e uma orientação de como proceder em momentos de justificar uma afirmação. No entanto, de acordo com Garnica (2001), esse tipo de discurso exige o domínio de sua linguagem, que é própria. Logo, eles podem buscar, no discurso pedagógico, uma pluralidade que não existe no discurso científico, tanto no que diz respeito à linguagem quanto a conteúdos.

Para Alrø e Skovsmose (2004), a qualidade da comunicação na sala de aula influencia a qualidade da aprendizagem. O diálogo, por exemplo, é um meio de discurso em que há exposição de argumentos e questionamentos, possibilitando a obtenção de conhecimentos.

Não obstante, segundo os autores, a comunicação entre professor e alunos, em aulas tradicionais de matemática, é desigual e repetitiva, marcada por um jogo de perguntas no qual o professor sabe previamente as respostas e os estudantes respondem mecanicamente. Assim, o repertório de respostas se torna limitado.

Nesse modelo de comunicação, os alunos não se mostram responsáveis pelo processo de aprendizagem, pois eles se concentram mais em adivinhar o que o professor tem em mente ao formular questões a eles, de forma repetitiva e fragmentada, do que em compreender o conteúdo matemático estudado. Esse tipo de comunicação não é considerado um diálogo, de acordo com a definição proposta pelos autores.

Alrø e Skovsmose (2004) propõem um modelo para analisar interações entre professor e aluno em cenários para investigação, denominado "Cooperação Investigativa" (Modelo-CI), com uma lógica diferente do jogo de perguntas. A forma de interação caracterizada pelo Modelo-CI pode ser encontrada em uma aula tradicional, mas, segundo os autores, isso é raro.

O Modelo-CI apresenta os seguintes elementos, que não se encontram necessariamente fragmentados ou nessa ordem: estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar (ALRØ; SKOVSMOSE, 2004).

Estabelecer contato refere-se a uma participação colaborativa na qual os integrantes do grupo devem prestar atenção uns aos outros e às contribuições, com respeito, responsabilidade e confiança. *Perceber* refere-se ao processo de descoberta ao examinar possibilidades e experimentar coisas. As ideias que foram percebidas, ao serem reconhecidas pelos integrantes da investigação, marcam o elemento *reconhecer* do modelo de comunicação. *Posicionar-se* significa dizer o que se pensa, apresentar argumentos, compartilhando com o grupo o que se sabe. Já *pensar alto* significa expressar sentimentos, ideias e pensamentos, tornando-os público. *Reformular* significa repetir o que foi dito em um tom diferente, focando termos e ideias-chave, tornando os argumentos mais precisos. *Desafiar* é característica de um momento em que as ideias são questionadas e levadas a uma outra direção. Por fim, *avaliar* significa refletir sobre o trabalho realizado e as perspectivas envolvidas. Isso pode ser feito pelo professor ou aluno.

Ainda que o Modelo-CI não seja considerado um modelo de análise de argumentos matemáticos, ele é um modelo para analisar a comunicação em cenários para investigação, enquanto que o jogo de perguntas é um modelo para analisar a comunicação no paradigma do exercício. Como a minha intenção é proporcionar um ambiente que possibilite o trabalho com investigações, considero que o modelo-CI é adequado para analisar os episódios ocorridos na aplicação das atividades investigativas desenvolvidas no trabalho de campo desta pesquisa.

Como foi discutido na seção anterior, é através da argumentação que um indivíduo se posiciona e convence os outros por meio da persuasão. Expressar-se adequadamente e usar bons argumentos é objetivo importante na formação do cidadão (MACHADO; CUNHA, 2005).

Boavida (2005) considera argumentação matemática como conversações sobre matemática que

> assumem a forma de raciocínios de carácter explicativo ou justificativo destinados seja a diminuir riscos de erro ou incerteza na escolha de um caminho, seja a convencer um auditório a aceitar ou rejeitar certos enunciados, ideias ou posições pela indicação de razões. (BOAVIDA, 2005, p. 6)

Mas ela faz três ressalvas em seu conceito: a natureza discursiva da argumentação não exclui recursos não-discursivos como dados numéricos e figuras; o auditório pode ser entendido como a turma de estudantes que se encontra na sala de aula, o próprio indivíduo que delibera consigo ou alguém com quem se mantém o diálogo, os indivíduos argumentam ideias que são consideradas verdadeiras para eles, revelando uma natureza dialética, mas que não conduz a conclusões necessariamente verdadeiras.

Segundo essa autora, a formulação e a verificação de conjecturas estão incluídas nas atividades de argumentação matemática. A demonstração, considerada como prova, seria um tipo particular de argumentação, de acordo com Douek (1998 apud BOAVIDA, 2005) e Pedemonte (2002 apud BOAVIDA, 2005).

Para Garnica (2001), as argumentações podem ser categorizadas como formais, semiformais e não-formais.

Nas argumentações não-formais e semiformais há a presença de uma linguagem mais natural e elementos do cotidiano, por exemplo, a realização de comentários, elaboração de justificativas, etc. No entanto, a justificativa semiformal não possui apenas elementos do cotidiano. A indução é utilizada como recurso nesse tipo de justificativa, partindo de casos particulares para um contexto geral.

As justificativas formais são marcadas pela presença da dedução, ou seja, a partir de enunciados globais explicam-se casos particulares. Garnica (2001) também cita a *abdução* como uma forma de argumentação. Essa forma foi denominada por Peirce[17] e envolve uma adivinhação ou uma descoberta por um modo incerto.

No cotidiano da sala de aula, é mais usual e natural a ocorrência da argumentação semiformal e da não-formal. É difícil encontrar alunos que utilizam a indução para generalizar um enunciado ou uma conjectura elaborada por eles. Além disso, nos momentos em que expressam suas opiniões e se posicionam para defender suas ideias, pode-se perceber a fraca capacidade de suas argumentações, pois

> generalizam situações sem proceder à sua verificação; recorrem à informação do quotidiano para fundamentar as suas respostas, sem que essa informação seja pertinente para o problema em causa; [e] fundamentam as suas respostas em informações claramente excluídas pelas condições enunciadas. (RAMALHO, 2002, apud BOAVIDA, 2005, p. 2)

Para Chevallard, Bosch e Gascón (2001 apud BOAVIDA, 2005), os alunos agem com uma certa "irresponsabilidade matemática", por não avaliarem a coerência de seus raciocínios e não os justificarem de forma crítica.

Essa avaliação e justificação de raciocínios é feita por meio da argumentação, que pode ser realizada por diferentes meios como o silogismo, indução e demonstração. Assim, mesmo que a argumentação matemática não seja considerada exclusivamente uma demonstração, segundo Boavida (2005), isso não deve excluir o envolvimento dos estudantes na produção de provas, incluindo demonstrações, para conjecturas formuladas por eles. Essas provas são importantes para os alunos aprenderem a lidar com a generalização, ou seja, com formas de garantir a validade de uma conjectura para todos os casos e compreender as razões desta validação.

Neste capítulo apresentei os referenciais teóricos sobre argumentação e argumentação matemática, destacando suas definições, as várias formas de se argumentar e os modelos de análise, modelo de Toulmin (2006) e Modelo-CI (ALRØ; SKOVSMOSE, 2004), que serão utilizados na realização da análise dos dados coletados no trabalho de campo desta pesquisa,

[17] O trabalho de Pierce é citado no artigo de Garnica (2001).

que será apresentada no capítulo 7. Mas, antes, faz-se necessário uma apresentação da forma de análise praticada e uma descrição do processo de organização desses dados.

6 METODOLOGIA 2: Organização e análise dos dados

Neste capítulo, apresento uma descrição de como os dados coletados no trabalho de campo desta pesquisa foram organizados para a realização de sua análise. A partir dessa organização, durante o desenvolvimento da análise dos dados associada às teorias que fundamentaram a pesquisa, descritas nos capítulos 3 e 5, as categorias de análise emergiram, o que vai ao encontro da proposta de Lincoln e Guba (1985) sobre análise indutiva dos dados.

Assim, inicialmente, na seção 6.1, apresento uma discussão teórica sobre a forma de análise praticada nesta pesquisa: a análise indutiva. Em seguida, na seção 6.2, descrevo o processo da organização dos dados.

6.1 As categorias emergentes e a análise indutiva

Lincoln e Guba (1985) apresentam uma caracterização da análise indutiva a partir da comparação entre esse tipo de análise e a dedutiva. Segundo os autores, a análise dedutiva é aquela na qual as hipóteses e as questões a serem estudadas são deduzidas, previamente, a partir das teorias que fundamentam a pesquisa. Elas então são confirmadas, ou não, a partir dos dados empíricos coletados. Desse modo, tanto as teorias quanto as categorias são definidas previamente à analise dos dados e, em consequência disso, os dados possuem características diretas das teorias e das categorias ou da relação entre elas.

Já a análise indutiva dos dados é proposta como o inverso da análise dedutiva, de acordo com Lincoln e Guba (1985). As teorias e as categorias não são definidas a priori. Elas emergem durante o desenvolvimento da análise. Não há uma dedução prévia de hipóteses e questões a serem confirmadas pelos dados, pois é esperado que elas apareçam no decorrer da própria análise. Sendo assim, as categorias é que possuem características diretas dos dados. Para esses autores,

> Os dados acumulados no campo, portanto, devem ser analisados *indutivamente* (isto é, a partir do específico, unidades brutas de informação, para as categorias agrupadas de informação) a fim de definir hipóteses de trabalho locais ou questões que podem ser seguidas.[18] (LINCOLN; GUBA, 1985, p. 203, grifos dos autores)

---

[18] Tradução de: "Data acumulated in the field must be analyzed *inductively* (that is, from specific, raw units of information to subsuming categories of information) in order to define local working hypotheses or questions that can be followed up." (LINCOLN; GUBA, 1985, p. 203)

De acordo com Lincoln e Guba (1985), a análise indutiva envolve dois subprocessos importantes que ocorrem nesta ordem: a *definição de unidades* e a *categorização*.

No processo de definição de unidades, os dados que possuem conteúdos relevantes para o objetivo da pesquisa são associados em unidades, permitindo uma descrição mais precisa de suas características. Uma unidade pode ser constituída por sentenças simples ou extensos parágrafos que podem ser interpretados por si só, dispensando o uso de informações adicionais.

Em seguida, ocorre o processo de categorização no qual as unidades "são organizadas em categorias que fornecem informações descritivas ou inferenciais sobre o contexto ou ambiente a partir do qual as unidades foram derivadas[19]." (LINCOLN; GUBA, 1985, p. 203) Assim, as unidades que possuem características semelhantes compõem uma mesma categoria.

As categorias de análise desta pesquisa emergiram durante o processo da análise, a partir da combinação entre teoria e dados. As teorias que fundamentaram a pesquisa, como Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), Alrø e Skovsmose (2004) e Toulmin (2006), influenciaram o meu olhar para os dados. Aqueles que chamaram a minha atenção por terem conteúdos relevantes para o objetivo da pesquisa constituíram as unidades de análise para, em seguida, compor as categorias. Portanto, nesta pesquisa, a forma de análise escolhida foi a indutiva.

Na seção seguinte, apresento uma descrição sobre o processo da organização dos dados que permitiram a escolha das unidades de análise e, em seguida, das categorias.

6.2 O processo da organização dos dados

A coleta de dados desta pesquisa durou cerca de dois meses, sendo interrompida devido à mudança da professora Maria para outra cidade, e, consequentemente, a sua saída da escola. Nesse período, fiz anotações no caderno de campo, realizei filmagens, gravações em áudio e recolhi os relatórios, produzidos pelos estudantes, das quatro atividades aplicadas, descritas no capítulo 4. Ao final da coleta, reuni uma vasta quantidade de dados.

Entretanto, durante a realização das atividades investigativas, eu li grande parte dos relatórios produzidos pelos alunos, a fim de planejar as intervenções a serem realizadas nas atividades seguintes, e fiz anotações sobre os aspectos que chamaram a minha atenção, como a ausência de justificativas e as provas através de exemplos. Naquele momento, não realizei uma análise dos relatórios, as anotações feitas tinham um cunho mais avaliativo da produção

[19] Tradução de: "are organized into categories that provide descriptive or inferential information about the context or setting from which the units were derived." (LINCOLN; GUBA, 1985, p. 203)

escrita dos alunos, mas elas ajudaram na etapa da organização dos dados e na posterior categorização deles.

No momento da organização dos dados para a realização de sua análise, inicialmente, assisti todos os arquivos de vídeo que foram gravados durante o trabalho de campo desta pesquisa. Recorri às gravações em áudio apenas nos momentos em que não consegui compreender as falas presentes no vídeo e durante as suas transcrições.

Devido à grande quantidade de vídeos, ao assistir cada um deles, fui registrando por escrito as interações que chamaram a minha atenção e outros aspectos que poderiam estar relacionados com a argumentação. Esse registro foi feito à mão, em papel A4, sendo que a descrição de cada vídeo foi separada por data, turma e nome do arquivo que o continha.

É importante salientar que, ao lado de cada interação registrada, anotei o tempo do vídeo em que ela ocorreu. Assim, ficou mais fácil localizar um determinado episódio posteriormente. O registro de todo esse material de vídeo foi feito em um total de 57 páginas, todas numeradas. Essa grande quantidade de dados exigiu uma boa organização para que eu não me perdesse durante o processo da análise.

Feito esse registro, escolhi palavras-chave diretamente relacionadas ao objetivo da pesquisa e às teorias da argumentação: hipótese, teste, convencer, discordar, questionar, conflito de opiniões, explicação, justificativa, refutação, argumento, prova, demonstração, generalização, desenho. Voltei no registro realizado e o reli atentamente, grifando todas essas palavras-chave.

Depois disso, organizei uma tabela com cada palavra chave selecionada, seguida dos nomes dos arquivos de áudio e vídeo correspondentes a ela e à página em que ela estava localizada no registro. Essa foi uma primeira associação dos dados, em unidades de análise. A partir dessa organização, procurei identificar situações em que ocorreu argumentação. Para isso, revi as situações que continham uma palavra-chave no registro, recorrendo ao vídeo no tempo selecionado. Os episódios em que identifiquei argumentação foram então transcritos, preservando ao máximo as falas dos estudantes, da professora e da pesquisadora. Correções ortográficas foram realizadas, sem alterar o sentido das falas ou prejudicá-las de alguma forma.

Nesse processo, pude perceber que as intervenções realizadas por mim e pela professora Maria causaram alguns desdobramentos na argumentação dos alunos. Muitos deles passaram a incluir em suas falas ou no registro do relatório, procedimentos que foram explicados e exemplificados por nós. Sendo assim, pude notar que as intervenções realizadas contribuíram para o desencadeamento e o desenvolvimento da argumentação dos estudantes.

Outro aspecto que notei, ao reler o material e rever os vídeos, foi a ocorrência de obstáculos para a argumentação dos alunos. Exemplos disso foram: a falta de tempo para desenvolver uma ideia, falta de domínio da linguagem algébrica e outras prioridades que os estudantes tiveram no momento da proposta da atividade.

Levando em conta esses três aspectos relatados, assumi um fio condutor para o capítulo a seguir, no qual apresento uma análise dos dados. Na primeira seção, mostro que a argumentação pode ocorrer em uma atividade de investigação, apresentando uma descrição desses momentos. Na segunda, relato as intervenções realizadas e os seus desdobramentos para a argumentação dos alunos. E, na última, descrevo as situações em que identifiquei obstáculos para a argumentação. Sendo assim, a construção da análise não seguiu, necessariamente, uma ordem cronológica.

A partir desse fio condutor, as categorias *emergiram* no momento da análise dos dados, com certa influência do referencial teórico. As unidades de análise foram agrupadas, de acordo com o fio condutor, resultando nas seguintes categorias:

Figura 5 - Agrupamento das unidades de análise

1- Os alunos da escola pública não argumentam?

1.1 As discordâncias entre Luisa e Tatiana

1.2 O uso de um recurso não discursivo na prova de Fernando e de Júlia

1.3 A refutação de uma hipótese por meio do contraexemplo

1.4 As demonstrações realizadas na turma 902

2- O desenvolvimento da argumentação

2.1 Inserção de hipóteses, testes e justificativas

2.2 O uso correto do exemplo para a refutação de hipóteses: o contraexemplo

2.3 Fazendo generalizações

3- Obstáculos para o desenvolvimento da argumentação

3.1 A falta do **estabelecer contato** e do **posicionar-se**

3.2 A falta de tempo

3.3 Falta de domínio da linguagem algébrica

3.4 Conflitos no grupo

3.5 Outras prioridades

Fonte: Elaborado pela autora

A análise que fiz nesta pesquisa foi indutiva, mas não como proposto por Lincoln e Guba (1985). As categorias emergiram durante a análise e, sendo assim, possuem características diretas dos dados, como é indicado pelos autores. Porém, elas também possuem características do referencial teórico adotado e estudado anteriormente à realização da análise. A escolha das palavras-chave, por exemplo, foi feita a partir da teoria. Foi inevitável a influência do referencial teórico no meu olhar na realização da análise. No entanto, isso não descaracteriza a análise como indutiva, pois a influência da teoria ocorreu no momento da análise dos dados, e não anteriormente a ela. Além disso, não foi a minha intenção buscar dados para comprovar ou contestar alguma teoria, como é proposto na análise dedutiva. Assim, acredito que não é possível realizar uma análise puramente indutiva, pois é impossível e indesejável abandonar o referencial teórico durante a análise.

Seguindo a organização das categorias, apresentada anteriormente, as unidades de análise, compostas de diálogos, trechos dos relatórios produzidos pelos estudantes, desenhos, anotações realizadas na coleta de dados, etc., foram categorizadas. A análise desses dados será apresentada no próximo capítulo.

7 ARGUMENTAÇÃO EM ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO: os alunos não querem argumentar?

O objetivo desta pesquisa é buscar compreender como se desencadeia e se desenvolve a argumentação dos alunos em atividades de investigação. Visando alcançá-lo, apliquei quatro atividades investigativas nas três turmas de 9º ano do Ensino Fundamental sob responsabilidade da professora Maria.

A partir da produção dos estudantes, verificada em seus relatórios, considerando os avanços e as dificuldades, planejei intervenções apoiadas nos referenciais teóricos escolhidos e em minhas experiências com esse tipo de atividade, como professora de matemática. Elas foram realizadas ao longo das atividades, juntamente com a professora Maria.

As intervenções contribuíram para a argumentação dos alunos, tanto em seu desencadeamento, quanto em seu desenvolvimento. Como será relatado neste capítulo, pude identificar argumentos em situações ocorridas anteriormente às intervenções realizadas, mas, também, identifiquei argumentos que não são considerados válidos na matemática. E, ainda, pude notar uma evolução na argumentação dos estudantes, tanto oral quanto escrita, após a realização de cada intervenção.

Sendo assim, este capítulo fica dividido em quatro seções. Na seção 7.1, a intenção é mostrar que é possível identificar argumentação dos alunos em atividades de investigação. Dessa forma, apresento uma descrição das situações argumentativas, isto é, aquelas em que ocorreu argumentação, de acordo com os referenciais teóricos escolhidos.

Na seção 7.2, o objetivo é relatar as intervenções realizadas por mim e pela professora Maria e seus desdobramentos que contribuíram para o desenvolvimento da argumentação dos estudantes. Na seção 7.3, descrevo os obstáculos vivenciados durante a realização das atividades investigativas, que atravancaram o desenvolvimento da argumentação. Por fim, na seção 7.4, apresento um resumo da análise realizada neste capítulo, apontando as conclusões obtidas nesse processo.

7.1 Os alunos da escola pública não argumentam?

Um dos meus interesses nesta pesquisa é identificar momentos em que ocorre argumentação dos alunos. Como foi discutido anteriormente, no capítulo de introdução, eu acreditava que a argumentação não ocorria em aulas de matemática, sobretudo em atividades investigativas, nas quais ela é parte de sua estrutura, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009).

O trabalho de campo desta pesquisa foi realizado em uma escola pública. Dentre os diversos pré-conceitos que existem sobre ela, é comum dizer ou ouvir que o ensino é fraco, principalmente quando comparado ao ensino da rede particular, e, em consequência disso, os estudantes também são fracos e não querem aprender.

Somado a isso, no cenário em que esta pesquisa se desenvolveu, vivenciei alguns casos que chamaram a atenção: uma aluna grávida, uma aluna que sofre de agressão pelos pais, brigas dentro da sala e na escola, um aluno com extrema dificuldade em matemática... Devido a esses casos, inicialmente, considerei que seria difícil desencadear e desenvolver a argumentação dos alunos. Por isso, o título desta seção ficou sendo: **Os alunos da escola pública não argumentam?**

O objetivo desta seção é apresentar uma análise de situações argumentativas em aulas de matemática e mostrar que, mesmo em um contexto que possui fatores aparentemente complicadores para o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem, é possível identificar a argumentação matemática dos estudantes.

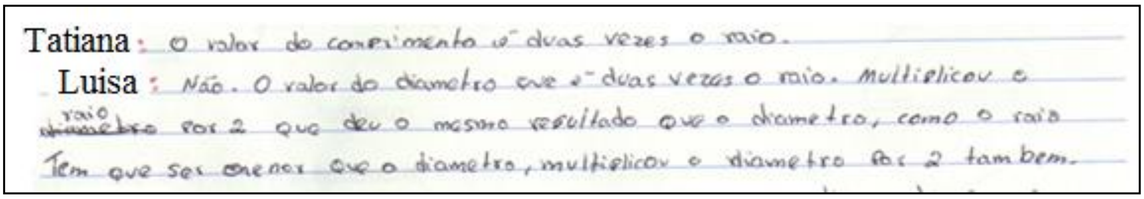
7.1.1 As discordâncias entre Luisa[20] e Tatiana

Na primeira aula em que foi aplicada a atividade sobre cálculo do comprimento de uma circunferência, duas alunas da turma 901, Tatiana (que estava grávida) e Luisa, chamaram a minha atenção devido à forma como elas interagiram. Na segunda questão da atividade, que se refere à obtenção de uma fórmula para o cálculo do comprimento da circunferência, houve divergência de opinião entre Tatiana e Luisa. Tatiana apresentou seu ponto de vista para responder a questão, Luisa discordou e apresentou razões para refutar a ideia da colega.

Essa divergência foi registrada no relatório do grupo, como pode ser visto a seguir:

[20] Os nomes dos alunos que participaram da pesquisa foram substituídos por nomes fictícios para que fossem preservadas as suas identidades.

Figura 6 - Trecho extraído do relatório produzido por Tatiana e Luisa


Tatiana: o valor do comprimento é duas vezes o raio.
Luisa: Não. O valor do diametro que é duas vezes o raio. Multiplicou o raio ~~diametro~~ por 2 que deu o mesmo resultado que o diametro, como o raio tem que ser menor que o diametro, multiplicou o diametro por 2 tambem.

Fonte: Dados da pesquisa

Para facilitar a compreensão do trecho do relatório apresentado acima, segue, abaixo, a sua transcrição.

Figura 7 – Transcrição do trecho extraído do relatório produzido por Tatiana e Luisa

Tatiana: O valor do comprimento é duas vezes o raio. Luisa: Não. O valor do diâmetro que é duas vezes o raio. Multiplicou o raio por 2 que deu o mesmo resultado que o diâmetro, como o raio tem que ser menor que o diâmetro, multiplicou o diâmetro por 2 também.

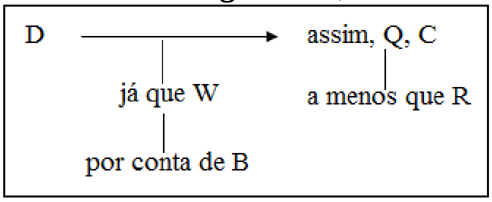
Fonte: Dados da pesquisa

No fragmento do relatório apresentado acima, é possível notar que a Tatiana afirma que o comprimento da circunferência é igual a duas vezes o valor do raio. Luisa discorda e apresenta um motivo para refutar essa afirmação: que o diâmetro é duas vezes o raio.

Essa situação pode ser caracterizada como argumentativa, uma vez que Luisa não usou apenas a negação, ou seja, não apenas rejeitou a afirmação (CHARAUDEAU, 2008), mas apresentou um conceito matemático para refutar a afirmação feita por Tatiana. Usando o modelo de Toulmin (2006), podemos identificar o argumento presente nesse trecho do relatório.

Como já foi discutido, de acordo com Toulmin (2006), um argumento tem uma estrutura, que pode ser representada por meio do esqueleto a seguir:

Figura 8 - Estrutura de um argumento, de acordo com Toulmin



Fonte: TOULMIN, 2006

Nessa estrutura, D representa os dados do argumento, que são fatos apresentados para apoiar uma conclusão, C; W representa as garantias, que são afirmações gerais que funcionam como pontes que permitem a passagem dos dados à conclusão; B representa o apoio das garantias, que são afirmações categóricas que funcionam como avais para as garantias, ou seja, reforçam a autoridade das garantias; R representa as condições de refutação, que indica as circunstâncias nas quais se deve deixar de lado a autoridade das garantias; Q representa o qualificador modal, que indica a força conferida pela garantia no passo dos dados à conclusão; e C representa a conclusão ou alegação.

Como a intenção de Luisa era refutar a proposição feita por Tatiana, podemos dizer que a conclusão C de Luisa era que o comprimento não é igual a duas vezes o raio. Ela apresentou como dado, D: “Multiplicou o raio por 2 que deu o mesmo resultado que o diâmetro” para fundamentar a sua conclusão.

Mesmo que nas orientações presentes no roteiro houvesse a informação de que o diâmetro é igual a duas vezes o raio, devido ao fragmento “multiplicou o raio por 2”, é possível inferir que a aluna mediu o raio de cada objeto circular, multiplicou o valor obtido por 2 e comparou com o valor do diâmetro na tabela preenchida pela dupla. Sendo assim, esse pode ser considerado um dado empírico.

Ainda nesse argumento, podemos identificar a garantia W para dar suporte ao dado apresentado por ela: “como o raio tem que ser menor que o diâmetro” e o apoio B: “o valor do diâmetro que é duas vezes o raio”.

Luisa mediu com barbante e régua os valores do comprimento e do diâmetro. Ela notou, por meio da tabela, que o valor do comprimento é maior que o valor do diâmetro. Com isso, podemos inferir que ela compreendeu que, como o diâmetro é duas vezes o raio e o valor do comprimento é maior que o do diâmetro, logo o comprimento não poderia ser igual a duas vezes o raio.

Figura 9 - Tabela preenchida por Tatiana e Luisa, extraída do relatório delas

Objeto	Valor do comprimento (C)	Valor do diâmetro (d)	Valor da razão C/d
garrafinha	12,0 cm	3,5 cm	3,42
pote de tempero	23,0 cm	7,5	3,06
lata nescau	26,5	8,5	3,11

Fonte: Dados da pesquisa

A seguir, apresento a transcrição da tabela acima.

Figura 10 - Transcrição da tabela preenchida por Tatiana e Luisa, extraída do relatório delas

Objeto	**Valor do comprimento (C)**	**Valor do diâmetro (d)**	**Valor da razão C/d**
garrafinha	12,0 cm	3,5 cm	3,42
Objeto	Valor do comprimento (C)	Valor do diâmetro (d)	Valor da razão C/d
pote de tempero	23,0 cm	7,5	3,06
lata de Nescau	26,5	8,5	3,11

Fonte: Dados da pesquisa

Depois de refutar a ideia apresentada por Tatiana, as duas alunas continuaram a procurar por uma relação que permitisse o cálculo do comprimento da circunferência. Tatiana realizou algumas contas com os dados obtidos na tabela, multiplicando o valor do diâmetro por ele mesmo.

> Tatiana pegou o primeiro valor de diâmetro da tabela e multiplicou por ele mesmo: 3,5 x 3,5. Ela encontrou o valor 12,25, usando a calculadora. Ela disse que ficou parecido com o valor da tabela [com o valor do diâmetro, que no caso é igual a 12][21].

Na análise dessa situação, vou utilizar o modelo "Cooperação Investigativa" (Modelo-CI), proposto por Alrø e Skovsmose (2004). Como já foi discutido, ele apresenta os seguintes elementos, que não se encontram necessariamente fragmentados ou nessa ordem: estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar.

Estabelecer contato refere-se a uma participação colaborativa, na qual os integrantes do grupo devem prestar atenção uns aos outros e às contribuições, com respeito, responsabilidade e confiança. *Perceber* refere-se ao processo de descoberta ao examinar possibilidades e experimentar coisas. As ideias que foram percebidas, ao serem reconhecidas pelos integrantes da investigação, marcam o elemento *reconhecer* do modelo de comunicação. *Posicionar-se* significa dizer o que se pensa, apresentar argumentos, compartilhando com o

[21] Dados da pesquisa. Nota do Caderno de Campo, Aula 2.

grupo o que se sabe. Já *pensar alto* significa expressar sentimentos, ideias e pensamentos, tornando-os público. *Reformular* significa repetir o que foi dito em um tom diferente, focando termos e ideias-chave, tornando os argumentos mais precisos. *Desafiar* é característica de um momento em que as ideias são questionadas e levadas a uma outra direção. Por fim, *avaliar* significa refletir sobre o trabalho realizado e as perspectivas envolvidas. Isso pode ser feito pelo professor ou aluno.

Tatiana *percebeu* que, ao multiplicar o valor do diâmetro da "garrafinha" por ele mesmo, o resultado encontrado estava próximo do valor do comprimento medido por elas, cujo registro está na Figura 9. Ela, então, assumiu que a fórmula para determinar o comprimento da circunferência é C = d x d e *pensou alto*, compartilhando essa ideia com sua colega. Luisa, por sua vez, *estabeleceu contato* e *reconheceu* a ideia da Tatiana. Porém, ela resolveu testar a fórmula proposta com os valores da segunda linha da tabela, *desafiando* a ideia da Tatiana.

> Luisa testou a ideia da Tatiana: 7,5 x 7,5 = 56,25. Ela disse que este valor é maior que 23 [valor do comprimento na tabela]. [22]

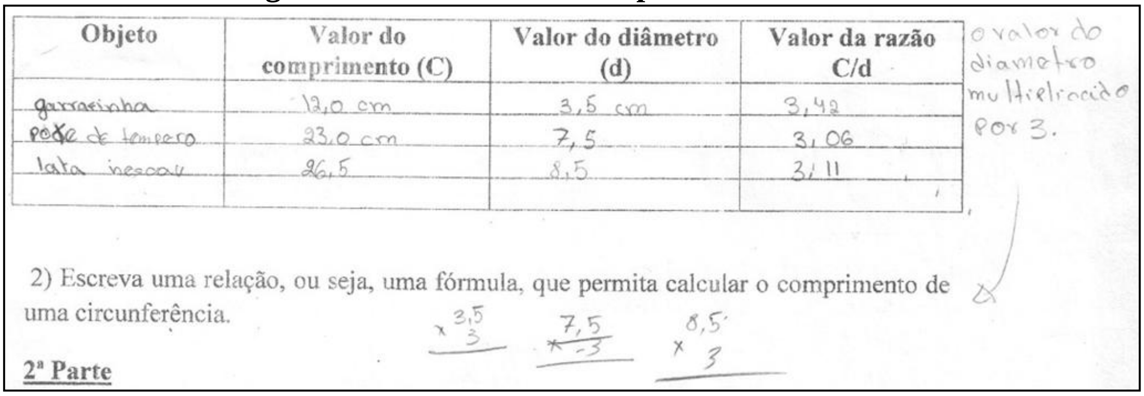
As alunas refutaram essa ideia a partir de um caso que deu errado, que é um procedimento válido na matemática: o contraexemplo. Em seguida, elas *reformularam* a ideia, mas cada uma apresentou um ponto de vista diferente. Tatiana afirmou que o valor do comprimento é igual a duas vezes o valor do diâmetro. Luisa, que discordou, afirmou que o comprimento é igual a três vezes o diâmetro.

> Tatiana e Luisa discordaram sobre a fórmula do comprimento [da circunferência]. Tatiana disse que é 2d [duas vezes o diâmetro] e Luisa acha que é 3d [três vezes o diâmetro]. As duas estão testando os valores da tabela. [23]

Esses testes também podem ser verificados no relatório entregue por elas:

[22] Dados da pesquisa. Nota do Caderno de Campo, Aula 2.
[23] Dados da pesquisa. Nota do Caderno de Campo, Aula 2.

Figura 11 - Testes realizados por Tatiana e Luisa



Objeto	Valor do comprimento (C)	Valor do diâmetro (d)	Valor da razão C/d
garrafinha	12,0 cm	3,5 cm	3,42
pote de tempero	23,0 cm	7,5	3,06
lata nescau	26,5	8,5	3,11

o valor do diametro multiplicado por 3.

2) Escreva uma relação, ou seja, uma fórmula, que permita calcular o comprimento de uma circunferência.

3,5 x 3 7,5 x 3 8,5 x 3

2ª Parte

Fonte: Dados da pesquisa

A seguir, apresento sua transcrição.

Figura 12 - Transcrição dos testes realizados por Tatiana e Luisa

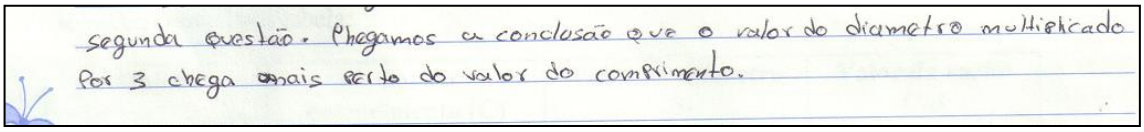
O valor do [diâmetro] multiplicado por 3.

3,5	7,5	8,5
x 3	x 3	x 3

Fonte: Dados da pesquisa

As alunas não registraram, no relatório, o resultado das operações apresentadas acima e nem as demais operações realizadas por elas, como a multiplicação do valor do diâmetro por 2. Mas, a partir desses resultados, elas concluíram que a fórmula para calcular o comprimento de uma circunferência seria C = 3d. Essa conclusão foi registrada no relatório do grupo, como pode ser visto a seguir:

Figura 13 - Conclusão apresentada por Luisa e Tatiana



segunda questão. Chegamos a conclusão que o valor do diametro multiplicado por 3 chega mais perto do valor do comprimento.

Fonte: Dados da pesquisa

Segue, abaixo, a sua transcrição.

Figura 14 - Transcrição da conclusão apresentada por Luisa e Tatiana

Chegamos a conclusão que o valor do [diâmetro] multiplicado por 3 chega mais perto do valor do comprimento.

Fonte: Dados da pesquisa

Dessa forma, é possível concluir que Luisa convenceu Tatiana através do teste realizado. E, a partir dos elementos do modelo de Toulmin (2006) identificados nessa interação, é possível concluir que houve argumentação.

Nessa dupla há uma dinâmica interessante. Há uma interação entre as duas alunas, uma discordando da outra e, por meio dessa interação, elas refutam hipóteses, formulam outras e estabelecem conclusões. Esses elementos são característicos de uma situação argumentativa.

7.1.2 O uso de um recurso não discursivo na prova de Fernando e de Júlia

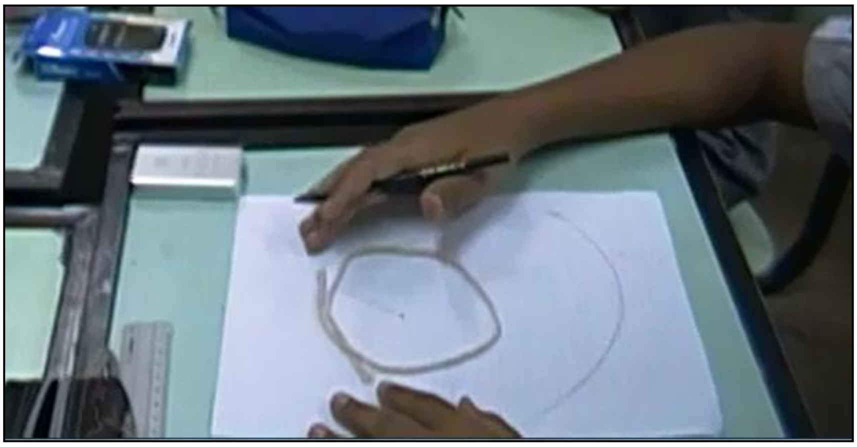
No segundo dia da realização da primeira atividade, na turma 901, o grupo formado por Agnes, Elen, Fernando e Eduardo utilizou um recurso não discursivo para justificar a conclusão obtida por eles. Ao receberem a atividade e o relatório produzido no primeiro dia, Agnes leu a pergunta da 2ª parte da oficina e Eduardo rapidamente respondeu:

> O que acontece com o valor do comprimento de uma circunferência quando alteramos o valor do raio? (Agnes)
>
> O comprimento aumenta. Essa aqui está fácil demais! (Eduardo) [24]

Na situação apresentada acima, de acordo com o Modelo-CI (ALRØ; SKOVSMOSE, 2004), Eduardo *pensou alto* expondo sua ideia para o grupo, mas considerou que alterar o valor do raio é o mesmo que aumentar esse valor. Ele desconsiderou o caso da diminuição do valor do raio. Em seguida, Fernando desenhou, em uma folha, duas circunferências de tamanhos diferentes e contornou o comprimento delas com barbante, como pode ser visto na Figura 15.

[24] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 3.

Figura 15 - As circunferências feitas por Fernando



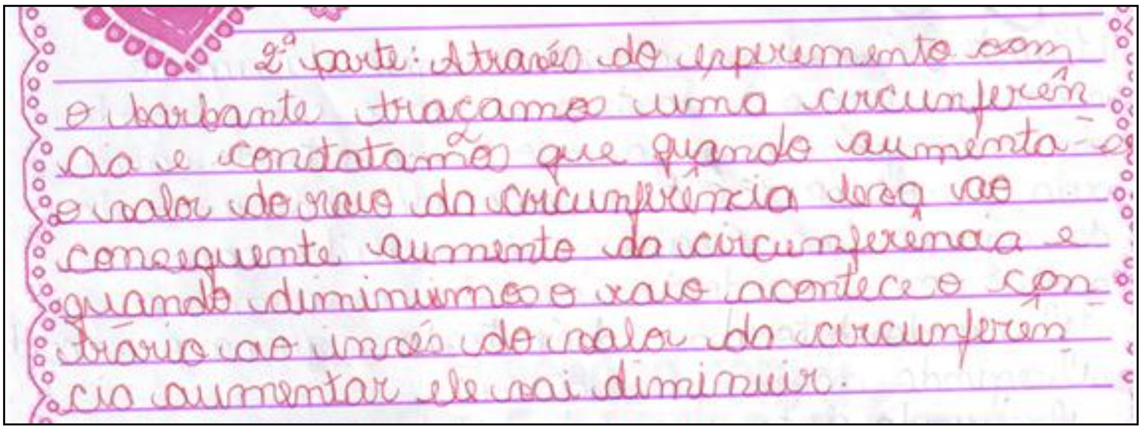
Fonte: Dados da pesquisa

Depois disso, ele expôs sua ideia, mostrando para o grupo os desenhos feitos por ele.

> Se aumentar o valor do raio, a circunferência vai aumentar. Se diminuir o valor do raio, a circunferência vai ter que diminuir. (Fernando)
>
> Que belas palavras! (Eduardo)[25]

É possível notar que Fernando *estabeleceu contato* com Eduardo e *reformulou* a sua afirmação, levando em consideração o que ocorre com o valor do comprimento quando o raio aumenta ou diminui. Ele *posicionou-se* para o grupo, apresentando como argumento a sua experiência feita na folha, sendo aceito pelo grupo. Ele, então, ditou a conclusão para Elen escrever no relatório, cujo trecho pode ser visualizado a seguir.

Figura 16 - Trecho ditado por Fernando



2ª parte: Através do experimento com
o barbante traçamos uma circunferên
cia e constatamos que quando aumenta
o valor do raio da circunferência logo vão
consequente aumento da circunferência e
quando diminuimos o raio acontece o con
trario ao invés do valor da circunferen
cia aumentar ele vai diminuir.

Fonte: Dados da pesquisa

[25] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 3.

A seguir, apresento a transcrição desse trecho do relatório:

Figura 17 - Transcrição do trecho ditado por Fernando

2ª parte: Através do experimento com o barbante traçamos uma circunferência e constatamos que quando aumenta-se o valor do raio da circunferência leva ao consequente aumento da circunferência e quando diminuímos o raio acontece o contrário ao invés do valor da circunferência aumentar ele vai diminuir.

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando esse trecho do relatório pelo modelo de Toulmin (2006), devido à presença dos termos "através do experimento" e "constatamos", é possível identificar que o grupo apresentou, como conclusão, C: "quando aumenta-se o valor do raio da circunferência leva ao consequente aumento da circunferência e quando diminuímos o raio acontece o contrário ao invés do valor da circunferência aumentar ele vai diminuir"; e, como dado, D: o experimento realizado com barbante. Além disso, o grupo utilizou o recurso do desenho para justificar essa conclusão, que é um recurso não discursivo.

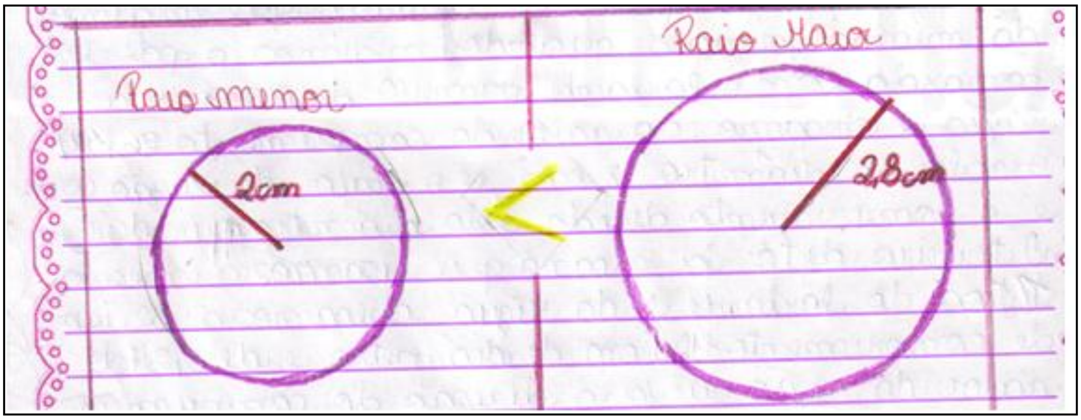
Depois que Elen terminou de escrever no relatório, Fernando leu novamente, em voz alta, o enunciado para o grupo. Ele repetiu a parte "façam testes para verificar se estão corretas".

> O teste a gente já fez. Foi o do barbante. (Fernando)
>
> Se a gente faz uma circunferência de raio 20 cm e mede o comprimento... (Eduardo) [Fernando o interrompe.]
>
> Quer ver? Desenha dois círculos aí. (Fernando)[26]

Fernando pegou o relatório que estava com Elen e desenhou com compasso os dois círculos para mostrar que a conclusão era verdadeira. Esse desenho pode ser visualizado no fragmento do relatório apresentado a seguir.

[26] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 3.

Figura 18 - Desenho feito por Fernando



Fonte: Dados da pesquisa

Com o uso do Modelo-CI (ALRØ; SKOVSMOSE, 2004) e do modelo de Toulmin (2006), é possível constatar que houve argumentação neste episódio relatado. Os integrantes do grupo aceitaram a conjectura de Fernando por meio da experiência feita por ele. Sendo assim, os desenhos apresentados por ele podem ser considerados como uma prova para esse grupo, de acordo com a definição de prova proposta por Balacheff (1982 apud Almouloud, 2007). Em termos de argumentação matemática, a prova apresentada seria o argumento utilizado pelo grupo para justificar a conjectura elaborada por seus integrantes.

Porém, eles poderiam ter discutido e aprofundado a conclusão. Eles não se preocuparam em quantificar a alteração do valor do comprimento e apresentar uma fórmula para isso. A liderança de Fernando pode ter influenciado o grupo a aceitar as suas ideias e a maneira como ele justificou a conclusão.

Considerando os meios de persuasão definidos por Aristóteles (EEMEREN; GROOTENDORST; KRUIGER, 1987), Fernando utilizou o *ethos* em sua argumentação. Nesse meio de persuasão, o orador convence o público transmitindo confiança e bom caráter, que são características de quem é considerado como um líder de um grupo.

Outro grupo que também usou o recurso do desenho para mostrar que uma ideia era verdadeira foi o da Júlia, Marcella, Clara e Mariana, da turma 902. Na realização da segunda atividade sobre pavimentação do chão da sala, as alunas estavam discutindo se o hexágono pavimentava o chão. Júlia afirmou que o hexágono pavimenta a partir da observação do caso da pavimentação do triângulo.

> Se aqui na hora da gente cubrir tudo formou um hexágono, eu acho que com o hexágono dá pra fazer também. (Júlia)

Dá! Dá! Eu acho que dá sim. Se a gente tivesse mais triângulos... (Marcella)[27]

A montagem das figuras, que resultou na constatação de Júlia de que o triângulo e o hexágono pavimentam, pode ser visualizada na figura a seguir:

Figura 19 - Verificação da pavimentação do triângulo equilátero

Fonte: Dados da pesquisa

Usando o Modelo-CI (ALRØ; SKOVSMOSE, 2004) na análise dessa situação, por meio da montagem das figuras, Júlia verificou que o triângulo pavimenta o chão. A partir dessa pavimentação, ela *percebeu* que o hexágono também pavimenta. Ela *pensou alto* e *posicionou-se* para o grupo, expondo sua ideia e mostrando a montagem realizada, como pôde ser visto na Figura 19.

Nesse momento, Marcella *estabeleceu contato* e concordou com a Júlia, *reconhecendo* sua opinião. Porém, quando Júlia perguntou sobre quantos polígonos iam ser necessários para formar um vértice, as duas discordaram. Júlia disse que eram necessários três polígonos enquanto Marcella achava que eram seis.

[27] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 5.

A partir disso, Marcella passou a apresentar dúvidas sobre a pavimentação do hexágono. Para ela, o polígono precisaria de se unir a triângulos para pavimentar. A professora Maria se aproximou para intervir nessa discordância.

> O que vocês estão concluindo? (Professora)
>
> Então é três. Vai dar certo sim! (Júlia)[28]

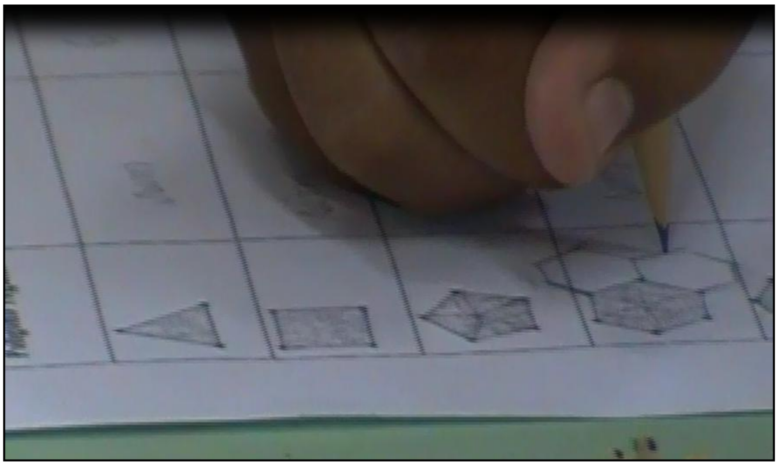
Júlia insistiu no seu ponto de vista, mas Marcella não aceitou. A professora continuou intervindo na situação.

> Que figura que formou aí, quando vocês juntaram os triângulos? (Professora)
> Figura? (Marcella)
>
> Um hexágono. (Júlia)
>
> Então o hexágono vai pavimentar? ((Professora)
>
> Vai! Porque o triângulo deu e formou um hexágono. (Júlia)
>
> Não vai! Não tem nada haver, sabe por quê? Porque pra ligar essas figuras precisa de triângulos. E o triângulo não é hexágono! É triângulo! (Marcella)
>
> Então você acha que não dá? (Pesquisadora)
>
> Acho que não. (Marcella)
>
> Dá sim. Olha aqui Marcella! [apontando para o hexágono formado com os triângulos.] (Júlia)
>
> Então vamos tentar resolver isso. Porque você acha que não dá e por que você acha que dá? (Pesquisadora)[29]

A partir desse momento, Júlia, que estava firme em seu ponto de vista, *posicionou-se*, desenhando hexágonos no relatório para convencer a Marcella. Como pode ser visto a seguir:

[28] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 5.
[29] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 5.

Figura 20 - Desenho feito por Júlia



Fonte: Dados da pesquisa

Marcella, ao ver os desenhos, concordou imediatamente.

> Ah! Dá sim! (Marcella)
>
> Falei que dava! (Júlia)[30]

A partir dos desenhos, o grupo todo concordou com Júlia e aceitou o seu ponto de vista, que o hexágono pavimenta e que são necessários três deles para pavimentar em torno de um vértice. Essa situação pode ser considerada como argumentativa, uma vez que Júlia apresentou razões para fundamentar a sua ideia, convencendo suas colegas, e, além disso, foram identificados elementos do Modelo-CI (ALRØ; SKOVSMOSE, 2004).

O desenho do hexágono realizado por ela, que é um elemento não discursivo, por ter sido aceito pelo grupo, foi a prova apresentada por Júlia, de acordo com a definição de prova de Balacheff (1982 apud Almouloud, 2007). Sendo assim, em termos de argumentação matemática, foi o argumento apresentado por ela para convencer a Marcella e as demais integrantes do grupo.

Essa situação se difere da anteriormente apresentada, do grupo do Fernando, no que diz respeito à influência da liderança, uma vez que Júlia não era vista como líder do grupo.

7.1.3 A refutação de uma hipótese por meio do contraexemplo

[30] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 5.

Durante a realização da segunda atividade, sobre pavimentação no chão da sala, os alunos Eduardo, Agnes, Fernando e Elen, da turma 901, formularam uma hipótese, testaram e ofereceram uma razão para refutá-la: um contraexemplo.

Depois de realizarem a montagem com os pentágonos de papel que receberam, os alunos verificaram que o pentágono não pavimenta. Essa montagem pode ser visualizada a seguir:

Figura 21 - Montagem com os pentágonos

Fonte: Dados da pesquisa

Em seguida, eles chamaram a professora e falaram sobre a verificação feita por eles. Ela solicitou uma justificativa para isso.

> Então vocês têm que justificar porque esse daí não deu. (Professora)
>
> Porque sobra espaço. (Agnes)
>
> Mas sobra por quê? O que tem que acontecer para poder fechar? (Professora)[31]

Pelo modelo de Toulmin (2006), a conclusão, C, apresentada pelos estudantes foi: o pentágono não pavimenta. O dado, D, apresentado foi: o espaço formado na montagem da figura, no qual não caberia outro pentágono. Esse poderia ser um argumento para justificar a conclusão dos alunos, mas a professora não aceitou. Ela não questionou o dado apresentado, mas continuou solicitando uma justificativa para a afirmação feita por eles.

Com isso, ela esperava que os alunos apresentassem uma justificativa matemática, ou seja, que eles usassem um conceito matemático para fundamentar essa conclusão. A professora Maria tentou levar os estudantes a perceberem que a soma dos ângulos internos

[31] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.

dos polígonos em torno de um vértice era inferior a 360º e, sendo assim, formava um espaço entre eles.

> Pensa na medida gente. Das figuras que vocês estão mexendo. (Professora)
>
> Medida? Como assim? (Eduardo)
>
> Deixa as figuras montadas aqui na mesa. Vai olhando pra ver se vocês vão ter alguma ideia. (Professora)
>
> Acho que depende do número de lados. (Fernando)
>
> Isso é uma hipótese. (Professora)[32]

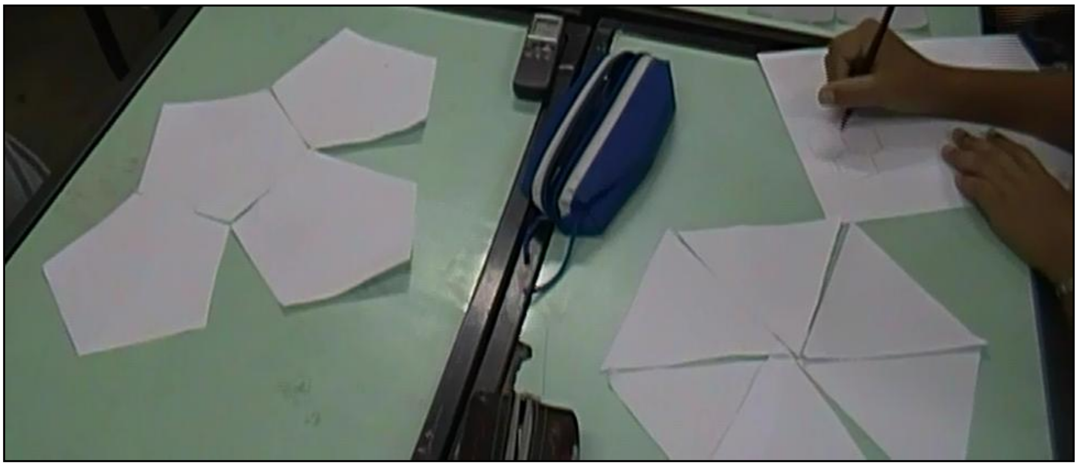
Nessa interação, quando a professora pediu que os alunos pensassem na medida para justificar a não pavimentação do pentágono, Fernando associou essa ideia ao número de lados do polígono e não ao valor do ângulo interno, como ela esperava. Mesmo sabendo que o número de lados não fazia parte da justificativa, a professora Maria apoiou a ideia, como pode ser verificado na fala dela: "Isso é uma hipótese". Sendo assim, Fernando realizou testes para verificar sua afirmação. Eduardo também participou desse processo.

> Então vamos ver... O de 3 lados está dando certo. O de 4 lados também dá. (Fernando)
>
> O pentágono não dá. (Eduardo)
>
> Já o de 5 não está dando. Então agora, a gente tem que fazer com o de 6 para saber. (Fernando)
>
> Desenha o de 6. (Eduardo)[33]

Como os estudantes não tinham recebido o hexágono de papel, Eduardo sugeriu que Fernando desenhasse para verificar a sua pavimentação. Esse desenho pode ser visualizado nas Figuras 22 e 23.

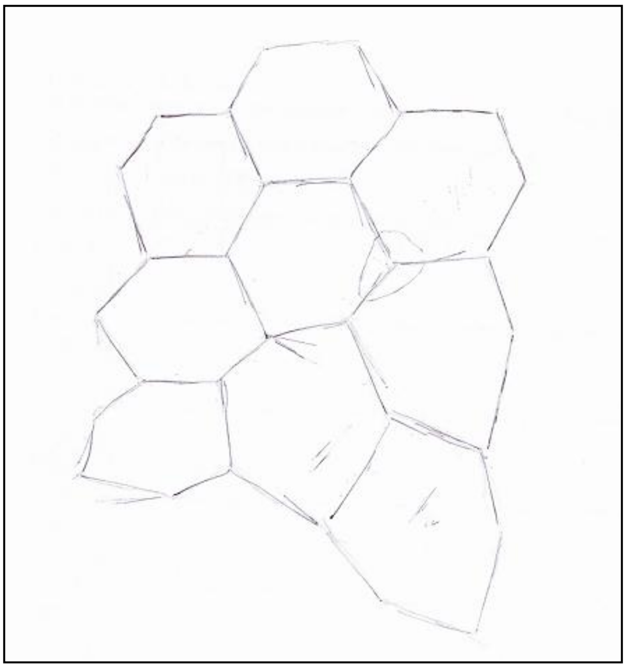
[32] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.
[33] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.

Figura 22 - Fernando desenhando o hexágono



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 23 - Hexágono feito por Fernando



Fonte: Dados da pesquisa

Após a realização do desenho, Elen concluiu que o hexágono pavimenta e reformulou a hipótese de Fernando.

> O de 6 dá! Eu tinha até pensado que todos os números pares davam. Mas só que este daqui [Apontando para o triângulo.] tem 3, 3 é ímpar. (Elen)
>
> Escreve isso aí! (Fernando)

Como é que é? O que você falou aí? (Eduardo)

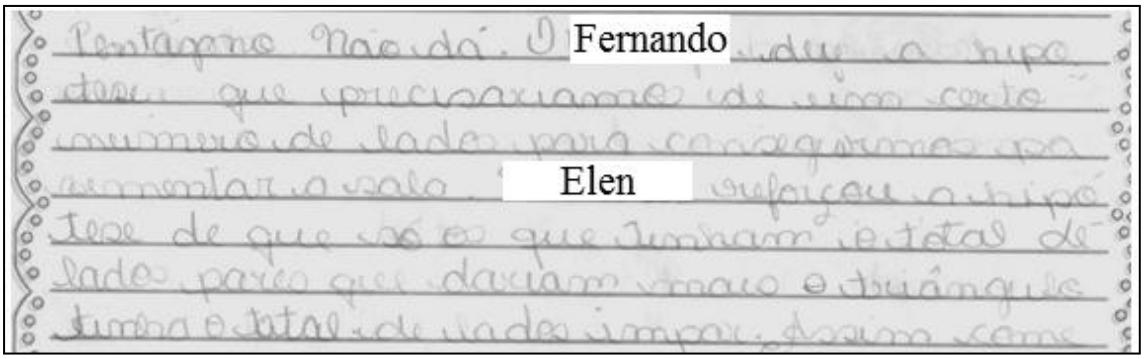
Eu pensei o seguinte, que só aqueles com lados pares iam pavimentar, só que esse aqui é 3. Ele tem 3 lados. (Elen)[34]

Pelo Modelo-CI (ALRØ; SKOVSMOSE, 2004), Elen *estabeleceu contato* com Fernando e *reformulou* a sua ideia. Ela afirmou que o polígono deveria ter um número par de lados para pavimentar. Em seguida, ela *posicionou-se* diante de sua própria ideia, apresentando um caso em que sua hipótese não é válida para refutá-la: o triângulo.

Além da identificação de elementos do Modelo-CI (ALRØ; SKOVSMOSE, 2004), em termos de argumentação matemática, ela apresentou um contraexemplo para refutar a sua hipótese, que é um recurso válido na matemática. Sendo assim, houve argumentação.

O grupo registrou a conclusão obtida no relatório, como pode ser visto a seguir:

Figura 24 - Trecho do relatório produzido por Fernando, Eduardo, Elen e Agnes



Fonte: Dados da pesquisa

Para facilitar a sua compreensão, apresento a seguir a sua transcrição.

Figura 25 – Transcrição do trecho do relatório produzido por Fernando, Eduardo, Elen e Agnes

"... O Fernando deu a hipótese que precisaríamos de um certo número de lados para conseguirmos pavimentar a sala. Agnes reforçou a hipótese de que só os que tinham o total de lados pares que dariam [mas] o triângulo tinha o total de lados ímpar."

Fonte: Dados da pesquisa

[34] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.

O grupo não conseguiu apresentar a justificativa que a professora esperava para a não pavimentação do pentágono. Porém, o apoio oferecido por ela permitiu que os alunos investigassem suas próprias ideias, proporcionando uma situação argumentativa, na qual eles argumentaram de forma matematicamente válida.

7.1.4 As demonstrações realizadas na turma 902

Na *discussão* com a turma 902 sobre a segunda atividade, pavimentação do chão da sala, a professora Maria questionou a veracidade de uma das hipóteses levantada pelo grupo formado por Fernando, Eduardo, Elen e Agnes, da turma 901: o ângulo do polígono deve terminar em 0 ou 5 para que ele possa pavimentar. Em seguida, Cláudia fez uma afirmação.

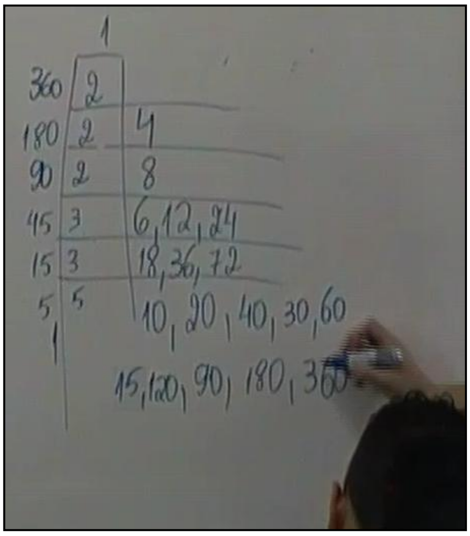
> Nenhum polígono regular termina com 5. (Cláudia)
>
> Será que não?O quê que a gente faz para poder ver isso? (Professora)
>
> Olha os divisores de 360. Vê se algum deles termina com 5. (Pedro)
>
> É isso mesmo. Ele falou assim, olha os divisores de 360 e se tiver um que terminar com 5... é verdadeiro. E aí? Vamos achar os divisores de 360? (Professora)[35]

Diante do questionamento dessa hipótese feito à turma 902, Cláudia, com intenção de negar a hipótese, fez outra afirmativa. Mas ela não apresentou nenhum dado, D, para fundamentar a sua conclusão, C (TOULMIN, 2006): nenhum polígono regular possui ângulo interno terminado em 5. Sendo assim, não houve argumentação. Porém, a professora Maria questionou a veracidade da ideia proposta por Cláudia, incentivando a participação dos alunos para que eles oferecessem razões para fundamentá-la.

Pedro, ciente de que para pavimentar era necessário que o valor ângulo interno do polígono regular deveria ser divisor de 360, sugeriu a busca de um divisor que terminasse em 5. A professora apoiou a sugestão do aluno e, juntamente com a turma, usou o dispositivo prático para obter os divisores de 360 no quadro, como pode ser visto a seguir:

[35] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 7.

Figura 26 - Obtenção dos divisores de 360



Fonte: Dados da pesquisa

Depois disso, a professora Maria voltou a questionar a afirmação feita por Cláudia, sobre a inexistência de um polígono regular com ângulo terminado em 5.

> Gente, agora olha só: vamos voltar ao raciocínio. A primeira ideia que ele teve era: olha todos os divisores de 360. Eu já coloquei aqui. E depois Pedro? (Professora)
>
> Verdadeiro porque o 15 terminou com 5. (Ícaro)
>
> Mas o quê que é 15 para dar certo? (Professora)
>
> O ângulo. (Aluno 1)[36]
>
> O ângulo não é?E aí? (Professora)
>
> Eu tô achando que não existe. (Ícaro)
>
> O que vocês acham? (Professora)
>
> Eu também acho que não. (Aluna 2)[37]

Ao ver um divisor de 360 que terminasse em 5, Ícaro concluiu que existia tal polígono. Mas a professora Maria questionou o significado do valor numérico que eles encontraram. No momento em que um aluno falou que se tratava do valor do ângulo, Ícaro passou a ter dúvidas da existência desse polígono. Sendo assim, a professora insistiu na verificação da existência

---

[36] Como não foi possível identificar as vozes gravadas de alguns alunos, os chamarei, a partir de agora, de Aluno 1, Aluno 2 e assim sucessivamente.
[37] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 7.

do polígono. Ela não descartou nenhuma ideia e orientou os alunos para que eles conseguissem apresentar uma conclusão sobre a hipótese apresentada por Cláudia.

> Eu quero um polígono que o ângulo é igual a 15º. (Professora)
>
> Não existe. (Aluna 2)
>
> Vai ser possível ter um ângulo de 15º? (Professora)
>
> Não. (André)
>
> Por que, André? Eu quero que vocês justifiquem para mim. [Alguns alunos falam ao mesmo tempo achando que não é possível.] Então tá bom. Peraí, que nós vamos calcular isso aqui agora. Vocês querem um polígono com ângulo de 15º. Um polígono regular. Vocês fizeram aqui várias vezes usando a fórmula... (Professora)[38]

Nesse momento, André afirmou que o polígono que eles estavam procurando não existe, mas não apresentou nenhuma justificativa para isso. Quando a professora cobrou uma justificativa, Stéfano apontou qual seria o polígono que poderia ter ângulo igual a 15º.

> Professora, o Stéfano tem uma hipótese aqui. (Cláudia)
>
> Professora, 24 vezes 15, vai dar 360. Então, um polígono de 24 lados. (Stéfano)
>
> Ah! 24 vezes 15. Mas é um polígono de 24 lados? (Professora)
>
> Nossa senhora! (Aluno 3)
>
> A minha pergunta é: será que o polígono de 24 lados vai ter ângulo igual a 15º? Então vamos ver o raciocínio do Stéfano. Isso é interessante o que o Stéfano falou. (Professora)[39]

Stéfano, ao perceber que o produto entre 24 e 15 era igual a 360, sugeriu que o polígono deveria ter 24 lados. A professora apoiou a ideia do aluno e insistiu em sua verificação pela fórmula que permite o cálculo do ângulo interno de um polígono regular.

> Gente, qual que é a fórmula para calcular o ângulo de um polígono? (Professora)
>
> 180 vezes... (Clara)
>
> Pelo número de lados? Esse aqui, a gente multiplicou por 6? [Referindo-se ao hexágono.] (Professora)
>
> Não. (Alunos)
>
> Foi 180 por... (Professora)

[38] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 7.
[39] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 7.

a. (Aluna 2)

Foi 180 por 4. Esse aqui [apontando para o pentágono] foi 180 por 3. Então esse aqui [o de 24 lados] é... (Professora)

Por 22. (Pedro)

Por quê? É 24 menos 2. E vou dividir o resultado por 24. [Ela registrou no quadro: $\frac{22 \,.\, 180}{24}$] (Professora)

Deu 3960. [Fazendo na calculadora.] (Aluno 3)

Dividido por 24? (Professora)

165. (Aluno 3)

Ah! Olha só! Qual era a hipótese que a gente estava testando? (Professora)

A do polígono de 24 lados. (Pedro)

A gente estava testando o que o Stéfano falou. Ele falou que o polígono de 24 lados, o ângulo dele vale 15º. É verdade? (Professora)

Não. (Turma)[40]

Através do cálculo do valor do ângulo interno do polígono regular de 24 lados, a turma verificou que a hipótese do Stéfano era falsa. Nesse momento, com a orientação da professora, os alunos apresentaram uma razão fundamentada na fórmula que permite o cálculo do valor do ângulo interno de um polígono regular para refutar a hipótese.

Pelo modelo de Toulmin (2006), a conclusão, C, obtida pela turma foi: o ângulo de um polígono de 24 lados não possui ângulo interno igual a 15º, o dado, D, apresentado foi o cálculo do valor do ângulo, através da fórmula, que foi igual a 165º. Assim, essa situação pode ser caracterizada como argumentativa.

Em termos de argumentação matemática, os estudantes e a professora partiram de uma generalização, que é a fórmula, para mostrar que o valor do ângulo interno de um polígono de 24 lados não vale 15º, e, sendo assim, apresentaram uma demonstração.

Depois disso, a professora Maria estimulou a turma a apresentar uma prova sobre a inexistência do polígono regular cujo valor do ângulo interno seja igual a 15º e, com isso, refutar a hipótese do grupo da turma 901, oferecendo razões para fundamentar a afirmativa feita por Cláudia.

---

[40] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 7.

Agora, nós vamos chegar a uma forma matemática para mostrar se esse polígono existe ou não. É simples demais. Vocês querem ver só? Como que a gente calcula o ângulo de um polígono regular? Qual que é a fórmula para calcular o ângulo interno do polígono? Número de lados... (Professora)

Menos 2. (Aluna 2)

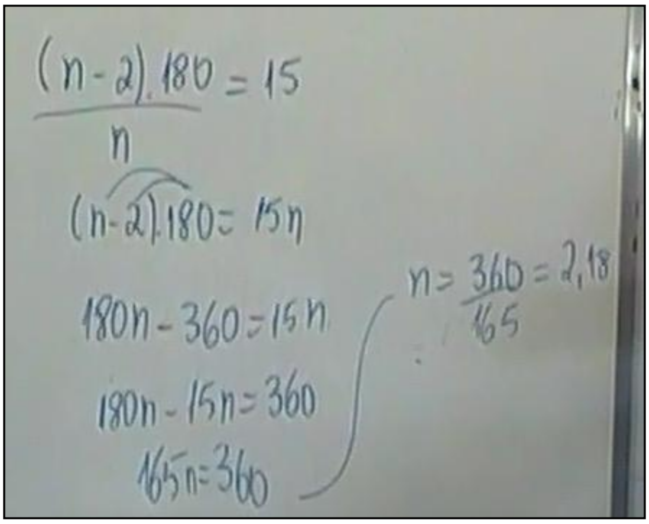
Vezes 180, dividido pelo número de lados. (aluna 4)

Não. [Registrando a conta no quadro.] Isso não é o valor do ângulo interno de um polígono? A gente quer que ele vale 15. Então eu vou igualar isso a 15. Virou uma equação. O quê que eu vou fazer? Vou multiplicar cruzado. Então vai ficar n menos 2 vezes 180 igual a 15 vezes n, 15 n. Resolvendo aqui. 180n menos 360 é igual a 15n. Manda pra lá, menos 15n. É igual a 360. 165n igual a 360. Divide aí para mim. (Professora)

2,18. [Fazendo com a calculadora.] (Aluna 3)[41]

A professora Maria registrou todo o processo no quadro, como pode ser visualizado a seguir:

Figura 27 - Verificação da existência de um polígono regular com ângulo igual a 15º



Fonte: Dados da pesquisa

Em seguida, ela questionou os alunos sobre a coerência do resultado obtido.

Existe um polígono que tenha 2,18 lados? (Professora)

Não. (Turma)

Para formar um polígono eu preciso de quantos lados? (Professora)

3. (Aluno 3)

[41] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 7.

> No mínimo 3. Então existe isso aqui? [Apontando para 2,18.] (Professora)
>
> Não. (Turma)
>
> Então agora, essa hipótese aqui é verdadeira ou falsa? [Sobre a terminação do ângulo em 0 ou 5.] (Professora)
>
> Não existe um polígono regular que pavimente terminado em 5. (Cláudia)
>
> Por quê? Vamos ajudar ela a concluir. Por que não existe? (Professora)
>
> Porque ele seria menor que o triângulo. (Aluno 2)
>
> Porque ele teria menos lados que o triângulo. E para formar um polígono, precisamos de pelo menos 3 lados. (Professora)[42]

Analisando essa interação pelo modelo de Toulmin (2006), é possível identificar um argumento. A conclusão, C, obtida pela turma e pela professora foi: não existe polígono regular com ângulo interno igual a 15º. O dado, D, apresentado foi: o resultado obtido na resolução da equação montada a partir da fórmula para cálculo do ângulo interno de um polígono regular. E a garantia, W, oferecida foi: é necessário, no mínimo, 3 lados para formar um polígono.

Em termos de argumentação matemática, como a professora e a turma mostraram que um polígono regular não possui ângulo igual a 15º, por meio da fórmula para cálculo do ângulo interno de um polígono regular, que é uma generalização, é possível concluir que eles apresentaram uma demonstração.

O apoio oferecido pela professora às ideias apresentadas pelos estudantes e seu incentivo para que eles procurassem justificativas para as hipóteses levantadas contribuiu para que a argumentação fosse desencadeada nessa discussão. A busca por razões fundamentadas na matemática, também incentivada e orientada pela professora, contribuiu para a construção das demonstrações realizadas.

Como os alunos e a professora demonstraram que não existe polígono regular com ângulo interno igual a 15º, eles verificaram que não existe polígono regular, que pavimente o chão, cujo valor do ângulo interno termine em 5. Assim, eles concluíram que a hipótese levantada pelo grupo da turma 901 era falsa.

7.1,5 (Uma reflexão acerca das mudanças ocorridas na pesquisa

---

[42] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 7.

Eu comecei esta pesquisa acreditando que não há argumentação nas aulas de matemática. Esse pensamento é, sobretudo, consequência das minhas experiências, como professora, ao propor atividades de investigação matemática. Durante a realização desse tipo de atividade, incomodava-me com a falta de justificação e fundamentação em conceitos matemáticos pelos alunos ao relatarem suas ideias e resultados obtidos na exploração da situação proposta.

Porém, nesta seção, identifiquei argumentação durante o desenvolvimento das atividades investigativas realizadas no trabalho de campo desta pesquisa. Se eu encontrei argumentação, o que aconteceu?

A partir de agora, vou abrir, literalmente, um parênteses na análise dos dados para responder essa pergunta. Sendo assim, esta subseção não se trata de uma análise dos dados, mas uma reflexão acerca das mudanças que ocorreram no decorrer da pesquisa.

Após cada aula em que foi desenvolvida a atividade de investigação, eu verificava a produção dos estudantes por meio de seus relatórios. A partir disso, planejava intervenções visando desencadear e incentivar a argumentação dos alunos. Pude notar que elas contribuíram para o desencadeamento e também para o desenvolvimento da argumentação deles, que será relatado com mais detalhes na próxima seção. Ademais, o apoio concedido aos estudantes, individualmente e em grupo, por mim e pela professora Maria, também contribuiu para o desencadeamento da argumentação. Por meio desse apoio, os alunos puderam esclarecer dúvidas e foram incentivados a argumentar.

Porém, eu identifiquei argumentação antes de realizar qualquer intervenção ou apoio visando o desencadeamento da argumentação dos alunos. Sendo assim, passei a refletir sobre as mudanças que ocorreram nesta pesquisa, tanto sobre minha perspectiva quanto da pergunta de pesquisa.

Inicialmente, eu entendia que argumentar seria uma forma de justificar ideias e, na matemática, seria o mesmo que demonstrar. Em minhas experiências como professora de matemática, como foi dito anteriormente, sentia certa ausência dessa prática, uma vez que os estudantes manifestavam dificuldades em compreender e em realizar uma demonstração, além da falta de interesse nesses momentos das aulas.

Dessa forma, minha primeira proposta para esta pesquisa era identificar e compreender o que desencadeia a argumentação dos alunos em uma atividade de investigação. E, assim, analisar as formas de argumentação presentes na escola básica. O meu objetivo, então, era buscar algum fator que pudesse fazer com que os alunos argumentassem em atividades investigativas.

As leituras e as reflexões teóricas sobre argumentação me fizeram compreender que esse é um campo teórico muito mais amplo do que imaginei. Passei, então, a compreender que a demonstração é uma das várias formas de argumentar. E que argumentar é justificar, é procurar convencer o outro sobre suas ideias, é fundamentar uma conclusão e até mesmo deliberar consigo mesmo sobre uma tomada de decisão, por exemplo, levando em consideração diferentes pontos de vista. Assim, a argumentação não deveria estar completamente ausente das atividades investigativas, como eu acreditava.

Ao iniciar o trabalho de campo, meu objetivo ainda era identificar o que desencadeia a argumentação dos estudantes, mesmo após as leituras realizadas sobre argumentação, pois ainda estava influenciada pelas experiências que tive como professora. Contudo, durante a realização da análise dos dados, pude identificar argumentos elaborados pelos alunos antes de qualquer intervenção ou orientação dada a eles visando o desencadeamento da argumentação.

Refletindo sobre isso, pude perceber que as leituras realizadas sobre argumentação e argumentação matemática foram fundamentais para que eu identificasse situações argumentativas.

A partir das definições de explicação, prova e demonstração propostas por Balacheff (1982 apud Almouloud, 2007), fiquei mais atenta às estratégias dos alunos ao tentarem convencer os colegas sobre suas ideias, como elas eram justificadas e comunicadas. Pude então identificar diversas formas de se argumentar como: refutar por meio de contraexemplo, provar com o uso de um recurso não discursivo, demonstrar.

Portanto, o meu aprofundamento teórico no campo da argumentação e da argumentação matemática fez com que eu compreendesse o que é um argumento e quais são as formas de argumentar. Isso trouxe contribuições para a identificação da argumentação dos estudantes, que, como foi visto nesta seção, nem sempre é discursiva.

Assim, minhas inquietações a respeito da "ausência" da justificação em atividades de investigação e a reflexão acerca do que é argumentação fizeram com que eu reformulasse minha pergunta de pesquisa. "O que desencadeia" reflete o sentido de que a argumentação não existe e, por meio desta pesquisa, eu iria discutir o que fazer para inseri-la na sala de aula. Assim, o objetivo era buscar um procedimento ou ação, por parte do professor, para que a argumentação passasse a existir na sala de aula de matemática, e, em particular, em uma atividade investigativa. Então, decidi substituir a expressão anterior por "como se desencadeia e se desenvolve", pois a minha intenção, após o aprofundamento teórico, era compreender o processo da argumentação. Por exemplo, como ela é iniciada, por meio de atitudes ou tipos de atividades, e como ela poderia ser aprimorada nas aulas de matemática.

Por conseguinte, a pergunta diretriz desta pesquisa passou a ser: **Como se desencadeia e se desenvolve a argumentação matemática dos alunos em uma atividade investigativa?** Essa mudança é reflexo da evolução da minha compreensão sobre argumentação. Uma vez que os alunos argumentam, torna-se necessário fazer com que eles sejam capazes de fazer isso em uma atividade investigativa e, em particular, que considerem necessário avaliar a coerência de suas ideias e justificá-las por meio de processos válidos da matemática, como a prova.)

Nesta seção, descrevi situações que caracterizei como argumentativas a partir da análise realizada por meio do modelo de Toulmin (2006), do Modelo-CI (ALRØ; SKOVSMOSE, 2004) e das definições de prova e demonstração propostas por Balacheff (1982 apud Almouloud, 2007). Pude identificar argumentos elaborados pelos alunos em situações que ocorreram antes da realização de intervenções e orientações planejadas visando o desencadeamento da argumentação.

Pensando sobre isso, pude perceber que o aprofundamento teórico no campo da argumentação e da argumentação matemática ampliou a minha compreensão sobre o que é um argumento e os diferentes meios de se argumentar. Assim, pude estar mais atenta às estratégias utilizadas pelos alunos na argumentação e, na análise realizada, identifiquei as seguintes formas de argumentação dos alunos: convencer por meio da realização de testes, usar recursos não discursivos na produção de provas, refutar por meio de contraexemplo, demonstrar.

7.2 O desenvolvimento da argumentação

Na seção anterior, apresentei uma descrição de situações argumentativas e, dessa forma, foi possível concluir que a argumentação pode ser identificada nas aulas de matemática. A partir de agora, retorno ao objetivo da pesquisa, que é buscar compreender como se desencadeia e se desenvolve a argumentação dos alunos.

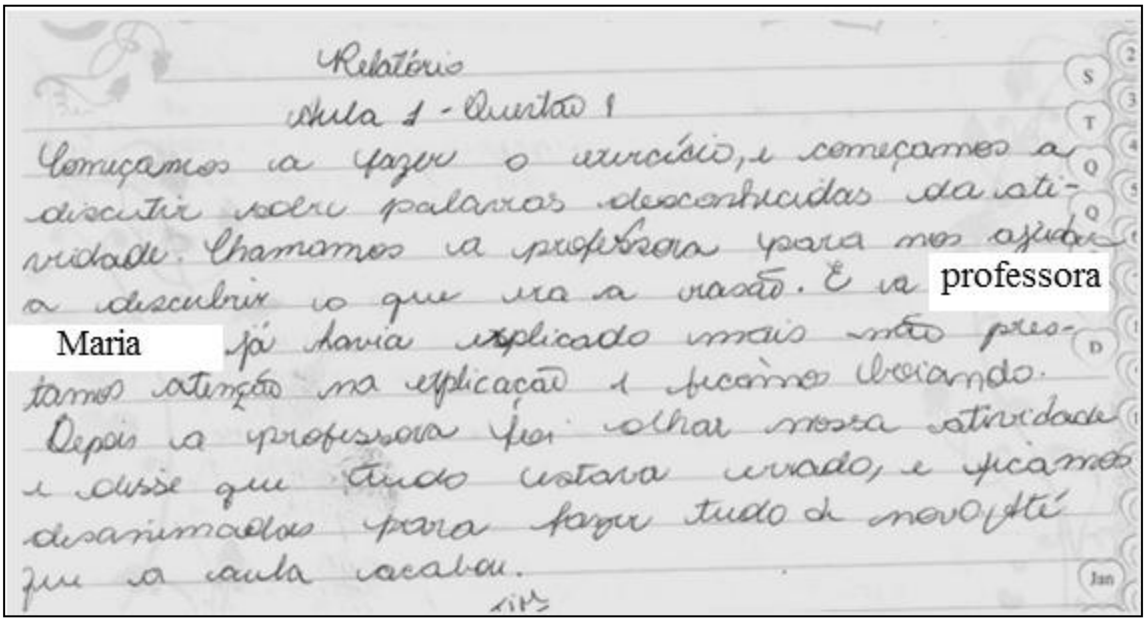
Visando alcançar esse objetivo, planejei algumas intervenções a partir do desenvolvimento das atividades de investigação. Depois da realização de cada intervenção, pude notar uma evolução no desenvolvimento da argumentação dos alunos. Por essa razão, nesta seção, apresento uma descrição das intervenções realizadas durante a aplicação das atividades de investigação e os seus desdobramentos na argumentação dos estudantes.

7.2.1 Inserção de hipóteses, testes e justificativas

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), a formulação de hipóteses, a realização de testes e a elaboração de justificativas fazem parte da investigação matemática. Assim, considerei importante dar ênfase a esses processos durante a realização das atividades e estimular os alunos a desenvolver habilidades envolvidas neles.

Anteriormente à realização das intervenções, os alunos estavam registrando, no relatório da primeira atividade, todos os passos seguidos pelo grupo, incluindo informações desnecessárias, como chamar a professora para esclarecer uma dúvida. Isso pode ser visto nos dois exemplos apresentados nas Figuras 28 e 30.

Figura 28 - Trecho extraído do relatório produzido por Liliane, Valéria, Isabela e Leticia (turma 901)


Relatório
Aula 1 - Questão 1
Começamos a fazer o exercício, e começamos a discutir sobre palavras desconhecidas da atividade. Chamamos a professora para nos ajudar a descobrir o que era a razão. E a professora Maria já havia explicado mais não prestamos atenção na explicação e ficamos boiando. Depois a professora foi olhar nossa atividade e disse que tudo estava errado, e ficamos desanimadas para fazer tudo de novo. Até que a aula acabou.

Fonte: Dados da pesquisa

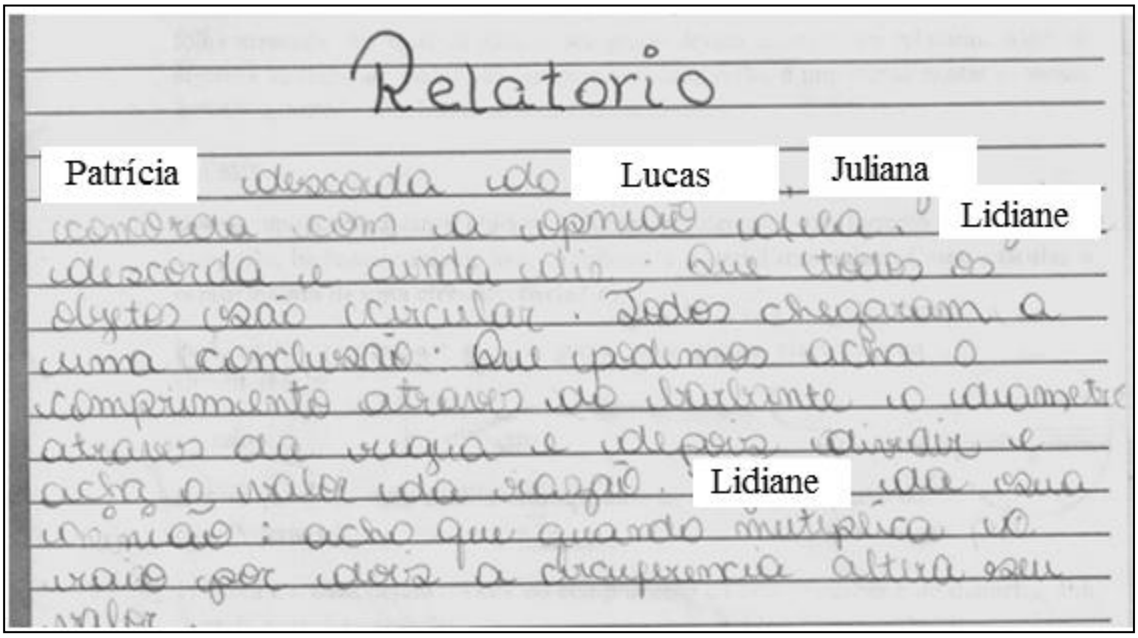
Para facilitar a compreensão do trecho do relatório acima, apresento, a seguir, a sua transcrição:

Figura 29 - Transcrição do trecho extraído do relatório produzido por Liliane, Valéria, Isabela e Leticia (turma 901)

Relatório Aula 1 – Questão 1 Começamos a fazer o exercício, e começamos a discutir sobre palavras desconhecidas da atividade. Chamamos a professora para nos ajudar a descobrir o que era a razão. E a professora Maria já havia explicado [mas] não prestamos atenção na explicação e ficamos boiando. Depois a professora foi olhar nossa atividade e disse que tudo estava errado, e ficamos desanimadas para fazer tudo de novo. Até que a aula acabou.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 30 - Trecho extraído do relatório do grupo formado por Lucas, Lidiane, Juliana e Patrícia (Turma 902)


Relatorio
Patrícia discorda do Lucas Juliana
concorda com a opinião dela. Lidiane
discorda e ainda diz: Que todos os
objetos são circular. Todos chegaram a
uma conclusão: Que podemos acha o
comprimento atraves do barbante o diametro
atraves da regua e depois divide e
acha o valor da razão. Lidiane da sua
opinião: acho que quando mutiplica o
raio por dois a circuferencia altera seu
valor

Fonte: Dados da pesquisa

A seguir, apresento a transcrição do relatório apresentado acima.

Figura 31 - Transcrição do trecho extraído do relatório do grupo formado por Lucas, Lidiane, Juliana e Patrícia (Turma 902)

[Relatório] Patrícia [discorda] do Lucas. Juliana concorda com a opinião dela. Lidiane [discorda] e ainda diz: Que todos os objetos são circular. Todos chegaram a uma conclusão: Que podemos [achar] o comprimento [através] do barbante o [diâmetro] [através] da [régua] e depois dividir e [achar] o valor da razão. Lidiane [dá] sua opinião: acho que quando multiplica o raio por dois a [circunferência] altera seu valor.

Fonte: Dados da pesquisa

No primeiro exemplo, é possível notar que os estudantes registraram, no relatório, informações irrelevantes para a exploração do cálculo do comprimento da circunferência no relatório, como, por exemplo, "a professora Maria já havia explicado, [mas] não prestamos atenção na explicação e ficamos boiando". No segundo exemplo, os alunos iniciaram o relatório dizendo que concordam ou discordam da opinião da Patrícia, mas não relataram que opinião era essa. Em seguida, eles registraram como conclusão o procedimento utilizado por eles para medir os valores do comprimento e do diâmetro das circunferências, solicitado na primeira questão do relatório. Por fim, Lidiane propôs uma hipótese: "quando multiplica o raio por dois a [circunferência] altera seu valor". Porém, o grupo não verificou se ela era verdadeira. De forma geral, os estudantes das três turmas não registraram suas hipóteses e testes e não apresentaram justificativas em seus relatórios.

A professora Maria disse que os alunos não tinham o hábito de fazer relatórios e que produziam com pouca frequência em aulas de ciências. Assim, a produção de um relatório não era uma prática natural para os estudantes. Além da pouca familiaridade com essa prática, a fala da professora Maria na primeira aula de exploração da atividade sobre o cálculo do comprimento de uma circunferência também pode ter influenciado a escrita dos alunos:

> Então, tem algumas questões aí que cada um talvez vai anotar uma hipótese. Ah, eu acho que vai ser isso! Então quem tiver fazendo o relatório, vocês escolhem alguma pessoa do grupo para escrever, um relatório por grupo. Beatriz acha que é isso... Pedro acha que é aquilo... Então vocês vão escrever tudo e no final vão me entregar. A gente pensou isso e aquilo... deu certo ou não deu certo. (Professora)[43]

[43] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 2.

Como foi dito por ela, os alunos deveriam "escrever tudo". Então foi possível notar, através dos exemplos apresentados, que os alunos entenderam que o relatório é um registro de tudo o que aconteceu durante a atividade. Além disso, a palavra hipótese estava presente nas orientações iniciais do roteiro da atividade e também foi usada pela professora, na fala acima, como se fosse usual para os alunos.

No entanto, anteriormente à coleta de dados, os estudantes não realizaram atividades que envolvessem formulação de hipóteses, realização de testes e apresentação de justificativas para suas conclusões. Essas eram habilidades que deveriam ser desenvolvidas nos alunos durante as atividades de investigação, sendo necessário esclarecer o significado de hipótese e teste e mostrar como realizá-los e, assim, desencadear e desenvolver a argumentação deles.

Na tentativa de desencadear a argumentação dos alunos, a partir da segunda aula de exploração da primeira atividade, eu e a professora Maria passamos a orientar os alunos individualmente e em grupo sobre o que é hipótese e teste. Assim, durante as atividades, tanto eu quanto a professora incentivamos os estudantes a escrever suas conjecturas no relatório e a testá-las, para verificar se eram verdadeiras.

Um exemplo dessa intervenção ocorreu na segunda aula da primeira atividade sobre cálculo do comprimento de uma circunferência. O grupo formado por Fernando, Eduardo, Agnes e Elen, da turma 901, estava discutindo sobre a fórmula encontrada por eles e a professora Maria, que estava próxima, resolveu intervir.

> Qual é a fórmula pra... (Elen)
>
> 3d igual a C. (Agnes)
>
> Isso aí é uma hipótese que vocês levantaram. Vocês testaram ela? (Professora)[44]

Os alunos começaram a procurar as contas que eles realizaram nas folhas de rascunho que estavam em cima da mesa. A professora Maria insistiu para que o grupo registrasse no relatório o teste realizado por eles para verificar se a hipótese estava correta ou não.

> Como vocês testaram? Tem que colocar no relatório como vocês testaram a hipótese. (Professora)
>
> Eu estava multiplicando os valores por 3. [Se referindo aos valores do diâmetro.] (Eduardo)
>
> Então vocês têm que colocar isso no relatório. (Professora)

[44] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 3.

Ah! Mas não está dando exato não! (Eduardo)

Mas está próximo? (Professora)

Está. (Eduardo)

Será que dá para aproximar mais? (Professora)[45]

A professora questionou se era possível ter uma fórmula que permitisse um cálculo mais aproximado para o valor do comprimento da circunferência. Os alunos então analisaram as contas realizadas e verificaram se os resultados eram maiores ou menores que os valores medidos. A professora Maria interrompeu e reforçou o pedido do registro da hipótese e dos testes realizados antes de atender outro grupo.

Então gente, peraí. Isso vocês têm que colocar no relatório. Hipótese: a fórmula é... aí coloca a fórmula que vocês encontraram. Não precisa ficar escrevendo tudo. Escreve desse jeito, hipótese: a fórmula é essa. Escreve. Pronto. Depois, teste. (Professora)

A gente não fez nada disso. (Elen)

Coloca aí na folha. (Eduardo)

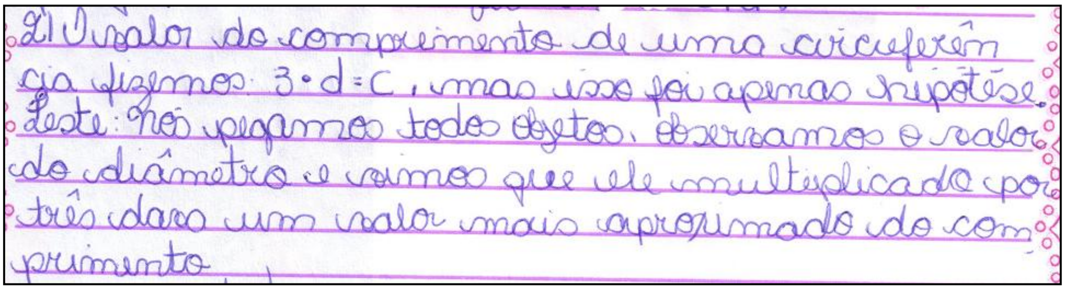
Qual que é o teste que vocês estão fazendo? (Professora)

Diâmetro vezes 3. (Eduardo)

Então escreve isso. (Professora)[46]

Elen, com a ajuda de Eduardo, registrou no relatório a hipótese e o teste realizado pelo grupo. Esse registro pode ser visto no fragmento do relatório do grupo, apresentado a seguir.

Figura 32 - Registro da hipótese e descrição do teste realizado pelo grupo formado por Fernando, Eduardo, Agnes e Elen (Turma 901)


2) O valor do comprimento de uma circuferên-
cia fizemos 3·d=C, mas isso foi apenas hipótese.
Teste: nós pegamos todos objetos, observamos o valor
do diâmetro e vimos que ele multiplicado por
três dava um valor mais aproximado do com-
primento

Fonte: Dados da pesquisa

[45] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 3.
[46] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 3.

A seguir apresento a transcrição desse trecho do relatório do grupo.

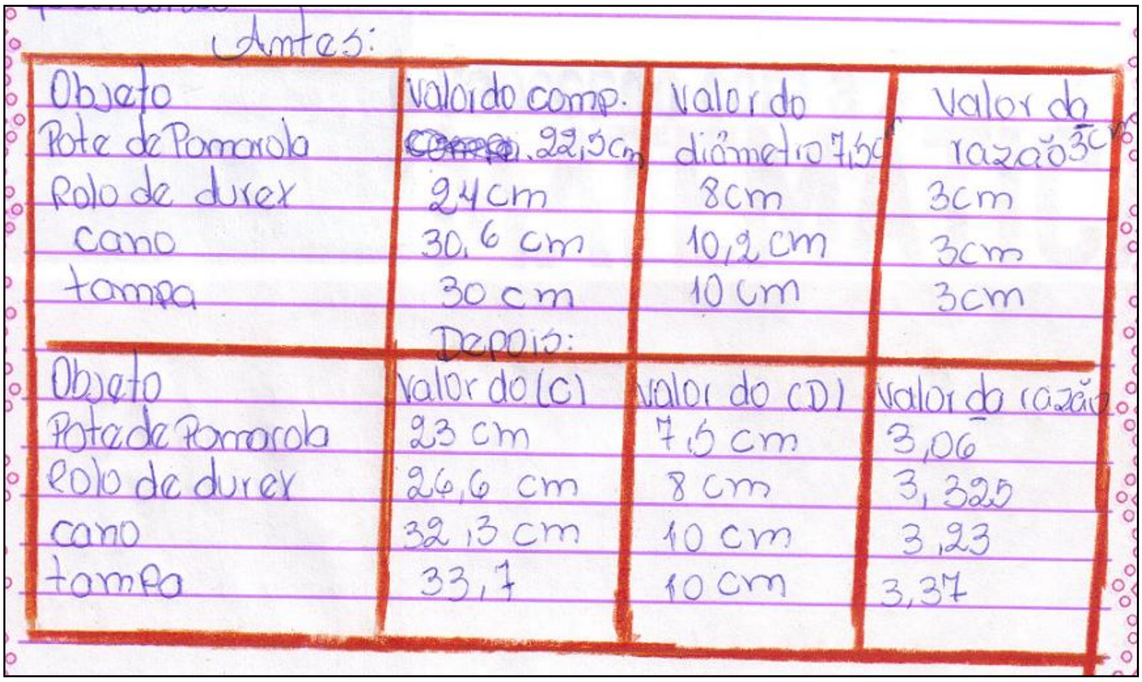
Figura 33 - Transcrição do registro da hipótese e descrição do teste realizado pelo grupo formado por Fernando, Eduardo, Agnes e Elen (Turma 901)

2) O valor do comprimento de uma circunferência fizemos 3.d = C, mas isso foi apenas uma hipótese. Teste: Nós pegamos todos os objetos, observamos o valor do diâmetro e vimos que ele multiplicado por três dava um valor mais aproximado do comprimento.

Fonte: Dados da pesquisa

Mesmo com a sugestão da professora para tentar encontrar uma fórmula que permitisse um cálculo mais aproximado para o comprimento, o grupo considerou a hipótese inicial como sendo a mais próxima, na qual o valor do comprimento seria igual ao triplo do valor do diâmetro. Em seguida, eles produziram uma tabela com os resultados obtidos no teste realizado, que pode ser visualizada a seguir.

Figura 34 - Teste realizado pelo grupo formado por Fernando, Eduardo, Agnes e Elen (Turma 901)


Antes:

Objeto	Valor do comp.	Valor do diâmetro	Valor da razão
Pote de Pomarola	22,5cm	7,5cm	3cm
Rolo de durex	24cm	8cm	3cm
cano	30,6 cm	10,2 cm	3cm
tampa	30 cm	10 cm	3cm

Depois:

Objeto	Valor do (C)	Valor do (D)	Valor da razão
Pote de Pomarola	23 cm	7,5 cm	3,06
Rolo de durex	26,6 cm	8 cm	3,325
cano	32,13 cm	10 cm	3,23
tampa	33,7	10 cm	3,37

Fonte: Dados da pesquisa

A seguir apresento a transcrição desse fragmento do relatório.

Figura 35 - Transcrição do teste realizado pelo grupo formado por Fernando, Eduardo, Agnes e Elen (Turma 901)

Antes:			
Objeto	Valor do comp.	Valor do diâmetro	Valor da razão
Pote de Pomarola	22,5 cm	7,5 cm	3 cm
Rolo de durex	24 cm	8 cm	3 cm
Cano	30,6 cm	10,2 cm	3 cm
Tampa	30 cm	10 cm	4 cm
Depois:			
Objeto	Valor do (C)	Valor do (D)	Valor da razão
Pote de Pomarola	23 cm	7,5 cm	$3{,}0\overline{6}$
Rolo de Durex	26,6 cm	8 cm	3,325
cano	32,3 cm	10 cm	3,23
tampa	33,7	10 cm	3,37

Fonte: Dados da pesquisa

Nessa tabela, a primeira linha, intitulada de “antes”, contém os valores do comprimento da circunferência calculados a partir da hipótese elaborada pelo grupo. A segunda linha, chamada de “depois”, contém os dados obtidos por meio das medições realizadas com régua e barbante.

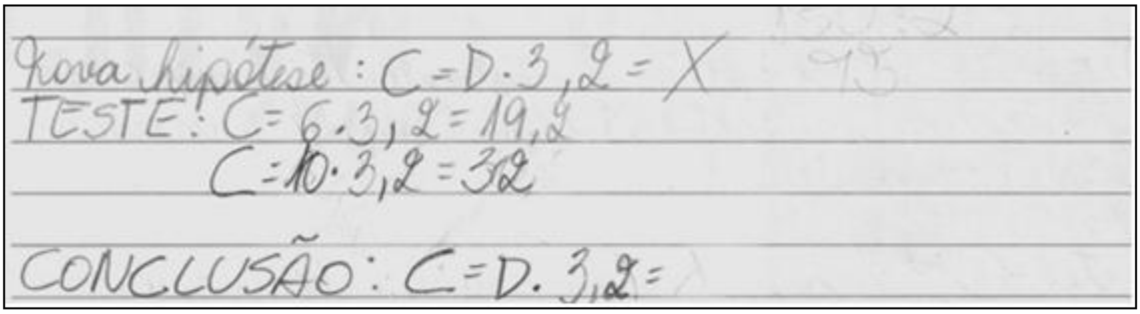
Analisando essa situação por meio do modelo de Toulmin (2006), a conclusão, C, obtida pelo grupo foi: o valor do comprimento é igual ao triplo do valor do diâmetro, o dado, D, apresentado foi: o teste realizado e registrado na tabela, que foi exibida na Figura 34.

Contudo, os alunos concluíram que a hipótese era verdadeira através de poucos exemplos em que os resultados eram próximos. Do ponto de vista da matemática, isso não é aceitável. “O teste, por si só, não confere o estatuto de conclusão aos seus resultados.” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 38). Sendo assim, o argumento apresentado pelo grupo não é matematicamente válido.

Ainda que os estudantes não tenham apresentado um argumento matemático, eles demonstraram um avanço em sua argumentação, uma vez que eles começaram a apresentar razões para que a hipótese fosse considerada verdadeira. Esse avanço teve influência da professora Maria, que cobrou e incentivou os alunos a formular hipóteses e a realizar testes, fazendo o registro de todo esse processo no relatório.

Depois da primeira intervenção, pude notar que muitos grupos das três turmas passaram a registrar nos relatórios suas hipóteses e a realizar testes. Essa mudança pode ser visualizada no trecho do relatório do grupo formado por Marcella, Júlia, Clara e Mariana, da turma 902, apresentado a seguir:

Figura 36 - Registro de hipóteses e testes



Nova hipótese: C = D . 3,2 = X
TESTE: C = 6 . 3,2 = 19,2
C = 10 . 3,2 = 32
CONCLUSÃO: C = D . 3,2 =

Fonte: Dados da pesquisa

A seguir, apresento a transcrição desse trecho do relatório.

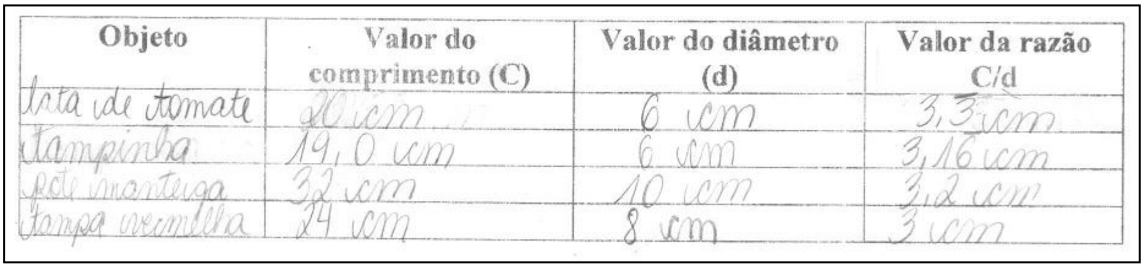
Figura 37 - Transcrição do registro de hipóteses e testes

Nova hipótese: C = D . 3,2 = X
TESTE: C = 6 . 3,2 = 19,2
C = 10 . 3,2 = 32
CONCLUSÃO: C = D . 3,2 =

Fonte: Dados da pesquisa

Os valores obtidos por esse grupo por meio das medições podem ser visualizados na Figura 38.

Figura 38 - Valores obtidos por meio das medições realizadas pelo grupo formado por Marcella, Júlia, Clara e Mariana (Turma 902)



Objeto	Valor do comprimento (C)	Valor do diâmetro (d)	Valor da razão C/d
lata de tomate	20 cm	6 cm	3,3 cm
tampinha	19,0 cm	6 cm	3,16 cm
pote manteiga	32 cm	10 cm	3,2 cm
tampa vermelha	24 cm	8 cm	3 cm

Fonte: Dados da pesquisa

Logo a seguir apresento a sua transcrição.

Figura 39 - Transcrição dos valores obtidos por meio das medições realizadas pelo grupo formado por Marcella, Júlia, Clara e Mariana (Turma 902)

Objeto	Valor do comprimento (C)	Valor do diâmetro (d)	Valor da razão C/d
lata de tomate	20 cm	6 cm	$3,\overline{3}$ cm
tampinha	19,0 cm	6 cm	$3,1\overline{6}$ cm
pote manteiga	32 cm	10 cm	3,2 cm
tampa vermelha	24 cm	8 cm	3 cm

Fonte: Dados da pesquisa

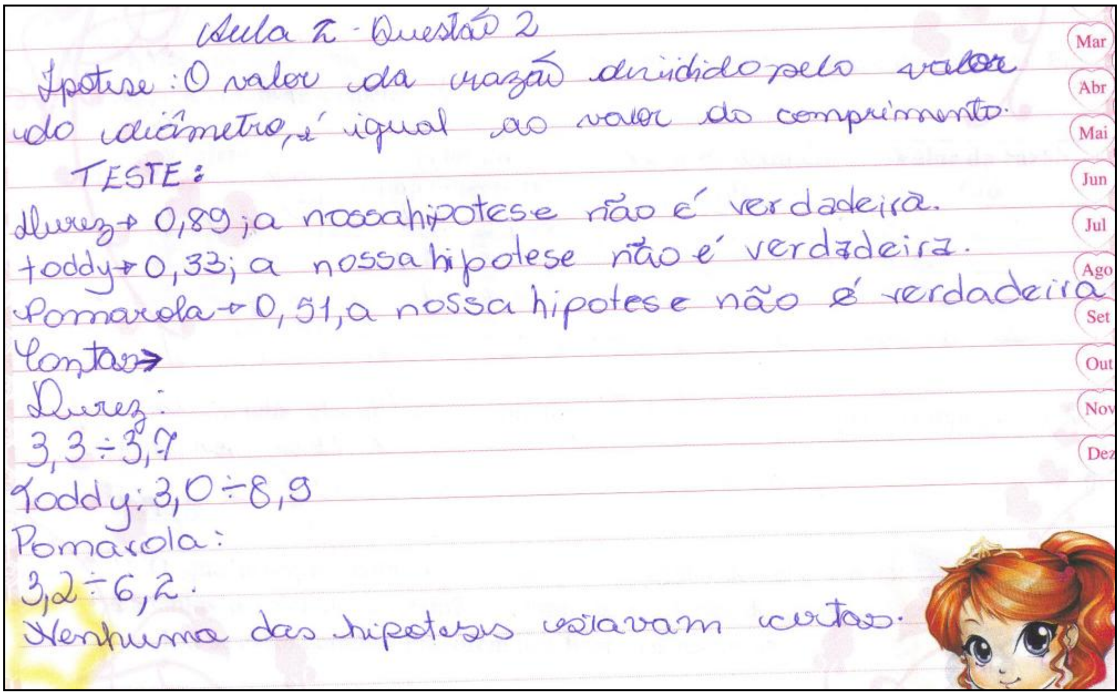
Esse grupo realizou um teste, apresentado na Figura 36, com apenas três casos considerados: o da "lata de tomate", o da "tampinha" (que possui o mesmo valor para o diâmetro) e o do "pote de manteiga". Como pode ser visto, os valores obtidos pela fórmula C = 3,2d são próximos dos valores medidos, sendo que para o pote de manteiga é igual.

Porém, o grupo não realizou outros testes e considerou a afirmativa como sendo uma conclusão através desses poucos testes realizados. Além disso, as alunas não notaram que cometeram um erro na tabela, o valor da razão não possui unidade, já que é o resultado da divisão de um valor em centímetros por outro valor em centímetros.

Analisando essa situação pelo modelo de Toulmin (2006), a conclusão, C, apresentada pelas alunas foi: C = D.3,2, o dado D foi: o teste realizado com alguns valores da tabela exibida na Figura 38. Porém, esse grupo, assim como o anterior, também aceitou a hipótese como verdadeira por meio da realização de poucos testes. Assim, o argumento apresentado no relatório desse grupo não é matematicamente válido.

Outro grupo que também incluiu a realização de hipóteses e testes no relatório foi o da turma 901 formado por Liliane, Valéria, Isabela e Letícia. Essas alunas se consideraram "desanimadas" em refazer a atividade, como pôde ser visto na Figura 28, mas também mostraram avanço na argumentação. Parte das hipóteses e testes realizados por esse grupo, na primeira atividade sobre cálculo do comprimento da circunferência, pode ser visualizada a seguir.

Figura 40 - Hipóteses e testes realizados pelo grupo formado por Liliane, Valéria, Isabela e Letícia (Turma 901)


Aula 2 - Questão 2
Ipotise: O valor da razão dividido pelo valor do diâmetro, é igual ao valor do comprimento.
TESTE:
durex → 0,89; a nossa hipotese não é verdadeira.
toddy → 0,33; a nossa hipotese não é verdadeira.
Pomarola → 0,51, a nossa hipotese não é verdadeira
Contas →
Durex:
3,3 ÷ 3,7
Toddy: 3,0 ÷ 8,9
Pomarola:
3,2 ÷ 6,2.
Nenhuma das hipoteses estavam certas.

Fonte: Dados da pesquisa

Logo abaixo, apresento a transcrição desse trecho do relatório.

Figura 41 - Transcrição das hipóteses e testes realizados pelo grupo formado por Liliane, Valéria, Isabela e Letícia (Turma 901)

Aula 2 – Questão 2
[Hipótese]: O valor da razão dividido pelo valor do diâmetro, é igual ao valor do comprimento.
TESTE:
[Durex] → 0,89; a nossa [hipótese] não é verdadeira.
Toddy → 0,33; a nossa [hipótese] não é verdadeira.
Pomarola → 0,51, a nossa [hipótese] não é verdadeira
Contas →
[Durex]:
3,3 ÷ 3,7
Toddy: 3,0 ÷ 8,9
Pomarola:
3,2 ÷ 6,2.
Nenhuma das [hipóteses] estavam certas.

Fonte: Dados da pesquisa

Os valores medidos por essas alunas podem ser vistos no fragmento do relatório delas, apresentado a seguir:

Figura 42 - Valores obtidos por meio das medições realizadas pelo grupo formado por Liliane, Valéria, Isabela e Letícia (Turma 901)

Objeto	Valor do comprimento (C)	Valor do diâmetro (d)	Valor da razão C/d
durex	12,5 cm	3,7	3,3
itadaly	27,5 cm	8,9 cm	3.0
lamarcla	20,2 cm	6,2 cm	3,2

Fonte: Dados da pesquisa

Nessa situação, as alunas afirmaram que o valor da razão (valor do comprimento dividido pelo valor do diâmetro) dividido pelo valor do diâmetro seria igual ao valor do comprimento. Elas apresentaram o teste realizado com três objetos e refutaram a hipótese para cada um deles, já que os valores encontrados eram muito diferentes do valor do comprimento obtido por meio da medição. As alunas apresentaram a conclusão para a hipótese levantada se referindo a ela no plural: "Nenhuma das hipóteses estavam certas".

Dessa maneira, é possível concluir que para as alunas a hipótese enunciada poderia estar correta para um objeto e errada para outro. Se um dos testes por acaso se aproximasse do valor do comprimento, elas poderiam ter aceitado a hipótese como verdadeira para um determinado objeto. As alunas não compreenderam o caráter universal de uma hipótese na matemática. A conjectura elaborada deveria ser considerada como válida para todos os objetos ou ser refutada por meio de um exemplo.

Além disso, elas se apoiaram apenas nos resultados obtidos nas operações realizadas e não apresentaram outra justificativa para apoiar a refutação da hipótese. Como a atividade envolvia erros de medição devido à utilização da régua e do barbante, seria pertinente a apresentação de alguma justificativa nesse sentido para a refutação. Nesse caso, elas poderiam ter verificado que o valor da razão multiplicado pelo valor do diâmetro era igual ao valor do comprimento, logo a ideia da divisão da razão pelo valor do diâmetro não poderia estar correta.

Portanto, assim como nos casos anteriores, as alunas não apresentaram um argumento matematicamente válido, mas apresentaram uma hipótese e razões para que ela fosse refutada. Isso também mostra um desenvolvimento da argumentação delas.

De forma geral, pude notar que, no segundo dia de aplicação da primeira atividade, grande parte dos alunos passou a elaborar hipóteses e a realizar testes. Assim, a primeira intervenção trouxe contribuições para os relatórios dos alunos e para o desenvolvimento da argumentação escrita. Ainda que a maioria dos alunos não apresentasse argumentos matematicamente válidos nos relatórios, eles começaram a entender sobre a sua estrutura.

Entretanto, pude verificar que os alunos não apresentaram justificativas para suas hipóteses, uma vez que a realização dos testes, por si só, não confere à conjectura a classificação de conclusão (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009). Além disso, muitos deles aceitaram uma hipótese como verdadeira através da realização de poucos exemplos que deram certo. Isso é comum, pois, para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), os estudantes costumam aceitar uma conjectura após verificá-la para um número reduzido de casos.

Outra intervenção realizada, visando a inserção das hipóteses e testes, nos relatórios produzidos pelos alunos, ocorreu no momento da *discussão* com a turma sobre os resultados obtidos na primeira atividade sobre cálculo do comprimento da circunferência. Antes da aula, conversei com a professora Maria para orientá-la sobre como ela deveria conduzir a discussão.

Em acordo, decidimos que ela conduziria todas as discussões, pois eu estava há pouco tempo com as turmas e os alunos poderiam se envolver pouco ou não aceitar o meu discurso, caso eu assumisse o papel de condutora da discussão. Optei, então, por interferir quando necessário. Assim, pedi que ela não discutisse apenas os resultados obtidos pelos alunos, mas que aproveitasse aquele momento da aula, com toda a turma, para esclarecer o significado de hipótese e como realizar testes.

Na turma 902, após a discussão da primeira parte do roteiro da atividade, os alunos concluíram, juntamente com a professora, que a fórmula para o cálculo do comprimento para a circunferência poderia ser C = 3d. Em seguida, a professora Maria chamou a atenção para a escrita do relatório.

> Então quando vocês forem fazer o relatório, vocês têm que prestar atenção. Ao invés de ficar escrevendo tudo, escrever a hipótese de alguém que falou, o que vocês fizeram para ver se é verdade ou não, o que vocês concluíram, se é falsa ou verdadeira. Você quer falar alguma coisa? [Se referindo à pesquisadora.] (Professora)

> Acho que vale a pena pensar a partir de agora: qual é o papel da hipótese no relatório? Porque, cada integrante do grupo vai ter uma ideia sobre a questão, não vai? Essa ideia, é... não necessariamente vocês têm que preocupar se ela é verdadeira ou não. É isso que é uma hipótese. É uma ideia provisória. É uma afirmativa provisória. Aí, ela vai servir ou não depois que vocês testarem. Aí, vocês tem que começar a entender esse objetivo da atividade. Então, vão surgir várias ideias provisórias, aí vocês vão ter que testar para ver se vão manter a ideia ou não. E depois tentar generalizar. (Pesquisadora)
>
> Então olha só, isso é o mais importante dos relatórios. Isso é o que a gente vai valorizar a partir de agora. Esse na verdade foi só uma atividade inicial. Vocês nunca tinham feito nada assim, não foi? Em nenhuma aula de matemática. Foi a primeira vez. Eu acho que a maioria dos grupos, deu para perceber, gostou desta atividade. Achou mais aberta, deu para vocês conversarem mais. Então, agora nas próximas, o importante é vocês prestarem atenção nesta questão. Porque eu falava: anota aí o que ele falou! A gente [se referindo a ela e à pesquisadora.] ficava nos grupos assim. Porque o importante é anotar todas as ideias que surgirem, independente se elas estão certas ou não. Pra gente ver qual que é o raciocínio que vocês estão tendo. Tá bom? (Professora)
>
> Eu senti, na hora que eu passei nos grupos, que muita gente ficou com vergonha de anotar alguma coisa, porque dizia que não estava legal. Mas, olha por exemplo aquela ideia ali, [se referindo à $\mathrm{C} = \mathrm{C} . \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}}$] o comprimento vai ser o diâmetro vezes a razão. Muita gente apagou, ou não escreveu. Ao invés de escrever e aprimorar. Porque olha quanta coisa a gente discutiu a partir desta ideia: fração, multiplicação, razão... Então, com essas ideias que vocês estão tendo a gente consegue discutir outros conteúdos matemáticos. Fica muito mais rica a aula. Teve aluno que não lembrava como multiplicar com fração e depois conseguiu recordar. (Pesquisadora)
>
> Então vocês estão entendendo qual é a ideia? (Professora)[47]

Nessa situação, tanto eu quanto a professora reforçamos o que é uma hipótese e falamos da necessidade de registrá-la no relatório, mesmo que ela não esteja correta. A partir dela, por meio da realização de testes, os estudantes poderiam discutir sobre vários conceitos matemáticos e, caso fosse verificado que a hipótese era falsa, ela poderia ser aprimorada. Em razão disso, enfatizamos a importância de todo esse processo na investigação.

Dando continuidade a essa intervenção, na turma 901, a professora Maria destacou as hipóteses levantadas pelos grupos e mostrou como realizar testes.

> Então, eu queria que vocês falassem qual foi a primeira hipótese que vocês pensaram, que fosse para dar o comprimento da circunferência. (Professora)
>
> Diâmetro vezes a razão. (Alunos)[48]

Maria registrou no quadro $C = D.\frac{C}{D}$ e disse:

---

[47] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.
[48] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.

> Isso aqui é uma hipótese. [Apontando para o registro feito no quadro.] Aí, para ver se era verdade vocês fizeram um teste. Qual foi o teste que vocês fizeram? (Professora)
>
> 7,5... (Elen)
>
> 7,5 é o quê? O diâmetro? [Registrando esse valor no quadro.] (Professora)
>
> Sim. (Elen)
>
> Então eles fizeram o teste [Se referindo ao grupo da Elen.] 7,5 que é o diâmetro vezes... (Professora)
>
> Vezes 3,6. (Elen)
>
> Vezes 3,6 que é o valor da razão que eles acharam. E aí calcularam o resultado... (Professora)
>
> Deu uns 22,725... Não! (Eduardo)
>
> Então vamos fazer aqui [Ela fez a conta no quadro solicitando a participação da turma na realização da operação.] Deu 27. Aí eles viram se dava certo ou não. Aí o que vocês concluíram? Estava certo isso? [Perguntando aos integrantes do grupo.] (Professora)
>
> Não! O nosso comprimento deu 23. (Elen)
>
> Não é 3,6. É 3,06. (Eduardo)
>
> Ah! Era 3,06. Então estava errado. Então temos que mudar aqui. [A professora foi até a conta que estava registrada no quadro e fez a sua correção.] 22,95. Deu certo? (Professora)
>
> Deu! (Elen)
>
> Então, o quê que a gente pode concluir dessa hipótese que eles levantaram? [Referindo-se à hipótese elaborada pelo grupo da Elen.] (Professora)
>
> Que ela é verdadeira. (Alunos)
>
> Isso. Que ela é verdadeira. (Professora)[49]

Nessa situação, a professora Maria registrou no quadro a hipótese levantada pelos alunos e mostrou como o grupo da Elen realizou o seu teste. Porém, a hipótese foi concluída como verdadeira por meio de um único teste que deu certo. A professora acabou confirmando esse hábito dos alunos. A própria fala dela "o quê que a gente pode <u>concluir</u> dessa hipótese que eles levantaram?", pode ter influenciado os estudantes a definir a hipótese como conclusão.

Essa atitude da professora pode ser consequência do fato de que ela sabia que a hipótese era verdadeira, uma vez que ao efetuar a multiplicação indicada no segundo membro

[49] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.

da relação $C = D.\frac{C}{D}$, obtém-se C = C, ou seja, o valor do comprimento é igual ao valor do comprimento. E, sendo assim, talvez ela quisesse discutir pouco sobre isso e ir mais rápido para a obtenção da fórmula para o cálculo do comprimento da circunferência.

No entanto, ainda que a hipótese tenha sido considerada verdadeira por meio de um único exemplo, ela chamou a atenção para a redundância dessa afirmação.

> Só que esta fórmula não está muito boa. Vocês estão usando o comprimento para achar o comprimento! E isso não tem jeito. [Referindo-se à fórmula $C = D.\frac{C}{D}$] Não fica bom. Vocês entenderam? Eu quero calcular o comprimento, mas estou dependendo do valor do comprimento. Então isso não ficou muito bom. Na verdade, se a gente mexer nesta fórmula aqui... Vamos multiplicar para ver o que acontece? Como que eu multiplico? (Professora)
>
> D vezes C que dá DC. (Aluno 1)
>
> E embaixo? (Professora)
>
> D. (Aluno 2)
>
> Eu peguei o número e multipliquei por D e dividi por D. O quê que vai sobrar? (Professora)
>
> C. (Aluno 2)
>
> Então eu não fiz nada nesta fórmula. Eu falei que o comprimento é igual ao valor do comprimento. Então não era uma boa fórmula. Aí apareceram outras hipóteses. (Professora)[50]

É interessante notar que a professora Maria apoiou o trabalho dos alunos, como indica Ponte Brocardo e Oliveira (2009). E mesmo que eles não tenham obtido uma fórmula para o cálculo do comprimento da circunferência, a discussão foi produtiva. A professora Maria não descartou a fórmula dizendo apenas que do ponto de vista da matemática ela não era válida. Ela considerou a hipótese e mostrou aos alunos como eles deveriam fazer para testá-la, mesmo que tenha reforçado o hábito dos alunos de mostrar que uma afirmativa é verdadeira por meio de um único ou poucos exemplos.

Por outro lado, a professora Maria convenceu os alunos, por meio de um argumento, de que a fórmula "não era boa", uma vez que era redundante. Ela dependia do próprio valor do comprimento para a sua utilização. Usando o modelo de Toulmin (2006), na análise dessa situação, a conclusão, C, apresentada por ela, foi: "não era uma boa fórmula"; o dado, D, para fundamentar sua conclusão foi a manipulação algébrica, que resultou em C = C; a garantia W

[50] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.

foi a aplicação de duas operações que são inversas uma da outra (multiplicar e dividir por D) no valor de C, o que não altera seu valor.

Ainda nessa discussão, a professora Maria incentivou o aprimoramento de hipóteses refutadas e alertou sobre a confiabilidade de resultados quando são realizados poucos exemplos. Para isso, ela pediu para que o grupo da Luisa dissesse a hipótese levantada por elas (Luisa e Tatiana).

> Luisa, qual foi a hipótese que vocês levantaram? A primeira hipótese? ((Professora)
>
> O comprimento é igual a 2 vezes o diâmetro. [A professora Maria registrou no quadro C = 2d.] (Luisa)
>
> O que vocês fizeram para ver se era verdadeira? Qual foi o teste que vocês fizeram? (Professora)
>
> Multiplicamos o diâmetro por 2. (Luisa)
>
> E qual foi o valor do diâmetro? (Professora)
>
> 3,5. [Maria registra C= 2 . 3,5 =] (Luisa)
>
> Então 2 vezes 3,5. Quanto que dá por esta fórmula? (Professora)
>
> 7. (Luisa)
>
> 7. Mas qual era o comprimento que vocês tinham achado? (Professora)
>
> 12. (Luisa)
>
> É muito diferente! [Registrando no quadro $C = 2 . 3,5 = 7 \neq 12$] Então não pode ser isso. Ficou muito diferente a resposta. Aí, o quê que elas fizeram? Essa foi uma primeira hipótese. Aí elas começaram a aprimorar a hipótese delas. Qual foi a próxima? (Professora)[51]

Nessa situação, a professora Maria refutou a hipótese da Luisa e da Tatiana por meio de um caso que não deu certo. Ou seja, por meio de um contraexemplo. Ela poderia ter definido esse conceito para os estudantes e ter diferenciado essa situação da primeira. Na primeira situação, a hipótese foi considerada verdadeira por meio de um exemplo, o que não é correto do ponto de vista da matemática, na segunda, a hipótese foi refutada por meio de um exemplo que não funcionou.

Por conta disso, a professora poderia ter confrontado as duas situações e especificado que o exemplo pode ser utilizado para refutar uma hipótese, mas não para justificar e confirmar a sua validade. Em contrapartida, a forma como ela conduziu a discussão permitiu

[51] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.

um maior esclarecimento aos alunos de como proceder ao elaborar uma conjectura. Não basta fazer uma afirmação, ela deve ser testada e verificada se é falsa ou verdadeira.

Após a professora esclarecer que a hipótese do grupo foi então aprimorada, Tatiana relatou a próxima hipótese.

> C é igual a 3 vezes o diâmetro. (Tatiana)
>
> Então essa foi a hipótese 2, que algumas pessoas chegaram também. Comprimento é igual a 3 vezes o diâmetro. [Ela registrou essa hipótese no quadro.] Aí, vamos usar o mesmo valor aqui. [Se referindo ao valor utilizado no teste anterior.] Comprimento é igual a 3 vezes 3,5. Quanto deu? (Professora)
>
> 10,5. [Maria registrou o resultado no quadro.] (Aluno 1)
>
> 10,5 está mais próximo de 12. [Que era o valor do comprimento obtido por medição.] Mas ainda é diferente. A Tatiana ainda pensou em outra hipótese. Ela achou que o comprimento poderia ser o diâmetro vezes ele mesmo. Esta então era a terceira hipótese. Gente isso tudo tem que constar no relatório. A Tatiana achou que o comprimento poderia ser o diâmetro elevado a 2. Aí ela fez o teste. [Escreveu no quadro Hipótese: $C= d^2$ $C = (3,5)^2$.] Comprimento é igual a 3,5 elevado a 2. E foi interessante, olha, porque ficou próximo. [Ela fez a conta no quadro com a participação dos alunos 3,5 x 3,5 = 12,25.] Olha só gente, se a gente olhar todas as aproximações, qual ficou melhor? (Professora)
>
> Essa aí. [Apontando para $C = d^2$.] (Aluno 1)
>
> Isso. Essa daqui. Só que um resultado é suficiente para dizer qual que é a melhor hipótese? (Professora)
>
> Não. (Alunos)[52]

Em seguida, a professora Maria, juntamente com a turma, realizou outros testes com as duas fórmulas apresentadas por Luisa e Tatiana: $C = 3d$ e $C = d^2$. Ela comparou os resultados obtidos e chamou a atenção para o valor encontrado na segunda fórmula, que, dessa vez, era muito diferente do valor medido.

> Olha só, gente! Este foi um ótimo exemplo que a gente não pode fazer o teste com só um número. Ele pode levar a gente a se enganar. Se a gente fizesse só com este, [apontando para $C = (3,5)^2 = 12,25$.] o quê que ia acontecer? Qual ia ser a fórmula que elas [se referindo à Tatiana e Luisa] iam escolher? (Professora)
>
> A terceira. (Aluno 3)
>
> A terceira. Mas quando elas fizeram esta aqui, [apontando para o teste $C = (7,5)^2 = 56,25$] elas refutaram a hipótese delas. Não pode ser isso. Então elas concluíram que esta hipótese era falsa. (Professora)[53]

[52] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.
[53] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.

Nessa situação, a professora chamou a atenção dos estudantes para não aceitar uma afirmativa como verdadeira com apenas um teste realizado e que deu certo. Para isso, ela mostrou o exemplo de Tatiana e Luisa em que, para um caso, a fórmula $C = d^2$ produziu um valor mais próximo do valor do comprimento medido. Ela enfatizou a importância de testar com outros valores e, sobretudo, de registrar todos esses passos no relatório. Esse momento pode ter esclarecido e contribuído para a organização das ideias dos alunos e como eles deveriam se comportar em uma atividade investigativa.

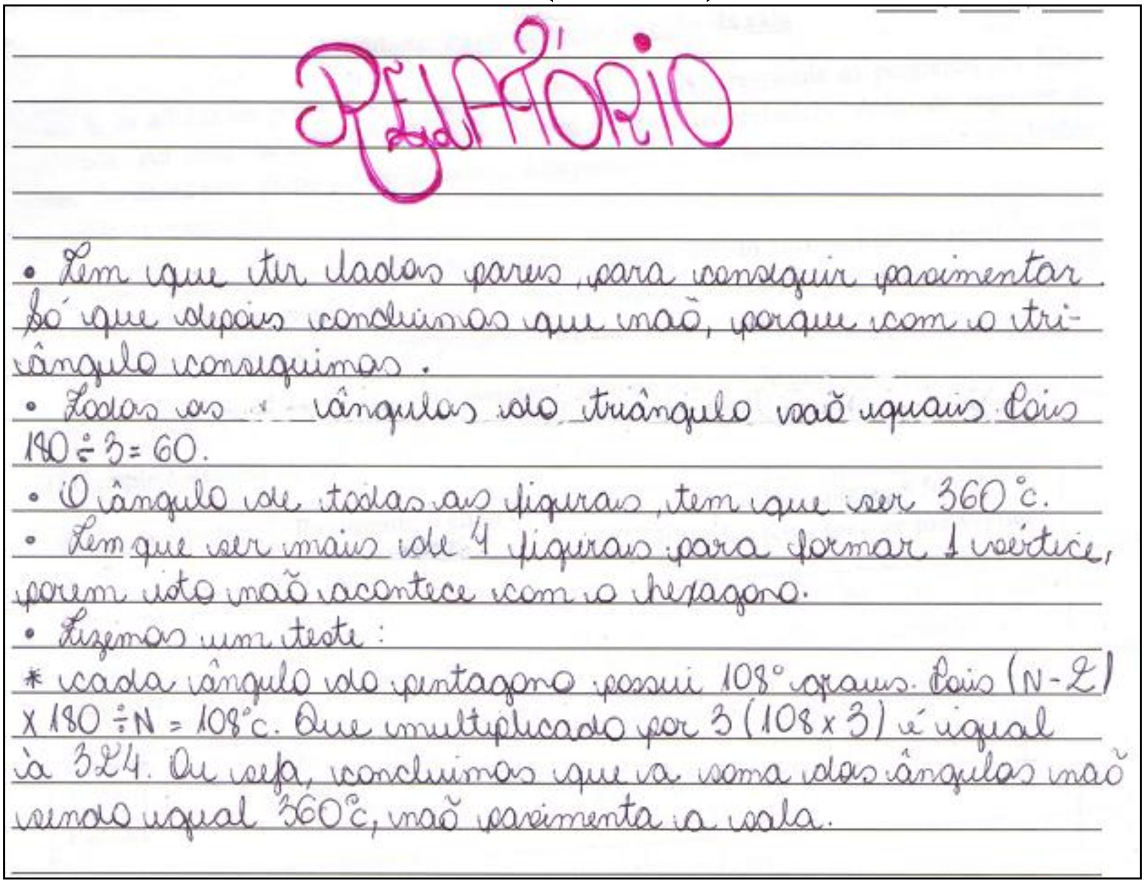
Somada a essa última intervenção, na primeira aula da realização da segunda atividade, sobre pavimentação do chão da sala, a professora Maria, durante a introdução da tarefa, cobrou dos alunos a apresentação de justificativas.

> A gente discutiu na outra aula o que é hipótese, o que é teste... então, tem que ter tudo isso no relatório. Quando for responder se o polígono pavimenta, não é só escrever sim ou não. Tem que falar que sim ou que não e tentar mostrar o porquê. (Professora)[54]

Durante as aulas de exploração dessa atividade, tanto eu quanto a professora Maria incentivamos os alunos a apresentarem justificativas para suas hipóteses. Assim, além de incluir hipóteses e testes nos relatórios, os alunos também incluíram justificativas. Essa mudança pode ser visualizada no exemplo apresentado a seguir.

[54] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 5.

Figura 43 - Trecho extraído do relatório do grupo formado por Isadora, Sofia, Cecília e Daniela (Turma 903)


RELATÓRIO

• Tem que ter lados pares, para conseguir pavimentar. Só que depois concluímos que não, porque com o tri-
ângulo conseguimos.

• Todos os ângulos do triângulo são iguais. Pois
180 ÷ 3 = 60.

• O ângulo de todas as figuras, tem que ser 360°c.

• Tem que ser mais de 4 figuras para formar 1 vértice,
porem isto não acontece com o hexagono.

• Fizemos um teste:

* cada ângulo do pentagono possui 108° graus. Pois (N-2)
x 180 ÷ N = 108°c. Que multiplicado por 3 (108 x 3) é igual
à 324. Ou seja, concluímos que a soma dos ângulos não
sendo igual 360°c, não pavimenta a sala.

Fonte: Dados da pesquisa

Para facilitar a compreensão do trecho do relatório exibido acima, apresento, a seguir, sua transcrição.

Figura 44 - Transcrição do trecho extraído do relatório do grupo formado por Isadora, Sofia, Cecília e Daniela (Turma 903)

Relatório

- Tem que ter lados pares para conseguir pavimentar. Só que depois concluímos que não, porque com o triângulo conseguimos.

- Todos os ângulos do triângulo são iguais. Pois 180 ÷ 3 = 60.

- O ângulo de todas as figuras, tem que ser [360º].

- Tem que ser mais de 4 figuras para formar 1 vértice, porém isto não acontece com o hexágono.

- Fizemos um teste:

* cada ângulo do pentágono possui 108º graus. Pois (n - 2) x 180 ÷ n = [108º]. Que multiplicado por 3 (108 x 3) é igual à 324. Ou seja, concluímos que a soma dos ângulos não sendo igual a [360º], não pavimenta a sala.

Fonte: Dados da pesquisa

No relatório acima, podemos notar que a dinâmica da escrita do grupo é marcada por levantamento de hipóteses, seguida pela realização de testes e apresentação de justificativas. A primeira hipótese levantada foi: “tem que ter lados pares para conseguir pavimentar”. Ela é seguida pelo resultado do teste realizado e da conclusão (que foi justificada) de que não é necessário que o polígono tenha número par de lados para pavimentar o chão: “só que depois concluímos que não, porque com o triângulo conseguimos”.

O procedimento usado pelas alunas para refutar a hipótese é válido na matemática. As alunas apontaram um caso em que a hipótese é falsa, o triângulo, que corresponde ao uso do contraexemplo.

Pelo modelo de Toulmin (2006), é possível identificar o argumento apresentado pelas alunas. A conclusão, C, obtida por elas foi: o polígono não tem que ter número total de lados par para que ele pavimente o chão, o dado, D, exposto foi: o triângulo pavimenta. Nesse argumento há uma garantia, W, implícita: o triângulo possui total de lados ímpar.

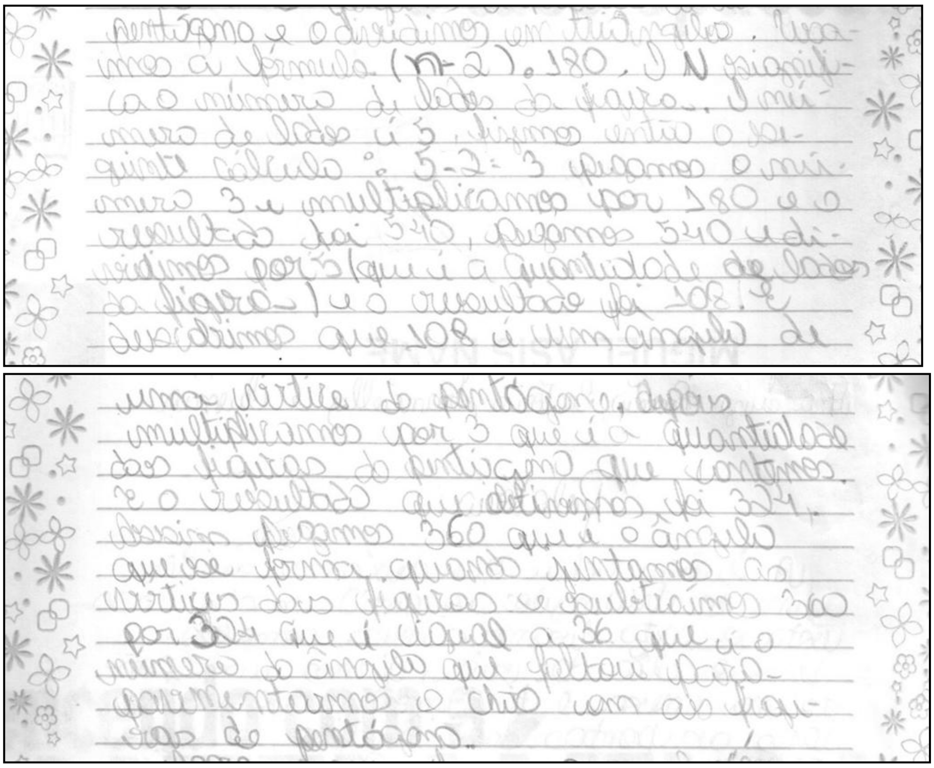
Ainda nesse fragmento do relatório, é possível identificar outras duas hipóteses: “o ângulo de todas as figuras tem que ser [360º].” e “Tem que ser mais de 4 figuras para formar 1 vértice”. Para a primeira hipótese, o grupo apresentou o caso do pentágono que não pavimenta e os ângulos não formam o ângulo de 360º para justificar a veracidade da hipótese.

Usando o modelo de Toulmin (2006), a conclusão, C, apresentada por ela foi: a soma dos ângulos deve ser igual a 360º, o dado, D, foi: os ângulos do pentágono não formam 360º e ele não pavimenta. Porém, esse argumento, do ponto de vista da matemática formal, não é válido, pois não se pode verificar a veracidade de uma afirmativa por meio de exemplos. Sendo assim, o dado exposto por elas não poderia ser utilizado para fundamentar a conclusão.

Para a segunda hipótese, o grupo apresentou uma justificativa para a sua refutação: “porém isto não acontece com o hexágono”. Nesse caso, de acordo com o modelo de Toulmin (2006), a conclusão, C, de que são necessárias mais de 4 figuras para formar um vértice, foi corretamente refutada, do ponto de vista da matemática, por meio do dado, D: isso não acontece com o hexágono, uma vez que três hexágonos são suficientes para formar um vértice. Mais uma vez o grupo se apoiou no uso do contraexemplo.

O grupo formado por Eduarda, Luciana, Rafaela e Aliani, da turma 903, usou conceitos da matemática para construir a justificativa para a não pavimentação do pentágono. Essa justificativa foi registrada no relatório, que pode ser visto a seguir:

Figura 45 - Justificativa para a não pavimentação do pentágono


pentágono e o dividimos em triângulos. Usamos a fórmula (n-2).180. O N significa o número de lados da figura. O número de lados é 5, fizemos então o seguinte cálculo: 5-2=3 pegamos o número 3 e multiplicamos por 180 e o resultado foi 540, pegamos 540 e dividimos por 5 (que é a quantidade de lados da figura) e o resultado foi 108. E descobrimos que 108 é um ângulo de

um vértice do pentágono, depois multiplicamos por 3 que é a quantidade das figuras do pentágono que contamos. E o resultado que obtivemos foi 324. Assim pegamos 360 que é o ângulo que se forma quando juntamos os vértices das figuras e subtraímos 360 por 324 que é igual a 36 que é o número do ângulo que faltou para pavimentarmos o chão com as figuras do pentágono.

Fonte: Dados da pesquisa

Para facilitar a compreensão, apresento, a seguir, a transcrição desse trecho.

Figura 46 - Transcrição da justificativa para a não pavimentação do pentágono

Usamos a fórmula (n - 2).180. O n significa número de lados da figura. O número de lados é 5, fizemos então o seguinte cálculo: 5 – 2 = 3 pegamos o número 3 e multiplicamos por 180 e o resultado foi 540, pegamos 540 e dividimos por 5 (que é a quantidade de lados da figura) e o resultado foi 108. E descobrimos que 108 é um ângulo de [um] vértice do pentágono, depois multiplicamos por 3 que é a quantidade das figuras do pentágono que contamos [nesta parte o grupo se refere à quantidade de pentágonos usados na observação deles]. E o resultado que obtivemos foi 324. Assim pegamos 360 que é o ângulo que se forma quando juntamos os vértices das figuras e subtraímos 360 por 324 que é igual a 36 que é o número do ângulo que faltou para pavimentarmos o chão com as figuras de pentágonos.

Fonte: Dados da pesquisa

Nessa situação, as alunas apresentaram uma justificativa para o fato de que o pentágono não pavimenta o chão e usaram a fórmula para calcular a soma dos ângulos internos de um polígono regular na construção desta justificativa. Analisando esse trecho do relatório pelo modelo de Toulmin (2006), a conclusão, C, obtida pelo grupo foi: o pentágono não pavimenta o chão, o dado, D, apresentado foi: faltou 36º para que ocorresse a pavimentação, a garantia, W, oferecida pelo grupo foi o cálculo realizado por meio da fórmula e o apoio, B: é necessário formar um ângulo de 360º para pavimentar.

Em termos de argumentação matemática, o grupo justificou o fato de que o pentágono não pavimenta por meio da fórmula para calcular o ângulo interno de um polígono regular. A fórmula é uma generalização e é considerada um conhecimento formal na matemática. As alunas deduziram, por meio da fórmula, que o pentágono não pavimenta o chão, que é um caso particular. Assim, elas apresentaram uma demonstração, de acordo com a definição proposta por Balacheff (1982 apud Almouloud, 2007).

Depois das intervenções realizadas, objetivando a inserção de hipóteses, testes e justificativas, foi notável a evolução da argumentação dos estudantes, sobretudo da escrita que pôde ser observada nos relatórios. Essa nova estrutura do relatório contribuiu para que os alunos organizassem suas ideias e, a partir do registro de hipóteses, seguido da realização de testes e apresentação de justificativas, eles conseguiram obter conclusões e refutar hipóteses.

Isso também pôde ser notado nos momentos das discussões com as turmas, durante o desenvolvimento da atividade de investigação. Os alunos passaram a identificar hipóteses, inclusive as dos colegas, apresentar testes e justificativas. Portanto, as intervenções realizadas contribuíram para o desenvolvimento da argumentação dos estudantes. Eles pareciam estar mais motivados a apresentar justificativas às suas ideias e verificar a veracidade delas.

Entretanto, pode-se perceber a dificuldade dos alunos em justificar uma conjectura verdadeira e uma facilidade em refutar uma conjectura falsa. Isso pode ser consequência da tendência dos alunos em justificar as hipóteses levantadas por meio de exemplos (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009). Além disso, essa dificuldade pode ser proporcionada pela falta de compreensão dos alunos sobre o processo da justificação na matemática.

Como eles não estavam acostumados a apresentar justificativas para suas ideias, era natural verificar a veracidade de uma hipótese por meio de um exemplo, que era um recurso conhecido por eles. Tanto eu quanto a professora não havíamos realizado nenhuma intervenção sobre como mostrar que uma afirmativa é verdadeira, por meio de recursos considerados válidos do ponto de vista da matemática formal.

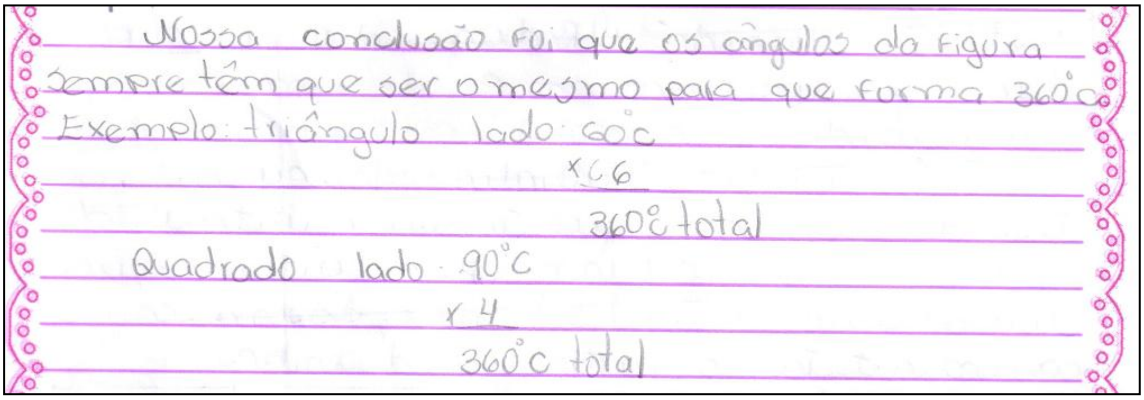
Visando desenvolver o uso correto dos exemplos na construção de um argumento, na próxima seção destaco outras intervenções realizadas que tiveram como foco o uso do contraexemplo.

7.2.2 O uso correto do exemplo para a refutação de hipóteses: o contraexemplo

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), a realização de testes de conjecturas é geralmente aceito e facilmente interiorizado pelos estudantes. Porém, há uma inclinação para a aceitação delas após a verificação de poucos casos que deram certo. Isso pode ser exemplificado na situação a seguir.

O grupo formado por Fernando, Eduardo, Elen e Agnes, da turma 901, ao responder a questão sobre o que era necessário para que um polígono pavimentasse o chão da sala, apresentou uma hipótese que foi considerada uma conclusão após a realização de dois exemplos que deram certo, como pode ser visto a seguir.

Figura 47 - Trecho extraído do relatório produzido pelo grupo formado por Fernando, Eduardo, Elen e Agnes (Turma 901)


Nossa conclusão foi que os ângulos da figura sempre têm que ser o mesmo para que forma 360°c

Exemplo: triângulo lado: 60°c

x6

360°c total

Quadrado lado: 90°C

x 4

360°c total

Fonte: Dados da pesquisa

Segue abaixo a transcrição.

Figura 48 - Transcrição do trecho extraído do relatório produzido pelo grupo formado por Fernando, Eduardo, Elen e Agnes (Turma 901)

Nossa conclusão foi que os ângulos da figura sempre têm que ser o mesmo para que [formem] [360º]. Exemplo triângulo lado [60º]

x 6 [360º] total Quadrado lado [90º] x 4 [360º] total

Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos consideraram apenas o caso do triângulo e o do quadrado para caracterizar a hipótese levantada como conclusão. Nessa atividade, foram considerados apenas os polígonos regulares e, assim, todos os ângulos “eram os mesmos”. Contudo, nem todos somavam 360º. Dessa forma, os alunos, se apoiando em poucos exemplos que deram certo, assumiram, equivocadamente, que a hipótese era verdadeira. É importante que os alunos tenham consciência de que os exemplos apresentados não podem ser considerados como uma justificativa para a aceitação da conclusão.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), o professor pode combater situações como essa através do apoio que ele oferece aos grupos do momento da realização da atividade ou na fase da *discussão*, incentivando os estudantes a procurarem contraexemplos. É necessário que os alunos compreendam que a resistência de uma determinada hipótese à realização de testes confere a ela confiabilidade e credibilidade, mas ainda não pode ser considerada verdadeira.

Assim, visando maior confiabilidade à hipótese elaborada, os alunos podem ser incentivados a buscar um caso em que ela não se verifica. Se esse caso for encontrado, a hipótese deve ser refutada. Caso não seja encontrada, há fortes razões para que ela seja considerada verdadeira, mas é importante que o aluno compreenda que ainda é necessário prová-la para que seja considerada uma conclusão.

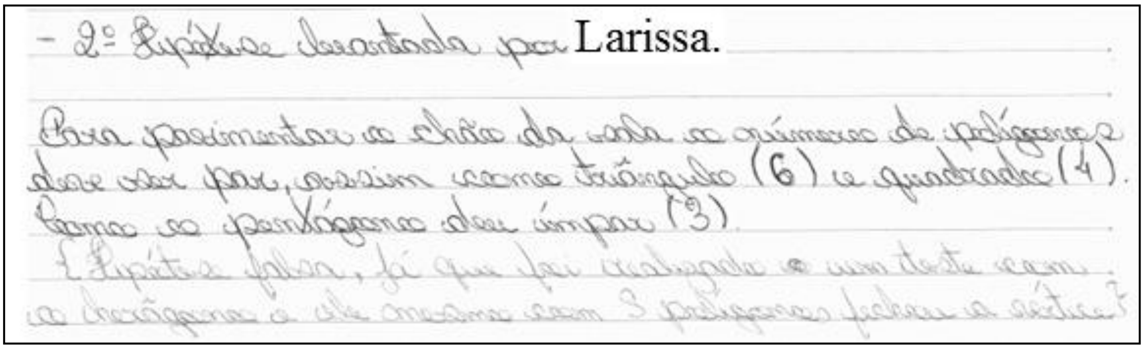
Alguns estudantes já refutavam hipóteses por meio de exemplos que não deram certo. Exemplo disso foi o grupo formado por Larissa, Alessandra, Tiago e Paula, da turma 901. Ao verificar a pavimentação do chão pelo triângulo e pelo quadrado e a não pavimentação do chão pelo pentágono com as figuras que receberam, Larissa levantou uma hipótese que foi refutada com o caso do hexágono.

Figura 49 - Verificação da pavimentação de polígonos

Fonte: Dados da pesquisa

Esta hipótese foi registrada no relatório, como pode ser visto a seguir.

Figura 50 - Hipótese refutada pelo grupo por meio de um contraexemplo



- 2º Hipótese levantada por Larissa.

Para pavimentar o chão da sala o número de polígonos deve ser par, assim como triângulo (6) e quadrado (4). Como o pentágono deu ímpar (3).

{Hipótese falsa, já que foi realizado um teste com o hexágono e ele mesmo com 3 polígonos fechou o vértice.}

Fonte: Dados da pesquisa

Segue, abaixo, a sua transcrição.

Figura 51 - Transcrição da hipótese refutada pelo grupo por meio de um contraexemplo

-2ª Hipótese levantada por Larissa.

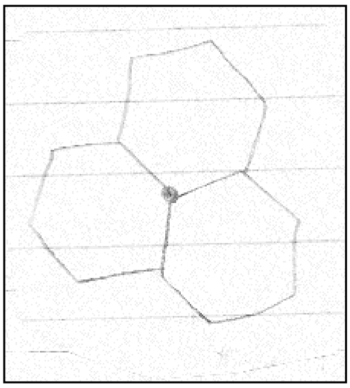
Para pavimentar o chão da sala o número de polígonos deve ser par, assim como triângulo (6) e quadrado (4). Como o pentágono deu ímpar (3).

{Hipótese falsa, já que foi realizado um teste com o hexágono e ele mesmo com 3 polígonos fechou o vértice.}

Fonte: Dados da pesquisa

O grupo usou o caso do hexágono para refutar a hipótese levantada por Larissa. As figuras em papel ajudaram na verificação da pavimentação e, no caso do hexágono, que não havia figura, os integrantes apresentaram um desenho para apoiar a pavimentação desse polígono. Esse desenho pode ser visualizado a seguir:

Figura 52 - Desenho do hexágono feito pelo grupo formado por Larissa, Alessandra, Tiago e Paula (Turma 901)



Fonte: Dados da pesquisa

Analisando essa situação pelo modelo de Toulmin (2006), é possível identificar o argumento utilizado pelo grupo. A conclusão, C, apresentada foi: não é necessário ter um número par de polígonos para pavimentar, o dado, D, foi: três hexágonos formam um vértice. Em termos de argumentação matemática, o argumento é válido, uma vez que os alunos apresentaram um contraexemplo para refutar a hipótese.

Como alguns alunos já refutavam hipóteses por meio de exemplos, faltava formalizar esse uso do contraexemplo, fazendo-os compreender que a utilização de exemplos na argumentação só é correta na refutação de hipóteses. Assim, o objetivo da intervenção seguinte era formalizar o uso do contraexemplo e mostrar o uso correto do exemplo na argumentação matemática.

Dessa forma, pedi à professora Maria para definir contraexemplo para os alunos e orientá-los sobre a forma de sua utilização. Essa intervenção ocorreu na aula de *discussão* com a turma sobre a segunda atividade sobre pavimentação do chão da sala.

Visando aumentar a participação dos estudantes e incentivar a argumentação oral, pedi para que a professora Maria convidasse os alunos para irem ao quadro falar sobre suas hipóteses, tentar justificá-las e convencer a turma de que eram verdadeiras. Assim, quando um aluno fosse relatar suas ideias, ele poderia ser visto pela turma e comunicar diretamente com ela, favorecendo a participação de todos.

Para ajudar nessa parte, anotei as hipóteses que julguei interessantes em uma folha e entreguei para a professora Maria, para que ela pudesse iniciar a discussão com as hipóteses e não seguindo as questões do roteiro. Desse modo, evitaríamos o formato de correção de exercícios. As hipóteses escolhidas para as três turmas eram todas falsas, para auxiliar na formalização do uso do contraexemplo, e foram elaboradas por alunos da turma 901, o que pode ter gerado uma maior participação desses estudantes na aula. Mas, de qualquer forma, nessa segunda discussão houve maior envolvimento dos alunos do que na primeira, como será visto a seguir.

Antes de iniciar a discussão com a turma, a professora Maria registrou no quadro as quatro hipóteses selecionadas:

Figura 53 - Registro das quatro hipóteses selecionadas

1 - O polígono deve ter número par de lados para pavimentar o chão.
2 - O ângulo do polígono deve terminar em 0 ou 5 para que ele possa pavimentar.
3 - Só é possível pavimentar o chão com polígonos de até quatro lados.
4 - Para pavimentar o chão é necessário que os ângulos sejam menores ou iguais a 90º.

Fonte: Dados da pesquisa

Em seguida, a professora propôs à turma fazer uma avaliação das hipóteses apresentadas acima. A segunda hipótese foi formulada por Eduardo que, como será observado, tentou defendê-la durante toda a discussão.

> A gente [se referindo a ela e à pesquisadora.] anotou algumas hipóteses que apareceram. Eu quero que vocês venham aqui na frente e tentem falar para mim se essas hipóteses que foram faladas são verdadeiras ou são falsas e por que. Como que a gente justifica. (Professora)
>
> A primeira é falsa, porque o triângulo pavimenta e tem 3 lados. (Agnes)
>
> Ah! Então a Agnes está falando que a primeira é falsa. E aí, o que vocês acham? (Professora)
>
> A segunda é verdadeira. (Eduardo)
>
> Vamos ver aqui. A primeira é falsa. Vocês concordam com ela, [se referindo à Agnes] discordam? (Professora)
>
> Concordo, porque o triângulo tem lado ímpar [se referindo ao número de lados] e pavimenta. (Aluna 1)
>
> Então, ela diz que é falso e o que ela falou se chama contraexemplo. Um exemplo contra essa afirmativa aqui. Qual que é o contraexemplo que ela falou? O triângulo

tem número ímpar de lados e pavimenta o chão. Então, contraexemplo é o triângulo. [Ela registrou isso no quadro.] (Professora)[55]

Usando o modelo de Toulmin (2006) para analisar esta interação, é possível identificar um argumento. A conclusão, C, obtida por Agnes e pela aluna 1, foi: o polígono não precisa ter número par de lados para pavimentar, o dado, D, utilizado foi: o triângulo tem número ímpar de lados e pavimenta. Em termos de argumentação matemática, a aluna refutou a hipótese por meio de um contraexemplo, o que é um procedimento válido na matemática.

Depois disso, Eduardo, que havia se mostrado convicto de sua ideia de que “o ângulo do polígono deve terminar em 0 ou 5 para que ele possa pavimentar”, tentou convencer a turma de que ele estava certo por meio de desenhos que ele fez no quadro[56]. Mas ele desenhou apenas três polígonos e continuou afirmando que sua hipótese estava correta.

Nesse caso, Eduardo não apresentou razões para fundamentar sua conclusão, uma vez que o uso de três exemplos não era suficiente para garantir que a afirmação era correta. Por esse motivo, do ponto de vista da matemática formal, não houve argumentação. Além do mais, Eduardo não convenceu seus colegas por meio dos desenhos realizados por ele no quadro. Caso contrário, teria havido argumentação e os desenhos realizados seriam considerados como uma prova, de acordo com a definição proposta por Balacheff (1982 apud Almouloud, 2007).

A professora fez então algumas interferências para ajudar Eduardo e conduzir a turma para avaliar a veracidade da conclusão apresentada. Ela orientou a turma a testar a hipótese para outros polígonos, calculando o valor do ângulo interno por meio da fórmula. Depois de testar os casos do triângulo, quadrado, pentágono e hexágono, Liliane apresentou outra hipótese.

> A gente fez uma hipótese, somando os ângulos de fora. (Liliane)
>
> Ah, peraí. Somando os ângulos de fora. E aí? (Professora)
>
> Dá 360. (Liliane)
>
> Ah! Então está aparecendo mais coisa aqui. (Professora)
>
> A gente também fez isso e que a hipótese do Eduardo estava errada. (Fernando)
>
> Ah, eles chegaram que a hipótese do Eduardo estava errada. Então mostra isso. Vem Fernando, você está no caminho certo. (Professora)

[55] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 7.
[56] Os desenhos realizados pelos alunos não serão exibidos devido a um problema técnico na filmadora posicionada de frente para o quadro, no dia em que ocorreu este episódio.

> Os ângulos de fora tem que dar 360. [Inicialmente, ele não quis ir ao quadro, mas aceitou o convite da professora.] (Fernando)[57]

Fernando fez desenhos no quadro para mostrar que a soma dos ângulos em torno de um vértice do polígono deve ser 360º para pavimentar o chão da sala. Ele foi acrescentando polígonos em torno de um vértice e colocando o valor do ângulo interno na figura.

> Aqui pavimentou [Se referindo ao triângulo.] e esse círculo aqui deu 360. (Fernando)
>
> Deu 360. (Fernando)
>
> Que círculo legal! (Liliane)
>
> E aqui também deu 360. [Se referindo ao quadrado.] Já o pentágono não fechou. Ficou faltando 36º para dar 360. (Fernando)
>
> Professora, então para pavimentar tem que formar um ângulo de 360. E os que não formarem não pavimentam. (Roberta)
>
> E aí, vocês concordam? (Professora)
>
> Sim! (Turma)
>
> A segunda hipótese é verdadeira ou falsa? (Professora)
>
> Falsa. (Turma)
>
> Verdadeira! (Eduardo)[58]

Fernando usou o formato do círculo para justificar que a soma dos ângulos do polígono deve ser igual a 360º para pavimentar o chão sem deixar falhas nem fazer sobreposição das figuras. Ele estava se referindo a uma volta completa em torno de um vértice. A turma concordou com Fernando e aceitou sua conclusão. Ainda que ele não tenha apresentado razões fundamentadas em conceitos formais da matemática, ele convenceu a turma de que a hipótese era verdadeira. De acordo com Balacheff (1982 apud Almouloud, 2007), ele apresentou uma prova para a turma, apoiada em um recurso não discursivo.

Como Eduardo continuou a dizer que sua hipótese era verdadeira, a professora propôs o cálculo do valor do ângulo do octógono e a verificação se ele pavimenta o chão. Eduardo calculou o ângulo e disse que era 135º. Roberta expôs seu ponto de vista.

> Eu multipliquei 135 por 2... (Roberta)

[57] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 7.
[58] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 7.

Olha o argumento da Roberta. Vem cá, Roberta, faz pra gente aqui. [Convidando Roberta para ir ao quadro.] (Professora)

Deu 270. Aí, eu multipliquei por 3. (Roberta)

Então, vocês estão entendendo? Eu vou fazer aqui o que ela está falando. Você pegou 135 e multiplicou por 3, aí deu... (Professora)

Deu 405. (Roberta)

E aí? (Professora)

Para pavimentar tem quer dar 360. Aí não deu. Com dois ângulos deu menos. Com três, deu mais. (Roberta)

E o que vocês concluíram? Essa hipótese é verdadeira ou falsa? (Professora)

Falsa. (Turma)

E aí Eduardo. Ela te convenceu? (Professora)

Não. (Eduardo)

Ela não te convenceu? (Professora)

Não. [Roberta voltou a explicar seu ponto de vista para ele.] (Eduardo)

Eu multipliquei 135 por 2... (Roberta)

Por quê? (Eduardo)

Porque juntando todos os ângulos não tem que dar 360? (Roberta)

Sim. (Eduardo)

Eu multipliquei 135 por 2 e deu menos. Deu 270. Deu menos que 360. E 135 vezes 3, deu mais. (Roberta)

O que podemos concluir sobre essa hipótese? (Professora)

Ah, é falsa. (Eduardo)

É falsa. (Turma)

Gente, com isso nós chegamos em um contraexemplo. Essa hipótese é falsa, porque o octógono terminou em 5 e ele não pavimenta. Tem mais um contraexemplo. Se a gente fizer com o 9, dá 140º. (Professora)

Qual? (Aluna 1)

O eneágono. É uma figura de 9 lados. Deu 140 o valor do ângulo. E 140 não pavimenta. Gente, vamos ver agora outra hipótese. (Professora)[59]

Usando o modelo de Toulmin (2006) é possível identificar o argumento utilizado por Roberta nessa situação. A conclusão, C, apresentada por ela foi: o octógono não pavimenta o

[59] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 7.

chão e seu ângulo mede 135º (último algarismo igual a 5); o dado, D, foi: não é possível formar 360º com seus ângulos, a garantia, W, foi: o cálculo do valor de seu ângulo interno pela fórmula e o apoio, B, precisa formar 360º para pavimentar. Por meio deste argumento, a professora Maria especificou que esse era um contraexemplo para refutar a hipótese de Eduardo, além de citar, também, o caso do eneágono como outro contraexemplo.

É possível notar uma evolução na argumentação dos estudantes. Inicialmente, a segunda hipótese foi considerada falsa pela turma a partir dos desenhos feitos por Fernando. Porém, esse argumento não é considerado válido do ponto de vista da matemática formal. Em seguida, a turma refutou essa hipótese por meio do contraexemplo oferecido por Roberta, que, ao contrário do argumento anterior, é um argumento válido na matemática formal.

Depois disso, a professora Maria propôs a discussão da terceira hipótese: “Só é possível pavimentar o chão com polígonos de até quatro lados”. Guilherme rapidamente declarou que era falsa, dando um contraexemplo.

> É falsa. (Guilherme)
>
> Por que, Guilherme? (Professora)
>
> Porque o pentágono pavimenta e tem mais de quatro lados. (Guilherme)
>
> O pentágono pavimenta? (Professora)
>
> Não! O pentágono não! É o hexágono. (Guilherme)
>
> Isso. Então, é falso, porque o hexágono pavimenta e tem mais de quatro lados. (Professora)[60]

Nessa situação, também, é possível notar uma evolução na argumentação. Guilherme refutou a hipótese discutida e, ao ser solicitado pela professora, apresentou, rapidamente, uma justificativa matemática para isso. Ele apresentou o caso do hexágono como um contraexemplo para refutar a hipótese.

Em seguida, a professora questionou sobre a última hipótese: “Para pavimentar o chão é necessário que os ângulos sejam menores ou iguais a 90º”.

> E a última? (Professora)
>
> Falsa! (Eduardo)
>
> Falsa. (Alunos)

[60] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 7.

> O de 6 lados. O ângulo é maior que 90. (Eduardo)
> [E Fernando completa.]
>
> Falso. Porque o hexágono é 120 e pavimenta o chão. (Fernando)
>
> Certo. Isso mesmo. (Professora)
>
> Êeee! (Turma)
>
> Olha! Foi melhor que professor de matemática! [Os alunos aplaudiram.] (Fernando)[61]

Nesse trecho, os alunos se mostraram mais ativos na discussão. Eduardo e Fernando, mesmo não tendo sido solicitados, apresentaram um argumento para falsear a hipótese, um contraexemplo, que é o caso do hexágono. Ele possui ângulo interno igual a 120º e pavimenta o chão. Logo, para pavimentar, não é verdade que o valor do ângulo deve ser menor ou igual a 90º. Os alunos demonstraram satisfação em ter conseguido apresentar uma justificativa sem o auxílio da professora.

Antes de encerrar a discussão, a professora Maria enfatizou o uso correto dos exemplos na argumentação.

> Então vocês entenderam? Pra falar que é falso basta um exemplo, mas pra falar que é verdadeiro posso dar infinitos exemplos... que não vai... porque eu não sei o próximo se ele vai ser verdadeiro ou se ele vai ser falso. Então, eu não consigo provar que uma coisa é verdadeira só com exemplos. Ou com vários exemplos. Não é suficiente para poder falar que é verdadeiro. (Professora)[62]

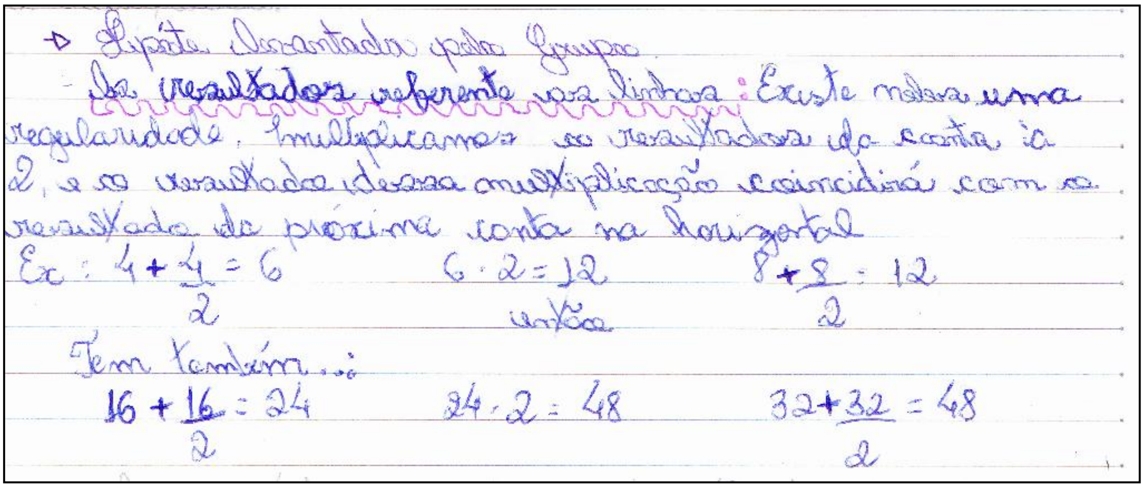
A professora reforçou a dinâmica da prova em matemática: para mostrar que é falso, é suficiente encontrar um exemplo que não deu certo, um contraexemplo, mas, para mostrar que é verdadeiro, não basta dar exemplos, já que, mesmo que se encontrem muitos exemplos favoráveis, não há garantia de que a afirmação seja verdadeira para todos os casos.

Nessa intervenção, pude notar uma evolução na argumentação dos estudantes. Durante a discussão apresentada nesta subseção, os alunos refutaram hipóteses e, a partir da solicitação de uma justificativa pela professora, apresentaram exemplos em que a hipótese era falsa. À medida que a discussão foi se desenvolvendo, eles passaram a apresentar contraexemplos na refutação de hipóteses sem a solicitação da professora. Sendo assim, é possível notar que os alunos incorporaram o uso do contraexemplo na elaboração de argumentos, oferecendo razões para refutar uma hipótese.

[61] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 7.
[62] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 7.

Porém, os estudantes faziam o uso correto dos exemplos apenas na refutação de hipóteses. O hábito de mostrar que uma afirmativa é verdadeira com exemplos ainda não foi rompido, como pode ser visto no exemplo apresentado a seguir, da quarta atividade, sobre as potências de 2.

Figura 54 - Aceitação de uma hipótese por meio de exemplos


→ Hipóte levantada pelo Grupo.
Os resultados referente as linhas: Existe neles uma regularidade, multiplicamos os resultados da conta à 2, e o resultado dessa multiplicação coincidirá com o resultado da próxima conta na horizontal
Ex: $4 + \frac{4}{2} = 6$ $6 \cdot 2 = 12$ $8 + \frac{8}{2} = 12$
então
Tem também..:
$16 + \frac{16}{2} = 24$ $24 \cdot 2 = 48$ $32 + \frac{32}{2} = 48$

Fonte: Dados da pesquisa

Para facilitar a sua compreensão, apresento, a seguir, a sua transcrição.

Figura 55 - Transcrição da aceitação de uma hipótese por meio de exemplos

→ Hipótese levantada pelo Grupo.

Os resultados referente as linhas: Existe neles uma regularidade. Multiplicamos os resultados da conta à 2, e o resultado dessa multiplicação coincidirá com o resultado da próxima conta na horizontal.

Ex: $4 + \frac{4}{2} = 6$ 6 . 2 = 12 $8 + \frac{8}{2} = 12$

então

Tem também..:

$16 + \frac{16}{2} = 24$ 24 . 2 = 48 $32 + \frac{32}{2} = 48$

Fonte: Dados da pesquisa

No exemplo acima, o grupo formado por Larissa, Alessandra, Tiago e Paula, da turma 901, apresentou uma hipótese sobre uma regularidade presente nas linhas da tabela sobre as potências de 2. Porém, os alunos a justificaram a partir de exemplos, o que não é válido do ponto de vista da matemática. Nesse caso, eles deveriam ter mostrado de forma algébrica que esta regularidade observada acontece em todas as linhas da tabela, reescrevendo os números na forma de potência.

Ainda que a professora tenha enfatizado o uso correto do exemplo na argumentação, dizendo que não se pode concluir que uma afirmativa é correta por meio de exemplos, tanto eu quanto ela não havíamos feito uma intervenção com o objetivo de elaborar justificativas válidas, do ponto de vista da matemática. Nesse momento mostramos apenas como justificar a refutação de uma hipótese falsa.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), esse trabalho com justificação deve ser feito gradualmente e de forma continuada. À medida que os estudantes vão desenvolvendo suas habilidades na justificação e suas ferramentas matemáticas vão se tornando mais sofisticadas, a realização de provas matemáticas se torna mais fácil (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009).

Nesta pesquisa foram realizadas apenas quatro atividades, porém, ao longo delas, os alunos demonstraram uma grande evolução em sua argumentação, apresentando hipóteses, testes, contraexemplos, provas... Na seção seguinte, apresento mais uma evolução na argumentação deles: a generalização.

7.2.3 Fazendo generalizações

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), “a justificação ou prova de conjecturas é uma vertente do trabalho investigativo que tende, com alguma frequência, a ser relegada para segundo plano ou até mesmo a ser esquecida, em especial nos níveis de escolaridade mais elementares.” (p. 37). Entretanto, é importante que o professor envolva os estudantes na produção de provas. De acordo com Boavida (2005), elas são importantes para os alunos aprenderem a lidar com a generalização, ou seja, garantir a validade de uma conjectura para todos os casos e compreender as razões desta validação.

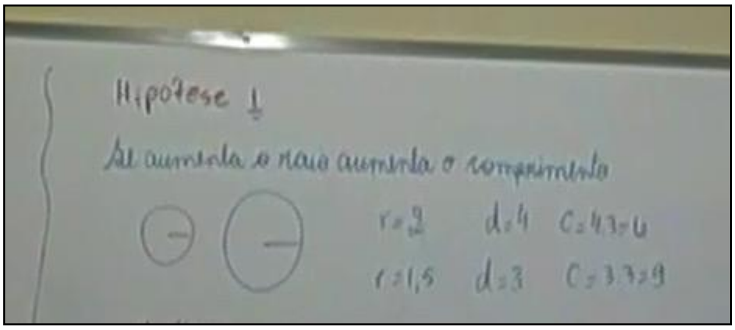
Dessa forma, na aula de *discussão* da primeira atividade, sobre cálculo do comprimento de uma circunferência, a professora Maria abordou o caso da generalização, apresentando uma maneira de como os alunos poderiam fazer isso ao longo das atividades de investigação. Essa situação ocorreu na segunda parte da atividade, na qual a proposta era descobrir uma relação entre o valor do comprimento e do raio, quando seus valores são modificados.

> Qual foi a primeira hipótese que vocês levantaram? (Professora)
>
> Se aumentar o raio, o comprimento aumenta. (Eduardo)
>
> Se aumentar o raio, aumenta o comprimento. [Registrando no quadro.] Isso é uma hipótese. Que teste eu faço? (Professora)
>
> Desenho. Você pode desenhar uma circunferência maior que outra. (Aluno 1)
>
> Então alguns fizeram desenho. Desenho aqui, o raio, o comprimento... Aí desenho um maior. Alguns fizeram isso. [Ela desenhou no quadro duas circunferências de tamanhos diferentes.] Essa é uma forma geométrica. E como fazemos com números? (Professora)[63]

A professora Maria apoiou o trabalho dos estudantes. Ela considerou a estratégia proposta por eles de desenhar duas circunferências para comparar a variação do valor do raio. Nesse caso, como a hipótese foi aceita pela turma, o desenho, que é um recurso não discursivo, foi a prova apresentada, de acordo com a definição de prova proposta por Balacheff (1982 apud Almouloud, 2007).

Ainda assim, a professora Maria questionou a turma sobre como mostrar que a hipótese era verdadeira de outra forma. Então, Fernando apresentou dois exemplos, nos quais o cálculo do valor do comprimento foi feito por meio da fórmula C = 3d, que foram registrados no quadro pela professora Maria. Esse registro pode ser visualizado na Figura 56.

Figura 56 - Registro das ideias dos alunos feito pela professora Maria



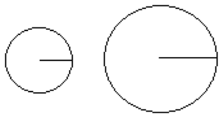
Fonte: Dados da pesquisa

A seguir, apresento a sua transcrição.

Figura 57 - Transcrição do registro das ideias dos alunos feito pela professora Maria

Hipótese 1 Se aumenta o raio, aumenta o comprimento.

[63] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.



r = 2 d = 4 C = 4 . 3 = 12

r = 1,5 d = 3 C = 3 . 3 = 9

Fonte: Dados da pesquisa

Por meio dos exemplos de Fernando, a turma compreendeu que se o raio aumenta, o comprimento aumenta e, se o raio diminui, o comprimento diminui. Em seguida, a professora Maria incentivou os alunos a quantificarem essa alteração que ocorre nos valores do raio e do comprimento.

> Só que será que a gente não consegue melhorar nossa hipótese? Porque aqui aumenta, mas aumenta de que tipo? (Professora)
>
> Se dobra o raio, dobra o comprimento. (Aluno 1)
>
> Então vamos escrever outra hipótese aqui. Por que aumenta quanto? Já tem uma sugestão, se dobrar o raio, o comprimento dobra. Então vamos escrever isso aqui. Se o raio dobra, o quê que acontece? [Registrando no quadro.] (Professora)
> Dobra o comprimento. (Aluna 1)
>
> O comprimento também dobra. Como eu mostro isso? (Professora)[64]

Nessa situação, os estudantes quantificaram a alteração que o valor do raio provoca no valor do comprimento: se o raio dobrar, o valor do comprimento dobra. Os alunos apresentaram alguns exemplos, como Fernando fez anteriormente, e observaram, também, que se o valor do raio triplicar, o valor do comprimento também triplica.

Em seguida, a professora Maria aproveitou a situação para falar sobre generalização.

> Vamos tentar generalizar isso. A gente escolheu um número. Ele escolheu o raio para ser 1,5. [Ela se referiu ao exemplo de Fernando, apresentado na Figura 56.] Podia ser um valor qualquer? (Professora)
>
> Pode. (Alunos)
>
> Podia, não podia? Então vamos generalizar. Como que eu represento o raio com um valor qualquer? (Professora)
>
> Raio igual a x. (Aluna 2)

[64] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.

> Raio igual a x. Vamos pensar na mesma ideia. Se eu dobro o raio? Se o raio é x, o diâmetro é 2x. E o comprimento vai ser 3 vezes 2x, que é igual a 6x. Aí vamos dobrar o raio. 2x. O que acontece com o diâmetro? (Professora)
>
> 4x. (Alunos)
>
> O comprimento é 3 vezes 4x, 12x. E se triplicar o raio? (Professora)
>
> R é igual a 3x, d é igual a 6x. (Fernando)
>
> E o comprimento? (Professora)
>
> 3 vezes 6x, 18x. (Fernando)
>
> E se quadruplicar? O que vai acontecer? (Professora)
>
> Aí o comprimento vai quadruplicar. (Fernando)[65]

Nessa situação, a professora Maria mostrou para a turma como generalizar a hipótese. E, após a generalização, a professora falou sobre o conceito matemático que estava envolvido nessa questão da relação entre o valor do raio e valor do comprimento.

> Gente, o quê que acontece aqui? Se eu tenho duas grandezas, eu tenho o raio e o comprimento. Se o raio dobra, o comprimento dobra. Se o raio triplica, o comprimento triplica. Se o raio quadruplica, o comprimento quadruplica. O que eu posso falar sobre essas duas grandezas? (Professora)
>
> Que o comprimento está acompanhando o raio. Eles são proporcionais. (Fernando)
>
> Mas que proporcionalidade? (Professora)
>
> Direta. (Aluna 1)
>
> Elas são diretamente proporcionais. Esta era a última hipótese que a gente poderia chegar, que o raio é diretamente proporcional ao comprimento. Ou o contrário. O comprimento é diretamente proporcional ao raio. Aqui eu já demonstrei isso. [Apontando para o registro feito por ela no quadro] Porque eu generalizei. Vamos escrever a última hipótese então? (Professora)
>
> O comprimento é diretamente proporcional ao raio. [A professora registra no quadro.] (Alunos)[66]

Figura 58: Registro feito pela professora

r = x	d = 2x	C = 3 . 2x = 6x
r = 2x	d = 4x	C = 3 . 4x = 12x
r = 3x	d = 6x	C = 3 . 6x = 18x

Fonte: Dados da pesquisa

65 Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.
66 Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.

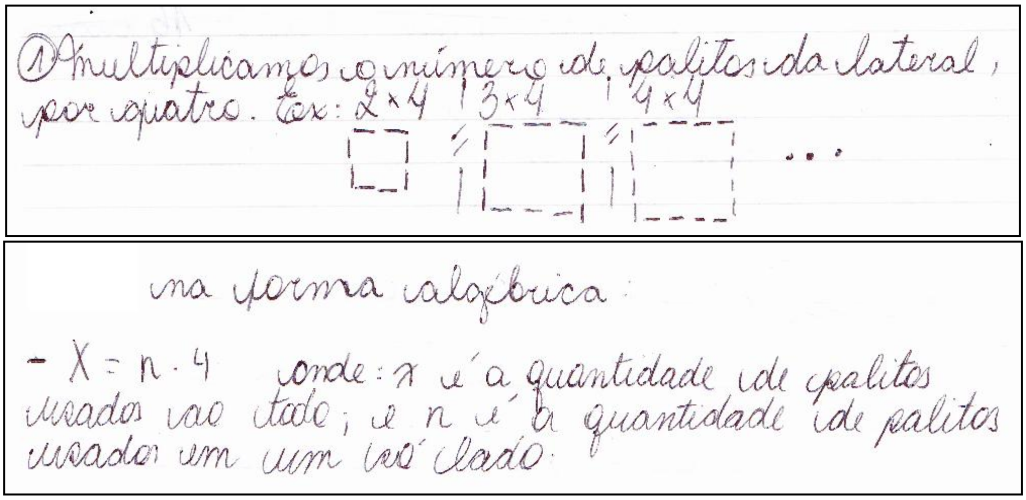
Nessa situação, os alunos concluíram que o valor do comprimento é diretamente proporcional ao valor do raio. Essa conclusão foi obtida por meio da generalização feita por eles com a orientação da professora Maria.

Esse foi o primeiro contato da turma com a generalização. Por meio dela, os estudantes não só validaram a conclusão para todos os casos, como também compreenderam as razões dessa validação, como indica Boavida (2005).

Alguns alunos conseguiram fazer generalizações na terceira atividade proposta, sobre sequências de quadrados. As alunas Marcella, Júlia, Clara e Mariana, da turma 902, apresentaram generalizações no relatório.

Na primeira sequência proposta no roteiro, as alunas verificaram um padrão por meio de desenhos e, em seguida, apresentaram a forma algébrica para calcular o número de palitos da figura. A forma algébrica obtida pelas alunas foi registrada no relatório, como pode ser visto a seguir.

Figura 59 - Generalização apresentada pelo grupo formado por Marcella, Júlia, Clara e Mariana (Turma 902)

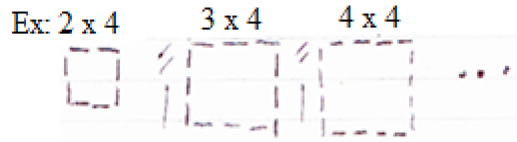


Fonte: Dados da pesquisa

A seguir, apresento sua transcrição.

Figura 60 – Transcrição da generalização apresentada pelo grupo formado por Marcella, Júlia, Clara e Mariana (Turma 902)

1) Multiplicamos o número de palitos da lateral, por quatro.



na forma algébrica:

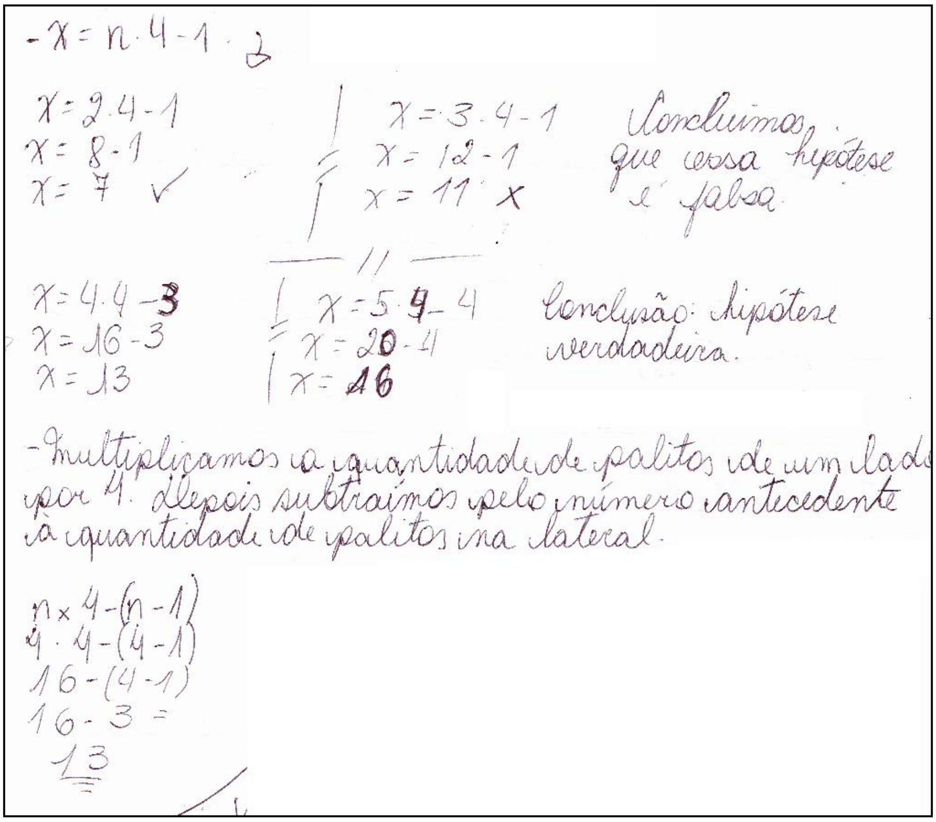
- X = n . 4 onde: x é a quantidade de palitos usados ao todo; e n é a quantidade de palitos usados em um só lado.

Fonte: Dados da pesquisa

Nessa situação, a partir do padrão da sequência, as alunas apresentaram uma fórmula que relaciona o número total de palitos na figura com o número de palitos usados em um lado do quadrado, que coincide com o número da figura da sequência. Assim, elas conseguiram generalizar a sequência, pois, a partir da fórmula, é possível obter o número de palitos para qualquer figura da sequência e vice-versa. Porém, as alunas não apresentaram uma justificativa matemática para validar a fórmula.

Na segunda sequência proposta no roteiro, as alunas também apresentaram uma fórmula. Ela foi registrada no relatório, como pode ser visto a seguir.

Figura 61 - Fórmula apresentada para a segunda sequência


- x = n . 4 - 1 . 2

x = 2 . 4 - 1
x = 8 - 1
x = 7 ✓

x = 3 . 4 - 1
x = 12 - 1
x = 11 X

Concluímos que essa hipótese é falsa.

x = 4 . 4 - 3
x = 16 - 3
x = 13

x = 5 . 4 - 4
x = 20 - 4
x = 16

Conclusão: hipótese verdadeira.

- multiplicamos a quantidade de palitos de um lado por 4. depois subtraímos pelo número antecedente à quantidade de palitos na lateral.

n x 4 - (n - 1)
4 . 4 - (4 - 1)
16 - (4 - 1)
16 - 3 =
13

Fonte: Dados da pesquisa

Segue, abaixo, a sua transcrição.

Figura 62 - Transcrição da fórmula apresentada para a segunda sequência

- x = n . 4 - 1

x = 2 . 4 – 1	x = 3 . 4 – 1	
x = 8 – 1	x = 12 – 1	
x = 7 ✓	x = 11 ✗	Concluímos que essa hipótese é falsa.
x = 4 . 4 – 3	x = 5 . 4 – 4	
x = 16 – 3	x = 20 – 4	
x = 13	x = 16	Conclusão: hipótese verdadeira.

- Multiplicamos a quantidade de palitos de um lado por 4. Depois subtraímos pelo número antecedente à quantidade de palitos na lateral.

n x 4 – (n – 1)

4 . 4 – (4 – 1)

16 – (4 – 1)

16 – 3 =

<u>13</u>

Fonte: Dados da pesquisa

Inicialmente, as alunas apresentaram uma hipótese “x = n . 4 – 1”, na qual x é o número total de palitos e n é o número da figura da sequência. Durante a realização de testes, a hipótese foi refutada a partir de um contraexemplo. Elas mostraram que a fórmula não funcionava para a terceira figura da sequência. Além de ser um recurso válido na matemática, pelo modelo de Toulmin (2006), é possível identificar o argumento das alunas. A conclusão, C, obtida por elas foi: a fórmula da sequência não é x = n . 4 – 1, o dado, D, apresentado foi: o resultado do número de palitos da terceira figura, obtido pela fórmula, que não corresponde ao valor correto.

Então, as alunas aprimoraram a hipótese e apresentaram a fórmula x = n . 4 – (n – 1). Porém, nesse caso, as alunas consideraram que ela era verdadeira a partir de três testes realizados que deram certo, o que não é válido no ponto de vista da matemática. Essa situação foi diferente da primeira, pois elas deduziram a fórmula da primeira sequência a partir da regularidade das figuras. Isso se apoia no fato de que elas escreveram no relatório que, na segunda figura, o número de palitos seria 2 x 4, na terceira, 3 x 4, na quarta, 4 x 4. E, em seguida, apresentaram a generalização n x 4. Na segunda sequência, as alunas não deduziram as fórmulas. Elas foram elaboradas e testadas pelo grupo, sendo aceitas através de um número reduzido de casos. Esse episódio confirma o hábito dos estudantes em mostrar que uma hipótese é verdadeira a partir de poucos casos que deram certo.

Outro exemplo em que ocorreu uma generalização foi na *discussão* realizada com a turma 903. No segundo item do roteiro sobre a segunda sequência, os alunos deveriam obter o número da figura que apresentava 151 palitos. Luciana expôs seu ponto de vista.

> A gente descobriu que toda figura tem um palito a mais. Então a gente pegou o 151 e tirou 1. Ficou 150. Depois dividimos por três, porque tem três linhas, duas horizontais e uma vertical. Então a figura deu 50. (Luciana)[67]

A professora registrou a ideia proposta por Luciana no quadro:

Figura 63 - Registro da ideia proposta por Luciana

Grupo da Luciana:

$$151 - 1 = 150$$

$$\frac{150}{3} = 50^{\text{o}}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Em seguida, a professora Maria incentivou os alunos a obter a quantidade de palitos da próxima figura da sequência.

> Vamos pensar aqui. O que eu faço para obter a figura seguinte nesta sequência? (Professora)
>
> Somar mais três. (Sofia)
>
> Então isso foi uma coisa que vocês exploraram. Para obter a figura seguinte tem que somar três palitos. (Professora)
>
> Ah, professora! Acho que já sei! Por exemplo, na figura 3, 3 vezes 3 é 9. Aí na figura 3 tem 10 palitos. Aí a gente tem que fazer 3 vezes o número da figura mais 1. (Luciana)
>
> Vamos escrever essa fórmula? Se eu chamar de x o número da posição, como fica? (Professora)

[67] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 10.

3 vezes x mais 1. (Luciana)[68]

A fórmula proposta por Luciana foi registrada pela professora Maria no quadro:

Figura 64 - Fórmula proposta por Luciana

No de palitos = x . 3 + 1 x → posição

Fonte: Dados da pesquisa

Luciana apresentou uma fórmula para a segunda sequência, que foi deduzida a partir de seu raciocínio apresentado, anteriormente, para a figura que contém 151 palitos. Ela usou as operações inversas desse caso para montar a fórmula. Esse raciocínio foi obtido pela observação sobre a quantidade de palitos em cada figura nas direções horizontal e vertical.

Com isso, ela concluiu que o número de palitos de uma figura era igual a três vezes a sua posição mais uma unidade. A aluna conseguiu generalizar a sequência, obtendo a fórmula por meio da dedução de seu padrão. Luciana ficou muito empolgada por ter conseguido apresentar a generalização da segunda sequência, pois ela não havia conseguido nas aulas de exploração.

Na aula seguinte, a professora deu continuidade à discussão com a turma sobre essa atividade. Luciana foi até o quadro e apresentou seu raciocínio para a terceira sequência.

> O que acontece, cada figura tem uma linha a mais. Por exemplo, na figura 3, a gente vai ter 4 linhas. Tanto na horizontal quanto na vertical a gente vai ter 4 linhas. Em cada linha vai ter o equivalente de palitos do número da figura. Por exemplo, se a gente pegasse a figura 10, ia ter 11 linhas tanto na vertical quanto na horizontal e 10 palitos em cada linha. (Luciana)
>
> Mostra o que vocês tá entendendo por linha. (Professora)
>
> Isso aqui é a linha. [Apontando para a figura da sequência que estava desenhada no quadro, como pode ser visto na Figura 65.] (Luciana)[69]

[68] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 10.
[69] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 11.

Figura 65 - Explicação de Luciana sobre a terceira figura da sequência

Fonte: Dados da pesquisa

Em seguida, a professora Maria pediu para que Luciana exemplificasse no quadro o seu raciocínio para que a turma compreendesse melhor. Ela citou o caso da 15º figura da sequência.

> Então, se a gente pegasse a figura 15, por exemplo, vai ter 15 palitos em cada linha e vai ter 16 linhas, tanto na vertical quanto na horizontal. (Luciana)
>
> Então escreve o exemplo que você deu da posição 15 para eles entenderem. (Professora)
>
> Então, na posição 15 vai ter uma linha a mais em relação ao número da figura. (Luciana)
>
> Então são 16 colunas e 16 linhas. (Gustavo)
>
> Obrigada, Gustavo! (Luciana)
>
> Colunas e linhas são a mesma coisa. (Eduarda)
>
> Então são 16 em cada sentido, na horizontal e na vertical. (Luciana)
>
> Ah tá! Então você está chamando de coluna na vertical e linha na horizontal. (Eduarda)
>
> Isso. (Luciana)[70]

Depois disso, Luciana fez o cálculo do número de palitos dessa figura no quadro:

[70] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 11.

Figura 66 - Cálculo do número de palitos feito por Luciana

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 15 \\ \hline 80 \\ 160 \\ \hline 240 \\ \times\ 2 \\ \hline 480 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

A professora Maria incentivou a turma a apresentar uma generalização para a sequência.

> Gente, a Luciana conseguiu chegar em uma coisa aí. Agora vocês têm que ajudar ela a chegar numa fórmula geral. (Professora)
>
> Eu acho que é assim ó... abre parênteses, posição mais 1... (Sofia)
>
> Precisa escrever posição gente? (Professora)
>
> Coloca só P. (Eduarda)
>
> Aí fecha o parêntese. Vezes a posição de novo, porque o número de palitos não é a posição? E aí depois multiplica por 2. Só que você tem que colocar colchete aí. (Sofia)
>
> Não precisa colocar colchete não. (Eduarda)
>
> Mas a multiplicação tem que ser feita na hora que ela aparece? (Sofia)
>
> A ordem dos fatores não altera o resultado. (Eduarda)[71]

A partir do raciocínio de Luciana, Sofia conseguiu apresentar a generalização para a sequência. Luciana registrou a fórmula proposta por Sofia no quadro: nº de palitos = (P + 1). P.2. Assim, nessa interação, houve generalização que foi deduzida do padrão da sequência. Como a generalização apresentada foi deduzida do padrão da sequência, e ela é uma forma de argumentação, é possível concluir que nessa interação houve argumentação.

Depois disso, a professora Maria sugeriu uma manipulação algébrica para melhorar o aspecto da fórmula.

> Outra forma de ver esta fórmula aqui é... a ordem dos fatores altera o resultado? (Professora)

[71] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 11.

> Não. (Turma)
>
> Então eu vou escrever 2p vezes p + 1. Lembrando o que a gente estava estudando e que vai até cair na prova... Como eu posso escrever isso de outra forma? (Professora)
>
> Multiplicar. (Aluno 1)
>
> Mas o que vai dar? (Professora)
>
> Eduarda $2p^2$... (Eduarda)
>
> Mais 2p. (Sofia)
>
> Isso. 2p vezes p, $2p^2$. 2p vezes 1, 2p. (Professora)[72]

Assim, a fórmula ficou sendo: nº de palitos = $2p^2 + 2p$. De forma geral, os estudantes das três turmas conseguiram obter generalizações nessa atividade que envolve padrão de sequências.

Esse tipo de atividade pode ter favorecido a obtenção de fórmulas gerais, uma vez que elas poderiam ser deduzidas por meio da observação do padrão da sequência. Além disso, a intervenção realizada pela professora, na primeira *discussão* com a turma sobre a relação entre o valor do raio e do comprimento de uma circunferência, também influenciou os resultados obtidos pelos alunos na terceira atividade. Nessa aula, os alunos tiveram o primeiro contato com a generalização e participaram da sua elaboração com a orientação da professora.

Nesta seção, apresentei uma descrição das intervenções realizadas, por mim e pela professora Maria, e seus desdobramentos no desencadeamento e no desenvolvimento na argumentação dos estudantes. Inicialmente, os alunos registravam informações desnecessárias nos relatórios no lugar da descrição de suas ideias e conclusões. Assim, a primeira intervenção realizada teve como objetivo a inserção de hipóteses, testes e justificativas na argumentação dos alunos. Os estudantes foram orientados, individualmente e em grupo, sobre o que são hipótese e teste e como eles deveriam ser realizados.

Após essa intervenção, os alunos passaram a registrar nos relatórios suas hipóteses, os testes realizados e as conclusões obtidas. Essa nova estrutura do relatório permitiu uma melhor organização de suas ideias. Além disso, os estudantes pareciam estar mais motivados a apresentar justificativas para suas hipóteses.

No entanto, muitos alunos justificavam a veracidade de uma hipótese por meio de exemplos, o que não é válido na matemática. Alguns alunos usavam os exemplos

[72] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 11.

corretamente na argumentação, apresentando-os como justificativa na refutação de hipóteses. Por esse motivo, a intervenção seguinte teve como objetivo orientar os estudantes sobre o esse uso correto dos exemplos na argumentação, do ponto de vista da matemática, definindo contraexemplo e mostrando como utilizá-lo. Após essa intervenção, pude notar uma evolução na argumentação dos alunos, pois eles passaram a apresentar contraexemplos para justificar a refutação de hipóteses, sem a solicitação da professora.

Outra evolução que pude notar na argumentação dos alunos foi a apresentação de generalizações. Isso ocorreu durante a realização da terceira atividade, sobre sequências de quadrados, que pode ter favorecido a obtenção de fórmulas gerais a partir da observação do padrão das sequências. Além disso, a professora Maria mostrou como fazer uma generalização na discussão com a turma da primeira atividade, sobre comprimento de uma circunferência, o que também pode ter influenciado a apresentação de generalizações pelos estudantes.

A orientação da professora Maria nos diversos momentos da investigação e as intervenções realizadas nem sempre desencadearam a argumentação dos alunos. Pude notar que alguns fatores impediram o envolvimento dos estudantes na argumentação: a ausência de alguns elementos do Modelo-CI (ALRØ; SKOVSMOSE, 2004), a falta de tempo, a falta de domínio da linguagem algébrica, conflitos no grupo, outras prioridades... Então, na próxima seção, apresento uma descrição desses fatores.

7.3 Obstáculos para o desenvolvimento da argumentação

Nas seções anteriores, foi possível notar que as orientações dadas pela professora Maria e as intervenções realizadas contribuíram para o desenvolvimento da argumentação dos alunos. Porém, a realização delas em uma atividade de investigação não é garantia de que a argumentação será desencadeada. Nesse sentido, apresento nesta seção alguns obstáculos que atravancaram a argumentação dos estudantes.

7.3.1 A falta do estabelecer contato e do posicionar-se

Na primeira aula da atividade sobre cálculo do comprimento da circunferência, na turma 902, as alunas Marcella, Júlia, Clara e Mariana iniciaram as medições dos valores do diâmetro e do comprimento, solicitados no roteiro, dos objetos que receberam. Enquanto

Marcella realizava esse registro no relatório do grupo, Júlia estava examinando os valores obtidos na tabela e disse em voz alta:

> Já achei! Nossa! (Júlia)[73]

Ela estava se referindo ao item 2 do roteiro, no qual era proposto aos grupos que encontrassem uma fórmula para calcular o valor do comprimento de uma circunferência. Entretanto, Marcella continuou escrevendo o relatório e Clara e Mariana continuaram fazendo medições. Pelo Modelo-CI, é possível notar que Júlia *pensou alto*, porém, as demais integrantes do grupo não *estabeleceram contato* com ela, não ocorrendo uma interação que pudesse promover uma situação argumentativa.

Em seguida, a professora se aproximou do grupo para ver o andamento do trabalho.

> Até agora, vocês chegaram a alguma conclusão? (Professora)
>
> A gente está escrevendo... (Marcella)
>
> Pode colocar ali [Apontando para o relatório.] tudo o que acontece aqui? (Júlia)
>
> [A professora balançou a cabeça indicando que sim.] Aí agora pula para a 2. [Se referindo à segunda questão do roteiro.] (Professora)
>
> Eu acho que eu já achei uma. [Se referindo à fórmula para o cálculo do valor do comprimento da circunferência.] Eu não sei se está certo. (Júlia)
>
> Deixa-me ver... (Professora)
>
> Diâmetro elevado a dois, elevado ao quadrado... a não, não é elevado ao quadrado não! É outra coisa que vai dar... (Júlia)
>
> Isso que ela está falando é importante! É uma hipótese. Você tem que anotar aqui. [Apontando para o relatório.] (Professora)
>
> Mas não é elevado ao quadrado! É vezes dois. Não é elevado ao quadrado. É multiplicado por dois. (Júlia)[74]

Nessa discussão, Júlia apresentou a sua opinião sobre a fórmula para calcular o comprimento de uma circunferência, que seria multiplicar o diâmetro por dois, ou seja, em uma linguagem algébrica, $C = 2d$, no qual C é o valor do comprimento e d é o valor do diâmetro. A professora tentou incentivar a interação entre o grupo *estabelecendo contato* com a Júlia e *reconhecendo* a sua ideia. Ela chamou a atenção do grupo para que as alunas percebessem que uma hipótese havia sido elaborada e que ela deveria ser registrada.

[73] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 2.
[74] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 2.

No momento em que Marcella pegou o relatório para registrar a hipótese, Mariana propôs uma ideia diferente ao grupo e a professora novamente chamou a atenção das alunas para uma nova hipótese.

> O diâmetro é o dobro mais 2? (Mariana)
>
> Ó, isso é outra hipótese... (Professora)
>
> É o triplo... (Mariana)
>
> Peraí, Mariana, peraí!Guarda esse negócio aí que você está falando. (Marcella)
>
> O que você falou? [se referindo à Mariana] (Professora)
>
> Eu falei que o diâmetro é o dobro mais 2. Mas eu acho que é o triplo. (Mariana)
>
> O diâmetro? (Marcella)
>
> Mas é o diâmetro que você quer? (Professora)
>
> Não. É o valor do comprimento. (Mariana)
>
> Comprimento? Não estou entendendo nada! (Marcella)
>
> O valor do comprimento... [Mariana é interrompida.] (Mariana)
>
> É o triplo do diâmetro! (Clara)[75]

A primeira hipótese levantada por Júlia, que o valor do comprimento é o dobro do valor do diâmetro, não foi discutida pelo grupo e nem registrada no relatório. Mariana pode ter *reformulado* a hipótese de Júlia ao dizer que o valor do diâmetro é o dobro do valor do comprimento mais dois. A intervenção da professora nesse momento foi essencial, pois ao chamar a atenção para a confusão entre valor do diâmetro e valor do comprimento no fragmento "Mas é o diâmetro que você quer?", fez com que o grupo alterasse a hipótese. Além disso, Clara aproveitou a interação para propor a sua ideia.

Nessa situação, o grupo e a professora *estabeleceram contato*, uma vez que elas prestaram atenção às contribuições das colegas, e, além disso, elas *reconheceram* as ideias apresentadas. Logo após, Júlia começou a testar oralmente a hipótese da Mariana.

> Aqui ó, 3 vezes 6 [valor do diâmetro da lata de tomate retirado da tabela] é 18, mais 2, 20.3 vezes 10 [valor do diâmetro do pote de manteiga], 30 mais 2,32.[Esses casos apresentaram resultados iguais aos da tabela.] (Júlia)
>
> É! (Clara)

[75] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 2.

> 3 vezes 6 [valor do diâmetro da tampinha], 18... [A aluna interrompeu a sua fala, pois percebeu que o resultado foi diferente do valor da tabela.] (Júlia)
>
> Esse aqui é 20, gente! Da tampinha azul. Esse aqui já dá... 3 vezes 8 [valor do diâmetro da tampa vermelha] é igual a 24. Por que não precisou de mais 2? (Clara)
>
> Vai, Mariana, a sua hipótese... O comprimento.... Como é que é? (Marcella)
>
> O valor do diâmetro é triplo do comprimento... Ai meu Deus, peraí! (Mariana)
>
> É o triplo mais 2? (Marcella)
>
> Não! É o valor do comprimento... É o triplo do diâmetro. (Júlia)
>
> Não o valor do diâmetro... (Mariana)
>
> Mas o valor do comprimento é primeiro! (Júlia)
>
> O diâmetro vezes 3 mais 2 é o valor do comprimento. (Mariana)
>
> Tem que começar com o valor do comprimento! (Júlia)[76]

No momento em que Júlia iniciou o teste da hipótese de Mariana, apenas Clara *estabeleceu contato* com ela. Inicialmente, ela concordou com a ideia proposta e questionou o valor obtido do comprimento da tampinha na medição, que era 19 cm: “Esse aqui é 20, gente! Da tampinha azul.” Quando ela continuou o teste da hipótese, percebeu que para um caso, da tampa vermelha, o valor do diâmetro multiplicado por 3 dava exatamente o valor encontrado na medição: “Esse aqui já dá... 3 vezes 8 é igual a 24.” E questionou a hipótese: “Por que não precisou de mais 2?” .

Todavia, nenhuma colega se envolveu com o seu questionamento e Marcella se preocupou apenas em registrar a hipótese da Mariana: “Vai Mariana, a sua hipótese... o comprimento... Como é que é?” Marcella e Mariana não se envolveram com o teste realizado oralmente por Júlia e Clara e não houve registro dele no relatório. Esse teste era importante para concluir que a hipótese da Mariana era falsa, porém apenas Júlia conseguiu perceber isso.

Nessa interação, é possível perceber que em alguns momentos as alunas conseguiram *estabelecer contato* e *reconhecer* algumas ideias propostas. Entretanto, em nenhum momento as alunas se *posicionaram* em relação às hipóteses, apresentando argumentos para validá-las. No relatório do grupo, elaborado no primeiro dia da atividade, as hipóteses foram enunciadas, mas sem nenhuma justificativa e conclusão. A ideia de que $C = 3d$ poderia ter sido explorada

[76] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 2.

pelas alunas, já que é uma boa aproximação para a fórmula correta ($C = \pi d$), uma vez que o valor de π não era conhecido por elas e nem pela turma.

Não foi a ausência de elementos do Modelo-CI que descaracterizaram essa situação como argumentativa, mas a falta desses elementos, sobretudo o *estabelecer contato* e o *posicionar-se*, podem ter contribuído para que não ocorresse argumentação nesse episódio.

7.3.2 A falta de tempo

A falta de tempo foi outro fator que dificultou o desencadeamento de uma situação argumentativa e a obtenção de uma conclusão, como será visto na situação descrita a seguir.

Na terceira aula da atividade sobre as potências de 2, a professora fez uma *discussão* com a turma 902 sobre os resultados obtidos na investigação, ainda que os alunos não houvessem terminado a atividade. Decidimos fazer essa discussão para finalizar a atividade, já que esse foi o último dia da professora na escola.

Após a discussão realizada sobre a tabela proposta no roteiro, a professora decidiu propor uma discussão sobre a tabela das potências de 3, mesmo que os grupos não tivessem feito esta parte.

> Vamos levantar algumas hipóteses antes de preencher a tabela? A gente fez a tabela das potências de 2. (Professora)
>
> Na diagonal da de 2, era potência de 3. Na de 3, a diagonal vai ser de 4. (Aluno 1)
>
> Ah! Isso é o que, que ele levantou ali? (Professora)
>
> Uma hipótese! (Aluna 2)
>
> Isso, uma hipótese. Será que na tabela das potências de 3, na diagonal vai dar as potências de 4? Então, preenche lá Joana. (Professora)

Nessa interação, a professora apoiou a hipótese levantada pelo aluno 1. Ela pediu para que Joana fosse ao quadro, uma vez que ela havia começado a tabela em seu relatório. Joana começou a preencher a tabela sobre as potências de 3 no quadro, com a ajuda de Clara.

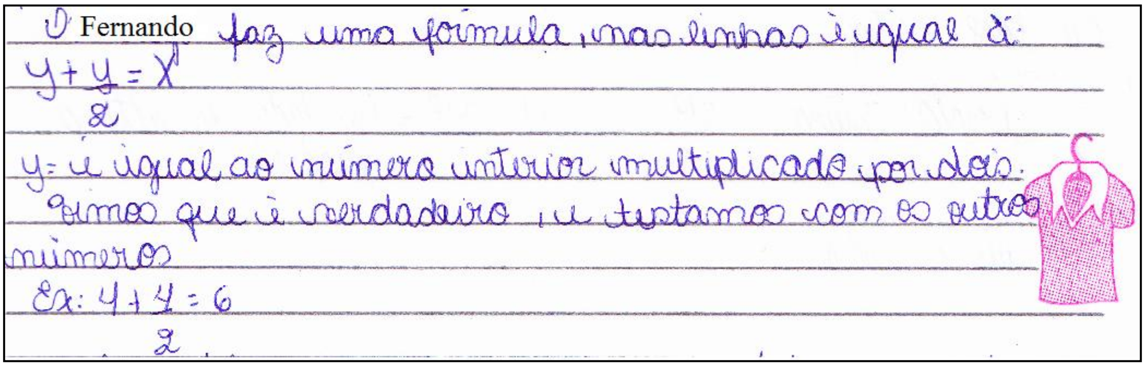
Contudo, a aula terminou antes que elas pudessem concluir a tabela. Devido à falta de tempo, não foi possível discutir sobre a veracidade da conjectura levantada. Mas, até bater o sinal, Joana conseguiu preencher parte da tabela com a ajuda de Clara e era possível ver que os resultados da diagonal eram potências de 4.

Esta foi uma situação com potencial para desencadear uma situação argumentativa, pois a professora estava conseguindo envolver os estudantes na elaboração de hipóteses e na realização de testes. Se houvesse tempo, provavelmente, a turma, com a ajuda da professora Maria, conseguiria generalizar a hipótese para as tabelas de qualquer potência.

7.3.3 Falta de domínio da linguagem algébrica

Na primeira aula da atividade sobre as potências de 2, o grupo formado por Agnes, Elen, Fernando e Eduardo, da turma 901, apresentou uma fórmula para explicar a regularidade presente nas linhas da tabela proposta no roteiro. Essa fórmula foi registrada no relatório do grupo:

Figura 67 - Fórmula elaborada por Fernando


O Fernando faz uma formula, nas linhas è igual à:
$y + \frac{y}{2} = x$
y = è igual ao número anterior multiplicado por dois.
Vimos que è verdadeiro e testamos com os outros números
Ex: $4 + \frac{4}{2} = 6$

Fonte: Dados da pesquisa

A seguir, apresento a sua transcrição.

Figura 68 - Transcrição da fórmula elaborada por Fernando

O Fernando [fez] uma fórmula, nas linhas é igual à: $y + \frac{y}{2} = x$

y = é igual ao número anterior multiplicado por dois.

Vimos que é verdadeiro e testamos com os outros números.

Ex: $4 + \frac{4}{2} = 6$

Fonte: Dados da pesquisa

A maior parte dos grupos apresentou apenas uma descrição do que ocorreu de uma linha para outra na tabela. Nesse fragmento do relatório, é possível notar que o grupo comunicou a ideia de Fernando por meio de uma fórmula. Entretanto, a falta de domínio da linguagem algébrica simplificou muito a fórmula e fez com que o aluno tivesse que explicar o significado da variável y.

No momento do trabalho de campo, os alunos estavam aprendendo potenciação e a falta de domínio deste conteúdo não privilegiou a escrita do grupo, mas é possível notar que eles compreenderam a dinâmica da tabela. A fórmula, da primeira linha, por exemplo, poderia ter sido apresentada, caso eles tivessem esse domínio, como $2^{n-1} + \frac{2^{n-1}}{2} = x$, em que n é o número da coluna da tabela. E, por meio das propriedades de potenciação, ela poderia ter sido apresentada como x$= 3.2^{n-2}$. A partir das manipulações algébricas com as linhas, os estudantes poderiam ter encontrado uma fórmula geral para a tabela.

Além disso, os alunos aceitaram a hipótese de Fernando através de um caso que deu certo. Do ponto de vista da matemática, isso não é considerado uma demonstração.

7.3.4 Conflitos no grupo

Na realização da segunda atividade, sobre pavimentação do chão da sala, as integrantes do grupo formado por Sofia, Isadora, Cecília e Daniela, da turma 903, se desentenderam. Enquanto Isadora e Sofia manipulavam as figuras dos polígonos regulares, Cecília e Daniela conversavam sobre outros assuntos e riam bastante. Sofia se sentiu muito incomodada com a postura das colegas e tentou distribuir tarefas para elas, mesmo assim as duas continuaram a conversa.

Pouco tempo depois, Daniela tirou uma bola de isopor da mochila e começou a brincar com ela. Cecília entrou na brincadeira e as duas passaram a jogar a bola uma para a outra. Sofia ficou bastante irritada e pediu que elas parassem a brincadeira. Ela pegou as figuras que havia entregado para Cecília e Daniela e voltou a fazer a atividade com a Isadora.

Devido à reação de Sofia, Cecília e Daniela pararam a brincadeira, mas não ajudaram as colegas a realizar a atividade. Em poucos instantes, Cecília e Daniela voltaram a jogar a bola de isopor uma para a outra, Sofia reclamou e tomou a bola das duas. Ela entregou a bola para a professora e pediu para que as duas ajudassem a realizar a atividade. Porém, apenas Isadora estava colaborando, enquanto Cecília e Daniela conversam sobre outros assuntos.

Depois de aproximadamente dez minutos, Sofia voltou a reclamar da postura de Cecília, que ria bastante e iniciava conversas sobre outros assuntos com a Daniela. Então, Cecília resolveu perguntar o que era para fazer.

> (Cecília) O que é pra fazer? Até agora eu não entendi! (Cecília)
>
> Lê aí. (Sofia)
>
> Nossa, que tirada! Mas eu já li! (Cecília)
>
> Não é tirada não. Você tem que descobrir como que esse negócios aqui... [Enquanto Sofia explicava, Cecília ria.] Claro! Eu vou falar com a professora que você não está a fim de fazer! Porque é pra todo mundo contribuir com o negócio, ué! (Sofia)[77]

Daniela resolveu ajudar Isadora e Sofia, enquanto Cecília manipulava o celular. As três colegas estavam preenchendo a tabela sobre a pavimentação do chão pelos polígonos, até que Cecília voltou a tirar a atenção de Daniela. Sofia pediu que Daniela continuasse a ajudar o grupo e desistiu de chamar a atenção de Cecília. E assim foi durante toda a aula. Isadora e Sofia tentando realizar a atividade, enquanto Cecília tirava a atenção de Daniela. Isso atrapalhou o grupo o tempo todo, pois, além de Cecília não contribuir com o grupo, Sofia passou boa parte do tempo tentando envolver as colegas e tentando se concentrar na atividade.

Na análise dessa situação, retomo a ideia de convite proposta por Skovsmose (2000). Em um cenário para investigação, os estudantes são convidados pelo professor, por meio da pergunta "O que acontece se...?", a explorarem, formularem questões e a buscarem explicações. Mas a realização da investigação depende da aceitação do convite pelos alunos.

É notável que essa aceitação não ocorreu por parte de todas as integrantes do grupo. Sofia e Isadora aceitaram, Cecília não aceitou e Daniela ora aceitava e ora não, se mostrando inconstante durante a atividade. Devido à recusa de Cecília ao convite, os conflitos foram gerados, pois, além de não contribuir com o grupo, a aluna desviava a atenção de Daniela e incomodava Sofia, que tentava se concentrar para realizar a tarefa.

Essa situação só foi resolvida na aula seguinte, pois Cecília continuou com a postura de não se envolver com a atividade e atrapalhar o grupo. Sofia, ao perceber isso, chamou a professora e reclamou da colega. A professora resolveu tirar Cecília do grupo e pediu que ela fizesse a atividade sozinha. Isadora, Sofia e Daniela realizaram juntas a atividade proposta.

A dinâmica de trabalho desse grupo, principalmente na primeira aula de aplicação da segunda atividade, foi marcada por conflitos que atrapalharam o envolvimento das alunas com a investigação e, sobretudo, com a argumentação. Isso aconteceu porque nem todas as integrantes do grupo aceitaram o convite (SKOVSMOSE, 2000) para participar da atividade

[77] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 5.

de investigação. Mesmo nos momentos que a professora se aproximou do grupo, as alunas não relataram esse problema.

Refletindo sobre a não aceitação do convite por parte de algumas alunas, percebi a importância de estar mais atenta ao desenvolvimento do trabalho dos grupos e questionar sobre a participação de cada aluno. Esse problema poderia ter sido resolvido logo no primeiro dia, conversando com as alunas e realizando novo convite para participar da investigação, e não ter sido um obstáculo para a realização da atividade e para o desencadeamento da argumentação.

7.3.5 Outras prioridades

Durante a realização da quarta atividade, sobre as potências de 2, o grupo formado por Pedro, Anderson, Luis e Vítor, da turma 902, estava preenchendo a tabela proposta no roteiro, até que, cerca de dez minutos depois, o coordenador pedagógico da escola interrompeu a aula. Ele foi até a sala para distribuir cortesias de um parque de diversões. As cortesias foram doadas para a escola e distribuídas para todos os estudantes.

A partir desse momento, os alunos pararam a atividade e passaram o restante da aula conversando sobre o parque. Eles combinaram um dia para faltar a aula para irem ao parque juntos.

Nesse caso, de acordo com Skovsmose (2000), os alunos tinham outra prioridade: marcar a data para ir ao parque. Sendo assim, não aceitaram o convite para realizar a investigação. Eles retomaram o trabalho iniciado apenas na aula seguinte. Então, eles não conseguiram completar a atividade e não registraram hipóteses no relatório.

Como a professora não sabia que essas cortesias iam ser entregues na aula dela, não foi possível evitar essa situação. Mas, para as outras aulas, ela solicitou à coordenação que não houvesse interrupções para não prejudicar o desenvolvimento das atividades.

Nesta seção, apresentei os obstáculos que encontrei durante a realização das atividades investigativas: ausência de alguns elementos do Modelo-CI (ALRØ; SKOVSMOSE, 2004), falta de tempo, falta de domínio da linguagem algébrica, conflitos no grupo e outras prioridades. Esses obstáculos dificultaram o desencadeamento da argumentação dos estudantes, mas muitos deles puderam ser contornados. A realização de novo convite (SKOVSMOSE, 2000) aos alunos para participar da investigação, por exemplo, foi uma das estratégias utilizadas para vencer alguns desses obstáculos. Essa descrição dos obstáculos vivenciados teve a finalidade de alertar sobre as dificuldades que poderão ser encontradas durante o desenvolvimento de atividades investigativas, além de provocar uma reflexão sobre estratégias a serem adotadas para contorná-las.

7.4 As conclusões obtidas

Ao propor o trabalho com investigações para as turmas da professora Maria, pude identificar situações argumentativas. Essa identificação ocorreu, sobretudo, devido ao meu aprofundamento teórico no campo da argumentação e da argumentação matemática. Pude compreender melhor o que é argumentação e quais são as formas de argumentar. Inicialmente, como os alunos não estavam habituados a realizar atividades que envolvem formulação de hipóteses e justificação, os argumentos utilizados por eles estavam apoiados, principalmente, em recursos não discursivos e na apresentação de contraexemplos no caso da refutação de hipóteses.

Após avaliar o primeiro relatório produzido pelas turmas, planejei um conjunto de intervenções, apoiadas nos referenciais teóricos utilizados nesta pesquisa, que foram realizadas por mim e pela professora Maria. A partir delas, pude notar uma evolução na argumentação dos estudantes, tanto oral quanto escrita. Sendo assim, pude concluir que elas contribuíram para o desencadeamento e desenvolvimento da argumentação dos alunos.

No primeiro dia da atividade de investigação, a maior parte dos estudantes escreveu informações irrelevantes no relatório e não argumentou. Assim, eu e a professora Maria explicamos aos alunos o que são hipótese e teste e como realizá-los. A professora passou a cobrar dos estudantes, também, a elaboração de justificativas para suas conclusões. A partir da segunda atividade, pude notar que os alunos passaram a incluir hipóteses, testes e justificativas nos relatórios. Porém, eles aceitavam uma hipótese através de um número reduzido de casos que deram certo, que não é um procedimento válido na matemática.

Na tentativa de romper este hábito dos estudantes, a professora Maria definiu contraexemplo e explicou aos alunos sobre o uso correto do exemplo na argumentação: o exemplo pode ser usando na refutação de uma hipótese, mas não pode ser usado para justificar a sua veracidade. Porém, não houve tempo hábil para essa mudança, uma vez que, para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) o trabalho com justificação deve ser gradual e contínuo, ocorrendo com mais facilidade à medida que as ferramentas matemáticas dos alunos vão se tornando mais sofisticadas.

Além disso, a professora Maria abordou o caso da generalização com os alunos, explicando o que é e realizando uma juntamente com eles. Assim, na terceira atividade, pude identificar generalizações registradas pelos estudantes nos relatórios e outras realizadas no momento da discussão com a turma. Vale ressaltar que a própria estrutura dessa atividade contribuiu para a dedução de fórmulas gerais, por meio da observação de padrões das sequências, e, sendo assim, para a generalização.

Por meio do meu aprofundamento teórico, da realização das intervenções e do apoio oferecido aos estudantes pela professora Maria durante as investigações, pude identificar em diversas situações: hipóteses, testes, contraexemplos, justificações, demonstrações, generalizações... Sendo assim, pude identificar e descrever situações argumentativas, compreendendo o que as desencadearam e como elas foram desenvolvidas e incentivadas.

Ademais, apontei fatores que não propiciaram o desencadeamento da argumentação, que foram considerados como obstáculos: ausência de alguns elementos do Modelo-CI, falta de domínio da linguagem algébrica, falta de tempo, conflitos no grupo e outras prioridades. Alguns deles foram contornados por meio da realização de novo convite aos estudantes (SKOVSMOSE, 2000) para participar das investigações.

A partir da análise realizada e das conclusões obtidas e relatas neste capítulo, apresento, a seguir, as considerações finais sobre a pesquisa, retomando a pergunta diretriz e apontando possibilidades para futuras investigações.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve origem em minhas inquietações vivenciadas ao participar e ao propor, como professora de matemática, atividades de investigação. Por um lado, notava um grande envolvimento dos estudantes e a aplicação de suas conclusões obtidas em exercícios e provas. Por outro, na fase da discussão com todos os participantes envolvidos na atividade, sentia a ausência de conclusões fundamentadas e justificadas, e, particularmente, da demonstração.

Naquele momento, eu considerava que argumentar em matemática era o mesmo que justificar por meio da demonstração. Em minhas experiências como professora, percebia a dificuldade dos alunos em se envolverem com demonstrações e em compreendê-las. Assim, acreditava que a argumentação estava ausente das atividades investigativas e, consequentemente, das aulas de matemática.

Percebia, então, uma falha na execução da quarta etapa de uma atividade investigativa, como proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009). No lugar da argumentação, da demonstração e da avaliação do trabalho realizado, notava um simples relato de resultados obtidos na atividade.

Ainda assim, apostava no potencial da atividade investigativa para desencadear a argumentação dos estudantes na sala de aula, por proporcionar um repertório de ideias, principalmente na etapa de exploração, que podem ajudar os alunos na elaboração de um argumento. Dessa forma, a minha primeira proposta para a pesquisa foi identificar e compreender o que desencadeia a argumentação dos estudantes em atividades de investigação.

Todavia, identifiquei argumentos elaborados pelos alunos antes da realização de qualquer orientação a eles visando o desencadeamento da argumentação. Refletindo sobre isso, pude perceber que as leituras realizadas no campo da argumentação e da argumentação matemática contribuíram para que eu compreendesse melhor o que é argumentação e os diversos meios de se argumentar. Pude perceber então que argumentar não é apenas justificar, mas também fundamentar uma conclusão, procurar convencer o outro, deliberar consigo mesmo, dentre outros.

Nesse sentido, a demonstração é uma das formas de se argumentar. O conceito de prova proposto por Balacheff (1982 apud Almouloud, 2007), por exemplo, me fez considerar recursos não discursivos como argumento utilizado pelos estudantes para justificar uma ideia proposta por eles. Assim, pude ampliar o meu olhar e estar mais atenta às estratégias utilizadas pelos alunos ao argumentar, não restringindo apenas à demonstração.

A minha proposta inicial para a pesquisa foi então modificada. Ao compreender que os alunos argumentam, decidi propor outra pergunta para a pesquisa: como se desencadeia e se desenvolve a argumentação matemática dos alunos em uma atividade investigativa?

Durante o trabalho de campo, elaborei uma sequência de quatro atividades investigativas que foram aplicadas por mim e pela professora Maria em suas três turmas de 9º ano do Ensino Fundamental. Nesse contexto em que a pesquisa foi realizada, encontrei fatores que considerei complicados para o desenvolvimento do ensino e do aprendizado e, consequentemente, para o desenvolvimento das atividades e da argumentação: alunos com graves problemas disciplinares, aluna grávida, aluna que sofre agressão dos pais, dentre outros. Pensava que esse ambiente poderia ser mais limitador ainda à ocorrência de argumentações.

No processo de análise dos dados coletados nesta pesquisa, pude identificar argumentação dos estudantes desde a realização da primeira atividade investigativa. Na seção 7.1, do capítulo anterior, descrevi quatro situações argumentativas nas quais pude identificar diversas formas de argumentar como: refutar por meio de contraexemplo, provar com o uso de um recurso não discursivo, demonstrar. Desse modo, pude comprovar que os alunos são capazes de argumentar nas aulas de matemática e que os fatores considerados complicadores não impediram que a argumentação ocorresse.

Não foi a minha intenção relacionar o contexto das turmas da professora Maria, em que encontrei fatores complicados, com o contexto da escola pública. Na verdade, esse foi o contexto que vivenciei durante a realização da pesquisa e poderia ter sido encontrado na rede particular de ensino. Respondendo a pergunta proposta na seção 7.1, se os alunos da escola pública não argumentam: eles argumentam sim. Aliás, qualquer aluno é capaz de argumentar.

A identificação da argumentação se tornou possível, também, a partir do aprofundamento teórico sobre as etapas de uma atividade de investigação e sobre argumentação e argumentação matemática. É preciso ter atenção aos recursos utilizados para argumentar pelos estudantes, que nem sempre se manifestarão na forma discursiva. Os argumentos podem ser apoiados em desenhos ou na manipulação de dados numéricos. Além disso, é necessário diferenciar prova e demonstração, compreendendo o sentido da prova matemática.

A partir da identificação da argumentação dos alunos, procurei, então, desenvolvê-la e aprimorá-la. Seguindo as orientações de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), planejei e realizei um conjunto de intervenções que, como foi visto na seção 7.2 do capítulo anterior, trouxeram desdobramentos para a argumentação dos estudantes, tanto para desenvolvê-la quanto para desencadeá-la, no caso de alunos dos quais, até então, eu não havia identificado nenhuma forma de argumentação.

Anteriormente às intervenções, grande parte dos estudantes não conseguiu elaborar hipóteses e estabelecer conclusões. Esse era um processo desconhecido para eles, assim como era a própria atividade de investigação, pois não haviam trabalhado dessa forma nas aulas de Matemática, como foi dito pela professora Maria:

> Vocês nunca tinham feito nada assim, não foi? [Perguntando para a turma.] Em nenhuma aula de Matemática. Foi a primeira vez. Eu acho que a maioria dos grupos, deu para perceber, gostou dessa atividade. Achou mais aberta, deu para vocês conversarem mais. (Professora)[78]

Após cada intervenção realizada, pude notar uma evolução na argumentação dos alunos, tanto oral quanto escrita. Os estudantes, que no início anotavam informações desnecessárias no relatório, como chamar a professora para tirar uma dúvida, passaram a registrar suas ideias no formato de hipóteses, seguida da realização de testes e apresentação da conclusão.

Por meio das intervenções, procurei aproximar os alunos do campo da argumentação, apresentando a eles as formas de argumentar, criando oportunidades para que eles pudessem desenvolver suas próprias estratégias para justificar ideias, e, dessa forma, tornar o que era desconhecido em uma parte da rotina das aulas de Matemática.

No momento em que os estudantes passaram a conhecer as formas de argumentar e tiveram oportunidades para desenvolver suas habilidades, eles passaram a fundamentar suas ideias, oferecendo justificativas sem a solicitação da professora. Nesse sentido, as intervenções me permitiram compreender como é possível desencadear e desenvolver habilidades dos alunos no campo da argumentação.

Os estudantes demonstraram motivação nos momentos em que estabeleceram conclusões e apresentaram justificativas que foram aceitas pela turma e pela professora Maria. Durante o desenvolvimento das atividades, pude perceber que o envolvimento dos alunos aumentava e eles passaram a elaborar justificativas sem a solicitação da professora.

[78] Dados da pesquisa. Filmagem e gravação, Aula 4.

À medida que as intervenções iam sendo realizadas, eles puderam desenvolver habilidades de argumentação e foram incentivados a elaborar argumentos, mesmo que não fossem válidos do ponto de vista da matemática. A professora Maria apoiou as ideias e estratégias deles, mostrando como era possível aprimorá-las. Assim, eles puderam se sentir à vontade para expor suas ideias, sem receio de errar ou serem criticados.

Retomo, agora, a pergunta que deu nome ao capítulo de análise dos dados: "Os alunos não querem argumentar?" As experiências relatadas me fizeram concluir que não é devido à falta de vontade para argumentar que os estudantes não argumentam. Eles demonstraram essa vontade nos momentos em que foram incentivados a argumentar, quando foram orientados sobre como argumentar e quando se sentiram à vontade para expor suas ideias. Com base nisso, entende-se que é necessário proporcionar um ambiente em que o aluno se sinta confortável para apresentar suas opiniões e que elas sejam respeitadas e aprimoradas com a ajuda da turma e do professor.

Como foi dito, por meio das intervenções realizadas pude compreender como desencadear e desenvolver a argumentação dos alunos. A qualidade dessas intervenções foi possível, sobretudo, devido à contribuição da professora Maria, que além de aprovar as atividades e as intervenções, participou da realização delas. A maneira como ela conduziu as discussões com a turma e envolveu os estudantes nas atividades influenciou o desenvolvimento da argumentação.

Com a orientação da professora, os alunos realizaram generalizações e demonstrações, que exigem conhecimentos formais da matemática e, portanto, são consideradas formas mais complexas de argumentação. Sendo assim, é possível concluir que a qualidade das intervenções do professor durante a realização de uma atividade investigativa contribui para o desenvolvimento da argumentação na sala de aula de matemática.

Para isso, o professor deve conhecer o que é argumentação, quais são as formas de argumentar, qual é o significado de uma prova matemática, e, assim, estimular os estudantes a justificarem e a desenvolverem habilidades de argumentação. Talvez esse seja um caminho para facilitar a compreensão de uma demonstração matemática pelos alunos e, à medida que eles avancem na escolaridade, realizem demonstrações mais elaboradas.

Ao final das atividades, os estudantes ainda demonstravam dificuldade em provar que uma afirmativa era verdadeira, pois ainda o faziam por meio de exemplos. Porém, com a realização de apenas quatro atividades, os alunos demonstraram grande evolução em suas argumentações. Sendo assim, acredito que um trabalho contínuo com argumentação na sala de aula possa desenvolver a argumentação dos estudantes e, à medida que suas habilidades vão se tornando mais sofisticadas, eles são capazes de romper esse hábito. De acordo com Nasser e Tinoco (2003), “a habilidade de argumentar deve ser construída ao longo dos anos de escolaridade, através de atividades variadas como jogos, problemas-desafio, ou simplesmente exigindo-se justificativas para todas as respostas.” (p. 9)

Os obstáculos que encontrei durante a realização das atividades, descritos na seção 7.3 do capítulo anterior, por exemplo, são as outras prioridades que os alunos demonstraram ter no momento em que a atividade foi proposta a eles, que foram consideradas como impedimento para a argumentação. Entretanto, muitos desses obstáculos foram contornados.

No exemplo citado, os estudantes recusaram o convite (SKOVSMOSE, 2000) feito a eles para participar da investigação ao receberem uma cortesia para um parque de diversões. A prioridade do grupo foi marcar a data para a ida ao parque. Mas, na aula seguinte, eu e a professora realizamos novo convite aos alunos que, dessa vez, aceitaram e participaram da atividade. Dessa forma, com a descrição dos obstáculos, tive a intenção de alertar ao professor os cuidados que ele deve ter ao aplicar as atividades investigativas e estar atento às dificuldades relatadas e outras que poderão surgir.

Nesta pesquisa, consegui desenvolver o trabalho com argumentação com os alunos da escola básica. Eles passaram a compreender o sentido da justificação e a fundamentar suas ideias. Assim, mesmo que a argumentação seja um campo amplo e complexo, o professor pode incluir esse trabalho na sala de aula. Ele não deve subestimar a capacidade dos alunos e planejar as suas aulas, escolhendo determinados conteúdos ou atividades, excluindo outros, por acreditar que os alunos não conseguirão acompanhar. É necessário mudar os tipos de atividades, bem como a forma de sua condução, não permanecendo apenas no paradigma do exercício (SKOVSMOSE, 2000).

As intervenções realizadas, os alunos e o papel da professora foram fatores que contribuíram para a argumentação. Concluo, então, que é possível desencadear e desenvolver a argumentação dos estudantes da escola básica em atividades de investigação. É necessário que o professor tenha uma compreensão do que é argumentação e quais são as formas de argumentar, em particular, que possua um entendimento do que é considerado prova, pois como foi visto, pode ser um desenho realizado pelo aluno.

Nesta pesquisa pude compreender como se desencadeia e se desenvolve a argumentação dos alunos por meio do aprofundamento teórico no campo da argumentação e da argumentação matemática, por meio das intervenções realizadas e do apoio oferecido aos alunos durante as investigações. O papel do professor foi um dos aspectos que chamou a minha atenção neste processo.

O envolvimento da professora Maria durante a realização das atividades propostas nesta pesquisa e a forma como ela conduziu as discussões com a turma e orientou as explorações dos alunos na sala de aula fizeram com que os estudantes aceitassem o convite (SKOVSMOSE, 2000) para realizar as atividades de investigação e se envolvessem na elaboração de argumentos.

Os resultados desta pesquisa apontaram que a influência do professor contribuiu para a argumentação dos alunos. Porém, o foco aqui foi o aluno. Seria interessante realizar outra pesquisa cujo foco fosse o professor e investigar como sua relação afetiva com a turma, seu modo de pensar sobre a argumentação, os tipos de atividades realizadas em sala, dentre outros, podem influenciar a argumentação dos alunos. Sendo assim, aponto como uma possibilidade para pesquisas futuras o papel e a influência do professor no desenvolvimento da argumentação dos alunos.

Durante a realização da análise dos dados, tive dificuldade em encontrar um modelo para analisar argumentos matemáticos. O modelo de Toulmin (2006) permite a análise de argumentos em diversas áreas de conhecimento, pois, para esse autor, mesmo que exista uma infinidade de campos de argumentos, há semelhanças no modelo e no procedimento deles. Ainda que, de acordo com Toulmin (2006), a principal intenção de um argumento é a justificatória, o que mostra uma proximidade com o campo da matemática, encontrei dificuldade em aplicar este modelo na análise, principalmente, de argumentos não discursivos, o que é comum na matemática.

O modelo-CI (ALRØ; SKOVSMOSE, 2004) permite a análise de comunicações em cenários para investigações, que foi o ambiente proporcionado nesta pesquisa, por isso considerei esse modelo adequado para analisar as interações ocorridas no trabalho de campo desta pesquisa. Contudo, não é um modelo específico para análise de argumentos.

Assim, aponto para a necessidade de criar um modelo para analisar argumentos matemáticos. Esse modelo deve ser realizado levando-se em consideração as formas que os estudantes argumentam, discursivas e não discursivas, e que ele não seja um modelo para analisar as comunicações em um ambiente específico de aprendizagem, como o caso do cenário para investigações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. **Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática**. In: BORBA, M. C. & ARAÚJO, J. L. (Orgs.) Pesquisa qualitativa em educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. 23-47 p.

ARAÚJO, J. L.; PINTO, M. M. F.; LUZ, C, R.; RIBEIRO, A. R. **Efemeridade dos Cenários para Investigação em um Episódio de Sala de Aula de Matemática com Tecnologias.** Zetetiké, Campinas, v. 16, n. 29, p. 07-40, jan-jun. 2008.

ALMOULOUD, S. **Prova e demonstração em matemática:** problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, Caxambú, 2007. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova.pdf>. Acesso em: 17 jul. 2012

ALRØ, H; SKOVSMOSE, O. **Dialogue and Learning in Mathematics Education.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2004. 286 p.

BILLIG, M. **Argumentando e pensando: uma abordagem retórica à psicologia social.** Petrópolis: Editora Vozes, 2008.

BOAVIDA, A. M. R. **A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor**. Setúbal, 2005. Disponível em: <http://fordis.ese.ips.pt/docs/siem/texto57.doc>. Acesso em: 05 set. 2009.

BOERO, P. **Argumentation and mathematical proof:** A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. Gênova, 1999. Disponível em: <http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html>. Acesso em: 28 mai. 2012.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos**.** Porto: Porto, 1994.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/arquivos/PCN_FIS.pdf>. Acesso em: 5 set. 2009

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. MEC /SEF, 1998. 148 p.

BRAUMANN, C. A. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática**. Évora, 2002. Disponível em: <http://www.esec.pt/eventos/xieiem/pdfs/Braumann.PDF>. Acesso em: 9 ago. 2009.

CHARAUDEAU, P. **Linguagem e discurso: modos de organização.** São Paulo: Editora Contexto, 2008.

CRUZ, F. P. **Argumentação e prova no Ensino Fundamental:** análise de uma coleção didática de matemática. 2008. 123f. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo.

D'AMBROSIO, U. **Prefácio**. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2006. 09-21 p.

DORO, A. T. **Argumentação e prova: análise de argumentos geométricos de alunos da educação básica**. 2007. 125f. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo.

EEMEREN, F. H. V; GROOTENDORST, R; KRUIGER, T. **Handbook of Argumentation Theory:** a critical survey of classical backgrounds and modern studies. Dordrecht: Foris, 1987.

FERREIRA, L. D. **Provas algébricas:** uma investigação sobre as justificativas de alunos da educação básica. 2008. 133f. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3 ed. Campinas: Autores Associados, 2009. 228 p.

FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa**. Tradução: de Elias Costa. 3 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

FONSECA, H. **Aprender a ensinar investigando**. Lisboa, 2002. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/redeic/textos%20teoricos/02-h-fonseca.pdf>. Acesso em: 9 ago. 2009.

FUSCO, C. A. S; SILVA, M. J. F; ALMOULOUD, S. A. **O comportamento de um professor do ensino básico frente a uma situação de demonstração em matemática**. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, 2007. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html>. Acesso em: 17 jul. 2012.

GARNICA, A. V. M. **É necessário ser preciso? É preciso ser exato?** "Um estudo sobre argumentação matemática" ou "Uma investigação sobre a possibilidade de investigação". In: CURY, H. N. (Orgs.) Formação de professores de matemática uma visão multifacetada. Porto Alegre: Edipucrs, 2001.

JORDANE, A. **Uma experiência de (trans)formação de uma professora de matemática:** análise de um trabalho colaborativo. 2007. 155f. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

LINCOLN, Y. S; GUBA, E. G. **Naturalistic Inquiry**. Newbury Park, Calif: Sage Publications, 1985.

MACHADO, N. J., CUNHA, M. O. **Lógica e linguagem cotidiana verdade, coerência, comunicação e argumentação**. São Paulo: Autêntica, 2005. 128 p.

NASSER, L; TINOCO, L. A. A. **Argumentação e provas no ensino de matemática**. 2 ed. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 2003.

OLIVEIRA, H. M.; SEGURADO, M. I.; PONTE, J. P., **Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática**. Lisboa, 1996. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto9.PDF>. Acesso em: 5 set. 2009.

ONUCHIC, L.R. **ISERP – Palestra de Encerramento:** Uma História da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo. In: I Seminário em Resolução de Problemas. Rio Claro: UNESP, 2008. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo3.pdf>. Acesso em: 28 mai. 2012.

ONUCHIC, L. R. **Resolução de problemas no Brasil e no mundo**. In: II Seminário em Resolução de Problemas. Rio Claro: UNESP, 2011. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/lourdes.pdf>. Acesso em: 28 mai. 2012.

PEREIRA, M. E. **Análise de situações de aprendizagem envolvendo números racionais: uma abordagem para o ensino de argumentações e provas na matemática escolar**. 2007. 217f. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo.

POLYA, GEORGE. **Mathematical:** on understanding, learning, and teaching problem solving. New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, 1965.

PONTE, J. P., BROCARDO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. 152 p.

RESENDE, M. R. **A formação do professor de matemática:** discutindo as possibilidades e as tensões sobre a questão da prova no ensino da teoria elementar dos números. Uberaba, 2008. Disponível em: <http://www.unam.edu.ar/2008/educacion/trabajos/Eje%203/280%20-ribeiro_resende.pdf>. Acesso em: 6 mai. 2012.

SANTOS, J. B. S. **Argumentação e prova:** análise de argumentos algébricos de alunos da educação básica. 2007. 145f. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo.

SEGURADO, I; PONTE, J. P. **Concepções sobre a matemática e trabalho investigativo**. Lisboa, 1998. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3040/1/98-Segurado-Ponte%20%28Quadrante%29.pdf>. Acesso em: 16 jul. 2012.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação**. Rio Claro: Bolema, n.14, 2000, 66-91 p. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/skovsmose(Cenarios)00.pdf>. Acesso em: 17 jul. 2012.

TOULMIN, S. E. **Os usos do argumento**. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

VELASCO, P. D. N. **Educando para a argumentação:** contribuições do ensino da lógica. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

WALTON, D. N. **Lógica Informal:** manual de informação crítica. São Paulo, Martins Fontes, 2006.

ANEXO A – ROTEIRO DA PRIMEIRA ATIVIDADE

Atividade: Cálculo do Comprimento da Circunferência

Realize as atividades propostas em grupo de quatro alunos e responda as perguntas em folha separada. Ao final da aula, o seu grupo deverá entregar um relatório. Além de registrar as respostas dadas pelo grupo em cada questão, é importante anotar as ideias, tentativas, testes e conclusões de todos os integrantes.

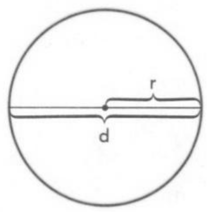
1ª Parte

O seu grupo recebeu vários objetos de tamanhos diferentes com formato circular, régua, compasso, barbante e calculadora. Usando esse material, respondam: **Como calcular o comprimento de uma circunferência?**

Para ajudar a responder essa pergunta, veja alguns elementos da circunferência:

r = raio **d** = diâmetro

Repare que o tamanho do diâmetro é igual a duas vezes o tamanho do raio. Podemos dizer então que $\boxed{d = 2r}$.



1) Meça em cada objeto o valor do comprimento da circunferência e do diâmetro. Em seguida, complete a tabela:

Objeto	Valor do comprimento (C)	Valor do diâmetro (d)	Valor da razão C/d

2) Escreva uma relação, ou seja, uma fórmula, que permita calcular o comprimento de uma circunferência.

2ª Parte

1) O que acontece com o valor do comprimento de uma circunferência quando alteramos o valor de seu raio? Escrevam as hipóteses do grupo e façam testes para verificar se estão corretas. Procurem justificar suas respostas.

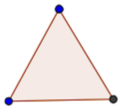
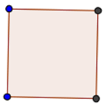
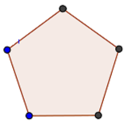
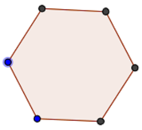
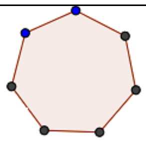
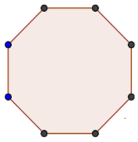
Sugestão: Multiplique o valor do raio por 2, por exemplo, e determine o valor do comprimento da circunferência.

ANEXO B – ROTEIRO DA SEGUNDA ATIVIDADE

<u>Atividade: Pavimentação do chão da sala</u>

Realize as atividades propostas em grupo de quatro alunos e responda as perguntas em folha separada. Ao final da aula, o seu grupo deverá entregar um relatório. Além de registrar as respostas dadas pelo grupo em cada questão, é importante anotar as hipóteses, testes e conclusões de todos os integrantes.
Para esta atividade, pavimentar o chão da sala significa cobri-lo com polígonos regulares sem deixar falhas (buracos) nem fazer sobreposições das figuras. O vértice de um polígono só poderá ser encostado nos vértices de outros polígonos, e nunca em um lado.
Agora, o seu grupo tem a tarefa de pavimentar o chão da sua sala de aula.

1) Complete a tabela abaixo.

Polígono regular	**Pavimenta o chão da sala?**	**Quantos polígonos foram utilizados para formar um vértice?**
		
		
		
		
		
		

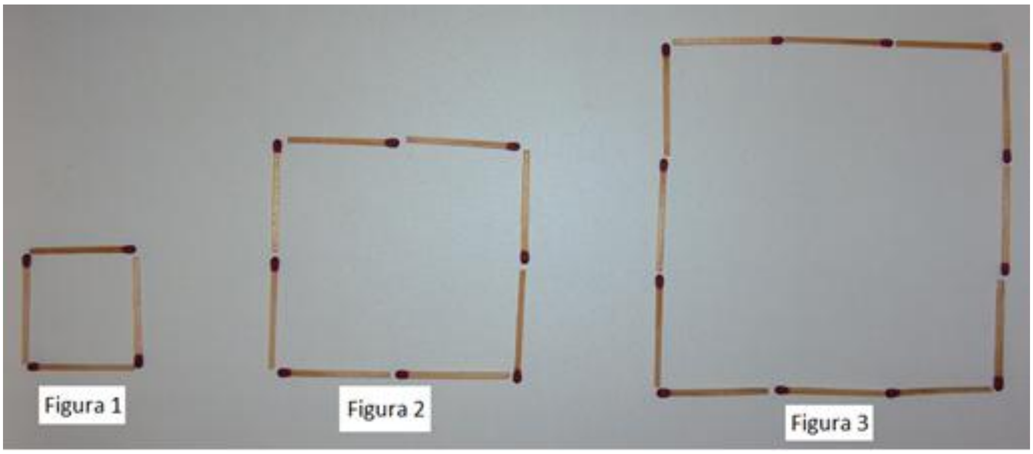
2) Quais são os polígonos regulares que pavimentam o chão?
3) Quais são os polígonos que **não** pavimentam o chão?
4) O que é necessário para que um polígono pavimente o chão? Por quê?
5) É possível pavimentar o chão utilizando dois tipos de polígonos regulares? Quais pares de polígonos pavimentam o chão? Por quê?

ANEXO C – ROTEIRO DA TERCEIRA ATIVIDADE

Atividade: Sequências de Quadrados

Atividade 1: Contorno de Quadrados

Observem a sequência de quadrados abaixo. Eles foram construídos com palitos de fósforos.



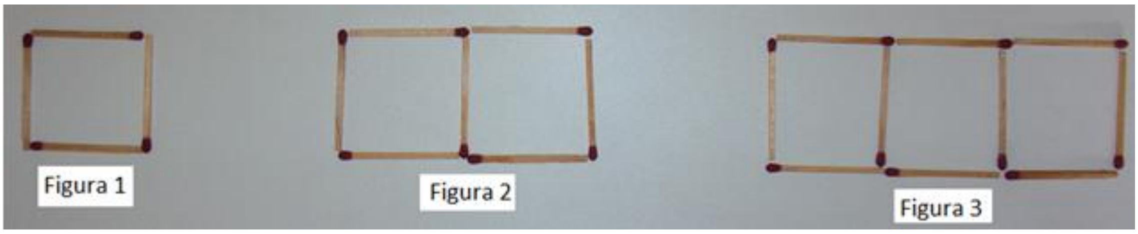
Pensem em questões como as sugeridas a seguir:

a) Quantos palitos são necessários para fazer um quadrado medindo 2 palitos de lado?
b) E o 10º quadrado da sequência, isto é, aquele com 10 palitos de lado?
c) Quantos palitos são necessários para formar o 100º quadrado da sequência?
d) Qual o lugar (posição) de um quadrado construído com, exatamente, 528 palitos?

Explorem a sequência e façam um relatório das observações e conclusões obtidas pelo grupo.

Atividade 2: Junções de Quadrados

Observem a sequência de quadrados abaixo.



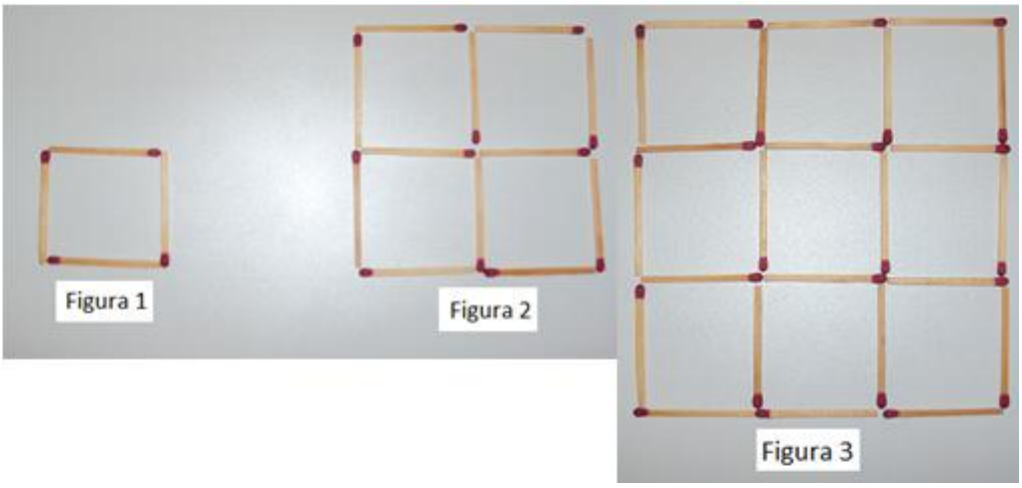
Pensem em questões como as sugeridas a seguir:

a) Quantos palitos são necessários para formar a figura 10?
b) Qual é o número da figura que possui 151 palitos?

Explorem a sequência e façam um relatório das observações e conclusões obtidas pelo grupo.

Atividade 3: Rede de Quadrados

Observem a sequência de quadrados abaixo.



Explorem a sequência e façam um relatório das observações e conclusões obtidas pelo grupo.

ANEXO D – ROTEIRO DA QUARTA ATIVIDADE

Atividade: Das potências de 2...

1) Vamos explorar algumas ideias que foram desenvolvidas pelo matemático Nicómano de Gerasa, no século I da nossa era. Repare que o quadro seguinte foi preenchido parcialmente, segundo determinadas regras, tendo como ponto de partida as potências de 2. Observe-o, com atenção, para perceber como foram efetuados os cálculos e, em seguida, complete-o.

1	**2**	**2^2**	**2^3**	**2^4**	**2^5**	**2^6**
	$2+\frac{2}{2}=3$	$4+\frac{4}{2}=6$	$8+\frac{8}{2}=12$			
		$6+\frac{6}{2}=9$	$12+\frac{12}{2}=18$			
			$18+\frac{18}{2}=27$			

- Tente encontrar algumas regularidades entre os números que figuram: em cada linha; em cada coluna; nas diagonais.
- Na coluna que começa em 2^{10}, qual será o último número? E na coluna 2^{20}?

2) Que conjecturas você poderá fazer sobre um quadro semelhante ao anterior que comece com as potências de 3? E sobre um quadro começando com as potências de 4? E sobre outros?

ANEXO E - TERMO DE ANUÊNCIA DA INSTITUIÇÃO ESCOLAR

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – CONHECIMENTO E INCLUSÃO SOCIAL
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TERMO DE ANUÊNCIA DA INSTITUIÇÃO ESCOLAR

Título do projeto: *Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática*

Pesquisadores responsáveis: Prof.ª Drª Jussara de Loiola Araújo (orientadora)
Bruna Karla Silva Reginaldo (mestranda)

Ao(À) Senhor(a) diretor(a);

Alunos(as) da escola sob sua direção estão sendo convidados(as) a participar como voluntários(as) em uma pesquisa educacional que tem como objetivo identificar e compreender o que desencadeia a argumentação matemática dos alunos em atividades de investigação. Esperamos que esse estudo contribua para que professores de Matemática possam aprimorar suas atividades em sala de aula, colaborando para a aprendizagem dos estudantes.

Para que a pesquisa possa ser realizada é necessário um trabalho de campo que consistirá em:

- Acompanhar algumas aulas de Matemática em uma turma dessa escola.
- Fazer anotações sobre todas essas aulas em um diário de campo.
- Guardar cópias e analisar as atividades realizadas pelos alunos em algumas aulas de Matemática seja em folhas de exercícios, cadernos ou avaliações.
- Gravar, em áudio, as falas e conversas dos alunos durante as aulas de Matemática.
- Filmar os alunos enquanto realizam as atividades de Matemática.
- Realizar entrevistas com os alunos, individualmente ou em grupos, dentro da própria escola, caso isso se torne necessário ao longo da pesquisa.

Esclarecemos que:

- A participação dos alunos é voluntária. Caso algum aluno ou o seu responsável não assine o termo de consentimento para participar dessa pesquisa, o aluno não será filmado e nenhuma atividade executada por ele será recolhida para análise. Os alunos são livres para deixarem de participar da pesquisa a qualquer momento, bem como para se recusar a responder qualquer questão específica, sem necessidade de justificativa junto às pesquisadoras.

- A participação da professora também é voluntária. Caso ela decida deixar de participar da pesquisa, esta será suspensa.

- Qualquer pergunta acerca da pesquisa e seus procedimentos pode ser feita às pesquisadoras responsáveis em qualquer estágio da pesquisa e tais questões serão respondidas.
- Não identificamos qualquer risco potencial na participação no estudo.
- Não haverá pagamento de qualquer espécie pela participação na pesquisa. Os benefícios serão indiretos, na medida em que o que aprendermos servirá para o desenvolvimento do ensino da Matemática, o que poderá beneficiar alunos(as) presentes e futuros.
- A participação na pesquisa em nada deverá prejudicar o andamento do curso regular das atividades desta escola, ou interferir de forma indesejada na vida privada dos sujeitos da pesquisa.
- Os conhecimentos resultantes deste estudo serão divulgados em revistas especializadas, em congressos e simpósios sobre pesquisas educacionais e em uma dissertação de mestrado.

Para realizar esse trabalho de campo queremos solicitar o seu consentimento, garantindo, através desse termo de anuência, que:

A) Em hipótese alguma o material coletado nas observações e nas entrevistas individuais ou coletivas será divulgado sem autorização.

B) A participação é confidencial. Em hipótese alguma, o nome da escola, dos funcionários da escola, dos professores e professoras, dos coordenadores e coordenadoras, da rede de ensino, assim como as imagens vídeo-gravadas e as falas áudio-gravadas serão divulgadas sem autorização.

C) Todas as informações e dados obtidos nas observações, análises de materiais de aula, assim como todo o material coletado ficarão arquivados em local adequado na Faculdade de Educação sob a guarda da pesquisadora Jussara de Loiola Araújo, professora desta Faculdade.

Em caso de dúvida, você pode entrar em contato com as pesquisadoras responsáveis através dos telefones e endereços eletrônicos fornecidos nesse termo. Informações adicionais podem ser obtidas no Comitê de Ética em Pesquisa (COEP) da Universidade Federal de Minas Gerais pelo telefone (31) 3409 4592 ou pelo endereço: Avenida Antônio Carlos, 6627 Unidade Administrativa II – 2º andar, sala 2005 – Campus Pampulha, Belo Horizonte, MG – Cep: 31270 901.

____

Assinatura do orientador da pesquisa
Prof. Dra. Jussara de Loiola Araújo
e-mail: jussara@mat.ufmg.br
Telefone: (31) 34237863
Universidade Federal de Minas Gerais
Faculdade de Educação

____

Assinatura do pesquisador co-responsável
Bruna Karla Silva Reginaldo
e-mail: bru_karla@yahoo.com.br
Telefone: (31) 3243-2451
Universidade Federal de Minas Gerais
Faculdade de Educação

AUTORIZAÇÃO DO(A) DIRETOR(A) DA ESCOLA PARA REALIZAÇÃO DA PESQUISA ***"****Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática"*.

A pesquisadora Bruna Karla Silva Reginaldo, aluna do curso de Mestrado em Educação, Conhecimento e Inclusão Social da Faculdade de Educação (FaE) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), e sua orientadora, Professora D$^{ra.}$ Jussara de Loiola Araújo (FaE- UFMG) solicitaram a autorização da direção da escola para a participação de seus estudantes neste estudo intitulado "*Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática"*. Eu li e compreendi as informações fornecidas e recebi respostas para qualquer questão que coloquei acerca dos procedimentos de pesquisa. Eu entendi e concordo com as condições do estudo como descritas. Eu entendo que receberei uma cópia assinada deste formulário de consentimento. Eu, voluntariamente, dou meu consentimento à realização da pesquisa na escola sob minha direção. Portanto, concordo com tudo que está escrito acima.

Belo Horizonte, ______de ______________________ de 2010.

Nome do(a) diretor(a):

____

Assinatura do(a) diretor(a):

____.

ANEXO F - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - PROFESSORA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS – PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – CONHECIMENTO E INCLUSÃO SOCIAL – FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (Professora)

Título do projeto: *Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática*

Pesquisadores responsáveis: Prof.ª Drª Jussara de Loiola Araújo (orientadora)
Bruna Karla Silva Reginaldo (mestranda)

Prezada professora;

Você está sendo convidada a participar, como voluntária, em uma pesquisa educacional que tem como objetivo identificar e compreender o que desencadeia a argumentação matemática dos alunos em atividades de investigação. Esperamos que esse estudo contribua para que professores de Matemática possam aprimorar suas atividades em sala de aula, colaborando para a aprendizagem dos estudantes.

Para que a pesquisa possa ser realizada pretendemos: acompanhar algumas de suas aulas em uma turma; fazer anotações, em um diário de campo, sobre todas essas aulas; desenvolver com você um trabalho cooperativo para que, juntas, possamos elaborar atividades de investigação, sobre um tema específico da matemática escolar; aplicar as atividades elaboradas cooperativamente à uma de suas turmas do Ensino Fundamental e, caso autorizado pelos pais ou responsáveis pelos alunos, fazer gravações em áudio e vídeo das falas, conversas e comportamentos dos alunos durante essas aulas; guardar cópias e analisar as atividades realizadas pelos alunos em algumas das aulas observadas, seja em folhas de exercícios, cadernos ou avaliações; realizar entrevistas com os alunos, individualmente ou em grupos, dentro da própria escola, caso isso se torne necessário ao longo da pesquisa.

Esclarecemos que sua participação é voluntária e não haverá pagamento de qualquer espécie pela participação na pesquisa. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento, bem como para se recusar a responder qualquer questão específica sem qualquer punição. A participação na pesquisa em nada deverá prejudicar o andamento normal das aulas ou interferir de forma indesejada em seu cotidiano. A participação é confidencial, em hipótese alguma o material coletado nas observações, nas gravações em áudio e vídeo e nas entrevistas dos alunos será divulgado sem autorização. Todo o material coletado ficarão arquivados em local adequado na Faculdade de Educação, assegurando-se o sigilo sobre a participação dos envolvidos no projeto. Caso seja autorizado, os conhecimentos resultantes deste estudo serão divulgados em revistas especializadas, em congressos e simpósios sobre pesquisas educacionais e em uma dissertação de mestrado. Nenhuma informação que permita a identificação da escola será revelada, pois serão utilizados nomes fictícios.

Em caso de dúvida, você pode entrar em contato com as pesquisadoras responsáveis através dos telefones e endereços eletrônicos fornecidos nesse termo. Informações adicionais podem ser obtidas no Comitê de Ética em Pesquisa (COEP) da Universidade Federal de Minas Gerais pelo telefone (31) 3409 4592 ou pelo endereço: Avenida Antônio Carlos, 6627 Unidade Administrativa II – 2º andar, sala 2005 – Campus Pampulha, Belo Horizonte, MG – Cep: 31270 901.

Agradecemos desde já sua colaboração. Atenciosamente,

Assinatura do orientador da pesquisa
Prof. Dra. Jussara de Loiola Araújo
e-mail: jussara@mat.ufmg.br
Telefone: (31) 34237863
Universidade Federal de Minas Gerais
Faculdade de Educação
Belo Horizonte - MG

Assinatura do pesquisador co-responsável
Bruna Karla Silva Reginaldo
e-mail: bru_karla@yahoo.com.br
Telefone: (31) 3243-2451
Universidade Federal de Minas Gerais
Faculdade de Educação
Belo Horizonte - MG

AUTORIZAÇAO DA PROFESSORA PARA REALIZAÇÃO DA PESQUISA ***"****Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática"*.

Eu li e entendi as informações e os detalhes descritos neste documento. Autorizo a realização desta pesquisa em uma de minhas turmas de acordo com os procedimentos esclarecidos no corpo deste documento. Autorizo a gravação em áudio e vídeo de minhas falas, bem como anotações sobre as minhas aulas pela pesquisadora e coleta de materiais produzidos pelos alunos durante a realização da pesquisa. Todo o material coletado para o estudo pode ser guardado em banco de dados e utilizados na dissertarção desta pesquisa e em outras pesquisas de natureza educacional.

Eu, voluntariamente, aceito minha participação nessa pesquisa. Portanto, concordo com tudo que está escrito acima e dou meu consentimento.

Belo Horizonte, ____ de ___________________ de 2011.

_________________________________ _________________________________
Nome da professora Assinatura da professora

ANEXO G - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – PAIS E RESPONSÁVEIS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS – PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – CONHECIMENTO E INCLUSÃO SOCIAL – FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (para pais ou responsáveis)

Título do projeto: *Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática*

Pesquisadores responsáveis: Prof.ª Drª Jussara de Loiola Araújo (orientadora)
Bruna Karla Silva Reginaldo (mestranda)

Caros senhores pais ou responsáveis;

Seu(sua) filho(a) está sendo convidado(a) a participar como voluntário(a) em uma pesquisa educacional que tem como objetivo identificar e compreender o que desencadeia a argumentação matemática dos alunos em atividades de investigação. Esperamos que esse estudo contribua para que professores de Matemática possam aprimorar suas atividades em sala de aula, colaborando para a aprendizagem dos estudantes.

Para que a pesquisa possa ser desenvolvida, pretendemos: guardar cópias e analisar as atividades realizadas pelos alunos em algumas aulas de Matemática seja em folhas de exercícios, cadernos ou avaliações; gravar, em áudio, as falas e conversas dos alunos durante as aulas de Matemática; filmar os alunos enquanto realizam as atividades de Matemática; realizar entrevistas com os alunos, individualmente ou em grupos, dentro da própria escola, caso isso se torne necessário ao longo da pesquisa.

Esclarecemos que a participação do seu(sua) filho(a) é voluntária e não haverá pagamento de qualquer espécie pela participação na pesquisa. Seu(sua) filho(a) é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento, bem como para se recusar a responder qualquer questão específica sem qualquer punição. A participação é confidencial, em hipótese alguma o material coletado nas observações, nas gravações em áudio e vídeo e nas entrevistas dos alunos será divulgado sem autorização. Todo o material coletado ficarão arquivados em local adequado na Faculdade de Educação, assegurando-se o sigilo sobre a participação dos envolvidos no projeto. Caso seja autorizado, os conhecimentos resultantes deste estudo serão divulgados em revistas especializadas, em congressos e simpósios sobre pesquisas educacionais e em uma dissertação de mestrado. Nenhuma informação que permita a identificação da escola será revelada, pois serão utilizados nomes fictícios. Caso você não autorize a análise dos registros escritos do(a) seu(sua) filho(a), ainda assim eles serão coletados, porém não os utilizaremos em nosso estudo e nem os manteremos em bancos de dados. Eles poderão, entretanto, ser usados pela professora, para fins didáticos, computados como exercício escolar ou como parte da avaliação escolar. Caso você não autorize a gravação em áudio das falas do(a) seu(sua) filho(a) com colegas durante as aulas de matemática e/ou gravação em vídeo de suas atividades na sala de aula enquanto realiza as tarefas propostas, respeitaremos sua decisão e não faremos gravação em áudio ou vídeo do(a) seu(sua) filho(a) e/ou do seu grupo. Em quaisquer dos casos, a recusa não acarretará nenhuma sanção ao aluno(a). A recusa também não o(a) eximirá de participar normalmente das atividades escolares e do estudo da unidade de ensino.

Em caso de dúvida, você pode entrar em contato com as pesquisadoras responsáveis através dos telefones e endereços eletrônicos fornecidos nesse termo. Informações adicionais podem ser obtidas no Comitê de Ética em Pesquisa (COEP) da Universidade Federal de Minas Gerais pelo telefone (31) 3409 4592 ou pelo endereço: Avenida Antônio Carlos, 6627 Unidade Administrativa II – 2º andar, sala 2005 – Campus Pampulha, Belo Horizonte, MG – Cep: 31270 901.

Agradecemos desde já sua colaboração. Atenciosamente,

____
Assinatura do orientador da pesquisa
Prof. Dra. Jussara de Loiola Araújo
e-mail: jussara@mat.ufmg.br
Telefone: (31) 34237863
Universidade Federal de Minas Gerais
Faculdade de Educação
Belo Horizonte - MG

____
Assinatura do pesquisador co-responsável
Bruna Karla Silva Reginaldo
e-mail: bru_karla@yahoo.com.br
Telefone: (31) 3243-2451
Universidade Federal de Minas Gerais
Faculdade de Educação
Belo Horizonte - MG

CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAÇÃO DO (A) ALUNO (A) COMO SUJEITO NA PESQUISA ***"****Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática"*.

Eu li e entendi as informações e os detalhes descritos neste documento. Autorizo a participação do meu(minha) filho(a) nesta pesquisa de acordo com os procedimentos descritos no corpo deste documento. Autorizo a gravação em áudio e vídeo das falas de meu(minha) filho(a), bem como a coleta de atividades, trabalhos e provas desenvolvidas por ele(a) durante a realização da pesquisa. Todo o material coletado para o estudo pode ser guardado em banco de dados e utilizado na dissertarção desta pesquisa e em outras pesquisas de natureza educacional.

Eu, voluntariamente, aceito que meu(minha) filho(a) participe desta pesquisa. Portanto, concordo com tudo que está escrito acima e dou meu consentimento.

Belo Horizonte, ____ de ___________________ de 2011.

______________________________ ______________________________
Nome legível do responsável pelo(a) aluno(a) Assinatura do responsável pelo(a) aluno(a)

ANEXO H - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - ALUNOS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS – PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – CONHECIMENTO E INCLUSÃO SOCIAL – FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (para os alunos)

Título do projeto: *Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática*

Pesquisadores responsáveis: Prof.ª Drª Jussara de Loiola Araújo (orientadora)
Bruna Karla Silva Reginaldo (mestranda)

Caros(as) alunos (as);

Você está sendo convidado(a) a participar como voluntário(a) em uma pesquisa educacional que tem como objetivo identificar e compreender o que desencadeia a argumentação matemática dos alunos em atividades de investigação. Esperamos que esse estudo contribua para que professores de Matemática possam aprimorar suas atividades em sala de aula, colaborando para a aprendizagem dos estudantes.

Para que a pesquisa possa ser desenvolvida, pretendemos: guardar cópias e analisar as atividades realizadas pelos alunos em algumas aulas de Matemática seja em folhas de exercícios, cadernos ou avaliações; gravar, em áudio, as falas e conversas dos alunos durante as aulas de Matemática; filmar os alunos enquanto realizam as atividades de Matemática; realizar entrevistas com os alunos, individualmente ou em grupos, dentro da própria escola, caso isso se torne necessário ao longo da pesquisa.

Esclarecemos que como participante dessa pesquisa, você pode fazer perguntas sobre a pesquisa a qualquer momento e tais questões serão respondidas. A participação é confidencial. Apenas as pesquisadoras responsáveis terão acesso à sua identidade. No caso de haver publicações ou apresentações relacionadas à pesquisa, nenhuma informação que permita a identificação da escola será revelada, pois serão usados nomes fictícios. Sua participação é voluntária e você é livre para deixar de participar na pesquisa a qualquer momento, bem como para se recusar a responder qualquer questão específica sem qualquer punição. Não haverá pagamento de qualquer espécie pela participação na pesquisa. Os benefícios serão indiretos, na medida em que o que aprendermos servirá para o desenvolvimento do ensino da Matemática, o que poderá beneficiar alunos(as) presentes e futuros. Caso você não autorize a análise dos seus registros escritos, ainda assim eles serão coletados, porém não os utilizaremos em nosso estudo e nem os manteremos em bancos de dados. Eles poderão, entretanto, ser usados pela professora, para fins didáticos, computados como exercício escolar ou como parte da avaliação escolar. Caso você não autorize a gravação em áudio das suas falas com colegas durante as aulas de matemática e/ou gravação em vídeo de suas atividades na sala de aula enquanto realiza as tarefas propostas, respeitaremos sua decisão e não faremos gravação em áudio ou vídeo de você e/ou do seu grupo. Em quaisquer dos casos, a recusa não acarretará nenhuma sanção a você. A recusa também não o(a) eximirá de participar normalmente das atividades escolares e do estudo da unidade de ensino. Os conhecimentos resultantes deste estudo serão divulgados em revistas especializadas, em congressos e simpósios sobre pesquisas educacionais e em uma dissertação de mestrado.

Em caso de dúvida, você pode entrar em contato com as pesquisadoras responsáveis através dos telefones e endereços eletrônicos fornecidos nesse termo. Informações adicionais podem ser obtidas no Comitê de Ética em Pesquisa (COEP) da Universidade Federal de Minas Gerais pelo telefone (31) 3409 4592 ou pelo endereço: Avenida Antônio Carlos, 6627 Unidade Administrativa II – 2º andar, sala 2005 – Campus Pampulha, Belo Horizonte, MG – Cep: 31270 901.

Assinatura do orientador da pesquisa
Prof. Dra. Jussara de Loiola Araújo
e-mail: jussara@mat.ufmg.br
Telefone: (31) 3423-7863
Universidade Federal de Minas Gerais
Faculdade de Educação
Belo Horizonte - MG

Assinatura do pesquisador co-responsável
Bruna Karla Silva Reginaldo
e-mail: bru_karla@yahoo.com.br
Telefone: (31) 3243-2451
Universidade Federal de Minas Gerais
Faculdade de Educação
Belo Horizonte - MG

CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAÇÃO DO (A) ALUNO (A) COMO SUJEITO NA PESQUISA ***"****Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática"*.

Eu li e entendi as informações e os detalhes descritos neste documento. Eu autorizo a coleta de registros escritos feitos por mim – atividades, trabalhos, respostas a questões e demais anotações feitas durante as aulas de Matemática, e autorizo a gravação em áudio e vídeo de minhas falas e conversas com colegas. Estou ciente que o material coletado durante a realização desta pesquisa serão guardados em banco de dados e utilizados em pesquisas de natureza educacional.

Eu, voluntariamente, aceito minha participação nessa pesquisa. Portanto, concordo com tudo que está escrito acima e dou meu consentimento.

Belo Horizonte, ____ de ___________________ de 2011.

Nome legível do(a) aluno(a)

Assinatura do(a) aluno(a)