

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Simulação de Sistemas de Radar de Penetração de Solo (GPR) via Formas Diferenciais

Alex Sander de Moura

Tese de doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Rodney Resende Saldanha

Coorientador: Prof. Elson José da Silva

Coorientador: Dr. Adriano Chaves Lisboa

Belo Horizonte, agosto de 2012

Tese de doutorado defendida e aprovada em 31 de agosto de 2012, pela Banca Examinadora constituída por:

Prof. Dr. Rodney Resende Saldanha
DEE (UFMG) - Orientador

Prof. Dr. Élon José da Silva
DEE (UFMG) - Coorientador

Dr. Adriano Chaves Lisboa
ENACON - Coorientador

Prof. Dr. Maurício Barros Corrêa Júnior
Depto. Matemática - (UFV)

Prof. Dr. Xisto Lucas Travassos Junior
CIMATEC - (SENAI CIMATEC)

Prof. Dr. Cássio Gonçalves do Rego
DELT - (UFMG)

Prof. Dr. Ricardo Luiz da Silva Adriano
DEE - (UFMG)

Dedico esta tese

*à Deus,
à minha esposa Fabrícia
aos meus filhos Murillo e Guilherme
Pelo apoio, carinho e compreensão.*

Agradecimentos

Eis que chegou o momento de expressar sinceros agradecimentos a muitos e tantos familiares e amigos pela primeira parte de um projeto que se iniciou em março de 2009. Primeiramente é claro que preciso agradecer aquele que é o grande amigo nas horas difíceis, a base da minha caminhada, o meu esconderijo nos momentos de receio que é o Senhor meu Deus. Sei que sem a sua aprovação eu não estaria escrevendo estes agradecimentos por um trabalho realizado.

Bem sei que corro o risco de não dar conta desse muitíssimo obrigado como é merecido, porque será difícil exprimir toda a minha gratidão aqueles que tem estado comigo neste projeto. Gostaria de deixar um agradecimento especial à minha esposa, companheira e amiga Fabrícia que durante este período fez do nosso lar um porto tranquilo onde encontrava o refúgio e o descanso depois das intermináveis viagens Teófilo Otoni a Belo Horizonte quase que semanalmente. A sua paciência e compreensão pelos muitos finais de semana que não pude dar a atenção devida e os estudos até de madrugada.

Aos meus filhinhos Murillo e Guilherme que são uma das razões de não desistir e tentar conquistar os meus objetivos. Ao meus meninos que em meio aos artigos, a programação, o stress sempre viam com um abraço ou um beijo para renovar as minhas forças. Gostaria de citar o meu amigo Werley, amigo a mais de 20 anos, fizemos a graduação, mestrado e agora companheiros neste curso de doutorado. Lembro de amigos que conquistei ao longo deste primeiros dois anos, e cito: Bernadeth que nos momentos difíceis das disciplinas cursadas e mesmo envolvida na conclusão do seu doutorado estava ali presente, ajudando e nos animando a conquistar. Naísses que foi um amigo especial que nos ajudou a conhecer e a entender o mundo da programação. Deixo por final para falar de três pessoas também muito especiais: Ao Professor Rodney Rezende Saldanha agradeço profundamente por ter assumido a orientação deste projeto de doutorado em um tema absolutamente novo para a pós-graduação da DEE-

UFMG, tendo-me brindado com importante colaboração na discussão do trabalho, dosando as críticas com comentários de incentivo.

Ao Professor Élon José da Silva sou imensamente grato pela sua co-orientação e por ter me apresentado o mundo das Formas diferenciais e o incentivo e fortalecimento através da leitura atenta dos vários manuscritos. Não apenas valorizo os comentários e observações críticas a respeito do texto, as discussões teóricas de muita valia para o meu amadurecimento na área. Ao Dr. Adriano Chaves Lisboa meus agradecimentos pela sua co-orientação e permanente solicitude em todas as fases do projeto, bem como pelo cuidado e diligência na busca e verificação do material que estava sendo produzido. Seu ensino e cuidado visando a construção de códigos com uma estrutura extremamente profissional e elegante.

Aos companheiros de trabalho do GOPAC, que compartilharam ali momentos de tensão devido aos prazos dos trabalhos a serem feitos, mas também momentos de extrema alegria em ambiente extremamente saudável e agradável.

Há muito mais a quem agradecer... A todos aqueles que, embora não nomeados, me brindaram com seus inestimáveis apoios em distintos momentos e por suas presenças afetivas, o meu reconhecido e carinhoso muito obrigado!

Todos vocês são co-autores deste trabalho.

Resumo

O principal interesse desta tese está na utilização de um método numérico aplicado a problemas de radar de penetração de solo (GPR - Ground Penetration Radar) com o uso de malhas simpliciais.

Para o desenvolvimento desta proposta é utilizada a linguagem das formas diferenciais aplicada ao eletromagnetismo. Esta escolha se deu devido ao fato de que o cálculo exterior das formas diferenciais fornece uma estrutura matemática para a teoria de campos eletromagnéticos que combina muito da generalidade da análise tensorial com a simplicidade computacional e concretude do cálculo vetorial.

Pode-se perceber que embora o cálculo das formas diferenciais seja em muitos aspectos semelhante ao cálculo vetorial, é na verdade mais geral do que a notação de vetor.

As seguintes contribuições deste trabalho são:

- Desenvolvimento de uma técnica de aproximação esparsa para a inversa das matrizes de Hodge.
- Desenvolvimento de uma condição de contorno absorvente para se tratar meios com perdas.

Estas contribuições irão possibilitar a aplicação da teoria de formas diferenciais para a simulação de sistemas de radar de penetração de solo.

Palavras-chave: GPR, formas diferenciais, equações de Maxwell.

Abstract

The main interest of this thesis is the use of a numerical method applied to ground penetrating radar (GPR) problems using tetrahedral mesh.

To develop this proposal it is used the language of differential forms applied to electromagnetism. This choice was made given the fact that the exterior calculus of differential forms provides a mathematical framework for the theory of electromagnetic fields that combines much of the generality of the tensor analysis with the computational simplicity and concreteness of the vector calculus.

It can be seen that although the calculus of differential forms is in many aspects similar to the vector calculus, it is in fact more general than the vector notation.

The following contributions of this work are:

- Development of a sparse approximation technique for the inverse of Hodge matrices.
- Development of an absorbing boundary condition to deal with lossy media.

These contributions will enable the application of the theory of differential forms for the simulation of soil penetrating radar systems.

Keywords: GPR, differential forms, Maxwell's equations.

Sumário

Sumário	viii
Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xv
Lista de Símbolos e Abreviaturas	xvi
1 Introdução	1
1.1 Relevância	1
1.2 Motivação	3
1.3 Objetivos	5
1.4 Publicações decorrentes do trabalho	6
1.5 Estrutura do texto	7
2 Equações de Maxwell em formas diferenciais	9
2.1 Introdução	9
2.2 Noção intuitiva e formal para formas diferenciais	10
2.2.1 Noção intuitiva	11
2.2.2 Definição formal para formas diferenciais	12
2.3 Campos eletromagnéticos representados via formas diferenciais	13
2.3.1 1-formas	14
2.3.2 2-formas	17
2.3.3 3-formas	19
2.3.4 0-formas	20
2.4 Derivada Exterior	20
2.4.1 O operador derivada exterior	20
2.4.2 Teorema Generalizado de Stokes	22
2.4.3 Complexo de deRham	22

2.5	Equações de Maxwell na forma diferencial e integral	24
2.6	Relações constitutivas	24
2.6.1	Métrica	25
2.6.2	Operador Estrela de Hodge	26
2.7	Contração de Poincaré	28
2.8	Traço de uma forma diferencial	29
3	Discretização das Equações de Maxwell	31
3.1	Introdução	31
3.2	Simplexos e complexos simpliciais	31
3.2.1	Simplexos	32
3.2.2	Orientação de um simplexo	33
3.2.3	Fronteira de um simplexo	34
3.2.4	Complexo simplicial	35
3.3	Cadeias e co-cadeias	36
3.3.1	Cadeias	37
3.3.2	Operador bordo sobre cadeias	38
3.3.3	Co-cadeias	39
3.3.4	Implementação de cadeias e cocadeias	40
3.3.5	Formas diferenciais discretas	40
3.4	Derivada exterior discreta	42
3.4.1	Implementação da derivada exterior discreta	42
3.5	Malha primal e dual	46
3.6	p -formas de Whitney	49
3.6.1	Funções interpolantes para 0 e 1-formas em 2D	50
3.6.2	Formas de Whitney	52
3.7	Operador estrela de Hodge discreto	55
3.7.1	Matrizes Geométrica (Yee Hodge)	56
3.7.2	Matrizes Galerkin Hodge	57
3.7.3	Atuação do operador de Hodge discreto	58
3.8	Equações de Maxwell na forma discreta	60
3.9	Exemplos	61
3.9.1	Calha retangular	61
3.9.2	Guia de onda retangular 2D	64
3.9.3	Guia de onda retangular 3D	67

4	Esparsificação Recursiva para matrizes de Hodge	70
4.1	Introdução	70
4.2	Inversão por blocos	71
4.3	Critério de esparsificação	72
4.3.1	Esparsificação via parâmetro threshold	73
4.4	Análise de estabilidade	75
4.5	Exemplos Numericos	78
5	CFS-PML para Formas Diferenciais	83
5.1	Equações de Maxwell modificadas	85
5.2	Equações CFS-PML de Maxwell semi-discretas	87
5.2.1	Domínios bidimensionais	87
5.2.1.1	Modo TE	87
5.2.1.2	Modo TM	90
5.2.2	Domínios tridimensionais	91
5.2.3	Equações CFS-PML semi-discretas	94
5.2.3.1	Modo TE 2D	94
5.2.3.2	Modo TM 2D	94
5.2.3.3	Domínios 3D	94
5.3	Discretização no tempo das equações CFS-PML de Maxwell	95
5.3.1	Condições de contorno através de particionamento de matrizes	98
5.4	Parâmetros CFS-PML	100
5.5	Erro de reflexão para CFS-PML	102
5.5.1	Erro de reflexão 2D - modo TM	102
5.5.2	Erro de reflexão 2D - modo TE	105
5.5.3	Erro de reflexão 3D	106
6	Simulações Numéricas para sistemas de GPR	109
6.1	Introdução	109
6.2	Histórico do GPR	110
6.3	Princípios de um GPR	112
6.3.1	Características das ondas de radar	113
6.3.2	Geração e gravação de ondas de radar	116
6.3.3	Perda de Energia e profundidade de penetração	117
6.4	Modelagem computacional de Sistemas de GPR	119
6.4.1	Levantamento de superfícies baseados em reflexão - 2d	120

6.4.2	Antena Corneta - 2d	126
6.4.3	Detecção de estruturas em concreto	130
6.4.4	Antena Horn 3D	134
7	Conclusão	138
	Referências Bibliográficas	140

Lista de Figuras

2.1	Curva C unidimensional em \mathbb{R}^3	12
2.2	1-forma dx - integração sobre linha.	14
2.3	Exemplos de 1-forma.	15
2.4	2-forma $dx dy$ integrada sobre área.	18
2.5	3-forma $8 dx dy dz$ integrada sobre volume.	19
2.6	Diagrama de correspondência.	21
2.7	(a) Notação vetorial. (b) Formas diferenciais e operadores.	28
3.1	p -simplexos orientados.	34
3.2	Operador bordo.	34
3.3	Imagem do operador bordo.	35
3.4	Complexos simpliciais.	36
3.5	Triangulação de polígono.	36
3.6	Exemplo de 0-1-2 cadeias de multiplicidade 1.	37
3.7	A cadeia complexa de um tetraedro.	39
3.8	Derivada exterior discreta.	43
3.9	Complexo simplicial em 2D.	44
3.10	Malha primal e dual em 2D.	46
3.11	Dualidade Circuncêntrica.	48
3.12	Região convexa.	49
3.13	Função de forma nodal - 0-formas interpolantes.	50
3.14	Função de forma aresta - 1-formas interpolantes.	51
3.15	Forma de Whitney - coordenadas baricêntricas.	53
3.16	Elementos de Whitney.	54
3.17	Operador derivada exterior discreto e operador estrela de Hodge.	59
3.18	Equipotenciais e distribuição do campo elétrico - calha 2D.	62
3.19	Solução para o problema da calha em 2D.	63
3.20	Erro absoluto percentual E_r , calculado para o potencial.	64

3.21	Guia de onda retangular 2D.	64
3.22	Campo elétrico \mathcal{E}_y no meio do guia 2D.	66
3.23	Erro em dB da distribuição do campo elétrico \mathcal{E}_y	67
3.24	Distribuição do campo elétrico \mathcal{E}_y no guia 2D.	67
3.25	Guia de onda retangular 3D.	68
3.26	Campo elétrico \mathcal{E}_y no ponto $p = (0.0546, 0.0273, 0.385)$	69
3.27	Carta de campo - Comportamento dos campos elétrico \mathcal{E} e magnético \mathcal{H}	69
4.1	Erro relativo dos autovalores.	75
4.2	Erro relativo da diagonal.	76
4.3	Padrão de esparsidade da sequência de matrizes.	77
4.4	Padrão de esparsidade: $\mathbf{M}_1(\epsilon)$ e $\mathbf{M}_1^{-1}(\epsilon)$	79
4.5	Erro relativo do método da esparsificação recursiva.	80
4.6	Erro relativo do método da bi-esparsificação recursiva.	81
5.1	Truncamento de domínio computacional para simulação de GPR.	83
5.2	Geometria computacional com região CFS-PML.	102
5.3	Pulso Blackman-Harris com frequência dominante de 300 MHz.	103
5.4	Fotografias mostrando amplitude do campo elétrico \mathcal{E}_y	103
5.5	Erro de reflexão em função do tempo calculado nos pontos A, B e C.	104
5.6	Erro de reflexão em função do tempo calculado nos pontos A, B e C.	105
5.7	Geometria computacional e pontos onde erro de reflexão foi calculado.	106
5.8	Erro de reflexão em função do tempo calculado nos pontos da geometria.	107
5.9	Erro de reflexão em função do tempo calculado nos pontos da geometria.	107
5.10	Erro de reflexão em função do tempo calculado nos pontos da geometria.	108
6.1	Esquema básico de um GPR para exploração do subsolo.	112
6.2	Diferentes trajetórias de ondas de GPR.	115
6.3	Redução da intensidade do sinal.	118
6.4	Modelo com propriedades elétricas.	121
6.5	Erro máximo com o uso da esparsificação recursiva.	122
6.6	Erro máximo com o uso da esparsificação recursiva em função do tempo.	123
6.7	Fotografias mostrando amplitude do campo \mathcal{E}_y em $t = 3.38, 5.92, 8.46\text{ns}$	124
6.8	Fotografias mostrando amplitude do campo \mathcal{E}_y em $t = 11.84, 15.23, 20.31\text{ns}$	124
6.9	Fotografias mostrando amplitude do campo \mathcal{E}_y em $t = 23.69, 27.08, 30.46\text{ns}$	125
6.10	Fotografias mostrando amplitude do campo \mathcal{E}_y em $t = 35.54, 59.24, 69.39\text{ns}$	125
6.11	Componente de campo \mathcal{E}_y observada por diversas antenas.	126

6.12	Modelo computacional - antena corneta 2D e objeto enterrado.	127
6.13	Fotografias componente do campo elétrico - antena corneta 2D.	128
6.14	Comparação dos sinais tanto com e sem a presença do objeto enterrado. . . .	129
6.15	Diferença entre os sinais - com e sem a presença do objeto enterrado.	129
6.16	Detecção de estrutura em concreto por GPR.	130
6.17	Pulso Blackman-Harris com frequência dominante de 500 MHz.	130
6.18	Simulação sem a presença da estrutura de concreto.	131
6.19	Simulação com a presença da estrutura de concreto.	133
6.20	Simulação com a presença da estrutura de concreto.	134
6.21	Antena Corneta 3D propagando sobre solo com perdas.	135
6.22	Antena Corneta 3D.	135
6.23	Comparação dos sinais tanto com e sem a presença da esfera enterrada. . . .	136
6.24	Diferença entre os sinais - com e sem a presença da esfera enterrada.	137

Lista de Tabelas

2.1	Representação de campos e fontes via formas diferenciais.	27
3.1	p -Simplexos em uma malha simplicial	32
4.1	Tempo de Processamento - Esparsificação Recursiva.	74
4.2	Erro Relativo - Esparsificação Recursiva.	78
4.3	Erro relativo - Bi-Sparsificação Recursiva.	81
5.1	Grau das formas diferenciais X dimensão e modo de propagação.	99

Lista de Símbolos e Abreviaturas

ϵ	Permissividade elétrica
μ	Permeabilidade magnética
ρ	Densidade volumétrica de carga
\star	Operador estrela de Hodge
\star_ϵ	Operador estrela de Hodge - permissividade
\star_μ	Operador estrela de Hodge - permeabilidade
\star_σ	Operador estrela de Hodge - condutividade
\vec{B}	Densidade de fluxo magnético
\vec{D}	Densidade de fluxo elétrico
\vec{J}	Densidade de corrente
q	Densidade de carga escalar
\bigwedge^k	Espaço vetorial das k -formas em um ponto $x \in \mathbf{M}$
Δt	Passo de tempo
d	Operador derivada exterior
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	Espaço euclidiano n -dimensional
$\mathbf{M}_1(\epsilon)$	Matriz de Hodge - permissividade
$\mathbf{M}_2(\mu)$	Matriz de Hodge - permeabilidade

$\mathbf{M}_3(\sigma)$	Matriz de Hodge - condutividade
\mathbf{b}	Vetor grau de liberdade - densidade de fluxo magnético
\mathbf{d}	Vetor grau de liberdade - densidade elétrica
\mathbf{e}	Vetor grau de liberdade - força eletromotriz
\mathbf{h}	Vetor grau de liberdade - força magnetomotriz
\mathbf{j}	Vetor grau de liberdade - densidade de corrente
\mathcal{C}_p	Espaço das p -cadeias
\mathcal{E}	1-forma campo elétrico
\mathcal{H}	1-forma campo magnético
\mathcal{K}	Complexo simplicial
ν	Relutividade
$\omega^k _{\Gamma}$	Traço de uma k -forma
ω^0	0-forma de Whitney
ω^1	1-forma de Whitney
ω^2	2-forma de Whitney
$\overline{\overline{\lambda}}(\omega)$	Tensor PML
∂_p	Operador bordo
∂_t	Derivada no tempo
σ	Condutividade elétrica
$\vec{\nabla}$	Operador gradiente
$\vec{\nabla} \cdot$	Operador divergente
$\vec{\nabla} \times$	Operador rotacional
\wedge	Produto exterior entre uma q -forma ω^q e uma r -forma α^r
\vec{E}	Intensidade do campo elétrico

\vec{H}	Intensidade do campo magnético
ABC	Absorbing Boundary Conditions
CFS-PML	Complex Frequency Shifted-Perfectly Matched Layer
FDTD	Finite-Difference Time-Domain
FETD	Finite Element Time Domain
GPR	Ground Penetrating Radar
NDT	Non-destructive Testing
OEMs	Ondas eletromagnéticas
PEC	Perfect electric conductor
PML	Perfectly Matched Layer
TE	Modo transversal elétrico
TM	Modo transversal magnético

Capítulo 1

Introdução

1.1 Relevância

A determinação de espessuras de horizontes de solos e de laminais d'água tanto de lagos como de lençóis freáticos, o estudo dos estratos ou camadas de rochas, buscando determinar os processos e eventos que as formaram, a detecção de fraturas em rochas preenchidas por ar ou por água em subsuperfícies, a detecção de diferentes estruturas no subsolo, a identificação de lixo tóxico enterrado, a investigação arqueológica, prospecção de petróleo, detecção de inclusões em estruturas de concreto, estimação da espessura de pavimentos entre outras tantas aplicações são possíveis através da utilização dos Radares de Penetração de Solo (**GPR - Ground Penetrating Radar**)*.

Pode-se salientar que uma das questões relevantes no estudo de sistemas de GPR está nas características que este tipo de sistema possui, e que possibilitam a sua utilização como ferramenta para testes não destrutivos. A essência de um sistema de GPR está na utilização de ondas eletromagnéticas, para o estudo de estruturas subsuperficiais, ou seja, um pulso de energia é irradiado para o subsolo por intermédio de uma antena transmissora, sofrendo reflexões, refrações e difrações, sendo então parcialmente captado por uma antena receptora.

Na utilização de sistemas de GPR, dificuldades podem surgir na detecção de objetos enterrados devido a alguns fatores, como por exemplo:

* Será usado em todo o texto a sigla em inglês para Radar de Penetração de Solo.

- As reflexões causadas pelos objetos serem pequenas em comparação a outros sinais, que são incidentes sobre a antena receptora.
- Meios agressivos que podem eliminar completamente o sinal transmitido.
- Tratamento de superfícies complexas.

Dai surge como uma solução para entender estes fenômenos a utilização de simulação computacional de sistemas de GPR. O processo de simulação é um instrumento que possibilita o modelamento geológico, ou seja, um programa de computador simula o fenômeno eletromagnético em um modelo pré concebido, possibilitando assim que através desta simulação se observe o perfil geológico imaginado para ser comparado com o perfil obtido pelo GPR. O grande ganho com o uso de simuladores é a informação obtida por diversas fontes; seja nas características do meio, seja nas características das feições do perfil, ou nas mais diversas possibilidades que podem ser criadas em um ambiente de simulação computacional.

Espera-se que um modelo numérico para sistemas de GPR possa fornecer meios para se explorar a relação entre as propriedades do subsolo e os dados obtidos pelo sistema de GPR. Neste tipo de simulação deve-se considerar o sistema de uma maneira completa, ou seja, não se pode considerar seus componentes individuais separadamente. Por exemplo, se as antenas forem analisadas fora do sistema (isoladas de outros elementos), a análise não levará em consideração o acoplamento entre as antenas e a superfície da terra. Dependendo do tiro de antena utilizada grandezas como a impedância de entrada da antena já não seriam corretas. Assim, as antenas, a terra, e o objeto enterrado devem ser modelados simultaneamente a fim de se ter uma análise precisa do sistema.

Em virtude disto, é necessário a utilização de um método capaz de simular de maneira eficiente toda a estrutura de um problema de GPR, que incluem a geometria complexa de objetos enterrados, a geometria complexa de antenas, a modelagem do solo levando-se em consideração a condutividade, a dispersividade, a anisotropia, a eficiência da aplicação de condições de contorno absorventes para truncar o domínio computacional.

1.2 Motivação

Para que se tenha um modelamento eficiente dos fenômenos eletromagnéticos envolvendo aplicações de GPR, é necessário a utilização de técnicas numéricas que resolvam problemas físicos com um grau elevado de dificuldade. Logo, a motivação principal deste trabalho está na aplicação de um método numérico para a solução de problemas que envolvam o uso dos georadares.

Para o desenvolvimento desta proposta utiliza-se o cálculo exterior de formas diferenciais que fornece uma estrutura matemática para a teoria de campos eletromagnéticos que combina muito da generalidade da análise tensorial com a simplicidade computacional e concretude do cálculo vetorial. Observa-se que embora o cálculo das formas diferenciais seja em muitos aspectos semelhante ao cálculo vetorial, é na verdade mais geral do que a notação de vetor [Warnick et al., 1997].

O uso das formas diferenciais está baseado em se ter as equações de Maxwell através da construção de dois sistemas matriciais em termos da intensidade do campo elétrico \vec{E} (representado como a formulação primal) e a intensidade do campo magnético \vec{H} (denotada como a formulação dual), respectivamente. A conexão entre a formulação primal e dual é estabelecida através do operador estrela de Hodge [He and Teixeira, 2006b].

A contrapartida discreta do operador estrela de Hodge será definida em função da malha utilizada na discretização do domínio estudado, para malhas triangulares e tetraédricas por exemplo, se tem as matrizes de Galerkin Hodge que geram um sistema linear esparsa [Bossavit, 1988]. Para se explicitar totalmente este sistema linear é necessário a inversão das matrizes de Galerkin Hodge, que possuem inversa tipicamente cheias.

[Bossavit and Kettunen, 1999] apresentam uma técnica de lumping para se obter uma aproximação diagonal para a inversa desta matriz, mas observou-se a necessidade da imposição de certas condições sobre a malha para se garantir a positividade definida destas aproximações, [He and Teixeira, 2007] propõem um método de aproximação para a inversa das matrizes de Galerkin Hodge que é incondicionalmente estável, totalmente explícito e esparsa, um fator negativo nesta aproximação está no fato de se ter que calcular a inversa da matriz de Hodge explicitamente e isto leva a um custo computacional considerável.

É proposto neste trabalho de doutorado uma técnica de esparsificação [Moura et al., 2012b] da inversa da matriz de Hodge que consiste no particionamento recursivo desta matriz em blocos e a obtenção de aproximações esparsas das submatrizes durante o processo de inversão por blocos, o que leva a um menor custo computacional.

Devido às limitações de tempo e memória, geralmente o domínio de um modelo computacional para simulação de campos eletromagnéticos é truncado por uma fronteira artificial em que condições de contorno absorventes (**ABC - Absorbing Boundary Conditions**) são impostas. O domínio computacional é truncado de tal forma que os campos na região de interesse podem ser determinados e qualquer onda incidente oriunda da fronteira seja absorvida. Uma abordagem alternativa para se impor tais ABC's foi proposta por Berenger [Berenger, 1994] para o método das diferenças finitas no domínio do tempo (**FDTD - Finite-Difference Time-Domain**).

[Berenger, 1994] mostrou que um meio especial de absorção pode ser construído de forma que as ondas não reflitam na interface, chamou de camadas perfeitamente casadas (**PML - Perfectly Matched Layer**). Por esta técnica, a região de fronteira absorvente é preenchida com um material de diferentes propriedades condutivas, escalonados por planos paralelos.

Embora a PML foi introduzida em aplicações para FDTD[Berenger, 1994], ela também pode ser usada na modelagem para o método dos elementos finitos no domínio do tempo (**FEM - Finite Element Method**), [Kuzuoglu and Mittra, 1997] fazem uma investigação teórica e numérica da PML aplicada ao FEM. É verificado que é possível estender os conceitos cartesianos de PML envolvendo semi-espacos para geometrias cilíndricas e esféricas que são apropriadas para as fronteiras fechadas em duas e três dimensões através da definição de camadas de perdas anisotrópicas em um sistema de coordenadas relevante e apropriado ao problema.

[Movahhedi et al., 2007] apresentam uma nova formulação para implementar um tipo de PML, denominada de CFS-PML (**Complex Frequency Shifted-Perfectly Matched Layer**) para o truncamentos de fronteiras em domínios 2D aplicado ao FETD. Este método atua diretamente sobre as equações de Maxwell. É mostrado que o método proposto é altamente absorvente para os modos evanescentes no cálculo da interação da onda em estruturas alongadas ou cantos agudos. O impacto dos parâmetros CFS-PML sobre o erro de reflexão é investigado e as melhores escolhas destes parâmetros são observadas.

O uso de formas diferenciais nos permite introduzir um método misto de elementos finitos no domínio do tempo (**FETD - Finite Element Time Domain**) que é baseada em equações de Maxwell de primeira ordem e que usa simultaneamente os campos elétrico e magnético como incógnitas. As p -formas de Whitney são usadas para representar a intensidade do campo elétrico e a densidade de fluxo magnético [Bossavit, 1988]. As equações de atualização se assemelham as equações utilizadas no FDTD com a ressalva de que a atualização deste método requer a solução de um sistema esparso [Moura et al., 2012b].

Neste trabalho, uma CFS-PML é implementada usando a discretização de primeira ordem das equações de Maxwell com a aplicação dos elementos de Whitney e da teoria das formas diferenciais. Esta abordagem é voltada para meios com perdas e simplifica o uso do CFS-PML com o uso de matrizes de incidência.

Desta forma, o uso das formas diferenciais será uma opção viável para este tipo de aplicação e surge a motivação para este trabalho de doutorado, unir a grande capacidade do método FDTD com a possibilidade de se trabalhar com geometrias complicadas. O objetivo é aplicar de uma maneira eficiente a teoria de formas diferenciais ao estudo de sistemas de GPR, levando-se em conta a necessidade de adaptar e criar meios de inserir uma PML para a absorção das ondas e simular perfeitamente solos dispersivos, não homogêneos e condutivos em domínios tridimensionais.

1.3 Objetivos

Este trabalho de doutorado tem como objetivo principal a obtenção de uma ferramenta computacional baseada na teoria de formas diferenciais. Essa ferramenta irá possibilitar o modelamento de sistemas de GPR, levando em conta a geometria das antenas, as características do solo e as geometrias de objetos enterrados.

Como contribuições relevantes deste trabalho destacam-se:

- O tratamento das matrizes de massas através do processos de esparsificação recursiva que nos fornece uma aproximação esparsa para as inversas destas matrizes, possibilitando assim, um ganho no tempo computacional no que se refere a resolução dos sistemas lineares gerados neste tipo de modelo.

- A formulação de uma condição de contorno absorvente, que denomina-se neste trabalho de CFS-PML (do inglês complex frequency shifted-perfectly matched layer)[†], desenvolvida para a teoria de formas diferenciais.

1.4 Publicações decorrentes do trabalho

Artigos publicados

- A. S. Moura, R. R. Saldanha, E. J. Silva, A. C. Lisboa, W. G. Facco, and N. Z. Lima. A recursive sparsification of the inverse hodge matrix. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 48(2):611-614, 2012.
- W. G. Facco, E. J. Silva, A. S. Moura, N. Z. Lima and R. R. Saldanha. Handling Material Discontinuities in the Generalized Finite Element Method to Solve Wave Propagation Problems. *IEEE Transactions on Magnetics*,48(2):607-610, 2012.
- N. Z. Lima, R. C. Mesquita, W. G. Facco, A. S. Moura, E. J. Silva. The Nonconforming Point Interpolation Method Applied to Electromagnetic Problems. *IEEE Transactions on Magnetics*,48(2):619-622, 2012.

Artigos aceitos para publicação

- A. S. Moura, B. N. Gomes, R. R. Saldanha, E. J. Silva, A. C. Lisboa, and W. G. Facco. Otimização dos parâmetros CFS-PML utilizando Evolução Diferencial. *Momag*, 2012.
- A. S. Moura, R. R. Saldanha, E. J. Silva, M. F. Pantoja, A. C. Lisboa and W. G. Facco. CFS-PML via Discrete Differential Forms for Ground Penetrating Radar Applications, *CEFC* 2012.
- A. S. Moura, R. R. Saldanha, E. J. Silva, A. C. Lisboa, W. G. Facco, and N. Z. Lima. Approximation of the inverse of the Hodge Matrix via Sparsity Pattern, *CEFC* 2012.
- W. G. Facco, E. J. Silva, R. Adriano and A. S. Moura. Treating Curvilinear Interfaces in a Non-Conforming Generalized Finite Element Method Enriched by Plane Waves, *CEFC* 2012.

[†] Será usado ao longo do texto a sigla em inglês para este tipo de PML.

- W. G. Facco, E. J. Silva, R. Adriano, A. S. Moura and N. Z. Lima. Handling Material Discontinuities in a Non-Conforming Generalized Finite Element Method to Solve Wave Propagation Problems, *Microw. Opt. Technol. Lett.*

Artigos submetidos para publicação

- A. S. Moura, R. R. Saldanha, E. J. Silva, M. F. Pantoja, A. C. Lisboa and W. G. Facco. Discretization of the CFS-PML for Computational Electromagnetics Using Discrete Differential Forms, *Microw. Opt. Technol. Lett.*, (artigo submetido maio/2012).

1.5 Estrutura do texto

A estrutura desta tese esta dividida em seis capítulos. O capítulo 2 consiste na apresentação teórica das formas diferenciais com enfase em sua aplicação ao eletromagnetismo. O cálculo das formas exteriores permite que as equações diferenciais e integrais sejam expressas em espaços suaves e curvos de uma maneira bem consistente, ao revelar um conjunto de invariantes geométricas, tais como, as operações clássicas com gradientes, divergentes e rotacionais que serão unificadas pelo operador derivada exterior, bem como os teoremas de Green, Gauss e Stokes que podem ser representados de uma maneira generalizada pelo Teorema Generalizado de Stokes.

No fim deste capítulo as equações de Maxwell na forma diferencial e integral são apresentadas, juntamente com suas relações constitutivas.

No capítulo 3 será apresentado através da teoria dos complexos simpliciais a contrapartida discreta para a noção de formas diferenciais. Será mostrado que este tipo de discretização irá representar numericamente todos os resultados obtidos no modelo contínuo. Este capítulo se encerra com a apresentação de um esquema leap-frog para as equações de Maxwell no domínio do tempo. Exemplos são apresentados para mostrar a versatilidade e simplicidade do método.

No capítulo 4 uma técnica de esparsificação é apresentada para as matrizes de Hodge, que consiste em se obter uma aproximação esparsa para a inversa destas matrizes. Neste capítulo mostra-se que esta abordagem leva a um custo computacional consideravelmente menor em relação a uma inversão direta. A esparsificação recursiva consiste no particionamento recursivo

da matriz de Hodge em blocos e a aproximação destas submatrizes por matrizes esparsas durante o processo de inversão por blocos.

Experimentos numéricos são apresentados e mostram que o método leva a um menor número de operações no processo de inversão (ou seja, a um menor custo computacional) e conclui-se através destes mesmos testes que o método é incondicionalmente estável. Outro ponto importante está no fato que este tipo de aproximação não afeta a estabilidade do sistema ao longo do tempo.

No capítulo 5 é apresentado uma discretização numérica para uma PML para se truncar domínios abertos, esta condição de contorno absorvente será denominada por CFS-PML. A discretização das equações CFS-PML será desenvolvida sobre a teoria das formas diferenciais aplicadas ao eletromagnetismo, e isto irá garantir uma simplificação nos algoritmos.

Para a discretização utiliza-se a seguinte estratégia sobre as equações de Maxwell, a lei de Ampere-Maxwell com as relações constitutivas inseridas pelo operador de Hodge será discretizada no espaço pelo método de Galerkin. Por outro lado, a lei de Faraday é representada discretamente através das relações topológicas através das matrizes de incidência.

Para a discretização temporal utiliza-se um esquema leap-frog juntamente com uma convolução recursiva dentro da região PML. Três exemplos são apresentados para validar a CFS-PML para domínios bi e tridimensionais.

O capítulo 6 é dedicado inteiramente a aplicação da teoria das formas diferenciais sobre sistemas de radares de penetração de solo. É apresentado portanto, uma pequena introdução sobre a teoria de radares de penetração de solo e as condições necessárias para se modelar computacionalmente tais modelos. Logo após são apresentados a implementação de modelos de GPR em espaços bi e tridimensionais.

Capítulo 2

Equações de Maxwell em formas diferenciais

2.1 Introdução

Ao longo da metade do século XIX, vários cientistas contribuíram para o desenvolvimento da teoria eletromagnética, convergindo para a publicação do físico e matemático James Clerk Maxwell intitulada de “**A Treatise on Electricity and Magnetism**” [Maxwell, 1873]. Com esta publicação Maxwell unificou os vários fenômenos eletromagnéticos outrora considerados dissociados em um único conjunto de equações, as chamadas **Equações de Maxwell**.

A partir do século XX há o surgimento de um novo formalismo matemático para se tratar as equações de Maxwell que são as formas diferenciais [von Westenholtz, 1981]. Em comparação com a análise vetorial e o cálculo tensorial, as formas diferenciais se destacam pelo fato de unirem o melhor destas duas teorias, ou seja, nas formas diferenciais há uma generalidade nos conceitos eletromagnéticos como no caso do cálculo tensorial e a simplicidade da análise vetorial [Desbrun et al., 2006].

A natureza geométrica dos modelos geralmente estudados por exemplo no eletromagnetismo são melhor expressadas e esclarecidas através do uso do cálculo exterior das formas diferenciais, introduzido por [Cartan, 1945]. Esta geometria baseada no cálculo foi desenvolvida e aperfeiçoada para se tornar a base da geometria diferencial moderna.

Segundo [Bryant, 1991], o cálculo das formas exteriores permite que as equações diferenciais e integrais sejam expressas em espaços suaves e curvos de uma maneira bem consistente, ao revelar um conjunto de invariantes geométricas. A este conjunto de invariantes geométricas pode-se citar, por exemplo, as operações clássicas com gradientes, divergentes e rotacionais, bem como os teoremas de Green, Gauss e Stokes que podem ser representados de uma maneira concisa em termos das formas diferenciais com a utilização de um único operador denominado derivada exterior, estas observações induzem a uma generalidade desta abordagem.

Observa-se também que a derivada exterior das formas diferenciais representa a parte anti-simétrica das derivadas e isto é uma das mais importantes partes de diferenciação, já que a derivada exterior é um operador invariante para mudança de sistemas de coordenadas. Na verdade, [Sharpe, 1997] demonstra que todas as equações diferenciais podem ser expressas em termos da derivada exterior. Como consequência, várias iniciativas foram destinadas a formular as leis físicas em termos das formas diferenciais, mencionamos aqui os trabalhos de [Burke, 1985], [Lovelock and Rund, 1993], [Bossavit, 1994] e [Flanders, 2001] que são livros que oferecem um tratamento teórico de várias teorias físicas com o uso das formas diferenciais.

Neste capítulo é apresentado uma abordagem sobre os conceitos importantes das formas diferenciais [Flanders, 1989], e o texto será desenvolvido em função das aplicações ao eletromagnetismo [Deschamps, 1981, Warnick et al., 1997]. Em se tratando de aplicações, podemos ainda destacar os importantes trabalhos de [Bossavit, 1994, Bossavit, 1988, Bossavit and Kettunen, 1999, Bossavit, 2001, Bossavit, 2005] que tratam da teoria das formas diferenciais e de sua aplicação ao eletromagnetismo. Nestes trabalhos também são abordados as p -formas de Whitney que são usadas como funções de aproximação para os campos eletromagnéticos. Outros trabalhos importantes são os de [He and Teixeira, 2007] e [Donderici and Teixeira, 2008] que tratam da aplicação das formas diferenciais em meios dispersivos e a explicitação do método através da esparsificação da matriz de Hodge.

2.2 Noção intuitiva e formal para formas diferenciais

Nesta seção será introduzida a teoria de formas diferenciais através de uma visão puramente intuitiva. Esta opção tem como objetivo mostrar a simplicidade da teoria e em sequência será apresentada a definição formal para as formas diferenciais.

2.2.1 Noção intuitiva

De uma maneira intuitiva define-se formas diferenciais como sendo as grandezas passíveis de integração, ou seja, as quantidades correspondentes ao integrando que ocorrem sobre o sinal da integral. No domínio tridimensional têm-se 0-formas, 1-formas, 2-formas e 3-formas. Por exemplo a forma $\int x dx$ é integrada sobre uma linha, logo, é classificada como uma 1-forma, a forma $\int x^2 y dx dy$ é integrada por uma integral dupla sobre uma superfície, por isso, é uma 2-forma.

De uma maneira geral considera-se uma função contínua definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$

$$F : I \mapsto \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

A partir de (2.1), pode-se definir $f(x)$ em (2.2), que é a sua derivada, da seguinte maneira:

$$f(x) = \frac{dF}{dx}. \quad (2.2)$$

Sem uma rigorosidade a princípio, é possível reescrever (2.2) como

$$dF = f(x)dx \quad (2.3)$$

que levará a seguinte equação

$$\begin{aligned} \int_a^b dF &= \int_a^b f(x)dx \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned} \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é o conhecido **teorema fundamental do cálculo**, o integrando $f(x)dx$ é uma 1-forma, pelo fato de só admitir a integração sobre um intervalo real unidimensional. De uma maneira similar se tem a função $G(x, y, z)$ em (2.5),

$$dG = \sum_{p=x,y,z} \frac{\partial G}{\partial p} dp, \quad (2.5)$$

que pode ser integrada sobre qualquer curva C unidimensional em \mathbb{R}^3 , veja Figura 2.1.

Esta noção pode ser então estendida para uma k -forma, que pode ser vista como uma quantidade passível de integração sobre uma região D k -dimensional.

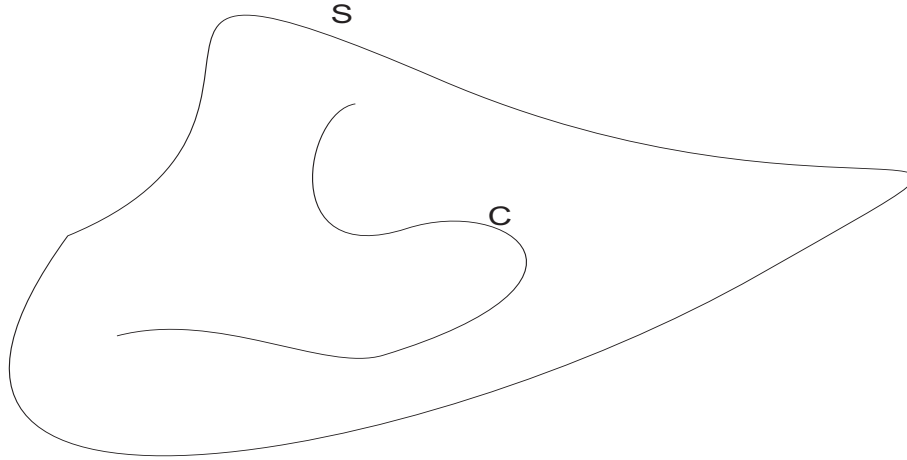


Figura 2.1: Curva C unidimensional em \mathbb{R}^3 .

Na próxima seção será dada uma definição formal para formas diferenciais sobre um espaço euclidiano n -dimensional.

2.2.2 Definição formal para formas diferenciais

De uma maneira mais formal, considera-se o espaço Euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n e $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ uma região aberta denomina uma p -variedade. Seja o espaço vetorial $T_x\mathcal{M}$ de todos os vetores tangentes a \mathcal{M} passando pelo ponto $x \in \mathcal{M}$. Uma p -forma ω^p é definida como um operador multilinear anti-simétrico (2.6),

$$\omega^p : T_x\mathcal{M} \times \cdots \times T_x\mathcal{M} \mapsto \mathbb{R} \quad (2.6)$$

onde

$$\bigwedge^p = T_x\mathcal{M} \times \cdots \times T_x\mathcal{M} \quad (2.7)$$

é o espaço vetorial das p -formas em um ponto $x \in \mathcal{M}$.

Estas p -formas mudam de sinal na presença de permutações ímpares das variáveis (propriedade anti-simétrica). Uma p -forma qualquer sobre uma variedade naturalmente induzirá uma p -forma sobre uma subvariedade, através da restrição do mapeamento linear para o domínio que é o produto de espaços tangentes da subvariedade.

A partir de (2.6), pode-se afirmar que um elemento $\omega^p \in \bigwedge^p$ é descrito da seguinte maneira:

$$\omega^p = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}^p dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (2.8)$$

onde \wedge é o produto exterior entre uma q -forma e uma r -forma.

Define-se o produto exterior como sendo uma forma bilinear anti-simétrica entre uma q -forma ω^q e uma r -forma α^r , dado por

$$\begin{aligned} \wedge & : \bigwedge^q \times \bigwedge^r \mapsto \bigwedge^{q+r} \\ \omega^q \wedge \alpha^r & = \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}^q \alpha_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r}^r dx^{\mu_1} \wedge \dots \\ & \dots \wedge dx^{\mu_q} dx^{\lambda_1} \dots \wedge dx^{\lambda_r}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Apresenta-se agora algumas propriedades do produto exterior. Sejam então $\alpha \in \bigwedge^p$, $\beta, \gamma \in \bigwedge^q$, $\eta \in \bigwedge^r$, $\omega \in \bigwedge^s$ e $a, b \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \alpha & = 0. \\ \alpha \wedge (a\beta + b\gamma) & = a\alpha \wedge \beta + b\alpha \wedge \gamma \\ \alpha \wedge (\eta \wedge \omega) & = (\alpha \wedge \eta) \wedge \omega \\ \alpha \wedge \beta & = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Após esta apresentação formal da definição das formas diferenciais, será apresentado na próxima seção uma descrição das grandezas eletromagnéticas em termos da teoria de formas diferenciais e se dará uma representação gráfica para as mesmas.

2.3 Campos eletromagnéticos representados via formas diferenciais

Nesta seção será apresentada a teoria das formas diferenciais como uma ferramenta para descrever e analisar os campos eletromagnéticos, através de uma estrutura matemática concisa para o eletromagnetismo.

A teoria das formas diferenciais faz naturalmente uma distinção clara entre as diversas grandezas eletromagnéticas, como por exemplo fluxos e intensidades de campo. Desta forma, é possível trabalhar com uma aproximação unificada para as integrações de grandezas físicas sobre variedades p -dimensionais em espaços n -dimensionais.

A distinção entre as diversas grandezas eletromagnéticas será apresentada a seguir através da classificação das formas diferenciais pelo seu grau*.

2.3.1 1-formas

Uma 1-forma representa uma quantidade que é integrada ao longo de um caminho, em geral, formas de grau igual a 1 podem representar a variação em qualquer direção, e podem ser uma combinação de diferenciais de todas as suas coordenadas. De maneira geral, uma 1-forma pode ser escrita no espaço euclidiano tridimensional como

$$A = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz \quad (2.11)$$

onde a, b, c são as suas componentes.

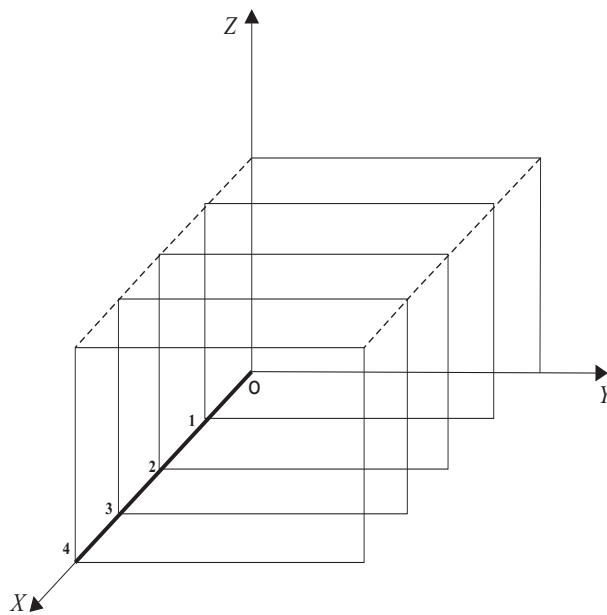


Figura 2.2: 1-forma dx integrada sobre a linha que liga os pontos $(0,0,0)$ e $(4,0,0)$

Como ilustração a isto, seja então a 1-forma dx , que possui superfícies perpendiculares ao eixo- x igualmente espaçadas por uma unidade. Figura 2.2 fornece uma representação gráfica da integral em (2.12) e significa que a 1-forma dx possui 4 planos perpendiculares ao eixo- x .

* O grau de uma forma diferencial é definido como sendo igual a dimensão da região na qual esta forma admite integração.

Ao se integrar dx do ponto $(0,0,0)$ ao ponto $(4,0,0)$, têm-se o seguinte resultado descrito em (2.12),

$$\int_{(0,0,0)}^{(4,0,0)} dx = 4. \quad (2.12)$$

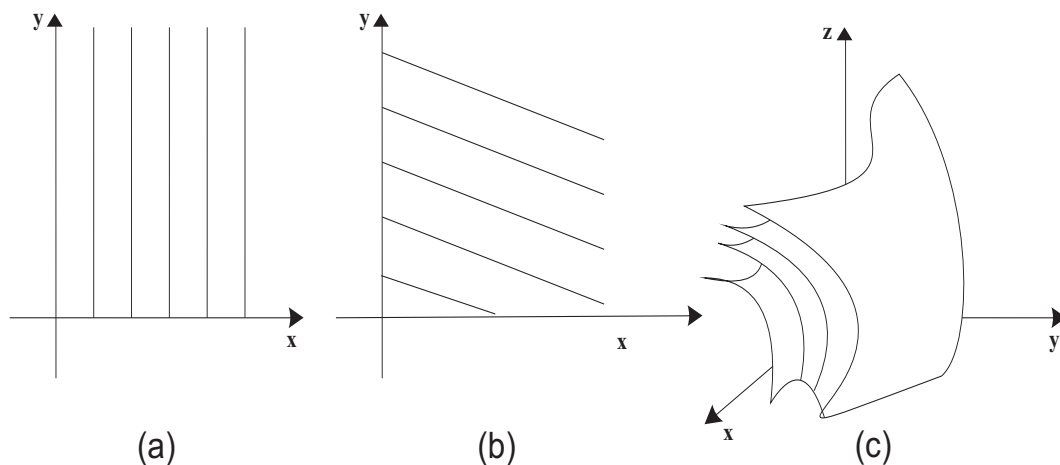


Figura 2.3: (a) 1-forma dx no plano xy , (b) 1-forma $3dx + 5dy$ e (c) 1-forma com componentes não constantes

É possível também ter uma interpretação do comportamento de uma 1-forma em um plano, neste caso, a imagem torna-se uma série de linhas perpendiculares ao eixo- x espaçadas a uma distância de uma unidade, como mostrado na Figura 2.3(a). Graficamente, integrais no plano são semelhantes as integrais em três dimensões: o valor de uma integral de caminho é o número de linhas perfuradas pelo caminho. A fim de se representar corretamente a integral de uma 1-forma, é necessário considerar a sua orientação.

A integral da 1-forma $-dx$ ao longo de um caminho de $(0,0,0)$ a $(4,0,0)$ é igual a -4 . Assim, quando se conta superfícies perfuradas por um caminho, existe a necessidade de se comparar o sinal da 1-forma com a direção do caminho, a fim de determinar se a superfície contribui positiva ou negativamente. Ao lidar com 1-formas mais complicadas, como por exemplo, $3dx + 5dy$, esta 1-forma possui superfícies oblíquas aos eixos coordenados, veja a sua representação na Figura 2.3(b). Se as componentes de uma 1-forma não são constantes, têm-se superfícies curvas, veja Figura 2.3(c).

É possível criar uma analogia entre 1-formas e vetores, uma 1-forma representa uma quantidade que é integrada ao longo de um caminho e um vetor representa uma quantidade com uma magnitude e direção, tais como o deslocamento ou a velocidade. Apesar desta diferença, os dois tipos de quantidades têm três componentes independentes, e podem ser usadas como sinônimos para descrever quantidades como campos eletromagnéticos.

Matematicamente, os vetores e formas diferenciais estão intimamente relacionados, em coordenadas euclidianas, podendo-se fazer uma correspondência entre os vetores e formas. A equação (2.13), apresenta uma correspondência entre a 1-forma A e o vetor \vec{A} com mesmas componentes.

$$a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz \longleftrightarrow a(x, y, z)\hat{x} + b(x, y, z)\hat{y} + c(x, y, z)\hat{z} \quad (2.13)$$

Diz-se que a 1-forma A e o vetor \vec{A} são duais. Uma vez que é fácil de se passar da forma diferencial para a representação vetorial, pode-se escolher a quantidade que melhor atende a um problema em particular.

Com a definição apresentada para 1-forma e sua representação geométrica, é possível agora entender o campo elétrico e magnético como 1-formas. Geralmente, como uma motivação física, interpreta-se a intensidade do campo elétrico como sendo a força experimentada por uma pequena carga de teste localizada em um campo. Isto leva naturalmente a uma representação vetorial do campo elétrico, que pode ser chamada de uma representação na forma intensiva ou representação de uma grandeza intensiva [Faria et al., 2008].

Seja então a intensidade de campo elétrico dada pela equação (2.14) em um domínio tridimensional $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

$$\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}. \quad (2.14)$$

A intensidade de campo elétrico é uma grandeza integrada sobre uma linha, dada por:

$$\oint_P \vec{E}dl = \oint_P E_x dx + E_y dy + E_z dz. \quad (2.15)$$

A equação (2.15) fornece uma interpretação de \vec{E} como a 1-forma intensidade de campo elétrico, descrita na equação (2.16).

$$\mathcal{E} = E_x dx + E_y dy + E_z dz. \quad (2.16)$$

Analogamente, a intensidade de campo magnético é uma 1-forma, descrita pela equação (2.17).

$$\mathcal{H} = H_x dx + H_y dy + H_z dz \quad (2.17)$$

Uma representação gráfica para as 1-formas é extremamente útil na compreensão intuitiva do comportamento de campos electromagnéticos. Por exemplo, a intensidade do campo elétrico representa a mudança do potencial em função da distância, e a fim de se encontrar a diferença total de potencial entre dois pontos, precisa-se integrar o campo elétrico ao longo de um caminho entre estes pontos. Graficamente, isso significa que contamos superfícies que representam as intensidades de campo elétrico. Matematicamente, deve-se realizar uma integral de caminho.

2.3.2 2-formas

A densidade do fluxo magnético, \vec{B} é definida como sendo o número de linhas de fluxo por unidade de área que permeiam o campo magnético. A densidade de fluxo magnético é o produto da permeabilidade magnética do meio μ pelo vetor campo magnético \vec{H} .

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (2.18)$$

Analogamente define-se a densidade de fluxo elétrico como sendo,

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}. \quad (2.19)$$

A densidade de corrente \vec{J} é diretamente proporcional ao campo elétrico aplicado,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (2.20)$$

onde σ é a condutividade do meio.

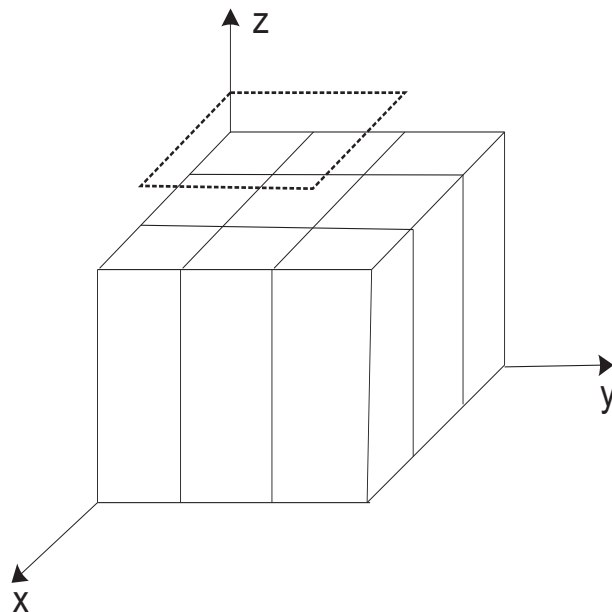


Figura 2.4: 2-forma $dxdy$ integrada sobre área

Densidades de fluxo e de corrente podem ser pensadas como sendo tubos que ligam as fontes de fluxo ou corrente, e esta é a representação gráfica natural de uma 2-forma, que é desenhada como um conjunto de superfícies que se cruzam para formar tubos.

Por exemplo a 2-forma $dxdy$ representa a sobreposição das superfícies das 1-formas dx e dy , onde as superfícies de cada 1-forma são perpendiculares a sua direção. A Figura 2.4 apresenta os tubos produzidos pela intercessão destas superfícies na direção positiva do eixo-z.

A integral da densidade de fluxo ao longo de uma superfície é o fluxo total que atravessa a superfície. De uma maneira geral, a integral de uma 2-formas será o número de tubos que atravessam a superfície. A Figura (2.4) apresenta a área pontilhada que representa a integral (2.21)

$$\int_0^2 \int_0^2 dxdy = 4, \tag{2.21}$$

ou seja, 4 tubos perfuram a região $[0, 2] \times [0, 2]$ no plano xy .

Em notação das formas diferenciais, a expressão geral para uma 2-formas será descrita por:

$$C = C_1 dy \wedge dz + C_2 dz \wedge dx + C_3 dx \wedge dy \tag{2.22}$$

Logo a densidade de fluxo elétrico, a densidade de fluxo magnético e a densidade de corrente serão representadas da seguinte maneira:

$$\mathcal{D} = D_1 dy \wedge dz + D_2 dz \wedge dx + D_3 dx \wedge dy \quad (2.23)$$

$$\mathcal{B} = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy \quad (2.24)$$

$$\mathcal{J} = J_1 dy \wedge dz + J_2 dz \wedge dx + J_3 dx \wedge dy. \quad (2.25)$$

2.3.3 3-formas

Algumas grandezas físicas se comportam como densidades e naturalmente são integradas sobre volumes. Na teoria eletromagnética tem-se a densidade volumétrica de carga pode ser representada como uma 3-forma

$$\rho = q dx \wedge dy \wedge dz \quad (2.26)$$

onde q é a densidade de carga escalar.

Geometricamente, uma 3-forma é gerada pela interseção de 3 superfícies no espaço, esta interseção gera caixas no espaço. Uma carga ponto é então vista como sendo uma caixa de tamanho infinitesimal localizada no ponto.

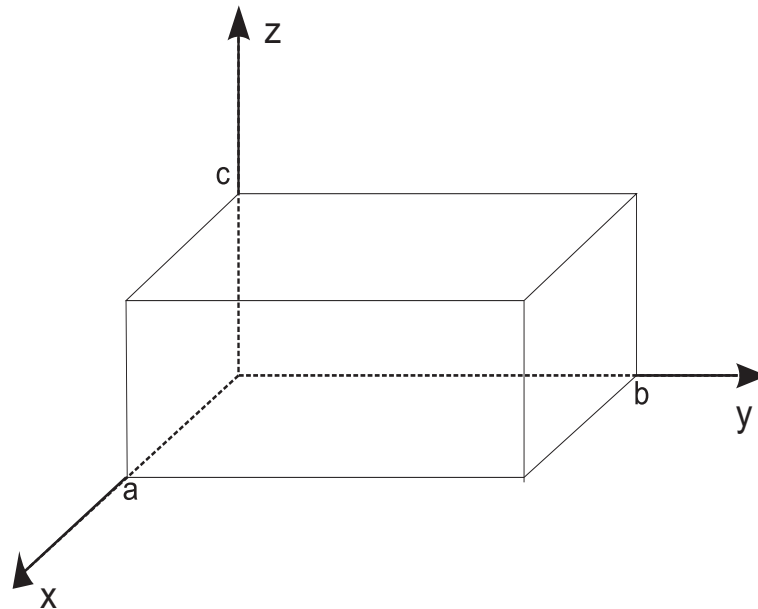


Figura 2.5: 3-forma $8dxdydz$ integrada sobre volume.

Por exemplo o gráfico da 3-forma $dx \wedge dy \wedge dz$ representa as interseções das superfícies produzidas pelas 1-formas dx, dy e dz . A intercessão destas superfícies produzem pequenos

cubos de lado igual a uma unidade que preencham todo o espaço. A integral de uma 3-forma sobre um volume é igual ao número de cubos unitários dentro deste volume.

A Figura (2.5) mostra a interpretação geométrica para a integral da 3-forma $\delta dx \wedge dy \wedge dz$ sobre o paralelepípedo de medidas (a, b, c) . O resultado para esta integral é dado pela equação (2.27).

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^c \delta dx \wedge dy \wedge dz = 8abc \quad (2.27)$$

2.3.4 0-formas

Pode-se definir uma 0-forma como sendo uma função escalar, ou seja, qualquer grandeza escalar física que não represente densidade de volume são 0-formas. No eletromagnetismo o potencial escalar elétrico é uma 0-forma.

2.4 Derivada Exterior

Nesta seção será apresentado o operador derivada exterior, que é um dos principais operadores da teoria das formas diferenciais. O operador derivada exterior representa a parte antissimétrica das derivadas e será mostrado que as equações de Maxwell na forma diferencial podem ser todas expressas em termos deste operador.

Será também apresentado um dos mais importantes teoremas da teoria de formas diferenciais que é o **Teorema Generalizado de Stokes** e através deste teorema é possível expressar as equações de Maxwell em sua forma integral.

2.4.1 O operador derivada exterior

Pode-se definir a derivada exterior como um mapeamento, cuja ação sobre p -formas ω^p é definida por

$$\begin{aligned} d & : \bigwedge^p \mapsto \bigwedge^{p+1} \\ d(\omega^p) & = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \wedge (\omega^p) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Por (2.28), tem-se que a derivada exterior d é um operador que agindo em 0-formas fornece uma 1-forma. Assim, se f é uma função, então $df = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right)$ é sua diferencial, e ao mesmo tempo é identificada como uma 1-forma.

Essa 1-forma é a forma dual do gradiente da função f . Da mesma maneira que o operador d opera sobre 0-formas gerando 1-formas, é possível, através dele, aplicar p -formas em $(p + 1)$ -formas. Este operador é o análogo para os operadores $grad(\vec{\nabla})$, $curl(\vec{\nabla} \times)$ e $div(\vec{\nabla} \cdot)$ no cálculo vetorial, ou seja, na teoria das formas diferenciais estes operadores são unificados por um único operador.

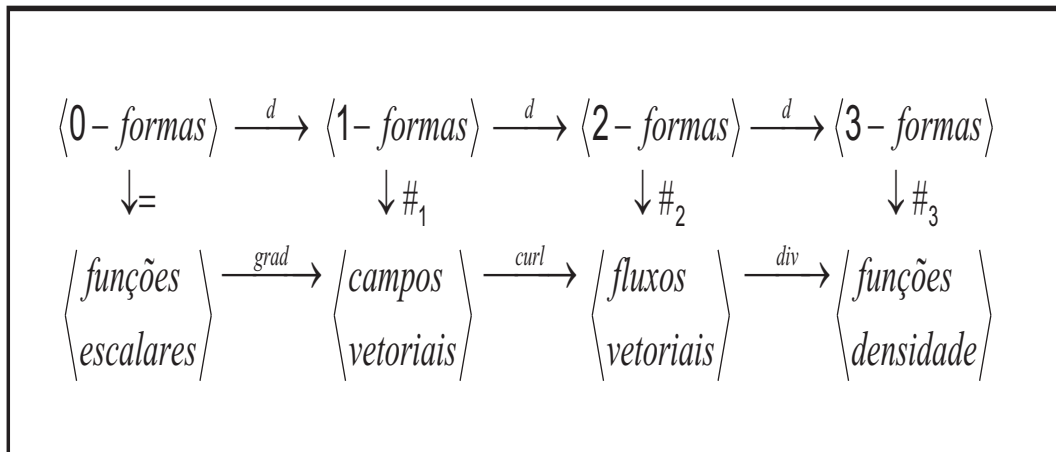


Figura 2.6: Diagrama de correspondência entre o cálculo das formas diferenciais e o cálculo vetorial. Onde tem-se que $\#_1(dx) = dx$ e $\#_2(dx \wedge dy) = dz$.

Figura 2.6 apresenta o diagrama de correspondência entre o cálculo das formas diferenciais, também chamado de cálculo exterior com o cálculo vetorial.

A derivada exterior goza das seguintes propriedades. Seja então α e β são p -formas e γ é uma q -forma.

1. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha + d\beta$
2. $d(\alpha \wedge \gamma) = (d\alpha) \wedge \gamma + (-1)^p \alpha \wedge (d\gamma)$
3. $d^2\omega = d(d\omega)$, para toda forma ω

No eletromagnetismo, tem-se que a derivada da 1-forma intensidade de campo elétrico \mathcal{E} (2.16), nos fornece a seguinte 2-forma:

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= d(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \\ &= (\partial_y E_z - \partial_z E_y) dy \wedge dz + (\partial_z E_x - \partial_x E_z) dz \wedge dx \\ &\quad + (\partial_x E_y - \partial_y E_x) dx \wedge dy. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Observa-se que (2.29) é o análogo para o operador rotacional aplicado ao vetor campo elétrico, $\vec{\nabla} \times \vec{E}$. Na próxima seção é apresentado o teorema generalizado de Stokes, como uma consequência da utilização do operador derivada exterior.

2.4.2 Teorema Generalizado de Stokes

Teorema 2.4.1 (O teorema Generalizado de Stokes) *Seja \mathcal{M} uma variedade $p + 1$ dimensional com bordo compacto $\partial\mathcal{M}$ com mesma orientação que a variedade \mathcal{M} , e uma p -forma ω definida num aberto contendo \mathcal{M} . Tem-se que a integral da derivada da forma ω sobre a variedade \mathcal{M} é igual a integral da forma ω sobre o bordo da variedade, ou seja,*

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega \quad (2.30)$$

A generalidade do teorema vem do fato de que se houver uma variação do grau da forma diferencial ω , se obtêm os principais teoremas do cálculo diferencial e integral. Se ω é uma 0-forma então o teorema da equação (2.30) é o teorema fundamental do cálculo. Se o ω é uma 1-forma será obtido o teorema vetorial de Stokes e se ω é uma 2-forma tem-se teorema do divergente.

2.4.3 Complexo de deRham

Um complexo de deRham é obtido através de um conjunto de espaços lineares que podem ser conectados de maneira exata por um operador. Mostra-se nesta seção que os espaços das formas diferenciais são conectados de uma maneira exata pelo operador derivada exterior.

Para se iniciar esta seção define-se primeiramente formas exatas e fechadas. Uma p -forma ω^p é chamada uma forma exata se existe uma $(p - 1)$ -forma α^{p-1} tal que

$$\omega^p = d\alpha^{p-1}. \quad (2.31)$$

E uma p -forma ω^p é chamada uma forma fechada se

$$d\omega^p = 0. \quad (2.32)$$

É importante notarmos que toda forma exata é fechada, ou seja,

$$d\omega^p = d(d\alpha^{p-1}) = 0. \quad (2.33)$$

Na forma contínua destaca-se um importante resultado, que é o **lema de Poincaré**, que garante que sobre variedades contráteis e suaves uma p -forma fechada é localmente exata, ou seja, existe uma vizinhança na variedade na qual a p -forma é exata.

Logo pode-se assumir que a derivada exterior satisfaz (2.34)

$$d d = 0 \quad (2.34)$$

A equação (2.34) é o correspondente em \mathbb{R}^3 as identidades $\nabla \times \nabla = 0$ e $\nabla \cdot \nabla \times = 0$. A partir desta propriedade pode-se definir uma cadeia complexa.

Definição 2.4.1 *Uma cadeia complexa é uma seqüência de espaços lineares que são conectados por um operador D que satisfaz a propriedade expressa na equação (2.34).*

Quando os espaços envolvidos são os espaços de formas diferenciais, e o operador é a derivada exterior d , esta cadeia complexa é chamada de **complexo de deRham** (2.35).

$$\bigwedge^0 \xrightarrow{d} \bigwedge^1 \xrightarrow{d} \bigwedge^2 \xrightarrow{d} \bigwedge^3 \quad (2.35)$$

2.5 Equações de Maxwell na forma diferencial e integral

Com o uso da derivada exterior pode-se agora escrever as equações de Maxwell na forma diferencial da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{E} &= -\partial_t \mathcal{B} \\
 d\mathcal{H} &= \partial_t \mathcal{D} + \mathcal{J} \\
 d\mathcal{D} &= \rho \\
 d\mathcal{B} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Aplicando o teorema generalizado de Stokes (2.30) em (2.36), têm-se as equações de Maxwell na sua forma integral.

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\mathcal{M}} \mathcal{E} &= -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{B} \\
 \int_{\partial\mathcal{M}} \mathcal{H} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D} + \int_{\mathcal{M}} \mathcal{J} \\
 \int_{\partial\mathcal{M}} \mathcal{D} &= \int_{\mathcal{M}} \rho \\
 \int_{\partial\mathcal{M}} \mathcal{B} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Uma observação a ser feita em (2.37) é que o grau da variedade \mathcal{M} é dependente do grau da forma diferencial que está sendo integrada, por exemplo, na Lei de Coulomb para o campo elétrico tem-se uma integral de volume, ou seja, uma variedade \mathcal{M} de grau 3.

2.6 Relações constitutivas

Apresentou-se na seção anterior as equações de Maxwell em sua forma diferencial e integral através do uso da derivada exterior e do teorema generalizado de Stokes. Surge agora a necessidade de se representar as relações constitutivas das equações de Maxwell e para isso será utilizado o operador estrela de Hodge que serve como ponte entre as intensidades de campo e as densidades de campo.

Inicia-se esta seção dando uma definição de métrica para que se possa assim introduzir os conceitos sobre o operador estrela de Hodge.

2.6.1 Métrica

Apresenta-se aqui os conceitos necessários sobre métricas para o desenvolvimento desta seção, fixando um conjunto Ω , uma métrica que atua sobre Ω é um operador bilinear

$$M : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.38)$$

que possui as seguintes propriedades $\forall x, y, z \in \Omega$:

- (i) É positivamente definida, ou seja, é tal que $M(x, y) \geq 0$.
- (ii) É simétrica, ou seja, é tal que $M(x, y) = M(y, x)$.
- (iii) Obedece a desigualdade triangular $M(x, z) \leq M(x, y) + M(y, z)$.
- (iv) É nula apenas para pontos coincidentes, ou seja, $M(x, y) = 0 \iff x = y$.

A métrica euclidiana atribui a qualquer dois pontos $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , o número:

$$M(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}. \quad (2.39)$$

A métrica euclidiana pode ser representada pela matriz identidade

$$\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Logo têm-se que através de (2.39) e (2.40) pode-se escrever a seguinte equação matricial

$$M^2(x, y) = (x - y)^T \varrho (x - y). \quad (2.41)$$

Sabe-se que a métrica induz a um produto interno, logo dados dois vetores v_1, v_2 , é possível definir o produto interno entre eles por:

$$v_1 \cdot v_2 = (v_1)^T \varrho v_2 \quad (2.42)$$

Observa-se que em variedades não planares, a subtração de dois pontos só é possível para pontos infinitesimalmente próximos uns dos outros, logo, a métrica é realmente uma definição local para o espaço tangente em cada ponto. Será apresentada uma expressão para o volume induzido por uma métrica.

$$\mu^n = \sqrt{|\varrho|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (2.43)$$

Como foi visto acima uma métrica define um produto interno de vetores e essa noção também se estende às formas diferenciais, o operador estrela de Hodge a ser definido na próxima seção será construído a partir de uma métrica e induzirá um produto interno sobre formas.

2.6.2 Operador Estrela de Hodge

O operador estrela de Hodge será definido como um isomorfismo entre p -formas e $(n - p)$ -formas, onde n é a dimensão do espaço.

$$\begin{aligned} \star : \bigwedge^p &\mapsto \bigwedge^{n-p} \\ \star(\omega^p) &= \omega^{n-p} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Através de um produto interno \langle, \rangle induzido por uma métrica (2.38), pode-se definir o operador estrela de Hodge da seguinte maneira:

$$\alpha \wedge \star \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \mu^n \quad (2.45)$$

para qualquer par de $(n - p)$ -formas onde μ^n é o volume induzido pela métrica.

Observe que o produto cunha \wedge opera em (2.45) de uma maneira especial, é o produto de uma p -forma com uma $(n - p)$ -forma, que são duas formas complementares.

Como exemplo da atuação do operador estrela de Hodge sobre formas, considere então o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , têm-se

$$\begin{aligned}
 \star dx &= dy \wedge dz \\
 \star dy &= dz \wedge dx \\
 \star dz &= dx \wedge dy \\
 \star 1 &= dx \wedge dy \wedge dz \\
 \star\star &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

Através das relações constitutivas para o eletromagnetismo, relaciona-se as seguintes formas:

- A 2-forma \mathcal{D} com a 1-forma \mathcal{E} através de uma 0-forma ϵ .
- A 2-forma \mathcal{B} com a 1-forma \mathcal{H} através de uma 0-forma μ .
- A 2-forma \mathcal{J} com a 1-forma \mathcal{E} através de uma 0-forma σ .

Usando então (2.45) é possível obter as relações constitutivas das equações de Maxwell na linguagem das formas diferenciais descritas da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} &= \star_{\epsilon} \mathcal{E} \\
 \mathcal{B} &= \star_{\mu} \mathcal{H} \\
 \mathcal{J} &= \star_{\sigma} \mathcal{E}.
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

Tabela 2.1: Representação de campos e fontes via formas diferenciais.

Grandeza	Forma	Grau	Unidade
Intensidade de campo elétrico	\mathcal{E}	1	V
Intensidade de campo magnético	\mathcal{H}	1	A
Densidade de fluxo elétrico	\mathcal{D}	2	C
Densidade de fluxo magnético	\mathcal{B}	2	Wb
Densidade de corrente elétrica	\mathcal{J}	2	A
Densidade de carga elétrica	ρ	3	C

Tabela 2.1 apresenta resumidamente a representação dos campos e fontes do eletromagnetismo pela teoria das formas diferenciais com seus respectivos graus e unidades, note que os campos e fontes agora independem de uma métrica.

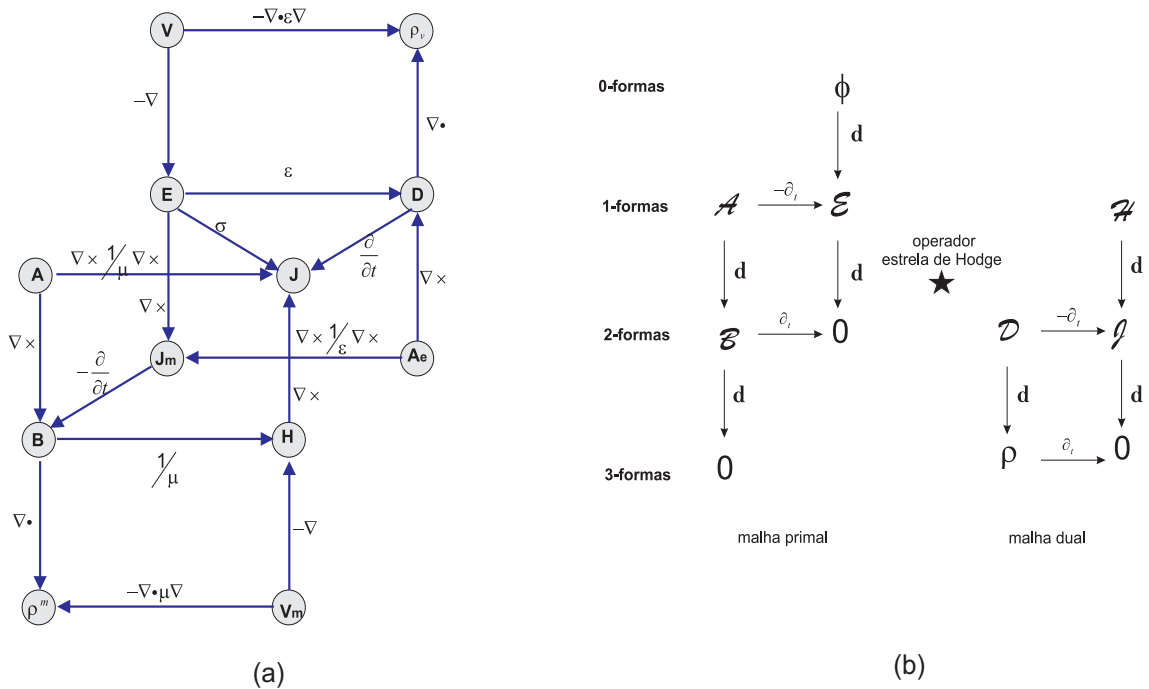


Figura 2.7: (a) Notação vetorial. (b) Formas diferenciais e operadores.

Para finalizar esta seção apresenta-se na Figura 2.7 um comparativo entre a estrutura vetorial e de formas diferenciais para a representação dos campos eletromagnéticos. Figura 2.7(a) apresenta toda a estrutura do cálculo vetorial para as leis do eletromagnetismo com os operadores gradiente ∇ , rotacional $\nabla \times$ e divergente $\nabla \cdot$.

Figura 2.7(b) mostra como o uso das formas diferenciais simplifica a representação das leis eletromagnéticas. O lado esquerdo do diagrama abrange a lei de Faraday, $d\mathcal{E} + \partial_t \mathcal{B} = 0$, a lei de Gauss para o campo magnético $d\mathcal{B} = 0$, e a representação do campo elétrico em termos do potencial como, $\mathcal{E} = -d\phi - \partial_t \mathcal{A}$. O lado direito do diagrama abrange a lei de Ampere $d\mathcal{H} - \partial_t \mathcal{D} = \mathcal{J}$, a lei de Gauss para o campo elétrico $d\mathcal{D} = \rho$, e a equação de continuidade $d\mathcal{J} + \partial_t \rho = 0$. Os dois lados do diagramas são conectados pelas relações constitutivas representadas pelo operador estrela de Hodge (2.47).

2.7 Contração de Poincaré

O operador estrela de Hodge \star (2.44) é um isomorfismo que define um produto interno global,

$$\langle \omega^p, \alpha^p \rangle = \int_{\Omega} \omega^p \wedge \star \alpha^p \quad (2.48)$$

onde $\omega^p, \alpha^p \in \bigwedge^p$, que é chamado de contração de Poincaré. A derivada exterior goza da propriedade de ser independente de uma métrica, ao contrário disto, o operador estrela de Hodge \star depende de uma métrica.

Pode-se então definir para o conjunto das p -formas, a sua norma dada por

$$\langle \omega^p, \omega^p \rangle = \int_{\Omega} \omega^p \wedge \star \omega^p < \infty \quad (2.49)$$

que terá a propriedade de ser positiva quando a métrica que atua sobre o operador for definida positiva. Logo o espaço \bigwedge^p com a norma descrita em (2.49) pode ser visto como um espaço de Hilbert $L_p(\Omega)$. Se há uma restrição com respeito a suavidade via operador derivada exterior, a norma pode ser definida de maneira a termos que

$$[\langle \omega^p, \omega^p \rangle + \langle d\omega^p, d\omega^p \rangle] < \infty \quad (2.50)$$

que é uma norma de Sobolev. Este espaço de Sobolev é um subconjunto do espaço de Hilbert via restrição de suavidade com respeito a norma de Sobolev.

2.8 Traço de uma forma diferencial

O Traço de uma forma diferencial é essencialmente a restrição de uma forma definida sobre uma variedade \mathcal{M} para uma subvariedade $\Gamma \subset \mathcal{M}$ e será escrito da seguinte maneira

$$\omega^p|_{\Gamma} \text{ ou } \text{tr}_{\Gamma}(\omega^p) \quad (2.51)$$

pode-se dizer por (2.51), que ω^p é uma p -forma sobre $\Gamma \subset \mathcal{M}$.

Um resultado importante é o traço de uma forma diferencial é distributivo sobre o produto exterior [Bluck et al., 2006], ou seja,

$$(\omega^p \wedge \alpha^q)|_{\Gamma} = \omega^p|_{\Gamma} \wedge \alpha^q|_{\Gamma} \quad (2.52)$$

Considerando uma partição da variedade $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ com um bordo comum Γ . Define-se uma q -forma em cada uma das variedades \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 por α^q e β^q respectivamente. Dizemos que as duas formas são iguais sobre Γ se

$$\alpha^q|_{\Gamma} = \beta^q|_{\Gamma} \quad (2.53)$$

Formas diferenciais possuem naturalmente os graus de continuidade que são exigidos por suas quantidades físicas reais, tais como campo elétrico (1-forma) e o fluxo magnéticos (2-forma). A **mistura** aparente dos requisitos de continuidade é simplesmente um resultado enganoso do cálculo vetorial usual, que define a continuidade em termos de componentes individuais dos vetores. Este problema é resolvido de forma elegante através da utilização das formas diferenciais, como a sua continuidade é definida em termos das suas operações como mapeamentos em vectores tangentes.

Neste capítulo foi apresentado a teoria contínua para formas diferenciais com uma ênfase para a teoria eletromagnética. No próximo capítulo apresenta-se a contrapartida discreta para esta teoria e desta forma, tem-se a possibilidade de se apresentar a contrapartida discreta para as equações de Maxwell.

Capítulo 3

Discretização das Equações de Maxwell

3.1 Introdução

No capítulo 2 descreveu-se de uma maneira bem resumida a teoria das formas diferenciais e os seus principais operadores, agora deseja-se prover uma maneira eficiente para a discretização de domínios contínuos de maneira a possibilitar a resolução das equações de Maxwell (2.36) via elementos finitos.

Encontrar uma contrapartida discreta para a noção de formas diferenciais é uma questão delicada. Se apenas houvesse uma representação discreta para as formas diferenciais usando seus valores coordenados e atribuindo a derivada exterior uma aproximação por diferenças finitas, teoremas básicos, tais como o teorema de Stokes não seriam válidos numericamente.

Neste capítulo será apresentada a contrapartida discreta para as formas diferenciais de maneira a se preservar todos os resultados obtidos em sua forma contínua e esta discretização é denominada um complexo simplicial.

3.2 Simplexos e complexos simpliciais

O principal objetivo desta seção é apresentar uma discretização adequada das formas diferenciais, conhecida como complexo simplicial. Será apresentada uma estrutura geométrica

concebida para se preservar todas as propriedades fundamentais das formas diferenciais para o uso computacional. Para simplificar, esta discussão será restringida a domínios tridimensionais, mas a construção é aplicável a qualquer n -variedade em espaços arbitrários. Na verdade, a única condição necessária a se ter é que o espaço seja um espaço vetorial, o que é uma condição natural na prática.

3.2.1 Simplexos

A noção de cadeia e co-cadeias que correspondem a domínios de integração e integrandos, respectivamente irá prover o conceito geométrico fundamental para se definir a integração sobre variedades p -dimensionais.

Os simplexos são a base fundamental e elementar para a construção das cadeias. Como toda primitiva geométrica é um conjunto de pontos, pode-se expandir esse conceito para o \mathbb{R}^3 , dizendo que um objeto geométrico é um conjunto de primitivas geométricas que tem o bordo como parte do objeto e no qual existe uma esfera de raio finito que limita o mesmo.

Um p -simplexo é o fecho convexo de um conjunto de $p + 1$ pontos com independência afim no \mathbb{R}^n . Em outras palavras, p -simplexos podem ser definidos como análogos dimensionais de triângulos, onde p representa a dimensão do simplexo.

Estes p -simplexos possuem uma orientação e a união de p -simplexos de diferentes tipos é denominada uma célula-complexa que satisfaz uma conformalidade requerida, ou seja, dois simplexos têm intercessão não vazia se, e somente se, esta intercessão é um q -simplexo, com $q < p$.

Tabela 3.1: p -Simplexos em uma malha simplicial

Elementos da malha	grau
Nós	0-simplexos
Arestas	1-simplexos
Triângulos (faces)	2-simplexos
Tetraedros	3-simplexos

Tabela 3.1 apresenta os simplexos de uma malha simplicial em domínios tridimensionais, ou seja, 0-simplexos são os nós da malha, 1-simplexos são as arestas, 2-simplexos são as faces

(triângulos), ou seja, o fecho convexo de três pontos distintos e os 3-simplexo são os tetraedros, ou seja, é o fecho convexo de quatro pontos.

Formalmente, um p -simplexo s_p é um polígono convexo não degenerado de $p + 1$ vértices distintos $v_0, v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$, com $n \geq p$, ou seja, é a intercessão de todos conjuntos convexas que contém v_0, v_1, \dots, v_p , a saber

$$s_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^p \alpha_i v_i \right\} \quad (3.1)$$

onde $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=0}^p \alpha_i = 1$, p é a dimensão do simplexo que pode também ser representado da seguinte maneira

$$s_p = \{v_0 v_1 \dots v_p\}. \quad (3.2)$$

Destaca-se aqui, que um importante resultado que garantirá a conexão entre o domínio contínuo e o discreto é a chamada **dualidade de Poincaré***. Este Teorema afirma que a cada simplexo de dimensão k é possível associar uma $(n - k)$ -forma. Para mais detalhes sobre a dualidade de Poincaré sugere-se o trabalho de [von Westenholz, 1981].

3.2.2 Orientação de um simplexo

Um importante aspecto no estudo de p -simplexos é a noção de orientação. Observa-se que toda ordenação de $p + 1$ vértices de um p -simplexo pode ser dividida em duas classes de equivalência, ou seja, existem duas orientações possíveis para todas as permutações realizadas sobre os vértices. Neste texto será assumido uma orientação local para cada simplexo, isto é, uma orientação particular.

Pode-se então definir que a orientação de um p -simplexo é uma classe de equivalência da ordenação dos vértices do simplexo. Dois simplexos são equivalentes se a paridade da permutação de seus índices é par e isto é indicado por

$$(v_0, \dots, v_p) \sim (v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(p)}) \quad (3.3)$$

onde π é uma permutação.

* Jules Henri Poincaré (1854-1912), o autor da dualidade que leva seu nome, viveu na França e foi contemporâneo de Hilbert. O trabalho científico de Poincaré teve grande repercussão na Cosmogonia, na Teoria da Relatividade e na Matemática, especialmente nas áreas de Topologia e Equações Diferenciais. Dedicou-se também à Filosofia da Ciência.

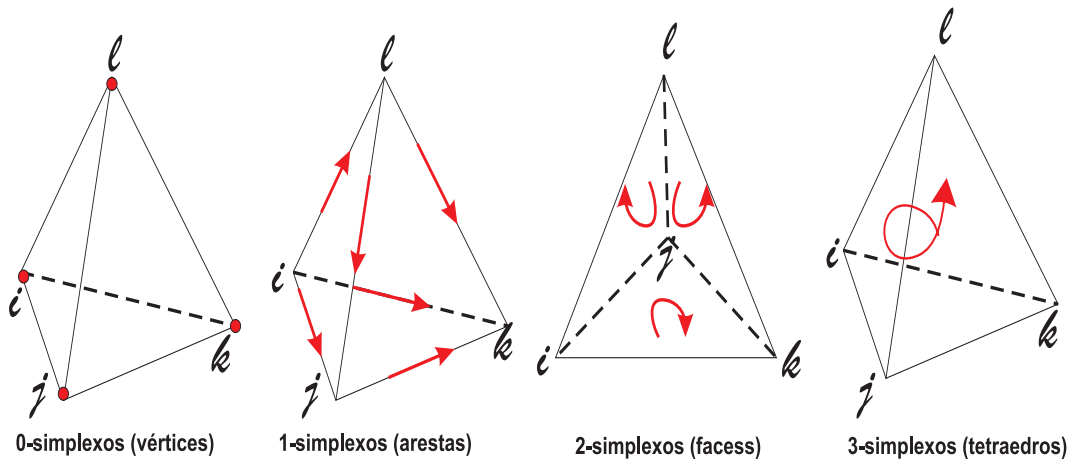


Figura 3.1: p -simplexos orientados.

Por exemplo, o 1-simplexo $s_1 = \{i, j\}$ na Figura 3.1 possui uma orientação indicada pela seta e o 1-simplexo com orientação oposta, será indicado por $\{j, i\}$ ou $-\{i, j\}$. Analogamente, Figura 3.1 apresenta a orientação dos 2-simplexos $\{i, j, k\}$, $\{j, i, l\}$ e $\{j, k, l\}$, por final a orientação do 3-simplexo $\{i, j, k, l\}$.

3.2.3 Fronteira de um simplexo

Qualquer $(p - 1)$ -simplexo gerado por um subconjunto de $\{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ é chamado de uma $(p - 1)$ -face de s_k . Isto é, uma $(p - 1)$ -face é simplesmente um $(p - 1)$ -simplexo cujos p vértices são obtidos dos $p + 1$ vértices do p -simplexo.

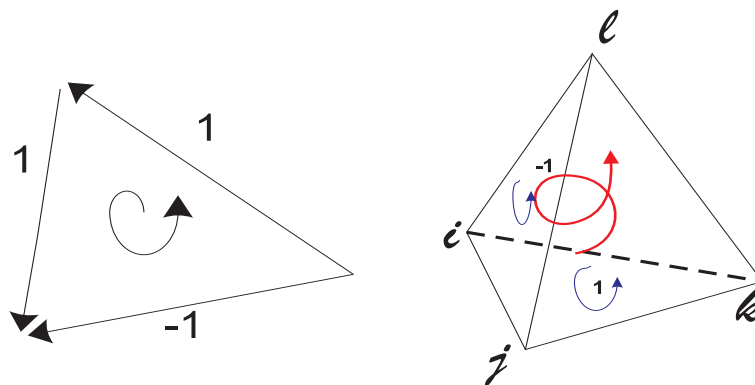


Figura 3.2: Operador bordo aplicado a um triângulo (esquerda), e um tetraedro (direita). Orientações dos simplexos são indicadas por setas.

Define-se como a fronteira de um p -simplexo a união de todas as suas $(p - 1)$ -faces e devido à orientação padrão dos simplexos, a soma formal das $(p - 1)$ faces define a fronteira do p -simplexo. Com isto, naturalmente se define o operador bordo que atua sobre os p -simplexos e atribui a cada $(p - 1)$ -face o valor 1 ou -1 como coeficientes relacionados a sua orientação, veja a Figura 3.2.

Para remover possíveis erros na orientação, pode-se definir o operador bordo da seguinte forma:

$$\partial \{v_0, v_1, \dots, v_p\} = \sum_{j=0}^p (-1)^j \{v_0, v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p\}, \quad (3.4)$$

onde \hat{v}_j indica a omissão do j -ésimo termo v_j na sequência. Claramente, cada p -simplex possui uma quantidade de $(p + 1)$ -faces. Veja figura 3.3, que mostra a atuação do operador fronteira sobre o triângulo $\{i, j, k\}$.

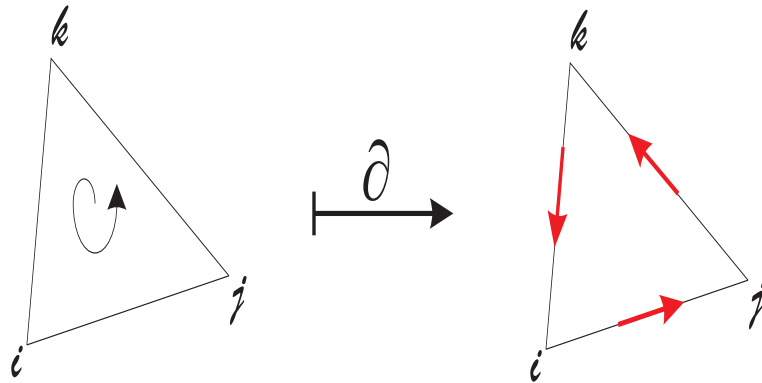


Figura 3.3: O operador bordo ∂ aplicado a um triângulo (2-simplexo) é igual à soma com sinal das arestas (ou seja, 1-faces do 2-simplexo).

3.2.4 Complexo simplicial

Um complexo simplicial é uma coleção \mathcal{K} de simplexos, que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Toda face de um simplexo em \mathcal{K} está em \mathcal{K} .
- (ii) A interseção de qualquer dois simplexos em \mathcal{K} é vazio, ou uma face.

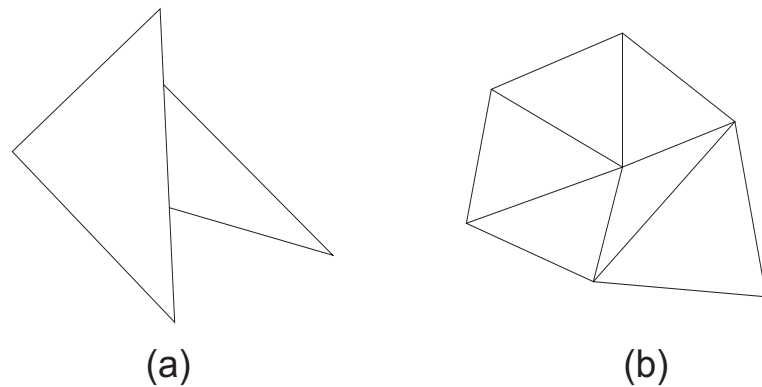


Figura 3.4: (a) Coleção de simplexos que não é um complexo simplicial (b) Complexo simplicial.

A Figura 3.4(a) apresenta um exemplo de uma coleção de simplexos que não forma um complexo simplicial, pois, não satisfaz (ii). A Figura 3.4(b) apresenta um exemplo de coleção de simplexos que é um complexo simplicial.

Um complexo simplicial pode ser utilizado como uma base para o espaço \mathbb{R}^n . Malhas Triangulares em 2D e tetraédricas em 3D são exemplos de tais complexos simpliciais. Note que malhas poligonais podem ser facilmente trianguladas e portanto, podem ser facilmente transformadas em complexos simpliciais (Figura 3.5).

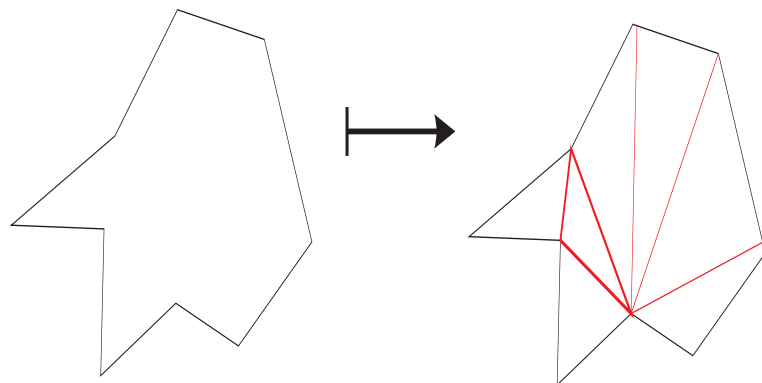


Figura 3.5: Triangulação de polígono.

3.3 Cadeias e co-cadeias

Nesta seção será dado a noção de cadeias, mostra-se a ação do operador bordo que atua sobre a fronteira dos simplexos gerando cadeias e por fim será introduzida a noção de co-cadeias.

3.3.1 Cadeias

Nesta seção será apresentado a noção de cadeia que irá fornecer a estrutura necessária para se operar sobre vários elementos de forma sucessiva. A fronteira de um p -simplexo produz uma $(p - 1)$ -cadeia. A seguinte definição é mais precisa e geral.

Definição 3.3.1 Uma p -cadeia de um complexo simplicial orientado \mathcal{K} é um conjunto de valores, um para cada p -simplexo de \mathcal{K} . Isto é, uma p -cadeia c é uma combinação linear formal de todos os p -simplexos em \mathcal{K} :

$$c = \sum_{s \in \mathcal{K}} c(s) \cdot s \quad (3.5)$$

onde $c(s)$ são coeficientes reais. O termo combinação linear formal significa que, neste contexto, nenhuma adição ou escalonamento é feito. Os coeficientes $c(s)$ devem ser interpretados como multiplicidade de integração (positiva ou negativa). Denota-se o espaço das p -cadeias por \mathcal{C}_p .

Figura 3.6 mostra exemplos de p -cadeias. O conjunto de nós orientados é uma 0-cadeia, o conjunto de arestas orientadas é uma 1-cadeia e o conjunto de faces orientadas é uma 2-cadeia.

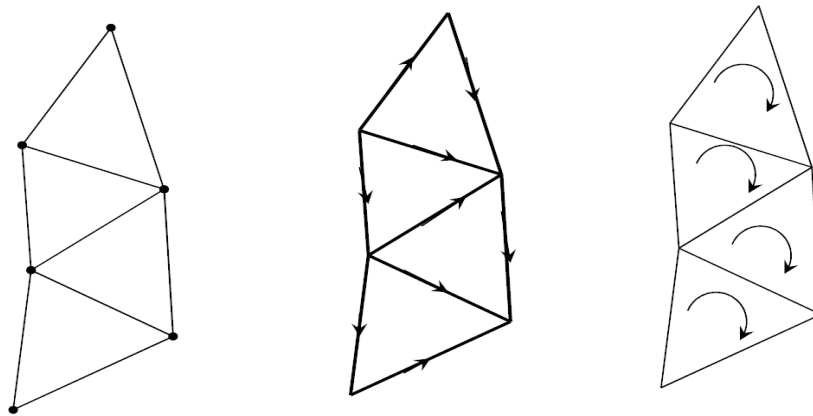


Figura 3.6: Exemplo de 0-1-2 cadeias de multiplicidade 1. (a) Conjunto de nós orientados. (b) Conjunto de arestas orientadas. (c) Conjunto de faces orientadas.

3.3.2 Operador bordo sobre cadeias

Define-se aqui de maneira mais formal o operador bordo que irá receber um p -simplexo e retorna a soma (com coeficientes) de todas suas $(p - 1)$ -faces. Neste caso, dizemos que o operador bordo aplicado a um p -simplexo gera uma $(p - 1)$ -cadeia.

Definição 3.3.2 Para cada $p \geq 1$, define-se o operador bordo sobre uma cadeia da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \partial_p : \mathcal{C}_p &\mapsto \mathcal{C}_{(p-1)} \\ \partial_p \sum_p c_p s_p &= \sum_p c_p \partial s_p \end{aligned} \quad (3.6)$$

O operador fronteira ∂_p pode retornar um particular tipo de cadeia, ou seja, uma cadeia com valores iguais a 0, 1 ou -1. Por isso, pode-se estender a noção de fronteira para as p -cadeias, simplesmente usando a propriedade de linearidade apresentada em (3.6). Observa-se que um conjunto de valores atribuídos a todos os simplexes de um complexo simplicial, pode induzir um outro conjunto de valores obtidos por ponderação das fronteiras de cada simplexo pelo valor original armazenado nele. Esta operação é muito natural, e pode assim ser implementada facilmente como explicado a seguir.

Uma vez que o operador bordo ∂_p é um mapeamento linear do espaço de p -simplexos ao espaço dos $(p - 1)$ -simplexos, ele pode simplesmente ser representado por uma matriz de dimensão $\|\mathcal{K}^{p-1}\| \times \|\mathcal{K}^p\|$, onde \mathcal{K}^p é o conjunto de todos os p -simplexos e $\|\mathcal{K}^p\|$ é a sua cardinalidade. A matriz em questão será esparsa, pois, somente os vizinhos estão envolvidos no operador de fronteira. Da mesma forma, esta matriz contém apenas os valores 0, 1 e -1. Repare que em 3D, há três operadores fronteira não-triviais ∂_p :

- ∂_1 é o operador fronteira sobre as arestas,
- ∂_2 é o operador fronteira sobre as faces,
- ∂_3 é o operador fronteira sobre os tetraedros.

No entanto, o operador necessário para uma determinada operação é óbvio a partir do tipo de argumento: se a fronteira é um tetraedro será necessário, o operador ∂_3 , ou seja, a fronteira

de um p -simplexo s_p é encontrada pela atuação $\partial_p s_p$. Graças a isto, é possível simplificar a notação e remover o subscrito quando não houver ambiguidade.

Geometricamente se tem que a fronteira de uma fronteira é um conjunto vazio, logo é plausível afirmar que o operador bordo aplicado duas vezes sobre um p -simplexo é zero, ou seja,

$$\partial_p \partial_p s_p = 0. \tag{3.7}$$

A justificativa para a equação (3.7) vem do fato que quando se aplica o operador ∂_p duas vezes tem-se a ocorrência de $(p - 2)$ -simplexos que apareceram exatamente duas vezes com sinais opostos, e portanto cancelando-se na soma.

Usando a linearidade do operador bordo ∂_p , verifica-se facilmente que a propriedade apresentada em (3.7) é estendida para todas as p -cadeias cuja a base seja formada por p -simplexos. Assim, os operadores bordo ∂_p transformam co-cadeias em cadeias complexas. Figura 3.7 mostra uma cadeia complexa criada pelo operador ∂_p .

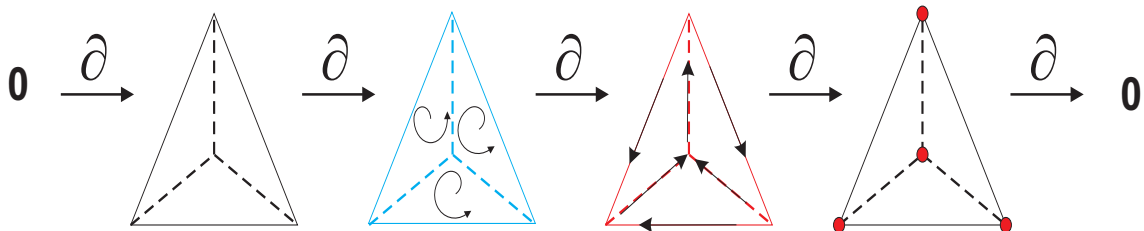


Figura 3.7: A cadeia complexa de um tetraedro com o operador fronteira ∂ .

A cadeia complexa relativa ao espaço das formas discretas é chamado de **complexo de deRham discreto**, ou co-cadeia complexa.

3.3.3 Co-cadeias

Uma p -co-cadeia ω será definida como o dual de uma p -cadeia c , isto é, ω é uma aplicação linear que relaciona uma p -cadeia a um escalar em \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \omega : \mathcal{C}_p &\rightarrow \mathbb{R} \\ c &\mapsto \omega(c). \end{aligned} \tag{3.8}$$

As cadeias são combinações lineares de simplexos, logo as co-cadeias retornam uma combinação linear dos valores das co-cadeias sobre os simplexos envolvidos. Claramente, uma co-cadeia também corresponde a um valor por simplexo (como todos os p -simplexos formam uma base para o espaço vetorial C_p , precisa-se então conhecer o mapeamento dos vetores da base deste espaço para determinar o mapeamento linear), e, portanto, a noção de dualidade de cadeias e co-cadeias é apropriada.

Observa-se que contrariamente a uma cadeia, uma p -co-cadeia é avaliada em cada simplexo de dimensão p . Em outras palavras, uma p -co-cadeia pode ser pensada como um campo que pode ser avaliado em cada p -simplexo de um complexo simplicial orientado \mathcal{K} .

3.3.4 Implementação de cadeias e cocadeias

Considerando o conjunto de todos os p -simplexos em \mathcal{K} , que se denota por \mathcal{K}^p , uma p -cadeia pode simplesmente ser armazenada como um vetor c_p de dimensão igual a $\|\mathcal{K}^p\|$, ou seja, uma coordenada para cada p -simplexo $s_p \in \mathcal{K}^p$. De maneira análoga, a representação numérica das co-cadeias segue a das cadeias devido a dualidade existente. Similarmente ω será representada por um vetor ω^p com a mesma dimensão de c_p .

Como ω opera em c , obtém-se um escalar em \mathbb{R} . A operação linear $\omega(c)$ se traduz em um produto interno entre os vetores $\omega_p.c_p$. Mais especificamente, pode-se continuar a pensar em c_p como um vetor coluna de modo que o mapeamento linear ω pode ser representado por um vetor linha $(\omega^p)^T$ e com isto o produto interno $\omega(c)$ torna-se simplesmente uma multiplicação de matrizes envolvendo o vetor linha ω^p e o vetor coluna c_p . O cálculo de uma co-cadeia se torna assim algo trivial para se implementar.

3.3.5 Formas diferenciais discretas

A partir de agora pode-se perceber que as p -co-cadeias são o análogo discreto das formas diferenciais. De fato, uma p -forma diferencial contínua pode ser vista como um mapeamento linear de um conjunto p -dimensional para \mathbb{R} , devido ao fato de que uma p -forma só admitir ser integrada sobre uma p -variedade (ou seja, uma sub-variedade).

Note agora que um domínio coberto por uma malha, será visto simplesmente como uma cadeia, e um mapeamento linear de uma cadeia para o conjunto dos números reais é o que se denomina de co-cadeias. Uma co-cadeia é, portanto, uma contrapartida natural de uma forma

diferencial. Por exemplo, uma 0-forma pode ser avaliada em cada ponto, uma 1-forma pode ser avaliada em cada curva, uma 2-forma pode ser avaliada em cada superfície, e 3-formas avaliadas sobre volumes, se restringirmos a integração somente em p -subvariedades que são a soma dos p -simplexos na triangulação, tem-se uma p -co-cadeia, assim p -co-cadeias são uma discretização das p -formas.

Pode-se ainda mapear uma p -forma contínua para uma p -co-cadeia, para se fazer isso, primeiro integra-se a p -forma em cada p -simplexo e atribuí-se o valor resultante para cada simplexo para assim obter uma p -co-cadeia sobre o p -complexo simplicial. Esta p -co-cadeia é uma representação discreta de uma p -forma original.

Neste ponto é possível estender de uma maneira natural a noção de cálculo de uma forma diferencial ω sobre uma cadeia arbitrária, simplesmente pelo uso da linearidade (3.9),

$$\int_{\sum_i c_i s_i} \omega = \sum_i c_i \int_{s_i} \omega. \quad (3.9)$$

Logo tem-se que a integração de uma forma diferencial ω sobre cada p -simplexo s_k provê uma discretização de ω , ou seja, o mapeamento de uma p -forma ω para um p -co-cadeia será representado pela seguinte equação integral:

$$\omega[i] = \int_{s_i} \omega. \quad (3.10)$$

Com isto, obtém-se toda a estrutura para o análogo discreto das forma diferenciais e assim tem-se a condição de relacionar as grandezas eletromagnéticas em uma discretização com as co-cadeias. Por exemplo, considere um complexo celular numa região de campo elétrico, pode-se associar a cada 1-célula do complexo uma tensão. Assumindo-se que toda 1-célula possui um número único de identificação, a distribuição de tensão pode ser descrita por um vetor algébrico (3.11),

$$\text{tensões} = (t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (3.11)$$

Esta associação pode ser interpretada como o mapeamento de 1-células em escalares e como tensões sobre linhas são aditivas, este mapeamento pode ser definido sobre cadeias, assim este mapeamento atribui um escalar a toda uma 1-cadeia e tem-se assim uma 1-co-cadeia.

Na próxima seção dá-se a contrapartida discreta para o operador derivada exterior.

3.4 Derivada exterior discreta

Nesta seção será apresentada a versão discreta para o operador derivada exterior, que não será uma aproximação, mas, um análogo discreto exato da derivada exterior contínua (2.28) e utiliza-se para este fim o teorema generalizado de Stokes apresentado em (2.30).

Observa-se pelo teorema de Stokes que a integral avaliada sobre um conjunto p -dimensional é transformada em uma integral de contorno (ou seja, sobre um conjunto de dimensão $(p - 1)$). Com esta simples equação que relaciona a avaliação de $d\omega$ em um simplexo s para a avaliação de ω na fronteira deste simplexo, a derivada exterior discreta pode ser facilmente definida com a seguinte analogia, o valor da derivada exterior avaliada sobre uma forma em um simplexo é equivalente a avaliação desta forma sobre a fronteira do simplexo.

3.4.1 Implementação da derivada exterior discreta

Pode-se definir o seguinte produto interno entre as p -formas e p -cadeias como sendo a integral de uma p -forma ω avaliada sobre um p -simplexo s ,

$$\int_s \omega = [\omega, s]. \quad (3.12)$$

Através do teorema de Stokes (Teo.2.4.1), temos uma relação entre a derivada exterior d e o operador bordo (3.6), esta relação é apresentada em (3.13),

$$[d\omega, s] = [\omega, \partial_p s]. \quad (3.13)$$

Por (3.13), o operador d será interpretado como o adjunto do operador bordo ∂_p , e por esta razão a derivada exterior é também denominada de operador co-bordo.

Pelo fato da integral ser um operador linear, é possível escrever de uma maneira mais geral o teorema de Stokes para uma cadeia arbitrária,

$$\begin{aligned}
 \int_{\sum_i c_i s_i} d\omega &= \int_{\partial(\sum_i c_i s_i)} \omega \\
 &= \int_{\sum_i c_i \partial s_i} \omega \\
 &= \sum_i c_i \int_{\partial s_i} \omega.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Para exemplificar a atuação do operador derivada exterior sobre o simplexo, a Figura 3.8 mostra este operador atuando sobre as 1-forma, definidas como números nas arestas, a imagem por este operador é uma 2-forma representada pelo número na face orientada. A orientação da 1-forma pode ser oposta a orientação induzida nas arestas pela orientação das faces, neste caso, os valores nas arestas muda o sinal. Por exemplo, a 2-forma associada ao operador d sobre 1-forma em torno do triângulo toma o valor $2 - 0.75 - 1 = 0.25$.

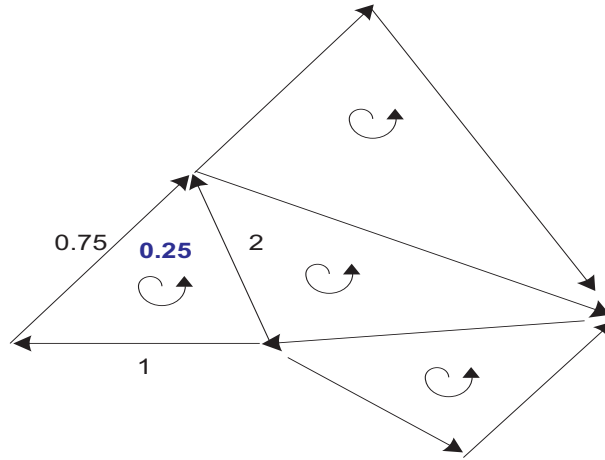


Figura 3.8: Derivada exterior discreta operando sobre 1-simplexos

Como foi usado um vetor de dimensão $\|\mathcal{K}^p\|$ para a representação discreta de uma p -co-cadeia, o operador derivada exterior d também pode ser representado por uma matriz de dimensão $\|\mathcal{K}^{p+1}\| \times \|\mathcal{K}^p\|$, usando a notação matricial introduzida anteriormente, temos:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial c} \omega &= \omega^T (\partial c) \\
 &= (\omega^T \partial) c = (\partial^T \omega) c \\
 &= \int_c d\omega
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

de onde tem-se a igualdade das matrizes $d = \partial^T$.

Implementar a derivada exterior, preservando o Teorema de Stokes (Teo.2.4.1) é, portanto, uma questão trivial na prática. Como no caso do operador fronteira, não há realmente mais de uma matriz para o operador derivada exterior, e sim a matriz será construída em função da dimensão do simplexo.

Apresenta-se agora um exemplo sobre a atuação do operador co-bordo (derivada exterior discreta) sobre um complexo simplicial. Seja um complexo simplicial em 2D, apresentado pela figura 3.9.

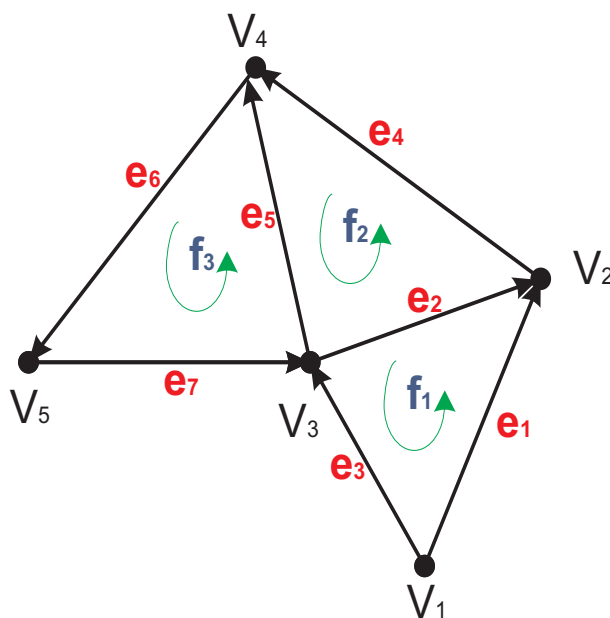


Figura 3.9: Complexo simplicial em 2D.

Tem-se então que o operador derivada exterior aplicado as arestas produz o seguinte:

$$\begin{aligned}
 d^0(e_1) &= -V_1 + V_2 & d^0(e_2) &= -V_3 + V_2 \\
 d^0(e_3) &= -V_1 + V_3 & d^0(e_4) &= -V_2 + V_4 \\
 d^0(e_5) &= -V_3 + V_4 & d^0(e_6) &= -V_4 + V_5 \\
 d^0(e_7) &= -V_5 + V_3
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

As equações em (3.16) podem ser representadas pelo seguinte sistema matricial:

$$d^0 \mathbf{V} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

De maneira análoga tem-se a derivada exterior aplicada as faces do complexo simplicial,

$$\begin{aligned} d^1(f_1) &= e_1 - e_2 - e_3 \\ d^1(f_2) &= e_4 - e_5 + e_2 \\ d^1(f_3) &= e_5 + e_6 + e_7 \end{aligned} \quad (3.18)$$

A equação (3.18) pode ser representada pelo seguinte sistema matricial:

$$d^1 \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Observa-se que 3.20 satisfaz a propriedade $\nabla \times (\nabla) = 0$ do cálculo vetorial

$$d^1 \cdot d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Note que devido ao fato de se ter que o operador derivada exterior d^p é o adjunto do operador fronteira ∂_p , a derivada exterior pode ser chamada então de operador co-fronteira d_p e induzirá uma co-cadeia complexa:

$$0 \longleftarrow C^2 \xleftarrow{d^1} C^1 \xleftarrow{d^0} C^0 \longleftarrow 0 \quad (3.21)$$

onde C^p , $p = 0, 1, 2$ são os espaços das p -co-cadeias.

Como no caso contínuo aqui também se tem que a derivada exterior discreta será o análogo discreto para os operadores gradiente, rotacional e divergente da teoria vetorial. Define-se como matrizes de incidência a representação matricial da derivada exterior discreta e convencionam-se o seguinte:

$$\mathbf{G} = d^0 \quad (3.22)$$

$$\mathbf{C} = d^1 \quad (3.23)$$

$$\mathbf{D} = d^2 \quad (3.24)$$

As matrizes em (3.22), (3.23) e (3.24) são a representação matricial do gradiente, rotacional e divergente, respectivamente.

3.5 Malha primal e dual

Uma das definições chave para o cálculo discreto é a noção de malha primal e dual em variedades trianguladas. A ideia principal é associar a cada primal p -simplexo o seu dual $(n - p)$ -celular, onde n é a dimensão da variedade. Por exemplo, considere a malha triangular na Figura 3.10.

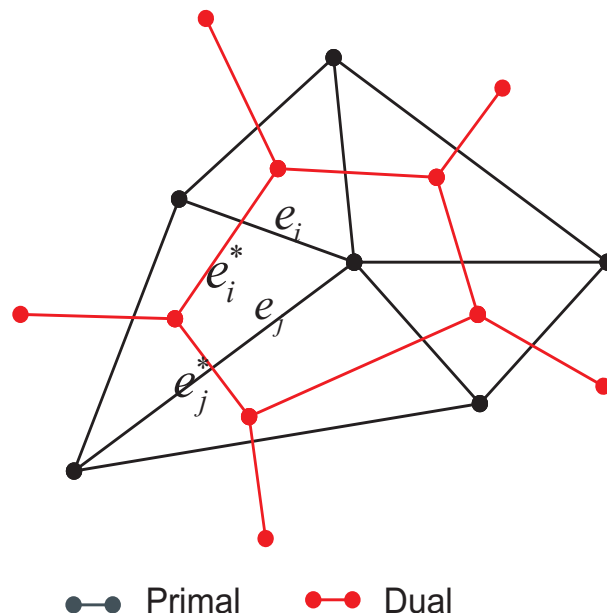


Figura 3.10: Malha primal e dual em 2D.

Associa-se uma 2-célula dual (polígono) para cada vértice primal (0-simplexo), uma aresta dual (1-célula) para cada aresta primal (1-simplexo) e uma 0-célula dual (vértice) para cada face primal (2-simplexo). Por construção, o número de $(n - p)$ -células duais é igual ao número de p -simplexos. O conjunto de células duais é denominado um complexo celular, que não precisa ser um complexo simplicial em geral.

O complexo celular dual vai herdar diversas propriedades e operações do complexo simplicial primal. Uma das mais importantes a se destacar aqui é a noção de incidência. Por exemplo, se duas arestas na malha primal estão na mesma face primal e são incidentes, as duas arestas duais correspondentes também estão em uma mesma face dual e são incidentes. A figura 3.10 mostra as duas arestas primais e_i e e_j são incidentes e suas análogas duais e_i^* e e_j^* possuem as mesmas propriedades.

Como resultado desta propriedade de incidência, pode-se facilmente derivar um operador de fronteira sobre o complexo celular dual e, conseqüentemente, uma derivada exterior discreta para o complexo celular dual. A derivada exterior para o complexo celular dual será definido naturalmente como o oposto transposto do seu primal.

$$\mathfrak{d}_{\text{dual}}^{n-p} = (-1)^p (\mathfrak{d}_{\text{primal}}^{p-1})^T \quad (3.25)$$

O termo $(-1)^p$ que aparece em (3.25) é a orientação induzida sobre a célula dual a partir da orientação da primal. No restante do nosso capítulo, iremos utilizar \mathfrak{d} como um operador derivada exterior tanto para o complexo simplicial primal como para o complexo celular dual para se manter nossas notações o mais simples possível.

Na discretização de domínios tem-se que na malha dual será utilizada as transpostas das matrizes de incidência da malha primal para representar o análogo discreto do operador derivada exterior, ou seja,

$$\mathbf{G}^T = \mathfrak{d}^0 \quad (3.26)$$

$$\mathbf{C}^T = \mathfrak{d}^1 \quad (3.27)$$

$$\mathbf{D}^T = \mathfrak{d}^2 \quad (3.28)$$

As matrizes em (3.26), (3.27) e (3.28) são a representação matricial na malha dual do gradiente, rotacional e divergente, respectivamente.

Como a derivada exterior foi definida de uma maneira bem plausível e correta na malha dual, tem-se que a propriedade descrita em (2.34) também se aplica à malha dual e assim o complexo celular dual também possui uma estrutura de cadeia complexa. As duas estruturas primal e dual serão ligadas usando-se o operador estrela de Hodge discreto que será definido na próxima seção.

Para a construção do complexo celular dual usa-se a noção de dualidade circuncêntrica (ou Voronoi). O circuncentro de um p -simplexo será definido como o centro da p -circunferência, que é a única p -esfera que contém todos os $p + 1$ vértices do p -simplexo.

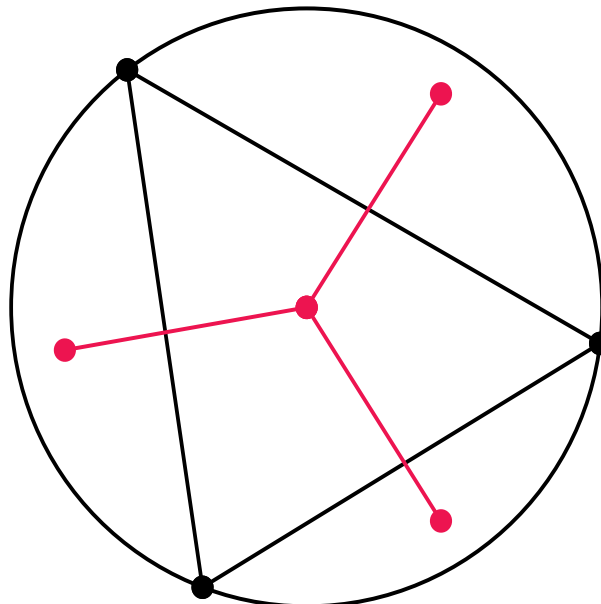


Figura 3.11: Dualidade Circuncêntrica: 2-circunferência para o triângulo

A Figura 3.11, mostra um exemplo da dualidade circuncêntrica em uma malha 2D. A 0-célula dual a face triangular (2-simplexo) é o circuncentro do triângulo. A 1-célula dual às arestas primais (1-simplexo) é o segmento de reta que une o circuncentro do triângulo para o circuncentro dos seus triângulos incidentes, enquanto a 2-célula dual associada a um vértice primal é córner em forma de cunha construído pelo circuncentro do triângulo, os dois centros das arestas adjacentes e os seus vértices.

Denota-se então a operação de dualidade pelo símbolo \star , ou seja, um simplexo primal s terá seu dual definido como $\star s$ que tem a sua orientação induzida pela orientação do simplexo primal e a orientação da variedade.

Na configuração contínua, o produto exterior (ou cunha) \wedge definido em (2.10), é um operador utilizado para a construção de formas diferenciais de maior grau a partir de formas de menor grau.

Para o desenvolvimento deste trabalho precisa-se de uma noção simples do que seja o operador produto exterior discreto primal-dual. Dado uma primal p -cadeia η e uma dual $(n - p)$ -cadeia ζ , o produto exterior discreto $\eta \wedge \zeta$ é uma n -forma. Por exemplo, a Figura 3.12 apresenta o produto cunha de uma 1-co-cadeia primal com 1-co-cadeia dual é uma 2-forma associada a região convexa definida pela aresta primal e a aresta dual.

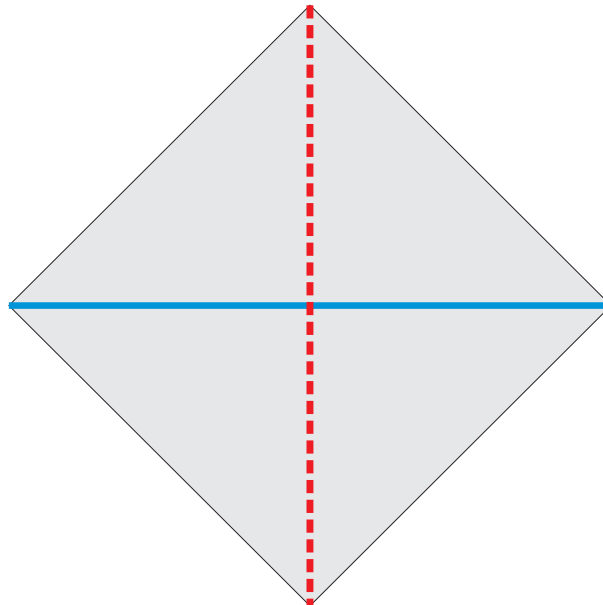


Figura 3.12: Região convexa definida pelas arestas primal (linha contínua em azul) e dual (linha pontilhada em vermelho).

3.6 p -formas de Whitney

Como se viu anteriormente, as p -co-cadeias são discretizações de p -formas. Esta representação de formas discretas em cadeias, embora seja muito conveniente em muitas aplicações, não é suficiente para preencher certas demandas de aplicações. No caso em que se trata de grandezas

eletromagnéticas, que necessita-se obter um valor pontual de uma p -forma para a representação desta grandeza. Como uma solução para este problema, pode-se usar uma interpolação destas cadeias com o resto do espaço. Por simplicidade, estas funções de interpolação podem ser tomadas de forma que sejam lineares em relação às coordenadas dos vértices.

3.6.1 Funções interpolantes para 0 e 1-formas em 2D

Pensando na interpolação linear discreta para 0-formas, umas das funções candidatas para isso são as referidas funções chapéu usadas amplamente em elementos finitos. Esta função de base será denotada como λ_i para cada vértice v_i . Estas funções são, dentro de cada simplexo, as famosas coordenadas baricêntricas, introduzidas por [Möbius, 1827] que irão satisfazer a seguinte propriedade:

$$\lambda_i(v_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.29)$$

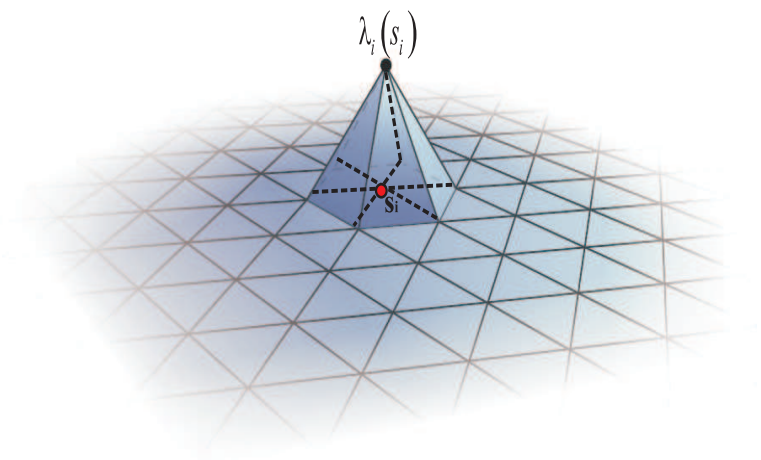


Figura 3.13: Função de forma nodal - 0-formas interpolantes.

Figura 3.13 apresenta o comportamento de uma função de forma nodal e com esta base de funções, pode-se checar facilmente a seguinte igualdade, onde denota-se o vértice i como o 0-simplexo s_i ,

$$\int_{s_j} \lambda_i s_i = \int_{s_j} \lambda_i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.30)$$

Portanto, estas funções interpolantes representam numa base de 0-co-cadeias, que correspondem exatamente ao dual da base de 0-cadeias.

Esta técnica de interpolação pode ser estendida para 1-formas. Para isso, será usado o método proposto por [Whitney, 1957]. Uma 1-forma de Whitney associada à aresta s_{ij} é definida como segue:

$$\lambda s_{ij} = \lambda_i d\lambda_j - \lambda_j d\lambda_i \quad (3.31)$$

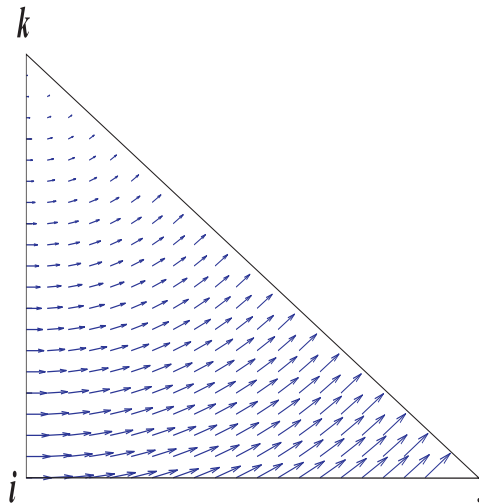


Figura 3.14: Função de forma aresta - 1-formas interpolantes.

Figura 3.14 apresenta o comportamento do campo gerado pela 1-forma λs_{ij} em um triângulo $\{ijk\}$. De fato, a integral da 1-forma de Whitney referente a aresta s_{ij} será igual a 0 para

integrações fora desta aresta, isto se dá pelo fato de um dos vértices não pertencer a esta aresta. Logo conclui-se que

$$\int_{s_{kl}} \lambda s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = k, j = l \\ -1, & i = l, j = k \\ 0 & \text{em outros casos} \end{cases} \quad (3.32)$$

e com isto a base de funções para 1-cocadeias está bem definida.

3.6.2 Formas de Whitney

A construção das funções interpolantes pode ser estendida para um p -simplexo arbitrário. Define-se então as funções de Whitney ou p -formas de Whitney [Bossavit, 1994], como uma família de p -formas com as seguintes propriedades:

1. São polinômios de no máximo grau 1 que atuam sobre os tetraedros.
2. Elas são conformes sobre as faces (superfícies).
3. Elas estão unicamente determinados a partir de suas integrais sobre os p -simplexos.

Duas p -formas são conformes sobre uma superfície se atribuem os mesmos valores a um conjunto qualquer de p -vetores tangentes à superfície em qualquer ponto. De acordo com esta definição, tem-se então que 3-formas são incondicionalmente conformes, pois, em um plano tangente qualquer três vetores são linearmente dependentes. 2-formas ω_s^2 e $\omega_{s'}^2$ são conformes se suas componentes normais coincidem em ambos os lados. 1-formas ω_s^1 e $\omega_{s'}^1$ são conformes se suas componentes tangenciais coincidem e, por fim duas 0-formas ω_s^0 e $\omega_{s'}^0$ são conformes se ambas são contínuas.

1-formas são integradas sobre as arestas e pode se dizer que ω^1 é a circulação do campo vetorial ω ao longo da aresta. A integral de uma 2-forma ω^2 através da face é o fluxo do campo vetorial ω através da face. A integral de uma 3-forma ω^3 sobre o tetraedro é exatamente ω e por fim a integral de uma 0-forma ω^0 sobre um 0-simplexo x_i é simplesmente $\omega(x_i)$.

Se constrói as formas de Whitney da seguinte maneira: seja i um vértice de um dos 3-simplexos (tetraedro) da malha simplicial e x um ponto pertencente a este tetraedro, veja Figura 3.15.

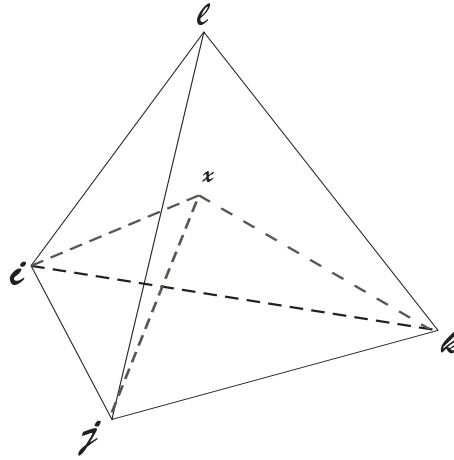


Figura 3.15: Forma de Whitney - coordenadas baricêntricas.

Seja então $\lambda_i(x)$ o peso baricêntrico de x sobre este tetraedro. Para todo x fora deste tetraedro temos que $\lambda_i(x) = 0$. Conclui-se que λ_i é uma função contínua e linear por partes tal que

$$x = \sum_{i=N} \lambda_i(x)x_i \quad (3.33)$$

onde x_i é a posição do nó i e temos que

$$\sum_i \lambda_i(x_i) = 1 \quad (3.34)$$

É possível associar a qualquer p -simplexo a forma diferencial

$$\omega_{i_0, \dots, i_p}^p = p! \sum_{j=0}^p (-1)^j \lambda_{i_j}^0 d\lambda_{i_0}^0 \wedge \dots \wedge d\lambda_{i_{j-1}}^0 \wedge d\lambda_{i_{j+1}}^0 \wedge \dots \wedge d\lambda_{i_p}^0. \quad (3.35)$$

Pela equação 3.35, tem-se que

$$\begin{aligned} \omega^0 &= \lambda_{i_1}^0 \text{ para } p = 0 \\ \omega^1 &= \lambda_{i_0}^0 d\lambda_{i_1}^0 - \lambda_{i_1}^0 d\lambda_{i_0}^0 \text{ para } p = 1 \\ \omega^2 &= 2 (\lambda_{i_0}^0 d\lambda_{i_1}^0 \wedge d\lambda_{i_2}^0 - \lambda_{i_1}^0 d\lambda_{i_0}^0 \wedge d\lambda_{i_2}^0 + \lambda_{i_2}^0 d\lambda_{i_0}^0 \wedge d\lambda_{i_1}^0) \text{ para } p = 2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Pela Figura 3.16 observa-se o comportamento das p -formas de Whitney. Tem-se que $d\lambda_j$ é perpendicular a face $\{i, k, l\}$ e $d\lambda_i$ é perpendicular a face $\{j, k, l\}$ veja Figura 3.16(a).

Os campos se comportam da seguinte maneira:

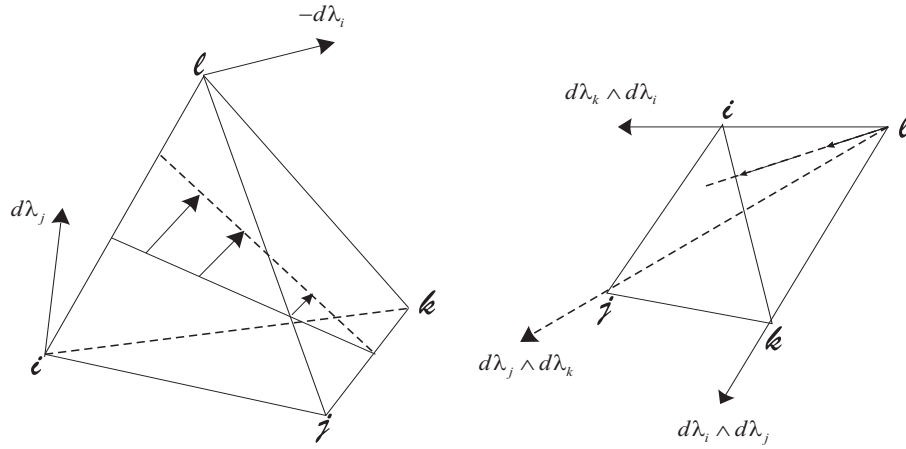


Figura 3.16: Elementos de Whitney: (a) Elemento de aresta (b) Elemento de face.

1. Os campos rodam em torno da aresta $\{k, l\}$ que chamamos de eixo central.
2. Os campos são normais aos planos contendo a aresta $\{k, l\}$.
3. Possuem magnitude proporcional a sua distância ao eixo central.
4. São diferentes de zero em todos os tetraedros que contêm a aresta $\{i, j\}$.

Uma propriedade importante a se destacar a respeito das 1-forma de Whitney é que $d\omega_{ij} = 2 d\lambda_i \wedge d\lambda_j$ existem como função e não só apenas como uma distribuição. A parte tangencial de ω_{ij} é contínua através das faces que contêm a aresta $\{i, j\}$. É fácil verificar que a sua circulação é 1 ao longo da aresta $\{i, j\}$ e 0 ao longo das outras. Assim, as propriedades (1), (2) e (3) são satisfeitas. Se

$$u = \sum_{\{i,j\} \in E} u^{ij} \omega_{ij} \quad (3.37)$$

é uma combinação linear dos elementos de Whitney de grau 1, os graus de liberdade u_{ij} são as circulações de u ao longo das arestas.

Agora, para elementos de faces se tem um campo central (o centro é o quarto vértice do tetraedro que contém a face), em cada um dos dois tetraedros que têm face $\{i, j, k\}$ em comum. Interpreta-se o campo como proveniente da fonte l , crescendo, atravessando a face e desaparecendo em l' , o quarto vértice do outro tetraedro. Este campo tem continuidade normal, e seu fluxo através da face $\{i, j, k\}$ é 1, assim como os fluxos são os graus de liberdade do elemento (veja a figura 3.16(b)).

Nos espaços de Sobolev observamos o seguinte diagrama

$$H^1(\Omega) \xrightarrow{d} H(\text{curl}, \Omega) \xrightarrow{d} H(\text{div}, \Omega) \xrightarrow{d} L^2(\Omega) \quad (3.38)$$

chamado diagrama de deRham. As formas de Whitney os espaços de Whitney satisfazem o diagrama discreto de deRham.

$$W^0 \xrightarrow{d} W^1 \xrightarrow{d} W^2 \xrightarrow{d} W^3 \quad (3.39)$$

Pela equação (3.39), é possível afirmar que, as p -formas de Whitney irão possuir as características físicas dos campos eletromagnéticos (continuidade tangencial, descontinuidade normal), e isto garantirá a eliminação dos modos espúrios.

3.7 Operador estrela de Hodge discreto

Em sua contrapartida discreta, o operador estrela de Hodge se torna mais fácil de se implementar, necessitando-se apenas da maneira de como mapear uma p -co-cadeia primal para a sua $(n - p)$ -co-cadeia dual e sua atuação inversa.

Por definição de malha dual, p -cadeias e as $(n - p)$ -cadeias duais são representadas por vetores de mesma dimensão, de maneira análoga a representação do operador derivada exterior discreto (co-bordo), a representação do operador estrela de Hodge será dada pela utilização de uma matriz de tamanho $\|\mathbb{K}^p\| \times \|\mathbb{K}^p\|$, onde $\|\mathbb{K}^p\|$ é a cardinalidade do conjunto de todos os p -simplexos.

Para fins numéricos deseja-se que esta matriz seja simétrica, definida positiva, e, às vezes, até mesmo diagonal para cálculos mais rápidos.

As relações constitutivas foram expressas em termos da teoria de formas diferenciais pela equação (2.47). As equações constitutivas discretas podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{M}_1(\epsilon) \mathbf{e} \\ \mathbf{h} &= \mathbf{M}_2(\nu) \mathbf{b} \\ \mathbf{j} &= \mathbf{M}_1(\sigma) \mathbf{e} \end{aligned} \quad (3.40)$$

As matrizes \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 em (3.40) serão denotadas como os operadores de Hodge discreto e são conhecidas como matrizes de massa ou de Hodge. A essência destas matrizes esta relacionada ao tipo de discretização, ou seja, serão construídas em função do tipo de malha utilizada. Se na discretização é utilizada uma malha estruturada como no FDTD, obtêm-se as matrizes de Yee Hodge e se for utilizada malhas não estruturadas como no FEM, têm-se as matrizes do tipo Galerkin Hodge [Moura et al., 2012b]. A seguir será apresentado os dois tipos de matrizes de massa considerados.

3.7.1 Matrizes Geométrica (Yee Hodge)

Neste caso considera-se uma malha regular de hexaedros satisfazendo $\Delta x = \Delta y = \Delta z = L$. Tem-se que a intensidade de campo elétrico \mathcal{E} será definida sobre as arestas dos hexaedros e a densidade de fluxo magnético \mathcal{B} sobre as faces. A densidade de fluxo elétrico será definida sobre as faces duais e a intensidade de campo magnético será definida sobre as arestas duais.

A matriz de Yee Hodge será obtida pela troca dos elementos Δx , Δy e Δz pelas infinitesimais dx , dy e dz , respectivamente. Seja então $e_i = \mathcal{E}_{i,x}\Delta x$ a intensidade de campo elétrico sobre a resta i na direção x . Em termos das relações constitutivas tem-se que a intensidade de fluxo elétrico sobre a i -ésima face dual será obtida por:

$$d_i = \star_\epsilon \mathcal{E}_x \Delta x. \quad (3.41)$$

E em função das componentes Δy e Δz a densidade de fluxo elétrico pode ser determinada da seguinte maneira:

$$d_i = \mathcal{D}_{i,x} \Delta y \Delta z. \quad (3.42)$$

Logo pelas equações (3.41) e (3.42) pode-se escrever

$$[\mathbf{M}_1(\epsilon)]_{i,i} = \epsilon L. \quad (3.43)$$

E nas entradas fora diagonal se assumirá

$$[\mathbf{M}_1(\epsilon)]_{i \neq j} = 0. \quad (3.44)$$

Pode-se então agrupar as equações (3.43) e (3.44) em função do delta de Kronecker

$$[\mathbf{M}_1(\epsilon)]_{ij} = \epsilon L \delta_{ij}. \quad (3.45)$$

E similarmente é possível construir as demais matrizes de Yee Hodge,

$$[\mathbf{M}_1(\sigma)]_{ij} = \sigma L \delta_{ij} \quad (3.46)$$

$$[\mathbf{M}_2(\nu)]_{ij} = \frac{\nu}{L} \delta_{ij} \quad (3.47)$$

3.7.2 Matrizes Galerkin Hodge

No capítulo 2 apresentou-se a contração de Poincaré e mostrou-se que o operador estrela de Hodge induz um produto interno (2.48). Logo pode-se definir a norma de uma p -forma ω^p da seguinte maneira:

$$\|\omega^p\| = \int_{\Omega} \omega^p \wedge \star \omega^p \quad (3.48)$$

Com o uso das p -formas de Whitney, é possível aproximar a intensidade de campo elétrico \mathcal{E} e a densidade de fluxo magnético \mathcal{B} por:

$$\mathcal{E} = \sum_i \omega_i^1 e_i \quad (3.49)$$

$$\mathcal{B} = \sum_j \omega_j^2 b_j \quad (3.50)$$

onde e_i e b_j podem ser interpretados como a circulação ao longo da aresta i e o fluxo passando através da face j . ω_i^1 e ω_j^2 são 1 e 2-forma de Whitney.

Têm-se então que

$$\|\mathcal{E}\| = \int_{\Omega} \mathcal{E} \wedge \star \mathcal{E} = \int_{\Omega} \mathcal{E} \wedge \mathcal{D} \quad (3.51)$$

$$\|\mathcal{B}\| = \int_{\Omega} \mathcal{B} \wedge \star \mathcal{B} = \int_{\Omega} \mathcal{B} \wedge \mathcal{H}. \quad (3.52)$$

Pela combinação das equações (3.49), (3.50), (3.51) e (3.52) pode-se construir as matrizes de Galerkin Hodge da seguinte forma:

$$[\mathbf{M}_1(\epsilon)]_{ij} = \int_{\Omega} \omega_i^1 \wedge \star_{\epsilon} \omega_j^1 \quad (3.53)$$

$$[\mathbf{M}_2(\nu)]_{ij} = \int_{\Omega} \omega_i^2 \wedge \star_{\nu} \omega_j^2. \quad (3.54)$$

E de maneira análoga tem-se a relação constitutiva que envolve a densidade de corrente e o campo elétrico definido da seguinte maneira

$$[\mathbf{M}_1(\sigma)]_{ij} = \int_{\Omega} \omega_i^1 \wedge \star_{\sigma} \omega_j^1. \quad (3.55)$$

As matrizes de Galerkin Hodge serão calculadas de uma maneira geral pela seguinte expressão:

$$\mathbf{M}_p(\alpha) = \int_{\Omega} \alpha w_p^i \cdot w_p^j d\Omega \quad (3.56)$$

onde α denota um dos campos escalares ϵ, ν, σ .

Estas matrizes são não diagonais, esparsas e definidas positivas. No próximo capítulo será apresentado uma técnica [Moura et al., 2012b] para a obtenção de uma inversa esparsa aproximada destas matrizes de Hodge.

3.7.3 Atuação do operador de Hodge discreto

Pode-se afirmar que qualquer valor primal de uma p -forma pode ser facilmente transferida à malha dual por meio de uma escala adequada e vice-versa; para ser mais preciso, esta afirmação obedece a seguinte equação:

$$\star_p \star_{n-p} = (-1)^{p(n-p)} Id \quad (3.57)$$

Isto implica que o operador \star sobre a malha dual é o inverso do operador \star sobre a malha primal a menos de um sinal. É desta forma usa-se o inverso do operador estrela de Hodge para ir da $(n-p)$ -co-cadeia dual para a p -co-cadeia primal. Convenciona-se, no entanto, usar \star de forma indiferenciada para significar tanto o operador estrela ou seu inverso, já que não há ambiguidade uma vez que sabemos se o operador é aplicado a uma forma primal ou a uma forma dual.

Figura 3.17 mostra a ação do operador derivada exterior sobre as p -cocadeia na malha primal e dual e operador estrela de Hodge que faz a ligação entre as duas malhas, um mapeamento entre p -cocadeias e $(n-p)$ -cocadeias.

Salienta-se aqui que p -co-cadeias são os análogos discretos das formas diferenciais. De fato, uma p -forma contínua foi definida como um mapeamento linear de um conjunto p -dimensional ao conjunto dos números reais \mathbb{R} , e pelo de se poder apenas integrar uma p -forma em uma

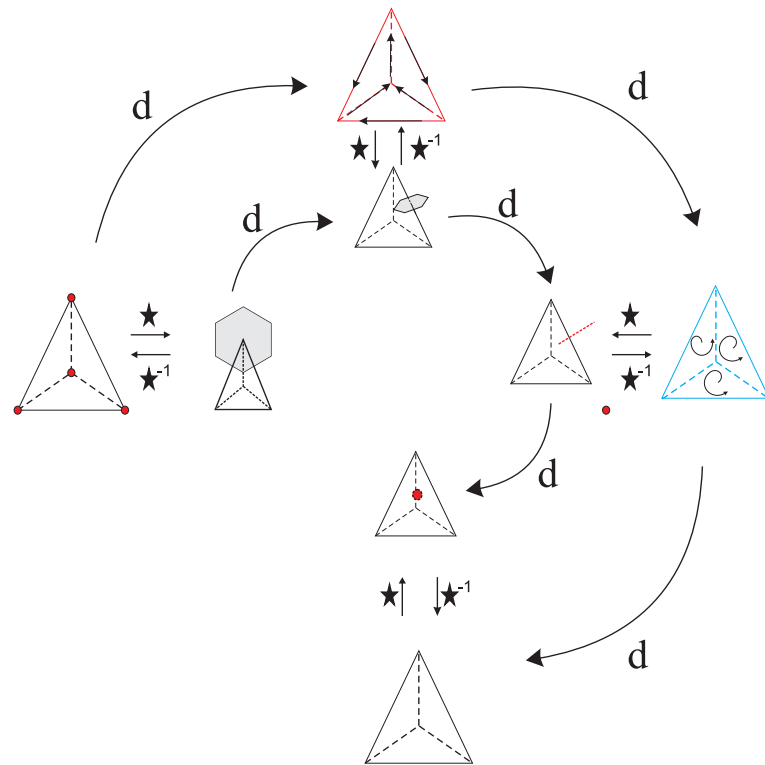


Figura 3.17: Operador derivada exterior discreto e operador estrela de Hodge discreto sobre simplexos e suas células duais

p -variedade, pode-se construir uma malha D^p sobre esta variedade que é simplesmente uma cadeia. Define-se então um mapeamento linear desta cadeia para \mathbb{R} , o qual será denominado de co-cadeia, ou seja, a contrapartida discreta de uma forma.

Por exemplo, uma 0-forma pode ser avaliada em cada vértice, uma 1-forma pode ser avaliada em cada aresta, uma 2-forma pode ser avaliada em cada face e 3-formas avaliadas sobre o volume do tetraedro.

Se há uma restrição para se calcular integrais sobre uma p -subvariedade, que é a soma dos p -simplexos na triangulação, tem-se uma p -co-cadeias, assim p -co-cadeias são uma discretização das p -formas. Pode-se ainda mapear uma p -forma contínua para uma p -co-cadeia, para fazer isso, basta que primeiro se integre a p -forma em cada p -simplexo e atribua o valor resultante para cada simplexo para se obter daí uma p -co-cadeia sobre um complexo p -simplicial, a co-cadeia resultante será então a representação discreta da forma original.

3.8 Equações de Maxwell na forma discreta

Deseja-se encontrar o campo elétrico \mathcal{E} , a densidade de fluxo elétrica \mathcal{D} , o campo magnético \mathcal{H} e o fluxo magnético \mathcal{B} em um domínio Ω onde a permissividade ϵ , a permeabilidade μ e a condutividade σ são conhecidas. Considera-se uma malha M sobre este domínio Ω que consiste do conjunto T de 3-simplexos (tetraedros), F de 2-simplexos (triângulos), E de 1-simplexos (arestas) e N de 0-simplexos (nós).

Nesta discretização, os campos \mathcal{E} e \mathcal{H} serão caracterizados pelos vetores grau de liberdade \mathbf{e} e \mathbf{b} que representam fisicamente a força eletromotriz ao longo dos 1-simplexos e o fluxo magnético passando através dos 2-simplexos, respectivamente. Estes vetores são relacionados por uma aplicação um-a-um aos vetores graus de liberdade \mathbf{d} , \mathbf{h} e \mathbf{j} que representam fisicamente o fluxo elétrico e a força magnetomotriz e a densidade de corrente na malha dual M^d de M [Bossavit and Kettunen, 1999].

No domínio discreto as leis constitutivas que correspondem a um mapeamento de \mathbf{e} para \mathbf{d} e \mathbf{b} para \mathbf{h} serão representados pelos operadores lineares \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 e \mathbf{M}_3 , e escreve-se este mapeamento em forma matricial por (3.40).

As equações de Maxwell no domínio discreto podem ser escritas então da seguinte maneira:

$$\mathbf{C}\mathbf{e} = -\frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{C}^T\mathbf{h} = \frac{d\mathbf{d}}{dt} + \mathbf{j} \quad (3.59)$$

$$\mathbf{D}^T\mathbf{d} = \rho \quad (3.60)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{b} = 0 \quad (3.61)$$

$$-\mathbf{G}\phi - \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{e} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{D}^T\mathbf{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (3.63)$$

As relações constitutivas serão representadas pelas seguintes equações matriciais:

$$\mathbf{d} = \mathbf{M}_p(\epsilon)\mathbf{e} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{M}_q(\mu)\mathbf{h} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{M}_r(\sigma) \mathbf{e} \quad (3.66)$$

onde p, q e r estarão relacionado ao grau da forma que a matriz multiplica.

3.9 Exemplos

Nesta seção apresenta-se alguns exemplos do uso das formas diferenciais para a resolução de problemas eletromagnéticos com o objetivo de se mostrar a capacidade desta ferramenta para lidar com esta classe de problemas. O foco deste trabalho é a resolução no domínio do tempo, mas, se apresenta um exemplo estático para se demonstrar a versatilidade do método. Apresenta-se também dois exemplos no domínio do tempo, guia retangular em domínios bi e tridimensionais.

3.9.1 Calha retangular

Neste exemplo iremos considerar uma calha retangular de dimensões 1×1 cm que é limitada por planos condutores aterrados. A calha é infinitamente longa na direção do eixo-z. Mantendo uma separação pequena comparada às outras dimensões da calha, coloca-se uma tampa condutora no potencial $V_0 = 1$ volt em $y = 1$. Assuma que a região no interior da calha é homogênea com $\epsilon_r = 1$.

Usando a lei de Faraday e Coulomb para o campo elétrico, tem-se

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} + \partial_t \mathcal{B} &= 0 \\ d\mathcal{D} &= \rho \end{aligned} \quad (3.67)$$

Este é um problema eletromagnético estático sem cargas, ou seja, as derivadas temporais são nulas e $\rho = 0$, logo pode-se escrever (3.67) da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= 0 \\ d\mathcal{D} &= 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Por (3.68) \mathcal{E} é uma 1-forma fechada, logo existe uma 0-forma ϕ , que fisicamente é o potencial escalar elétrico, tal que

$$\mathcal{E} = -d\phi \quad (3.69)$$

Usando agora a relação constitutiva $\mathcal{D} = \star_\epsilon \mathcal{E}$, tem-se então a seguinte equação que descreve o nosso problema

$$d \star_\epsilon d\phi = 0 \quad (3.70)$$

Este problema se reduz em encontrar a 0-forma ϕ , logo para esta discretização será usada como função interpolante a 0-forma de Whitney (3.36), ω^n ,

$$\phi = \sum u_i \omega_i^n \quad (3.71)$$

onde u_i será o potencial no nó i .

Logo a contrapartida discreta de (3.70) será escrita como,

$$\mathbf{G}^T \mathbf{M}_1(\epsilon) \mathbf{G} \phi = 0 \quad (3.72)$$

onde \mathbf{G} é a matriz de incidência nó-aresta (3.22) e $\mathbf{M}_1(\epsilon)$ é a matriz de Hodge (3.55).

A Figura 3.18 mostra as 10 equipotenciais e a distribuição de campo elétrico.

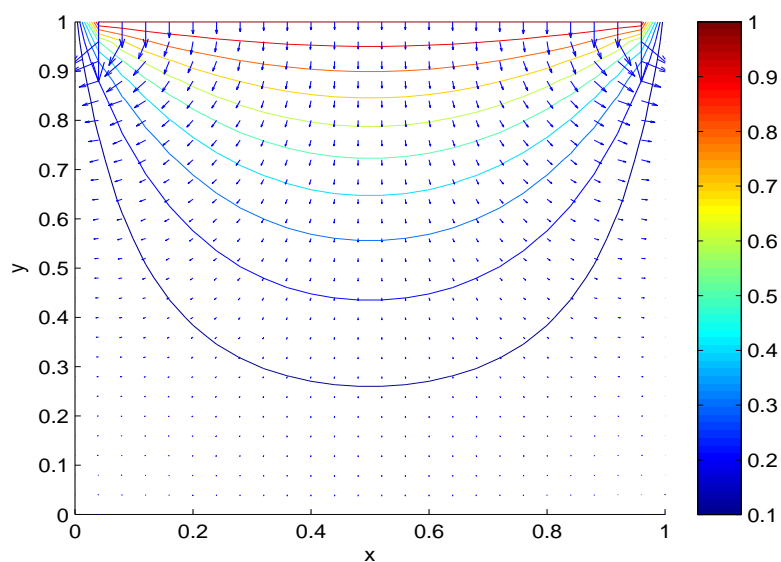


Figura 3.18: Equipotenciais e distribuição do campo elétrico - calha2D.

A solução analítica ϕ^A deste problema, obtida de [Polycarpou, 2006], é dada pela seguinte expressão:

$$\phi^A(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2k-1)\pi x) \text{senh}((2k-1)\pi y)}{\text{senh}((2k-1)\pi)} \quad (3.73)$$

A Figura 3.19 apresenta a solução analítica e a solução obtida pelo uso das formas diferenciais e o Observa-se que o método obtém uma boa aproximação para a solução do problema.

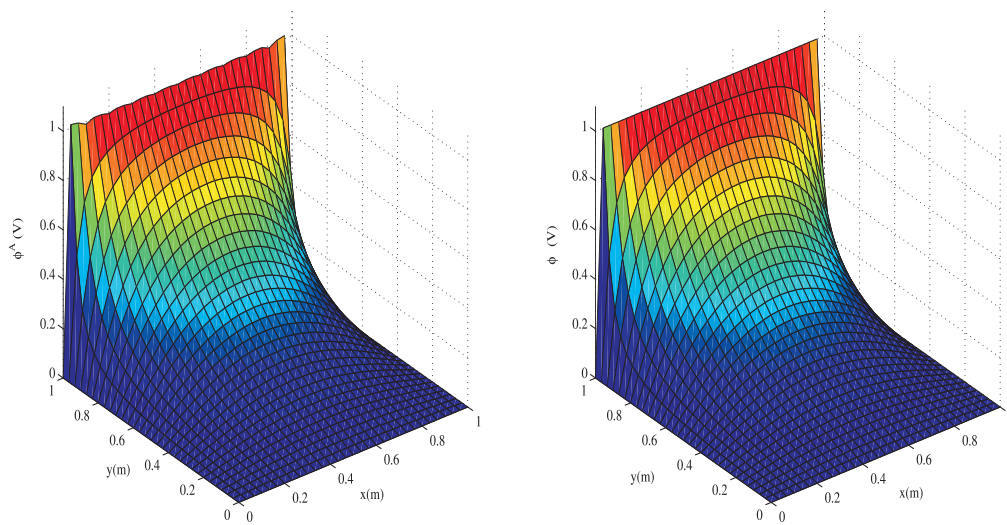


Figura 3.19: Solução para o problema da calha em 2D. (a) Solução analítica, (b) solução utilizando Formas Diferenciais.

Para se calcular o erro desta aproximação é utilizada a seguinte fórmula:

$$E_r = \frac{|\phi^A - \phi|}{|\phi^A|} \quad (3.74)$$

Figura 3.20 apresenta o comportamento do erro em toda a geometria, observa-se que nas quinas da região o erro é mais elevado devido a descontinuidade do potencial nestes pontos. Na verdade, é esperado que isto ocorra independente do método numérico utilizado. Mas no restante da geometria percebe-se uma coerência com a solução analítica.

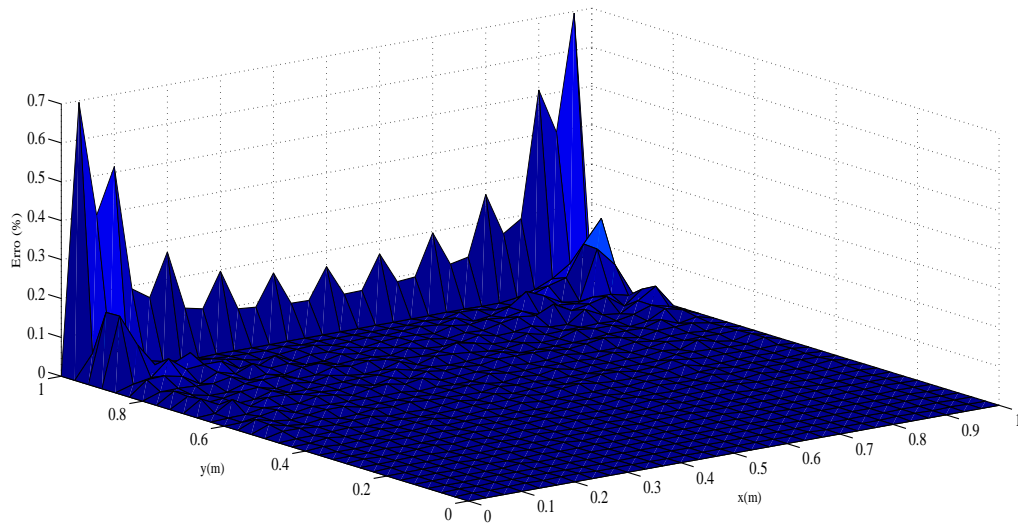


Figura 3.20: Erro absoluto percentual E_r , calculado para o potencial.

3.9.2 Guia de onda retangular 2D

Considere o guia de onda retangular, cujas paredes na direção z são condutoras eletricamente perfeitas (**PEC - perfect electric conductor**) e cujo material interno é o ar. No final do guia temos uma região PML, cuja parte teórica será vista no capítulo 5 terminada por uma parede condutora eletricamente perfeita.

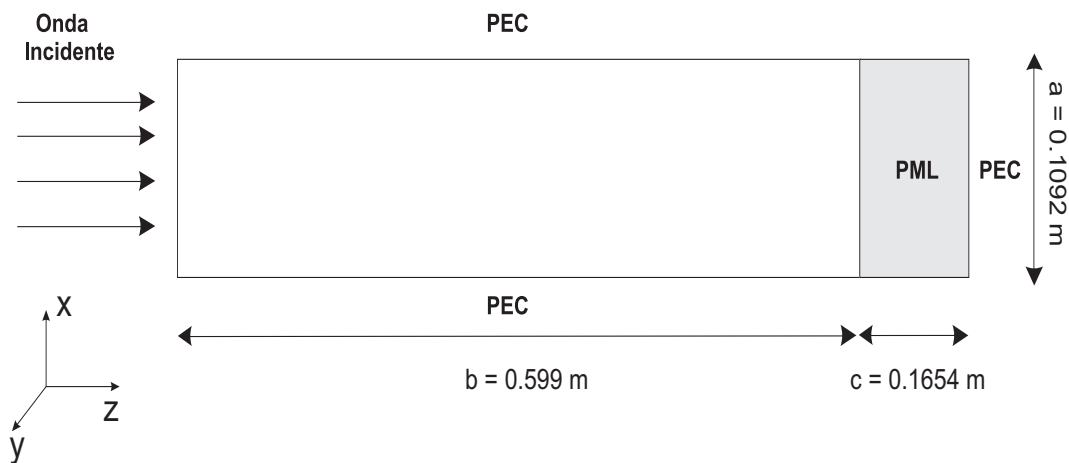


Figura 3.21: Guia de onda retangular 2D.

As dimensões do guia são apresentadas na Figura 3.21 e considera-se uma onda plana incidente, com ângulo de incidência igual a 0° e que se propaga em seu interior no modo TE_{10} . A expressão da onda incidente é dada por:

$$E_y = A \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos(\omega t - \beta z) \quad (3.75)$$

onde A é a amplitude máxima do campo elétrico na direção y , ω é a frequência angular e $\beta = \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}$ é a constante de propagação do guia, sendo k o número de ondas.

Para domínios em 2D, as formas de Whitney (3.36), ω^0 e ω^2 são escalares e ω^1 é um vetor. Para o caso TE_{10} , \mathcal{E}_y será vista como uma 0-forma e $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_z)$ será uma 1-forma, logo teremos a seguinte aproximação para estes campos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_y &= \sum e_i \omega_i^0 \\ \mathcal{B} &= \sum b_j \omega_j^1 \end{aligned} \quad (3.76)$$

Utilizando as equações (3.58), (3.59), (3.64) e (3.65) tem-se que as equações de Maxwell semi-discretas para o domínio do tempo em função da força eletromotriz \mathbf{e} e da densidade de fluxo magnético \mathbf{b} são escrita da seguinte maneira para $\mathbf{j} = 0$:

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = -\mathbf{G}\mathbf{e} \quad (3.77)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}_0(\epsilon) \mathbf{e} = \mathbf{G}^T \mathbf{M}_1(\nu) \mathbf{b}. \quad (3.78)$$

Para a discretização temporal das equações em (3.77)-(3.78), utiliza-se um esquema do tipo leap-frog [Wong et al., 1995]. Denota-se \mathbf{b} no tempo $t_0 + k\Delta t$ por \mathbf{b}^k e \mathbf{e} no tempo $t_0 + (k + \frac{1}{2})\Delta t$ por $\mathbf{e}^{k+\frac{1}{2}}$, onde $k \in \mathbb{N}$. Assumi-se uma condição inicial para \mathbf{b}^{t_0} e $\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}}$.

Utilizando as equações (3.77) e (3.78), pode-se calcular o valor de \mathbf{b} e \mathbf{e} para qualquer $t > t_0$ pelas seguintes equações:

$$\mathbf{b}^{k+1} = \mathbf{b}^k - \Delta t \mathbf{G} \mathbf{e}^{k-1/2} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{e}^{k+1/2} = \mathbf{e}^{k-1/2} + \Delta t [\mathbf{M}_0^{-1}(\epsilon) \mathbf{G}^T \mathbf{M}_1(\nu) \mathbf{b}^k] \quad (3.80)$$

onde \mathbf{G} é a matriz de incidência nó-aresta (3.22) e $\mathbf{M}_0(\epsilon)$ e $\mathbf{M}_1(\nu)$ são as matrizes de Galerkin Hodge dadas por (3.56).

Tem-se que o esquema leap-frog em (3.79)-(3.80) é condicionalmente estável e para que se tenha \mathbf{e} e \mathbf{b} limitados quando $k \rightarrow \infty$, a condição de Courant-Friedrichs-Lewy será definida em função dos maior autovalor da matriz $\mathbf{M}_0(\epsilon)$ [Gedney and Roden, 2000],

$$\Delta t \leq \frac{2}{\sqrt{\lambda_{\max}}} \quad (3.81)$$

onde λ_{\max} é o maior autovalor da matriz $\mathbf{M}_0(\epsilon)$.

O problema do guia de onda é simulado em 20.000 passos de tempo (11,2728 ns) para uma onda plana incidente com amplitude igual a $A = 2V/m$, considerando o intervalo de tempo igual a $\Delta t = 5.64 \times 10^{-13}s$. A camada PML tem espessura de 2.86λ , sendo λ o comprimento de onda.

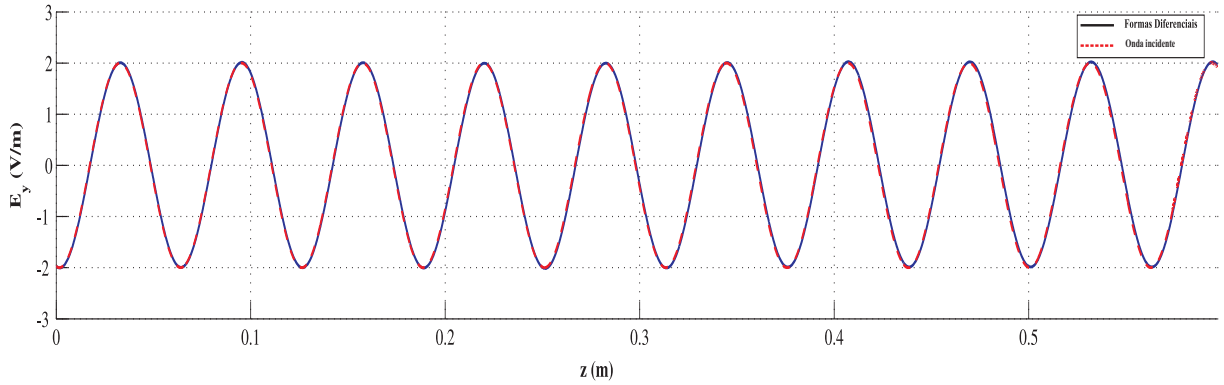


Figura 3.22: Campo elétrico \mathcal{E}_y no meio do guia $x = a/2$ após 4,1709 ns de simulação.

Figura 3.22 apresenta a distribuição do campo elétrico na região central do guia ($x = a/2$) com 17.400 passos de tempo (4,1709 ns), em contraste com a solução da onda incidente (3.75). Observe que a solução do método com formas diferenciais é concordante com esta solução.

O erro em dB relativo à solução da onda incidente E_y fora da região PML será calculado em função do tempo, através da seguinte expressão:

$$E_r = 20 \log_{10} \left(\frac{|E_y - \mathcal{E}|}{\max |E_y|} \right) \quad (3.82)$$

A Figura 3.23 apresenta o erro E_r na região central do guia ($x = a/2$) com 17.400 passos de tempo, observa-se que o erro está abaixo de -30 dB o que é satisfatório para esta simulação.

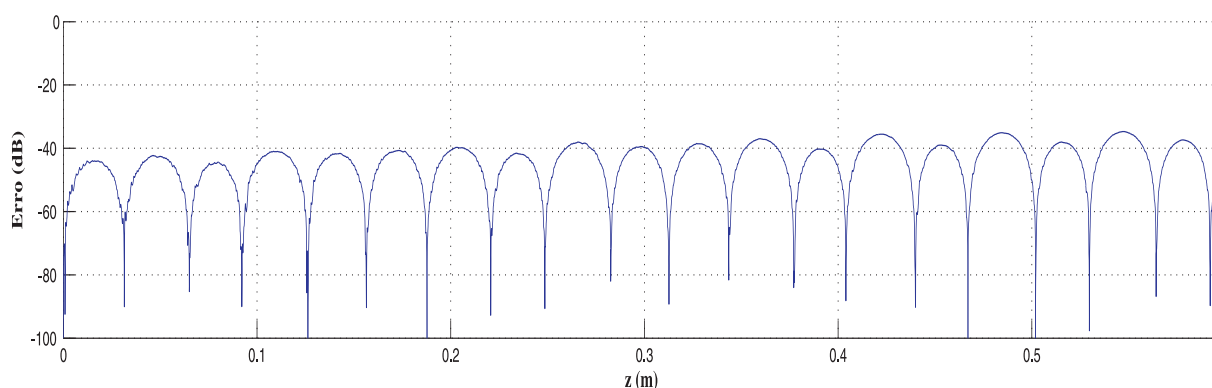


Figura 3.23: Erro em dB da distribuição do campo elétrico \mathcal{E}_y em relação a onda incidente no guia após 3,664 ns de simulação.

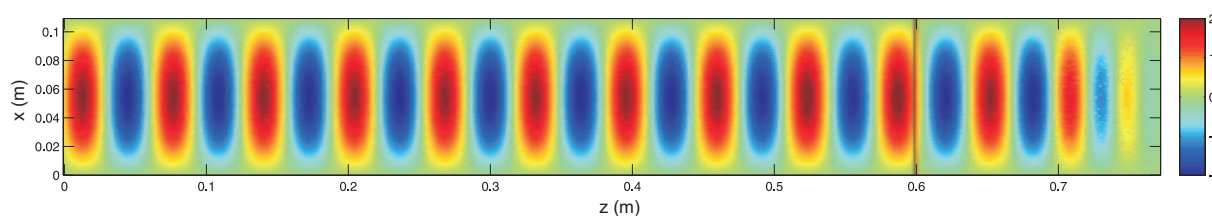


Figura 3.24: Distribuição do campo elétrico \mathcal{E}_y no guia após 3,664 ns de simulação.

Figura 3.24 apresenta uma fotografia da distribuição da componente \mathcal{E}_y do campo elétrico no guia após 3,664 ns de simulação. É observado que os padrões para o campo elétrico correspondem ao modo de propagação TE_{10} no guia e que há uma atenuação do campo na região da PML, onde este é absorvido, simulando a continuação da propagação da onda no guia. A formulação para esta PML será abordada no capítulo 5.

3.9.3 Guia de onda retangular 3D

Apresenta-se agora a versão em 3D do guia onda retangular, cujas paredes na direção z são condutoras eletricamente perfeitas (PEC) e cujo material interno é o ar. Como no caso 2D, no final do guia temos uma região PML terminada por uma PEC. As dimensões do guia são $(0.1092\text{m} \times 0.0546\text{m} \times 0.7644\text{m})$, Figura 3.25 apresenta detalhes da geometria do guia.

Considera-se novamente uma onda plana incidente, com ângulo de incidência igual a 0° e que se propaga em seu interior no modo TE_{10} . A expressão da onda incidente é dada por (3.75).

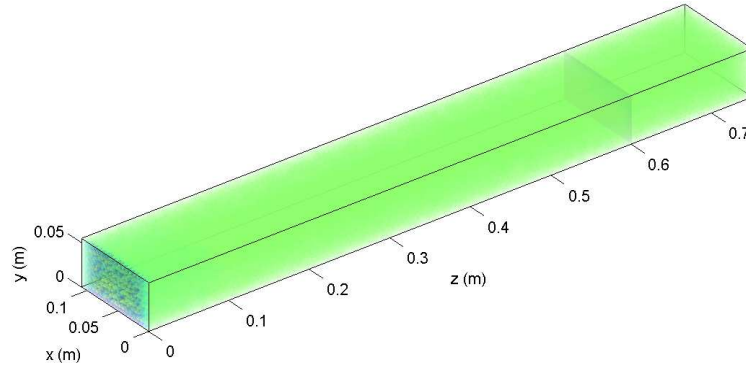


Figura 3.25: Guia de onda retangular 3D.

Agora em 3D, as formas de Whitney (3.36) tem o seguinte comportamento, ω^0 é um escalar e ω^1 e ω^2 são vetores. Para o caso TE_{10} , $\mathcal{E} = (0, \mathcal{E}_y, 0)$ será uma 1-forma e $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_x, 0, \mathcal{B}_z)$ será uma 2-forma, logo obtêm-se a seguinte aproximação para estes campos:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_y &= \sum e_i \omega_i^1 \\ \mathcal{B} &= \sum b_j \omega_j^2\end{aligned}\quad (3.83)$$

O esquema leap-frog em termos de \mathbf{e} e \mathbf{b} para este problema será dado por:

$$\mathbf{b}^{k+1} = \mathbf{b}^k - \Delta t \mathbf{C} \mathbf{e}^{k-1/2} \quad (3.84)$$

$$\mathbf{e}^{k+1/2} = \mathbf{e}^{k-1/2} + \Delta t [\mathbf{M}_1^{-1}(\epsilon) \mathbf{C}^T \mathbf{M}_2(\nu) \mathbf{b}^k] \quad (3.85)$$

onde \mathbf{C} é a matriz de incidência aresta-face (3.23) e $\mathbf{M}_1(\epsilon)$ e $\mathbf{M}_2(\nu)$ são as matrizes de Galerkin Hodge dadas por (3.56).

Figura 3.26 apresenta a componente \mathcal{E}_y do campo elétrico no tempo $t = 4$ a $t = 20$ ns no ponto $p = (0.0546, 0.0273, 0.385)$ que está localizado exatamente no meio do guia 3D, temos novamente em contraste com a solução analítica (3.75) que a solução do método com formas diferenciais é concordante com a solução analítica e, o campo é completamente absorvido pela camada PML.

Apresenta-se agora as configurações dos campos elétrico e magnético para o modo TE_{10} . Figura 3.27 apresenta o comportamento do campo elétrico $\mathcal{E} = (0, \mathcal{E}_y, 0)$ e do campo magnético $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_x, 0, \mathcal{H}_z)$ no plano xz em $y = 0.0273$ m. Percebe-se que a solução obtida é condizente com o comportamento esperado para o campo magnético no plano xz .

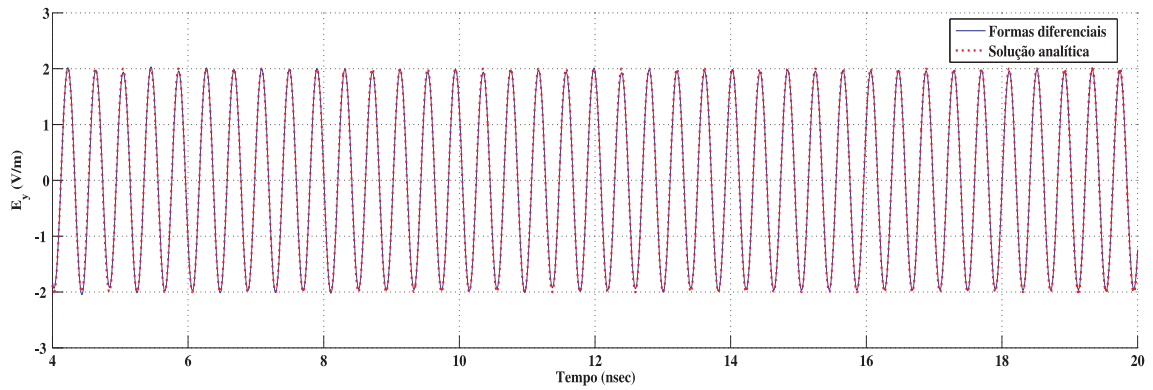


Figura 3.26: Campo elétrico \mathcal{E}_y no ponto $p = (0,0546, 0,0273, 0,385)$ localizado no centro do guia 3D.

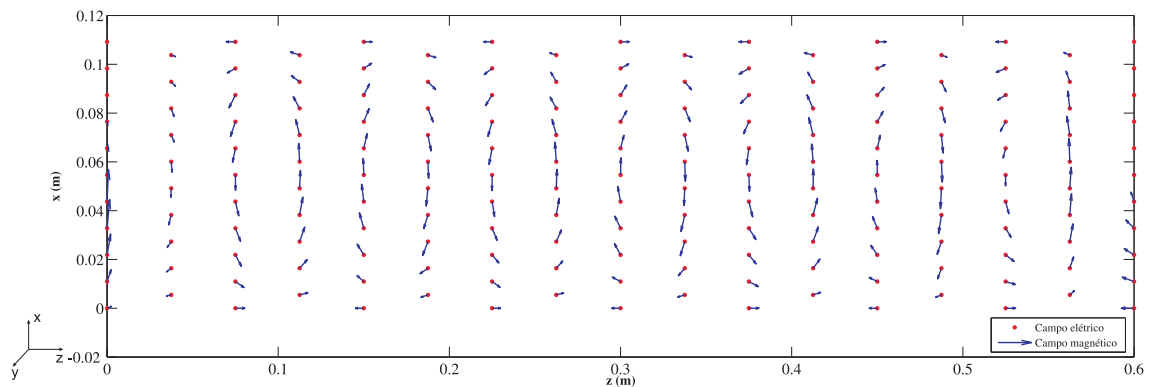


Figura 3.27: Carta de campo - Comportamento dos campos elétrico \mathcal{E} e magnético \mathcal{H} no plano xz - guia 3D.

Apresentou-se neste capítulo a teoria discreta para as formas diferenciais e sua aplicação a problemas eletromagnéticos. No próximo capítulo será apresentado uma técnica para a esparsificação da inversa da matriz de Hodge.

Capítulo 4

Esparsificação Recursiva para matrizes de Hodge

4.1 Introdução

No capítulo 3 foi apresentado um sistema de equações em (3.84)-(3.85) para a solução no domínio do tempo de problemas de propagação de ondas usando a teoria de formas diferenciais.

Estas equações consistem na resolução de um sistema linear esparso definido pela inserção das relações constitutivas através das matrizes de Hodge em cada passo de tempo. Estas matrizes atuam como um mapeamento entre os graus de liberdade, ou seja, o mapeamento entre os vetores que representam a força eletromotriz para a densidade de fluxo elétrico, e a densidade de fluxo magnético para a força magnetomotriz.

Observou-se que se uma estrutura de hexaedros é usada na malha, as matrizes de Hodge são diagonais e são denominadas matrizes Yee Hodge (3.45). Com estas matrizes diagonais temos que o esquema em (3.84)-(3.85) se torna totalmente explícito no sentido de se calcular os graus de liberdade das equações de Maxwell, pois, a inversão da matriz de Hodge neste caso é trivial [Bernard et al., 2010].

Como neste trabalho será utilizado malhas simpliciais, as matrizes de Hodge serão não-diagonais, definida positiva, simétricas e esparsas [Lee et al., 1997]. Estas matrizes são denominadas matrizes de Galerkin Hodge (3.56), e considerando-se que a inversa destas matrizes

são tipicamente cheias, tem-se na literatura a utilização de métodos de lumping que são geralmente usados para se obter uma matriz diagonal aproximada para a inversa da matriz de Hodge no FETD [Fisher et al., 2005].

[Bossavit and Kettunen, 1999] propuseram uma aproximação que requer que todos os ângulos diedrais sejam agudos, mas se percebeu que a imposição desta condição é muito difícil de se impor na prática, e às vezes o lumping destrói a positividade definida das matrizes, levando a uma estabilidade condicional [Keranen et al., 2002].

[He and Teixeira, 2007] propõem um método que é incondicionalmente estável, totalmente explícito e esparso que é usado em malhas simpliciais para o FETD, neste método uma aproximação esparsa para a inversa da matriz de Hodge é calculada. Nesta aproximação, a inversa da matriz de Hodge é calculada explicitamente e através da mesma se obtém a sua aproximação esparsa, esta abordagem leva a um custo computacional considerável, pois, se considera a inversão da matriz original e o processo de esparsificação.

Neste capítulo apresenta-se uma técnica de esparsificação [Moura et al., 2012b] da inversa da matriz de Hodge que consiste no particionamento recursivo desta matriz em blocos. A ideia fundamental é aproximar as submatrizes por matrizes esparsas durante o processo de inversão por blocos. Experimentos numéricos que serão apresentados mostram que o método leva a um menor número de operações no processo de inversão (ou seja, a um menor custo computacional) e é incondicionalmente estável.

4.2 Inversão por blocos

O método de esparsificação recursiva da inversa da matriz de Hodge é baseada na seguinte fórmula de inversão por bloco [Lin et al., 2009]

$$\mathbf{D}_{i-1}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i^{-1} & \mathbf{X}_i \\ \mathbf{X}_i^T & \mathbf{S}_i \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{D}_0^{-1} = \mathbf{M}^{-1}$ e

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i &= \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{D}_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \\ \mathbf{X}_i &= -\mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{B}_i \mathbf{D}_i^{-1} \\ \mathbf{S}_i &= \mathbf{D}_i^{-1} - \mathbf{D}_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{X}_i \end{aligned} \quad (4.2)$$

As expressões em (4.1) e (4.2) surgem a partir do particionamento de uma matriz que é descrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{D}_{i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_i^T & \mathbf{D}_i \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Note que a inversão da matriz \mathbf{D}_0 de ordem $n \times n$ se reduz a inversão de uma matriz \mathbf{D}_1 de ordem $(n - q) \times (n - q)$ e uma matriz \mathbf{Q}_1 de ordem $(q \times q)$, onde $0 < q < n$. A fórmula de inversão pode ser aplicada recursivamente a matriz \mathbf{D}_1 , levando a uma sequência de tamanho decrescente de matrizes.

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_k \quad (4.4)$$

onde

$$k = \lfloor \log_{q/n}(1/n) \rfloor \quad (4.5)$$

e \mathbf{D}_i é o bloco de \mathbf{D}_{i-1} , para $i = 1, 2, \dots, k$, tal que a inversa \mathbf{M}^{-1} é obtida pelas substituições sucessivas através da sequência

$$\mathbf{D}_k^{-1}, \mathbf{D}_{k-1}^{-1}, \dots, \mathbf{D}_1^{-1}, \mathbf{D}_0^{-1} = \mathbf{M}^{-1} \quad (4.6)$$

4.3 Critério de esparsificação

As matrizes em (4.6) podem ser aproximadas por matrizes esparsas, devido ao fato de que seus elementos não nulos e de maior valor absoluto estarem fortemente concentrados e próximos a sua diagonal [He and Teixeira, 2007]. Esta propriedade nos induz a ideia da esparsificação recursiva, que tem por objetivo a obtenção de uma sequência de matrizes esparsas

$$\mathbf{D}_{k_s}^{-1}, \mathbf{D}_{(k-1)_s}^{-1}, \dots, \mathbf{D}_{0_s}^{-1} = \mathbf{M}_s^{-1} \quad (4.7)$$

para aproximar a sequência descrita em (4.6).

Neste trabalho, é aplicado a esparsificação recursiva sobre a matriz de Hodge, a fim de suavizar e acelerar o processo de esparsificação. Durante o processo, a matriz de Hodge é recursivamente dividida em blocos menores como em (4.4) e, em seguida, recursivamente invertida por (4.1).

Após cada inversão das matrizes em (4.6), a respectiva matriz \mathbf{D}_k^{-1} é esparsificada para uma matriz $\mathbf{D}_{k_s}^{-1}$ de acordo com o critério utilizado em [He and Teixeira, 2007], que é apresentado a seguir.

4.3.1 Esparsificação via parâmetro threshold

Neste critério [He and Teixeira, 2007], os coeficiente fora da diagonal da matriz $\mathbf{D}_k^{-1} = [d_{ij}]$ são zerados quando

$$|d_{i \neq j}| \leq r \min |\text{diag } \mathbf{D}_k^{-1}| \quad (4.8)$$

onde $0 < r < 1$ é o parâmetro threshold.

Este critério é motivado pela estrutura das matrizes de Hodge (3.56), cujos maiores valores estão localizados na diagonal destas matrizes, de modo que isso induz naturalmente um valor de corte dado por uma fração do menor coeficiente diagonal.

O interesse aqui está em se obter de uma maneira eficiente uma aproximação para a inversa da matriz de Hodge que seja esparsa e que não perca as características da matriz inversa original. Para se verificar a viabilidade desta abordagem, será feito uma análise do desempenho do método da esparsificação recursiva.

Primeiramente, irá se definir a densidade de uma matriz \mathbf{M} de ordem $(m \times n)$ como

$$ds(\mathbf{M}) = \frac{\text{nnz}(\mathbf{M})}{mn} \quad (4.9)$$

onde $\text{nnz}(\mathbf{M})$ é o número de elementos diferentes de zero da matriz \mathbf{M} .

Um fato importante a ser salientado aqui é que a ordem de complexidade para a inversão de uma matriz está relacionado a sua densidade (4.9). A complexidade associada com a inversão direta de uma matriz cheia é igual a $O(n^3)$. Por outro lado, a complexidade da inversão de uma matriz esparsa depende de sua densidade.

No método da esparsificação recursiva têm-se que cada etapa de substituição regressiva, uma matriz inversa (i.e. \mathbf{Q}_i^{-1} é calculada, e observando que \mathbf{D}_i^{-1} é proveniente do passo anterior) e 4 produtos matriciais são calculados. Considerando que todas as matrizes possuem uma densidade ds , e que a inversão desta matriz utiliza $c_d ds n^3$ operações (por exemplo, a decomposição LU utiliza $2 ds n^3/3$ operações) e uma multiplicação matricial utiliza $c_m ds n^3$

operações (por exemplo, um método trivial utiliza $ds n^3$ operações), a esparsificação recursiva irá utilizar o seguinte número de operações

$$\begin{aligned}
 T(n, ds) &= \sum_{i=1}^k (c_d + 4c_m) ds \left(\frac{n}{2^i}\right)^3 \\
 &= (c_d + 4c_m) ds n^3 \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{2^3}\right)^i \\
 &\leq (c_d + 4c_m) ds n^3 \left[\frac{1}{1 - (1/2)^3} - 1 \right] \\
 &= \frac{1}{7} (c_d + 4c_m) ds n^3
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

para inverter e esparsificar uma matriz de ordem $(n \times n)$.

Para se comprovar a veracidade da equação (4.10), aplicou-se a esparsificação recursiva com um parâmetro threshold fixo $r = 1 \times 10^{-1}$ a matrizes de Hodge com tamanho crescente, e se comparou o tempo de processamento para o método da esparsificação recursiva com o método convencional de inversão.

Tabela 4.1 apresenta estes resultados e pode ser visto que, com o aumento do tamanho das matrizes, a esparsificação recursiva fica mais rápida do que a inversão convencional, o que é explicado pelo fato de que a esparsificação das matrizes na sequência decrescente em (4.7) diminui o número de operações no processo de inversão.

Tabela 4.1: Tempo de processamento: Inversão Convencional (IC) X Esparsificação Recursiva (ER)

Tamanho da Matriz n	IC (s)	ER (s)	Speedup IC/ER
500	0.03	0.04	0.70
1000	0.11	0.14	0.81
2500	1.23	0.89	1.38
5000	10.80	3.77	2.86
7500	27.04	11.99	2.25
9000	929.05	20.19	46.01

4.4 Análise de estabilidade

Um importante aspecto para um método de aproximação de inversas de matrizes está relacionado a estabilidade do sistema, ou seja, deseja-se um método incondicionalmente estável. Nesta seção, serão discutidas algumas questões relacionadas com a estabilidade do processo de esparsificação recursiva, utiliza-se para estes testes um cubo unitário com 5.000 tetraedros.

Primeiramente será mostrado que o método preserva a positividade definida das matrizes de Hodge, sabe-se que esta propriedade está relacionada a positividade dos autovalores da matriz [Anton and Rorres, 2001], portanto, precisa-se saber se o sinal dos autovalores da matriz são preservados. Neste sentido, é usado o erro relativo dos autovalores, descrito a seguir

$$E_\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\lambda_i(\mathbf{M}^{-1}) - \lambda_i(\mathbf{M}_s^{-1})|}{\lambda_i(\mathbf{M}^{-1})} \quad (4.11)$$

onde $\lambda_i(\mathbf{M}^{-1})$ e $\lambda_i(\mathbf{M}_s^{-1})$ são os i -ésimos autovalores das matrizes \mathbf{M}^{-1} e \mathbf{M}_s^{-1} , respectivamente.

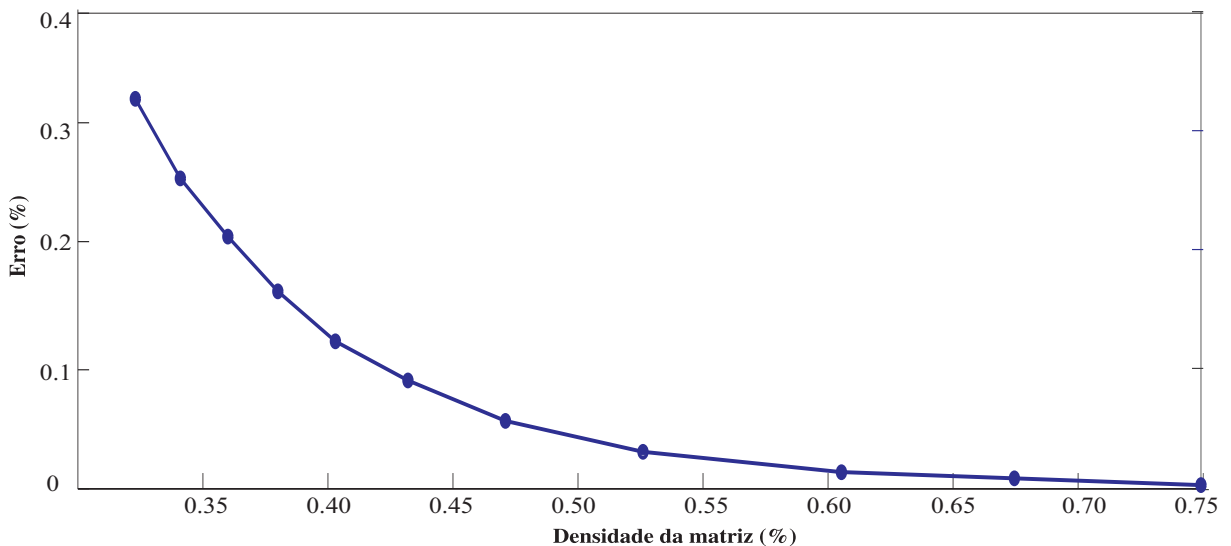


Figura 4.1: Erro relativo dos autovalores como função da densidade da matriz para o método da esparsificação recursiva.

Na Figura 4.1, os erros relativos são consistentemente menores que 0,33% para uma densidade mínima de 0,32% usando o método da esparsificação recursiva. Com este resultado conclui-se

que todos os autovalores de \mathbf{M}_s^{-1} são positivos, ou seja, a matriz esparsa aproximada possui a positividade definida da matriz \mathbf{M}^{-1} . Observa-se também que o erro tende a zero a medida que a densidade cresce, o que induz a um comportamento estável.

Outro teste feito verificou-se a propriedade de forte localização próxima a diagonal da matriz é preservada. Para analisar o erro causado pelo método da esparsificação recursiva, nós utilizamos a ideia da norma da diagonal de uma matriz,

$$\|\text{diag } M\| = \left(\sum_{i=1}^n d_{ii}^2 \right)^{1/2} \quad (4.12)$$

onde d_{ii} são os coeficientes da diagonal da matriz D_k^{-1} . Note que a norma da diagonal de $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}_n$ é $\|\text{diag } \mathbf{I}_n\| = n^{1/2}$.

Usando este parâmetro define-se o erro da diagonal como sendo

$$E_{\text{diag}} = \frac{\|\text{diag } \mathbf{M}\mathbf{M}_s^{-1}\| - n^{1/2}}{n^{1/2}} \quad (4.13)$$

onde \mathbf{M}_s^{-1} é a matriz esparsa obtida pelo método de esparsificação recursiva.

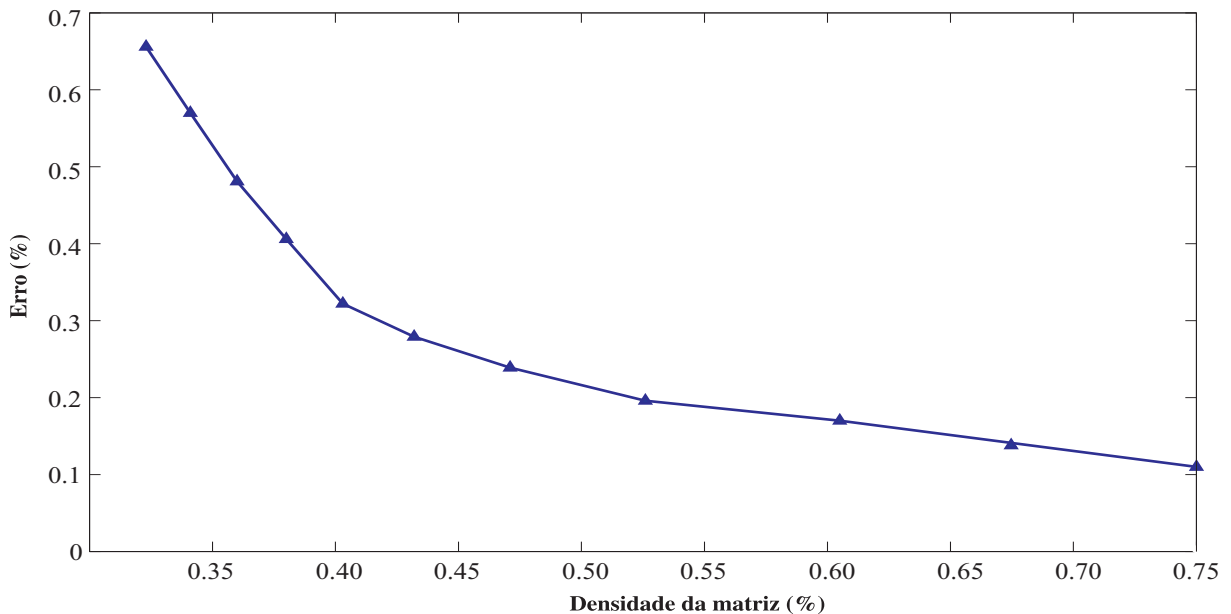


Figura 4.2: Erro relativo da diagonal como função da densidade da matriz para o método da esparsificação recursiva.

Os erros relativos da norma da diagonal observados na figura 4.2 são consistentemente menores que 0.65% para uma densidade mínima de 0.32% usando a esparsificação recursiva, mostra-se assim que o método preserva a propriedade de forte localização da matriz original. Observamos novamente que o erro tende a zero a medida que a densidade cresce, que induz a um comportamento estável do método.

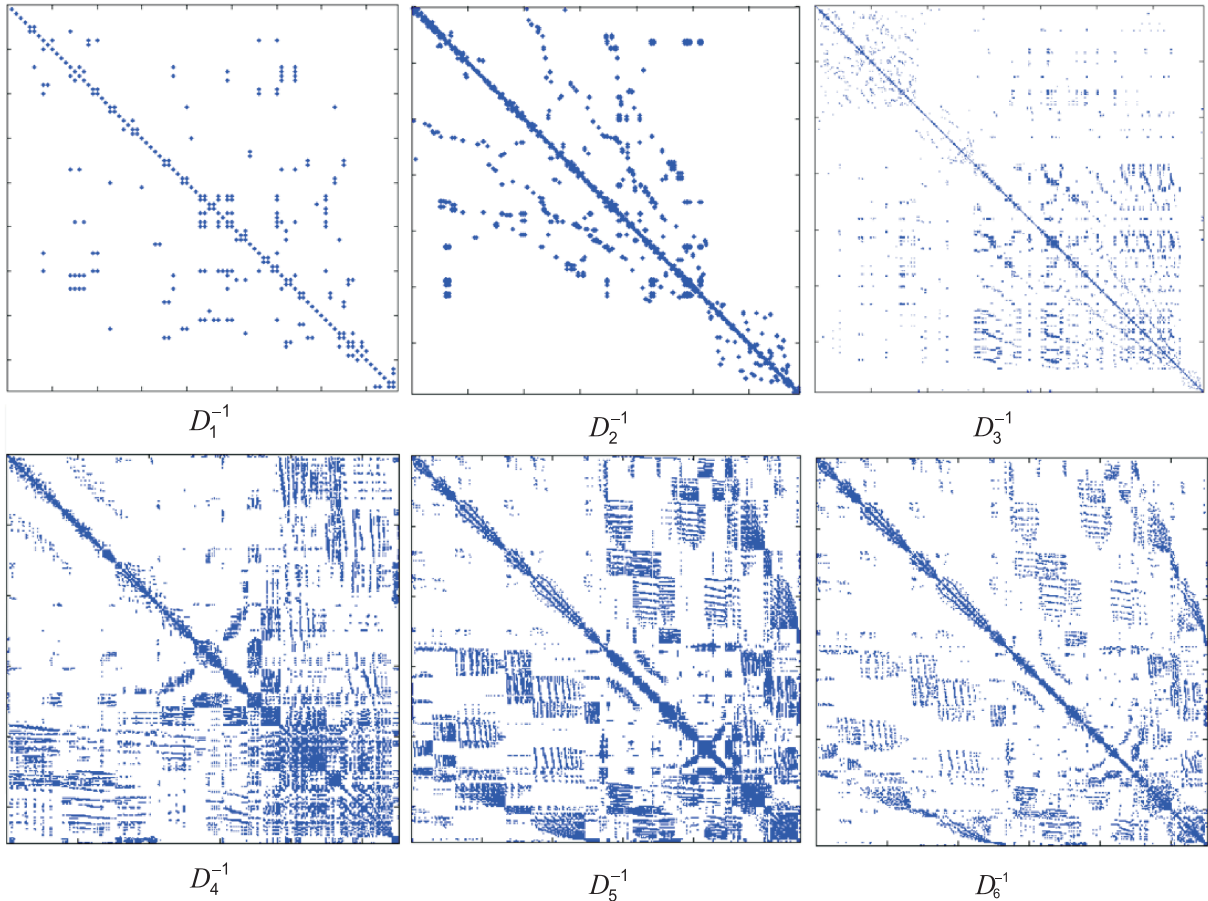


Figura 4.3: Padrão de esparsidade da sequência de matrizes $\mathbf{D}_{6_s}^{-1}, \mathbf{D}_{5_s}^{-1}, \mathbf{D}_{4_s}^{-1}, \mathbf{D}_{3_s}^{-1}, \mathbf{D}_{2_s}^{-1}, \mathbf{M}_s^{-1}$, via esparsificação recursiva.

Figura 4.3 mostra o padrão de esparsidade da sequência de matrizes em (4.7) obtidas pelo método da esparsificação recursiva. Observe graficamente que a propriedade de forte localização dos elementos é preservada em cada etapa do processo de esparsificação.

O método de esparsificação recursiva aproxima uma matriz tipicamente cheia para matrizes esparsas, mantendo as propriedades importantes de positividade definida e de forte localização

dos elementos. Na próxima seção, o método da esparsificação recursiva será aplicado para se resolver um problema eletromagnético em 3D.

4.5 Exemplos Numericos

Para se analisar o método da esparsificação recursiva e para validar a sua estabilidade resolve-se agora o problema de uma cavidade ressonante em 3D. A cavidade é retangular com paredes perfeitamente condutivas com dimensões $1.0\text{mm} \times 0.5\text{mm} \times 1.5\text{mm}$. Um pulso Gaussiano modulado é usado como fonte de densidade de corrente para excitar a cavidade, que é dado por

$$\vec{J}(t) = A \cos(\omega t) \exp\left(-\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^2\right) \hat{y} \quad (4.14)$$

onde $A = 10\text{GA}/\text{m}^2$, $\omega = 0.42\pi\text{rad}/\text{s}$, $t_0 = 16\text{ps}$ e $\tau = 5\text{ps}$. A malha simplicial usada nesta simulação possui 11.801 tetraedros e 16.719 arestas. Após a separação das arestas livres das arestas fontes [Keränen et al., 2002], se obtém uma matriz de Hodge com tamanho (11.105×11.105) . Simulações foram realizadas com a inversa convencional da matriz de Hodge e com sua aproximação dada pelo método de esparsificação recursiva.

Ao aplicar a transformada de Fourier no domínio do tempo no sinal medido no centro da cavidade, a frequência de ressonância pode ser obtida. A solução analítica deste problema possui uma frequência de ressonância de 180.20 GHz. Usando-se a inversa convencional da matriz de Hodge foi obtido uma frequência de ressonância igual a 179.43 GHz após 13.145 passos de tempo, que corresponde a um erro de 0.427%. Matrizes com densidades muito baixas são usados para verificar a estabilidade do método de esparsificação recursiva.

Tabela 4.2: Erro Relativo - Esparsificação Recursiva.

Parâmetro r	Frequência de ressonância	Erro %	Densidade normalizada $ds(\mathbf{M}_1^{-1})/ds(\mathbf{M}_1)$	Esparsificação segundos
0.05	179.43	0.42	0.83	83.24
0.10	179.43	0.42	0.59	73.44
0.15	181.27	0.59	0.50	66.54
0.20	183.10	1.61	0.37	61.92
0.25	186.76	3.64	0.29	57.82

Tabela 4.2 apresenta os resultados obtidos através da utilização dos parâmetros $r = \{0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25\}$ no processo de esparsificação, observa-se que o erro é diretamente proporcional a este parâmetro. Este comportamento ocorre porque a medida que r cresce retira-se mais elementos da matriz de Hodge, acarretando assim a perda de informações essenciais para a resolução do sistema linear esparso.

Destaca-se na Tabela 4.2 os resultados obtidos para $r = 0.05$ e $r = 0.10$, verifica-se um erro igual ao obtido com o uso da matriz original, mostrando que até uma densidade normalizada de 0.59 se mantém sem nenhum prejuízo as propriedades para a resolução do sistema. Em contrapartida, se tem para densidades normalizadas menores que 0.50 uma perda nas informações para a resolução do sistema linear, causando assim a perda de precisão com o aumento do erro.

Um outra característica interessante a ser destacada é o fato do tempo de processamento ser diretamente proporcional a densidade normalizada, ou seja, quanto mais esparsa é a matriz menor é o custo computacional para invertê-la.

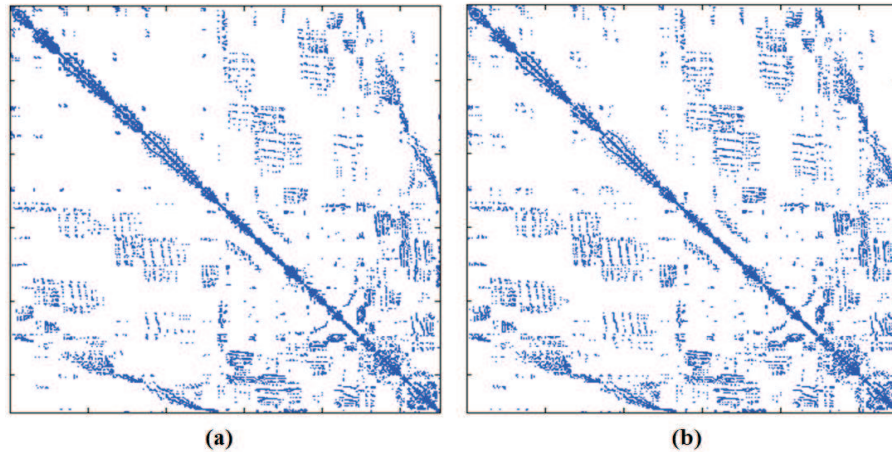


Figura 4.4: Padrão de esparsidade: (a) Matriz de Hodge $\mathbf{M}_1(\epsilon)$ e (b) inversa aproximada da matriz de Hodge $\mathbf{M}_1^{-1}(\epsilon)$ via esparsificação recursiva com $r = 0.10$.

Figura 4.4 mostra o padrão de esparsidade da aproximação da inversa da matriz de Hodge e via método da esparsificação recursiva. Observe que o método preserva como mostrado na seção anterior a localização dos elementos, ou seja, mesmo com o processo de inversão aproximada a energia do sistema não é dissipada.

Uma importante conclusão a ser observada pelas matrizes em 4.4, é que a inversa esparsificada da matriz de Hodge mantém um perfil semelhante ao da matriz de Hodge original. Como não se tem uma forma de especificar o melhor parâmetro r a ser utilizado no processo, deve-se começar com um r que mantém uma densidade normalizada maior ou igual a 1.

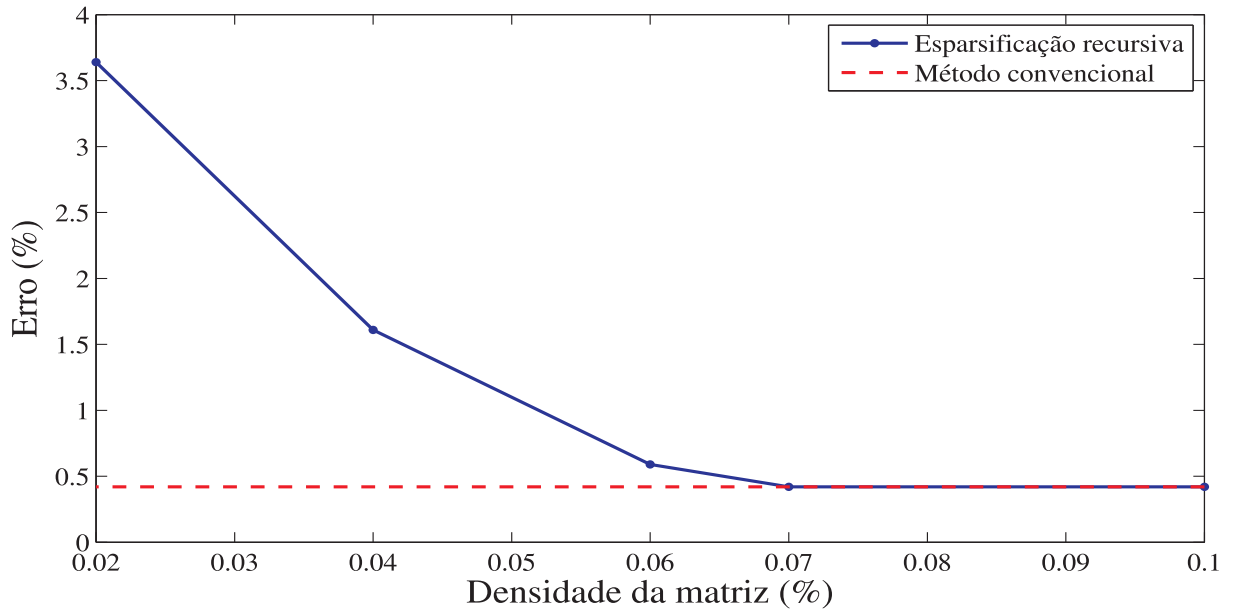


Figura 4.5: Erro relativo do método da esparsificação recursiva para o problema da cavidade ressonante 3D.

Figura 4.5, apresenta o comportamento do erro em relação a densidade da matriz esparsificada. É possível observar que para densidades da matriz esparsa a partir de 0.07%, têm-se que os erros tendem a ser iguais ao erro obtido usando a inversa original da matriz de Hodge, que possui uma densidade de 100%. Nota-se também que o erro é inversamente proporcional a densidade da matriz, ou seja, quanto mais se aproxima da densidade da matriz original mais preciso é o resultado obtido.

Uma maneira encontrada para se reduzir o tempo de processamento é usar a estratégia da bi-esparsificação recursiva, na qual o método proposto é aplicado nas matrizes \mathbf{D} e \mathbf{Q} em (4.1) para obter suas respectivas matrizes esparsas aproximadas \mathbf{D}_s^{-1} e \mathbf{Q}_s^{-1} .

Na figura 4.6 mostra-se o comportamento do método com respeito a densidade e erro relativo em relação a solução analítica. Como nesta estratégia se esparsifica duas matrizes ao invés de uma, é necessário que haja um aumento na densidade da matriz esparsificada para se manter

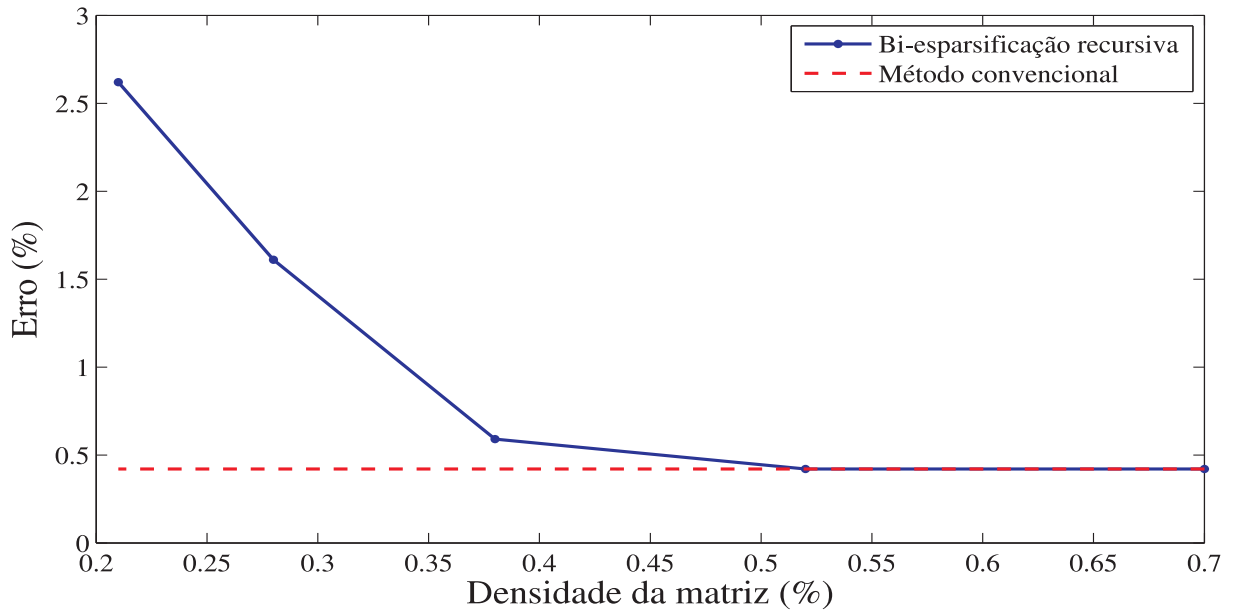


Figura 4.6: Erro relativo do método da bi-esparsificação recursiva para o problema da cavidade ressonante 3D.

a precisão desejada. Mesmo com esta imposição para a densidade, percebe-se que após uma certa densidade normalizada o método se iguala ao erro obtido pelo uso da inversa da matriz de Hodge.

Tabela 4.3 mostra os resultados obtidos com o uso da bi-esparsificação, percebe-se novamente, que para $r = 0.05$ e $r = 0.10$ chega-se ao mesmo erro obtido pelo uso da matriz original. Ao se comparar estes resultados com os da Tabela 4.2, é observado que o tempo de processamento é reduzido consideravelmente, mas, se tem um aumento considerável na densidade normalizada da matriz esparsificada. Isto é explicado pelo fato de que no processo de bi-esparsificação usa-se duas matrizes- $(n/2 \times n/2)$, ou seja, as informações são retiradas duas vezes no processo.

Tabela 4.3: Erro relativo - Bi-Sparsificação Recursiva.

Parâmetro r	Frequência de ressonância	Erro %	Densidade normalizada $ds(\mathbf{M}_1^{-1})/ds(\mathbf{M}_1)$	Esparsificação segundos
0.05	179.43	0.42	5.83	23.52
0.10	179.43	0.42	4.33	21.98
0.15	181.27	0.59	3.17	19.42
0.20	183.10	1.61	2.33	17.13
0.25	184.93	2.62	1.75	15.44

Como já apresentado anteriormente deseja-se o desenvolvimento de uma ferramenta de simulação para sistemas de GPR baseada na linguagem de formas diferenciais. Mostrou-se no capítulo 3 que ao se utilizar as matrizes de Galerkin-Hodge (3.56) é gerado um sistema linear esparso com matrizes não-diagonais, sendo assim tem-se que resolver este sistema em cada passo de tempo.

Neste capítulo apresentou-se o método da esparsificação recursiva usado para se obter uma aproximação esparsa para a inversa das matrizes de Galerkin-Hodge e no capítulo 5 será apresentada uma condição de contorno absorvente para se truncar domínios computacionais para as simulações de Gpr, será visto que o esquema leap-frog obtido com esta PML gerará uma matriz de Galerkin-Hodge em função da permissividade ϵ e da condutividade σ . Em um dos exemplos apresentados no capítulo 5 a inversa desta matriz será aproximada pelo método da esparsificação recursiva.

Capítulo 5

CFS-PML para Formas Diferenciais

Quando se lida numericamente com uma certa classe de problemas de propagação de ondas eletromagnéticas uma das principais preocupações é o truncamento do domínio computacional de modo que se possa simular eficientemente um domínio infinito. Em outras palavras, deve-se evitar campos espúrios devido a reflexões de ondas de saída sem um aumento significativo no número de incógnitas do problema original.

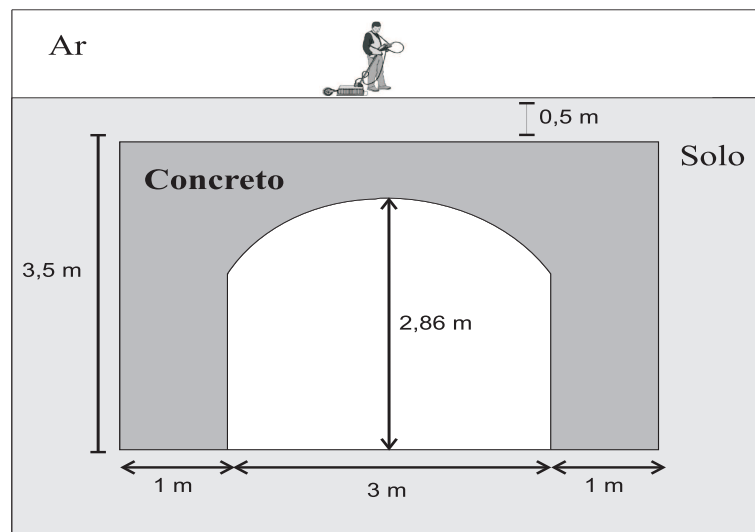


Figura 5.1: Truncamento de domínio computacional para simulação de.

Deseja-se desenvolver neste capítulo uma PML capaz de lidar por exemplo com a aplicação para GPR descrita pela Figura 5.1, que apresenta um sistema composto por um meio ar, um solo com características elétricas com perdas e uma estrutura em concreto enterrada no solo.

Observou-se nos capítulos anteriores que uma das características das formas diferenciais está no fato de se permitir formular o método misto FETD que é baseado nas equações de Maxwell de primeira ordem. Neste caso, as incógnitas são a circulação do campo elétrico ao longo das arestas e o fluxo magnético através de faces. Para aproximar os campos, 1-formas de Whitney são utilizadas para representar a intensidade de campo elétrico \mathcal{E} , e 2-formas de Whitney são utilizadas para se representar a densidade de fluxo magnético \mathcal{B} [Bossavit, 1988].

Ao utilizar o esquema leap-frog, as equações de atualização se assemelham as equações do FDTD com a ressalva de que a atualização deste elemento finito misto exige um solucionador para matrizes esparsas, neste caso é utilizado o método da esparsificação recursiva visto no capítulo 4.

Neste trabalho uma camada CFS-PML será utilizada para truncar o domínio computacional com perdas. Este tipo de PML oferece um número de vantagens sobre as implementações tradicionais. Especificamente, a aplicação de CFS-PML é completamente independente do meio de acolhimento e tem uma grande capacidade para absorver os modos evanescentes e pode proporcionar uma economia significativa na memória quando se trata de estruturas alongadas, com arestas vivas, ou excitações de baixa frequência [Roden and Gedney, 2000].

[Movahhedi et al., 2007] apresentam a CFS-PML implementada para o FETD misto para o truncamento de fronteiras em espaços 2-D. Aplica-se o método de Galerkin tendo as funções de Whitney como funções de base para se obter a forma semi-discreta das equações de Maxwell e se prioriza principalmente os parâmetros de otimização PML.

Neste capítulo será apresentada uma nova discretização numérica para formulação CFS-PML com o objetivo de se truncar domínios abertos em duas e três dimensões. Esta discretização será baseada na utilização do método de Galerkin para se discretizar a equação referente a lei de Ampere-Maxwell e a utilização de propriedades topológicas via matrizes de incidência para se discretizar a equação referente a lei de Faraday.

5.1 Equações de Maxwell modificadas

Nesta seção será apresentada a formulação para CFS-PML com o uso de formas diferenciais, e para isso interpreta-se a PML como sendo uma continuação analítica para as equações de Maxwell para um domínio espacial de variáveis complexas [Teixeira and Chew, 1998].

No espaço euclidiano a continuação analítica pode ser expressada da seguinte forma:

$$q \mapsto \tilde{q} = \int_0^q S_q(q') dq' \quad (5.1)$$

onde as funções CFS-PML generalizadas são definidas como

$$S_q(\omega, q) = k_q + \frac{\sigma_q}{\alpha + j\omega\epsilon_r} \quad (5.2)$$

As funções S_q , são dependentes da frequência e definidas para atenuar os campos na direção $q = \{x, y, z\}$. O parâmetro σ_q é a condutividade que causa a redução exponencial da amplitude da onda dentro da região PML, α é o fator de desvio de frequência que produz uma dependência na frequência de atenuação, $k_q \geq 1$ é um fator escalar. Este último desempenha uma regra fundamental para a absorção de ondas evanescentes e incidência rasantes próximas.

Em notação vetorial as equações de Maxwell no espaço complexo são as usuais, mas com o operador nabla modificado em virtude da continuação analítica,

$$\tilde{\nabla} = \hat{x} \frac{1}{S_x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{1}{S_y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{1}{S_z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (5.3)$$

Pode-se então definir a forma geral do tensor $\overline{\overline{\lambda}}(\omega)$ em coordenadas cartesianas da seguinte maneira

$$\overline{\overline{\lambda}}(\omega) = \frac{1}{S_x} \hat{x}\hat{x} + \frac{1}{S_y} \hat{y}\hat{y} + \frac{1}{S_z} \hat{z}\hat{z} \quad (5.4)$$

Por (5.3) tem-se que o operador ∇ é dependente da continuação analítica e como se deseja neste trabalho utilizar a teoria de formas diferenciais na qual se tem que o operador derivada exterior independe de uma métrica (2.28) será feito propositalmente uma aproximação para um novo operador \tilde{d} de maneira que a sua independência da métrica não seja comprometida. Esta aproximação será dada da seguinte maneira:

$$\tilde{d}(\omega^p) \approx d(\overline{\overline{\lambda}}\omega^p) \quad (5.5)$$

Considera-se inicialmente um domínio tridimensional e pela aproximação definida em (5.5) assume-se que os campos elétrico e magnético satisfazem as seguintes equações de Maxwell modificadas dentro da região PML no domínio da frequência.

$$d \left(\overline{\overline{\lambda}}(\omega) \cdot \tilde{\mathcal{E}} \right) = -j\omega \tilde{\mathcal{B}} \quad (5.6)$$

$$d \left(\overline{\overline{\lambda}}(\omega) \cdot (\star_\nu \tilde{\mathcal{B}}) \right) = j\omega \star_\epsilon \tilde{\mathcal{E}} + \star_\sigma \tilde{\mathcal{E}} \quad (5.7)$$

onde $\tilde{\mathcal{E}}$ é uma 1-forma, $\tilde{\mathcal{B}}$ é uma 2-forma e d é o operador derivada exterior.

As equações constitutivas são escritas em termos do operador estrela de Hodge (2.44) que mapeia p -formas em $(n - p)$ -formas. A permissividade ϵ , a condutividade σ , e a relutividade $\nu = 1/\mu$ são assumidas 0-formas.

Será feito aqui uma separação em função da dimensão do domínio e do modo de propagação, devido as propriedades topológicas utilizadas na discretização da lei de Faraday, em domínios bidimensionais, tem-se dois modos de propagação a se considerar, os modos Transverso Elétrico (TE) e Transverso Magnético (TM).

Para o modo TE, o campo elétrico $\tilde{\mathcal{E}}$ permanece como uma 1-forma e $\tilde{\mathcal{B}}$ se torna um campo escalar (a componente z do campo $\tilde{\mathcal{B}}$) deve ser tratada como uma 2-forma. Por outro lado, para o modo TM, o campo elétrico é uma função escalar, uma 0-forma, e $\tilde{\mathcal{B}}$ é uma 1-forma [He and Teixeira, 2006a].

Consequentemente a forma para o tensor em (5.4) será alterada para

$$\overline{\overline{\lambda}}(\omega) = \frac{1}{S_x} \hat{x}\hat{x} + \frac{1}{S_y} \hat{y}\hat{y} \quad (5.8)$$

O objetivo é trabalhar com a CFS-PML no domínio do tempo, logo, através da utilização das propriedades de diferenciação sobre as equações (5.6)-(5.7), obtêm-se as seguintes equações no domínio do tempo

$$\frac{d\mathcal{B}}{dt} = -d \left(\overline{\overline{\lambda}}(t) \star \mathcal{E} \right) \quad (5.9)$$

$$d \left(\overline{\overline{\lambda}}(t) \star (\star_\nu \mathcal{B}) \right) = \star_\epsilon \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \star_\sigma \mathcal{E} \quad (5.10)$$

onde $*$ indica a convolução no tempo, e os elementos coordenados de $\overline{\overline{\lambda}}_1(t)$ são obtidos pela transformada inversa de Laplace da seguinte maneira

$$\frac{1}{S_q(t)} = \frac{\delta(t)}{k_p} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0 k_p^2} e^{-\left(\frac{\sigma_p + \alpha k_p}{\epsilon_0 k_p}\right)t} u(t) \quad (5.11)$$

onde $\delta(t)$ é o delta de Dirac e $u(t)$ é a função Heaviside.

Na próxima seção será apresentada a forma semi-discreta das equações (5.9) e (5.10).

5.2 Equações CFS-PML de Maxwell semi-discretas

Nesta seção se apresenta a discretização espacial das equações de maxwell modificadas (5.9) e (5.10), o desenvolvimento será dividido em duas partes, ou seja, será considerado domínios bidimensionais com uma subdivisão entre modos de propagação e domínios tridimensionais.

5.2.1 Domínios bidimensionais

Como já dito anteriormente, em domínios bidimensionais há um tratamento específico para cada modo de propagação, devido ao fato de se ter uma alteração no grau das formas diferenciais envolvidas e isto leva a modificação nas matrizes de incidência e de Hodge usadas no sistema discreto.

5.2.1.1 Modo TE

Apresenta-se agora as equações CFS-PML de Maxwell semi-discretas considerando o modo de propagação TE, ou seja, a aproximação dos campos restritos aos elementos do domínio T , será dada por:

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^3 e_i \omega_i^1 \quad (5.12)$$

$$\mathcal{B} = \sum_{m=1}^1 b_m \omega_m^2 \quad (5.13)$$

onde $\omega_i^p, p = 1, 2$, é a p -forma de Whitney associada com o i -ésimo simplexo. Os coeficientes e_i e b_m são a tensão elétrica ao longo da i -ésima aresta e o fluxo magnético através da m -ésima face, respectivamente. Considera-se aqui uma malha simplicial em um domínio bidimensional no plano, onde o número de faces (triângulos), arestas e nós será denotado, N_f , N_e e N_n , respectivamente.

Utilizando as equações (5.12) e (5.13) em (5.9) e expandido-as para uma soma de componentes cartesianos, obtêm-se para cada elemento f_m a seguinte equação

$$\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{q=\{x,y\}} d(\omega_{iq}^1) \left(\frac{1}{S_q(t)} * e_i \right) \right) = -\omega_m^2 \frac{db_m}{dt} \quad (5.14)$$

onde ω_{iq}^1 são as componentes da 1-forma de Whitney para $q = \{x, y\}$ e m é um número inteiro que identifica o triângulo na malha.

Para cada aresta ij da malha temos uma 1-forma de Whitney associada a ela, definida da seguinte maneira

$$\omega_{ij}^1 = \lambda_i d\lambda_j - \lambda_j d\lambda_i \quad (5.15)$$

onde

$$\lambda_k = a_k + b_k x + c_k y \quad (5.16)$$

para $k = i, j$.

Desenvolvendo a equação (5.17) em função de (5.16), tem-se

$$\begin{aligned} \omega_{ij}^1 &= \lambda_i d\lambda_j - \lambda_j d\lambda_i & (5.17) \\ &= \lambda_i \left[\frac{\partial \lambda_j}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda_j}{\partial y} dy \right] - \lambda_j \left[\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} dy \right] \\ &= \left(\lambda_i \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} - \lambda_j \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \right) dx + \left(\lambda_i \frac{\partial \lambda_j}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \right) dy \\ &= (\lambda_i b_j - \lambda_j b_i) dx + (\lambda_i c_j - \lambda_j c_i) dy. \end{aligned}$$

Calculando a derivada exterior $d(\omega_{ij}^1)$ e utilizando (5.17), obtêm-se

$$\begin{aligned} d(\omega_{ij}^1) &= d \left((\omega_{ij}^1)_x dx + (\omega_{ij}^1)_y dy \right) & (5.18) \\ &= d((\lambda_i b_j - \lambda_j b_i) dx) + d((\lambda_i c_j - \lambda_j c_i) dy) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (\lambda_i b_j - \lambda_j b_i) dx \wedge dy + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_i c_j - \lambda_j c_i) dy \wedge dx \\ &= (c_i b_j - c_j b_i) dx \wedge dy + (b_i c_j - b_j c_i) dy \wedge dx \\ &= (c_i b_j - c_j b_i) dx \wedge dy + (c_i b_j - c_j b_i) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Através de (5.18), pode-se escrever as seguintes igualdades

$$d \left((\omega_{ij}^1)_x \right) = d \left((\omega_{ij}^1)_y \right) = \frac{1}{2} d(\omega_{ij}^1). \quad (5.19)$$

Utilizando as igualdades descritas em (5.19), a equação (5.14) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} d(\omega_i^1) \sum_{q=\{x,y\}} \left(\frac{1}{S_q(t)} * e_i \right) \right) = -\omega_m^2 \frac{db_m}{dt}. \quad (5.20)$$

Após a aplicação do Teorema Generalizado de Stokes 2.4.1 na variedade triangular, T , a forma semi-discreta de (5.19) é obtida,

$$\frac{1}{2} [(\pm)1(\pm)1(\pm)1] \cdot \left[\sum_{q=\{x,y\}} \left(\frac{1}{S_q(t)} * \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \right) \right] = \partial_t b_m. \quad (5.21)$$

Considerando a soma sobre todos os triângulos da malha na região PML, o sistema semi-discreto global de equações diferenciais ordinárias é

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = -\frac{1}{2} \mathbf{C} \sum_{q=\{x,y\}} \frac{1}{S_q(t)} * \mathbf{e} \quad (5.22)$$

onde \mathbf{e} e \mathbf{b} são vetores coluna de incógnitas. A matriz \mathbf{C} de tamanho $N_f \times N_e$ representa a derivada exterior discreta agindo sobre 1-formas discretas (3.23), observamos ainda que em (5.22), apenas propriedades topológicas estão envolvidas.

Observando a forma elementar de (5.9), a discretização é feita pelo método de Galerkin da seguinte maneira. Considera-se o produto exterior de (5.9) por uma 1-forma de Whitney e calcula-se a integral sobre o triângulo. Após algumas manipulações e utilizando a propriedade fundamentais dos espaços Whitney, ou seja, satisfazem o diagrama discreto de deRham (3.39).

$$dW^p \subset W^{p+1}. \quad (5.23)$$

A equação matricial para um triângulo será descrita como

$$\sum_{q=\{x,y\}} \left(\left(\frac{1}{S_q(t)} * b_m \right) \begin{bmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_2(\nu)_{mm} \right) = [\mathbf{M}_1(\sigma)_{ij}] e_i + [\mathbf{M}_1(\epsilon)_{ij}] \frac{de_i}{dt} \quad (5.24)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$ e $\mathbf{M}_1(\epsilon)$, $\mathbf{M}_1(\sigma)$ e $\mathbf{M}_2(\nu)$ são matrizes de massa definidas em (3.56).

Através da montagem de todos os elementos da malha teremos a seguinte equação matricial

$$\mathbf{M}_1(\epsilon) \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{C}^T \mathbf{M}_2(\nu) \left[\sum_{q \in \{x,y\}} \left(\frac{1}{S_q} * \mathbf{b} \right) \right] - \mathbf{M}_1(\sigma) \mathbf{e}. \quad (5.25)$$

Com isto têm-se a forma semi-discreta das equações de Maxwell modificadas para o modo de propagação TE em domínios bidimensionais.

5.2.1.2 Modo TM

Para o modo TM em domínios bidimensionais, considera-se a seguinte aproximação para os campos,

$$\mathcal{E} = \sum_{k=1}^3 e_k \omega_k^0 \quad (5.26)$$

$$\mathcal{B} = \sum_{i=1}^3 b_i \omega_i^1 \quad (5.27)$$

Neste caso, tem-se que os coeficientes e_k e b_i são a tensão elétrica calculada no k -ésimo nó e o fluxo magnético através da i -ésima aresta, respectivamente. Considera-se aqui novamente uma malha simplicial em um domínio bidimensional no plano, onde o número de faces (triângulos), arestas e nós será denotado, N_f , N_e e N_n , respectivamente.

Utilizando as equações (5.26) e (5.27) em (5.9) e expandido-as para uma soma de componentes cartesianos, obtêm-se para cada elemento f_m a seguinte equação

$$\sum_{k=1}^3 \left(\sum_{q \in \{x,y\}} d_q(\omega_k^0) \left(\frac{1}{S_q(t)} * e_k \right) \right) = - \sum_{i=1}^3 \omega_i^1 \frac{db_i}{dt} \quad (5.28)$$

onde d_q são as componentes da derivada exterior sobre a 0-forma de Whitney para $q = \{x, y\}$.

Observando 5.28, percebe-se que as componentes da derivada exterior induzem uma projeção proj , definida por:

$$\begin{aligned} \text{proj}_x(x, y) &= (x, 0) \\ \text{proj}_y(x, y) &= (0, y) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Através de (5.29), a equação em (5.28) pode ser escrita como

$$\sum_{k=1}^3 \left(\sum_{q=\{x,y\}} \text{proj}_q (d(\omega_k^0)) \left(\frac{1}{S_q(t)} * e_k \right) \right) = - \sum_{i=1}^3 \omega_i^1 \frac{db_i}{dt} \quad (5.30)$$

Equivalentemente ao modo TE, as equações CFS-PML de Maxwell semi-discretas dentro da região PML serão definidas como

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = - \sum_{q=\{x,y\}} \mathbf{G}_q \frac{1}{S_q(t)} * \mathbf{e} \quad (5.31)$$

$$\mathbf{M}_0(\epsilon) \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \sum_{q=\{x,y\}} \mathbf{G}_q^T \mathbf{M}_1(\nu) \left(\frac{1}{S_q} * \mathbf{b} \right) - \mathbf{M}_0(\sigma) \mathbf{e} \quad (5.32)$$

onde \mathbf{e} e \mathbf{b} são vetores coluna de incógnitas.

As matrizes \mathbf{G}_q serão construídas a partir da matriz \mathbf{G} que possui tamanho $N_n \times N_e$, e a contrapartida discreta para a derivada exterior atuando sobre 1-formas, esta matriz esta definida em (3.22).

Como uma projecção foi induzida em (5.28), pode-se definir as matrizes \mathbf{G}_q através das projecções proj dos nós da malha, ou seja,

$$[\mathbf{G}_q]_{kj} = \frac{\|\text{proj}_q(n_k)\|^2}{\|n_k\|^2} [\mathbf{G}]_{kj}. \quad (5.33)$$

5.2.2 Domínios tridimensionais

Para domínios tridimensionais considera-se uma malha simplicial tal que, o número de tetraedros, faces (triângulos), arestas e nós será denotado, N_t , N_f , N_e e N_n , respectivamente. A aproximação dos campos restritos aos elementos do domínio Ω , será dada por:

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^6 e_i \omega_i^1 \quad (5.34)$$

$$\mathcal{B} = \sum_{j=1}^4 b_j \omega_j^2 \quad (5.35)$$

onde ω_i^p , $p = 1, 2$, é a p -forma de Whitney associada com o i -ésimo simplexo. Os coeficientes e_i e b_j são a tensão elétrica ao longo da i -ésima aresta e o fluxo magnético através da i -ésima face, respectivamente.

Utilizando aproximações (5.34)-(5.35) sobre as equações (5.9) e (5.10) e expandido-as para uma soma de componentes cartesianos, obtêm-se para cada face f_m de um tetraedro T_t a seguinte equação

$$\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{q=\{x,y,z\}} d(\omega_{iq}^1) \left(\frac{1}{S_q(t)} * e_i \right) \right) = -\omega_m^2 \frac{db_m}{dt} \quad (5.36)$$

onde ω_{iq}^1 são as componentes da 1-forma de Whitney para $q = \{x, y, z\}$ e m é um número inteiro que identifica o triângulo na malha.

Para o caso tridimensional a 1-forma de Whitney (5.15), é construída a partir das seguintes 0-formas

$$\lambda_k = a_k + b_k x + c_k y + d_k z \quad (5.37)$$

para $k = i, j$.

Desenvolvendo a equação (5.15) em função de (5.37), será obtido a seguinte igualdade em função das coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \omega_{ij}^1 &= \left(\lambda_i \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} - \lambda_j \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \right) dx + \left(\lambda_i \frac{\partial \lambda_j}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \right) dy \\ &+ \left(\lambda_i \frac{\partial \lambda_j}{\partial z} - \lambda_j \frac{\partial \lambda_i}{\partial z} \right) dz \\ &= (\lambda_i b_j - \lambda_j b_i) dx + (\lambda_i c_j - \lambda_j c_i) dy + (\lambda_i d_j - \lambda_j d_i) dz. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Usando (5.38), temos que:

$$\begin{aligned} d(\omega_{ij}^1) &= d((\lambda_i b_j - \lambda_j b_i) dx) + d((\lambda_i c_j - \lambda_j c_i) dy) + d((\lambda_i d_j - \lambda_j d_i) dz) \quad (5.39) \\ &= \frac{\partial (\lambda_i b_j - \lambda_j b_i)}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial (\lambda_i b_j - \lambda_j b_i)}{\partial z} dz \wedge dx \\ &+ \frac{\partial (\lambda_i c_j - \lambda_j c_i)}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial (\lambda_i c_j - \lambda_j c_i)}{\partial z} dz \wedge dy \\ &+ \frac{\partial (\lambda_i d_j - \lambda_j d_i)}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial (\lambda_i d_j - \lambda_j d_i)}{\partial y} dy \wedge dz \\ &= (b_i c_j - b_j c_i) dz + (b_i d_j - b_j d_i) dy \\ &+ (b_i c_j - b_j c_i) dz + (c_i d_j - c_j d_i) dx \\ &+ (b_i d_j - b_j d_i) dy + (c_i d_j - c_j d_i) dx. \end{aligned}$$

Então para $q = \{x, y, z\}$, será obtido a seguinte relação entre a derivada exterior de 1-forma de Whitney e a derivada exterior de suas componentes:

$$d(\omega_{ij}^1)_q = \frac{1}{2} \text{proj}_{\bar{q}}(d\omega_{ij}^1). \quad (5.40)$$

Onde a função projeção $\text{proj}_{\bar{q}}$ será definida da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\bar{x}}(x, y, z) &= (0, y, z) \\ \text{proj}_{\bar{y}}(x, y, z) &= (x, 0, z) \\ \text{proj}_{\bar{z}}(x, y, z) &= (x, y, 0). \end{aligned} \quad (5.41)$$

A equação (5.36) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{q=\{x,y,z\}} \frac{1}{2} \text{proj}_{\bar{q}}(d(\omega_i^1)) \left(\frac{1}{S_q(t)} * e_i \right) \right) = -\omega_m^2 \frac{db_m}{dt} \quad (5.42)$$

Através de (5.39), tem-se que

$$\|d\omega_i^1\|^2 = 2 (\|d\omega_{ix}^1\|^2 + \|d\omega_{iy}^1\|^2 + \|d\omega_{iz}^1\|^2) \quad (5.43)$$

Aplicando do Teorema Generalizado de Stokes na variedade tetraédrica, Ω , a forma semi-discreta de (5.9) é obtida,

$$\sum_{q=\{x,y,z\}} 2 \begin{bmatrix} \pm \frac{\|\text{proj}_{\bar{q}}(e_1)\|^2}{\|e_1\|^2} \\ \pm \frac{\|\text{proj}_{\bar{q}}(e_2)\|^2}{\|e_2\|^2} \\ \pm \frac{\|\text{proj}_{\bar{q}}(e_3)\|^2}{\|e_3\|^2} \end{bmatrix}^T \cdot \left[\left(\frac{1}{S_q(t)} * \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \right) \right] = \frac{db_m}{dt} \quad (5.44)$$

Considerando a soma sobre todos os tetraedros da malha na região PML, o sistema semi-discreto global de equações diferenciais ordinárias é

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = - \sum_{q=\{x,y,z\}} \mathbf{C}_q \left(\frac{1}{S_q(t)} * \mathbf{e} \right) \quad (5.45)$$

onde \mathbf{e} e \mathbf{b} são vetores coluna de incógnitas.

De maneira análoga ao modo TM 2D, tem-se que as matrizes \mathbf{C}_q de tamanho $N_f \times N_e$ serão construídas através das projeções $\text{proj}_{\bar{q}}$ induzidas pela equação (5.42) e pela matriz rotacional \mathbf{C} (3.23). Então, para cada aresta i e face m da malha define-se as matrizes \mathbf{C}_q da seguinte maneira

$$[\mathbf{C}_q]_{im} = \frac{\|\text{proj}_{\bar{q}}(e_i)\|^2}{\|e_i\|^2} \cdot [\mathbf{C}]_{im}. \quad (5.46)$$

Usando novamente o método de Galerkin a utilização das matrizes \mathbf{C}_q e utilizando as propriedades fundamentais dos espaços Whitney e através da assemblagem de todos os elementos da malha teremos a seguinte equação matricial

$$\mathbf{M}_1(\epsilon) \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \sum_{q \in \{x,y,z\}} \mathbf{C}_q^T \mathbf{M}_2(\nu) \left(\frac{1}{S_q} * \mathbf{b} \right) - \mathbf{M}_1(\sigma) \mathbf{e}. \quad (5.47)$$

5.2.3 Equações CFS-PML semi-discretas

Pode-se então resumir aqui os três tipos de equações para dentro da região PML em função da dimensão do domínio e do modo de propagação para o caso 2D.

5.2.3.1 Modo TE 2D

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = -\frac{1}{2} \mathbf{C} \sum_{q \in \{x,y\}} \frac{1}{S_q(t)} * \mathbf{e} \quad (5.48)$$

$$\mathbf{M}_1(\epsilon) \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{C}^T \mathbf{M}_2(\nu) \left[\sum_{q \in \{x,y\}} \left(\frac{1}{S_q} * \mathbf{b} \right) \right] - \mathbf{M}_1(\sigma) \mathbf{e} \quad (5.49)$$

5.2.3.2 Modo TM 2D

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = - \sum_{q \in \{x,y\}} \mathbf{G}_q \frac{1}{S_q(t)} * \mathbf{e} \quad (5.50)$$

$$\mathbf{M}_0(\epsilon) \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \sum_{q \in \{x,y\}} \mathbf{G}_q^T \mathbf{M}_1(\nu) \left(\frac{1}{S_q} * \mathbf{b} \right) - \mathbf{M}_0(\sigma) \mathbf{e} \quad (5.51)$$

5.2.3.3 Domínios 3D

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = - \sum_{q \in \{x,y,z\}} \mathbf{C}_q \left(\frac{1}{S_q(t)} * \mathbf{e} \right) \quad (5.52)$$

$$\mathbf{M}_1(\epsilon) \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \sum_{q \in \{x,y,z\}} \mathbf{C}_q^T \mathbf{M}_2(\nu) \left(\frac{1}{S_q} * \mathbf{b} \right) - \mathbf{M}_1(\sigma) \mathbf{e} \quad (5.53)$$

5.3 Discretização no tempo das equações CFS-PML de Maxwell

Para a discretização temporal das equações (5.48)-(5.53) precisa-se fornecer uma forma recursiva para calcular as convoluções discretas $\frac{1}{S_q} * \mathbf{e}$ e $\frac{1}{S_q} * \mathbf{b}$.

Desenvolve-se esta seção utilizando as equações (5.48) e (5.49) para o modo TE 2D e os outros dois casos serão obtidos analogamente. Define-se agora os vetores convoluídos \mathbf{e}_q^* e \mathbf{b}_q^* para $q = \{x, y\}$, como uma maneira de simplificar a notação,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_q^* &= \left[\frac{1}{S_q(t)} * e_1(t), \frac{1}{S_q(t)} * e_2(t), \dots, \frac{1}{S_q(t)} * e_{N_e}(t) \right] \\ \mathbf{b}_q^* &= \left[\frac{1}{S_q(t)} * b_1(t), \frac{1}{S_q(t)} * b_2(t), \dots, \frac{1}{S_q(t)} * b_{N_f}(t) \right] \end{aligned} \quad (5.54)$$

A seguir apresenta-se uma maneira recursiva para calcular convoluções discretas e reescrever as equações, a fim de facilitar a aplicação das condições de contorno dos problemas estudados. Usando (5.11), cada componente dos vetores convoluídos (5.54) podem ser escritas da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_q(t)} * e_i(t) &= \left(\frac{\delta(t)}{k_{q,i}} - \frac{\sigma_{q,i}}{\epsilon_0 k_{q,i}^2} e^{-\left(\frac{\sigma_{q,i} + \alpha k_{q,i}}{\epsilon_0 k_{q,i}}\right)t} u(t) \right) * e_i(t) \\ &= \frac{1}{k_{q,i}} e_i(t) - \frac{\sigma_{q,i}}{\epsilon_0 k_{q,i}^2} e^{-\left(\frac{\sigma_{q,i} + \alpha k_{q,i}}{\epsilon_0 k_{q,i}}\right)t} u(t) * e_i(t) \\ &= \frac{1}{k_{q,i}} e_i(t) + \xi_{q,i}(t) * e_i(t) \\ &= \frac{1}{k_{q,i}} e_i(t) + \phi_{q,i}(t) \end{aligned} \quad (5.55)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_q(t)} * b_j(t) &= \left(\frac{\delta(t)}{k_{q,j}} - \frac{\sigma_{q,j}}{\epsilon_0 k_{q,j}^2} e^{-\left(\frac{\sigma_{q,j} + \alpha k_{q,j}}{\epsilon_0 k_{q,j}}\right)t} u(t) \right) * b_j(t) \\ &= \frac{1}{k_{q,j}} b_j(t) - \frac{\sigma_{q,j}}{\epsilon_0 k_{q,j}^2} e^{-\left(\frac{\sigma_{q,j} + \alpha k_{q,j}}{\epsilon_0 k_{q,j}}\right)t} u(t) * b_j(t) \\ &= \frac{1}{k_{q,i}} e_i(t) + \xi_{q,j}(t) * b_j(t) \\ &= \frac{1}{k_{q,i}} e_i(t) + \psi_{q,j}(t) \end{aligned} \quad (5.56)$$

onde

$$\xi_{q,i}(t) = -\frac{\sigma_{q,i}}{\epsilon_0 k_{q,i}^2} e^{-\left(\frac{\sigma_{q,i} + \alpha k_q}{\epsilon_0 k_{q,i}}\right)t} u(t) \quad (5.57)$$

$$\phi_{q,i}(t) = \xi_{q,i}(t) * e_i(t) \quad (5.58)$$

$$\psi_{q,j}(t) = \xi_{q,j}(t) * b_j(t). \quad (5.59)$$

Escrevendo em notação matricial têm-se os seguintes vetores

$$\Phi_q(t) = [\phi_{q,1}(t), \phi_{q,2}(t), \dots, \phi_{q,N_e}(t)] \quad (5.60)$$

$$\Psi_q(t) = [\psi_{q,1}(t), \psi_{q,2}(t), \dots, \psi_{q,N_f}(t)] \quad (5.61)$$

$$\mathbf{K}_{q,e}(t) = [e_1(t)/k_{q,1}, e_2(t)/k_{q,2}, \dots, e_{N_e}(t)/k_{q,N_e}] \quad (5.62)$$

$$\mathbf{K}_{q,b}(t) = [b_1(t)/k_{q,1}, b_2(t)/k_{q,2}, \dots, b_{N_f}(t)/k_{q,N_f}] \quad (5.63)$$

As equações (5.48) e (5.49) podem então ser escritas da seguinte maneira em decorrência de (5.60)-(5.63),

$$\partial_t \mathbf{b} = -\frac{1}{2} \mathbf{C} \sum_{q=\{x,y\}} (\mathbf{K}_{q,e}(t) + \Phi_q(t)) \quad (5.64)$$

$$\partial_t \mathbf{M}_1(\epsilon) \mathbf{e} = \frac{1}{2} \mathbf{C}^T \mathbf{M}_2(\nu) \sum_{q=\{x,y\}} (\mathbf{K}_{q,b} + \Psi_q(t)) - \mathbf{M}_1(\sigma) \mathbf{e} \quad (5.65)$$

onde $q = \{x, y\}$.

O objetivo agora é a discretização no tempo das equações em (5.64) e (5.65). Para se ter uma representação discreta satisfatória destas equações, precisa-se representar discretamente as convoluções dos vetores $\Psi_q(t)$ e $\Phi_q(t)$ em (5.60) e (5.61), respectivamente. A estratégia adotada será discretizar $\xi_{q,i}(t)$ em (5.57) e mostrar que através desta discretização é possível calcular de uma forma recursiva os vetores $\Psi_q(t)$ e $\Phi_q(t)$, o que facilitará e trará uma economia computacional na implementação da CFS-PML.

Seja então a representação discreta dada por

$$\begin{aligned}
 \xi_{q,i}[n] &= \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \xi_{q,i}(\tau) d\tau & (5.66) \\
 &= \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} -\frac{\sigma_{q,i}}{\epsilon_0 k_{q,i}^2} e^{-\left(\frac{\sigma_{q,i} + \alpha k_q}{\epsilon_0 k_{q,i}}\right)\tau} u(\tau) d\tau \\
 &= -\frac{\sigma_{q,i}}{\epsilon_0 k_{q,i}^2} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} e^{-\left(\frac{\sigma_{q,i} + \alpha k_q}{\epsilon_0 k_{q,i}}\right)\tau} u(\tau) d\tau \\
 &= \left(\frac{\sigma_{q,i}}{\epsilon_0 k_{q,i}^2}\right) \left(\frac{\epsilon_0 k_{q,i}}{\sigma_{q,i} + \alpha k_q}\right) \left(e^{-\left(\frac{\sigma_{q,i} + \alpha k_q}{\epsilon_0 k_{q,i}}\right)(n+1)\Delta t} - e^{-\left(\frac{\sigma_{q,i} + \alpha k_q}{\epsilon_0 k_{q,i}}\right)n\Delta t}\right) \\
 &= \left(\frac{\sigma_{q,i}}{k_{q,i}(\sigma_{q,i} + \alpha k_q)}\right) \left(e^{-\left(\frac{\sigma_{q,i} + \alpha k_q}{\epsilon_0 k_{q,i}}\right)\Delta t} - 1\right) e^{-\left(\frac{\sigma_{q,i} + \alpha k_q}{\epsilon_0 k_{q,i}}\right)n\Delta t} \\
 &= g_{q,i} e^{-\left(\frac{\sigma_{q,i} + \alpha k_q}{\epsilon_0 k_{q,i}}\right)n\Delta t}
 \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 g_{q,i} &= \left(\frac{\sigma_{q,i}}{k_{q,i}(\sigma_{q,i} + \alpha k_q)}\right) (h_{q,i} - 1) & (5.67) \\
 h_{q,i} &= e^{-\left(\frac{\sigma_{q,i} + \alpha k_q}{\epsilon_0 k_{q,i}}\right)\Delta t}.
 \end{aligned}$$

Por (5.66) e (5.67) é possível escrever $\xi_{q,i}[n+1]$ em função de $\xi_{q,i}[n]$,

$$\begin{aligned}
 \xi_{q,i}[n+1] &= h_{q,i} e^{-\left(\frac{\sigma_{q,i} + \alpha k_q}{\epsilon_0 k_{q,i}}\right)(n+1)\Delta t} & (5.68) \\
 &= h_{q,i} e^{-\left(\frac{\sigma_{q,i} + \alpha k_q}{\epsilon_0 k_{q,i}}\right)n\Delta t} e^{-\left(\frac{\sigma_{q,i} + \alpha k_q}{\epsilon_0 k_{q,i}}\right)\Delta t} \\
 &= \xi_{q,i}[n] g_{q,i}.
 \end{aligned}$$

As convoluções em (5.58) e (5.59) podem então ser escritas em sua forma discreta utilizando o resultado da equação (5.68) e a aproximação discreta de uma convolução dada por

$$(f * g)[m] = \sum_n f(m-n)g(n) \quad (5.69)$$

Com isto tem-se que cada componente $\phi_{q,i}$ do vetor Φ_q no instante $n + 1$ pode ser escrito de maneira recursiva da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
 \phi_{q,i}[n + 1] &= (\xi_{q,i} * e_i)[n + 1] & (5.70) \\
 &= \sum_{m=0}^{n+1} \xi_{q,i}(m) e_i(n + 1 - m) \\
 &= \xi_{q,i}(0) e_i(n + 1) + \sum_{m=1}^{n+1} \xi_{q,i}(m) e_i(n + 1 - m) \\
 &= h_{q,i} e_i(n + 1) + \sum_{m=1}^{n+1} g_{q,i} \xi_{q,i}(m - 1) e_i(n + 1 - m) \\
 &= h_{q,i} e_i(n + 1) + g_{q,i} \sum_{m=0}^n \xi_{q,i}(m) e_i(n - m) \\
 &= h_{q,i} e_i(n + 1) + g_{q,i} \xi_{q,i}(n) * e_i(n) \\
 &= h_{q,i} e_i(n + 1) + g_{q,i} \phi_{q,i}[n]
 \end{aligned}$$

analogamente temos que

$$\begin{aligned}
 \psi_{q,j}[n + 1] &= (\xi_{q,j} * b_j)[n + 1] & (5.71) \\
 &= \sum_{m=0}^{n+1} \xi_{q,j}(m) b_j(n + 1 - m) \\
 &= h_{q,j} b_j(n + 1) + g_{q,j} \psi_{q,j}[n]
 \end{aligned}$$

Assim a discretização no tempo das equações em (5.64) e (5.65), com a aplicação de um esquema leap-frog para resolver o sistema é dada por

$$\mathbf{b}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{b}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \sum_q (\mathbf{K}_{q,e}^n + \Phi_q^n) \quad (5.72)$$

$$(\mathbf{M}_1(\epsilon) + \Delta t \mathbf{M}_1(\sigma)) \mathbf{e}^{n+1} = \mathbf{M}_1(\epsilon) \mathbf{e}^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}^T \mathbf{M}_2(\nu) \sum_q (\mathbf{K}_{q,b}^{n+\frac{1}{2}} + \Psi_q^{n+\frac{1}{2}}) \quad (5.73)$$

5.3.1 Condições de contorno através de particionamento de matrizes

Como neste trabalho o enfoque é a utilização de malhas não estruturadas na discretização do domínio, tem-se que ao contrário do método clássico de Yee [Yee, 1966], impor condições de contorno requer alguns cuidados, em problemas de valor de contorno nem todas as arestas e faces possuem graus de liberdade.

Logo para tratar as condições de contorno diferentes de zero, usa-se a abordagem de particionamento de matrizes [Keränen et al., 2002]. Neste sentido, o vetor da circulação do campo elétrico \mathbf{e} , a matriz de incidência \mathbf{C} e a matriz de Galerkin Hodge \mathbf{M}_1 serão particionados da seguinte forma

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_f \\ \mathbf{e}_s \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f & \mathbf{C}_s \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^{ff} & \mathbf{M}_1^{fs} \\ \mathbf{M}_1^{sf} & \mathbf{M}_1^{ss} \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

Usando as equações (5.74), (5.75) e (5.76), pode-se escrever o seguinte esquema leap-frog

$$\mathbf{b}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{b}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \sum_q (\mathbf{K}_{q,e}^n + \Phi_q^n) \quad (5.77)$$

$$\mathbf{e}_f^{n+1} = (\mathbf{N}_1^{ff})^{-1} \left[\mathbf{M}_1^{ff}(\epsilon) \mathbf{e}^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_f^T \mathbf{M}_2(\nu) \sum_q (\mathbf{K}_{q,b}^{n+\frac{1}{2}} + \Psi_q^{n+\frac{1}{2}}) \right] - \mathbf{N}_1^{fs} \mathbf{e}_s^{n+1} \quad (5.78)$$

$$\mathbf{N}_1 = (\mathbf{M}_1(\epsilon) + \Delta t \mathbf{M}_1(\sigma)) \quad (5.79)$$

Finalmente, vale ressaltar que a dedução total apresentada neste capítulo estende-se ao modo TM e a domínios tridimensionais. Observa-se que as matrizes de massa e incidência serão construídas em função do modo de propagação e da dimensão do problema [He and Teixeira, 2006b], Tabela 5.1 apresenta estes casos

Tabela 5.1: Grau das formas diferenciais X dimensão e modo de propagação.

Modo de Propagação Dimensão	Grau da forma diferencial	
	Campo Elétrico	Dens. de Fluxo Magnético
Modo TE 2D	1	2
Modo TM 2D	0	1
3D	1	2

Para o modo TM as matrizes \mathbf{C} , \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 serão substituídas em (5.77) e (5.78) por \mathbf{G} , \mathbf{M}_0 e \mathbf{M}_1 , respectivamente.

$$\mathbf{b}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{b}^{n-\frac{1}{2}} \Delta t \sum_{q=\{x,y\}} \mathbf{G}_q (\mathbf{K}_{q,e}^n + \mathbf{\Phi}_q^n) \quad (5.80)$$

$$\mathbf{e}_f^{n+1} = (\mathbf{N}_0^{ff})^{-1} \left[\mathbf{M}_0^{ff}(\epsilon) \mathbf{e}^n + \Delta t \sum_{q=\{x,y\}} \mathbf{G}_{qf}^T \mathbf{M}_1(\nu) (\mathbf{K}_{q,b}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{\Psi}_q^{n+\frac{1}{2}}) \right] - \mathbf{N}_0^{fs} \mathbf{e}_s^{n+1} \quad (5.81)$$

$$\mathbf{N}_0 = (\mathbf{M}_0(\epsilon) + \Delta t \mathbf{M}_0(\sigma)) \quad (5.82)$$

No caso de domínios tridimensionais, a matriz de incidência \mathbf{C} será trocada pelas matrizes de incidência direcionais \mathbf{C}_q e têm-se

$$\mathbf{b}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{b}^{n-\frac{1}{2}} - \Delta t \sum_{q=\{x,y,z\}} \mathbf{C}_q (\mathbf{K}_{q,e}^n + \mathbf{\Phi}_q^n) \quad (5.83)$$

$$\mathbf{e}_f^{n+1} = (\mathbf{N}_1^{ff})^{-1} \left[\mathbf{M}_1^{ff}(\epsilon) \mathbf{e}^n + \Delta t \sum_{q=\{x,y,z\}} \mathbf{C}_{qf}^T \mathbf{M}_2(\nu) (\mathbf{K}_{q,b}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{\Psi}_q^{n+\frac{1}{2}}) \right] - \mathbf{N}_1^{fs} \mathbf{e}_s^{n+1} \quad (5.84)$$

$$\mathbf{N}_1 = (\mathbf{M}_1(\epsilon) + \Delta t \mathbf{M}_1(\sigma)). \quad (5.85)$$

5.4 Parâmetros CFS-PML

Nesta seção será feito uma discussão sobre o papel dos parâmetros CFS-PML na implementação desta condição de contorno absorvente e como cada um age sobre a onda dentro da região de absorção.

Como já foi salientado, quando trata-se da aplicação de uma PML para o truncamento de domínios para uma certa classe de problemas de propagação de ondas é necessária a escolha dos parâmetros relacionados a formulação PML proposta. Neste trabalho utilizou-se os parâmetros propostos por [Movahhedi et al., 2007], que estão apresentados em (5.11).

É dada agora uma interpretação física de cada um dos parâmetros CFS-PML que serão otimizados. A condutividade σ_q irá produzir uma atenuação exponencial da onda dentro da região PML. Equação (5.86) apresenta os valores específicos da condutividade para cada direção

$q = x, y$, onde estes valores assumem o comportamento de funções polinomiais de ordem m para as diferentes componentes contravariantes dos campos.

$$\sigma_q = \sigma_{max} \left(\frac{d_q}{L} \right)^m \quad (5.86)$$

onde L é a profundidade física da região PML, e d_q é a distância a partir da interface interna PML.

O valor σ_{max} em (5.87) é interpretado como a condutividade máxima para cada direção, cujo valor adotado será interpretado como a máxima atenuação da onda sem comprometer o desempenho da CFS-PML.

$$\sigma_{max} = -\frac{m+1}{2\eta L} \ln(R) \quad (5.87)$$

onde η é a impedância intrínseca do meio, e R é o coeficiente teórico de reflexão da incidência normal de uma onda plana.

O fator de deslocamento k_q , irá controlar a velocidade de fase da onda. Tem-se que o aumento de k_q reduz a velocidade de fase da onda, o que significa introduzir um aumento artificial do índice de refração que conseqüentemente reduz o ângulo de incidência e isso faz com que o desempenho do meio PML seja melhorado nos casos de incidência mais oblíqua. Equação (5.88) apresenta a maneira de se obter o fator de deslocamento k_q .

$$k_q = 1 + (k_{max} - 1) \left(\frac{d_q}{L} \right)^m \quad (5.88)$$

Tanto em (5.87) e (5.88), σ_q e k_q são obtidos pela gradação polinomial, ou seja, isso aumentará o valor da condutividade σ_q de zero e do fator de deslocamento k_q de 1 no meio PML em $d_q = 0$, que é a interface do meio PML, até $\sigma_q = \sigma_{max}$ e $k_q = k_{max}$, respectivamente, em $d_q = L$, que é o contorno terminado por uma parede condutora eletricamente perfeita.

O parâmetro α em (5.11) é definido como o deslocamento da frequência complexa, que neste trabalho é assumido constante e independente da direção de propagação.

Na próxima seção será apresentado simulações para se medir a capacidade de absorção da CFS-PML, tanto para domínios bidimensionais e tridimensionais.

5.5 Erro de reflexão para CFS-PML

5.5.1 Erro de reflexão 2D - modo TM

O primeiro exemplo calcula os campos gerados por uma linha de corrente que irradia ondas TM polarizadas no espaço livre. Para validar a proposta de implementação, é avaliado a existência de campo espúrios, devido à reflexão dos limites CFS-PML.

Figura 5.2 apresenta a geometria computacional, esta geometria é representada por um quadrado de dimensões 7×7 cm, região PML de $L = 2,0$ cm de espessura e terminada por uma parede eletricamente perfeita. O domínio foi discretizado com uma malha com 112.491 triângulos e 169.278 arestas e o passo de tempo utilizado é $\Delta t = 0,02821$ ns.

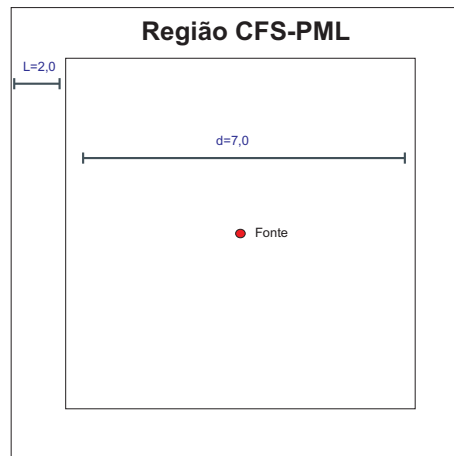


Figura 5.2: Geometria computacional com região CFS-PML.

A excitação utilizada nesta simulação é um pulso Blackman-Harris [Irving and Knight, 2006], localizada em $(x, y) = (0, 0)$ com frequência central de 300 MHz (veja Figuras 5.3).

Uma das questões primordiais será a escolha de parâmetros PML ótimos que são calculados utilizando as expressões (5.86)-(5.88). Logo temos $m = 2,5545$, $R = \exp(-13,3799)$, $k_{max} = 4,0024$, $\alpha = 0,001$, estes parâmetros foram escolhidos de maneira otimizada através da aplicação do algoritmo da evolução diferencial [Moura et al., 2012a].

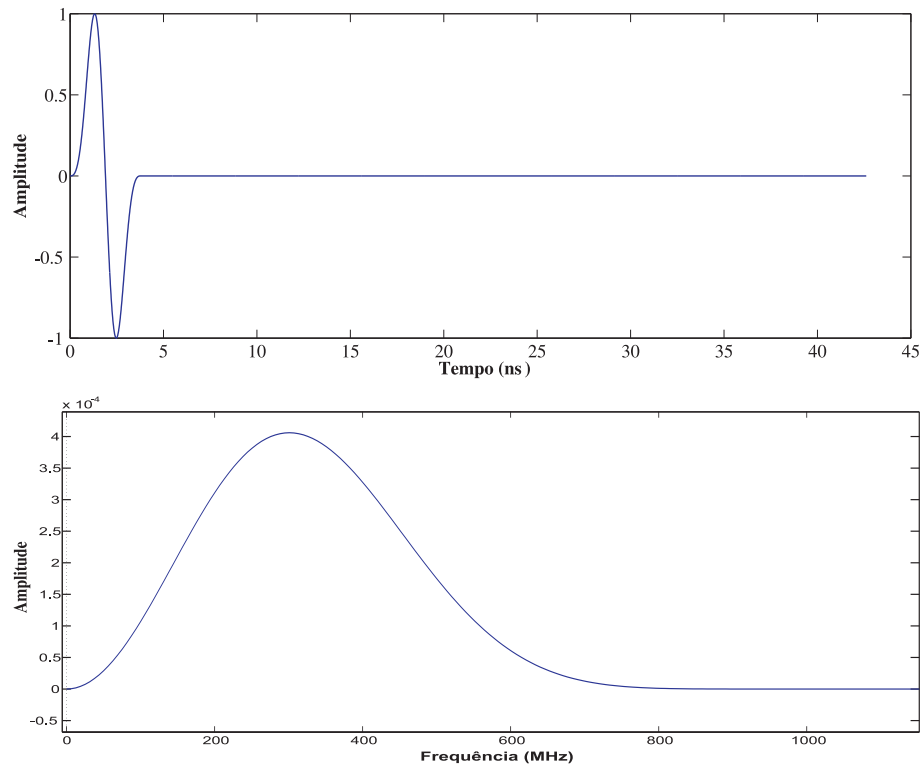


Figura 5.3: Pulso Blackman-Harris com frequência dominante de 300 MHz.

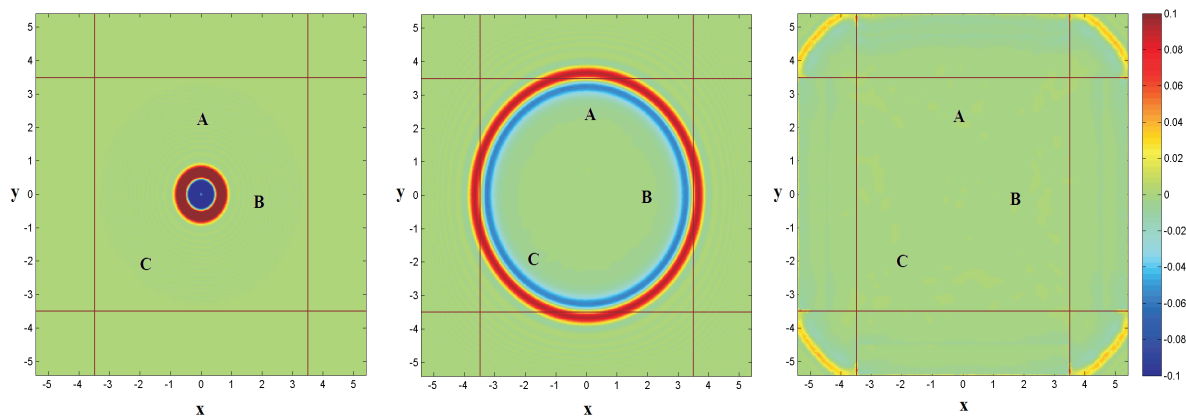


Figura 5.4: Fotografias mostrando amplitude do campo elétrico \mathcal{E}_y em $t = 3, 55$ ns; $13, 42$ ns; $23, 36$ ns.

Figura 5.4 apresenta fotografias do campo \mathcal{E} nos tempos $t = 3, 55$ ns; $13, 4$ ns; $23, 36$ ns. Claramente se percebe a onda viajando para o exterior da fonte e a não ocorrência de modos espúrios que são provenientes da interface interna da região PML.

Para avaliar o desempenho do CFS-PML, calcula-se uma solução de referência dentro da geometria apresentada na Figura 5.2 estendida 3 vezes no seu tamanho, ou seja, usa-se um quadrado de 21 cm de lado e para evitar qualquer reflexão espúria para esta simulação é inserida na fronteira desta nova geometria uma nova região de absorção PML. Usa-se a mesma fonte e o mesmo passo de tempo Δt da simulação anterior.

O erro de reflexão em dB relativo à solução de referência será calculado em função do tempo, através da seguinte expressão:

$$E_r = 20 \log_{10} \left(\frac{|E^A - E|}{|E_{max}^A|} \right) \quad (5.89)$$

Onde E representa o campo discreto dependente do tempo calculado na simulação, E^A representa o mesmo campo discreto calculado pelo problema de referência, e E_{max}^A representa o valor máximo do campo de referência durante todo o tempo de simulação.

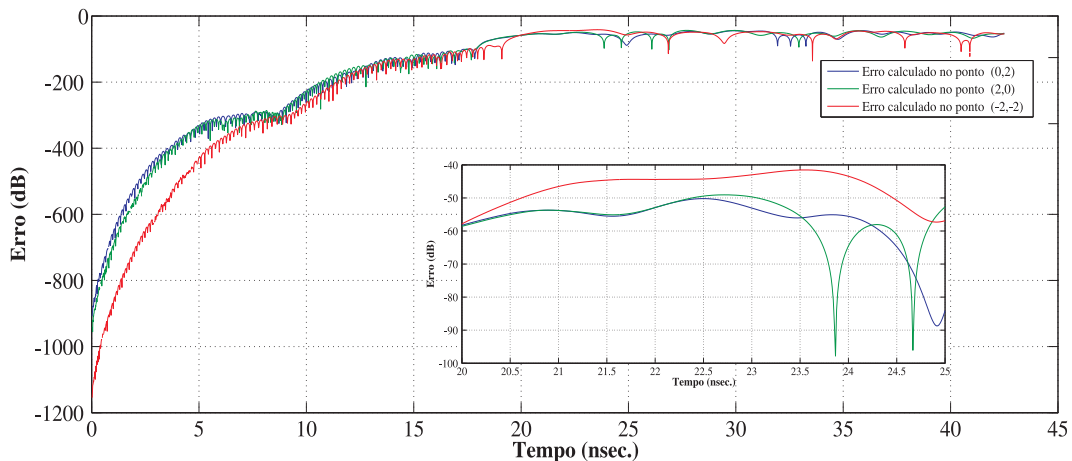


Figura 5.5: Erro de reflexão em função do tempo calculado nos pontos A, B e C para o modo de propagação Transverso Magnético.

Figura 5.5 mostra que o erro em dB como uma função do tempo, de três pontos de amostra, $A = (0, 2)$, $B = (2, 0)$ e $C = (-2, -2)$, (ver Fig.5.4). O erro de reflexão é consistentemente inferior -40dB, o que mostra que a camada de CFS-PML eficazmente emula um domínio aberto. Comparando o erro de reflexão em função do tempo com os snapshots da Figura 5.4, percebe-se claramente que a ocorrência de micro-reflexões decorrentes da entrada da onda na região CFS-PML ocorrem aproximadamente partir de 20 ns, este fenômeno é destacado na Figura 5.5.

Neste exemplo tratou-se a formulação CFS-PML para o modo transversal magnético, ou seja, considerou-se aqui o campo elétrico como uma 0-forma e a densidade de fluxo magnético como sendo uma 1-forma, desta feita utilizou-se as equações de Maxwell modificadas descritas pelas equações (5.80) e (5.81). O próximo exemplo tratará da formulação para o modo TE.

5.5.2 Erro de reflexão 2D - modo TE

Para esta segunda simulação pretende-se calcular os campos gerados por um círculo de raio $r = 0.2$ centrada na origem da geometria computacional descrita pela Figura 5.2. Os parâmetros pml utilizados são idênticos aos do modo TM. Novamente para validar a proposta de implementação, é avaliado a existência de campo espúrios, devido à reflexão dos limites CFS-PML.

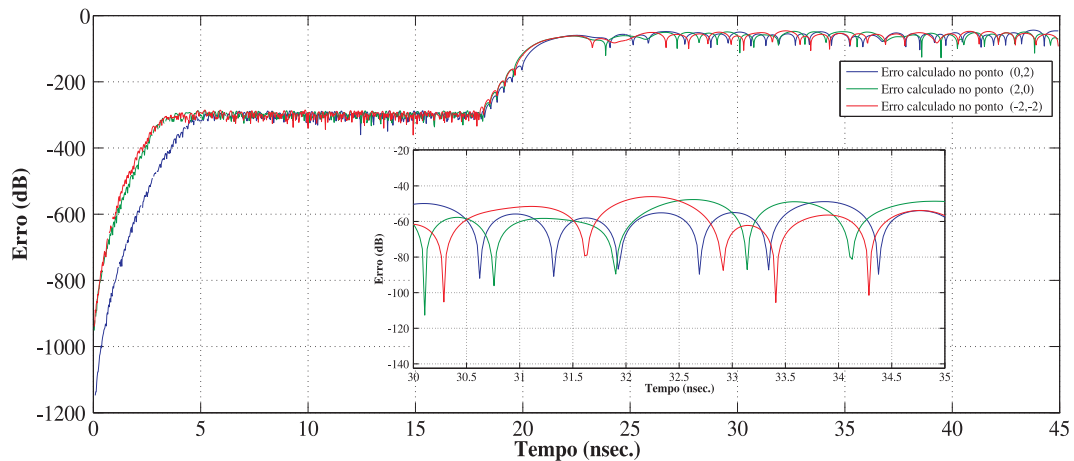


Figura 5.6: Erro de reflexão em função do tempo calculado nos pontos A, B e C para o modo de propagação Transverso Elétrico.

Figura 5.6 apresenta o erro de reflexão em função do tempo calculado por (5.89). Novamente se tem que os erros estão abaixo de -40 dB, mostrando assim o bom desempenho da CFS-PML para o caso TE. Nesta simulação o campo elétrico é considerado uma 1-forma e a densidade de fluxo magnético uma 2-forma e são usadas as equações de Maxwell modificadas para este caso são descritas pelas equações (5.77) e (5.78).

Como último teste deste capítulo será verificado a capacidade de absorção da CFS-PML para formas diferenciais em domínios tridimensionais.

5.5.3 Erro de reflexão 3D

Para validar a proposta de implementação da CFS-PML para domínios tridimensionais, foi avaliada a existência de campos espúrios, devido a reflexão no limite da região CFS-PML, os campos calculados são gerados por uma esfera de raio $r = .1$ m com centro em $c = (0.5, 0.5, 0.5)$ e iluminada por um pulso Black-Harris com frequência central de 300 MHz (Veja Figura 5.3) no espaço livre.

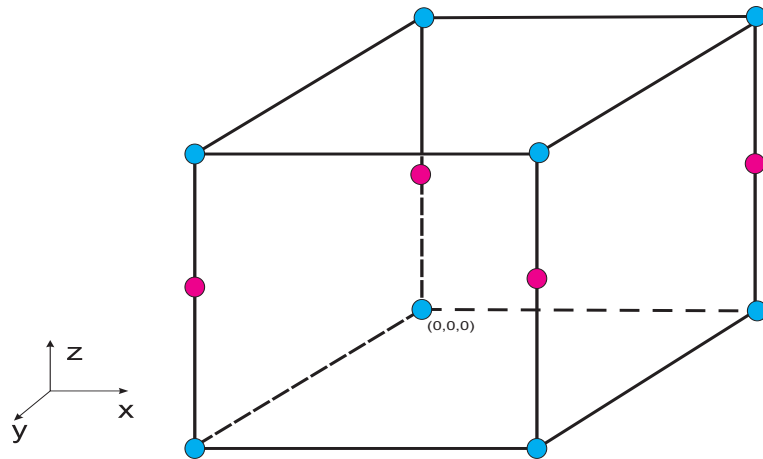


Figura 5.7: Geometria computacional e pontos onde erro de reflexão foi calculado.

A geometria computacional é apresentada pela Figura 5.7, esta geometria é um cubo com as dimensões $1 \times 1 \times 1$ m. Os erros de reflexão para este modelo serão calculados nos pontos destacados na Figura 5.7. Os parâmetros CFS-PML utilizados são os mesmos utilizados para o caso 2D, com uma profundidade física da região PML é $L = 0.3$ m e é terminada por uma parede perfeitamente eléctrica. O domínio foi discretizado com uma malha com 61.926 tetraedros e o passo de tempo é $\Delta t = 0,0363$ ns.

Para avaliar o desempenho a implementação da CFS-PML para domínios 3D mediou-se o erro de reflexão (em dB) como no caso bidimensional através de (5.89). Este erro foi calculado em relação à uma solução de referência obtida pela ampliação da geometria e terminada com uma camada CFS-PML.

Figura 5.8 mostra os erros de reflexão medidos nos pontos com coordenada $z = 0$, percebe-se que aproximadamente em $t = 6.5$ ns somente o ponto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ apresenta um erro

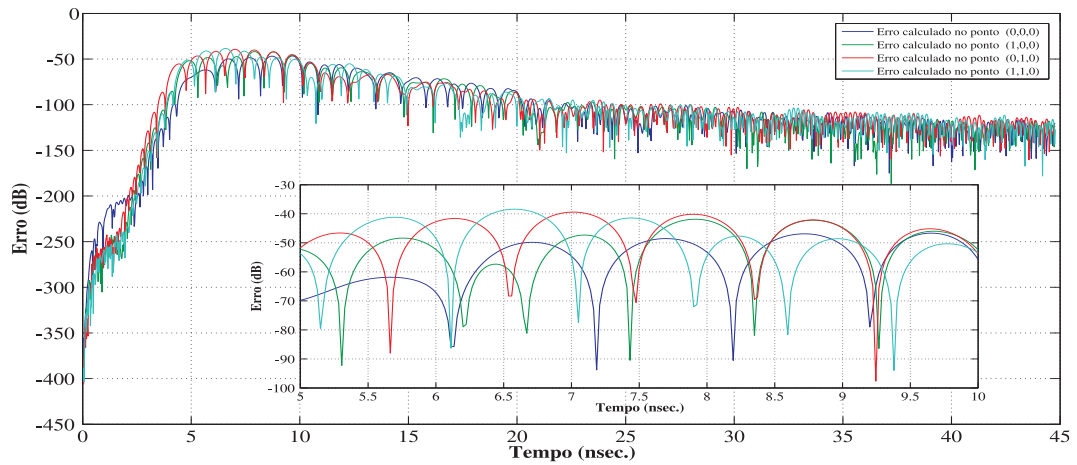


Figura 5.8: Erro de reflexão em função do tempo calculado nos pontos da geometria.

de reflexão ligeiramente superior a -40 dB, por outro lado, em todo o restante da simulação os erros estão abaixo da faixa de -40 dB.

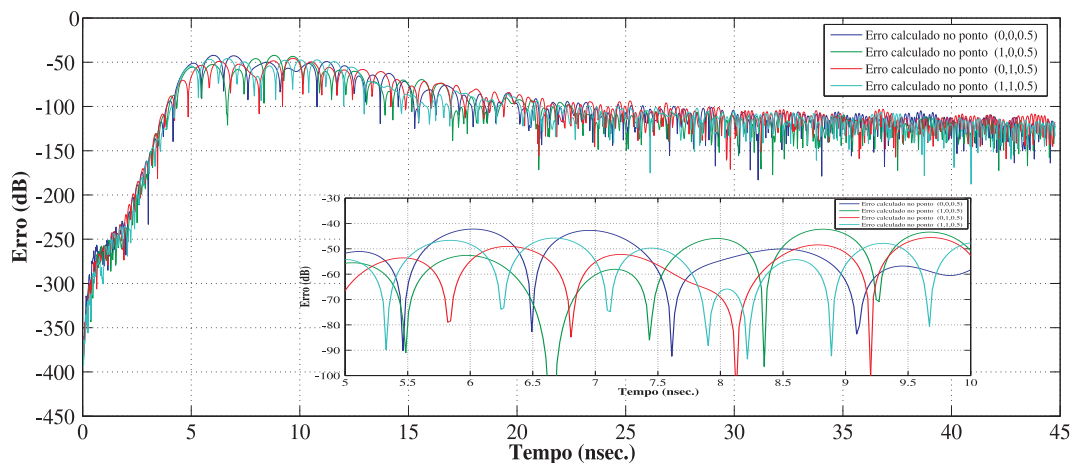


Figura 5.9: Erro de reflexão em função do tempo calculado nos pontos da geometria.

Para os pontos da geometria com coordenada $z = 0.5$ tem-se um melhor desempenho para a CFS-PML, Figura 5.9 mostra que durante toda a simulação os erros de reflexão em todos os pontos avaliados estiveram abaixo de -40 dB.

Por último Figura 5.10 apresenta o erro de reflexão referente aos pontos com coordenada $z = 1$, temos aqui novamente como na Figura 5.8 que entre os instantes $t = 5$ ns e $t = 10$ ns os pontos $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ e $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ apresentam erros um pouco acima de -40 dB.

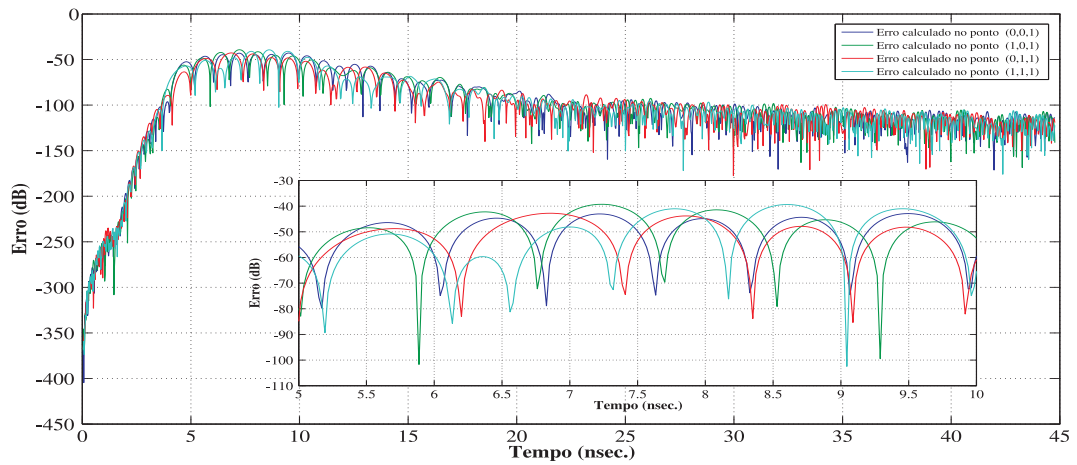


Figura 5.10: Erro de reflexão em função do tempo calculado nos pontos da geometria.

No geral tanto para o caso bidimensional como para o caso tridimensional a CFS-PML proposta aqui se mostrou bastante eficiente na absorção das ondas. No próximo capítulo serão apresentadas algumas aplicações em GPR para a teoria vista até o presente capítulo. Serão simulados modelos em domínios bi e tridimensionais.

Capítulo 6

Simulações Numéricas para sistemas de GPR

6.1 Introdução

Neste capítulo será realizada uma breve introdução sobre a teoria dos radares de penetração de solo e será aplicado a teoria vista neste trabalho para a simulação numérica deste tipo de sistema em domínios bi e tridimensionais.

O radar de penetração de Solo - GPR (Ground Penetrating Radar) é um método eletromagnético de investigação do subsolo, que se caracteriza como não destrutivo e não invasivo, e tem sido muito utilizado ultimamente na investigação de camadas próximas da superfície, por ser rápido, prático, econômico e oferecer uma alta resolução, que permite obter grandes detalhes e informações sobre feições geológicas.

Para se obter as informações das propriedades físicas do subsolo sem a necessidade de escavações ou sondagens são utilizados os chamados métodos geofísicos. Os métodos geofísicos podem ser definidos como ativos e passivos. Os métodos ativos medem a resposta que o solo fornece com respeito à energia eletromagnética, elétrica e sísmica enquanto que os métodos passivos medem a intensidade de campo elétrico, magnético e gravitacional.

O radar de penetração de solo, é um método geofísico de superfície, ou seja, os instrumentos de medida (antenas) são colocados na superfície do solo [Annan, 1992]. Estes sistemas

utilizam ondas eletromagnéticas na faixa de 300 MHz a 3 GHz, para o estudo de estruturas subsuperficiais, ou seja, um pulso de energia é irradiado para o subsolo por intermédio de uma antena transmissora, sofrendo reflexões, refrações e difrações, sendo então parcialmente captado por uma antena receptora.

Uma das dificuldades encontradas neste tipo de operação está no fato de que, dependendo do tipo do objeto enterrado e as características do solo, a reflexão causada por ele pode ser pequena em comparação a outros sinais, que são incidentes sobre a antena receptora. Devido a esta dificuldade surge a necessidade do modelamento computacional para a simulação deste sistemas a fim de se entender todos os fenômenos ocorridos durante a execução do processo, levando-se em conta a variação de parâmetros, tais como, geometria de objetos enterrados, tipos de solo, presença de outros materiais no solo e etc.

O GPR é conhecido como uma ferramenta poderosa com aplicações em áreas como arqueologia, prospecção de petróleo, detecção de inclusões em estruturas de concreto, estimacão da espessura de pavimentos entre outras tantas. Um dos grandes atrativos da utilização do GPR se encontra no fato da sua aplicabilidade como um teste não destrutivo.

Os sistemas de GPR podem ser modelados computacionalmente através das equações de Maxwell e ao longo deste trabalho apresentou-se a teoria das formas diferenciais como uma boa opção para a simulação de problemas de propagação de ondas eletromagnéticas.

Um dos fatores que se destacam na utilização das formas diferenciais para a discretização das equações de Maxwell é o fato de se obter um método explícito, ou seja, o cálculo de valores de uma certa grandeza em um instante posterior pode ser obtido através dos valores desta grandeza obtidos em um instante anterior. Outro aspecto a se pontuar está no fato de se ter grande facilidade em se modelar geometrias complexas através da utilização de malhas não estruturadas.

6.2 Histórico do GPR

O GPR teve sua aplicação voltada primeiramente para fins militares, estes instrumentos eram usados na detecção de minas enterradas e a sua utilização em larga escala ocorreu durante a segunda guerra mundial. Em 1929 na Alemanha ondas de radio de altas frequências foram

utilizadas para a investigação de sub-superfícies com o intuito de se determinar a espessura de uma geleira [Stern, 1929], mas, devido as limitações tecnológicas da época esta tecnologia foi pouco explorada até os anos de 1950.

Nos anos de 1960 devido a queda das placas de gelo na Groenlândia o interesse sobre o tema se acendeu e um dos maiores sucessos deste método se deu na determinação da espessura de placas de gelo na Antártida e no Ártico.

Nos anos de 1970 devido as pesquisas espaciais e as missões a lua houve aplicações deste tipo de sistema em ambientes sem gelo e a partir disto se nota uma intensificação considerável em sua utilização, gerando com isto diversas aplicações. Neste período os sistemas de GPR começam a ser utilizados para a localização de objetos enterrados, ou cavidades tais como tubos, tuneis e minas [Fullagar and Livleybrooks, 1994], estas aplicações se generalizaram como uma ferramenta geotécnica.

Nos anos de 1980, os sistemas de GPR foram reconhecidos como método da exploração geofísica por parte da comunidade geocientífica mundial e isso se deveu ao grande desenvolvimento tecnológico que possibilitou o desenvolvimento de equipamentos mais eficientes para a aquisição de dados.

No início de 1990, começa-se a fabricar sistemas de GPR capazes de coletar dados de reflexão em arquivos digitais, e com a capacidade de se armazenar grandes quantidades de dados para posterior processamento e análise. E quase ao mesmo tempo há um grande desenvolvimento tecnológico por parte dos computadores pessoais, tendo assim equipamentos cada vez mais baratos e mais poderosos do ponto de vista computacional e este avanço possibilitou uma forma de se processar os dados digitais de uma maneira que não era possível anteriormente.

Devido ao desenvolvimento tecnológico neste período há uma grande aquisição de dados de GPR e a criação de importantes técnicas de processamento, destacando-se os trabalhos de [Conyers and Goodman, 1997], [Goodman, 1996] e [Goodman et al., 1998] que abordam o cálculo de mapas de amplitude e simulações computacionais de modelos bi e tridimensionais.

Os estudos japoneses de sistemas de GPR proporcionaram a descoberta e mapeamento de uma grande variedade de sítios arqueológicos enterrados, incluindo fornos de cerâmica e túmulos

cercados por fossos [Goodman et al., 1995]. Neste trabalho, uma vasta gama de condições de enterro foram encontradas e modeladas computacionalmente antes da aquisição de dados a fim de determinar o melhor equipamento a se usar e as configurações para o melhor funcionamento do equipamento.

6.3 Princípios de um GPR

Os Radares de penetração de solo são sistemas eletromagnéticos para a análise não destrutiva das características do subsolo. Este sistema basicamente está baseado na radiação de um pulso eletromagnético por intermédio de uma antena transmissora que deve ser instalada a uma distância consideravelmente pequena do solo. Este pulso sofre reflexões, refrações e difrações, sendo parcialmente captado pela mesma ou por uma outra antena denominada antena receptora.

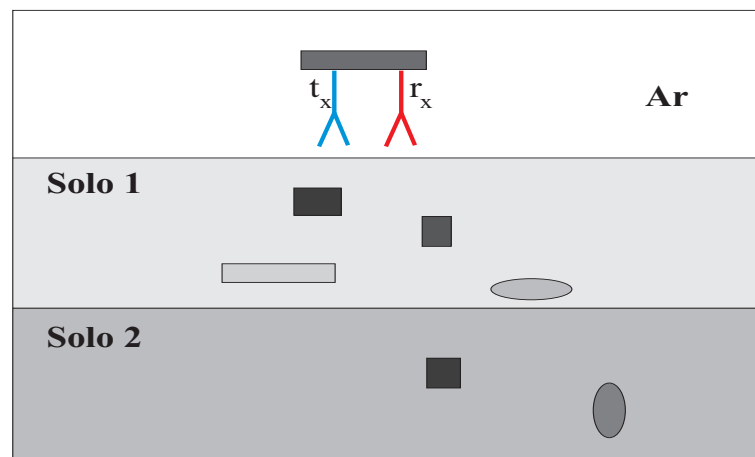


Figura 6.1: Esquema básico de um GPR para exploração do subsolo composto por duas camadas com objetos enterrados. As antenas transmissoras e receptoras estão representadas por t_x e r_x .

A Figura 6.1 apresenta esquema típico de um sistema de GPR, composto por uma antena transmissora t_x e uma antena receptora r_x . O esquema mostra a utilização do sistema em subsolo composto dois tipos de solo com características elétricas diferentes. Neste tipo de aplicação se deseja detectar um certo objeto enterrado, mas pode haver a ocorrência de sinais provenientes de objetos indesejados que obviamente pode complicar muito a interpretação dos dados recebidos, e mesmo, em alguns casos, esconder completamente o objeto de interesse tornando-o impossível de se detectar.

Sabe-se que o sucesso na utilização de uma técnica, como por exemplo, sistemas de GPR está relacionado ao conhecimento teórico do método e de suas limitações. A base dos sistemas de GPR está na teoria de propagação de ondas eletromagnéticas de alta frequência, e por isso, o primeiro fator a ser pontuado aqui será a caracterização das ondas de radar.

6.3.1 Características das ondas de radar

As equações de Maxwell serão utilizadas para se estudar as estruturas subsuperficiais a partir de suas propriedades elétricas e magnéticas, estas equações possibilitam entender o comportamento das ondas eletromagnéticas em qualquer meio de propagação e, através das relações constitutivas, é possível obter informações das propriedades elétricas e magnéticas dos materiais em que os campos estão atuando. As ondas de radar se movem tanto no ar quanto no solo são uma forma de energia eletromagnética composta por campos elétricos e magnéticos conjugados.

A geração deste tipo de onda se dá quando uma corrente elétrica oscila em um corpo condutivo, produzindo assim um campo elétrico e um campo magnético secundário. As ondas eletromagnéticas (OEMs) são então geradas e se propagam para fora da fonte, com a sua porção elétrica da forma de onda se movimentando perpendicularmente a porção magnética. Uma característica especial das ondas de radar esta na capacidade de penetração em solos por alguns metros antes que sejam atenuadas e sua energia perdida, e devido a isto temos a sua ampla aplicação na detecção de objetos enterrados.

Na utilização do GPR as OEMs não destroem o solo por onde passam, pode-se então dizer que o sistema é não destrutivo e indireto pelo fato, de que o acesso à estrutura espacial do sub-solo é feita através de uma imagem passível de interpretação.

As ondas de radar se localizam entre os muitos tipos de ondas conhecidos, existem muitas designações atribuídas às ondas eletromagnéticas, cada uma definida por seu comprimento de onda (que é determinado pela frequência da fonte oscilante que os produz). A Luz Visual é a onda eletromagnética mais conhecida, temos também os raios X, ultravioleta, transmissões telefônicas, radiação infravermelha, rádio, TV e celular, raios gama, e muitos mais. Ondas de radar utilizadas pelos sistemas de GPR ocupam uma porção específica do espectro de rádio.

As ondas de rádio, onde as ondas de radar são um subconjunto deste tipo de onda, têm frequências muito baixas, com comprimentos de onda de propagação que variam de poucos centímetros até, no máximo, algumas dezenas de metros de comprimento. A energia de radar utilizada na maioria das aplicações de GPR tem frequências que variam entre cerca de 10 e 1500 mega-hertz. Esta energia ocupa uma porção do mesmo espectro eletromagnético da televisão e rádio FM, telefones celulares e outros dispositivos de comunicação pessoal.

Se ocorrer um fenômeno de atenuação ou absorção em um dos componentes elétrico ou magnético a onda deixará de propagar e desaparecerá, no ar as ondas de radar se propagam facilmente, e se não houver um meio que a absorva ou reflita, a onda percorrerá uma distância infinita. Neste ponto destaca-se a importância de uma condição eficiente de absorção na simulação numérica destes sistemas, levando-se em conta a presença de solos com características elétricas de perdas.

Para se truncar os domínios computacionais reativos aos sistemas que serão estudados neste capítulo, será utilizada a CFS-PML apresentada no capítulo 5. Como visto pelos teste realizados este tipo de PML se apresenta como uma boa opção para o tratamento deste tipo de sistema.

Dependendo da frequência de oscilação, diferentes comprimentos de onda de propagação são produzidos, o comprimento de onda e frequência de oscilação são grandezas inversamente proporcionais, ou seja, quanto maior a frequência de oscilação mais curto será o comprimento de onda da energia electromagnética produzida, e vice-versa. Para gerar comprimentos de onda de radar mais longos é necessário a utilização de antenas maiores, com frequência de oscilação menor.

As OEMs se propagam através do solo, e sua velocidade depende das propriedades dielétricas do solo [Annan, 1992]. Em interfaces, por exemplo, fronteiras de diferentes tipos de solo ou objetos distintos, onde as propriedades dielétricas dos diferentes meios mudam de uma maneira drástica, a onda electromagnética é parcialmente refletida. O tempo de viagem e amplitude destas ondas são registrados pela antena receptora.

Cada comprimento de onda de propagação de energia vai se comportar de forma diferente em relação aos diferentes meios de comunicação dentro do solo, ou seja, se houver a ocorrência

de comprimentos longos de onda de energia estes geralmente terão uma propagação mais profunda com menos reflexo de pequenos objetos e comprimentos de onda mais curtos irão penetrar profundidades mais rasas, mas refletindo de maneira muito mais fácil as pequenas discontinuidades enterradas no solo. Os comprimentos de onda mais curtos tem capacidade de penetração menor porque são mais facilmente atenuados pela maioria dos tipos de solos.

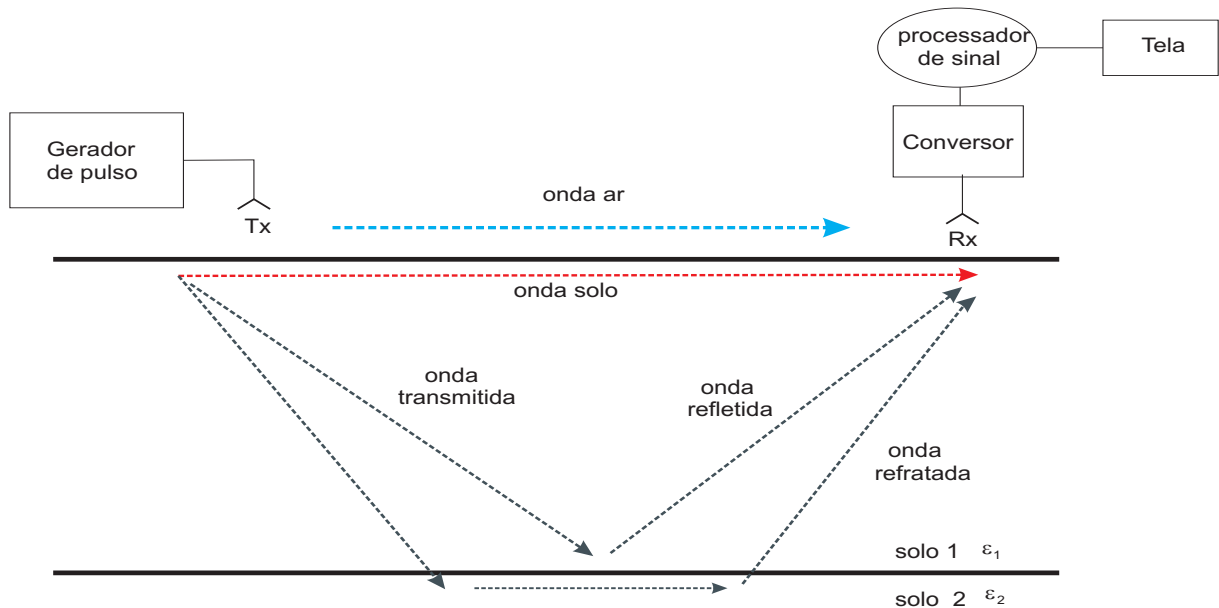


Figura 6.2: Diferentes trajetórias de ondas de GPR em um solo com duas camadas com permissividades relativas diferentes.

Os materiais geológicos serão caracterizados eletricamente pela condutividade elétrica, permissividade elétrica e pela permeabilidade magnética. Figura 6.2 mostra caminho de viagem de vários tipos de onda através do solo que podem ocorrer na presença de duas camadas com permissividades relativas diferentes.

Mostrou-se no capítulo 3 que a inserção das características elétricas dos solos considerados nas simulações de GPR via formas diferenciais será feito de uma maneira bem simples através das matrizes de Galerkin Hodge (3.56).

É importante então salientar que, na inserção das propriedades elétricas dos meios, deseja-se ao simular estes sistemas obter as mesmas respostas de um sistema real. Pode-se pontuar então os efeitos destas variações, como segue.

A permissividade afeta diretamente a atenuação e a propagação das ondas de radar [Annan, 1992], ou seja, se $\epsilon_1 > \epsilon_2$, ondas refratadas são geradas e se propagam paralelamente à fronteira da segunda camada. Uma outra medida utilizada para se expressar esta relação constitutiva é a permissividade dielétrica relativa ϵ_r ou constante dielétrica dos materiais k , definida por:

$$k = \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (6.1)$$

onde $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ (F/m) é a permissividade dielétrica do vácuo.

A segunda característica elétrica é a condutividade elétrica do meio σ expressa em Siemens por metro (S/m), que mede a habilidade que o material possui em conduzir corrente elétrica. O valor da condutividade em meios geológicos é dependente de alguns fatores que são o teor de umidade, a salinidade, o percentual de argila, a porosidade e a presença de minerais condutivos.

A permeabilidade magnética μ é a terceira característica a ser considerada, segundo [Keller, 1987], em muitas situações geológicas, os fatores preponderantes para a transmissão e recepção de ondas de radar são as propriedades elétricas do meio. Logo para ondas de radar supõe-se μ na maioria dos materiais é independente da frequência e portanto a razão entre a permeabilidade μ e a permeabilidade do vácuo $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ definida como permeabilidade relativa,

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (6.2)$$

é aproximadamente igual a 1.

É importante salientar que na maioria das vezes o efeito da variação da permeabilidade magnética não tem sido considerado nas medições de solo, mas em casos em que há uma grande variação da permeabilidade magnética, seus efeitos não podem ser ignorados em seções de GPR [Annan, 1992].

6.3.2 Geração e gravação de ondas de radar

Um Sistema de Medição de GPR consiste em um transmissor e uma antena receptora e uma unidade de controle. A parte principal do sistema GPR é a unidade de controle que gera os sinais do GPR e também recebe os sinais, após passagem pela terra. O sistema completo é controlado por computador.

Para se coletar as reflexões, as antenas do sistema de GPR que comumente ficam emparelhadas são movidas ao longo do terreno. Uma antena gera ondas de radar, e uma segunda antena registra os traços de reflexão gerados a partir das reflexões, este tipo de sistema é chamado bi-estático. Existe a possibilidade de se usar uma única antena como transmissora e receptora, este sistema é denominado mono-estático. Neste tipo de aquisição de dados, a mesma antena é ligada para transmitir um pulso de radar e, em seguida, imediatamente trocada para o modo de recepção, a fim de medir a energia refletida de retorno recebida a partir do solo.

Existem alguns sistemas multicanal de GPR comercialmente disponíveis que podem enviar e receber sinais de múltiplas antenas simultaneamente. Pesquisas também estão desenvolvendo arranjos de antenas que podem potencialmente receber reflexões em dezenas ou mesmo centenas de antenas de superfície para produzir imagens tridimensionais precisas do subsolo.

Quando muitas centenas ou mesmo milhares de vestígios de reflexões são armazenados sequencialmente à medida que são coletadas, um perfil de reflexão é produzido. Com o auxílio de um computador, as reflexões de milhares de vestígios dentro de muitos perfis em uma grade podem ser convertidos em profundidade no solo, e através da energia das ondas refletidas se pode realizar a análise do meio, produzindo imagens que retratam a natureza do material no solo em três dimensões.

Um dos grandes problemas enfrentados na aquisição de dados de radar esta no fato de que a maioria dos sistemas de GPR transmitem pulsos de radar a taxas extremamente elevadas que variam de 25.000 a 50.000 pulsos por segundo, e o problema está que a maioria dos digitalizadores não são suficientemente rápido para amostrar as ondas refletidas recebidas a partir de qualquer um destes pulsos. Uma maneira de se resolver isto, está na estratégia de amostragem incremental dos dados coletados, ou seja, os sistemas de controle produzem um traço de reflexão composto da seguinte maneira, registra-se o primeiro pulso transmitido. A segunda amostra é registada a partir do segundo pulso e assim por diante até que um traço de reflexão completo seja construído.

6.3.3 Perda de Energia e profundidade de penetração

Geralmente antenas são colocadas diretamente sobre a superfície do solo, ou o mais perto possível, mas, se ao contrário estas antenas estão localizadas muito acima da superfície do solo, a energia das ondas de radar não vai efetivamente penetrar no solo.

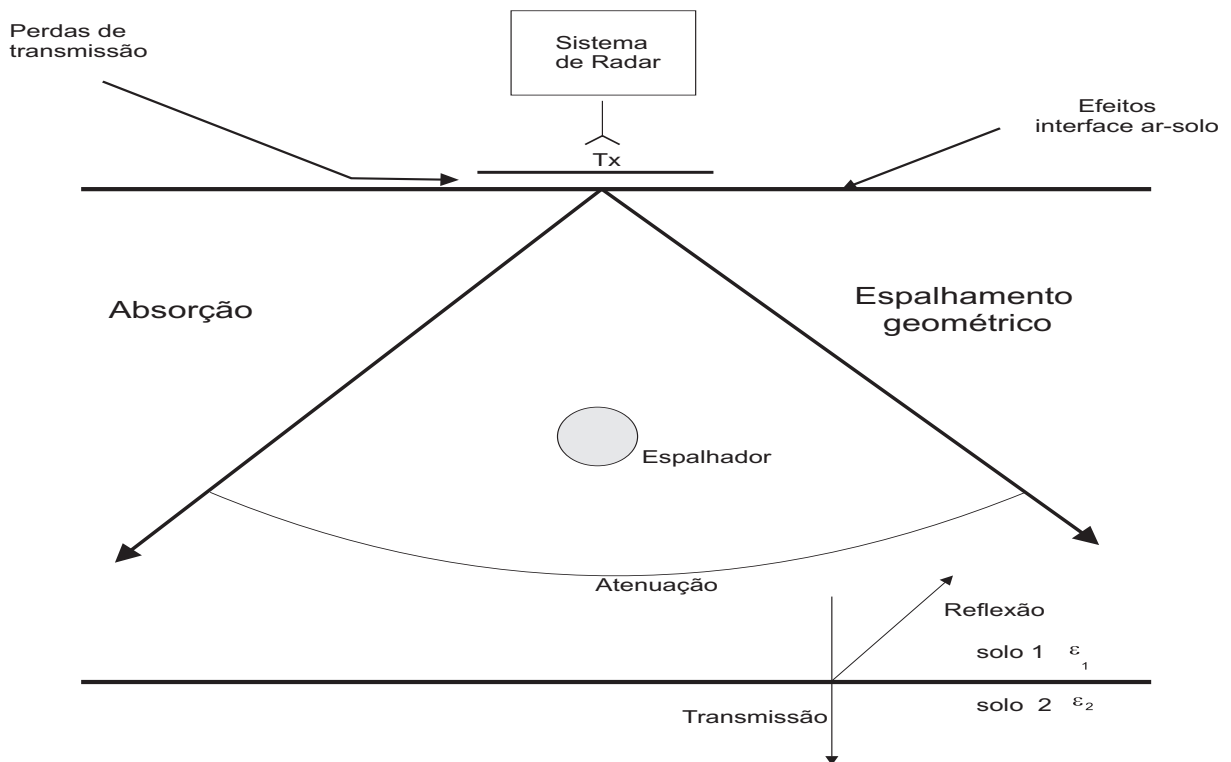


Figura 6.3: Redução da intensidade do sinal.

Quando isso acontece, grande parte da energia transmitida é refletida pela interface ar-solo e volta para a antena de recepção, havendo assim muito pouca energia para se penetrar com mais profundidade. O sinal eletromagnético é atenuado por diferentes processos no seu trajeto através do solo, Figura 6.3 apresenta uma visão geral dos diferentes processos que levam a uma redução da intensidade do sinal.

A maior perda de energia é resultante do amortecimento da circulação das cargas livres transmitidas. A atenuação dependente do material será induzida pela condutividade elétrica de corrente contínua σ_c relativa ao meio investigado.

Tem-se que a amplitude A da onda eletromagnética irá diminuir exponencialmente em função da distância d percorrida com respeito ao seu valor inicial A_0 :

$$A(x) = A_0 e^{-\beta x} \quad (6.3)$$

onde

$$\beta = \frac{\sigma_c}{2c\epsilon_0\sqrt{\epsilon}} \quad (6.4)$$

Quanto maior for a condutividade σ_c do meio, maior será a atenuação da onda electromagnética. No solo, a condutividade eléctrica, por exemplo, irá aumentar devido a um aumento no teor de umidade do solo de argila ou a quantidade de solutos dissolvidos na solução do solo.

A profundidade de penetração da onda electromagnética será descrita por:

$$\delta = \frac{1}{\beta} \quad (6.5)$$

Esta profundidade será reduzida a medida que a condutividade eléctrica do meio aumenta, por exemplo, para a água salgada a profundidade de penetração é de apenas $\delta = 1$ cm.

Além disso, temos também as chamadas perdas esféricas que podem ocorrer em função da geometria do campo de medição. A densidade de energia é reduzida devido ao espalhamento geométrico com o inverso do quadrado do trajeto percorrido.

Outros aspectos que causam a redução da energia e o espalhamento e a difração da energia electromagnética causada por objetos cujas dimensões tem a mesma ordem de grandeza que o comprimento da onda eletromagnética incidente, chamamos este fenômeno de espalhamento de Mie, o que impossibilita a redução da energia registrada pela antena de recepção, e também temos que as perdas de energia que podem ser também induzidas, em consequência das perdas geradas pela reflexão e transmissão durante a passagem da onda através da interface de dois meios.

Logo as frações transmitidas não podem mais ser registadas pela antena receptora, e isto se dá devido ao desacoplamento das antenas para com o solo e esta energia é perdida para o espaço livre. Estas perdas podem ser definidas como perdas de fronteira.

6.4 Modelagem computacional de Sistemas de GPR

A simulação numérica de sistemas GPR é extremamente importante para se ter o desenvolvimento de novos tipos de antenas, técnicas para detecção de sinais e formulação de algoritmos para tratamento de sinais.

Existem muitas considerações a serem feitas ao se lidar com o modelamento computacional de sistemas de GPR. Para se ter uma simulação o mais realista possível é necessário levar em consideração alguns aspectos importantes, tais como:

- Características das ondas eletromagnéticas;
- tipos de solos - dispersivos e com perdas;
- rugosidade da superfície do solo;
- obstáculos naturais como pedras e resíduos orgânicos;
- A geometria das antenas que compõem o sistema.

Como mostrado ao longo deste trabalho as formas diferenciais se apresentam como um método numérico atrativo para este tipo de aplicação. Esta capacidade se deve ao fato de se poder modelar antenas de uma maneira bem natural através da utilização de malhas simpliciais. Neste trabalho será simulado modelos que tratam meios com perdas e deixa-se para trabalhos futuros o tratamentos de meios dispersivos.

A abordagem utilizada através das formas diferenciais para a simulação dos modelos de GPR será através da representação numérica para se fornecer através de um esquema leap-frog a solução para as equações de Maxwell, no domínio do tempo. Ao contrário do FDTD que se baseia na discretização das derivadas parciais com o uso de diferenças centrais, no caso das formas diferenciais será utilizado como visto no capítulo 3 uma contrapartida discreta para o operador derivada exterior. O esquema leap-frog resultante é utilizado como uma marcha iterativa no tempo para se obter as soluções desejadas em função do campo elétrico e da densidade de fluxo magnético. Em todas as simulações realizadas neste capítulo será considerado meios lineares e não magnéticos.

6.4.1 Levantamento de superfícies baseados em reflexão - 2d

O levantamento de superfícies baseado na reflexão, é um sistema de GPR onde a antena transmissora e receptora se encontram localizadas sobre a superfície da terra e os dados provenientes das subsuperfícies são coletados e são analisadas as mudanças ocorridas no pulso devido as propriedades elétricas do meio e a presença de objetos refletores.

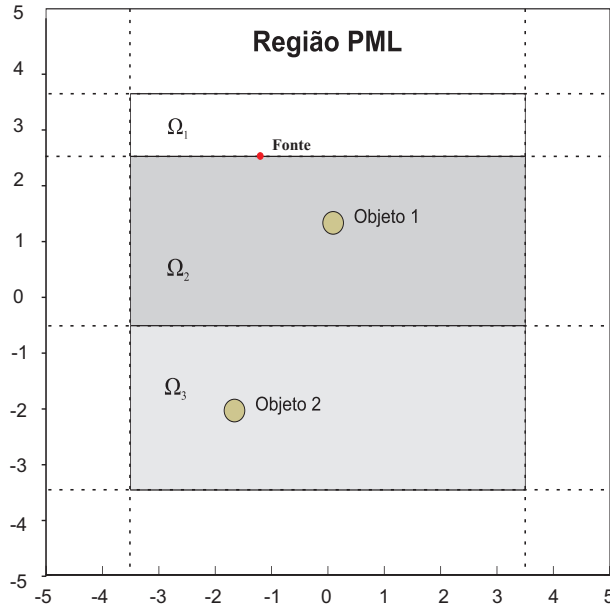


Figura 6.4: Modelo com propriedades elétricas.

Figura 6.4 apresenta a geometria computacional que é composta por três meios Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 que representam respectivamente o ar, solo com permeabilidade relativa $\epsilon_r = 9$, permissividade relativa $\mu_r = 1$ e condutividade $\sigma = 1$ mS/m e outro solo com permeabilidade relativa $\epsilon_r = 25$, permissividade relativa $\mu_r = 1$ e condutividade $\sigma = 5$ mS/m. Dentro das regiões Ω_1 e Ω_2 são inseridos dois objetos com paredes eletricamente perfeitas.

Este problema envolve uma fonte de corrente polarizada localizada na interface ar-solo e irradiando a onda. A excitação tem a forma de um pulso Blackman-Harris no ponto $(x, y) = (-1, 2.5)$ com frequência dominante de 300 MHz (ver fig.5.3).

Os parâmetros da função CFS-PML (5.11) utilizados com base nos resultados do capítulo 5 são $m = 3$, $R = \exp(-9)$, $k_{max} = 4$ e $\alpha = 0.004$, a região PML possui uma espessura de $r = 1,5$ cm, e é terminada por uma PEC.

Para esta simulação usaremos as equações de Maxwell modificadas (5.80)-(5.82) dentro da região PML, utilizou-se uma malha com 78.953 elementos, 118.798 arestas e 39.846 nós e a componente \mathcal{E}_y do campo elétrico será calculada por:

$$\mathcal{E}_y = \sum \omega_i^0 \mathbf{e}_i \quad (6.6)$$

A matriz de Hodge obtida por Eq.(5.82) possui ordem igual a 39.036×39.036 e utilizou-se o método da esparsificação recursiva da matriz de Hodge vista no capítulo 4 para aproximar a inversa desta matriz, com parâmetro threshold $r = 1 \times 10^{-5}$ e se obteve uma matriz com densidade igual a $ds(\mathbf{M}_{1_s}) = 0.4885\%$.

Para validar a eficiência do método da esparsificação recursiva comparou-se as soluções obtidas através da matriz de Hodge original com a solução obtida com a matriz esparsificada através do seguinte erro.

$$E_r = \frac{|E^o - E^s|}{|E_{max}^o|} \quad (6.7)$$

onde E^o é a solução obtida através da matriz de Hodge original e E^s é a solução obtida pela matriz de Hodge esparsificada em função do tempo.

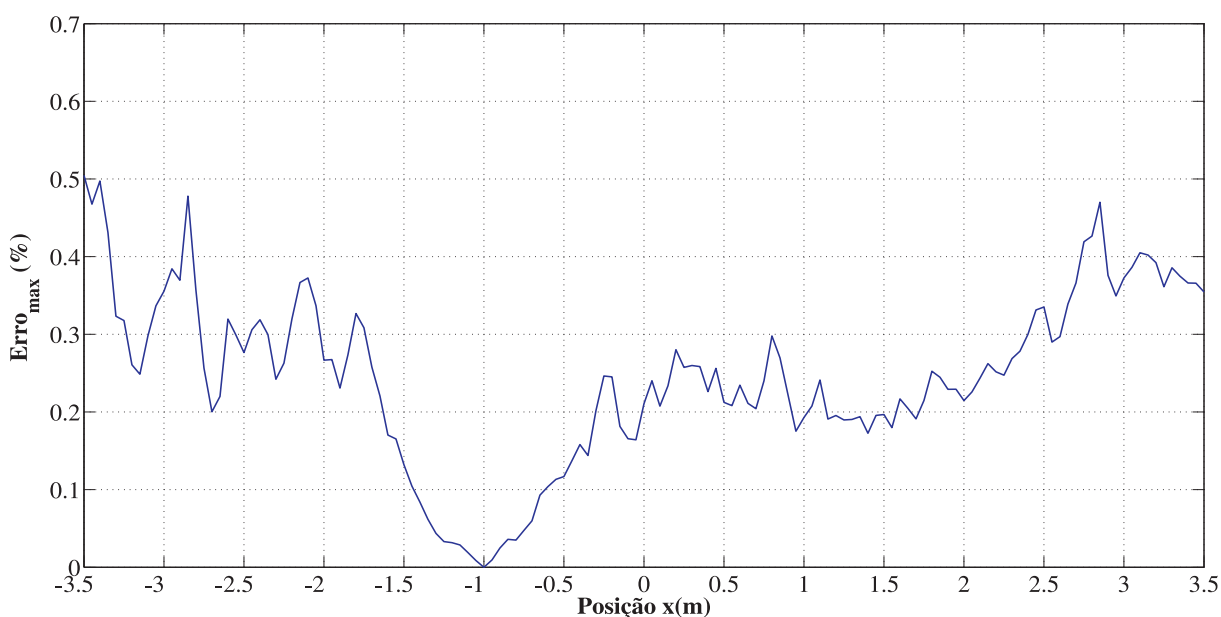


Figura 6.5: Erro máximo com o uso da esparsificação recursiva medido nos pontos sobre a reta $y = 2.5$ em relação a solução com o uso da matriz de Hodge original.

Figura 6.5 apresenta o erro máximo medido em todo o tempo de propagação calculado sobre os pontos da reta $y = 2.5$, ou seja, na interface ar-solo. Observa-se que para todos os pontos amostrados o erro está abaixo de 0.5% , no ponto $(x, y) = (-1, 2.5)$ o erro zero, devido ao fato da fonte está localizada neste ponto.

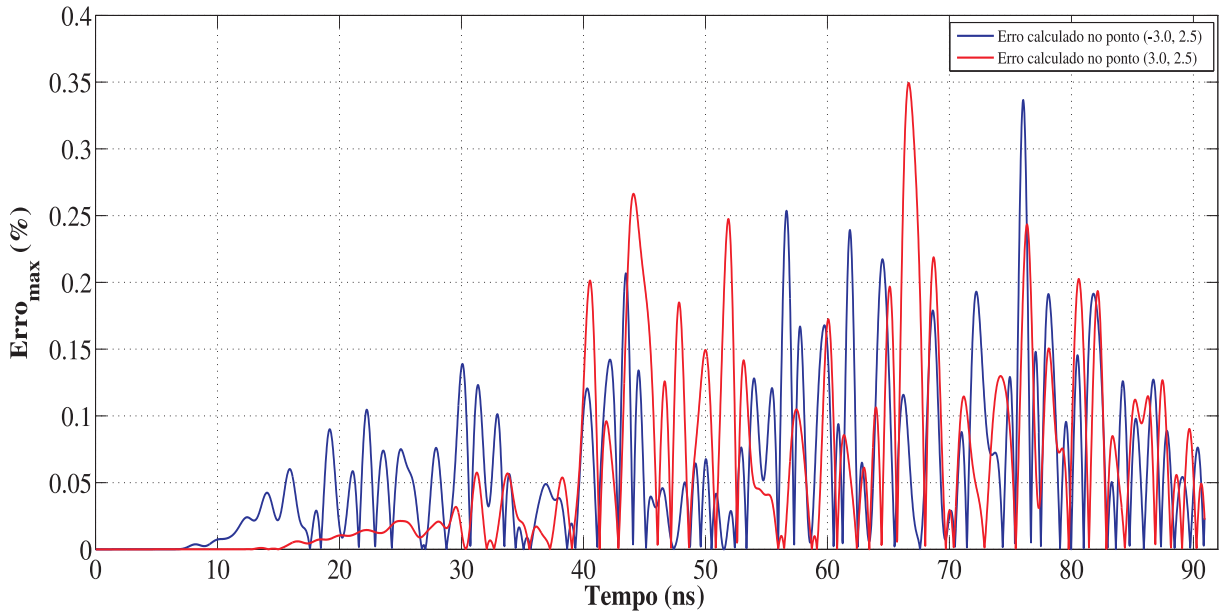


Figura 6.6: Erro máximo com o uso da esparsificação recursiva medido em dois pontos sobre a reta $y = 2.5$ em função do tempo e em relação a solução com o uso da matriz de Hodge original.

Figura 6.6 apresenta o comportamento do erro em relação ao tempo, o erro foi calculado sobre os pontos $(x, y) = (-3.0, 2.5)$ e $(x, y) = (3.0, 2.5)$ e fica evidenciado um erro abaixo de 0.35% para todo o tempo de propagação, o que mostra o bom desempenho da técnica de esparsificação recursiva .

É apresentado a seguir fotografias do comportamento da componente \mathcal{E}_y do campo elétrico para esta simulação, o objetivo aqui é destacar a eficiência da CFS-PML em meios com perdas e mostrar que o uso das formas diferenciais como uma ferramenta de simulação numérica para sistemas de GPR. É destacado também os fenômenos de reflexão causados pelas interfaces dos meios e pelos objetos enterrados.

Figura 6.7 mostra fotografias da componente \mathcal{E}_y do campo elétrico nos instantes de tempo $t = 3.38, 5.92, 8.46$ ns. É observado a propagação da onda através do ar e sua entrada na região de PML, observa-se a eficácia da CFS-PML para o meio ar. Nota-se também a diferença de amplitude da onda nas regiões Ω_1 e Ω_2 , devido as características elétricas dos meios.

Na Figura 6.8 é destacado o comportamento da onda dentro da região Ω_2 e observa-se a reflexão causada pelo primeiro objeto enterrado. Fica também evidenciado a boa absorção pela

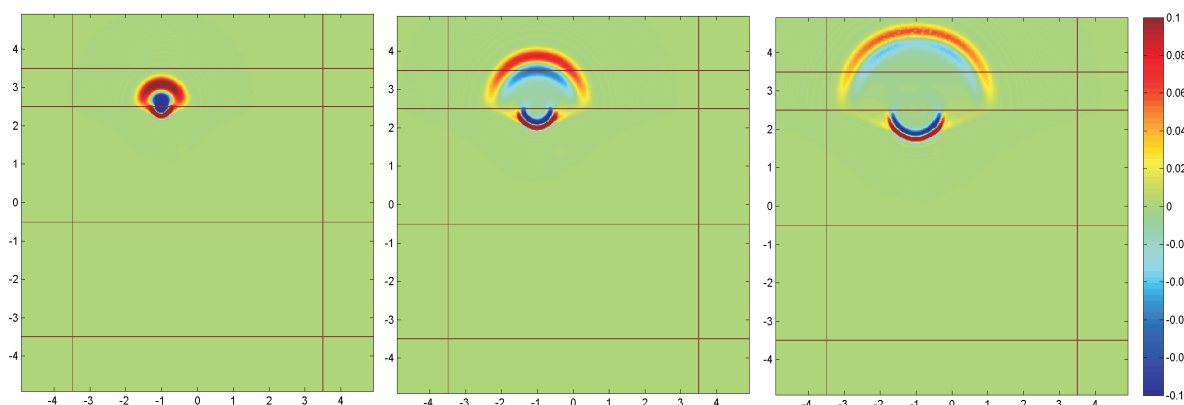


Figura 6.7: Fotografias mostrando amplitude do campo \mathcal{E}_y em $t = 3.38, 5.92, 8.46$ ns.

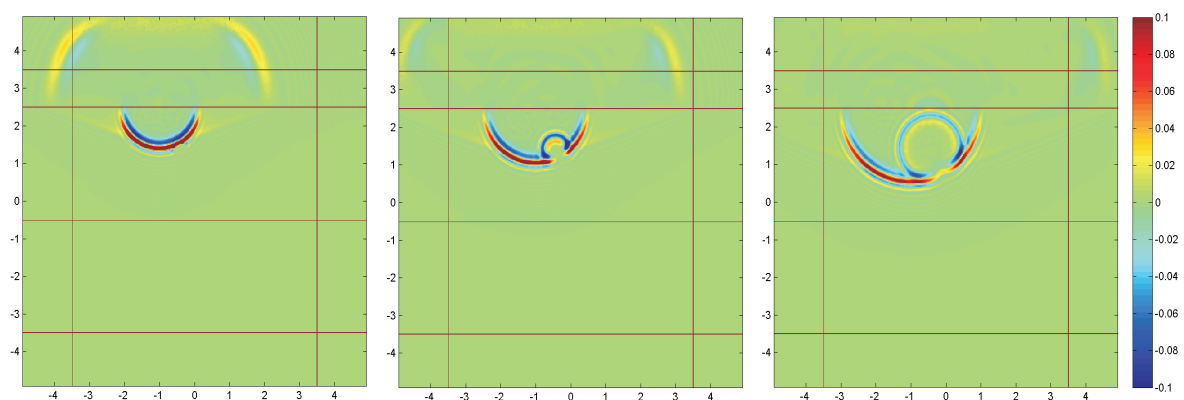


Figura 6.8: Fotografias mostrando amplitude do campo \mathcal{E}_y em $t = 11.84, 15.23, 20.31$ ns.

região CFS-PML no meio ar e a entrada neste meio da onda refletida pelo objeto enterrado no solo.

Figura 6.9 mostra a viagem pelo ar da onda refletida pelo objeto enterrado na região Ω_2 e novamente se destaca aqui o fenômeno da reflexão causada pela interface dos meios Ω_1 e Ω_2 . Outro ponto importante a se destacar na Figura 6.9 está na absorção por parte da região CFS-PML referente ao meio ar da onda refletida pelo objeto proveniente do solo.

Neste último snapshot (Fig. 6.10) é observado a entrada da onda no meio Ω_3 e o fenômeno da reflexão causada na interface entre os meios, observamos também o momento em que a onda encontra o segundo objeto enterrado e sua reflexão.

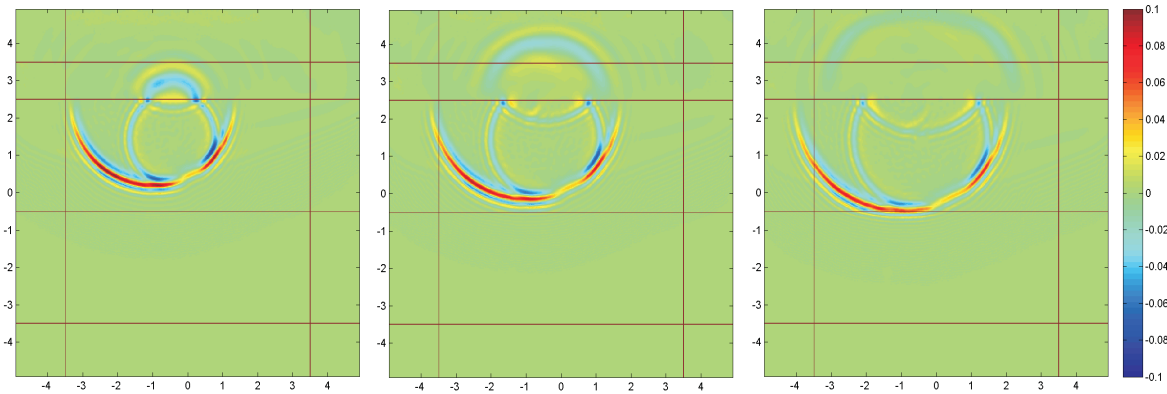


Figura 6.9: Fotografias mostrando amplitude do campo \mathcal{E}_y em $t = 23.69, 27.08, 30.46$ ns.

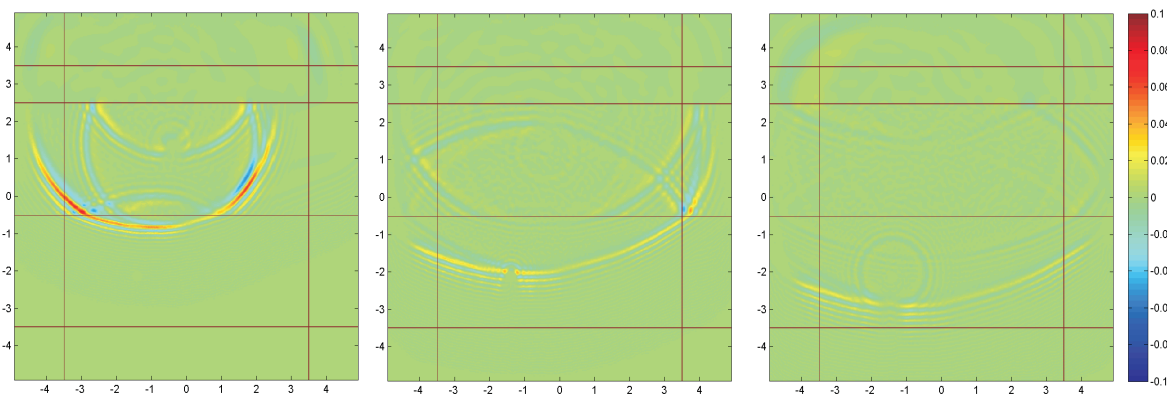


Figura 6.10: Fotografias mostrando amplitude do campo \mathcal{E}_y em $t = 35.54, 59.24, 69.39$ ns.

Figura 6.11 mostra o comportamento da componente de campo elétrico \mathcal{E}_y para o tempo t variando de 0 a 70 ns e para todas as antenas receptoras localizadas na interface ar-solo $y = 2.5$, a antena transmissora está localizada em $(x, y) = (-1, 2.5)$. Esta é uma fatia da saída multi-compensada do cubo de dados.

Observamos dois tipos de eventos em Fig.6.11, os eventos lineares são a passagem direta da onda entre o ar e o solo, enquanto que os eventos com movimentos hiperbólicos são os reflexos dos objetos enterrados nos dois tipos de solo, e as reflexões causadas pelas fronteiras entre os diversos meios.

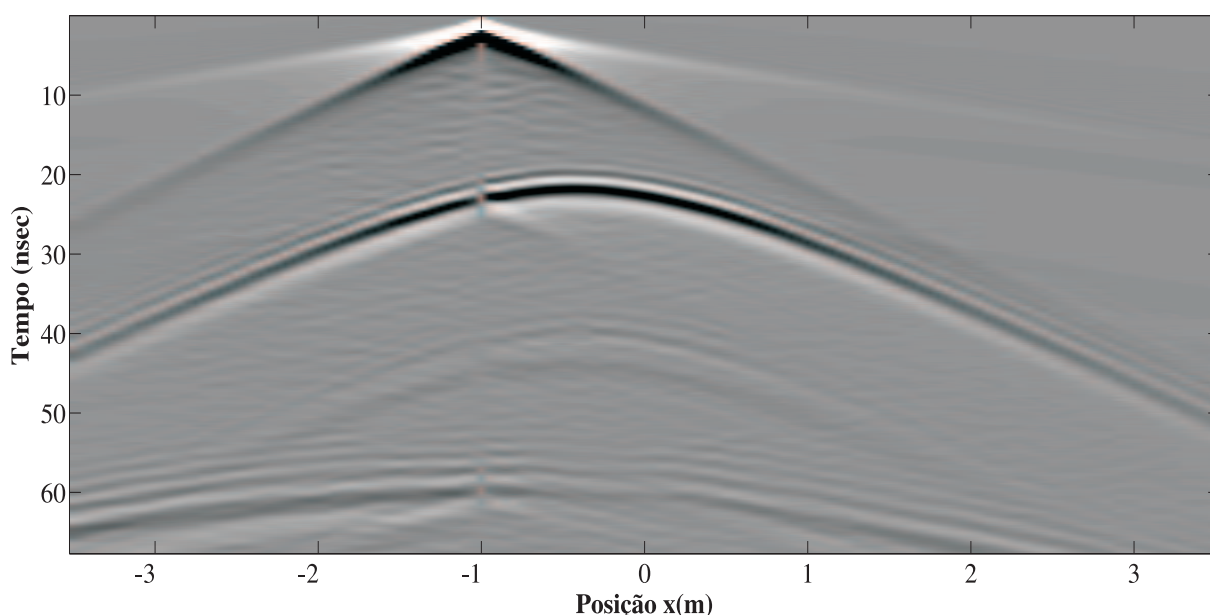


Figura 6.11: Componente de campo \mathcal{E}_y observada por diversas antenas receptoras para a antena transmissora localizada em $(x, y) = (-1, 2.5)$.

Encerra-se esta seção se destacando o bom comportamento da CFS-PML para meios com perdas e também para o tratamento de ondas refletidas por objetos enterrados. Na próxima seção será apresentado o modelamento de uma antena corneta em 2D destacando-se assim a capacidade de se lidar com geometrias através de malhas triangulares.

6.4.2 Antena Corneta - 2d

Nesta aplicação será simulado um modelo (veja Fig.6.12(a)) contendo dois meios Ω_1 e Ω_2 que representam o ar e um solo com permeabilidade relativa $\epsilon_r = 4$, permissividade relativa $\mu_r = 1$ e condutividade $\sigma = 1$ mS/m e no solo temos um objeto enterrado com paredes eletricamente perfeitas.

No ar está inserida uma antena corneta setorial plano-E com abertura de 14° , a antena foi escolhida de acordo com a condição ótima de propagação, ou seja, obedecendo as seguintes medidas descritas em Fig.6.12(b).

As medidas da antena são dadas em função do comprimento de onda λ , ou seja, temos que $b = \lambda/2$, $a = \lambda/4$, $c = \frac{3}{4}\lambda$, $d = \lambda$, $R = 8\lambda$ e $B = (2\lambda R)^{\frac{1}{2}}$. Nesta aplicação considera-se

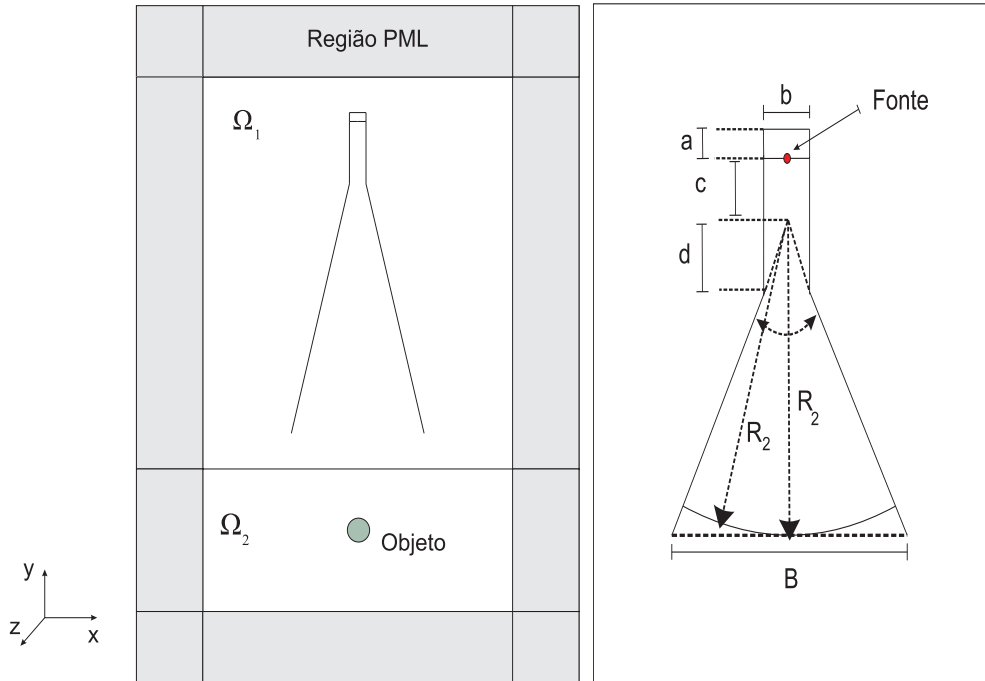


Figura 6.12: (a) Modelo computacional constituído por antena corneta setorial plano-E e objeto enterrado no solo com perdas. (b) Antena corneta setorial plano-E com abertura de 14° .

o modo TM, ou seja, tem-se as componentes, \mathcal{E}_z do campo elétrico e $(\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y)$ para o fluxo magnético.

De acordo com a tabela 5.1 será utilizado as formas de Whitney (3.36), ω^0 e ω^1 que são funções escalares e vetoriais, respectivamente. Para este caso, a componente \mathcal{E}_z do campo elétrico será vista como uma 0-forma e o fluxo $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y)$ será uma 1-forma, logo se têm as seguintes aproximações para estes campos:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_z &= \sum e_i \omega_i^0 \\ \mathcal{B} &= \sum b_j \omega_j^1\end{aligned}\tag{6.8}$$

Nesta aplicação será utilizada as equações de Maxwell modificadas descritas em (5.80)-(5.82) e se usará como função de excitação um pulso modulado gaussiano seno, que pode ser expresso da seguinte maneira:

$$G(t) = h \exp \left\{ \left[- (t - 3\tau_0) / \tau_0 \right]^2 \right\} \sin (2\pi f_c t)\tag{6.9}$$

onde $h = 1.484$, $\tau_0 = [\pi (f_h - f_c)^{-1}]$, $f_h = 3\text{GHz}$, $f_c = 2\text{GHz}$. A fonte será posicionada em $\lambda/4$ na parte traseira do guia (ver Fig.6.12(b)).

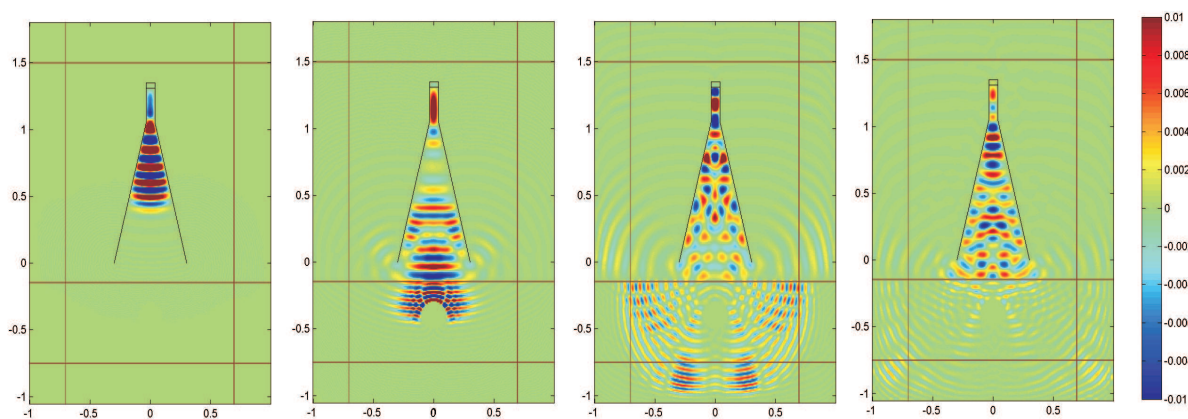


Figura 6.13: Fotografias mostrando amplitude do componente do campo elétrico \mathcal{E}_z nos instantes $t = 3.76, 7.52, 11.28, 15.04$ ns.

Figura 6.13 mostra fotografias com geração do pulso dentro da antena corneta nos tempos $t = 3.76\text{ns}$ e a onda percorrendo toda a estrutura da antena em direção ao solo. No tempo $t = 7.52\text{ns}$ observa-se a onda dentro do solo com perdas e o efeito de reflexão causado pela presença do objeto enterrado. Claramente no tempo $t = 11.28\text{ns}$ é observado a absorção dos diversos tipos de ondas produzidas neste modelo pela região CFS-PML e em $t = 15.04\text{ns}$ as ondas refletidas tanto pelo objeto enterrado como pela interface ar-solo são absorvidas na região CFS-PML acima da antena corneta no meio ar.

Para se destacar o efeito da presença do objeto enterrado no solo, apresentamos a seguir a comparação entre os sinais mensurados no ponto $(x, y) = (0, 0)$. Figura 6.14 apresenta o comportamento da componente \mathcal{E}_z do campo elétrico com e sem a presença do objeto enterrado, percebe-se claramente o efeito reflexivo causado pelo objeto enterrado.

É feita a diferença entre os sinais apresentados na Figura 6.14 e esta diferença é apresentada pela Figura 6.15. A diferença dos sinais é um pulso modulado Gaussiano diferencial produzido pela resposta da presença do objeto enterrado no solo.

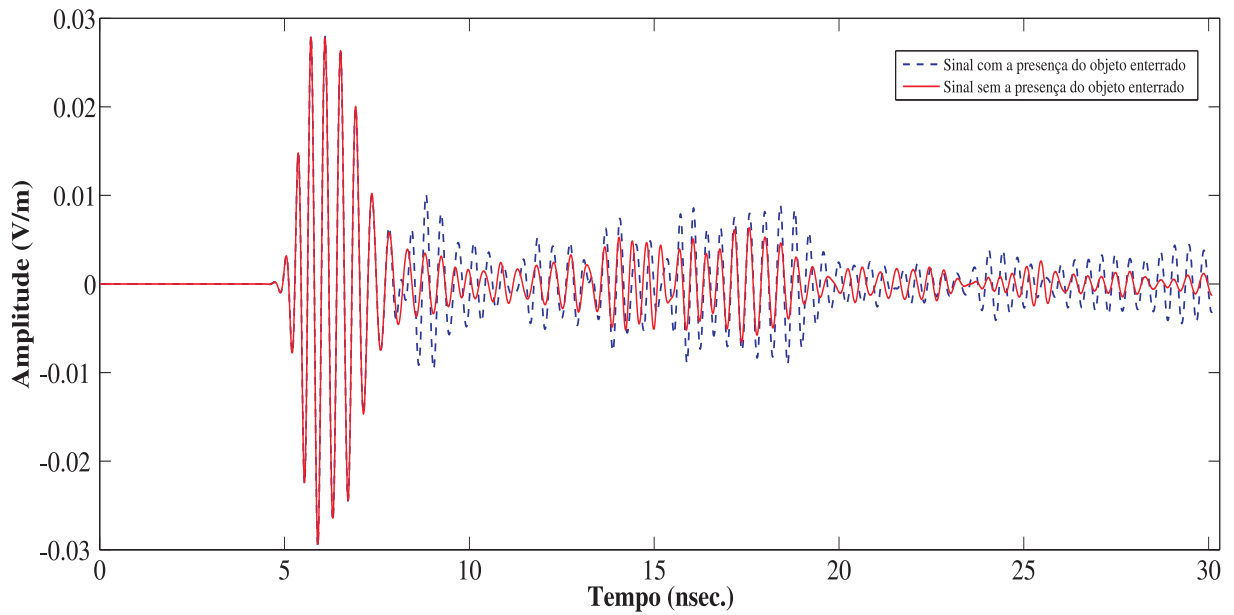


Figura 6.14: Comparação dos sinais tanto com e sem a presença do objeto enterrado.

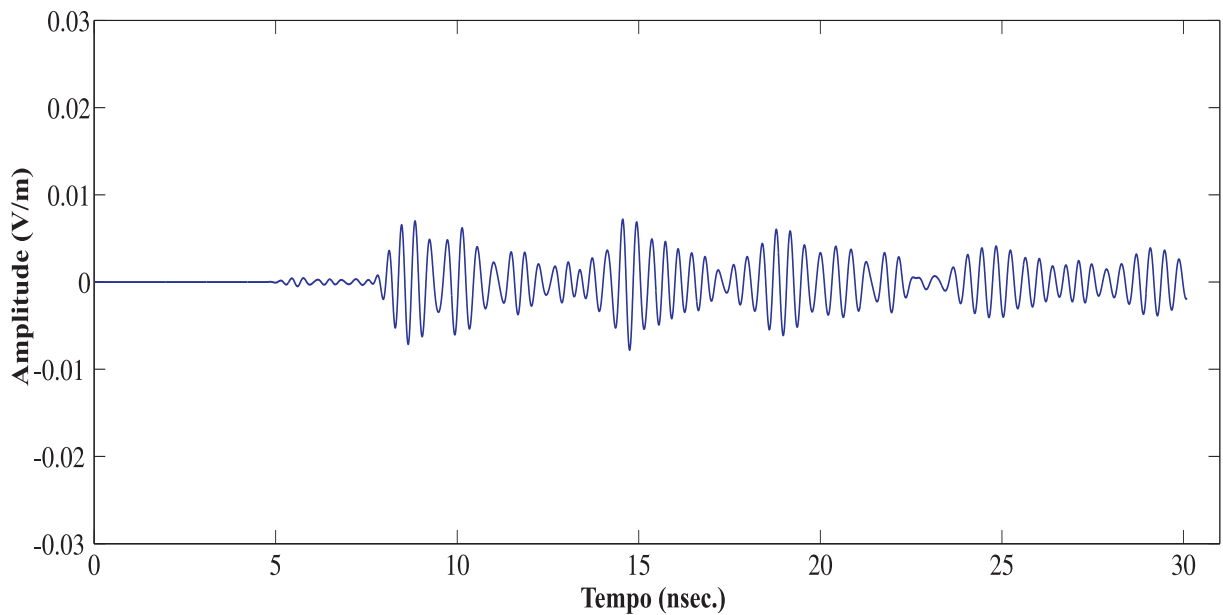


Figura 6.15: Diferença entre os sinais - com e sem a presença do objeto enterrado.

O próximo exemplo irá tratar a detecção de uma estrutura em concreto e a análise através da velocidade de propagação da onda da localização desta estrutura.

6.4.3 Detecção de estruturas em concreto

Nesta seção apresenta-se a simulação da detecção de uma estrutura em concreto. Figura 6.16 apresenta estrutura simulada, que é composta por um túnel com 5 m de largura e 3 m de altura construído em um solo com permissividade relativa $\epsilon_r = 2,4$ e condutividade elétrica $\sigma = 1 \times 10^{-3}$ S/m. O material do túnel é concreto com permissividade relativa $\epsilon_r = 5,5$ e condutividade elétrica $\sigma = 0$ S/m. Para todos os materiais do esquema assumi-se uma permeabilidade relativa $\mu_r = 1$.

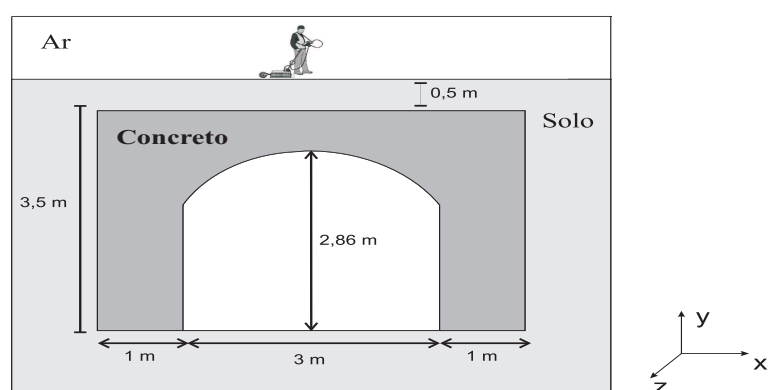


Figura 6.16: Esquema de detecção de estrutura em concreto por GPR, composta por túnel de concreto construído em um solo com características elétricas com perdas.

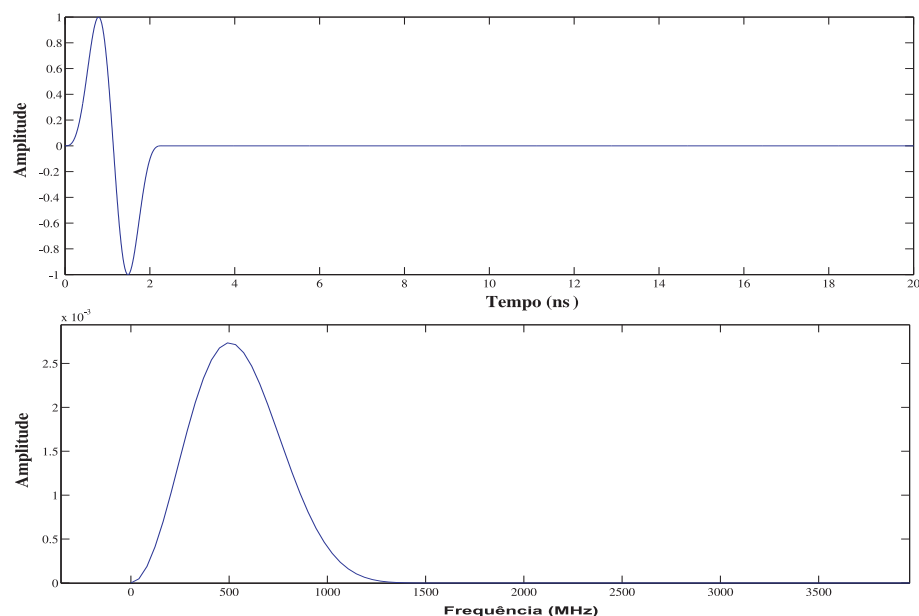


Figura 6.17: Pulso Blackman-Harris com frequência dominante de 500 MHz.

Para esta simulação assume-se o modo TM, ou seja, tem-se que o campo elétrico $\mathcal{E} = E_z dy$ é uma 0-forma e a densidade de fluxo magnético $\mathcal{B} = B_x dx + B_y dz$ é uma 1-forma. Logo para este modelo será utilizado as equações modificada de Maxwell descritas em (5.80)-(5.82). A antena transmissora é modelada como um dipolo iluminada por um pulso Blackman-Harris com frequência dominante de 500 MHz (Veja Figura 6.17).

Será apresentado agora o radargrama do comportamento do campo elétrico, onde a escala vertical do radargrama indica o tempo que o pulso leva para alcançar uma anomalia no terreno, ser refletido e captado pela antena receptora.

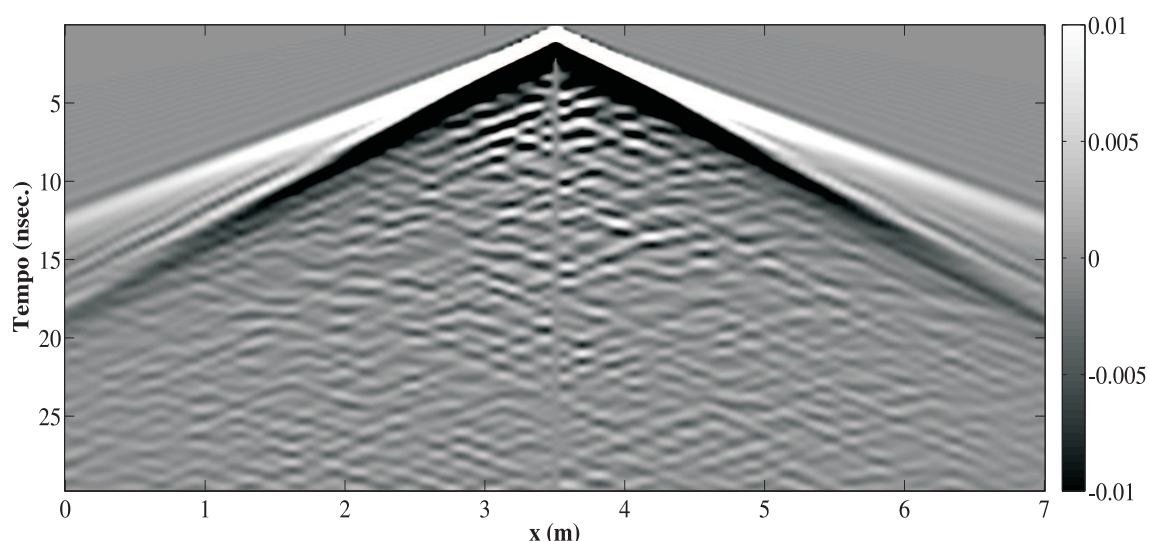


Figura 6.18: Simulação sem a presença da estrutura de concreto. Campo elétrico \mathcal{E} observado por antenas receptoras posicionadas na interface ar-solo para antena transmissora posicionada no centro do percurso.

Figura 6.18 apresenta radargrama que corresponde a uma medição feita sobre a interface ar-solo sem a presença da estrutura em concreto (túnel). Percebe-se apenas a ocorrência de eventos lineares o que indica os efeitos da passagem da onda pelos meios ar e solo e o efeito da dispersão causada pelo solo.

Conhecer o valor da velocidade de propagação da onda GPR no meio geológico, constitui um fator de extrema relevância, pois é através dele que pode-se estimar a profundidade dos objetos. No vácuo, a onda GPR propaga-se com velocidade de $0,3 \text{ m/ns}$ e no meio geológico com valores, geralmente, compreendidos entre $0,06 \text{ m/ns}$ e $0,16 \text{ m/ns}$.

A velocidade de propagação da onda eletromagnética em um meio com permissividade dielétrica relativa ϵ_r , condutividade elétrica σ e permeabilidade magnética relativa μ_r será calculado da seguinte maneira,

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2}}{2} \right)}} \quad (6.10)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, $\sigma/\omega\epsilon$ é o fator de perda e ω é a frequência. Pode-se observar pelo fator de perda, que quando a condutividade aumenta a velocidade da onda diminui e vice-versa.

Quando uma onda de alta frequência, como é o caso do GPR, propaga-se através de um meio geológico com condutividade menor que 100 mS/m, onde a perda é muito pequena, e não há presença de material ferromagnético $\mu_r = 1$, a equação (6.10) pode ser escrita da seguinte maneira,

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (6.11)$$

Pela Figura 6.16 tem-se que a parte mais alta do túnel se localiza a uma distancia $d = 0,5$ m do solo, aplicando (6.11) para os dados deste modelo se obtêm o seguinte valor para a velocidade de propagação,

$$v = \frac{0,3m/ns}{\sqrt{8.8542 \times 10^{-012}}} = 0,1936 \text{ m/ns} \quad (6.12)$$

Logo o tempo esperado t_{r_1} para que as antenas receptoras detectem a onda refletida pela estrutura de concreto será

$$t_{r_1} = \frac{d}{v} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{0,5 \text{ m}}{0,1936 \text{ m/ns}} \\ &= 5,1676 \text{ ns} \end{aligned} \quad (6.14)$$

e o tempo t_{r_2} esperado para que as antenas receptoras detectem a passagem da onda pela estrutura de concreto e o interior do túnel será

$$\begin{aligned} t_{r_2} &= \frac{2(3,5 - 2,86) + 1}{v} \\ &= 11,78 \text{ ns} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Agora apresenta-se o radargrama do comportamento do campo elétrico na presença da estrutura de concreto, espera-se pela escala vertical do radargrama obter as medidas do túnel.

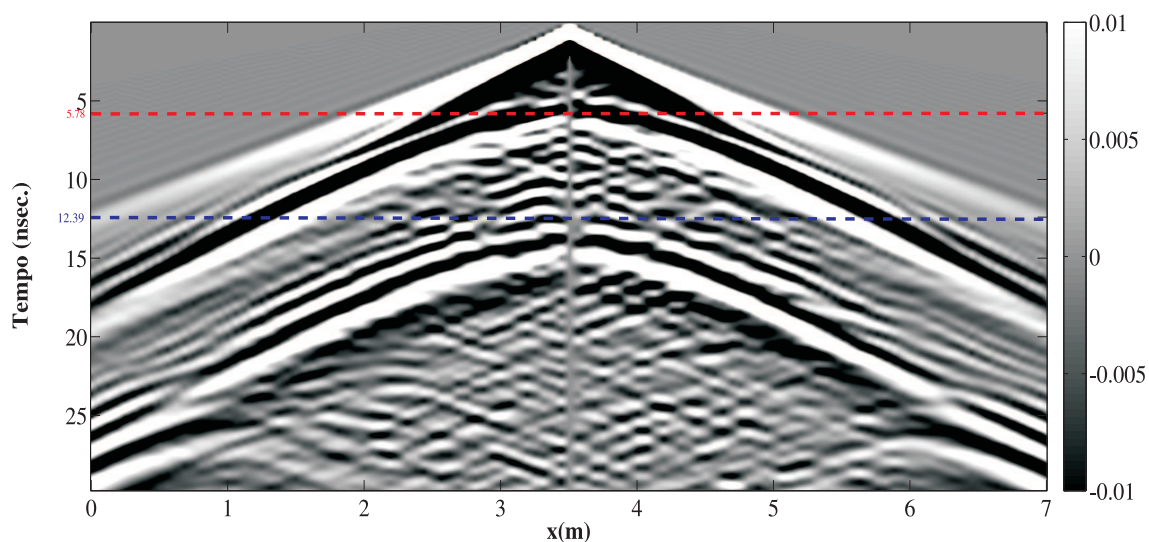


Figura 6.19: Simulação com a presença da estrutura de concreto. Campo elétrico \mathcal{E} observado por antenas receptoras posicionadas na interface ar-solo para antena transmissora posicionada no centro do percurso. Linha tracejada em vermelho indica $t_{r_1} = 5,7816$ ns e linha tracejada em azul indica $t_{r_2} = 12,39$ ns.

Figura 6.19 apresenta radargrama que corresponde a uma medição feita sobre a interface ar-solo com a presença da estrutura em concreto (túnel). Percebe-se agora em relação ao primeiro radargrama 6.18 a ocorrência de eventos hiperbólicos o que indica os efeitos de reflexão causados pela estrutura de concreto. O radargrama mostra a recepção da onda refletida pela estrutura de concreto como calculado em (6.13) e (6.15).

Figura 6.20 apresenta radargrama que corresponde a uma medição feita sobre a interface ar-solo para antenas transmissora e receptora se movendo simultaneamente. Novamente se tem a ocorrência de eventos hiperbólicos o que indica os efeitos de reflexão causados pela estrutura de concreto.

O último exemplo a ser apresentado na próxima seção é a simulação de uma antena corneta em 3D, será mostrado a eficiência do uso das formas diferenciais para se tratar geometrias mais complicadas e a eficiência da versão para domínios tridimensionais da CFS-PML.

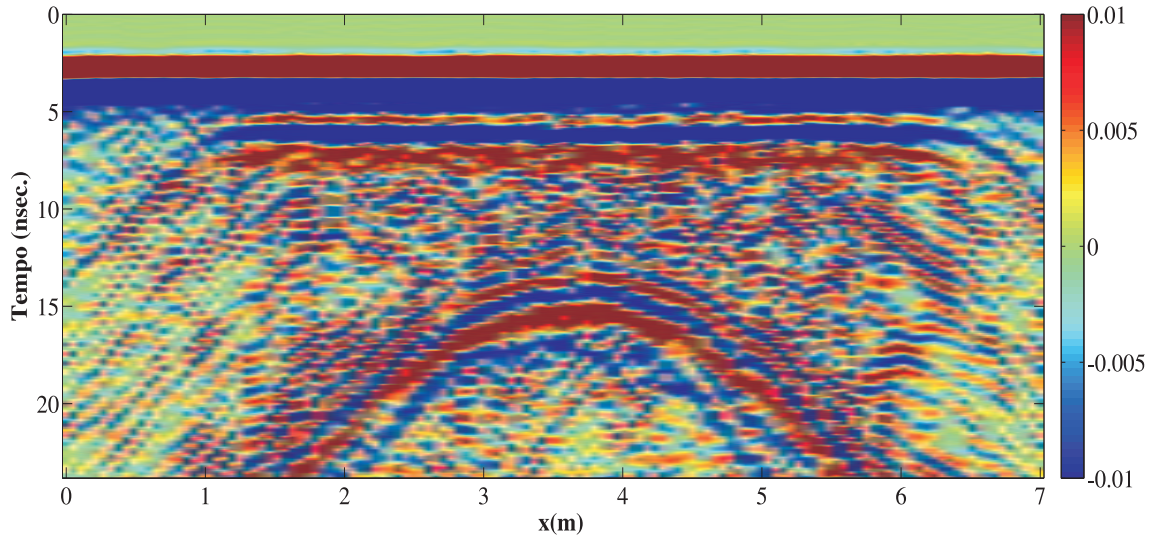


Figura 6.20: Simulação com a presença da estrutura de concreto. Campo elétrico \mathcal{E} observado por antena receptora que se move simultaneamente com a antena transmissora posicionada na interface ar-solo.

6.4.4 Antena Horn 3D

Nesta seção será simulada uma aplicação em 3D para se mostrar a eficiência do uso das formas diferenciais para a simulação de sistemas de GPR. Analogamente ao caso bidimensional será simulado aqui um sistema simples de GPR descrito pela Figura 6.21.

O modelo implementado é constituído por dois meios Ω_1 e Ω_2 que representam o ar e um solo com permeabilidade relativa $\epsilon_r = 4$, permissividade relativa $\mu_r = 1$ e condutividade $\sigma = 1$ mS/m e no solo temos uma esfera enterrada com centro $c = \{2.3, 2.15, 1.7\}$ e raio $\lambda/2$, com paredes eletricamente perfeitas.

No ar será considerado uma antena corneta localizada a uma distância de 1 comprimento de onda λ do solo. A antena foi escolhida de acordo com a condição ótima de propagação, ou seja, obedecendo as seguintes medidas descritas pela Figura 6.22. As medidas da antena corneta são $a = \lambda/2$, $b = \lambda/4$, $c = 3\lambda/4$, $L = \lambda$, $d = 7\lambda$ e $h = 2\lambda$.

Para a função de excitação utilizaremos pulso modulado gaussiano seno definido em Eq.(6.9). A fonte será posicionada em $\lambda/4$ na parte traseira do guia sobre um cilindro de altura $h_1 = 0,082\lambda$ e raio $r = 0,1063\lambda$ (veja Figura 6.22).

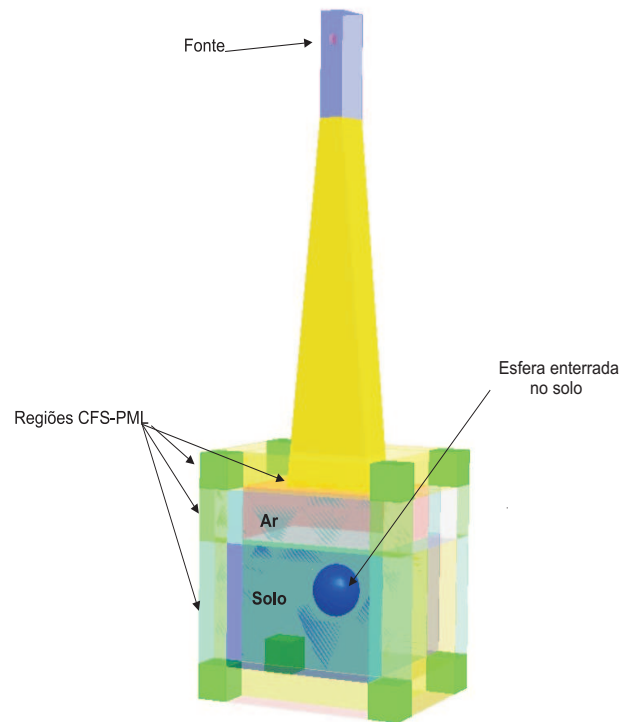


Figura 6.21: Antena Corneta 3D propagando sobre solo com perdas.

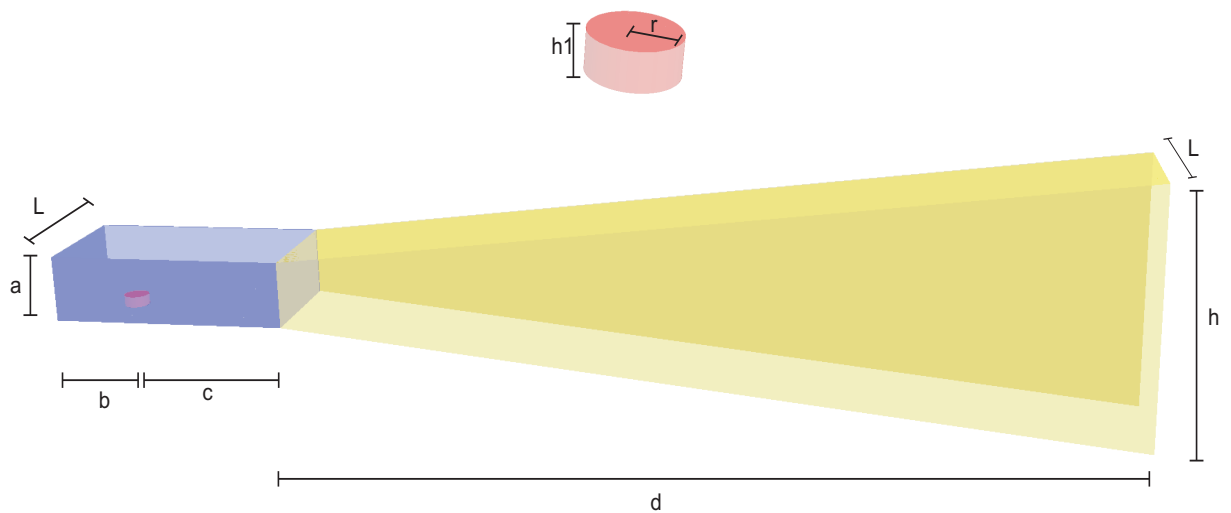


Figura 6.22: Antena Corneta 3D.

Utilizando as informações da tabela 5.1, será usado aqui as formas de Whitney (3.36), ω^1 e ω^2 que são funções vetoriais e serão utilizadas para se aproximar o campo elétrico e a densidade de

fluxo magnético, respectivamente. Será utilizado o esquema leap-frog descrito pelas equações de Maxwell modificadas (5.83)-(5.85).

Para o caso tridimensional o campo elétrico \mathcal{E} é uma 1-forma e o fluxo magnético \mathcal{B} é uma 2-forma, ou seja, estes campos serão aproximados por:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \sum e_i \omega_i^1 \\ \mathcal{B} &= \sum b_j \omega_j^2\end{aligned}\quad (6.16)$$

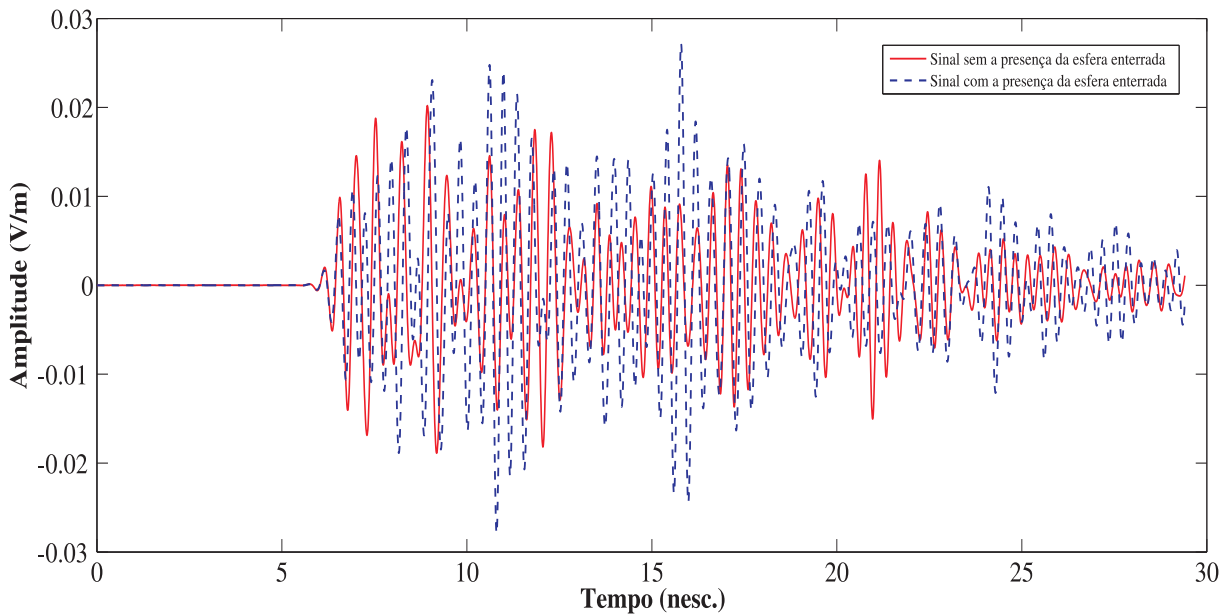


Figura 6.23: Comparação dos sinais tanto com e sem a presença da esfera enterrada.

Como no caso bidimensional será realizado aqui uma análise sobre o efeito da presença da esfera enterrada no solo. Será feito o cálculo do campo elétrico em um ponto localizado no centro da saída da antena corneta com coordenadas (2.302.151.80). De maneira semelhante ao caso 2D é observado pela Figura 6.23 a mudança de amplitude do campo devido a reflexão causada pela esfera.

A diferença entre os sinais apresentados na Figura 6.23 é realizado e novamente como na simulação em 2D é notado pela Figura 6.24 a geração de um pulso modulado Gaussiano diferencial produzido pela resposta da presença da esfera enterrada no solo.

Nesse capítulo, foram solucionados problemas que envolvem sistemas de GPR em domínios bi e tridimensionais através do uso das formas diferenciais afim de se validar toda a teoria

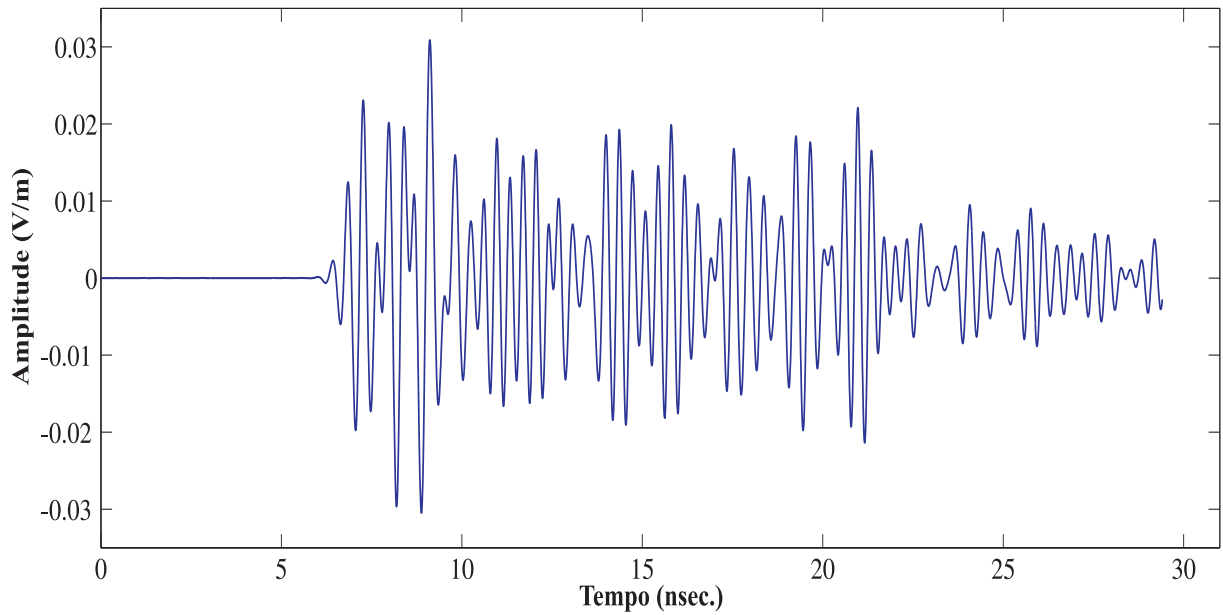


Figura 6.24: Diferença entre os sinais - com e sem a presença da esfera enterrada.

desenvolvida ao longo deste trabalho de doutorado. Os resultados obtidos demonstram que a teoria de formas diferenciais é uma boa opção para o estudo de propagação de ondas eletromagnéticas, em especial o modelamento de sistemas de GPR em meios com perdas.

Capítulo 7

Conclusão

No presente trabalho a teoria de formas diferenciais foi descrita como uma ferramenta para a simulação de problemas eletromagnéticos. O enfoque principal deste trabalho foi a aplicação das técnicas desenvolvidas em sistemas de radar de penetração de solo - GPR, envolvendo meios com perdas.

No capítulo 2 apresentamos de maneira puramente aplicada a teoria das formas diferenciais objetivando a discretização das equações de Maxwell. No capítulo 3 a discretização espacial e temporal das equações de Maxwell é apresentada e problemas eletromagnéticos tanto estáticos quanto no domínio do tempo foram implementados para se demonstrar a aplicabilidade e facilidade da ferramenta.

No capítulo 4 foi apresentado o método da esparsificação recursiva para se obter uma aproximação esparsa da inversa da matriz de Hodge. Observou-se que este método comparado com alguns similares leva a um custo computacional bem menor. Testes mostraram que o método não afeta a estabilidade do sistema, devido ao fato do sinal dos autovalores não ser alterado e de se manter a forte concentração dos termos de maior grandeza em torno da diagonal. Mostrou-se também que uma opção para se acelerar ainda mais o processo de esparsificação está na utilização do processo em dois sub-blocos distintos das matrizes do particionamento, a bi-esparsificação é uma opção mais rápida com menos precisão do que esparsificação única. Este recurso pode ser especialmente útil quando se lida com matrizes de alta ordem.

Um fato importante a se destacar que independentemente do problema eletromagnético a ser tratado, a matriz de Galerkin Hodge tem a propriedade de ser fortemente localizada, assim o método da esparsificação recursiva pode ser aplicada a muitos problemas eletromagnéticos. Como exemplo a isto utilizamos o método com sucesso sobre as matrizes geradas pelas equações modificadas da CFS-PML vista no capítulo 5.

No capítulo 5 foi apresentado um algoritmo para se resolver as equações de Maxwell em domínios truncados pela CFS-PML. A formulação apresentada usa a teoria das formas diferenciais como base de desenvolvimento, o que torna o algoritmo extremamente simplificado independente da dimensão do problema. A discretização é baseada puramente nas matrizes de incidência e de Hodge, ou seja, através das propriedades topológicas e da aproximação via método de Galerkin. Os resultados apresentados neste capítulo mostram a alta capacidade de absorção da CFS-PML com erros na maioria das vezes abaixo de -40 dB.

Conclui-se aqui as contribuições deste trabalho de doutorado através dos resultados obtidos no capítulo 6 que demonstram que o uso das formas diferenciais é viável para a simulação de sistemas de GPR em domínios bi e tridimensionais. Destaca-se como contribuições a esparsificação recursiva das matrizes de Galerkin Hodge e a condição de contorno absorvente denominada neste trabalho de CFS-PML.

Trabalhos Futuros

As seguintes propostas são apresentadas como continuidade deste trabalho:

- Investigação de problemas inversos em espalhamento de ondas eletromagnéticas, motivados por exemplo por problemas de detecção de falhas em materiais, formas de geometrias enterradas e sua localização através de imagens de radar.
- Investigação de técnicas como o ADI para tornar a formulação CFS-PML para formas diferenciais incondicionalmente estável em relação a discretização temporal.
- Investigação de técnicas para diminuir o tempo de processamento do método da Esparsificação Recursiva da Matriz de Hodge, por exemplo através da reorganização das entradas da matriz de maneira a torná-la uma matriz banda.

Referências Bibliográficas

- [Annan, 1992] Annan, A. P. (1992). Ground Penetration Radar Workshop notes. Sensors & Software, Inc., Internal Report. [citado na(s) pginas(s) 109, 114, 116]
- [Anton and Rorres, 2001] Anton, H. and Rorres, C. (2001). Álgebra linear com aplicações. Bookman, Porto Alegre. [citado na(s) pginas(s) 75]
- [Berenger, 1994] Berenger, J.-P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. J. Comput. Phys., 114(2):185–200. [citado na(s) pginas(s) 4]
- [Bernard et al., 2010] Bernard, L., Torrado, R. R., and Pichon, L. (2010). Efficient implementation of the upml in the generalized finite difference time-domain method. IEEE Transactions on Magnetics, 46(8):3492–3495. [citado na(s) pginas(s) 70]
- [Bluck et al., 2006] Bluck, M., Hatzipetros, A., and Walker, S. (2006). Applications of differential forms to boundary integral equations. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, 54(6):1781 – 1796. [citado na(s) pginas(s) 29]
- [Bossavit, 1988] Bossavit, A. (1988). Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education - Reviews, IEE Proceedings A, 135(8):493–500. [citado na(s) pginas(s) 3, 5, 10, 84]
- [Bossavit, 1994] Bossavit, A. (1994). Computational Electromagnetism: variational formulation, complementarity, edge elements. Academic Press, San Diego. [citado na(s) pginas(s) 10, 52]
- [Bossavit, 2001] Bossavit, A. (2001). ‘Generalized finite differences’ in computational electromagnetics. Progress In Electromagnetics Research (PIER), 32:45–64. [citado na(s) pginas(s) 10]
- [Bossavit, 2005] Bossavit, A. (2005). Discretization of Electromagnetic Problems: The Generalized Finite Differences Approach. in W.H.A. Schilders, E.J.W. Ter Maten (Eds):

- Numerical Methods in Electromagnetism (Handbook of Numerical Analysis, Vol. 13). Elsevier (Amsterdam). [citado na(s) pginas(s) 10]
- [Bossavit and Kettunen, 1999] Bossavit, A. and Kettunen, L. (1999). Yee-like schemes on a tetrahedral mesh, with diagonal lumping. International Journal of Numerical Modelling-electronic Networks Devices and Fields, 12:129–142. [citado na(s) pginas(s) 3, 10, 60, 71]
- [Bryant, 1991] Bryant, R. (1991). Exterior differential systems. Mathematical Sciences Research Institute publications. Springer-Verlag. [citado na(s) pginas(s) 10]
- [Burke, 1985] Burke, W. L. (1985). Applied Differential Geometry. Cambridge University Press. [citado na(s) pginas(s) 10]
- [Cartan, 1945] Cartan, . (1945). Les Systèmes Differentiels Exterieurs et leurs Applications Géometriques. Hermann, Paris. [citado na(s) pginas(s) 9]
- [Conyers and Goodman, 1997] Conyers, L. B. and Goodman, D. (1997). Ground-penetrating Radar: An introduction for Archeologists. AltaMira, Walnut Creek, Calif. [citado na(s) pginas(s) 111]
- [Desbrun et al., 2006] Desbrun, M., Kanso, E., and Tong, Y. (2006). Discrete differential forms for computational modeling. pages 39–54. [citado na(s) pginas(s) 9]
- [Deschamps, 1981] Deschamps, G. (1981). Electromagnetics and differential forms. Proceedings of the IEEE, 69(6):676 – 696. [citado na(s) pginas(s) 10]
- [Donderici and Teixeira, 2008] Donderici, B. and Teixeira, F. L. (2008). Mixed finite-element time-domain method for transient maxwell equations in doubly-dispersive media. IEEE Microw Theory Tech, 56(1):113–120. [citado na(s) pginas(s) 10]
- [Faria et al., 2008] Faria, A. N., Oliveira, A. M., and Lambert, T. G. (2008). Formas diferenciais aplicadas ao eletromagnetismo. VIII Conferência Internacional de Aplicações Industriais. [citado na(s) pginas(s) 16]
- [Fisher et al., 2005] Fisher, A., Rieben, R. N., Rodrigue, G. H., and White, D. A. (2005). A generalized mass lumping technique for vector finite-element solutions of the time-dependent maxwell equations. IEEE Trans. Antennas Propagations, 53:29–30. [citado na(s) pginas(s) 71]
- [Flanders, 1989] Flanders, H. (1989). Differential Forms with Applications to the Physical Sciences. Dover, New York. [citado na(s) pginas(s) 10]

- [Flanders, 2001] Flanders, H. (2001). Geometric Methods for Computational Electromagnetics. EMW Publishing, Cambridge Mass. [citado na(s) pginas(s) 10]
- [Fullagar and Livleybrooks, 1994] Fullagar, P. K. and Livleybrooks, D. (1994). Trial of tunnel radar for cavity and ore detection in the sudbury mining. In Proceedings of the Fifth International Conference on Ground Penetrating Radar, pages 883–894. [citado na(s) pginas(s) 111]
- [Gedney and Roden, 2000] Gedney, S. and Roden, J. (2000). Numerical stability of nonorthogonal fdtd methods. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, 48(2):231 –239. [citado na(s) pginas(s) 66]
- [Goodman, 1996] Goodman, D. (1996). Comparison of gpr time slices and archeological excavations. In Proceedings of the Sixth International Conference on Ground Penetrating Radar. Departament of Geocience and Technology, Tohoku University, Sandai, Japan, pages 77–82. [citado na(s) pginas(s) 111]
- [Goodman et al., 1998] Goodman, D., Nishimura, Y., Hongo, H., and Maasaki, O. (1998). Gpr amplitude rendering archeology. In Proceedings of the Seventh International Conference on Ground Penetrating Radar. Departament of Geocience and Technology, Tohoku University, Sandai, Japan, pages 91–92. [citado na(s) pginas(s) 111]
- [Goodman et al., 1995] Goodman, D., Nishimura, Y., and Rogers, J. D. (1995). Gpr time-slices in archaeological prospection. Archaeological Prospection 2, pages 85–89. [citado na(s) pginas(s) 112]
- [He and Teixeira, 2006a] He, B. and Teixeira, F. (2006a). Geometric finite element discretization of maxwell equations in primal and dual spaces. Physics Letters,Elsevier, 349(A):1 –14. [citado na(s) pginas(s) 86]
- [He and Teixeira, 2007] He, B. and Teixeira, F. (2007). Differential forms, galerkin duality, and sparse inverse approximations in finite element solutions of maxwell equations. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, 55(5):1359 –1368. [citado na(s) pginas(s) 3, 10, 71, 72, 73]
- [He and Teixeira, 2006b] He, B. and Teixeira, F. L. (2006b). Geometric finite element discretization of maxwell equations in primal and dual spaces. Phys. Lett. A, 349(1-4):1–14. [citado na(s) pginas(s) 3, 99]

- [Irving and Knight, 2006] Irving, J. and Knight, R. (2006). Numerical modeling of ground-penetrating radar in 2-d using matlab. Comput. Geosci., 32(9):1247–1258. [citado na(s) pginas(s) 102]
- [Keller, 1987] Keller, G. (1987). Rock and mineral properties. Investigations in Geophysics, Eletromagnetic Methods in Applied Geophysics. Society of Exploration Geophysicists, ED. Misac N. Nabighian. [citado na(s) pginas(s) 116]
- [Keränen et al., 2002] Keränen, J., Kangas, J., Ahola, A., and Kettunen, L. (2002). Implicit yee-like scheme on tetrahedral mesh. Magnetics, IEEE Transactions on, 38(2):717–720. [citado na(s) pginas(s) 71, 78, 99]
- [Kuzuoglu and Mittra, 1997] Kuzuoglu, M. and Mittra, R. (1997). Investigation of nonplanar perfectly matched absorbers for finite-element mesh truncation. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, 45(3):474–486. [citado na(s) pginas(s) 4]
- [Lee et al., 1997] Lee, J.-F., Lee, R., and Cangellaris, A. (1997). Time-domain finite-element methods. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, 45(3):430–442. [citado na(s) pginas(s) 70]
- [Lin et al., 2009] Lin, L., Lu, J., and Ying, L. (2009). Fast algorithm for extracting the diagonal of the inverse matrix with application to the electronic structure analysis of metallic systems. Comm. Math. Sci., 7:755–777. [citado na(s) pginas(s) 71]
- [Lovelock and Rund, 1993] Lovelock, D. and Rund, H. (1993). Tensors, Differential Forms, and Variational Principles. Dover Publications. [citado na(s) pginas(s) 10]
- [Maxwell, 1873] Maxwell, J. C. (1873). A treatise on electricity and magnetism / by James Clerk Maxwell. Dover Publications, New York :, unabridged 3rd ed. edition. [citado na(s) pginas(s) 9]
- [Möbius, 1827] Möbius, A. (1827). Der barycentrische calcul. J. A. Barth. [citado na(s) pginas(s) 50]
- [Moura et al., 2012a] Moura, A. S., Gomes, B. N., Saldanha, R. R., Silva, E. J., Lisboa, A. C., and Facco, W. G. (2012a). Otimização dos parâmetros cfs-pml utilizando evolução diferencial. Momag. [citado na(s) pginas(s) 102]
- [Moura et al., 2012b] Moura, A. S., Saldanha, R. R., Silva, E. J., Lisboa, A. C., Facco, W. G., and Lima, N. Z. (2012b). A recursive sparsification of the inverse hodge matrix. Magnetics, IEEE Transactions on, 48(2):611–614. [citado na(s) pginas(s) 4, 5, 56, 58, 71]

- [Movahhedi et al., 2007] Movahhedi, M., Abdipour, A., Ceric, H., Sheikholeslami, A., and S.Selberherr (2007). Optimization of the perfectly matched layer for the finite-element time-domain method. IEEE Microwave and wireless components letters, 17:10–12. [citado na(s) pginas(s) 4, 84, 100]
- [Polycarpou, 2006] Polycarpou, A. C. (2006). Introduction to the Finite Element Method in Electromagnetics. Morgan & Claypool. [citado na(s) pginas(s) 63]
- [Roden and Gedney, 2000] Roden, J. A. and Gedney, S. D. (2000). Convolution PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media. Microwave and Optical Technology Letters, 27(5):334–339. [citado na(s) pginas(s) 84]
- [Sharpe, 1997] Sharpe, R. W. (1997). Differential Geometry:Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Programm. Springer-Verlag, New York. [citado na(s) pginas(s) 10]
- [Stern, 1929] Stern, W. (1929). Versuch einer elektrodynamischen dickenmessung von gletschereis. Beitrage zur Geophysik, 23:292–333. [citado na(s) pginas(s) 111]
- [Teixeira and Chew, 1998] Teixeira, F. and Chew, W. (1998). General closed-form pml constitutive tensors to match arbitrary bianisotropic and dispersive linear media. Microwave and Guided Wave Letters, IEEE, 8(6):223 –225. [citado na(s) pginas(s) 85]
- [von Westenholz, 1981] von Westenholz, C. (1981). Differential forms in mathematical physics. Studies in mathematics and its applications. North-Holland Pub. Co. [citado na(s) pginas(s) 9, 33]
- [Warnick et al., 1997] Warnick, K., Selfridge, R., and Arnold, D. (1997). Teaching electromagnetic field theory using differential forms. Education, IEEE Transactions on, 40(1):53 –68. [citado na(s) pginas(s) 3, 10]
- [Whitney, 1957] Whitney, H. (1957). Geometric Integration Theory. Princeton Press, Princeton. [citado na(s) pginas(s) 51]
- [Wong et al., 1995] Wong, M.-F., Picon, O., and Fouad Hanna, V. (1995). A finite element method based on whitney forms to solve maxwell equations in the time domain. Magnetics, IEEE Transactions on, 31(3):1618 –1621. [citado na(s) pginas(s) 65]
- [Yee, 1966] Yee, K. S. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. IEEE Trans. Antennas and Propagation, pages 302–307. [citado na(s) pginas(s) 98]