



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM**  
**ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DE ROTORES FLEXÍVEIS APOIADOS EM**  
**MANCAIS RADIAIS ELÍPTICOS E CILÍNDRICOS**  
**UTILIZANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

**WÉDERLEY MENDES MIRANDA**

**Belo Horizonte, 31 de agosto de 2012**

Wéderley Mendes Miranda

**ANÁLISE DE ROTORES FLEXÍVEIS APOIADOS EM  
MANCAIS RADIAIS ELÍPTICOS E CILÍNDRICOS  
UTILIZANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Projeto Mecânico.

Orientador: Prof. Marco Túlio Corrêa de Faria, Dr.

Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte

Escola de Engenharia da UFMG

2012



**Universidade Federal de Minas Gerais**  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**

Av. Antônio Carlos, 6627 – Pampulha – CEP 31.270-901 – Belo Horizonte – MG  
Tel.: +55 31 34995145 - Fax.: +55 31 3443-3783  
[www.demec.ufmg.br](http://www.demec.ufmg.br) - e-mail: [cpgmec@demec.ufmg.br](mailto:cpgmec@demec.ufmg.br)

**ANÁLISE DE ROTORES FLEXÍVEIS APOIADOS EM  
MANCAIS RADIAIS ELÍPTICOS E CILÍNDRICOS  
UTILIZANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

**WÉDERLEY MENDES MIRANDA**

Tese defendida e aprovada em 31 de agosto de 2012, pela Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “**Doutor em Engenharia Mecânica**”, na área de concentração de “**Projeto Mecânico**”.

---

Prof. Dr. Marco Túlio Corrêa de Faria – Universidade Federal de Minas Gerais – Orientador

---

Prof. Dr. Eduardo Bauzer Medeiros – Universidade Federal de Minas Gerais - Examinador

---

Prof. Dr. Lazaro Valentim Donadon – Universidade Federal de Minas Gerais - Examinador

---

Prof. Dr. Rogério José Marczak – Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Examinador

---

Prof. Dr. Pedro Américo Almeida Magalhães Júnior – PUC Minas - Examinador

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar a Deus, por me mostrar o caminho e me dar forças durante estes anos de muita dedicação.

À minha família, principalmente à minha esposa e filhos, pelo apoio, compreensão e paciência em todos os momentos em que não pude lhes dar a devida atenção.

Ao Prof. Marco Túlio Corrêa de Faria pela orientação deste trabalho e também pelas aulas de Dinâmica de Rotores e de Teoria da Lubrificação, que me fizeram despertar o interesse pela área, o que resultou neste trabalho.

À amiga Ana Paula Ladeira, pela valiosa contribuição durante a revisão final deste trabalho, nos aspectos de metodologia e de normalização.

Aos professores Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto e Maria Lúcia Machado Duarte, pela acolhida quando retornei à UFMG para fazer o doutorado.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica da UFMG, pela estrutura física do laboratório de Dinâmica de Rotores, pela qualidade de ensino e pelo apoio na participação de eventos.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
1.1	Escopo	21
1.2	Objetivos	22
1.2.1	Objetivo geral	22
1.2.2	Objetivos específicos	22
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>23</b>
2.1	Modelagem de sistemas rotor-mancal	23
2.2	Análise da estabilidade através de problema de autovalor	31
2.3	Mancais hidrodinâmicos	33
2.4	Sistemas rotativos com elementos adicionais	35
2.5	Mancais elípticos	37
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>40</b>
3.1	Modelagem do Rotor Flexível	41
3.2	Modelagem do Mancal Radial Elíptico	44
3.2.1	Equações de Lubrificação	47
3.2.2	Equações de Elementos Finitos para Mancais Elípticos	50
3.2.3	Discretização do campo de pressão de ordem zero	50
3.2.4	Discretização do campo de pressão de primeira ordem	53
3.2.5	Determinação dos Coeficientes de Força dos Mancais Elípticos	55
3.3	O Sistema Rotor-Mancal	56
3.4	Diagrama do Procedimento Computacional	58
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E ANÁLISE</b>	<b>61</b>

4.1	Exemplos de validação	61
4.1.1	Rotor com disco em balanço	61
4.1.2	Rotor apoiado nas extremidades com disco no centro	65
4.1.3	Rotor de uma bancada de testes	69
4.1.4	Segundo rotor de uma bancada de testes	75
4.2	Análise dos coeficientes de força dos mancais elípticos	77
4.2.1	Coefficientes de força em função da folga radial dos mancais elípticos	78
4.2.2	Coefficientes de força em função da razão de esbeltez dos mancais elípticos	83
4.2.3	Coefficientes de força em função da pré-carga dos mancais elípticos	85
4.3	A influência dos parâmetros geométricos dos mancais elípticos na resposta desbalanceada	87
4.3.1	A razão de amplificação da resposta desbalanceada em função da pré-carga	87
4.3.2	A resposta desbalanceada em função da razão de esbeltez dos mancais elípticos	91
4.3.3	A resposta desbalanceada em função da folga radial dos mancais elípticos	96
5	CONCLUSÕES	100
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	103
	ANEXO A - FUNDAMENTOS DA TEORIA DE VIGA	112
A.1.	Teoria de Viga de Euler-Bernoulli	112
A.2.	Teoria de Viga de Rayleigh	113
A.3.	Teoria de Viga de Timoshenko	113
	ANEXO B – FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO	115
B.1	- Funções de Interpolação para o deslocamento linear unitário no primeiro nó	115
B.2	- Funções de Interpolação para o deslocamento angular unitário no primeiro nó	117
B.3	- Funções de Interpolação para o deslocamento linear unitário no segundo nó	118
B.1	- Funções de Interpolação para o deslocamento angular unitário no segundo nó	119
	ANEXO C – MATRIZES DE ELEMENTOS FINITOS DO ROTOR	122

C.1 – Matriz de inércia de translação	122
C.2 – Matriz de inércia de rotação	123
C.3 – Matriz de efeitos giroscópicos	124
C.4 – Matriz de rigidez	125
<b>ANEXO D – MÉTODO NUMÉRICO DE NEWMARK</b>	<b>127</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Sistema rotor-mancal	40
Figura 3.2 – Representação de um elemento finito do eixo	42
Figura 3.3 – Desenho esquemático do mancal elíptico e seus parâmetros geométricos	45
Figura 3.4 - Desenho esquemático do perfil de um mancal radial elíptico	46
Figura 3.5 - Distribuição da pressão hidrodinâmica no mancal cilíndrico (LANG e STEINHILPER, 1978)	46
Figura 3.6 - Distribuição da pressão hidrodinâmica no mancal elíptico (Adaptado de CORREIA, 2007)	47
Figura 3.7 - Representação esquemática dos nós no elemento finito	51
Figura 3.8 – Representação dos 4 graus de liberdade	57
Figura 3.9 – Diagrama do procedimento computacional	58
Figura 4.1 – Desenho esquemático do rotor de Sinou (2005)	61
Figura 4.2 – Curvas da primeira e segunda frequências naturais (FN1, FN2) <i>versus</i> o número de elementos finitos da malha para o rotor de Sinou (2005) a 10rpm	62
Figura 4.3 – Primeira velocidade crítica progressiva ( <i>FWD1</i> ) e regressiva ( <i>BKWD1</i> ) <i>versus</i> incremento no tempo	63
Figura 4.4 – Espectro de frequência obtido pelo MEF para o rotor de Sinou(2005) a 10 rpm	64
Figura 4.5 – Diagrama de Campbell para o rotor em balanço analisado por Sinou(2005)	64
Figura 4.6 – Desenho esquemático do rotor de Hong e Park(1999)	66
Figura 4.7 – Espectro de frequência obtido para o rotor de Hong e Park (1999) operando a 6000rpm	67
Figura 4.8 – Forma de onda obtida para o rotor de Hong e Park (1999)	68
Figura 4.9 – Desenho esquemático do rotor da bancada de testes.	69
Figura 4.10 – Sensibilidade da malha de elementos finitos do mancal cilíndrico no	



cálculo dos parâmetros de desempenho $F_x$ e $K_{xy}$	71
Figura 4.11 – Espectro de frequência experimental – teste de batida	72
Figura 4.12 – Espectro de frequência obtido pelo MEF para rotação de 750 rpm	72
Figura 4.13 – Espectro de frequência obtido pelo MEF para rotação de 3200 rpm	73
Figura 4.14 – Espectro de frequência experimental para o rotor da bancada operando a 8900rpm	74
Figura 4.15 – Espectro de frequência obtido pelo MEF para o rotor da bancada operando a 8900rpm	74
Figura 4.16 – Espectro de frequência obtido pelo MEF para o rotor do exemplo 4 operando a 3200rpm	76
Figura 4.17 – Espectro de frequência experimental para o rotor de Machado(2006)	76
Figura 4.18 – Sensibilidade da malha de elementos finitos do mancal elíptico no cálculo dos parâmetros de desempenho $F_x$ e $K_{xy}$	78
Figura 4.19 - Posicionamento do eixo dentro do mancal e excentricidade	79
Figura 4.20 – Excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático dos mancais elípticos em função da folga radial	79
Figura 4.21 – Coeficientes de rigidez direta adimensionais em função da folga radial dos mancais elípticos	80
Figura 4.22 – Coeficientes de rigidez cruzada adimensional modificado em função da folga radial dos mancais elípticos	81
Figura 4.23 – Razão $C_{xy}/K_{xx}$ em função da folga radial dos mancais elípticos	82
Figura 4.24 – Amortecimento efetivo em função da folga radial dos mancais elípticos	82
Figura 4.25 – Excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático dos mancais elípticos em função da razão de esbeltez	83
Figura 4.26 – Variação do amortecimento efetivo em função da razão de esbeltez dos mancais elípticos	84
Figura 4.27 – Variação do amortecimento cruzado adimensional em função da razão de esbeltez dos mancais elípticos	84
Figura 4.28 – Excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático dos	

mancais elípticos em função da pré-carga	85
Figura 4.29 – Variação da relação de ajuste entre $Mp$ , $k_{xx}$ e $k_{xy}$ em função da pré-carga dos mancais elípticos	86
Figura 4.30 – Variação do amortecimento efetivo em função da pré-carga dos mancais elípticos	86
Figura 4.31 – Desenho esquemático do rotor sem disco massivo	88
Figura 4.32 – Resposta desbalanceada calculada no mancal 1 do rotor apoiado em mancais elípticos com pré-carga 0,45 (MIRANDA e FARIA, 2012)	89
Figura 4.33 – Resposta desbalanceada para diferentes valores de pré-carga dos mancais elípticos (MIRANDA e FARIA, 2012)	89
Figura 4.34 – Razão de amplificação da resposta desbalanceada na primeira velocidade crítica para o rotor apoiado em mancais elípticos (MIRANDA e FARIA, 2012)	90
Figura 4.35 – Desenho esquemático do rotor com disco massivo em posição assimétrica	91
Figura 4.36 – Amplitude de vibração na primeira VC em função da razão de esbeltez dos mancais elípticos	92
Figura 4.37 – Curvas de ajuste da excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático em função da razão de esbeltez dos mancais elípticos	94
Figura 4.38 – Razão de ajuste de $L/D$ em função da excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático $\varepsilon_0$ dos mancais	95
Figura 4.39 – Erros relativos da razão de ajuste de $L/D$ em função da excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático dos mancais	95
Figura 4.40 – Amplitude de vibração na primeira VC em função da folga radial dos mancais	97
Figura 4.41 – Razão de ajuste da folga radial em função da excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático dos mancais	98
Figura 4.42 – Erros relativos da razão de ajuste da folga radial em função da excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático dos mancais	98

Figura A.1 - Viga de Euler-Bernoulli sob carregamento distribuído (Boru, 2010)	112
Figura B.1 – Deslocamento linear unitário no primeiro nó	116
Figura B.2 – Deslocamento angular unitário no primeiro nó	117
Figura B.3 – Deslocamento linear unitário no segundo nó	118
Figura B.4 – Deslocamento angular unitário no segundo nó	120

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1- Parâmetros do rotor com disco em balanço (SINOUE, 2005)	62
Tabela 4.2- Valores comparativos da primeira frequência natural para o rotor de Sinou(2005) a 10 rpm	64
Tabela 4.3- Comparação da primeira velocidade crítica	65
Tabela 4.4- Parâmetros do rotor de Hong e Park(1999)	66
Tabela 4.5- Comparação da primeira frequência natural progressiva e regressiva para o rotor de Hong e Park (1999)	67
Tabela 4.6- Comparação das Frequências de Batimento para o rotor de Hong e Park(1999)	69
Tabela 4.7– Parâmetros do rotor da bancada de testes	70
Tabela 4.8– Resultados da análise da sensibilidade da malha dos mancais	71
Tabela 4.9– Valores comparativos de frequências naturais obtidas pelo MEF e experimentalmente pelo teste de batida ( <i>bump test</i> )	73
Tabela 4.10– Valores comparativos de frequências naturais obtidas pelo MEF e experimentalmente para o rotor da bancada operando a 8900rpm	75
Tabela 4.11– Parâmetros do rotor da bancada de testes – exemplo 2	75
Tabela 4.12– Valores comparativos das frequências naturais obtidas experimentalmente por Machado(2006) e pelo MEF	77
Tabela 4.13– Parâmetros do mancal elíptico selecionado	77
Tabela 4.14. Parâmetros do sistema rotor-mancal elíptico utilizado na análise	88
Tabela 4.15– Parâmetros do rotor com mancais elípticos	92

## SIMBOLOGIA

### Símbolos em letras latinas

$A$	Área da seção transversal do eixo [m <sup>2</sup> ]
$Ampl$	Amplitude adimensional da resposta desbalanceada
$c$	Folga radial menor ( $c = R - R_e$ ) [m]
$C_b$	Folga radial maior
$C_{XX}, C_{YY}$	Coefficientes de amortecimento direto [N.s/m]
$c_{XX}, c_{YY}$	Coefficientes de amortecimento direto adimensionais
$C_{XY}, C_{YX}$	Coefficientes de amortecimento cruzados [N.s/m]
$c_{XY}, c_{YX}$	Coefficientes de amortecimento cruzados adimensionais
$D$	Diâmetro interno do mancal [m]
$d$	Diâmetro externo do eixo [m]
$E$	Módulo de elasticidade [Pa]
$e$	Excentricidade do centro do munhão no mancal (distância entre centros do mancal e do munhão/eixo) [m]
$e_x, e_y$	Projeções de “ $e$ ” nos eixos de coordenadas cartesianas $x, y$
$e_{x_0}, e_{y_0}$	posição de equilíbrio do eixo
$\Delta e_x, \Delta e_y$	perturbação na posição de equilíbrio do eixo
$\vec{e}_\theta, \vec{e}_z$	vetores unitários nas direções circunferencial e axial, respectivamente
$f$	efeito de cisalhamento
$F$	Força de reação do mancal, gerada pela ação hidrodinâmica do fluido
$F_x$ e $F_y$	Componente da força de reação do fluido do mancal nas direções $x$ e $y$
$\{f_j^e\}$	Vetor de fluxo
$G$	Módulo de elasticidade ao cisalhamento [Pa]
$h$	Espessura do filme lubrificante, ou filme fluido

$h_0$	Espessura mínima do filme lubrificante estacionário [m] ou de ordem zero
$I$	Momento médio de inércia de área da seção transversal
$I_{dm}$	Momento diametral de inércia de massa por unidade de comprimento
$I_p$	Momento polar de inércia de massa por unidade de comprimento
$K$	Fator de forma do cisalhamento transversal
$K_x, K_y$	Coefficientes de cisalhamento
$K_{XX}, K_{YY}$	Coefficientes de rigidez diretos [N/m]
$k_{xx}$ e $k_{yy}$	Coefficientes de rigidez diretos adimensionais
$K_{XY}, K_{YX}$	Coefficientes de rigidez cruzados [N/m]
$k_{xy}$ e $k_{yx}$	Coefficientes de rigidez cruzados adimensionais
$\bar{k}$	Coefficiente de rigidez adimensional modificado
$[K_{ji}^e]$	Matriz fluídica de ordem zero
$L$	Comprimento do mancal
$l$	Comprimento do elemento
$L_{eixo}$	Comprimento do eixo
$m_d$	Massa desbalanceada
$\dot{m}_\theta$	Fluxo mássico na direção circunferencial
$\dot{m}_n$	Fluxo mássico de lubrificante cruzando a fronteira do domínio do elemento finito
$\dot{m}_z$	Fluxo mássico na direção axial
$\dot{m}_{\sigma_n}$	Fluxo de lubrificante de primeira ordem pelo contorno $\Gamma^e$ do elemento finito $n$ .
$Mp$	Pré-carga (medida da “elipsidade” do mancal): $Mp = (C_b - c) / c$
$\bar{n}$	Valor normal unitário direcionado para fora do contorno $\Gamma^e$ do elemento finito
$O_L$	Posição do centro dos lóbulos
$O$	Posição do centro do eixo
$p$	Pressão apresentada pelo filme lubrificante [Pa]
$p_a$	Pressão ambiente [Pa]

$p_o$	Pressão estacionária de ordem zero [Pa]
$p_\sigma$	Campo de pressão hidrodinâmica de primeira ordem
$p_o^e$	Campo de pressão discreto de ordem zero no domínio $\Omega^e$ de um elemento finito
$p_x, p_y$	Campo de pressão hidrodinâmica de primeira ordem.
$p_i^e$	Valores de pressão nodal, no nó $i$ do elemento $\Omega_e$ [Pa]
$q(x,t)$	Carregamento distribuído [N/m]
$\{q_j^e\}$	Vetor de fluxo devido ao escoamento de fluido pelo contorno do elemento “ $e$ ”
$R$	Raio menor do mancal [m]
$R_e$	Raio do munhão ou raio do eixo [m]
$R_L$	Raio do lóbulo do mancal [m]
$U$	Velocidade superficial do eixo ( $U = \omega R$ ); [m/s]
$V_f$	Contribuição da flexão no deslocamento linear do centro da seção do elemento
$u_d$	Excentricidade da massa desbalanceada
$v(x,t)$	Deflexão lateral da viga
$W$	Carga atuante no mancal [N]
$W_f$	Contribuição da flexão no deslocamento linear do centro da seção do elemento
$x,y$	Coordenadas cartesianas
$z$	Coordenada axial

#### Símbolo em letras gregas

$\Gamma^e$	Contorno do elemento “ $e$ ”
$\beta$	Deformação por cisalhamento
$\varepsilon$	Razão de excentricidade, ou excentricidade adimensional ( $\varepsilon = e/c$ )
$\varepsilon_o$	Excentricidade adimensional no ponto de equilíbrio estático
$\eta, \psi$	Coordenadas no domínio do elemento
$\kappa$	Fator de forma da seção transversal da viga
$\mu$	Viscosidade absoluta do filme lubrificante [Pa.s]

$\nu$	Coeficiente de Poisson
$\rho$	Massa específica [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_L$	Massa específica do filme lubrificante [kg/m <sup>3</sup> ]
$\theta$	Ângulo da posição angular do munhão a partir do ponto de maior espessura dentro do mancal [rad]
$\theta, z$	Coordenadas circunferencial e axial, respectivamente
$\Phi$	Ângulo de posição do munhão dentro do mancal: $\Phi = \tan^{-1}(F_y/F_x)$
$\Psi_j^e$	Função de interpolação para o método de elementos finitos para o elemento “e”
$\omega$	Rotação do eixo [rad/s]
$\Omega^e$	Domínio do elemento finito “e”

#### Subscritos

av	Médio
e	Relativo ao elemento “e”
0, 1	Ordem zero e primeira ordem; instante de tempo anterior e atual
x	Coordenada cartesiana vertical
y	Coordenada cartesiana horizontal
$\sigma$	Coordenadas x,y combinadas no domínio do elemento finito
$\sigma\beta$	Coordenadas no domínio do elemento finito

#### Sobrescritos

e	Relativo ao elemento “e”
---	--------------------------

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

MEF	Método de Elementos Finitos
FEM	Finite Element Method (Método de Elementos Finitos)
VC	Velocidade Crítica



## RESUMO

Este trabalho apresenta um procedimento computacional baseado no método de elementos finitos desenvolvido especialmente para prever o comportamento dinâmico de sistemas rotativos apoiados em mancais hidrodinâmicos. O procedimento computacional proposto permite simular diferentes tipos de rotores compostos por eixo flexível, discos massivos e mancais rígidos ou hidrodinâmicos, com perfis circulares ou elípticos. São usados elementos finitos de viga baseando-se na teoria de vigas de Timoshenko no modelo do eixo, o que permite incluir os efeitos de deformação por cisalhamento, inércia rotatória e efeito giroscópico. Um procedimento baseado no método de elementos finitos é aplicado para resolver a equação de Reynolds para fluidos incompressíveis, junto a um procedimento de perturbação linear para se calcular os coeficientes dinâmicos de força dos mancais cilíndricos e elípticos. As equações de movimento para rotores desbalanceados apoiados em mancais hidrodinâmicos são integradas usando-se o Método de Newmark para se obter a resposta no tempo. Os resultados são validados pela comparação com valores experimentais coletados em uma bancada de teste e também com valores publicados na literatura. São apresentadas algumas relações algébricas que permitem prever os parâmetros de desempenho dos mancais e a resposta desbalanceada do sistema rotor-mancal em função dos parâmetros geométricos dos mancais, tais como pré-carga, razão de esbeltez, e folga radial. É identificada uma faixa operacional dos mancais onde estas relações algébricas apresentam uma boa aproximação com os resultados computacionais. Os resultados deste trabalho servem de base para o projeto de máquinas rotativas, uma vez que permitem prever seu comportamento dinâmico para diversas condições operacionais.

Palavras-chaves: Mancal elíptico

Rotores flexíveis

Mancal radial

Lubrificação hidrodinâmica

Método de elementos finitos

## ABSTRACT

This work presents the development of a finite element procedure specially devised to predict the dynamic response of flexible rotors running on fluid film bearings. The proposed procedure can simulate many different types of rotor-bearing systems, with a flexible shaft, massive disks and rigid or fluid film circular or elliptical bearings. The shaft finite element model is based on Timoshenko Beam Theory, which includes shear effects, rotary inertia and gyroscopic moments. A finite element procedure for solution of the classical Reynolds equation for incompressible fluid films, in conjunction with a linearized perturbation procedure, is implemented to allow the computation of the dynamic force-coefficients of cylindrical and elliptical journal bearings. The finite element equations of motion for an unbalanced rotor supported on fluid film bearings are integrated by using the Newmark method, and the time-domain unbalance response is obtained. The results are validated by comparison with experimental data collected from a test rig as well as from results obtained from the literature.

Some algebraic expressions relating the bearing parameters and the unbalance response with the bearing geometric parameters (preload, Slenderness' ratio, radial clearance) are presented. A range of operating conditions is identified, where these expressions are supposed to be close to the computational results obtained by the numerical procedure. The results presented in this work are valuable for rotating machine designers since it can properly predict its dynamic response under several operation conditions.

**Keywords:** Elliptical bearing

Journal bearing

Hydrodynamic lubrication

Finite element method

## 1 INTRODUÇÃO

O projeto e o comissionamento de máquinas rotativas requerem um cuidado especial para se garantir condições seguras, estáveis e eficientes de operação. Diversos estudos baseados em procedimentos experimentais, analíticos e computacionais são utilizados com o objetivo de se analisar vários aspectos dinâmicos relacionados a rotores de máquinas de alta velocidade. Esses estudos se tornam de extrema importância na análise de equipamentos como turbinas a gás e a vapor, compressores, ventiladores industriais, bombas, exaustores, entre outros.

Com o desenvolvimento da tecnologia na área de projetos mecânicos, é notável a tendência em se projetarem máquinas cada vez mais leves e com maior potência, que normalmente estão mais sujeitas a problemas de vibração e de instabilidade. A influência dos mancais no comportamento dinâmico de máquinas rotativas e na capacidade de atenuar vibrações é estudada há vários anos em diversos trabalhos da literatura especializada (GUNTER, 1966; CORREIA, 2007).

Os mancais hidrodinâmicos têm sido amplamente aplicados em máquinas rotativas devido à sua grande capacidade de carga, habilidade de operação em altas velocidades e longevidade (HAMROCK, 1994; CHILDS, 1993). Este tipo de mancal tem uma capacidade de amortecimento que não existe nos mancais de rolamento, o que possibilita que a máquina passe por uma velocidade crítica com menores riscos (STERNLICHT e LEWIS, 1968; VANCE, 1988). O amortecimento proporcionado por mancais hidrodinâmicos permite a atenuação das forças transmitidas do sistema eixo/rotor aos mancais, a redução do nível de vibração, o aumento da faixa de operação estável do rotor e o aumento de vida útil do mancal (ENGWALL, 1991).

Os mancais hidrodinâmicos aplicados em máquinas rotativas industriais podem ser divididos basicamente em dois grupos: mancais de geometria fixa e mancais de geometria variável (ALLAIRE e FLACK, 1981). Os mancais de geometria fixa são mais simples e possuem um menor custo de fabricação, montagem e manutenção do que os de geometria variável (HAMROCK, 1994). Os mancais mais amplamente usados na indústria são os de geometria fixa com perfil cilíndrico, apresentando baixa estabilidade, mas boa capacidade de carga (CORREIA, 2007). Mancais de geometria móvel são usados quando se deseja estabilidade do equipamento sujeito a vibrações subsíncronas, isto é, abaixo da frequência de rotação. No final da década de

1980, este tipo de mancal passou a ser mais amplamente usado nos projetos de turbomáquinas de alta velocidade (ZEIDAN, 1992). A literatura científica apresenta diversos trabalhos sobre mancais cilíndricos, mas poucos sobre mancais elípticos (CORREIA, 2007).

As interações entre o eixo rotativo da turbomáquina com o fluido de trabalho, com os mancais, com os selos, com o suporte e com todos os seus elementos acoplados, tais como as palhetas e discos, devem ser incluídas na análise dinâmica de rotores para se obter confiabilidade aceitável nas previsões de seu comportamento. O estudo preliminar do comportamento de sistemas rotativos permite determinar as suas faixas de operação estável e avaliar as influências que componentes do sistema exercem sobre a resposta dinâmica do conjunto. Os mancais se tornam componentes vitais no projeto de turbomáquinas, pois devem gerar forças de reação capazes de suportar adequadamente o eixo rotativo e propiciar meios de atenuação da resposta dinâmica do conjunto rotativo em regimes de operação extremos. Esse trabalho tem como proposta principal a análise do comportamento dinâmico de rotores flexíveis apoiados em mancais radiais hidrodinâmicos de geometria fixa.

A modelagem do rotor, que inclui o eixo rotativo com discos rígidos acoplados, é efetuada utilizando-se o método de elementos finitos baseado na teoria de vigas de Timoshenko (CLOUGH e PENZIEN, 1975). Incluem-se no modelo do rotor os efeitos de cisalhamento, os momentos giroscópicos e a inércia rotatória do eixo rotativo. A equação clássica de Reynolds (PINKUS, 1987; HAMROCK, 1994) e um procedimento linearizado de perturbação (LUND, 1987) são a base da modelagem dos mancais radiais hidrodinâmicos cilíndricos e não cilíndricos considerados na análise. O método de elementos finitos é então empregado para estimar as características dinâmicas não lineares dos mancais radiais finitos incluídos na análise do sistema rotativo. O modelo dos mancais admite diversas geometrias de mancais cilíndricos e elípticos, e não são adotadas hipóteses restritivas ao modelo dos mancais, como nas teorias de mancal longo (HAMROCK, 1994) ou de mancal curto, que apresentam deficiências na análise dinâmica de sistemas rotor-mancal (KALITA e KAKOTY, 2004).

O texto deste trabalho é dividido em cinco capítulos. O capítulo 1 apresenta a introdução do trabalho, seu escopo e objetivos. No capítulo 2 é apresentada a revisão bibliográfica. Em seguida, é descrita a metodologia do procedimento computacional proposto no capítulo 3, onde são apresentados os procedimentos adotados para se modelar o sistema rotor-mancal composto pelo eixo flexível, disco rígido e mancais hidrodinâmicos. No final do capítulo 3 é apresentado um diagrama representando as etapas do procedimento computacional proposto. No capítulo 4

são apresentados os resultados obtidos através do procedimento computacional, incluindo exemplos de validação. No capítulo 5 são apresentadas as conclusões do trabalho e no capítulo 6 são listadas as referências bibliográficas. São incluídos ainda três anexos. No Anexo A são apresentados os fundamentos da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, de Rayleigh e de Timoshenko. No Anexo B apresenta-se a formulação das funções de interpolação. No Anexo C são listadas as matrizes de elementos finitos do eixo flexível usadas no modelo implementado, e no Anexo D é apresentado o algoritmo do Método Numérico de Newmark.

### **1.1 Escopo**

Esse trabalho descreve a análise do comportamento dinâmico de rotores flexíveis suportados em mancais radiais hidrodinâmicos de geometria fixa utilizando-se o método de elementos finitos. Na modelagem dos mancais radiais incluem-se mancais cilíndricos e não cilíndricos de geometria fixa. As condições de operação do sistema rotativo utilizadas nesse trabalho estão baseadas em condições operacionais comumente encontradas na prática. O eixo é modelado por elementos finitos de viga baseando-se na teoria de vigas de Timoshenko, que permite analisar a resposta da vibração orbital nos dois planos ortogonais de flexão. A formulação permite incluir os efeitos de inércia rotatória, efeito giroscópico e deformação por cisalhamento.

O cálculo dos coeficientes dinâmicos de força dos mancais é feito baseando-se na equação de Reynolds e nas equações de lubrificação de ordem zero e de primeira ordem, obtidas através da análise de perturbação (LUND,1987).

A resposta desbalanceada do sistema é obtida por meio de procedimento de integração numérica implementado sobre a sua equação de equilíbrio dinâmico. É estudada a influência dos parâmetros construtivos de mancais elípticos e cilíndricos nos seus coeficientes de força e na resposta desbalanceada do sistema rotor-mancal. Apresenta-se uma análise crítica sobre a faixa onde o modelo computacional implementado fornece resultados considerados confiáveis, baseando-se nas condições operacionais do sistema.

Embora não seja objetivo deste trabalho obter valores absolutos para os coeficientes de força ou para os níveis de vibração na resposta desbalanceada, é investigada a forma como estes valores variam em função das características construtivas e operacionais do sistema.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo desenvolver um procedimento computacional baseado no método de elementos finitos (MEF) para a análise da resposta de sistemas rotativos apoiados em mancais radiais hidrodinâmicos de geometria fixa. O eixo é modelado por elementos de viga baseando-se na Teoria de Viga de Timoshenko. Os mancais hidrodinâmicos são modelados também por elementos finitos, utilizando-se o método da perturbação aplicado na equação de Reynolds.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- i. Desenvolver e implementar um procedimento computacional eficiente baseado no MEF para representar rotores flexíveis sujeitos a cargas de desbalanceamento, apoiados em suportes flexíveis.
- ii. Desenvolver e implementar um procedimento computacional eficiente baseado no MEF para a determinação dos coeficientes dinâmicos dos mancais hidrodinâmicos de geometria fixa, sem o uso de teorias simplificadas, como os modelos de mancal curto ou de mancal longo.
- iii. Comparar os resultados do procedimento computacional proposto com resultados publicados na literatura especializada e com dados experimentais, coletados em uma bancada de testes, através da análise das frequências naturais.
- iv. Analisar a influência dos parâmetros geométricos dos mancais elípticos (pré-carga, razão de esbeltez, folga radial) nos coeficientes de força dos mancais e na resposta desbalanceada do sistema.
- v. Estabelece relações algébricas entre alguns parâmetros de desempenho dos mancais cilíndricos e elípticos, e a resposta balanceada, com os parâmetros geométricos dos mancais. Identificar as faixas operacionais onde estas relações algébricas são válidas.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As referências apresentadas a seguir são divididas em seções, para facilitar a exposição dos temas envolvidos no trabalho. Inicialmente são apresentadas as publicações que abordam os procedimentos computacionais para a modelagem de sistemas rotor-mancal, destacando-se o uso do método de elementos finitos e a evolução dos modelos de elementos de vigas aplicados aos eixos flexíveis. Em seguida destacam-se os trabalhos que fazem a análise da estabilidade de sistemas rotor-mancal através de problema de autovalor. Segue-se com a citação das publicações que apresentam procedimentos de modelagem de mancais hidrodinâmicos. As últimas seções apresentam trabalhos sobre sistemas rotativos com elementos adicionais, onde se destacam, no final, os modelos de mancais elípticos.

Observa-se que a literatura apresenta diversos trabalhos dentro desta linha, porém muitos aplicam o modelo de mancal curto, que é bastante limitado, principalmente para mancais operando com grandes excentricidades. A teoria de mancal curto é mais aplicável na predição de carga, mas é muito limitada na determinação de coeficientes de força ou no estudo da estabilidade do sistema. Outros trabalhos apresentam uma abordagem detalhada do modelo dos mancais, mas ao apresentar os resultados, fazem diversas simplificações (mancais isotrópicos, por exemplo). Em alguns casos, a modelagem dos mancais e a aplicação do procedimento numérico é detalhada e rigorosa, porém aplica-se o modelo de eixo rígido, o que também representa uma limitação. A teoria não-linear para mancais hidrodinâmicos é apresentada por diversos autores, porém os trabalhos possuem uma abordagem mais matemática, não focando em aspectos práticos de condições operacionais de máquinas rotativas.

Desta forma, observa-se uma lacuna na literatura onde raramente são analisados sistemas rotor-mancal hidrodinâmico de maneira detalhada, evitando-se hipóteses simplificadoras tanto no modelo dos mancais quanto no modelo do eixo flexível.

### 2.1 Modelagem de sistemas rotor-mancal

A análise do comportamento dinâmico de máquinas rotativas tem fomentado o desenvolvimento de procedimentos computacionais eficientes e precisos para as etapas preliminares de projeto.

Os modelos de máquinas rotativas de alta velocidade geralmente incluem rotores flexíveis apoiados em mancais hidrodinâmicos e é fundamental analisar a estabilidade do sistema (GUNTER, 1970; BUSSE *et al.*, 1980; VANCE, 1988; KRAMER, 1993; CHILDS, 1993; ABDULJABBAR *et al.*, 1997; HU *et al.*, 2000; GANESAN, 2000; ZHAO *et al.*, 2005; WENHUI *et al.*, 2007).

Os estudos dinâmicos baseados em modelos computacionais se tornam de extrema importância em diversas aplicações industriais de turbomáquinas, como turbinas a gás e a vapor, compressores, ventiladores industriais, bombas, exaustores, entre outros (STERNLICHT e LEWIS, 1968). A partir da década de 70, o método de elementos finitos começou a ser usado com extrema frequência para o desenvolvimento de modelos de rotores flexíveis e para a análise de balanceamento, estabilidade e vibração torcional de máquinas rotativas (ZORZI e NELSON, 1977; VANCE, 1988; CHILDS, 1993; ALMEIDA Jr. e FARIA, 2003; MIRANDA *et al.*, 2005).

A aplicação do método de elementos finitos na modelagem e simulação de sistemas rotativos é muito ampla na análise dinâmica de rotores. Os primeiros trabalhos nesta área são apresentados por Ruhl (1970) e Ruhl e Booker (1972), onde se aplica o método de elementos finitos na análise dinâmica de um sistema rotativo com parâmetros distribuídos. São usados elementos de viga incluindo a inércia translacional e rigidez à flexão, mas não são considerados os efeitos de inércia rotatória, momentos giroscópios, deformação por cisalhamento, carga axial, torque axial e amortecimento interno. Kirk e Gunter (1972) analisam a resposta transiente e permanente do rotor de Jeffcott com mancais elásticos montados em apoios flexíveis e amortecidos, ainda desconsiderando a flexibilidade do rotor e o efeito giroscópico do disco rotativo nas equações de movimento. Na mesma época, Thorkildsen (1972) desenvolveu um modelo mais completo onde incluiu os efeitos de inércia rotatória e momentos giroscópios.

Polk (1974) apresenta um estudo sobre velocidade crítica e velocidade limite utilizando elemento finito de viga de Rayleigh. Polk ainda apresenta neste mesmo trabalho o desenvolvimento dos elementos finitos de viga de Timoshenko, embora sem nenhum resultado numérico. Diana *et al.* (1975) apresentam seus resultados da análise de um eixo rotativo usando o método de elementos finitos, com elementos semelhantes aos de Ruhl (1970). No mesmo ano, Dimaragonas (1975) apresenta um desenvolvimento geral de elemento de viga, mas ainda excluindo o cisalhamento, e carga e torque axiais. Gasch (1976) apresentou importantes resultados em um artigo semelhante ao de Dimaragonas, porém incluindo o efeito de



excentricidade distribuída. São analisados eixos rotativos de grandes turbomáquinas através de elementos finitos e introduzida a dinâmica da fundação nas equações de movimento, usando análise modal e teste modal.

No mesmo ano, Nelson e McVaugh (1976) apresentam uma formulação para modelar o sistema rotor-mancal usando parâmetros distribuídos e elementos finitos de viga de Rayleigh, semelhantes aos de Polk (1974), incluindo os efeitos de inércia rotatória, efeito giroscópico, e cargas axiais. Este trabalho é ampliado posteriormente em Zorzi e Nelson (1977), incluindo-se o amortecimento viscoso interno do eixo. Nelson (1980) generaliza os modelos apresentados em 1976 e 1977, usando a teoria de vigas de Timoshenko, para estabelecer as funções de forma do eixo flexível, incluindo o efeito de cisalhamento, mas sem incluir o amortecimento interno. São obtidas as equações de elementos através do Princípio de Hamilton e das integrais que definem as energias potencial e cinética de cada elemento. A energia cinética leva em consideração a energia rotacional e translacional, e a energia potencial considera a energia potencial elástica devida à flexão, a energia potencial do cisalhamento e a energia devida à carga axial. Para modelar os mancais são considerados apoios isotrópicos sem efeito de amortecimento. O autor apresenta vários resultados que validam o método, comparando-os com outros obtidos na literatura. É apresentada uma comparação entre as frequências naturais de uma viga estática obtidas com elementos de viga de Euler-Bernoulli, de Rayleigh, e de Timoshenko. Posteriormente são apresentados resultados de velocidades críticas calculadas para eixos rotativos apoiados pelas extremidades.

Özgüven e Özkan (1984) aplicam também o método de elementos finitos considerando os efeitos da inércia rotatória, carga axial, efeito giroscópico, deformações por cisalhamento e amortecimento viscoso interno no mesmo modelo. Vance *et. al.*(1987) apresentam comparações de dados experimentais com resultados numéricos obtidos em uma bancada de sistema rotor-mancal, incluindo os efeitos de impedância da fundação no modelo usando o método de matriz de transferência.

Jei e Lee (1988) analisam o comportamento dinâmico de rotores assimétricos apoiados em mancais hidrodinâmicos utilizando o método de elementos finitos. O sistema rotativo é composto por um eixo assimétrico e discos rígidos e os efeitos da inércia rotatória, do cisalhamento transversal, dos momentos giroscópicos e do amortecimento histerético são incluídos na modelagem do sistema. As equações de vibração lateral do conjunto rotativo são

compactadas via técnica de redução modal de coordenadas. Na modelagem dos mancais radiais, os autores desprezam a assimetria dos coeficientes cruzados de rigidez e de amortecimento e não descrevem claramente como foram obtidos os demais coeficientes de força. O problema de autovalor do sistema giroscópico amortecido é obtido para a determinação das velocidades críticas de instabilidade do sistema rotativo. As simplificações efetuadas pelos autores na modelagem dos mancais afetam a determinação precisa das velocidades de instabilidade do rotor assimétrico suportado em mancais hidrodinâmicos, que depende fortemente dos coeficientes cruzados de rigidez. Stephenson e Rouch (1992) aplicam o método de elementos finitos para analisar um sistema rotor-mancal e fundação, usando também análise modal, que permite observar os efeitos dinâmicos da estrutura da fundação.

Mais recentemente, diversos trabalhos têm sido publicados aplicando-se o método de elementos finitos para a análise da estabilidade e da resposta no tempo de sistemas rotativos. Sundararajan (1996) investiga a resposta não-linear e a estabilidade de um sistema rotor-mancal, em regime permanente, sujeito a desbalanceamento. São considerados rotores rígidos apoiados em mancais hidrodinâmicos planos e *squeeze-film dampers* (amortecedores por esmagamento de filme fluido). Analisa-se a influência dos coeficientes de força cruzados e da inércia do fluido na resposta não-linear e na estabilidade do sistema. Na modelagem por elementos finitos são derivadas as matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento do sistema e é apresentado um procedimento numérico que reduz o número de graus de liberdade do sistema. O autor aplica a teoria de bifurcação de Hopf (HOLLIS e TAYLOR, 1986) para calcular os regimes de bifurcação de mancais hidrodinâmicos finitos, mostrando que os mancais podem entrar em regime de instabilidade mesmo abaixo das velocidades limites, o que não é observado nos modelos lineares. Na modelagem do *squeeze film damper* e do mancal plano é adotado o modelo de mancal curto. Posteriormente, o autor propõe uma análise de estabilidade de mancais planos finitos, usando uma formulação que faz uma soma ponderada das soluções analíticas do mancal curto e do mancal longo para se obter os coeficientes de força. Os resultados para mancais planos finitos não são validados experimentalmente. Embora comente-se sobre o caráter não-linear do efeito das folgas nos mancais de rolamento, este tipo de mancal não é modelado pelo autor. O modelo do sistema rotor-mancal considera o rotor e o eixo rígidos, e usa o modelo de mancal curto, o que torna o modelo bastante limitado.

Chen e Lee (1997) aplicam o método de elementos finitos em um problema de rotores flexíveis para obter a resposta desbalanceada no tempo e para identificar os coeficientes de força de

mancais de rolamento. Armentrout (1998) apresenta o desenvolvimento de uma análise transiente de rotores flexíveis suportados em mancais de filme fluido baseada no método das matrizes de transferência. Os efeitos de cisalhamento, os momentos giroscópicos e a inércia rotatória são incluídos na modelagem do eixo do rotor. A solução unidimensional aproximada da equação de Reynolds é a base do modelo de mancais cilíndricos radiais e de sapatas móveis contemplados na análise. O procedimento computacional desenvolvido por Armentrout (1998) utiliza técnica de compactação modal de coordenadas empregando os modos de vibração não amortecidos do sistema rotor-mancal-fundação. As equações de equilíbrio do sistema rotativo em coordenadas modais são integradas utilizando-se um algoritmo de integração implícita “preditor-corretor”.

Tiwari *et al.* (2000) apresentam uma investigação teórico-experimental da dinâmica não-linear de rotores rígidos horizontais apoiados em mancais de rolamento de esferas. Um modelo discreto de massa concentrada com dois graus de liberdade é empregado na representação do rotor rígido. As não linearidades da análise estão associadas aos efeitos da folga radial do mancal e do modelo de contato de Hertz para as esferas desse mancal. As equações de equilíbrio do sistema são integradas utilizando-se um algoritmo implícito de integração. A análise experimental do trabalho consiste na determinação da resposta desbalanceada e na avaliação da estabilidade dinâmica de um rotor horizontal apoiado em mancais de rolamento anisotrópicos. Os autores mostram resultados teóricos e experimentais para as regiões de instabilidade do rotor, que apresentam boa concordância. A consideração de rotor rígido representa uma limitação do modelo.

Elmadany *et al.* (2001) apresentam um modelo de elementos finitos para um sistema rotativo composto por um eixo flexível, um rotor rígido e vários mancais, incluindo no modelo do rotor os efeitos de inércia rotativa, momentos giroscópicos, amortecimento interno, deformações por cisalhamento e torque axial. São usados elementos finitos de viga de Timoshenko para gerar as equações dos elementos do eixo. Os oito coeficientes de força dos mancais hidrodinâmicos são apresentados em função do número de Sommerfeld, considerando mancais curtos. O método computacional proposto permite obter importantes informações do comportamento dinâmico do sistema, tais como a precessão, as velocidades críticas, as regiões de estabilidade e a resposta dinâmica desbalanceada. As velocidades de instabilidades são obtidas através do problema de autovalor. Os autores apresentam diversos resultados numéricos comparados com outros

extraídos da literatura. Em um deles destaca-se a comparação das velocidades de instabilidade (*threshold speed of instability*) e os autores fazem ainda uma comparação entre o modelo usando elementos de viga de Rayleigh e de Timoshenko. Conclui-se que ao se incluir o efeito de cisalhamento na análise de vibração livre, os valores das velocidades de instabilidade são reduzidos.

Hong *et al.* (2001) investigam os efeitos da deformação inicial de eixos na resposta dinâmica de sistemas rotor-mancal. Analisa-se a vibração síncrona provocada pela deformação inicial e pelo desbalanceamento, sendo incluído o efeito giroscópico. O modelo de elementos finitos tem dois graus de liberdade, correspondentes aos deslocamentos transversais, e o rotor tem três discos rígidos e dois mancais. São simuladas algumas configurações de rotor, incluindo mancais hidrodinâmicos de sapatas móveis. Os resultados mostram que o efeito da deformação inicial influencia fortemente a resposta síncrona em baixas velocidades, enquanto o efeito do desbalanceamento afeta em altas velocidades de rotação. É observado ainda que a presença de ambos efeitos pode causar dificuldade no diagnóstico de vibrações de máquinas rotativas. Os autores usam coeficientes de força pré-calculados por outros autores, não apresentando a modelagem dos mancais. Não fica claro também o tipo de elemento finito usado no modelo do eixo.

Guo e Kirk (2003) fazem um estudo dos limites de estabilidade de um sistema rotor-mancal hidrodinâmico baseado no modelo de Jeffcott (1919) incluindo o amortecimento externo, e um estudo para rotores verticais e horizontais. Os autores destacam a forte influência que o amortecimento externo tem na análise da estabilidade do sistema rotativo. É proposto um método analítico que faz várias considerações que simplificam as equações de movimento do sistema, por exemplo, rotor vertical com operação centrada em mancais curtos idênticos. É mostrado que existe uma velocidade limite (*threshold speed*) para o rotor vertical, enquanto para o rotor horizontal há uma região de operação estável, limitada entre duas regiões instáveis. Neste caso do rotor horizontal, é conduzido um procedimento numérico, sem as hipóteses simplificadoras usadas no modelo vertical, usando análise de autovalores obtidos das equações matriciais de movimento do sistema. Observa-se que, no rotor horizontal, o efeito do amortecimento externo aumenta a região de operação estável do sistema, e para alguns valores mais elevados de amortecimento externo, é possível eliminar a região de instabilidade, garantindo operação estável para o sistema rotativo em toda faixa de velocidade de rotação analisada. Guo e Kirk (2003) incluem ainda em seu trabalho uma análise do modelo estendido

do rotor de Jeffcott, onde são consideradas as massas dos mancais nas extremidades do rotor. Conclui-se que ao se incluírem as massas dos mancais, surge uma outra velocidade limite (*threshold speed*). E mesmo que várias regiões de instabilidade possam ser reduzidas ou eliminadas com o aumento do amortecimento externo, este amortecimento tem pouco efeito nas últimas velocidades de instabilidade (*threshold speed of instability*), uma vez que estas velocidades dependem da massa do mancal. Assim, a melhor forma de se obter amplas faixas de operação estável é combinar-se os efeitos do amortecimento externo ao das massas dos mancais, obtendo-se uma combinação adequada no dimensionamento do rotor de Jeffcott.

Em (GUO e KIRK, 2003b) a análise é ampliada incluindo-se o efeito da flexibilidade dos mancais, onde mostra-se como melhorar a resposta dinâmica e a resposta desbalanceada do sistema, assim como a estabilidade e a transmissão de forças. Novamente são consideradas as mesmas hipóteses simplificadoras, que restringem bastante a abrangência dos resultados obtidos. Os próprios autores admitem que os resultados são válidos para um caso especial. Nos resultados são apresentadas as regiões de estabilidade e a influência do amortecimento e da rigidez dos mancais na estabilidade do sistema. Comenta-se ainda que os coeficientes de força de mancais hidrodinâmicos têm natureza não-linear, e que cabe um estudo mais detalhado sobre o efeito desta não-linearidade.

Balantrapu (2004) apresenta um procedimento computacional de identificação de parâmetros para identificar os coeficientes de força de mancais em um sistema rotativo com eixo flexível, através da resposta desbalanceada medida próximo aos mancais. É proposta também uma formulação que permite usar o procedimento de identificação a partir de medições feitas longe dos mancais, em especial no ponto médio entre eles. O eixo flexível é modelado por elementos finitos, incluindo-se os efeitos de inércia rotatória e efeito giroscópico e para os mancais são considerados coeficientes de força lineares. São apresentados vários exemplos, incluindo mancais hidrodinâmicos de dois lóbulos. Observa-se que a massa desbalanceada necessária para se fazer as medições do deslocamento do eixo, assim como a exatidão dos resultados de medição, influenciam os resultados obtidos para os coeficientes de força. Outro fator que influencia mais consideravelmente é a rigidez do eixo, que tem grande influência nas amplitudes de vibração medidas no sistema.

Kalita e Kakoty (2004) destacam o método de elementos finitos como o mais popular para análise de vibração de sistemas rotor-mancal. É estudado o comportamento dinâmico de um

rotor apoiado em mancais hidrodinâmicos, onde usam-se elementos de viga de Timoshenko para o eixo, que inclui os efeitos de inércia rotatória, efeito giroscópico, amortecimento interno e deformação por cisalhamento. O modelo tem 4 graus de liberdade, dois deslocamentos transversais e duas rotações. São apresentados os diagramas de Campbell para diferentes valores de coeficientes de força dos mancais, incluindo análise da influência dos coeficientes de amortecimento e de rigidez cruzada dos mancais nas velocidades de instabilidade. É mostrada ainda a limitação do uso da aproximação de mancais curtos no cálculo dos coeficientes dinâmicos de mancais hidrodinâmicos.

Bode e Menezes (2005) apresentam uma análise dinâmica de um sistema rotor-mancal pelo método de elementos finitos, onde são detalhadas todas etapas da modelagem do sistema. O eixo flexível é excitado por forças de desbalanceamento e apoiado nas extremidades por mancais hidrodinâmicos, cujas forças de reação são produzidas pela pressão dinâmica do lubrificante. Os coeficientes de rigidez e de amortecimento dos mancais são obtidos através da solução numérica da equação de Reynolds. Para modelar o eixo flexível é usada a teoria de vigas de Timoshenko, incluindo o efeito giroscópico e de cisalhamento. Adota-se o método de elementos finitos com elementos de viga com 4 graus de liberdade em cada nó, 2 deslocamentos e 2 velocidades. As equações de movimento são obtidas pelas equações de Lagrange, descrevendo o movimento em dois planos. A resposta no tempo é obtida pelo método de Newmark (RAO, 1995), integrando-se numericamente as equações de movimento. Os autores obtêm uma solução numérica que permite descrever as condições dinâmicas de estabilidade do sistema rotor-mancal.

Cheng *et al.* (2008) investigam o comportamento dinâmico não-linear de um sistema rotor-mancal-selo, apresentando resultados em forma de trajetórias, mapas de Poincaré, expoentes de Liapunov, espectros de frequência e diagramas de bifurcação. São destacadas as características não-lineares dos coeficientes de rigidez e de amortecimento de mancais hidrodinâmicos e de selos mecânicos. Consideram-se mancais curtos. Para o selo adota-se o modelo não-linear de Muszynska (1986). O modelo do rotor considera apenas a vibração transversal, desprezando a vibração torcional e o efeito giroscópico, sendo adotado o modelo de rotor de Jeffcott. A solução numérica é obtida através do método de Runge-Kutta de quarta ordem, seguida de uma análise gráfica do comportamento não-linear do sistema em função da velocidade de rotação, da excentricidade, da folga no selo, e da pressão no selo. Os autores enfatizam a modelagem do selo, mas simplificam muito o modelo do eixo. O modelo dos mancais é limitado a mancais curtos e a análise numérica considera apenas um exemplo de mancal.

Rezvani (2009) faz uma análise de um sistema rotor mancal com vários graus de liberdade e apoios não-lineares. São modelados sistemas apoiados em mancais de rolamento e em suportes amortecidos (*squeeze film dampers*), considerando o modelo de mancais curtos. São mostrados os efeitos do amortecimento e do efeito giroscópico do sistema em sua estabilidade. Elhibir (2009) apresenta um modelo computacional de um alternador afixado em uma viga oca em balanço, apoiada em uma extremidade por dois mancais de rolamento. O modelo usa o método de elementos finitos com elementos sólidos tetraédricos. É analisada a resposta desbalanceada do sistema e obtidas as frequências naturais e usada análise modal. São apresentados diversos resultados numéricos e imagens ilustrando as deformações do sistema em cada modo de vibração.

Karlberg (2010) faz uma análise dinâmica de máquinas rotativas apoiadas por mancais de rolamento com folgas. O trabalho se destaca pela forma detalhada como é analisada a influência das folgas dos mancais nos seus coeficientes de rigidez, próximo da posição de equilíbrio. É observado que as frequências naturais reduzem significativamente com o aumento das folgas. Para o modelo do rotor é adotada a teoria de vigas de Bernoulli-Euler, usado o modelo de Jeffcott com disco rígido.

## **2.2 Análise da estabilidade através de problema de autovalor**

A análise da estabilidade de sistemas rotor-mancal pode também ser feita através do problema de autovalor. Gupta (1974) apresenta uma análise baseada no problema de autovalores, aplicando equações que consideram o efeito giroscópico amortecido do sistema. A formulação do problema de autovalor associados a sistemas giroscópicos amortecidos é de grande importância para a determinação de velocidades críticas e para a análise de sensibilidade de parâmetros em máquinas rotativas (PLAUT e HUSEYIN, 1972; MEIROVITCH e RYLAND, 1979; LUND, 1980; PALAZZOLO *et al.*, 1983; RAJAN *et al.*, 1986; FARIA e BARCELLOS, 1991; EHRICH, 1992; LUND, 1994). A equação do sistema rotor-mancal flexível, com efeito giroscópico amortecido é reescrita na forma de variáveis de estado (MEIROVITCH, 1974; MEIROVITCH, 1980; CHILDS e GRAVISS, 1982) para a determinação dos autovalores complexos.

Rao *et al.* (1996) analisam a estabilidade e os autovalores de sistemas rotor-mancal usando a técnica de elementos finitos e considerando coeficientes distribuídos de força e de

amortecimento nos mancais. São consideradas distribuições uniformes e parabólicas, para diferentes tipos de mancais hidrodinâmicos. Os coeficientes distribuídos são obtidos através de uma metodologia que usa o princípio do trabalho virtual (CRAGGS, 1993; TAYLOR e CRAGGS, 1994), mas que considera apenas uma distribuição uniforme ao longo da largura e do comprimento do mancal. Esta consideração é válida quando o mancal é razoavelmente longo. Porém, quando é curto, é válido considerar a distribuição parabólica (RAO *et al.*,1996). Assim, o mesmo princípio do trabalho virtual é aplicado, desta vez para se obterem as matrizes de elementos finitos dos coeficientes de força com distribuição parabólica. Estas matrizes são incluídas nas matrizes do sistema rotor-mancal, obtendo-se a equação de movimento do sistema, em forma matricial.

A modelagem do rotor é feita usando-se elementos de viga finitos, como propostos por Nelson e McVaugh (1976), incluindo-se o efeito giroscópico e o amortecimento interno. Os resultados são analisados comparando-se os autovalores e frequências naturais do sistema com coeficientes de rigidez e de amortecimento distribuídos, àqueles obtidos considerando-se os coeficientes de força concentrados, para mancais isotrópicos com razão  $L/D=0,5$  e  $L/D=1,0$ . Observa-se que, para mancais longos, quando os coeficientes de rigidez são baixos ( $10^4$  a  $10^7$  N/m), a diferença entre os resultados para os modelos de coeficientes distribuídos e concentrados é desprezível, e entre os modelos de coeficientes distribuídos uniformemente e parabólico também é pequena. Percebe-se um aumento nas frequências naturais para o modelo de coeficientes distribuídos somente para valores mais elevados de rigidez. Por fim, os autores analisam a estabilidade do sistema rotativo para diferentes tipos de mancais hidrodinâmicos, cujos coeficientes de força são obtidos de Lund e Thomsen (1978). Conclui-se que as regiões de estabilidade mudam entre as duas formulações. O modelo de coeficientes distribuídos fornece regiões de estabilidade mais amplas, quando comparado com o modelo de coeficientes concentrados. Desta forma, o modelo concentrado é mais conservativo, do ponto de vista de estabilidade, e o modelo distribuído é mais preciso.

Santana (2009) apresenta a análise da resposta complexa de um sistema rotor-mancais-fundação, onde estuda a influência do grau de anisotropia dos mancais e da estrutura de suporte na resposta do modo retrógrado de precessão. É formulado também um problema de autovalores, porém, associado à análise modal adaptada para sistemas rotativos (NORDMANN, 1982). A análise dos modos de vibração associados ao eixo rotativo e aos mancais de apoio fornece importantes dados para o desenvolvimento de métodos computacionais de análise de vibração, técnicas de



balanceamento e de monitoramento de máquinas de alta rotação (BUSSE *et al.*, 1980; BOEDO e BOOKER, 1997). O mesmo problema pode ainda incluir as propriedades dissipativas do sistema (MEIROVITCH e RYLAND, 1979; PALAZZOLO *et al.*, 1983; FARIA e BARCELLOS, 1991).

### 2.3 Mancais hidrodinâmicos

A literatura apresenta diversos estudos sobre o cálculo dos coeficientes de força nos mancais hidrodinâmicos. Ocvirk (1952) propôs a solução da equação de Reynolds para mancais curtos, desprezando o gradiente circunferencial de pressão. Pinkus (1987) faz uma revisão histórica da teoria de lubrificação hidrodinâmica e da aplicação da equação de Reynolds em tribologia, desde suas origens até o estado atual. Lund (1978, 1987) faz uma revisão do conceito de coeficientes dinâmicos e aplica o método de perturbação infinitesimal em torno da posição de equilíbrio, para calcular os coeficientes de rigidez e de amortecimento de mancais hidrodinâmicos. Lund (1987) acrescenta que esta perturbação em torno da posição de equilíbrio é válida para até 40% da folga do mancal.

Childs (1993) e Vance (1988) apresentam em seus livros diferentes modelos de mancais hidrodinâmicos, e obtêm os valores dos seus coeficientes dinâmicos. Os coeficientes são obtidos a partir de cálculos em torno da posição de equilíbrio do eixo no mancal. Rajalingham e Prabhu (1987) analisam a influência da temperatura nas características físicas dos mancais hidrodinâmicos, e concluem que a variação da temperatura do óleo na direção axial pode ser desprezada sem afetar a precisão dos resultados hidrodinâmicos para o filme de óleo.

Choy *et al.* (1991) calculam os coeficientes de rigidez não-lineares dos mancais, para perturbações de deslocamento em vários locais em torno da posição de equilíbrio. Eles mostram que para deslocamentos distantes da posição de equilíbrio, a não-linearidade das forças do filme fluido é significativa, e pode ser modelada por coeficientes de força e de amortecimento de ordem superior. Choy *et al.* (1992) analisam o efeito não-linear no comportamento dinâmico de mancais hidrodinâmicos, quando sujeitos a diversas condições operacionais, tais como alta e baixa excentricidade, altas velocidades, desalinhamento.

Zhang e Luo (1991) utilizam técnicas de ajuste de curvas usando dados experimentais da resposta em frequência para identificação dos coeficientes de rigidez e amortecimento de mancais hidrodinâmicos. Capone *et al.* (1994) propõem uma solução analítica aproximada para

a distribuição de pressão do filme de óleo em um mancal de comprimento finito. São apresentadas aproximações de primeira e segunda ordem, com diversas relações de largura e diâmetros, sendo que o modelo de segunda ordem mostra uma boa aproximação em relação o modelo de mancal finito calculado numericamente.

Qiu e Tieu (1996) calculam os coeficientes dinâmicos em diferentes valores de perturbação. Eles concluem que as perturbações nas velocidades e deslocamentos devem estar entre 5% e 4%, respectivamente, para se garantir uma diferença de 2,5% entre os valores de coeficientes obtidos pelos métodos de perturbação finita e infinita. Furukawa *et al.* (1996) estudam os coeficientes de força nos mancais hidrodinâmicos e concluem que a não linearidade do filme fluido produz grandes diferenças entre os valores calculados e os medidos experimentalmente, em especial na região de alta excentricidade. Chu *et al.* (1998) analisam a não-linearidade do filme fluido e observam que os coeficientes lineares dos mancais hidrodinâmicos modelados são válidos para perturbações de deslocamento da ordem de 0,06.

Bachschnid e Vania (2002) observam vibrações em uma frequência duas vezes maior que a rotação da máquina, na presença de efeitos não-lineares em mancais hidrodinâmicos. Os autores destacam a importância de se monitorar o segundo harmônico para se diagnosticarem falhas em turbo-máquinas. Sawicki e Rao (2004) analisam o caráter não-linear dos coeficientes de força de mancais hidrodinâmicos para diferentes números de Sommerfeld (SOMMERFELD, 1904) e razões de esbeltez do mancal  $L/D$ . São apresentadas as diferentes formas de se aplicar o método de perturbação para a obtenção dos coeficientes de força lineares e não-lineares. Os autores destacam ainda que os coeficientes de força lineares apresentam precisão aceitável até uma excentricidade de 0,4 vezes o valor da folga do mancal (LUND, 1987). Hirani (2005) aplica técnicas de algoritmos genéticos na modelagem de lubrificação hidrodinâmica para o projeto otimizado de mancais.

Couto (2006) faz um estudo teórico-experimental que investiga o comportamento de mancais radiais hidrodinâmicos sujeitos a carregamentos estáticos, dinâmicos e a desalinhamentos. É aplicado o método de volumes finitos para a integração da equação de Reynolds que governa o problema de lubrificação. Faria *et al.* (2006) apresentam um procedimento baseado no método de elementos finitos para a solução das equações de lubrificação em mancais radiais cilíndricos hidrodinâmicos, obtidas a partir da equação clássica de Reynolds. Os resultados mostram as limitações da aplicabilidade da teoria de mancais curtos, especialmente quando operam com

grandes excentricidades. Mostram-se também os limites da aplicação da teoria de mancais longos (HAMROCK, 1994), onde  $L/D=2$ .

Yan *et al.*, (2010) apresentam um modelo analítico e um método de cálculo dos coeficientes de rigidez e de amortecimento de mancais hidrodinâmicos de sapata móvel, e fazem uma comparação com resultados experimentais da literatura (KOSTRZEWSKY e FLACK, 1990). Seu modelo inclui um rotor rígido simétrico apoiado em dois mancais de sapata móvel idênticos, de cinco sapatas cada. É usado o método de Newton–Raphson para se calcular a posição de equilíbrio do eixo e das pás. Apresenta-se também um modelo reduzido que se mostra eficiente para o cálculo dos coeficientes dinâmicos, mas que não apresenta bons resultados para a análise de estabilidade e das frequências naturais amortecidas. Observa-se nos resultados que o momento de inércia das pás, a velocidade e o fator de pré-carga têm grande influência na estabilidade do sistema, e que a faixa de operação estável pode ser aumentada ao se aumentar o fator de pré-carga.

#### **2.4 Sistemas rotativos com elementos adicionais**

A análise de estabilidade de sistemas mancal-rotor é bastante variada na literatura especializada. É comum encontrar trabalhos cuja originalidade recai na inclusão de alguns parâmetros ou elementos específicos no conjunto, como mancais híbridos, mancais de materiais viscoelásticos, acoplamentos, selos mecânicos.

Um trabalho a destacar sobre a análise de estabilidade do sistema rotor-mancal de mancais híbridos é o de Gomez-Mancilla *et al.* (2005), onde é modelado um sistema composto por um rotor de Jeffcott apoiado em mancais hidrodinâmicos cilíndricos híbridos. São considerados ambos modelos rígido e flexível de Jeffcott, e comparados os níveis de vibração, e a estabilidade do sistema quando sujeito a diferentes níveis de pressão de alimentação do lubrificante nos mancais. Os autores mostram como se pode melhorar a estabilidade do sistema com o aumento da pressão de alimentação, provocando uma redução no ângulo de posição e um aumento da excentricidade nos sistemas modelados, que inclui mancais hidrodinâmicos longos cilíndricos. Este efeito também favorece a faixa de operação estável do sistema, elevando a velocidade limite de operação estável (*threshold speed of instability*). Os resultados obtidos mostram que o efeito da pressão de alimentação nos mancais na estabilidade do sistema é considerável para

rotores rígidos ou com elevada rigidez. À medida em que a rigidez reduz, não se percebe muita variação na estabilidade com o aumento da pressão de alimentação. Outro resultado importante deste trabalho é que o aumento da pressão de alimentação do lubrificante não é interessante quando o sistema está cruzando uma velocidade crítica. Apenas em casos particulares é possível obter alguma redução na amplitude de vibração, e mesmo assim, quando a velocidade de operação estiver fora da faixa de velocidades críticas. Portanto, um sistema de controle ativo de pressão é recomendado, para se obter os melhores resultados em função dos parâmetros operacionais do sistema rotativo. Comenta-se também que outros modelos de mancais, como os elípticos, de múltiplos lóbulos, de sapata móvel, são intrinsecamente mais estáveis do que os mancais cilíndricos, analisados no trabalho.

A análise de estabilidade do sistema com mancais de materiais viscoelásticos é apresentada em Espíndola e Floody (1999), Saldarriaga (2007) e Bavastri *et al.*(2008). Tapia e Cavalca (2002) e Tadeo (2003) analisam os efeitos de alguns modelos de acoplamentos flexíveis e rígidos, inserindo-os em modelos de elementos finitos do sistema rotativos. Al-Hussain (2003) analisa o efeito do desalinhamento angular na estabilidade de dois rotores rígidos ligados por um acoplamento flexível. O modelo contempla ainda um disco rígido em cada rotor, que se apóia em mancais hidrodinâmicos. O autor apresenta as regiões de estabilidade do sistema e sua relação com a rigidez do acoplamento e com o ângulo de desalinhamento.

Wang *et al.* (2010) fazem uma análise de um compressor centrífugo de alta velocidade, com mancais hidrodinâmicos a ar, com selo mecânico de labirinto. É usado o modelo de rotor rígido de Jeffcott para modelar o eixo e o disco que representam o compressor, além do modelo de Muszynska (1986) para as forças do selo.

Faria e Miranda (2012) apresentam um procedimento de elementos finitos aplicado na análise dos parâmetros de desempenho de selos a gás. Lavainne (2003) e Vincent (2003) fazem uma análise determinística e probabilística da sensibilidade de desempenho de um compressor às variações geométricas das suas pás. Ambos apresentam os resultados em termos de alterações na eficiência de compressão do equipamento.

Lazarus *et al.* (2010) fazem uma análise dinâmica da vibração em máquinas rotativas assimétricas, utilizando elementos finitos tridimensionais (3D), baseando-se na teoria modal. São incluídos no modelo um estator e um acoplamento, permitindo uma análise detalhada da estabilidade do sistema e sua relação com os autovalores. Os resultados teóricos são comparados

com medições experimentais realizadas em uma bancada de testes com um rotor assimétrico apoiado em mancais anisotrópicos.

## 2.5 Mancais elípticos

A literatura apresenta diversos trabalhos sobre modelagem de mancais cilíndricos, mas há poucos trabalhos que investigam detalhadamente os mancais elípticos (SINGH e GUPTA,1982). As primeiras publicações sobre mancais elípticos que se destacam são Pinkus (1956; 1956b), onde o autor apresenta uma análise detalhada sobre mancais elípticos, incluindo parâmetros como capacidade de carga, coeficiente de atrito e vazão, para diferentes valores de excentricidade, fator de carga e razão  $L/D$ . Outro trabalho importante na época foi apresentado por Wilcock (1961), que analisa vários tipos de mancais deslocados ortogonalmente, incluindo mancais elípticos. Seu trabalho é limitado pelo fato de não terem sido considerados os coeficientes de amortecimento.

Sternlicht (1964) apresenta uma análise de regime permanente para mancais elípticos, usando coeficientes de rigidez e de amortecimento de mancais elípticos com fatores geométricos variados. Middleton (1973) apresenta diagramas de capacidade de carga, ângulo de atitude e coeficientes de rigidez e de amortecimento para mancais elípticos com fatores de 0,6 e  $L/D=0,5$ . Singh (1978) faz uma análise estática e dinâmica de mancais elípticos com  $L/D=1$ , considerando rotores rígidos e flexíveis. Kumar *et al.* (1980) apresentam dados detalhados para o projeto de mancais hidrodinâmicos elípticos (dois lóbulos). É usado o método de perturbação linear para o cálculo dos coeficientes do mancal, aplicando-se a equação de Reynolds para filme fluido, com algumas simplificações nas condições de contorno. São apresentados resultados para os coeficientes de rigidez e de amortecimento do mancal, além de dados sobre parâmetro de atrito, de aumento de temperatura, e região de equilíbrio.

Singh e Gupta (1982) apresentam um estudo analítico dos efeitos do fator de carga, da razão  $L/D$  e da flexibilidade do eixo nos limites de estabilidade de mancais elípticos, e destacam que os mancais elípticos são adequados para rotores rígidos e moderadamente flexíveis. Neste trabalho, os autores aplicam a equação de Reynolds a cada lóbulo do mancal elíptico, e resolvem a equação separadamente, por lóbulo, usando o método de diferenças finitas. Os resultados são válidos para mancais alinhados, onde o perfil de pressões é simétrico. São levados em

consideração todos os coeficientes de força dos mancais, isto é, os coeficientes de rigidez e de amortecimento, incluindo os coeficientes cruzados.

Zhang *et al.* (1999) analisam os efeitos da não-linearidade das forças do filme fluido na resposta desbalanceada de um rotor de Jeffcott apoiado em mancais elípticos. É destacado o caráter não-linear das forças do filme fluido. Os autores comparam os resultados da resposta desbalanceada gerada pela teoria linear e não-linear para avaliar a aplicabilidade da teoria linear. Observa-se a grande influência do desbalanceamento nos resultados comparados, mostrando a importância de se considerar as não-linearidades quando o desbalanceamento do sistema é elevado.

Nas últimas décadas tem-se publicado pouco sobre mancais elípticos, e os trabalhos recentes que merecem destaque são comentados a seguir.

Shen *et al.* (2006) apresentam um modelo rápido e preciso que calcula as forças de um mancal hidrodinâmico, usando o método variacional. O modelo analisa o comportamento dinâmico não-linear de um rotor rígido apoiado em mancais elípticos, considerando tanto o rotor balanceado como o não-balanceado. Os autores fazem uma revisão histórica dos trabalhos que investigam este caráter aperiódico e caótico da vibração em sistemas dinâmicos de alta rotação, onde se comenta ainda que os coeficientes dinâmicos lineares trazem informações de estabilidade válidas apenas para rotores balanceados. São destacados os métodos numéricos de elementos finitos e de diferenças finitas como os mais precisos, mas ao mesmo tempo, os que mais exigem recursos computacionais e tempo de processamento. Desta forma, os autores propõem um novo modelo numérico para calcular as forças do filme fluido, para investigar a dinâmica não-linear de um sistema rotor-mancal. O mancal modelado é formado por dois lóbulos de  $150^\circ$  cada, e considera-se apenas o movimento radial do rotor. O novo modelo proposto baseia-se na teoria variacional (ROHDE e MALLISTER, 1975), gerando um problema de minimização de energia, o que reduz o problema bidimensional para unidimensional, reduzindo consideravelmente o custo computacional. Como as forças do filme fluido são calculadas para cada lóbulo, o método proposto é eficiente tanto para mancais cilíndricos quanto para mancais de vários lóbulos, incluindo os mancais elípticos. O método é válido não apenas para mancais curtos e longos, mas também para mancais finitos. São apresentados resultados numéricos e gráficos que mostram órbitas, ciclos limites, diagramas de bifurcação (HOLLIS e TAYLOR, 1986) e mapas de Poincaré.

Yan-Jun *et al.* (2006) analisam o comportamento dinâmico não-linear de um rotor apoiado em mancais hidrodinâmicos finitos, incluindo mancais elípticos. Para o cálculo dos coeficientes de força dos mancais usa-se o método de elementos finitos com uma abordagem variacional, que permite reduzir o custo computacional e melhorar a exatidão numérica do método, segundo os autores. São considerados os efeitos não-lineares das forças produzidas pelo filme fluido e sua influência na não-linearidade do movimento do sistema. Aplica-se o método de predição e correção juntamente com o método de Newton-Raphson para se calcular a posição de equilíbrio e as velocidades críticas. A limitação do modelo está na consideração de eixo rígido e sua modelagem não é detalhada pelos autores.

Correia (2007) apresenta uma análise de desempenho de mancais hidrodinâmicos elípticos usando o método de elementos finitos. São obtidos os coeficientes de rigidez e de amortecimento para diversas condições de trabalho, além de obter curvas de características de desempenho estático e dinâmico, tais como capacidade de carga e coeficientes dinâmicos de força, em função de parâmetros operacionais e do número de Sommerfeld. O autor destaca que para um número de Sommerfeld alto, os mancais cilíndricos são inadequados.

Raghunandana (2007) propõe um método inverso para se calcular os coeficientes de força e de amortecimento de mancais elípticos, a partir de um banco de dados gerado para uma certa razão de excentricidade, e é feito um ajuste de curva para gerar uma função contínua destes dados. É apresentada a equação de Reynolds modificada (DIEN e ELROD, 1983), que considera a variação da viscosidade do fluido em função da pressão, isto é, fluido não-newtoniano. A equação é adimensionalizada e resolvida numericamente usando o método de diferenças finitas, considerando o regime permanente e condições de contorno simplificadoras.

### 3 METODOLOGIA

Nesse capítulo é apresentada a metodologia adotada na implementação do procedimento computacional que permite obter os resultados do comportamento dinâmico de sistemas rotor-mancal hidrodinâmico. Inicialmente apresenta-se a formulação por elementos finitos do eixo rotativo, utilizando-se a teoria de vigas de Timoshenko. Em seguida, é apresentada a descrição do problema de mancal hidrodinâmico radial elíptico e as equações de lubrificação da Teoria da Lubrificação, que permitem obter a formulação por elementos finitos dos coeficientes de força destes mancais. Posteriormente é descrito o procedimento para se modelar o sistema rotor-mancal hidrodinâmico por elementos finitos, obtendo-se a equação do movimento. Apresenta-se o método numérico de integração no tempo adotado para se obter a solução numérica da equação do movimento do sistema. Finalmente, é apresentado um diagrama descrevendo as principais etapas do procedimento computacional completo.

O modelo do sistema rotor-mancal é ilustrado esquematicamente na Figura 3.1, onde observa-se um eixo circular flexível apoiado nas extremidades e com um disco massivo acoplado. Os apoios são representados pelos coeficientes de rigidez  $K$  e de amortecimento  $C$  dos mancais.

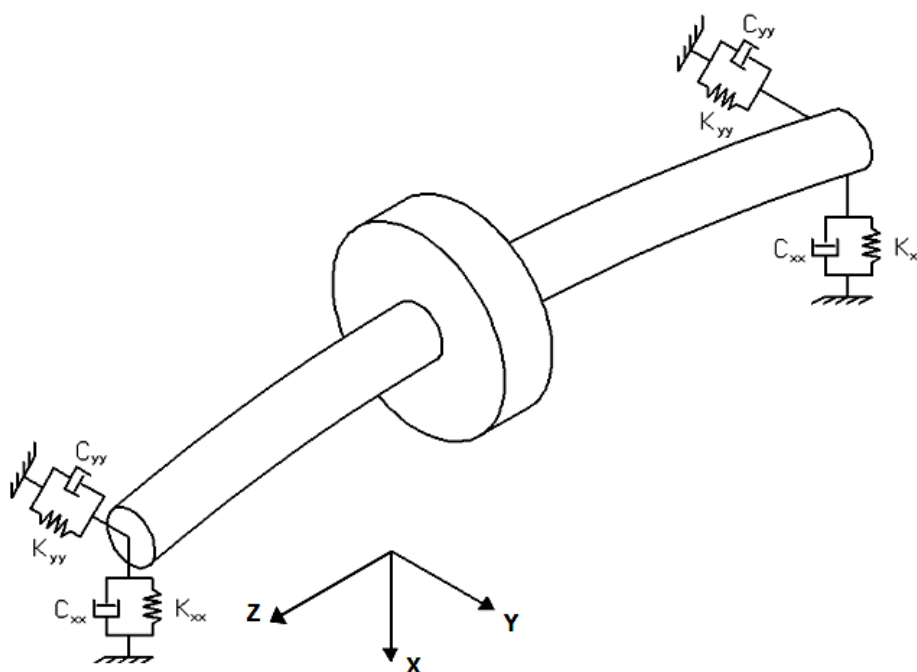


Figura 3.1 – Sistema rotor-mancal

Os modelos adotados para o rotor flexível e para os mancais hidrodinâmicos cilíndricos e



elípticos são baseados em teorias que apresentam algumas hipóteses simplificadoras. Estas hipóteses são listadas a seguir:

i) Modelo do Eixo flexível

- não inclui efeitos de torção ou de amortecimento interno;
- considera o eixo homogêneo, isotrópico e inicialmente alinhado;
- carregamento transversal; sem carga axial;
- desconsiderado o movimento axial das seções transversais

ii) Modelo do disco massivo

- considera o disco rígido e homogêneo;
- a linha de centro do disco coincide com a linha de centro do eixo (condição inicial)

iii) Modelo dos mancais hidrodinâmicos

- considera mancais de geometria fixa, com perfil cilíndrico ou elíptico;
- a linha de centro coincide com a linha de centro do eixo (condição inicial)
- Filme fluido
  - escoamento em regime laminar, bidimensional nas direções axial e circunferencial;
  - fluido newtoniano, isotérmico, isoviscoso, incompressível;
  - desconsiderada a inércia do fluido;

iv) Modelo do sistema rotor-mancal

- Desconsiderados os efeitos de vibração provocados por desalinhamento de montagem, folgas, roçamento, rompimento do filme fluido, cavitação

### 3.1 Modelagem do Rotor Flexível

O modelo do rotor flexível implementado neste trabalho adota o método de elementos finitos (MEF), através de elementos de eixo (NELSON, 1980) de Timoshenko. Nelson (1980) utiliza a teoria de vigas de Timoshenko para obter as equações de equilíbrio para um eixo circular flexível suportado em apoios elásticos, considerando o efeito do cisalhamento, momento giroscópico e inércia rotatória. Os detalhes sobre a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, Rayleigh e Timoshenko são apresentados no Anexo A. O desenvolvimento da formulação através de

elementos finitos é apresentado a seguir, e as matrizes de elementos finitos obtidas por esta formulação são listadas no Anexo C. Considere um elemento finito de comprimento  $l$  com oito graus de liberdade (Figura 3.2).

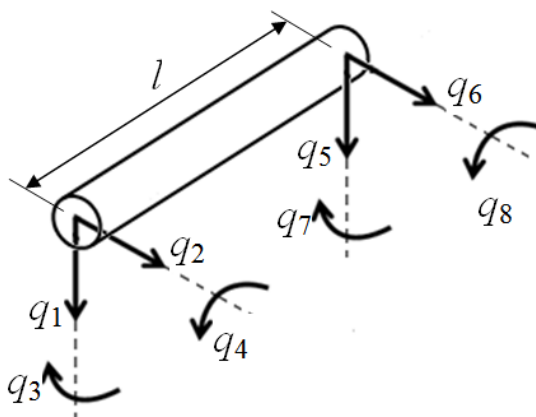


Figura 3.2 – Representação de um elemento finito do eixo

A variável  $q$  representa o vetor deslocamento generalizado, onde  $q_1$  e  $q_2$  representam o movimento de translação de um nó do elemento finito, nas direções dos eixos de coordenadas retangulares, enquanto  $q_3$  e  $q_4$  representam as rotações em torno dos eixos de coordenadas. As demais componentes são análogas, representando os mesmos movimentos para o nó oposto.

Para representar a translação e a rotação de uma seção qualquer do elemento, definem-se  $(V, W)$  como o deslocamento linear do centro da seção do elemento, onde são incluídas as contribuições da flexão ( $V_f, W_f$ ) e do cisalhamento ( $V_c, W_c$ ). Aplicam-se funções de interpolação clássicas para vigas de Timoshenko na flexão (ANEXO B).

$$\begin{Bmatrix} V(s, t) \\ W(s, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1^x & 0 & 0 & \psi_2^x & \psi_3^x & 0 & 0 & \psi_4^x \\ 0 & \psi_1^y & -\psi_2^y & 0 & 0 & \psi_3^y & -\psi_4^y & 0 \end{bmatrix} = \{q_e(t)\} =$$

$$[D(s)]\{q_e(t)\}$$

$$\begin{Bmatrix} \beta(s, t) \\ \Gamma(s, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^x & 0 & 0 & \phi_2^x & \phi_3^x & 0 & 0 & \phi_4^x \\ 0 & -\phi_1^y & \phi_2^y & 0 & 0 & -\phi_3^y & \phi_4^y & 0 \end{bmatrix} = \{q_e(t)\} =$$

$$[E(s)]\{q_e(t)\},$$

onde

$$\{q_e(t)\}^T = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \},$$

e as funções de interpolação  $\psi_i$  e  $\phi_i$ ,  $i=1,2,3,4$ , representam os modos de deslocamentos, sendo que cada função está associada ao deslocamento unitário de uma das coordenadas, com todas as demais coordenadas com deslocamento restringido a zero.  $[D]$  e  $[E]$  representam as matrizes das funções de interpolação de deslocamentos lineares e de deslocamentos angulares, respectivamente. Para se considerar os efeitos de cisalhamento transversal, considera-se o eixo com seção transversal circular, e o fator de forma do cisalhamento transversal médio  $\bar{K}$  pode ser determinado pela expressão (COUPER, 1966):

$$\bar{K} = K_x = K_y = \frac{6(1 + \nu)}{7 + 6\nu}$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Aplicando-se o Princípio de Hamilton, obtém-se as equações do movimento de um elemento finito do eixo. Fazendo-se a primeira variação funcional

$$\vartheta = \int_{t_1}^{t_2} (T - V + \bar{W}) dt$$

onde  $T$ ,  $V$  e  $\bar{W}$  representam, respectivamente, a energia cinética, a energia potencial elástica e o trabalho das forças externas, obtém-se a relação

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - V) + \delta\bar{W}] dt = 0$$

A energia cinética do elemento considera as parcelas de translação e de rotação do movimento.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l M \{ \dot{v} \quad \dot{w} \} \left\{ \frac{\dot{v}}{\dot{w}} \right\} ds + \frac{1}{2} \int_0^l I_{dm} \{ \dot{\beta} \quad \dot{\Gamma} \} \left\{ \frac{\dot{\beta}}{\dot{\Gamma}} \right\} ds - \Omega \int_0^l I_p \dot{\beta} \quad \dot{\Gamma} ds + \frac{1}{2} \int_0^l I_p \Omega^2 ds$$

onde  $l$  é o comprimento do elemento;  $M$  representa a massa por unidade de comprimento;  $I_{dm}$  é o momento diametral médio de inércia de massa por unidade de comprimento;  $I_p$  é o momento polar de inércia por unidade de comprimento;  $\Omega$  é a velocidade de rotação do rotor.

A energia de deformação elástica devido à flexão e ao cisalhamento é descrita como

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l E \{ V_f'' \quad W_f'' \} \begin{bmatrix} I_y & 0 \\ 0 & I_x \end{bmatrix} \left\{ \frac{V_f''}{W_f''} \right\} ds + \frac{1}{2} \int_0^l AG \{ V_c' \quad W_c' \} \begin{bmatrix} K_y & 0 \\ 0 & K_x \end{bmatrix} \left\{ \frac{V_c'}{W_c'} \right\} ds$$

onde  $V_f$  e  $W_f$  são as contribuições da flexão no deslocamento linear do centro da seção transversal do elemento;  $V_c$  e  $W_c$  são as contribuições do cisalhamento neste deslocamento;  $K_x$  e  $K_y$  são os coeficientes de cisalhamento;  $E$  e  $G$  são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal;  $I_y$  e  $I_z$  são os momentos de inércia de área;  $A$  é a área da seção transversal. O sinal de apóstrofo indica diferenciação em relação à posição.

As equações do movimento são obtidas pelo Princípio de Hamilton através da relação

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - V) + \delta\bar{W}] dt = 0$$

onde

$$\delta\bar{W} = \int_0^l \left\{ \frac{\delta V}{\delta W} \right\}^T \{F^e\} ds$$

é o trabalho virtual das forças externas e  $\{F^e\}$  é o vetor força generalizada.

Substituindo-se as funções de interpolação (ANEXO B) nas expressões da energia de deformação elástica e de energia cinética do elemento leva às matrizes de elementos finitos (ANEXO C). Uma vez obtidas as matrizes do sistema, a equação do movimento obtida pela aplicação do Princípio de Hamilton terá a forma

$$([M^e] + [N^e])\{\ddot{q}_e\} - \Omega[G^e]\{\dot{q}_e\} + [K^e]\{q_e\} = \{F^e\}$$

onde  $[M^e]$ ,  $[N^e]$ ,  $[G^e]$  são as matrizes locais da inércia de translação, rotação e de efeito giroscópico, respectivamente. Para o modelo do rotor flexível, composto pelo eixo flexível e o disco massivo rígido (Figura 3.1), basta usar as propriedades geométricas do disco nas matrizes de inércia  $[M^e]$  e  $[N^e]$ , e de efeito giroscópico  $[G^e]$  no elemento correspondente à posição do disco no rotor.

### 3.2 Modelagem do Mancal Radial Elíptico

A Figura 3.3 apresenta de maneira esquemática um mancal hidrodinâmico elíptico e seus parâmetros geométricos.

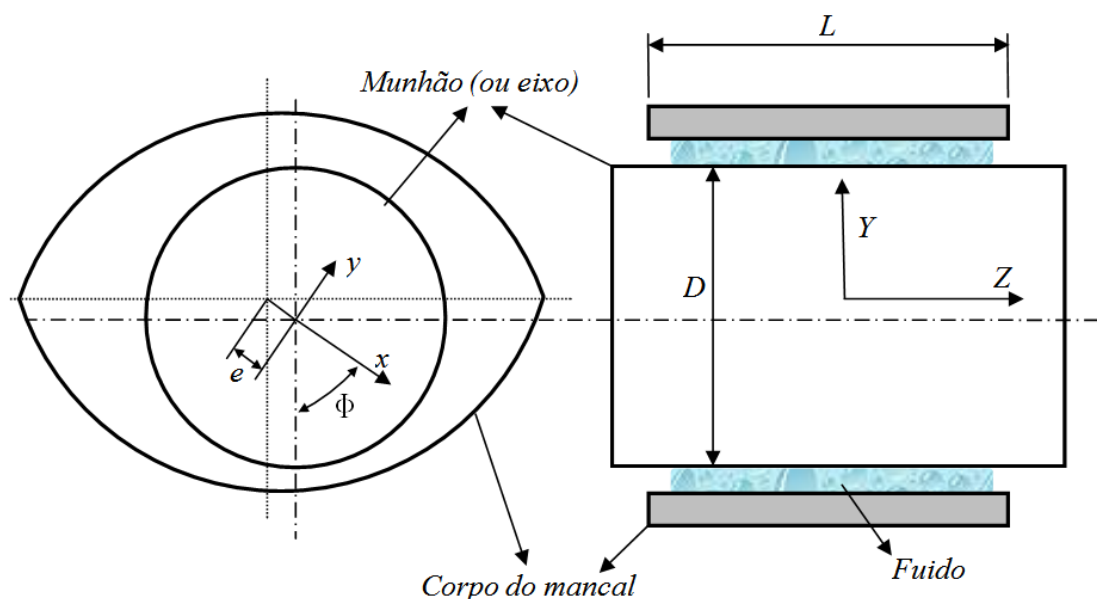


Figura 3.3 – Desenho esquemático do mancal elíptico e seus parâmetros geométricos

O munhão é a parte rotativa do mancal, normalmente corresponde ao próprio eixo, no trecho apoiado no mancal. O tamanho do mancal é definido pelo comprimento  $L$  e pelo diâmetro  $D$ . O centro do munhão está na interseção das linhas traço-ponto, e o centro do mancal está na interseção das linhas pontilhadas. A excentricidade do mancal é definida como a distância entre o centro do mancal e o centro do munhão, representada por  $e$ . A folga radial do mancal, definida como a diferença entre o raio do mancal e o raio do munhão é representada por  $c$  (Figura 3.4). A razão de excentricidade é o adimensional definido como  $\varepsilon = e/c$ , podendo variar de zero a um. O ângulo de posição do mancal,  $\phi$ , pode ser calculado pela expressão  $\phi = \tan^{-1}(F_y/F_x)$ , onde  $F_y$  e  $F_x$  são, respectivamente, as componentes vertical e horizontal da força de reação  $F$  do mancal, gerada pela ação hidrodinâmica do filme fluido. O mancal radial de perfil elíptico, ou “mancal elíptico”, possui um perfil formado por dois arcos de circunferência, chamados de lóbulos, que não são concêntricos (Figura 3.4). Nesta figura, o centro geométrico dos lóbulos (ponto  $O_L$ ), está posicionado sobre o centro geométrico do eixo (ponto  $O$ ), o que difere basicamente da Figura 3.3, onde o centro do eixo está deslocado, como ocorre quando o eixo está girando e se desloca para uma posição de equilíbrio.  $R$  representa o raio menor do mancal;  $R_e$  representa o raio do munhão ou raio do eixo;  $R_L$  representa o raio do lóbulo do mancal, ou seja, o raio de cada lóbulo que compõe o mancal elíptico.

A pré-carga ( $M_p$ ) do mancal elíptico indica o grau de “elipsidade” do mancal, e é dada pela

expressão  $Mp=(C_b - c)/c$ . O caso particular onde  $Mp=0$  representa o mancal cilíndrico.

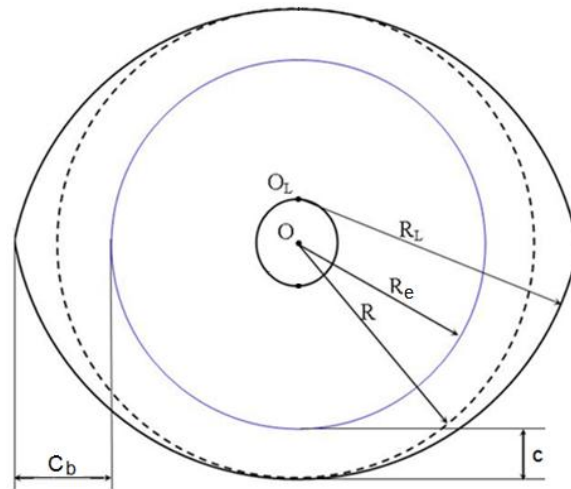


Figura 3.4 - Desenho esquemático do perfil de um mancal radial elíptico

A Figura 3.5 mostra o campo de pressão no mancal hidrodinâmico cilíndrico, girando no sentido anti-horário. Percebe-se que as maiores pressões são formadas na região inferior, ligeiramente deslocadas para a direita, para sustentar a carga do eixo, representada por  $W$ . A distância mínima entre o eixo e o mancal é representada por  $h_0$ .

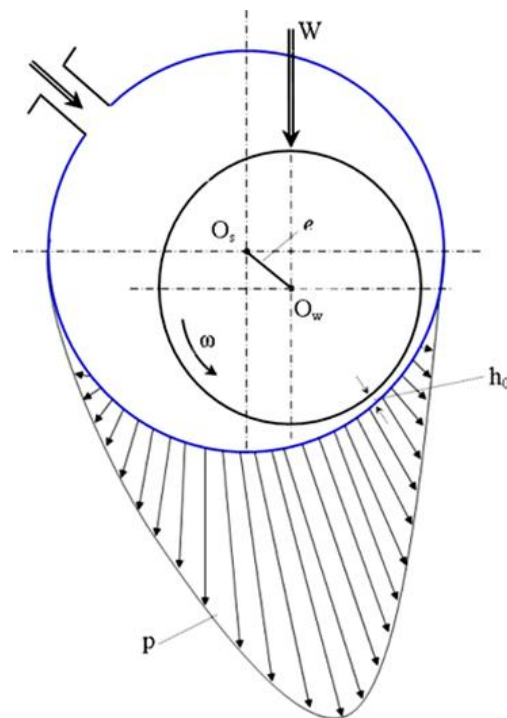


Figura 3.5 - Distribuição da pressão hidrodinâmica no mancal cilíndrico (LANG e STEINHILPER, 1978)

Na Figura 3.6 é representado o mesmo campo de pressão, porém para o mancal de perfil elíptico. Observa-se que há a formação do campo de pressão também na metade superior do mancal que, embora tenha um valor relativamente pequeno se comparado com o campo gerado na parte inferior, ajuda no equilíbrio hidrodinâmico (CORREIA, 2007). A ação dos dois campos de pressão dos mancais elípticos aumenta a rigidez, melhora o amortecimento e reduz o aquecimento do lubrificante de maneira mais eficiente do que nos mancais cilíndricos (SEHGAL, 2010).

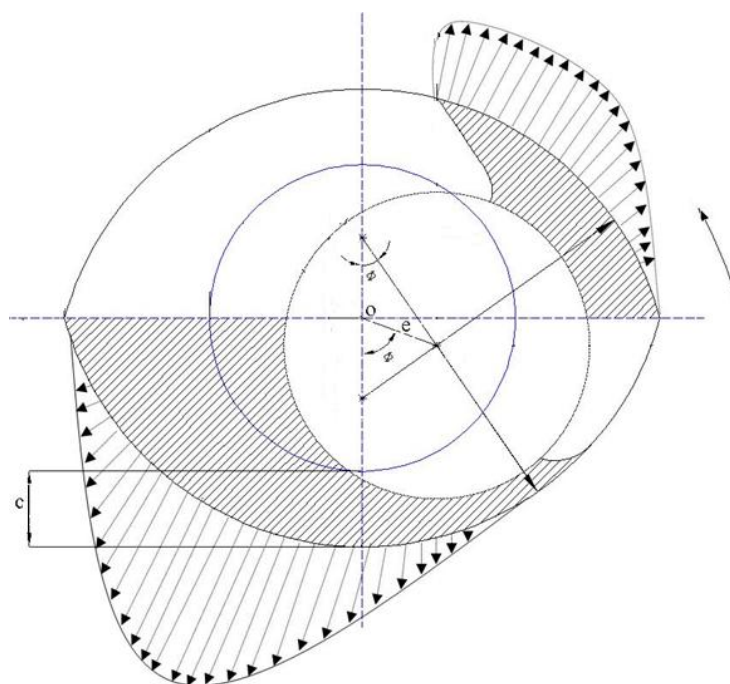


Figura 3.6 - Distribuição da pressão hidrodinâmica no mancal elíptico (Adaptado de CORREIA, 2007)

### 3.2.1 Equações de Lubrificação

A equação clássica de Reynolds que descreve o escoamento de um filme fluido incompressível, isotérmico e isoviscoso pode ser escrita no sistema de coordenadas cilíndricas da seguinte forma (HAMROCK, 1994):

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\rho_L h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_L h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{U}{R} \frac{\partial(\rho_L h)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho_L h)}{\partial t} \quad (3.1)$$

onde:

$R$  = raio do eixo;

$p$  = pressão hidrodinâmica;

$\rho_L$  = massa específica do lubrificante;

$h$  = espessura do filme fluido;

$\mu$  = viscosidade absoluta do lubrificante;

$U$  = velocidade superficial do eixo ( $U = \omega R$ );

O domínio do escoamento do filme fluido é descrito por  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $-L/2 \leq z \leq L/2$ . A distribuição de pressão hidrodinâmica é periódica ao longo da direção circunferencial,  $p(\theta, z, t) = p(\theta + 2\pi, z, t)$ . As laterais do mancal estão à pressão atmosférica  $p_a$ ,  $p(\theta, L/2, t) = p(\theta, -L/2, t) = p_a$ . A condição de Meio Sommerfeld é utilizada no cálculo do campo de pressão do mancal cilíndrico (HAMROCK, 1994), onde usa-se somente do intervalo de  $0 \leq \theta \leq \pi$ , concentrando-se a análise da pressão na região convergente, ou seja, não considerando a área de cavitação (ou pressão negativa). No mancal elíptico é desconsiderada apenas a região de cavitação.

A expressão que representa a espessura do filme fluido “ $h$ ” é dada pela equação (3.2), onde  $c$  representa a folga radial,  $e_x$  e  $e_y$  representam as excentricidades do mancal e  $Mp$  a pré-carga.

$$h = c + e_x(t) \cos(\theta) + e_y(t) \sin(\theta) + cMp \|\sin\theta\| \quad (3.2)$$

Para o cálculo dos coeficientes dinâmicos de força do mancal são utilizadas as equações de lubrificação de ordem zero e de primeira ordem, obtidas através da análise de perturbação do sistema (LUND, 1987). A posição de equilíbrio do eixo ( $e_{x_0}, e_{y_0}$ ) é perturbada por movimentos de pequena amplitude ( $\Delta e_x, \Delta e_y$ ) com uma frequência de excitação  $\omega$  (FARIA *et al.*, 2006).

Desta forma, a espessura do filme é dada por:

$$h = h_0 + (\Delta e_x h_x + \Delta e_y h_y) e^{i\omega t} = h_0 + \Delta e_\sigma h_\sigma e^{i\omega t}; \quad \sigma = x, y \quad (3.3)$$

onde:

$h_0$  = espessura do filme estacionário ou de ordem zero



$$h_x = \cos(\theta);$$

$$h_y = \sin(\theta);$$

$$\sigma = x, y;$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Pequenas variações na espessura do filme causam alterações no campo de pressão hidrodinâmica. Este campo perturbado de pressão hidrodinâmica pode ser representado pela equação (3.4), se considerarmos uma análise linear de perturbação.

$$p(\theta, t) = p_o(\theta, t) + (\Delta e_x p_x + \Delta e_y p_y) e^{i\omega t} = p_o + \Delta e_\sigma p_\sigma e^{i\omega t} \quad (3.4)$$

onde:

$p_o$  = pressão estacionária, campo de pressão de ordem zero;

$p_x$  e  $p_y$  = campo de pressão de primeira ordem.

Substituindo as equações (3.3) e (3.4) na equação (3.1), obtêm-se as equações de lubrificação de ordem zero e de primeira ordem, conforme representado pelas equações (3.5) e (3.6), respectivamente.

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\rho_L h_0^3}{12\mu} \frac{\partial p_o}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_L h_0^3}{12\mu} \frac{\partial p_o}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{U}{R} \frac{\partial(\rho_L h_0)}{\partial \theta} \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{3\rho_L h_0^2 h_\sigma}{12\mu} \frac{\partial p_o}{\partial \theta} + \frac{\rho_L h_0^3}{12\mu} \frac{\partial p_\sigma}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{3\rho_L h_0^2 h_\sigma}{12\mu} \frac{\partial p_o}{\partial z} + \frac{\rho_L h_0^3}{12\mu} \frac{\partial p_\sigma}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{U}{R} \frac{\partial(\rho_L h_\sigma)}{\partial \theta} + i\omega \rho_L h_\sigma \quad (3.6)$$

A equação (3.5) é a equação clássica de Reynolds para regime estacionário. Esta equação permite a determinação do campo de pressão hidrodinâmica bidimensional no interior dos mancais radiais lubrificadas a óleo. Não existe solução analítica em forma fechada para a grande maioria dos mancais radiais de uso industrial. Os coeficientes dinâmicos dos mancais são

obtidos através da solução das equações de lubrificação de ordem zero e de primeira ordem via procedimento de elementos finitos.

### 3.2.2 Equações de Elementos Finitos para Mancais Elípticos

As equações de lubrificação de ordem zero e de primeira ordem podem ser escritas na forma de balanço de massa, utilizando-se o conceito de fluxo mássico. Dessa forma, a equação (3.5) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \dot{m}_\theta \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \dot{m}_z \right) = \vec{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{m}} = 0 \quad (3.7)$$

sendo que  $\dot{m}_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\rho_L h_0^3}{12\mu} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} + R \frac{\Omega}{2} \rho_L h_0$  representa o fluxo mássico na direção circunferencial

e  $\dot{m}_z = -\frac{\rho_L h_0^3}{12\mu} \frac{\partial p_0}{\partial z}$  o fluxo mássico na direção axial.

A equação (3.6) pode, da mesma forma, ser reescrita na forma de balanço de fluxo, na seguinte maneira:

$$\vec{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{m}}_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \dot{m}_{1\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \dot{m}_{1z} \right) = i\omega \rho_L h_\sigma \quad (3.8)$$

sendo que os fluxos mássicos mostrados na equação (3.8) podem ser expressos na seguinte forma:

$$\dot{m}_{1\theta} = \frac{1}{R} \frac{3\rho_L h_0^2 h_\sigma}{12\mu} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\rho_L h_0^3}{12\mu} \frac{\partial p_\sigma}{\partial \theta} - \frac{\Omega R}{2} \rho_L h_\sigma \quad (3.9)$$

$$\dot{m}_{1z} = \frac{3\rho_L h_0^2 h_\sigma}{12\mu} \frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\rho_L h_0^3}{12\mu} \frac{\partial p_\sigma}{\partial z} \quad (3.10)$$

### 3.2.3 Discretização do campo de pressão de ordem zero

Elementos isoparamétricos planos de quatro nós são utilizados na discretização do domínio do filme fluido. Funções de interpolação bilineares,  $\Psi_j^e$ ,  $j=1,2,3,4$ , são empregadas na descrição do

campo de pressão hidrodinâmica de ordem zero no domínio  $\Omega^e$  de um elemento finito. A Figura 3.7 ilustra de maneira esquemática os quatro nós no elemento finito usados na discretização do domínio do filme fluido, onde a coordenada  $y$  representa a direção axial do mancal e a coordenada  $\theta$  indica a direção circunferencial.

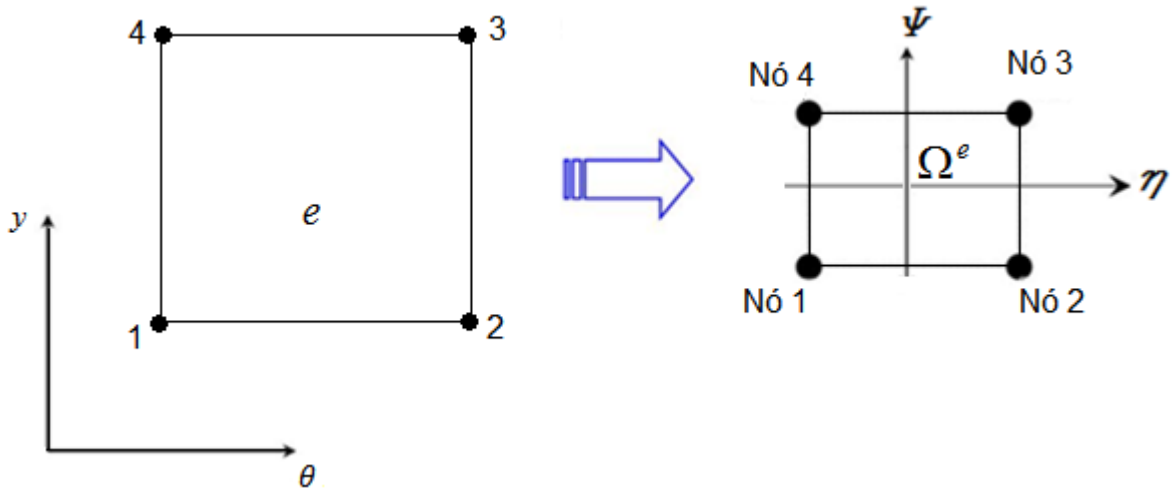


Figura 3.7 - Representação esquemática dos nós no elemento finito

Os campos discretos de pressão de ordem zero e de primeira ordem, no domínio  $\Omega^e$  de um elemento finito, são escritos na seguinte forma:

$$p_0^e = \Psi_i^e p_{0i}^e; i=1,2,3,4 \quad (3.11)$$

$$p_\sigma^e = \Psi_i^e p_{\sigma i}^e; i=1,2,3,4 (\sigma = x,y) \quad (3.12)$$

Sobre um elemento finito do domínio  $\Omega^e$ , o método de Galerkin é utilizado para a obtenção da equação do campo de pressão de ordem zero. A equação (3.7) é pré-multiplicada pelas funções de interpolação  $\Psi_j^e$  e o produto é integrado sobre o domínio  $\Omega^e$ .

$$\iint_{\Omega^e} \Psi_j^e \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{m} \right) d\Omega^e = \oint_{\Gamma^e} \Psi_j^e \left( \vec{m} \cdot \vec{n} \right) d\Gamma^e - \iint_{\Omega^e} \vec{m} \cdot \vec{\nabla} \Psi_j^e d\Omega^e = 0 \quad (3.13)$$

onde  $\vec{n}$  representa o valor normal unitário direcionado para o lado de fora do contorno  $\Gamma^e$  do

elemento finito. Pode-se escrever que:

$$\vec{\nabla}\Psi_j^e = \frac{\partial\Psi_j^e}{\partial z} \vec{e}_z + \frac{1}{R} \frac{\partial\Psi_j^e}{\partial\theta} \vec{e}_\theta \quad (3.14)$$

$$\dot{m} = \dot{m}_\theta \vec{e}_\theta + \dot{m}_z \vec{e}_z \quad (3.15)$$

A segunda integral do lado direito da equação (3.13) pode ser expandida na seguinte forma.

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega^e} \left\{ \left( \frac{-1}{R} \frac{\rho h_0^3}{12\mu} \frac{\partial\Psi_i^e}{\partial\theta} p_{0i}^e + \frac{R\Omega}{z} \right) \vec{e}_\theta + \left( \frac{-\rho h_0^3}{12\mu} \frac{\partial\Psi_i^e}{\partial z} p_{0i}^e \right) \vec{e}_z \right\} \cdot \left\{ \frac{\partial\Psi_j^e}{\partial z} \vec{e}_z + \frac{1}{R} \frac{\partial\Psi_j^e}{\partial\theta} \vec{e}_\theta \right\} d\Omega^e \\ &= - \iint_{\Omega^e} \frac{\rho h_0^3}{12\mu} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial\Psi_i^e}{\partial\theta} \frac{\partial\Psi_j^e}{\partial\theta} + \frac{\partial\Psi_i^e}{\partial z} \frac{\partial\Psi_j^e}{\partial z} \right) d\Omega^e \cdot p_{0i}^e + \iint_{\Omega^e} \frac{\Omega}{2} \rho h_0 \frac{\partial\Psi_j^e}{\partial\theta} d\Omega^e \end{aligned} \quad (3.16)$$

Então, a equação (3.13) pode ser reescrita na forma a seguir:

$$\left\{ \iint_{\Omega^e} \frac{\rho h_0^3}{12\mu} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial\Psi_i^e}{\partial\theta} \frac{\partial\Psi_j^e}{\partial\theta} + \frac{\partial\Psi_i^e}{\partial z} \frac{\partial\Psi_j^e}{\partial z} \right) d\Omega^e \right\} \cdot p_{0i}^e = - \iint_{\Omega^e} \frac{\Omega}{2} \rho h_0 \frac{\partial\Psi_j^e}{\partial\theta} d\Omega^e + \oint_{\Gamma^e} \Psi_j^e \cdot \dot{m}_n d\Gamma^e \quad (3.17)$$

onde  $\dot{m}_n$  representa o fluxo de lubrificante cruzando a fronteira do elemento finito  $\Omega^e$ .

A equação (3.17) pode ser representada por um sistema de equações algébricas, que representa a forma estacionária da equação de Reynolds, para um elemento finito  $\Omega^e$ , na seguinte forma:

$$K_{ji}^e P_{0i}^e = f_j^e + q_j^e \quad (3.18)$$

onde a matriz fluídica  $K_{ji}^e$  pode ser obtida por meio de procedimento de integração baseado no método da quadratura de Gauss (BATHE, 1982), utilizando-se quatro pontos de integração. Essa matriz é dada pela seguinte expressão

$$K_{ji}^e = \iint_{\Omega^e} \frac{\rho h_0^3}{12\mu} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial z} \right) d\Omega^e.$$

O vetor de fluxo, no domínio de um elemento finito, é determinado por

$$f_j^e = \iint_{\Omega^e} \left( -\frac{\Omega}{2} \right) \rho h_0 \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} d\Omega^e$$

O balanço de fluxo, através do contorno do domínio, é dado por

$$q_j^e = \oint_{\Gamma^e} \Psi_j^e \dot{m}_n d\Gamma^e$$

O contorno de um elemento finito qualquer é representado por  $\Gamma^e$  e o fluxo de lubrificante de ordem zero através dessa fronteira por  $\dot{m}_n$ .

### 3.2.4 Discretização do campo de pressão de primeira ordem

O método de Galerkin é empregado novamente para a obtenção da equação de elementos finitos para determinação do campo de pressão perturbada de primeira ordem. A equação (3.8) é pré-multiplicada pelas funções de interpolação e o produto é integrado sobre o domínio  $\Omega^e$  do elemento finito, produzindo a seguinte equação integral.

$$\iint_{\Omega^e} \Psi_j^e \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{m}_1 \right) d\Omega^e = \oint_{\Gamma^e} \Psi_j^e \dot{m}_1 \cdot \vec{n} d\Gamma^e - \iint_{\Omega^e} \dot{m}_1 \cdot \vec{\nabla} \Psi_j^e d\Omega^e = i \iint_{\Omega^e} \Psi_j^e \omega \rho h_\sigma d\Omega^e \quad (3.19)$$

O segundo termo do lado direito da equação (3.19) pode ser reescrito na forma seguinte:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^e} \dot{m}_1 \cdot \vec{\nabla} \Psi_j^e d\Omega^e &= \iint_{\Omega^e} \left[ \dot{m}_{1\theta} \cdot \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} + \dot{m}_{1z} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial z} \right] d\Omega^e = \\ &= \iint_{\Omega^e} \left\{ \frac{3\rho h_0^2 h_\sigma}{12\mu} \frac{1}{R^2} \frac{\partial p_o}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} + \frac{\rho h_0^3}{12\mu} \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} P_\alpha^e - \frac{\Omega R}{2} \rho \frac{h_\sigma}{R} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \theta} \right\} d\Omega^e + \end{aligned}$$

$$\iint_{\Omega^e} \left\{ \frac{3\rho h_0^2 h_\sigma}{12\mu} \frac{\partial p_0}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial z} + \frac{\rho h_0^3}{12\mu} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial z} P_{\sigma i}^e \right\} d\Omega^e \quad (3.20)$$

A equação (3.20) pode, então, ser reescrita na forma de um sistema de equações algébricas na seguinte maneira:

$$\left\{ \iint_{\Omega^e} \frac{\rho h_0^3}{12\mu} \left[ \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial z} \right] d\Omega^e \right\} \cdot P_{\sigma i}^e = \oint_{\Gamma^e} \Psi_j^e \cdot \dot{m}_{jn} \cdot d\Gamma^e \quad (3.21)$$

$$- \iint_{\Omega^e} \left\{ \frac{3\rho h_0^2 h_\sigma}{12\mu} \left[ \frac{1}{R^2} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} + \frac{\partial p_0}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial z} \right] - \frac{\Omega}{2} \rho h_\sigma \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} + i\omega \rho h_\sigma \Psi_j^e \right\} d\Omega^e$$

Para facilitar a representação da equação algébrica (3.21), pode-se reescrevê-la na forma matricial como segue.

$$K_{\sigma ji}^e \cdot P_{\sigma i}^e = q_{\sigma j}^e + f_{\sigma j}^e \quad ; \quad \sigma = x, y, \quad (3.22)$$

A matriz fluídica de primeira ordem, o balanço do fluxo através do contorno e o vetor de fluxo no domínio são determinados respectivamente por:

$$K_{\sigma ji}^e = \iint_{\Omega^e} \frac{\rho h_0^3}{12\mu} \left[ \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial z} \right] d\Omega^e \quad (3.22.1)$$

$$q_{\sigma j}^e = \oint_{\Gamma^e} \Psi_j^e \cdot \dot{m}_{\sigma n} \cdot d\Gamma^e \quad (3.22.2)$$

$$f_{\sigma j}^e = \iint_{\Omega^e} \left\{ \frac{-3\rho h_0^2 h_\sigma}{12\mu} \left[ \frac{1}{R^2} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} + \frac{\partial p_0}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial z} \right] + \frac{\Omega \rho}{2} h_\sigma \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} - i\omega \rho h_\sigma \Psi_j^e \right\} d\Omega^e \quad (3.22.3)$$

O fluxo de lubrificante de primeira ordem através do contorno  $\Gamma_e$  de um elemento finito é representado por  $\dot{m}_{\sigma n}$ .

O sistema de equações algébricas complexas dado pelas equações (3.22) permite determinar o

campo complexo de pressão hidrodinâmica de primeira ordem. Os coeficientes do vetor carregamento de primeira ordem,  $f_{\sigma j}^e$ , dependem do campo de pressão de ordem zero. Por conseguinte, primeiro resolve-se o sistema de equações de ordem zero apresentada na equação (3.18) para a determinação do campo de pressão estacionária  $p_0$ . Então, determina-se o campo de pressão perturbada por meio do sistema de equações dado pelas equações (3.22).

As características estáticas de desempenho de mancais, tais como capacidade de carga, torque de atrito e vazão de óleo, são determinadas a partir da equação de lubrificação de ordem zero. Já as características dinâmicas de desempenho, tais como os coeficientes de rigidez e de amortecimento, são estimadas a partir da solução da equação de lubrificação de primeira ordem.

As equações de elementos finitos são superpostas para todo o domínio do filme fluido  $\Omega$ .

### 3.2.5 Determinação dos Coeficientes de Força dos Mancais Elípticos

A solução do sistema de equações algébricas lineares é obtida por meio de um procedimento baseado no método da decomposição  $LU$  (CHAPRA e CANALE, 2002). Um programa computacional foi desenvolvido especialmente para determinar a solução das equações de ordem zero e de primeira ordem utilizando o método de elementos finitos (FARIA *et al.*, 2006). As forças de reação do filme lubrificante podem, então, ser estimadas a partir da seguinte expressão, na qual  $p_a$  representa a pressão atmosférica.

$$F_{\sigma o} = \int_0^L \int_0^{2\pi} (p_o - p_a) h_{\sigma} R. d\theta. dz; \quad \sigma = X, Y. \quad (3.23)$$

A determinação do campo perturbado, ou de primeira ordem, de pressão hidrodinâmica para o mancal é realizada por meio do sistema de equações complexas de primeira ordem, obtido pela superposição para todo o domínio do fluido das equações dadas pelas equações (3.22). A integração do campo de pressão de primeira ordem sobre o domínio do filme fluido leva à estimativa das impedâncias complexas  $\{Z_{\sigma\beta o}\}_{\beta, \sigma=X, Y}$ . Os coeficientes linearizados de rigidez,  $\{K_{\sigma\beta}\}_{\beta, \sigma=X, Y}$ , e de amortecimento,  $\{C_{\sigma\beta}\}_{\beta, \sigma=X, Y}$ , associados à ação hidrodinâmica do filme fluido, podem ser calculados na seguinte forma.

$$Z_{\sigma\beta} = K_{\sigma\beta} + i\omega C_{\sigma\beta} = - \int_0^L \int_0^{2\pi} p_{\beta} h_{\sigma} R. d\theta. dz, \quad \beta, \sigma = X, Y \quad (3.24)$$

ou

$$\begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} + i.\omega. \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} = - \int_0^L \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} p_X h_X & p_Y h_X \\ p_X h_Y & p_Y h_Y \end{bmatrix} . R. d\theta. dz. \quad (3.25)$$

Estes coeficientes de força,  $[K_{\sigma\beta}]$  e  $[C_{\sigma\beta}]$  correspondem à resistência que o mancal oferece ao deslocamento e à velocidade, respectivamente. Eles serão sobrepostos às matrizes de elementos finitos do eixo, nas linhas e colunas correspondentes aos dois primeiros graus de liberdade, que são translacionais.

### 3.3 O Sistema Rotor-Mancal

O sistema rotor-mancal é composto por um eixo flexível, um disco massivo e mancais. Neste trabalho o sistema foi modelado através do método de elementos finitos (MEF), como descrito a seguir, aplicando modelos distintos para o eixo flexível e para os mancais. O disco massivo é considerado rígido e, portanto, inserido no modelo do eixo simplesmente através de suas propriedades físicas (massa, efeito giroscópico e inércia rotatória).

Para a modelagem do deslocamento lateral dos eixos flexíveis, são utilizados elementos de eixo com dois nós e com oito graus de liberdade. A influência dos mancais nos coeficientes de rigidez e amortecimento do rotor também é considerada na modelagem. A equação global do movimento para o sistema rotor-mancal é descrita como:

$$[M+N]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\} \quad (3.26)$$

onde,  $[M]$  representa a matriz global de inércia translacional,  $[N]$  é a matriz global de inércia rotatória,  $[K]$  a matriz de rigidez do eixo e  $[C]$  a matriz generalizada de amortecimento, que é expressa como  $[C] = [C_1] - \Omega[G]$ , onde  $[G]$  é a matriz de efeito giroscópico do eixo. Estas matrizes são apresentadas detalhadamente no Anexo C. A matriz  $[C_1]$  é a matriz global com os coeficientes de amortecimento dos mancais, lançados nos devidos nós onde os mancais estão



posicionados. De maneira análoga os coeficientes de rigidez dos mancais são somados à matriz  $[K]$  e a massa desbalanceada é somada na matriz  $[M]$ . Os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento são dados, respectivamente, por  $\{\ddot{U}\}, \{\dot{U}\}, \{U\}$  e  $\Omega$  é a velocidade de rotação do eixo (rad/s).

Cada nó possui 4 graus de liberdade, onde o deslocamento do  $i$ -ésimo elemento é representado pelo vetor  $\{U_i\}$  composto pelas seguintes componentes:

$$U_i = \begin{Bmatrix} y_i \\ x_i \\ \varphi_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}, \text{ onde}$$

$y_i$	= deslocamento horizontal
$x_i$	= deslocamento vertical
$\varphi_i$	= rotação em torno do eixo y
$\theta_i$	= rotação em torno do eixo x

A Figura 3.8 apresenta simbolicamente estes 4 graus de liberdade através dos movimentos de translação (deslocamento) e de rotação nos eixos  $x, y$ .

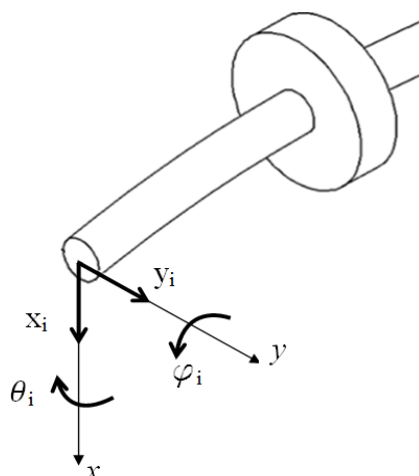


Figura 3.8 – Representação dos 4 graus de liberdade

A excitação devida à massa desbalanceada do rotor é representada pelo vetor  $\{R\}$  na Eq. (3.26). Um disco rotativo rígido desbalanceado é montado em uma posição axial pré-determinada do eixo, permitindo a aplicação de carga. Um fasor rotatório com amplitude de  $F_0 = m_d \cdot u_d \cdot \Omega^2$ , representa a carga da massa desbalanceada, onde  $m_d$  é a massa desbalanceada (kg) e  $u_d$  é a excentricidade da massa desbalanceada (m).

As seções a seguir apresentam as formulações que permitem obter as matrizes da equação (3.26), que posteriormente será integrada numericamente pelo método de Newmark (BATHE, 1982).

### 3.4 Diagrama do Procedimento Computacional

O procedimento computacional proposto neste trabalho foi desenvolvido em ambiente *Matlab*®, produzido pela *The MathWorks*®, e suas principais etapas são apresentadas na Figura 3.9.

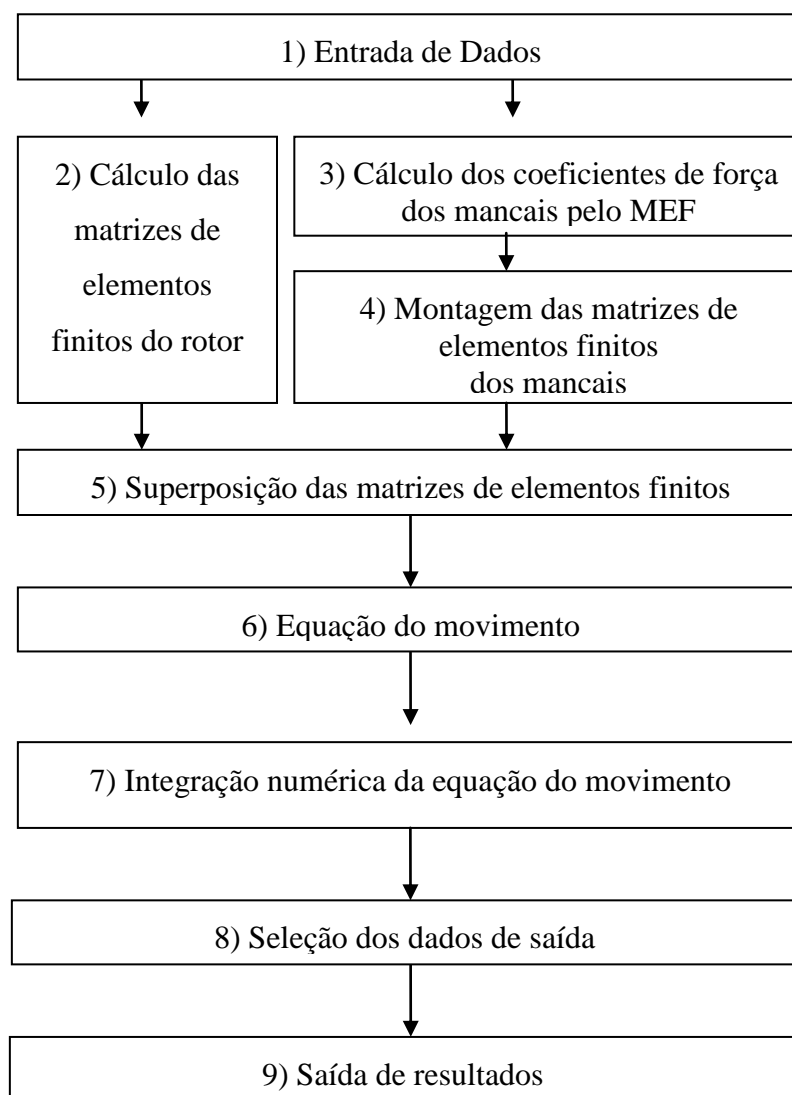


Figura 3.9 – Diagrama do procedimento computacional

Na etapa 1 são registrados os parâmetros físicos e geométricos do sistema, além dos parâmetros dos métodos numéricos (número de nós da malha, tempo de integração, incremento no tempo, rotação etc.).

Na etapa 2 são calculadas as matrizes de elementos finitos do eixo, usando-se os dados

registrados na etapa 1, através das equações descritas no Anexo C. Como o disco massivo é considerado rígido e, portanto, só possui os elementos das matrizes de massa, de inércia e de momento giroscópico, estas matrizes são calculadas separadamente e sobrepostas com as do eixo, nos pontos onde o disco massivo está posicionado. O método permite que o disco esteja posicionado em qualquer nó da malha do eixo.

Na etapa 3 são calculados os coeficientes de força dos mancais, baseando-se na sua posição de equilíbrio estático. Esta posição é encontrada pelo MEF implementado, que calcula a força resultante da ação hidrodinâmica do filme-fluido, para que ela seja igual à carga estática que o rotor aplica em cada mancal. Uma vez encontrado o ponto de equilíbrio estático, são calculados os coeficientes de rigidez e de amortecimento dos mancais, conforme Eq.(3.25). Cabe ressaltar que o cálculo destes coeficientes não usa as teorias simplistas de mancais curtos ou longos, e nem faz simplificações quanto aos coeficientes cruzados.

Na etapa 4 os resultados encontrados na etapa 3 são registrados nas matrizes de elementos finitos dos mancais, que são as matrizes de rigidez e de amortecimento.

Em seguida, na etapa 5, é feita a superposição das matrizes de elementos finitos do rotor e dos mancais, com os resultados obtidos nas etapas 2, 3 e 4. O método permite que os mancais estejam posicionados em qualquer nó da malha do eixo. Esta superposição é feita apenas com as linhas e colunas correspondentes aos deslocamentos translacionais, ou seja, não são considerados efeitos de rigidez ou de amortecimento rotacionais no modelo dos mancais hidrodinâmicos.

Uma vez montadas as matrizes, segue-se para as etapas 6 e 7 onde a equação do movimento é estabelecida, em formato matricial, conforme Eq.(3.26) e integrada numericamente pelo Método de Newmark, descrito no Anexo D.

Na etapa 8 são registrados os dados que serão usados para a análise do sistema. Na verdade, esta etapa está inserida no algoritmo de Newmark, dentro das iterações no tempo, para que sejam registrados os dados de interesse a cada iteração no tempo. Os dados normalmente selecionados são extraídos do vetor  $\{U\}$ , (Eq.3.26), que registra todos os deslocamentos laterais e rotações dos pontos da malha do eixo ao longo do tempo.

Finalmente, na etapa 9 são geradas as saídas de resultados. Dependendo do tipo de análise desejada, esta saída pode passar por outro cálculo numérico, como é feito no caso da geração do espectro de frequência, onde é usado o FFT (*Fast Fourier Transform*). Os resultados numéricos

são exibidos na forma de arquivo de dados e também na forma gráfica, através de espectros de frequência, formas de onda, curvas de deflexão, curva de resposta desbalanceada ou através de uma animação tridimensional exibindo a deflexão do rotor ao longo do tempo.

Cabe ressaltar que, para o cálculo da resposta desbalanceada, é necessário fazer a integração no tempo para várias rotações do eixo. Assim, para cada rotação, é registrada a máxima amplitude de vibração do eixo em um determinado ponto. Normalmente é escolhido o elemento onde está um dos mancais, para este ponto. Em seguida, é gerado o gráfico da resposta desbalanceada que permite identificar em qual rotação o sistema apresentou a máxima amplitude, quando excitado pela força de desbalanceamento. Este é o conceito de velocidade crítica (VC).

## 4 RESULTADOS E ANÁLISE

Os resultados do procedimento computacional proposto são validados com resultados apresentados na literatura especializada e com dados experimentais. São apresentados inicialmente alguns exemplos de validação, seguindo-se para a análise dos coeficientes de força dos mancais elípticos e da resposta desbalanceada do sistema rotor-mancal.

### 4.1 Exemplos de validação

A validação do procedimento computacional é realizada através de alguns exemplos selecionados na literatura especializada, apresentando modelos de rotores flexíveis apoiados em diferentes tipos de mancais. É incluída uma comparação dos resultados numéricos com resultados experimentais coletados em uma bancada de testes horizontal composta por um rotor flexível apoiado em mancais hidrodinâmicos.

#### 4.1.1 Rotor com disco em balanço

Um exemplo de rotor flexível (SINOUE, 2005) é escolhido para validar os resultados do procedimento computacional. O rotor é composto por um eixo flexível, dois mancais e um disco massivo em balanço (Figura 4.1).

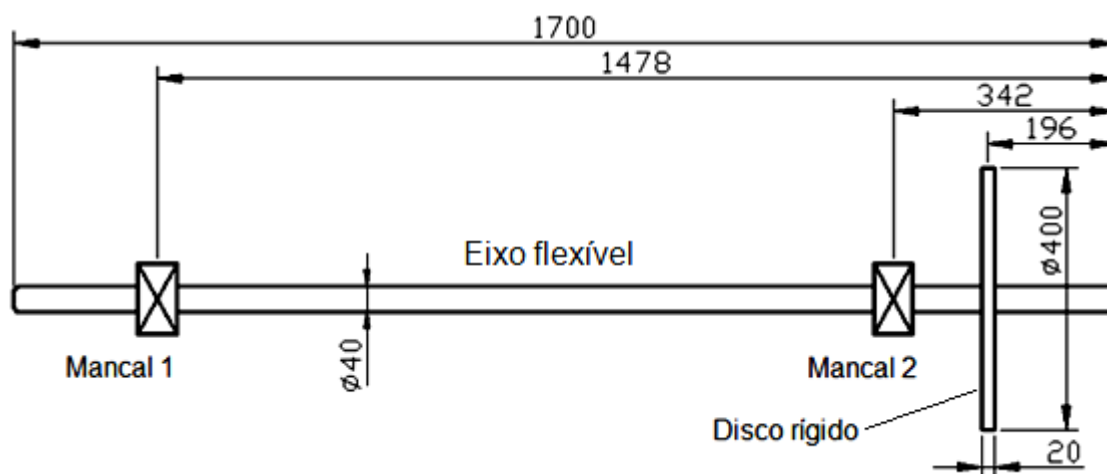


Figura 4.1 – Desenho esquemático do rotor de Sinou (2005)

Tabela 4.1- Parâmetros do rotor com disco em balanço (SINOUE, 2005)

Eixo	Comprimento	1,70m
	Diâmetro	40mm
	Módulo de Young	200 GN/m <sup>2</sup>
	Massa específica	8000 kg/m <sup>3</sup>
Disco	Massa	20 kg
	Diâmetro	400 mm
	Espessura	20 mm
Mancais	Rigidez Translacional	$K_{xx} = 3,78 \text{ MN/m}$ $K_{xy} = 0 \text{ MN/m}$ $K_{yx} = 0 \text{ MN/m}$ $K_{yy} = 3,78 \text{ MN/m}$
	Rigidez Rotacional	$K_{\varphi\varphi} = 8,0 \times 10^4 \text{ Nm/rad}$
	Amortecimento	$K_{\theta\theta} = 8,0 \times 10^4 \text{ Nm/rad}$
		$C_{xx} = 0 \text{ Ns/m}$
		$C_{xy} = 0 \text{ Ns/m}$
		$C_{yx} = 0 \text{ Ns/m}$ $C_{yy} = 0 \text{ Ns/m}$

São calculadas a primeira frequência natural (FN1) e a segunda frequência natural (FN2) para o rotor de Sinou (2005), aplicando-se o procedimento computacional proposto, para se avaliar a influência do tamanho da malha de elementos finitos no cálculo destas frequências naturais. Os valores obtidos para FN1 e FN2 com diferentes malhas são mostrados na Figura 4.2.

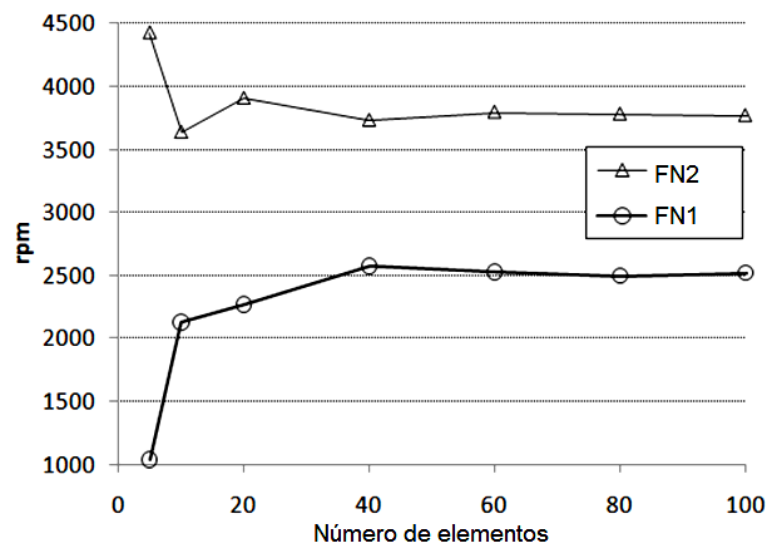


Figura 4.2 – Curvas da primeira e segunda frequências naturais (FN1, FN2) versus o número de elementos finitos da malha para o rotor de Sinou (2005) a 10rpm

Constata-se que a variação dos valores de FN1 e de FN2 fica abaixo de 2% para uma malha de 80 elementos. Assim, adota-se uma malha de 80 elementos finitos para este exemplo.

A integração das equações do movimento é feita pelo método de Newmark (ANEXO D). Nesta implementação são adotados os parâmetros que garantem a convergência do método, conforme descrito no Anexo D. Porém, é importante considerar que à medida que se reduz o incremento no tempo usado na integração numérica, mais exatos são os resultados, por se tornarem mais convergentes. Assim, apresenta-se na Figura 4.3 a análise desta convergência, em função do incremento no tempo. A curva contínua representa a primeira velocidade crítica progressiva (FWD1) e a curva tracejada representa a primeira velocidade crítica regressiva (BKWD1). Observa-se que as velocidades críticas convergem suficientemente para um incremento no tempo de aproximadamente  $5,0 \times 10^{-4}$  s, onde a variação relativa é menor que 1%. Este valor é adotado nos demais resultados calculados para este exemplo.

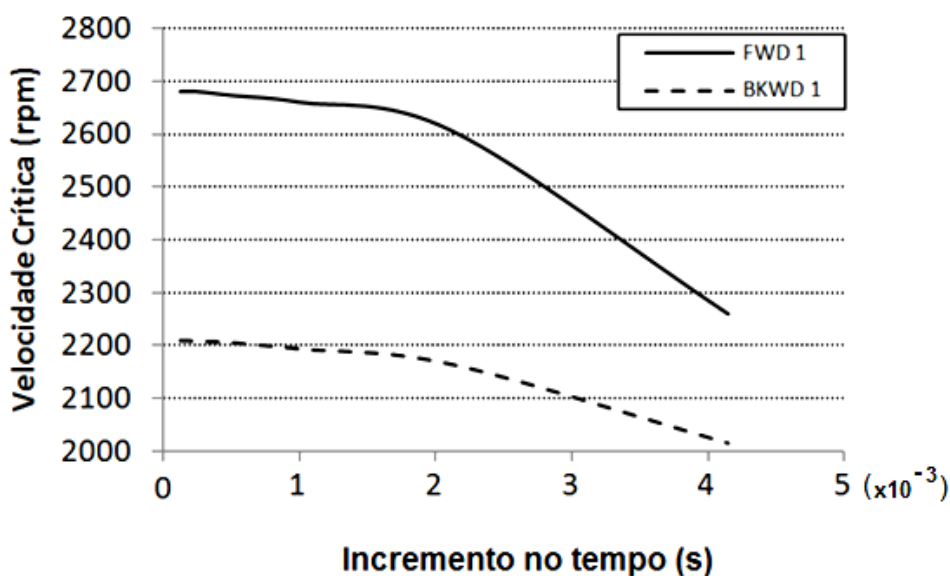


Figura 4.3 – Primeira velocidade crítica progressiva (FWD1) e regressiva (BKWD1) versus incremento no tempo

A Figura 4.4 apresenta o espectro de frequência obtido pelo MEF com o rotor a 10 rpm. Na Tabela 4.2 são comparados os valores da primeira e segunda frequências naturais (FN1 e FN2) calculadas por Sinou (2005), com os valores obtidos pelo MEF aqui proposto, e observa-se que o desvio máximo é menor que 3%. Os valores apresentados por Sinou(2005) foram obtidos usando uma malha de 184 elementos de viga de Timoshenko.

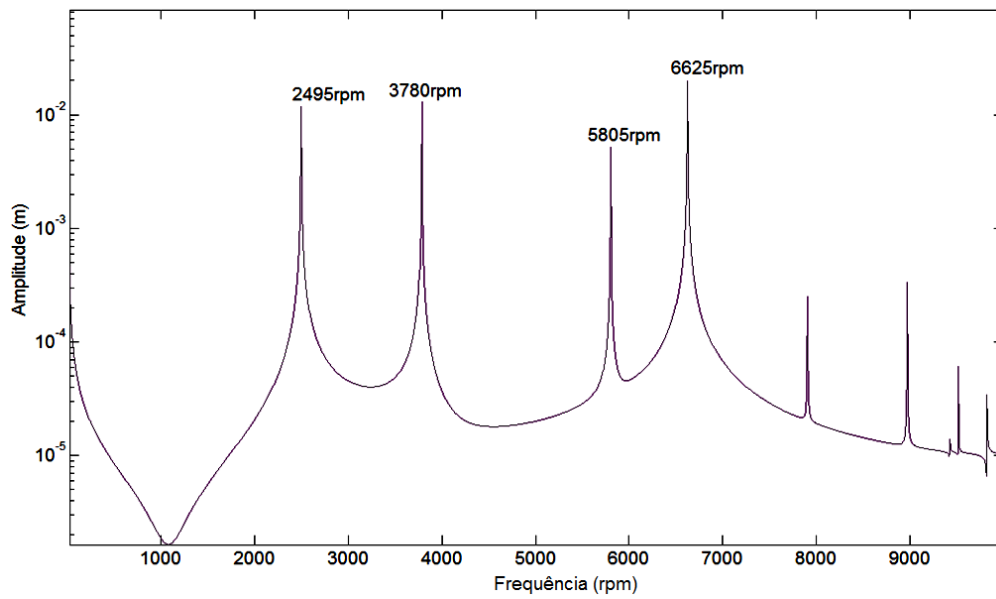


Figura 4.4 – Espectro de frequência obtido pelo MEF para o rotor de Sinou(2005) a 10 rpm

Tabela 4.2- Valores comparativos da primeira frequência natural para o rotor de Sinou(2005) a 10 rpm

	Sinou(2005)	MEF	Erro relativo (%)
<b>FN 1</b>	2430 rpm	2495 rpm	2,7%
<b>FN 2</b>	3840 rpm	3780 rpm	-1,6%

As frequências naturais do rotor em balanço são calculadas pelo MEF proposto também para outros valores de rotação. Na Figura 4.5 é ilustrado o diagrama de Campbell obtido pelo MEF e comparado com os valores apresentados por Sinou (2005).

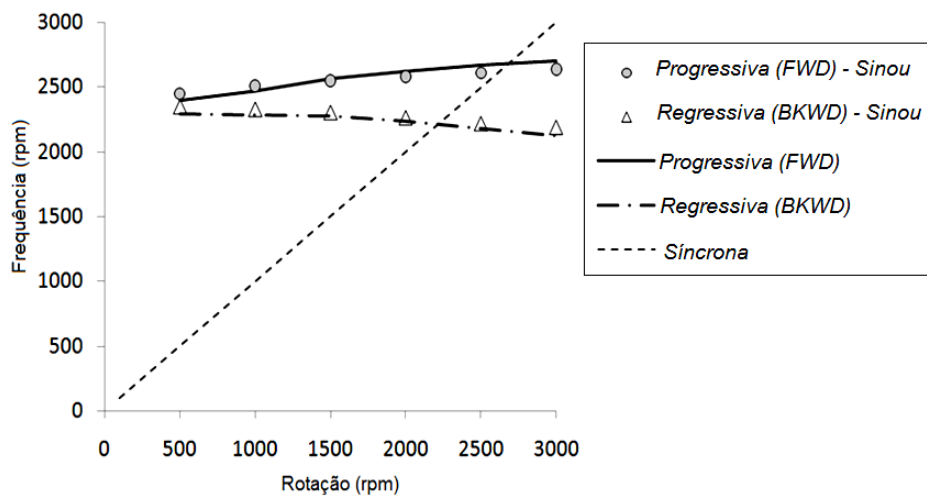


Figura 4.5 – Diagrama de Campbell para o rotor em balanço analisado por Sinou(2005)



O efeito giroscópico faz com que fiquem nítidas as frequências de precessão regressiva (*backward*) e progressiva (*forward*). Estas frequências são representadas na Figura 4.5, seguidas das siglas “*BKWD*” e “*FWD*”, respectivamente. A linha cheia e a traço-ponto representam os resultados obtidos pelo MEF proposto neste trabalho, enquanto os pontos identificados por marcadores são os resultados apresentados por Sinou(2005). A linha tracejada representa as frequências síncronas (*syncr*), que permitem identificar as velocidades críticas na sua interseção com as curvas das frequências naturais. As duas primeiras velocidades críticas foram obtidas através do gráfico e comparadas na Tabela 4.3 com aquelas calculadas por Sinou(2005). Observa-se um erro relativo menor que 5% nesta comparação, feita para fins de validação.

Tabela 4.3- Comparação da primeira velocidade crítica

	<b>Sinou(2005)</b>	<b>MEF</b>	<b>Erro relativo(%)</b>
<b>BKWD</b>	2225 rpm	2210 rpm	-1%
<b>FWD</b>	2580 rpm	2680 rpm	4%

As diferenças entre os resultados do MEF proposto para os resultados numéricos de Sinou se devem principalmente ao número de elementos finitos usados. O modelo de Sinou usa 184 elementos, enquanto neste trabalho foram adotados 80 elementos. Outros erros relativos podem ter sido causados por pequenas diferenças geométricas entre os dois modelos, em função de alguma informação que não tenha sido detalhada no trabalho de Sinou.

Cabe ressaltar que este exemplo de validação se aplica ao MEF do rotor e ao procedimento de superposição dos coeficientes de força dos mancais. Porém, o modelo de Sinou usa apenas dois coeficientes de força nos apoios (rigidez à rotação), e não considera mancais hidrodinâmicos. Para a validação dos modelos de mancais serão apresentados outros exemplos.

#### 4.1.2 Rotor apoiado nas extremidades com disco no centro

Um segundo exemplo de validação é selecionado através do modelo de rotor (HONG e PARK, 1999) composto por um eixo com dois diâmetros diferentes, como mostrado na Figura 4.6. Na primeira metade o eixo tem 2,5cm de diâmetro e na outra metade tem 4,0cm de diâmetro.

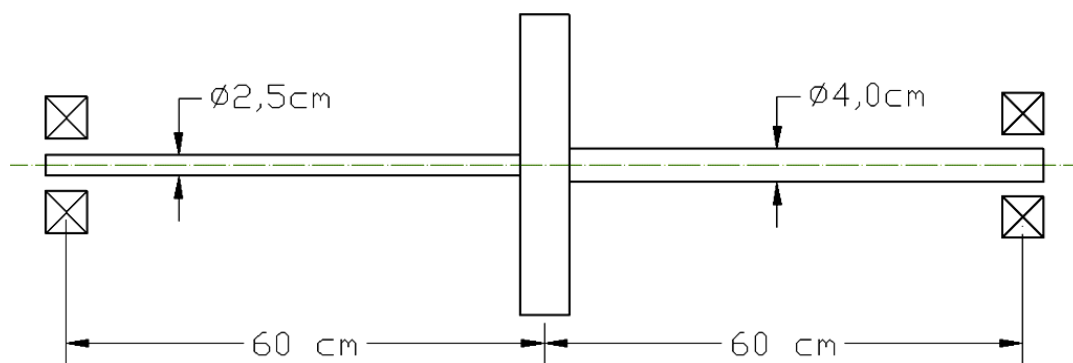


Figura 4.6 – Desenho esquemático do rotor de Hong e Park(1999)

O eixo é apoiado pelas extremidades por mancais idênticos e no centro do eixo há um disco massivo. Os parâmetros do modelo são apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4- Parâmetros do rotor de Hong e Park(1999)

Eixo	Comprimento	1,20m
	Diâmetro (trecho 1)	2,5cm
	Diâmetro (trecho 2)	4,0cm
	Módulo de Young	200 GN/m <sup>2</sup>
	Massa específica	8000 kg/m <sup>3</sup>
Disco	Massa	20 kg
	Momento polar de inércia	0,163 kg.m <sup>2</sup>
	Momento diametral de inércia	0,085 kg.m <sup>2</sup>
Mancais	Rigidez	$K_{xx} = 20 \text{ MN/m}$ $K_{xy} = -1,5 \text{ MN/m}$ $K_{yx} = -1,5 \text{ MN/m}$ $K_{yy} = 25 \text{ MN/m}$
	Amortecimento	$C_{xx} = 60 \text{ Ns/m}$
		$C_{xy} = 0 \text{ Ns/m}$
		$C_{yx} = 0 \text{ Ns/m}$
		$C_{yy} = 70 \text{ Ns/m}$

É feita uma comparação entre as frequências naturais, e também apresentada uma análise da forma de onda obtida pela integração numérica, que permite observar o fenômeno de batimento. São apresentados os conceitos básicos do fenômeno, e feita a comparação entre as frequências naturais obtidas através do espectro de frequência e a frequência de batimento observada na forma de onda.

Inicialmente são validadas as frequências naturais através da observação dos picos no espectro, como pode ser visto na Figura 4.7. São destacados os dois picos (808 rpm; 848 rpm) relativos à primeira frequência natural regressiva (*backward*) e progressiva (*forward*), respectivamente, com o rotor operando a 6000rpm.

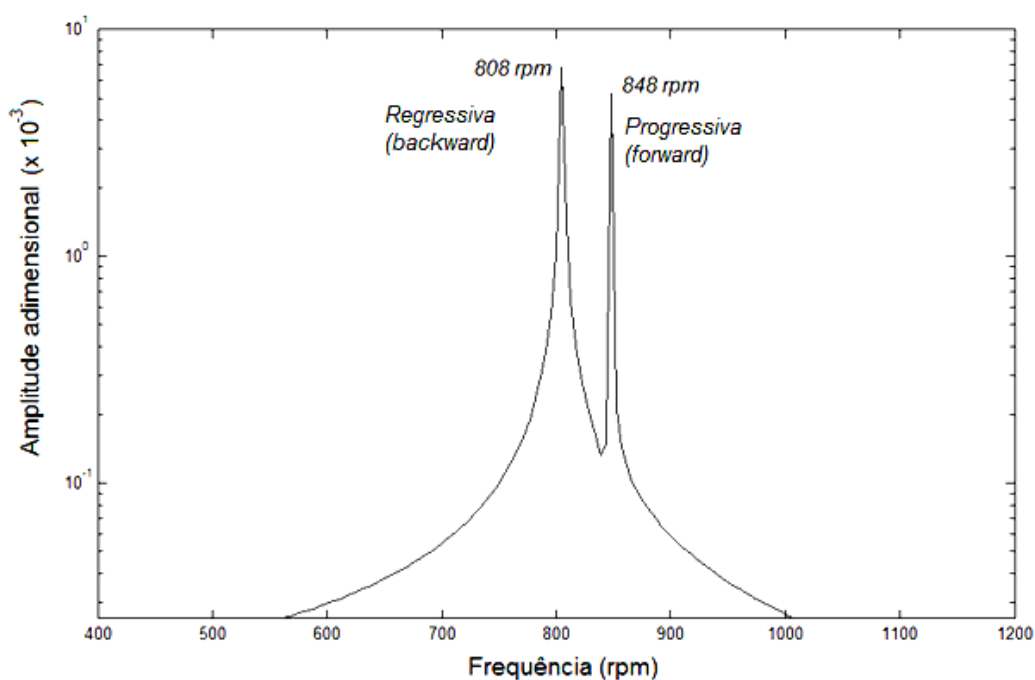


Figura 4.7 – Espectro de frequência obtido para o rotor de Hong e Park (1999) operando a 6000rpm

Os resultados numéricos obtidos pelo MEF são comparados com os da literatura (HONG e PARK, 1999), na Tabela 4.5, onde pode-se observar um erro relativo máximo de 2%.

Tabela 4.5- Comparação da primeira frequência natural progressiva e regressiva para o rotor de Hong e Park (1999)

	Hong e Park (1999)	MEF	Erro relativo (%)
<i>Backward (regressiva)</i>	804 rpm	808 rpm	0,5%
<i>Forward (progressiva)</i>	865 rpm	848 rpm	-2,0%

Em seguida, é feita a análise da forma de onda obtida após a integração no tempo da equação do movimento pelo Método de Newmark. Observa-se pela forma de onda (Figura 4.8) que existe um padrão de flutuação do sinal, destacado pela linha tracejada e pelo sombreamento. Este padrão de flutuação é semelhante ao fenômeno de batimento, da teoria de interferência de ondas, que ocorre quando há duas frequências de vibração próximas. O fenômeno não foi investigado profundamente neste trabalho, mas é destacado como um exemplo de validação, onde foi possível encontrar frequências naturais bem próximas às apresentadas na literatura (HONG e

PARK, 1999), e ainda estabelecer uma relação entre o padrão de flutuação da forma de onda com as frequências registradas no espectro.

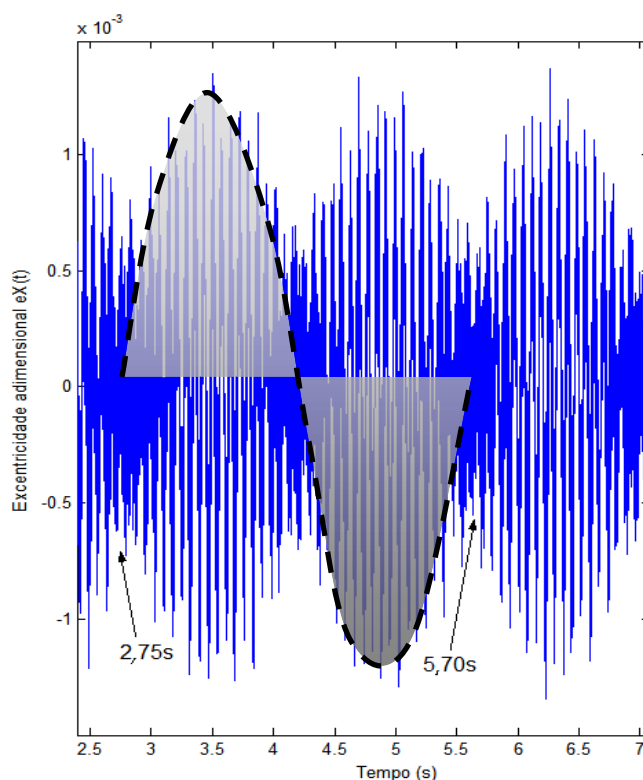


Figura 4.8 – Forma de onda obtida para o rotor de Hong e Park (1999)

Uma vez identificado um ciclo completo do padrão de flutuação, destacado na Figura 4.8 pela linha tracejada, é possível obter os instantes de tempo inicial e final deste ciclo: 2,75s e 5,70s, respectivamente. Este intervalo corresponde a um período de 2,95s, que equivale a uma frequência de  $0,339\text{Hz} = 20,3\text{rpm}$ .

Este padrão de flutuação pode ser explicado pelo fenômeno de batimento, que estabelece que quando duas ondas com frequências muito próximas ( $\omega_1; \omega_2$ ) interferem uma na outra, flutuações de batimento são percebidas na forma de onda, e a frequência de batimento ( $\omega_b$ ) é dada por

$$\omega_b = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2}$$

Observando-se novamente o espectro de frequência na Figura 4.7, pode-se calcular a frequência de batimento ( $\omega_b$ ) esperada para este sistema, através das frequências natural regressiva (*backward*) e progressiva (*forward*):

$$\omega_b = \frac{|848rpm - 808rpm|}{2} = 20 rpm$$

Portanto, confirma-se que o padrão de flutuação observado na forma de onda pode ser associado ao fenômeno de batimento, causado pelas duas frequências naturais próximas identificadas no espectro. Estes dois resultados são apresentados na Tabela 4.6.

Tabela 4.6- Comparação das Frequências de Batimento para o rotor de Hong e Park(1999)

Frequência obtida pela forma de onda	Frequência obtida pelo espectro
20,3 rpm	20,0 rpm

Este fenômeno de batimento é também observado quando o rotor opera em uma rotação próxima de uma frequência natural. De maneira semelhante, se for observado o padrão de flutuação na forma de onda, que varia com a rotação do rotor, é possível inferir que o rotor está se aproximando ou se afastando de uma frequência natural. O fenômeno de batimento no sistema rotor-mancal merece uma investigação mais profunda, que não está no escopo do presente trabalho.

#### 4.1.3 Rotor de uma bancada de testes

Um terceiro exemplo de validação consiste na comparação das frequências naturais estimadas pelo MEF com os valores experimentais coletados em uma bancada de testes montada no Grupo de Dinâmica de Rotores da UFMG, cujos dados podem ser encontrados em Machado (2006) e Miranda *et al.* (2005). O rotor é composto por um eixo cilíndrico horizontal apoiado em mancais hidrodinâmicos e com um disco cilíndrico desbalanceado montado no eixo, como ilustrado esquematicamente na Figura 4.9, com medidas em milímetros.

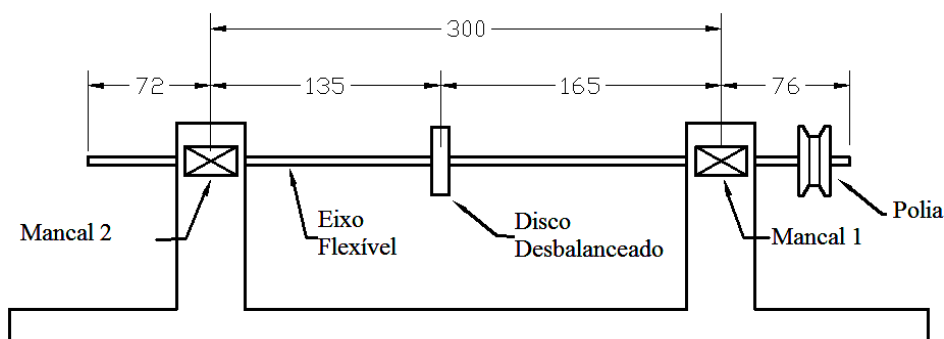


Figura 4.9 – Desenho esquemático do rotor da bancada de testes.

O disco possui furos rosqueados ao longo de sua periferia que permitem incluir pequenas massas

que provocam o desbalanceamento no sistema. O rotor é acionado por um sistema de polias e correia e um motor elétrico controlado por um inversor de frequência. A Tabela 4.7 apresenta os parâmetros do rotor da bancada de testes.

Tabela 4.7– Parâmetros do rotor da bancada de testes

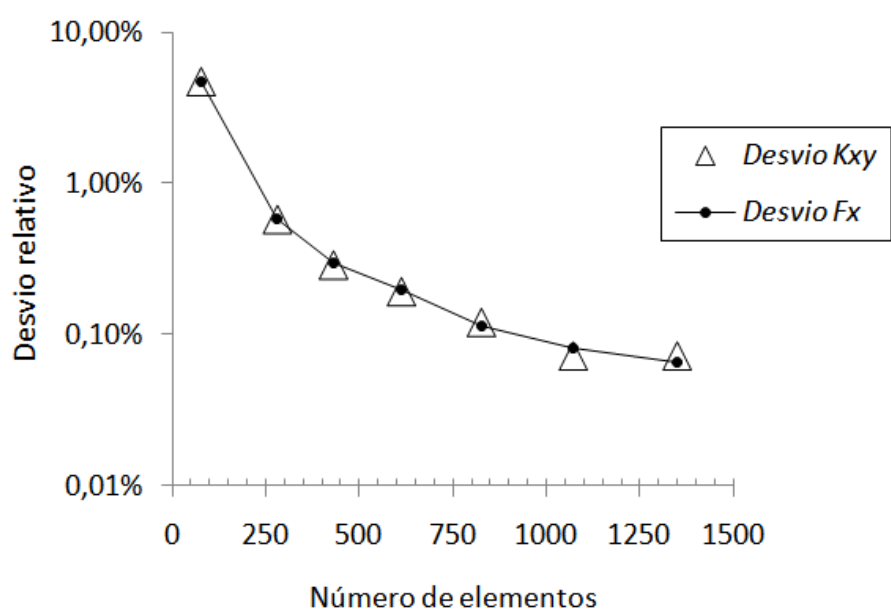
Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
$L_{eixo}$	comprimento do eixo	0,30	m
$D$	diâmetro do eixo	0,015	m
$L$	comprimento dos mancais	0,012	m
$c$	folga do mancal	$34,5 \times 10^{-6}$	m
$\mu$	viscosidade do lubrificante	$25 \times 10^{-3}$	Pa·s
$\rho_L$	massa específica do lubrificante	892	kg/m <sup>3</sup>
$E$	módulo de elasticidade do eixo	$200 \times 10^9$	Pa
$\nu$	coeficiente de Poisson do eixo	0,3	-
$\rho$	massa específica do eixo	7870	kg/m <sup>3</sup>

Esta análise tem como objetivo validar os modelos de elementos finitos propostos para o eixo flexível e para os mancais hidrodinâmicos, através de resultados experimentais. A análise da convergência da malha de elementos finitos para o modelo do eixo é realizada de maneira semelhante à apresentada na Figura 4.2, obtendo-se também um número de 80 elementos para este exemplo.

Um procedimento de análise de sensibilidade de malha é também utilizado para avaliar a dependência dos parâmetros de desempenho do mancal em função do tamanho da malha. Neste procedimento a razão entre o número de elementos finitos nas direções circunferencial e axial é mantida constante. Esta razão depende da razão de esbeltez do mancal ( $L/D$ ) e deve ser mantida para se garantir a variação uniforme do tamanho da malha. Assim, para uma razão  $L/D$  de 0,8, como no exemplo analisado, a relação entre o número de nós circunferenciais e o número de nós axiais deve ser  $\pi/0,8 \cong 4$ . Estabelecidos estes parâmetros, são gerados os coeficientes de força para a rotação de 3200rpm, no ponto de equilíbrio estático do mancal, usando-se inicialmente uma malha bem refinada (1660 elementos), conforme mostrado na última linha da Tabela 4.8. São então reduzidos os números de elementos da malha e registrados os erros relativos obtidos na força de reação do mancal ( $F_x$ ) e no coeficiente de rigidez cruzada ( $K_{xy}$ ). Para fins de comparação, os erros relativos são calculados em módulo, conforme mostrado na Figura 4.10.

Tabela 4.8– Resultados da análise da sensibilidade da malha dos mancais

Nós circunferenciais	Nós axiais	Elementos	$K_{xy}$ (MN/m)	$F_x$ (N)	Desvio $K_{xy}$	Desvio $F_x$
20	5	76	3,926	5,752	4,8%	4,75%
36	9	280	4,122	6,039	0,6%	0,58%
44	11	430	4,146	6,074	0,3%	0,30%
52	13	612	4,158	6,092	0,2%	0,20%
60	15	826	4,166	6,104	0,1%	0,11%
68	17	1072	4,171	6,111	0,1%	0,08%
76	19	1350	4,174	6,116	0,1%	0,07%
84	21	1660	4,177	6,120		

Figura 4.10 – Sensibilidade da malha de elementos finitos do mancal cilíndrico no cálculo dos parâmetros de desempenho  $F_x$  e  $K_{xy}$ 

Pela análise de sensibilidade realizada neste terceiro exemplo, constata-se que 280 elementos finitos na malha do filme fluido são suficientes para a obtenção de resultados confiáveis, com menos de 1% de erro relativo, conforme Tabela 4.8.

Uma vez definidas as malhas de elementos finitos, são realizadas as simulações e a integração numérica no tempo. Com os resultados da integração, são gerados os espectros de frequência numéricos. Os espectros de frequência experimentais são obtidos em diferentes velocidades de rotação do eixo, através de testes de batida (*bump test*). São afixados acelerômetros no topo dos mancais e gerados os espectros de frequência. Na Figura 4.11 observa-se o espectro de

frequência gerado a partir do teste de batida, coletado no mancal 1. A amplitude indicada representa o valor RMS da aceleração. Observam-se dois picos em frequências de aproximadamente 83 Hz (4980 rpm) e 110 Hz (6600 rpm), que correspondem às frequências naturais do sistema.

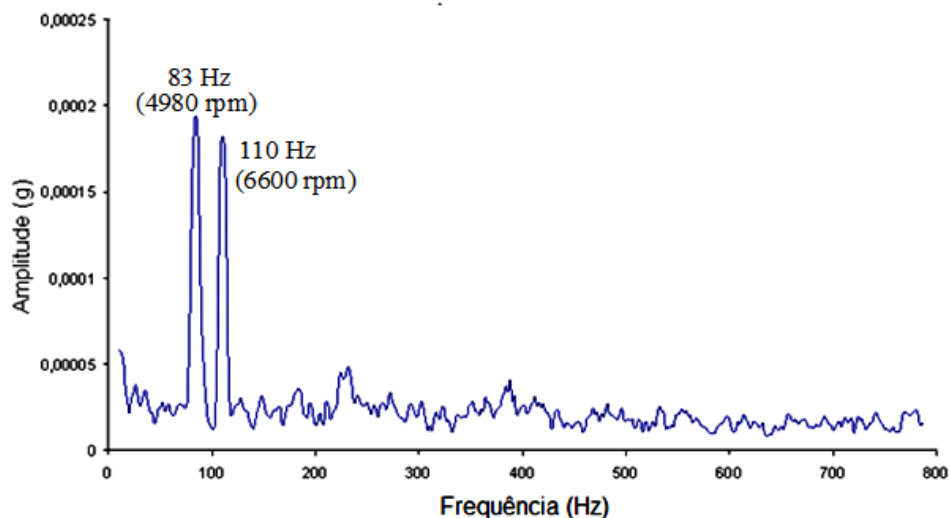


Figura 4.11 – Espectro de frequência experimental – teste de batida

Para se obter estas frequências naturais pelo método de elementos finitos proposto, são realizadas duas simulações. Uma com o rotor operando a 750rpm (Figura 4.12) e outra a 3200rpm (Figura 4.13).

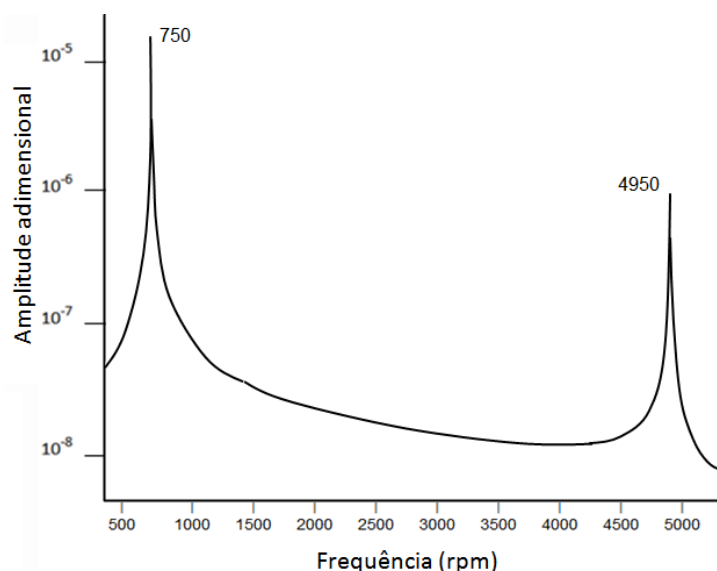


Figura 4.12 – Espectro de frequência obtido pelo MEF para rotação de 750 rpm

Observa-se na Figura 4.12 o pico de 750rpm relativo à excitação harmônica da massa desbalanceada e um pico a aproximadamente 4950 rpm (82,5 Hz), que corresponde àquele



identificado no espectro obtido experimentalmente no teste de batida.

Na Figura 4.13 é nítido o pico a 6650rpm (111Hz), também presente no espectro do resultado experimental. O pico de 3200 da Figura 4.13 é da excitação harmônica.

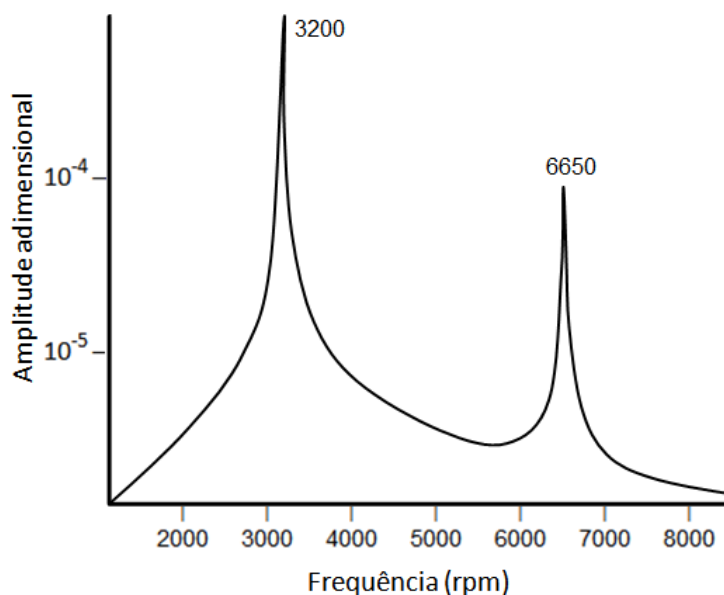


Figura 4.13 – Espectro de frequência obtido pelo MEF para rotação de 3200 rpm

A Tabela 4.9 apresenta a comparação entre estes valores, onde observa-se um erro relativo de aproximadamente 1% dos dados numéricos em relação aos dados experimentais.

Tabela 4.9– Valores comparativos de frequências naturais obtidas pelo MEF e experimentalmente pelo teste de batida (*bump test*)

Experimental	MEF	Erro relativo
4980 rpm	4950 rpm	-1%
6600 rpm	6650rpm	0,8%

Esta faixa de erro está abaixo da resolução dos gráficos, e existem outros erros associados aos dados apresentados, devido às incertezas geométricas do rotor da bancada de testes.

Uma segunda medição experimental é realizada para este mesmo sistema, fixando-se a rotação do eixo em 8900rpm. Os resultados experimentais e numéricos da vibração do mancal 2 são processados e gerados os espectros de frequência a seguir. A Figura 4.14 apresenta o espectro de frequência experimental para rotação de 8900 rpm, onde são destacadas algumas frequências naturais excitadas a esta rotação.

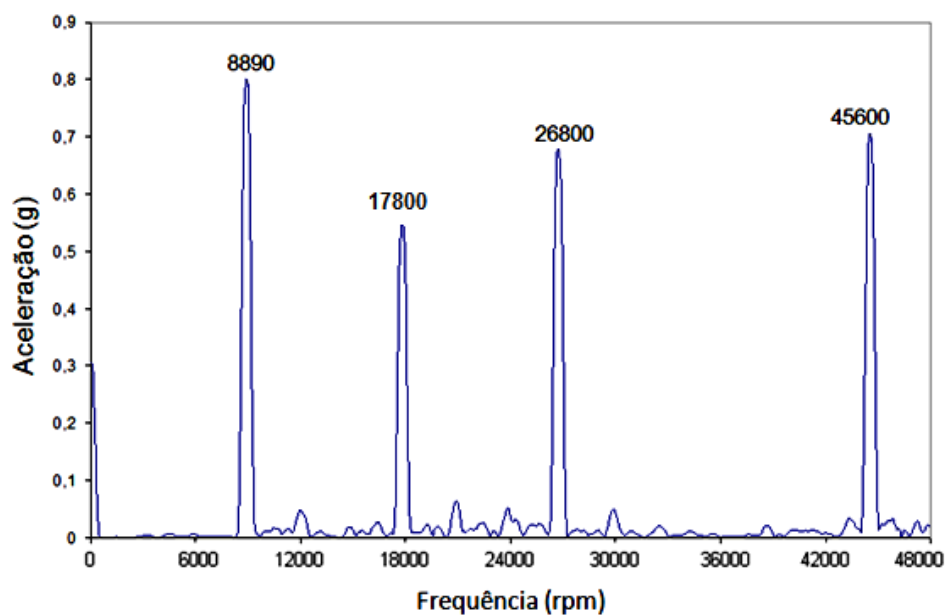


Figura 4.14 – Espectro de frequência experimental para o rotor da bancada operando a 8900rpm

A Figura 4.15 apresenta o espectro de frequência numérico para rotação de 8900 rpm, onde são destacados alguns dos picos que correspondem às mesmas frequências naturais observadas no resultado experimental. A amplitude exibida no gráfico está na forma adimensional, que é a razão entre a amplitude de deslocamento dividida pela folga do mancal.

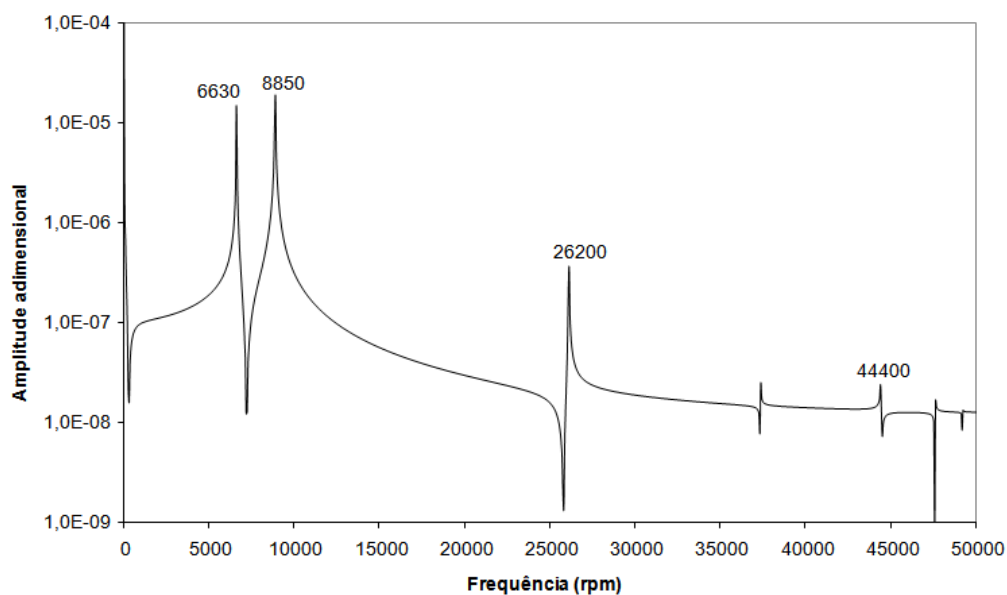


Figura 4.15 – Espectro de frequência obtido pelo MEF para o rotor da bancada operando a 8900rpm

A comparação entre estas frequências é apresentada na Tabela 4.10, onde se observa um erro relativo de menos de 3% para as predições das frequências naturais, em relação aos valores

experimentais. Nem todas as frequências apresentadas no espectro experimental são observadas no resultado numérico, em função do modelo computacional não considerar alguns efeitos, tais como desalinhamento, incertezas geométricas dos mancais, ruídos provenientes do motor elétrico, e outros. O pico de 17800rpm da Figura 4.14, por exemplo, representa o segundo harmônico da frequência de rotação do rotor, que corresponde ao sinal de desalinhamento paralelo (BERRY, 1994).

Tabela 4.10– Valores comparativos de frequências naturais obtidas pelo MEF e experimentalmente para o rotor da bancada operando a 8900rpm

Experimental	MEF	Erro relativo
8890 rpm	8850 rpm	-0,5%
26800 rpm	26200 rpm	-2,2%
45600 rpm	44400 rpm	-2,6%

#### 4.1.4 Segundo rotor de uma bancada de testes

Um quarto exemplo de validação é selecionado (MACHADO, 2006) para avaliar o procedimento computacional implementado neste trabalho. O rotor é semelhante ao anterior, ilustrado na Figura 4.9, porém os mancais são diferentes. São mancais hidrodinâmicos cilíndricos cujas características são apresentadas na Tabela 4.11.

Tabela 4.11– Parâmetros do rotor da bancada de testes – exemplo 2

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
$L_{eixo}$	comprimento do eixo	0,30	m
$D$	diâmetro do eixo	0,015	m
$L$	comprimento dos mancais	0,012	m
$d$	diâmetro do mancal	0,015	m
$c$	folga do mancal	$24 \times 10^{-6}$	m
$\mu$	viscosidade do lubrificante	$25 \times 10^{-3}$	Pa·s
$\rho_L$	massa específica do lubrificante	892	kg/m <sup>3</sup>
$E$	módulo de elasticidade do eixo	$200 \times 10^9$	Pa
$\nu$	coeficiente de Poisson do eixo	0,3	-
$\rho$	massa específica do eixo	7870	kg/m <sup>3</sup>

No espectro de frequência computacional apresentado na Figura 4.16 são destacadas as frequências naturais excitadas quando o rotor opera a 3200rpm.

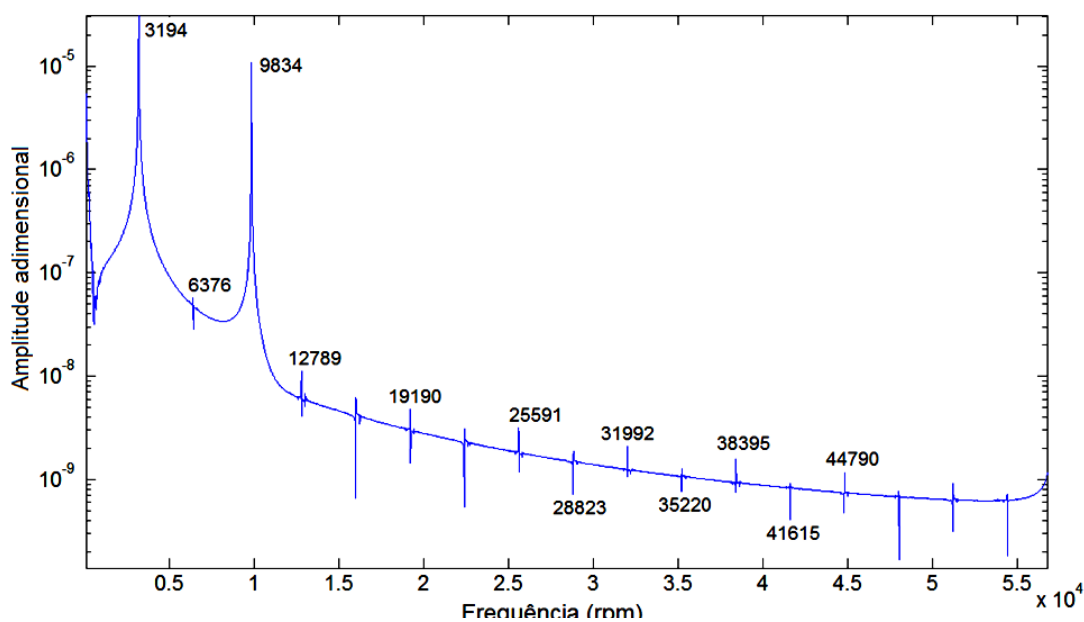


Figura 4.16 – Espectro de frequência obtido pelo MEF para o rotor do exemplo 4 operando a 3200rpm. Estas frequências são comparadas com os valores obtidos experimentalmente para o rotor descrito por Machado (2006), exibidas na Figura 4.17.

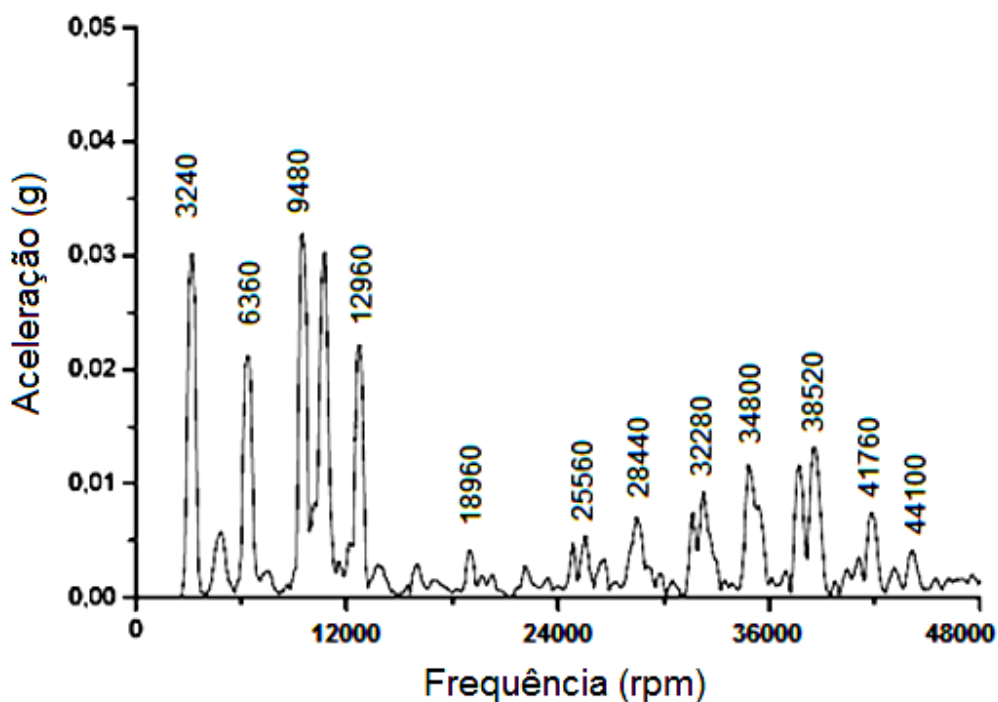


Figura 4.17 – Espectro de frequência experimental para o rotor de Machado(2006)

A comparação das frequências naturais dos resultados numéricos e experimentais é apresentada na Tabela 4.12, onde observa-se que os resultados numéricos desviam menos de 2% dos experimentais. A única exceção é a frequência de 9480 rpm do espectro experimental, cujo erro

relativo foi de 3,7% no resultado numérico. Esta frequência é de aproximadamente três vezes a frequência de rotação do eixo (3200rpm), o que significa um sinal de desalinhamento do rotor, conforme previsto na literatura (BERRY, 1994).

Tabela 4.12– Valores comparativos das frequências naturais obtidas experimentalmente por Machado(2006) e pelo MEF

Experimental (rpm)	MEF (rpm)	erro relativo %
3.240	3.194	-1,4%
6.360	6.376	0,3%
9.480	9.834	3,7%
12.960	12.789	-1,3%
18.960	19.190	1,2%
25.560	25.591	0,1%
28.440	28.823	1,3%
32.280	31.992	-0,9%
34.800	35.220	1,2%
38.520	38.395	-0,3%
41.760	41.615	-0,3%
44.100	44.790	1,6%

#### 4.2 Análise dos coeficientes de força dos mancais elípticos

A análise dos coeficientes de força é realizada aplicando-se o MEF a um exemplo de mancal elíptico extraído de Correia(2007), com o objetivo de identificar uma relação entre os coeficientes de força e os parâmetros construtivos do mancal: folga radial ( $c$ ); razão de esbeltez ( $L/D$ ) e pré-carga ( $Mp$ ). Este resultado permite observar se a relação identificada se mantém, para diversas condições operacionais. Os parâmetros do mancal elíptico selecionado são apresentados na Tabela 4.13.

Tabela 4.13– Parâmetros do mancal elíptico selecionado

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
$L$	comprimento do mancal	0,075	m
$D$	diâmetro do mancal	0,10	m
$c_l$	folga do mancal	(variável)	
$\mu$	viscosidade do lubrificante	$8,4 \times 10^{-3}$	Pa·s
$\rho_L$	massa específica do lubrificante	892	kg/m <sup>3</sup>
$\omega$	rotação	8800	rpm
$Mp$	pré-carga	0,45	
$W$	carga estática	1000	N

Para a análise de sensibilidade de malha do mancal selecionado, adota-se uma folga radial de  $75\mu\text{m}$ , conforme Correia(2007). Esta análise permite avaliar a dependência dos parâmetros de

desempenho do mancal em função do tamanho da malha. A razão entre o número de elementos finitos nas direções circunferencial e axial é mantida constante, dada pela relação  $\pi/(L/D) \cong 4$ . São apresentados na Figura 4.18 os desvios da força de reação do mancal ( $F_x$ ) e do coeficiente de rigidez cruzada ( $K_{xy}$ ), obtidos para diferentes números de elementos da malha. Para fins de comparação, os desvios são calculados em módulo. Pela análise de sensibilidade realizada, constata-se que aproximadamente 200 elementos finitos na malha do filme fluido são suficientes para a obtenção de resultados confiáveis, com menos de 1% de erro relativo.

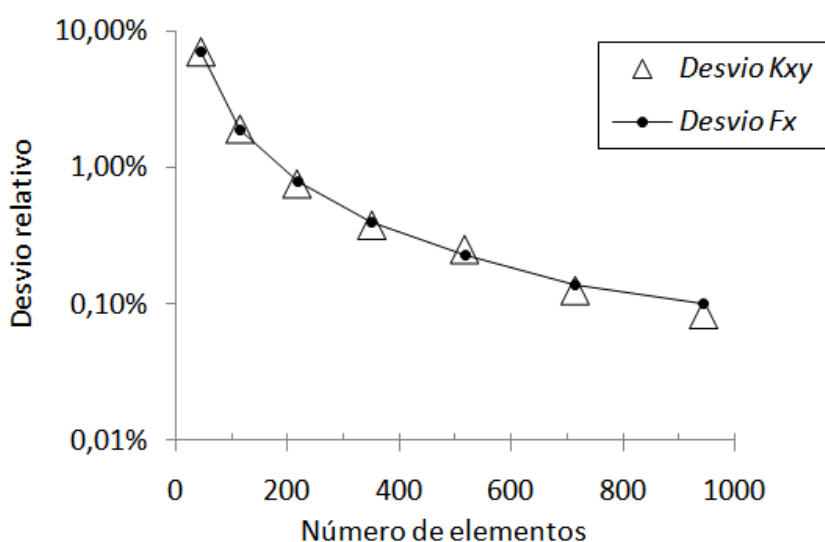


Figura 4.18 – Sensibilidade da malha de elementos finitos do mancal elíptico no cálculo dos parâmetros de desempenho  $F_x$  e  $K_{xy}$

#### 4.2.1 Coeficientes de força em função da folga radial dos mancais elípticos

São analisados nesta seção os resultados obtidos pelo MEF para o cálculo dos coeficientes de rigidez direta adimensionais  $k_{xx}$  e  $k_{yy}$  dos mancais elípticos, para diferentes valores de folga radial. A adimensionalização dos coeficientes de rigidez direta é realizada pela relação (CORREIA,2007)

$$k_{xx} = c \cdot K_{xx} / W,$$

onde  $K_{xx}$  é o coeficiente de rigidez direta dimensional;  $c$  é a folga radial do mancal e  $W$  é a carga estática no mancal. Para  $k_{yy}$  a adimensionalização é análoga.

Quando o mancal hidrodinâmico opera, ocorre um deslocamento da linha de centro do munhão

(eixo do rotor) em relação à linha de centro do mancal, como ilustrado na Figura 4.19/Figura 3.3. Este deslocamento é definido como a excentricidade  $e$ , e o ângulo  $\phi$  é definido como ângulo de posição. A excentricidade adimensional é definida pela expressão  $\varepsilon = e/c$ , onde  $c$  é a folga radial máxima do mancal. Para cada condição operacional, o munhão tende a se deslocar até um ponto de equilíbrio onde as forças da ação hidrodinâmica do filme fluido entre em equilíbrio com as forças atuantes do rotor sobre o mancal. Este ponto é definido como o ponto de equilíbrio estático  $\varepsilon_0$ .

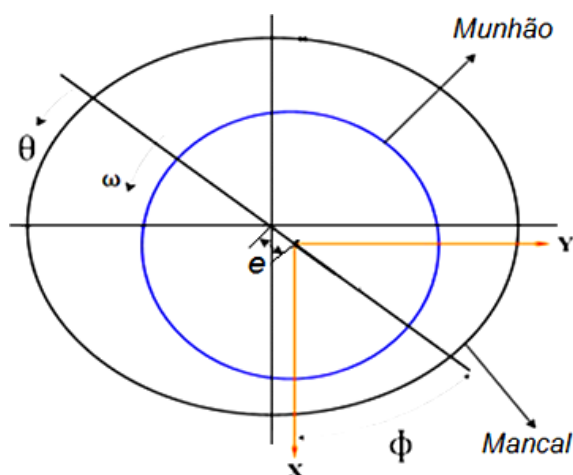


Figura 4.19 - Posicionamento do eixo dentro do mancal e excentricidade

O ponto de equilíbrio estático ( $\varepsilon_0$ ) é influenciado por vários parâmetros do mancal, em especial pela folga radial do mancal. Para os mancais elípticos analisados, observa-se uma variação de  $\varepsilon_0$  em função da folga radial, conforme mostrado na Figura 4.20.

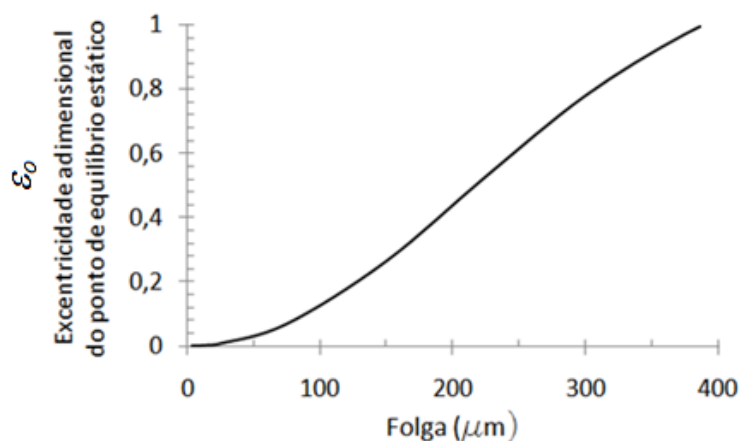


Figura 4.20 – Excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático dos mancais elípticos em função da folga radial

A Figura 4.21 apresenta os valores do coeficiente de rigidez direta adimensional dos mancais elípticos, em função da folga radial. É observado que estes coeficientes apresentam uma variação muito pequena para valores de  $\varepsilon_o$  entre zero e 0,3. Estes valores correspondem a folgas radiais entre zero a  $150\mu\text{m}$ , respectivamente. Para destacar esta faixa, é apresentada na Figura 4.21 uma linha pontilhada vertical, onde se observa que os valores calculados para os coeficientes  $k_{xx}$  e  $k_{yy}$  variam menos de 1%, e fora desta faixa os coeficientes variam consideravelmente. São exibidas no gráfico duas linhas tracejadas horizontais como referência, para facilitar a observação do alinhamento dos pontos.

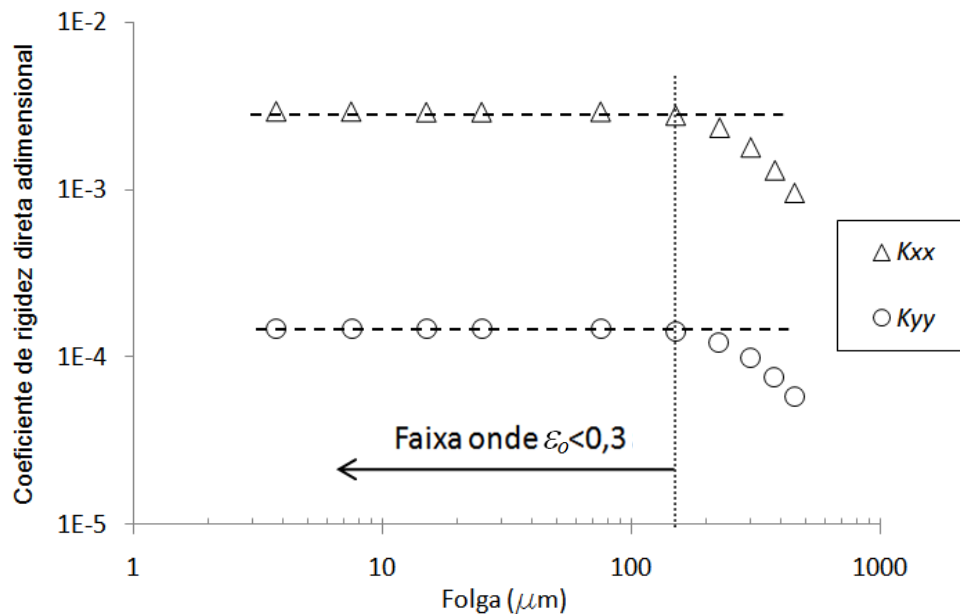


Figura 4.21 – Coeficientes de rigidez direta adimensionais em função da folga radial dos mancais elípticos

A adimensionalização do coeficiente de rigidez cruzada  $K_{xy}$  é realizada de maneira semelhante à dos coeficientes de rigidez direta (CORREIA, 2007). Porém, observa-se que os coeficientes  $k_{xy}$  e a folga radial têm uma relação de proporcionalidade inversa para uma certa faixa operacional, descrita a seguir. Desta forma, o produto entre eles deve ser constante nesta faixa. Sugere-se assim um novo adimensional, o “coeficiente de rigidez cruzada adimensional modificado”, definido por

$$\bar{k}_{xy} = \varepsilon_o \cdot c \cdot K_{xy} / W = \varepsilon_o \cdot k_{xy} ,$$

onde  $K_{xy}$  é o coeficiente de rigidez cruzada dimensional;  $c$  é a folga radial do mancal,  $W$  é a carga estática no mancal;  $\varepsilon_o$  é a excentricidade adimensional no ponto de equilíbrio estático;  $k_{xy}$  é o coeficiente de rigidez cruzada adimensional.



A Figura 4.22 apresenta os resultados obtidos pelo MEF para o cálculo do coeficiente de rigidez cruzada adimensional modificado  $\bar{k}_{xy}$  dos mancais elípticos, para diferentes valores de folga radial.

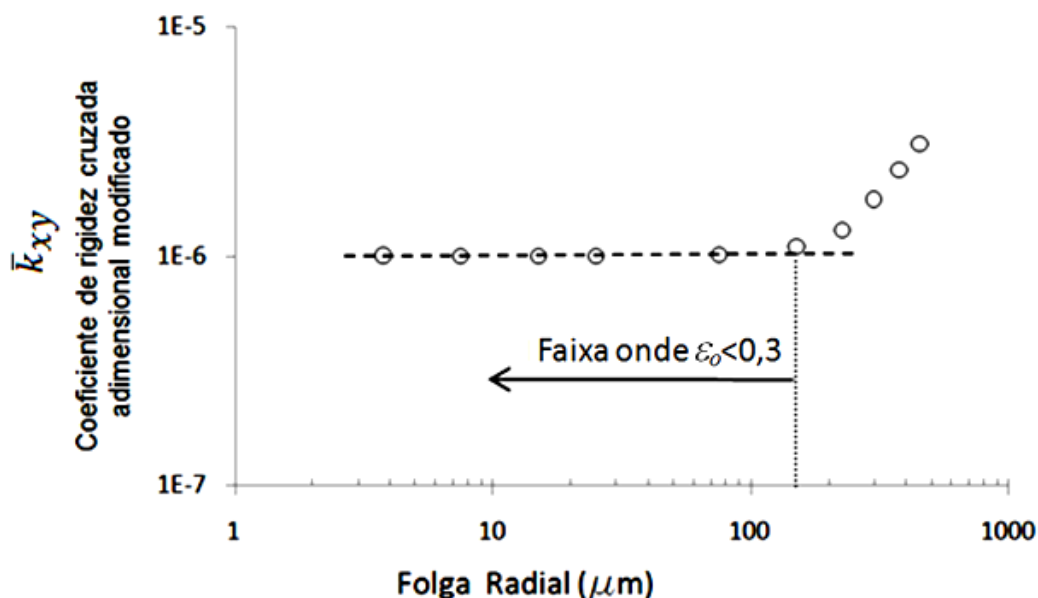


Figura 4.22 – Coeficientes de rigidez cruzada adimensional modificado em função da folga radial dos mancais elípticos

Observa-se que, para a faixa onde  $\varepsilon_0 < 0,3$ , os valores do coeficiente de rigidez cruzada adimensional modificado são aproximadamente constantes. Apenas o último valor desta faixa apresenta um desvio de 5% em relação aos demais, que variam menos de 1%. Esta análise vale, de maneira análoga, para ambos coeficientes de rigidez cruzada, pois  $K_{yx} = -K_{xy}$ .

Para os resultados computacionais dos coeficientes de amortecimento, observa-se um padrão semelhante ao identificado para os coeficientes de rigidez, quando  $\varepsilon_0 < 0,3$ , uma vez que nesta faixa o coeficiente de amortecimento direto  $C_{xx}$  é proporcional ao coeficiente de rigidez cruzada  $K_{xy}$ , e o coeficiente de amortecimento cruzado  $C_{xy}$  é proporcional ao coeficiente de rigidez direta  $K_{xx}$ . Para investigar a faixa onde esta proporcionalidade é mantida, é apresentado na Figura 4.23 a razão  $C_{xy}/K_{xx}$  em função da folga radial do mancal elíptico. Observa-se que, para  $\varepsilon_0 < 0,3$ , a razão  $C_{xy}/K_{xx}$  é aproximadamente constante, variando menos de 1%. Este resultado é ilustrado na Figura 4.23, sendo também válido para a razão  $C_{yx}/K_{yy}$ .

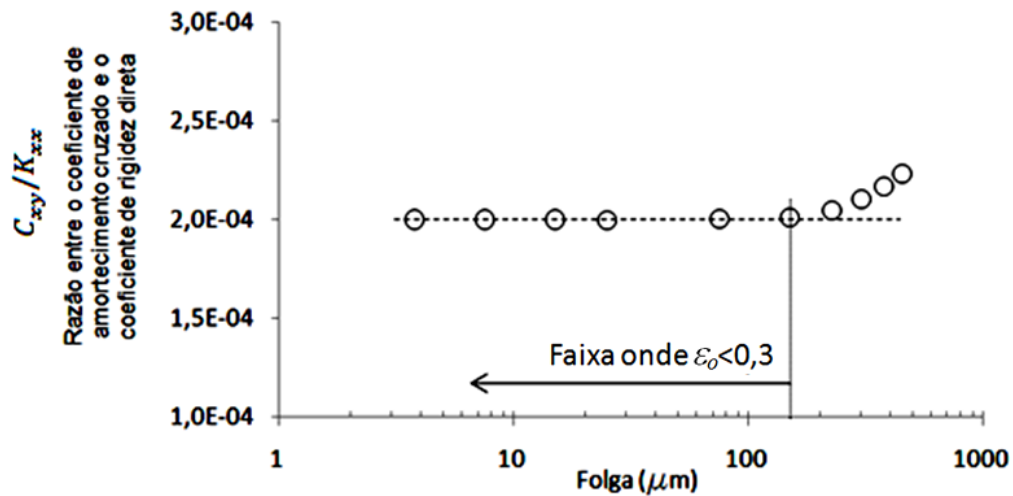


Figura 4.23 – Razão  $C_{xy}/K_{xx}$  em função da folga radial dos mancais elípticos

O amortecimento efetivo do mancal é um parâmetro importante na análise da estabilidade (VANICE, 1988), definido pela expressão  $2\omega C_{xx}/K_{xy}$ , onde  $C_{xx}$  é o coeficiente de amortecimento direto (ou  $C_{yy}$ ) e  $K_{xy}$  é o coeficiente de rigidez cruzada (ou  $-K_{yx}$ ). Assim, para concluir a análise dos coeficientes de amortecimento em função da folga radial, é escolhido o amortecimento efetivo como parâmetro de desempenho. São apresentados na Figura 4.24 os resultados do amortecimento efetivo em função da folga radial dos mancais elípticos. Novamente é observado que, para  $\varepsilon_0 < 0,3$ , o amortecimento efetivo varia pouco, menos de 1%.

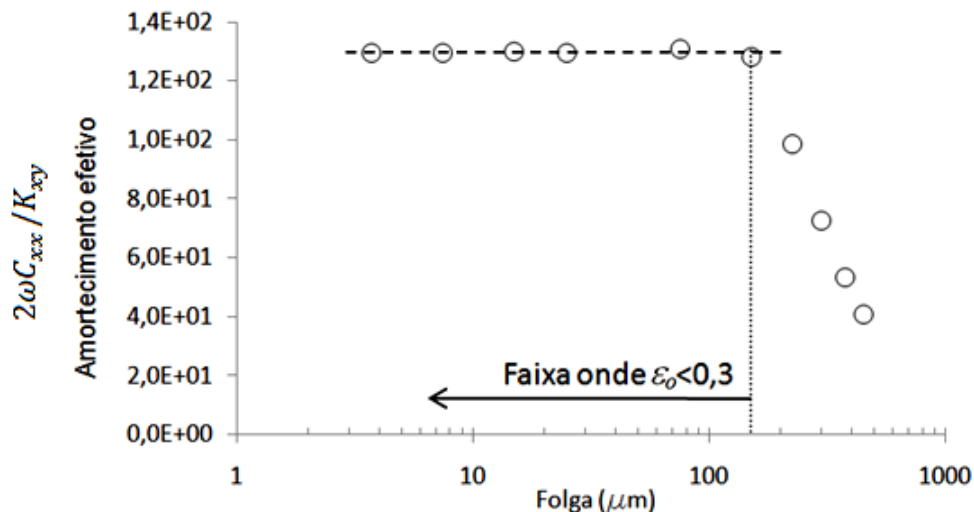


Figura 4.24 – Amortecimento efetivo em função da folga radial dos mancais elípticos

Pode-se observar que os diversos parâmetros analisados, relacionados aos coeficientes de força dos mancais elípticos, variam pouco na faixa onde  $\varepsilon_o < 0,3$ , e este padrão não é observado fora desta faixa.

#### 4.2.2 Coeficientes de força em função da razão de esbeltez dos mancais elípticos

A razão de esbeltez ( $L/D$ ) é um parâmetro importante no projeto dos mancais hidrodinâmicos, influenciando de maneira não-linear nos seus coeficientes de força (SAWICKI e RAO, 2004). No procedimento computacional proposto, observa-se um padrão comum para alguns parâmetros de desempenho dos mancais elípticos em função da razão de esbeltez.

É apresentada na Figura 4.25 a curva que relaciona a excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático ( $\varepsilon$ ) com a razão de esbeltez ( $L/D$ ), para os mancais analisados. Observa-se um valor de  $\varepsilon_o = 0,3$  para  $L/D = 0,45$ , que é uma razão de esbeltez muito baixa, conforme observado nas aplicações industriais.

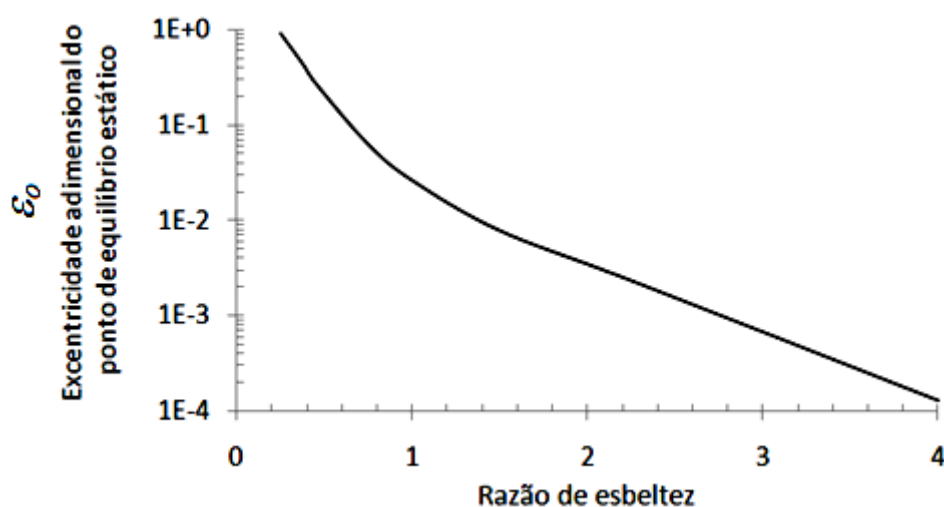


Figura 4.25 – Excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático dos mancais elípticos em função da razão de esbeltez

Na análise dos coeficientes de força dos mancais em função de  $L/D$ , identifica-se um padrão comum para o amortecimento efetivo ( $2\omega C_{xx}/K_{xy}$ ), como ilustrado na Figura 4.26. Observa-se que, na faixa onde  $\varepsilon_o < 0,3$ , o amortecimento efetivo é aproximadamente constante, variando no máximo 3%.

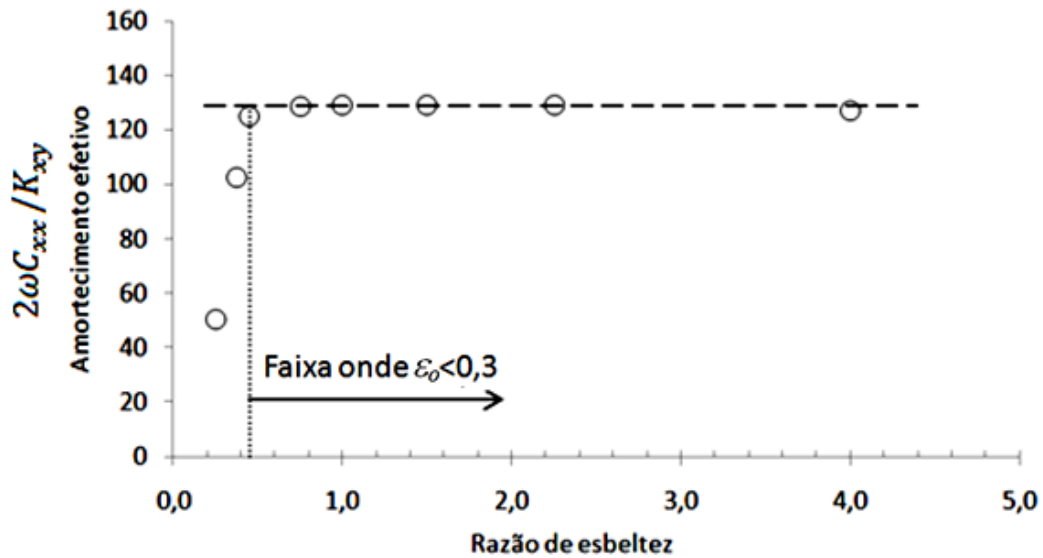


Figura 4.26 – Variação do amortecimento efetivo em função da razão de esbeltez dos mancais elípticos

Os resultados obtidos pelo MEF para o coeficiente de amortecimento cruzado adimensional ( $c_{xy}$ ) mostram que existe uma relação linear entre  $c_{xy}$  e  $L/D$ , na faixa onde  $\varepsilon_0 < 0,3$ , conforme ilustrado na Figura 4.27. A linha tracejada indica o ajuste linear feito com os pontos desta faixa, no qual obtém-se um coeficiente de determinação ( $R^2$ ) maior que 0,99. Embora os pontos na faixa oposta ( $L/D < 0,45$  e  $\varepsilon_0 < 0,3$ ) estejam também aproximadamente alinhados, não foi observado outro padrão comum nesta faixa.

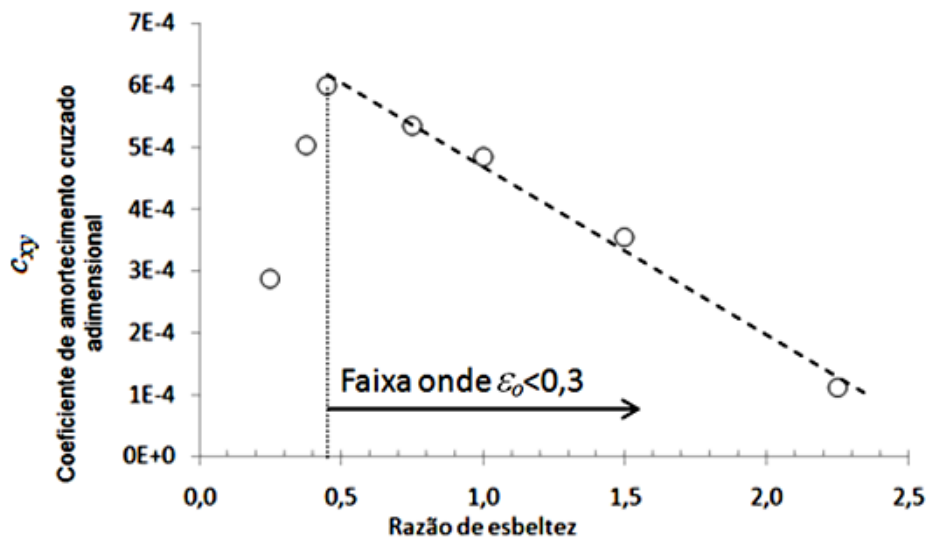


Figura 4.27 – Variação do amortecimento cruzado adimensional em função da razão de esbeltez dos mancais elípticos

Os coeficientes de força apresentados nesta seção, obtidos pelo MEF implementado para os mancais elípticos, apresentam uma clara relação algébrica com a razão de esbeltez, que se mantém na faixa onde  $\varepsilon_0 < 0,3$ .

#### 4.2.3 Coeficientes de força em função da pré-carga dos mancais elípticos

Outro parâmetro importante no projeto dos mancais hidrodinâmicos é a pré-carga ( $Mp$ ). No procedimento computacional proposto, observa-se um padrão comum para alguns parâmetros de desempenho de mancais elípticos, em função da pré-carga.

A Figura 4.28 apresenta a excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático  $\varepsilon_0$  dos mancais analisados, para diferentes valores de pré-carga ( $Mp$ ). Observa-se um valor de  $\varepsilon_0 = 0,3$  para  $Mp = 0,4$ .

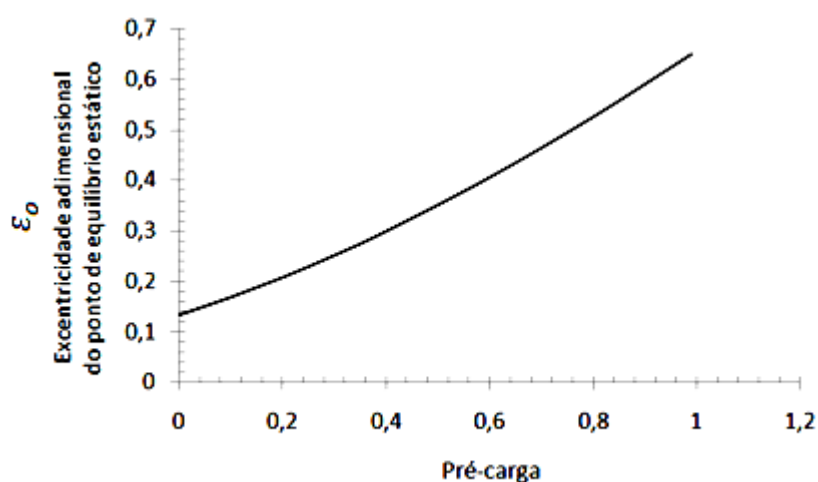


Figura 4.28 – Excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático dos mancais elípticos em função da pré-carga

Na análise dos coeficientes de rigidez direta dos mancais, para diferentes valores de  $Mp$ , observa-se uma relação de proporcionalidade entre  $Mp$  e  $(k_{yy})^{2/3}$  e entre  $Mp$  e  $(k_{xx})^{1/2}$ , como ilustrado na Figura 4.29. Na faixa onde  $\varepsilon_0 < 0,3$ , que corresponde a  $Mp < 0,4$ , estas relações algébricas variam pouco. Observa-se que nesta faixa, a relação de proporcionalidade entre  $Mp$  e  $(k_{yy})^{2/3}$  varia no máximo 4% e entre  $Mp$  e  $(k_{xx})^{1/2}$  varia no máximo 7%. Fora desta faixa, as variações são maiores que 20%.



### **4.3 A influência dos parâmetros geométricos dos mancais elípticos na resposta desbalanceada**

A resposta desbalanceada do sistema rotor-mancal é um importante parâmetro operacional que auxilia no projeto de máquinas rotativas, pois informa o nível de vibração do sistema ao se atravessar as velocidades críticas. Desta forma, é fundamental uma análise da influência dos parâmetros geométricos dos mancais elípticos na resposta desbalanceada do sistema. De fato, muitas turbomáquinas operam acima da primeira velocidade crítica, e por isto os mancais devem ser projetados para absorver as altas vibrações provocadas pelo sistema quando ele passa pela velocidade crítica.

O procedimento computacional proposto neste trabalho permite predizer como os parâmetros geométricos dos mancais elípticos influenciam a resposta desbalanceada. Esta análise é realizada através dos resultados obtidos da integração no tempo das equações do movimento.

São selecionados a seguir alguns parâmetros geométricos importantes no projeto de mancais elípticos, e analisada a resposta desbalanceada do sistema rotor-mancal em função destes parâmetros. Inicialmente, faz-se uma análise da influência da pré-carga dos mancais elípticos na razão de amplificação da resposta desbalanceada. Em seguida, é analisada a resposta desbalanceada em função da razão de esbeltez dos mancais elípticos, e finalmente é analisada a influência da folga radial dos mancais elípticos na resposta desbalanceada.

#### **4.3.1 A razão de amplificação da resposta desbalanceada em função da pré-carga**

A resposta desbalanceada de rotores, analisada para diferentes mancais, é normalmente usada como um parâmetro de eficiência dos mancais nas velocidades críticas (FLACK e ROOKE, 1980). Ela é a medida da amplitude de vibração do sistema quando excitado pela força de desbalanceamento. A resposta desbalanceada é analisada para o sistema apoiado em mancais elípticos, sob diferentes valores de pré-carga, baseados em um exemplo de mancal elíptico apresentado em Machado(2006). A amplitude de vibração é calculada através do raio médio das órbitas obtidas pelo procedimento numérico. Os parâmetros do sistema são apresentados na Tabela 4.14. O rotor simulado não possui discos massivos e está apoiado em mancais hidrodinâmicos elípticos, como ilustrado na Figura 4.31.

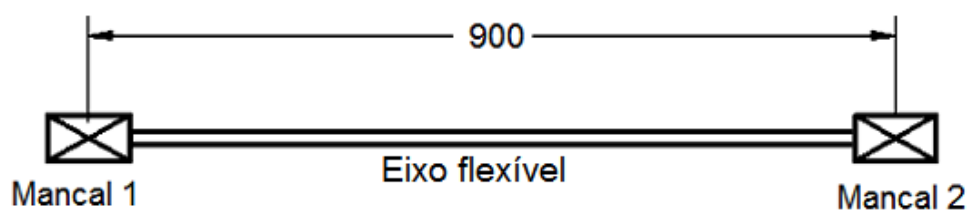


Figura 4.31 – Desenho esquemático do rotor sem disco massivo

Tabela 4.14. Parâmetros do sistema rotor-mancais elíptico utilizado na análise

$d$ (diâmetro do eixo) = 0,015 m	$\mu$ (viscosidade do lubrificante) = $27 \times 10^{-3}$ Pa.s
$L$ (comprimento do mancal) = 0,012 m	$\rho_L$ (massa específica do lubrificante) = $915 \text{ kg/m}^3$
$D$ (diâmetro do mancal) = 0,015 m	$\rho$ (massa específica do eixo) = $7850 \text{ kg/m}^3$
$c_1$ (folga do mancal 1) = $24 \text{ }\mu\text{m}$	$c_2$ (folga do mancal 2) = $24 \text{ }\mu\text{m}$
$L_{eixo}$ (comprimento do eixo) = 0,900m	$m_u$ (massa desbalanceada) = 0,0035 kg
$\Omega$ (rotação do rotor) = 2.000 a 10.000 rpm	$u_d$ (excentricidade da massa desbalanceada) = 0,035 m
$E$ (Módulo de Young do eixo) = $205 \times 10^9$ Pa	$Mp$ (pré-carga dos mancais) = 0,45
$W$ (carga estática por mancal) = 6,12N	

Para este exemplo é adotada uma malha de 80 elementos para o eixo e de 351 elementos para o filme fluido, composta por 40 nós circunferenciais e 10 nós axiais. A excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático calculado é  $\varepsilon_o = 0,018$ , com um ângulo de posição próximo de zero. Este ponto de equilíbrio é calculado de modo a garantir que a força hidrodinâmica do filme fluido seja à carga estática  $W$ , que é obtida dividindo-se o peso do eixo pelo número de mancais.

A resposta desbalanceada (Figura 4.32) é calculada no mancal 1, considerando mancais elípticos com pré-carga  $Mp=0,45$ . A amplitude adimensional é calculada dividindo-se a amplitude de vibração do eixo pela folga do mancal. Os dois picos destacados na Figura 4.32 representam a primeira e segunda velocidades críticas do rotor.



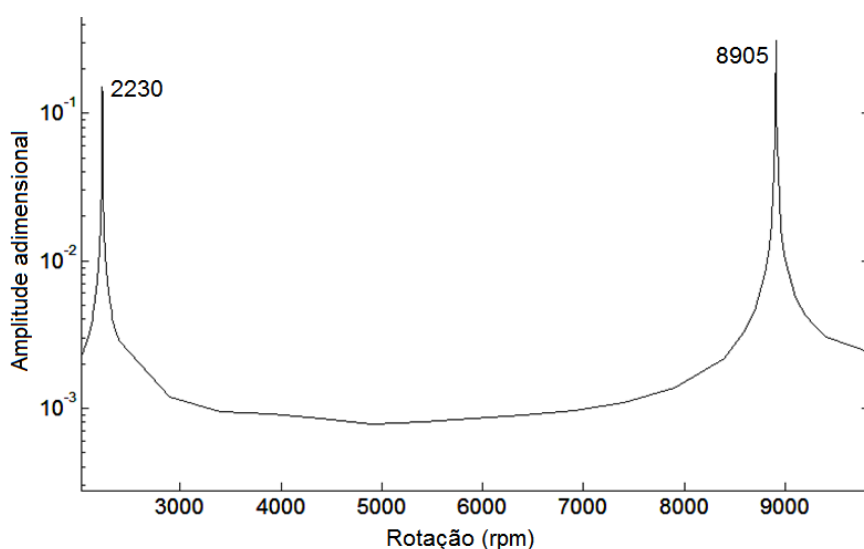


Figura 4.32 – Resposta desbalanceada calculada no mancal 1 do rotor apoiado em mancais elípticos com pré-carga 0,45 (MIRANDA e FARIA, 2012)

Uma vez identificadas as velocidades críticas do rotor, estuda-se a influência da pré-carga dos mancais elípticos na resposta desbalanceada, com o rotor operando em torno da sua primeira velocidade crítica. A resposta desbalanceada para o sistema apoiado em mancais hidrodinâmicos elípticos com diferentes valores de pré-carga ( $M_p$ ) é exibida na Figura 4.33. A curva superior corresponde  $M_p=0,75$ ; a curva intermediária corresponde a  $M_p=0,45$  e a curva inferior corresponde a  $M_p=0,15$ .

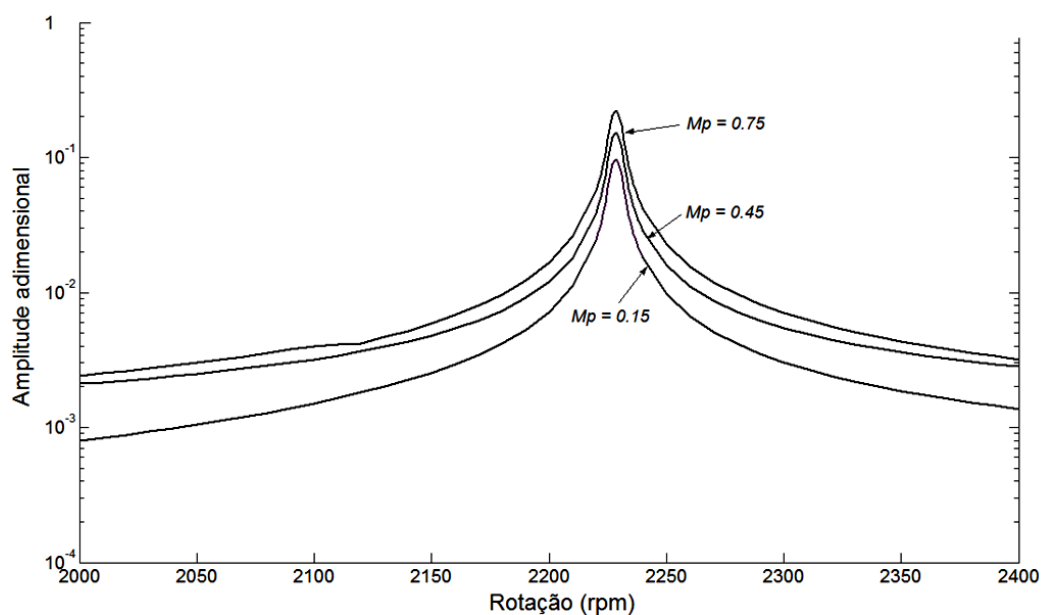


Figura 4.33 – Resposta desbalanceada para diferentes valores de pré-carga dos mancais elípticos (MIRANDA e FARIA, 2012)

Os valores das amplitudes adimensionais são calculadas na extremidade esquerda do eixo, onde ele está apoiado no mancal 1. Observa-se que a amplitude na primeira velocidade crítica é mais elevada para valores maiores de pré-carga. Porém, além de analisar a amplitude da vibração, é importante também investigar a razão de amplificação desta vibração.

A razão de amplificação da resposta desbalanceada na velocidade crítica é um parâmetro importante na análise da estabilidade do sistema rotor-mancal (ZEIDAN e PAQUETTE, 1994). Neste exemplo numérico, ela é calculada através da relação entre a resposta desbalanceada na primeira velocidade crítica e na rotação de 2000rpm. A rotação de 2000rpm é escolhida como referência pelo fato de representar uma rotação onde a amplitude de vibração apresenta pouca influência da velocidade crítica. A razão de amplificação permite inferir sobre a capacidade do mancal elíptico atenuar a resposta desbalanceada do rotor ao passar pela velocidade crítica, o que é uma característica importante dos mancais hidrodinâmicos (STERNLICHT e LEWIS, 1968; VANCE, 1988; CORREIA, 2007). A Figura 4.34 apresenta os valores da razão de amplificação para o exemplo estudado, com diferentes valores de pré-carga nos mancais. A pré-carga zero representa o caso particular de mancal cilíndrico.

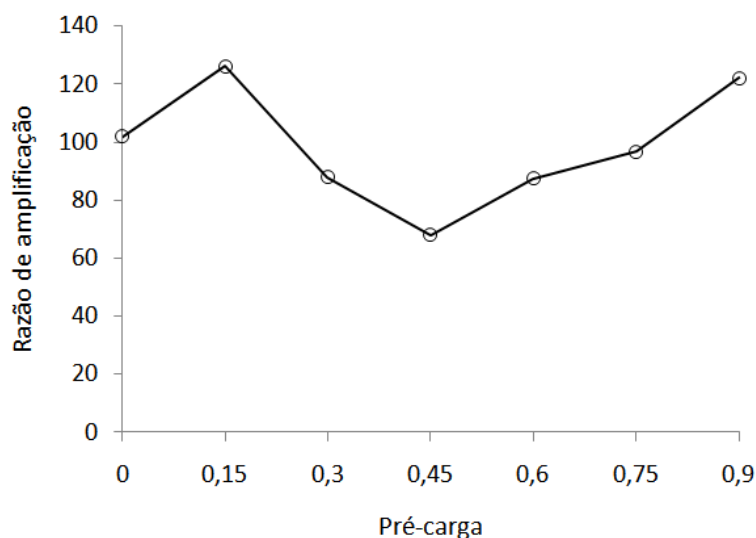


Figura 4.34 –Razão de amplificação da resposta desbalanceada na primeira velocidade crítica para o rotor apoiado em mancais elípticos (MIRANDA e FARIA, 2012)

Observa-se uma menor razão de amplificação (maior atenuação) da resposta desbalanceada na primeira velocidade crítica, para uma pré-carga de 0,45. A literatura técnica apresenta uma recomendação de aplicação de mancais elípticos com pré-carga de aproximadamente 0,5, por apresentar melhor estabilidade (PINKUS, 1956; ALLAIRE e FLACK, 1981). Portanto, para o

exemplo de rotor analisado, este resultado mostra uma concordância entre os valores obtidos pelo MEF para a razão de amplificação e a recomendação da literatura, no que diz respeito à estabilidade de mancais elípticos.

#### 4.3.2 A resposta desbalanceada em função da razão de esbeltez dos mancais elípticos

A resposta desbalanceada do sistema rotor-mancal é analisada para o rotor da Figura 4.35, composto por um eixo flexível apoiado nas extremidades por mancais hidrodinâmicos elípticos, e com um disco massivo acoplado em uma posição assimétrica. Esta posição assimétrica é escolhida para se evitar soluções particulares, restritas a rotores com simetria axial. Os parâmetros do rotor são apresentados na Tabela 4.15, onde os parâmetros básicos dos mancais elípticos são idênticos aos apresentados por Correia(2006).

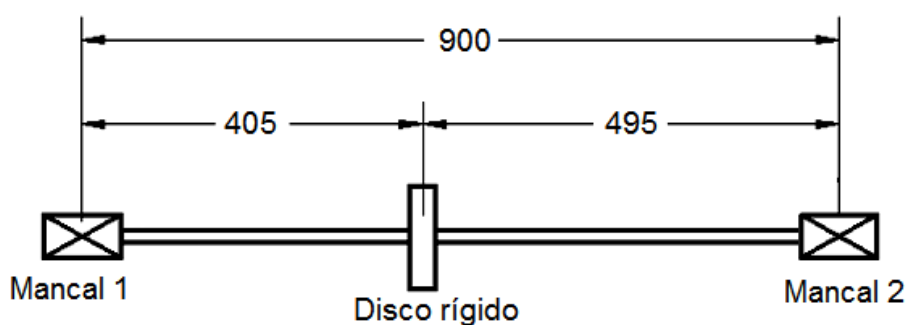


Figura 4.35 –Desenho esquemático do rotor com disco massivo em posição assimétrica

A resposta desbalanceada é calculada através da amplitude adimensional de vibração do rotor operando na primeira velocidade crítica ( $VC$ ), apoiado mancais elípticos com diferentes razões de esbeltez ( $L/D$ ). A amplitude adimensional é obtida dividindo-se a amplitude de vibração pela folga do mancal.

Tabela 4.15– Parâmetros do rotor com mancais elípticos

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
$l_{eixo}$	comprimento do eixo (vão)	0,90	m
$d$	diâmetro do eixo	0,015	m
$L$	comprimento do mancal	(variável)	m
$D$	diâmetro do mancal	0,10	m
$c_1$	folga do mancal	$75 \times 10^{-6}$	m
$\mu$	viscosidade do lubrificante	$8,4 \times 10^{-3}$	Pa·s
$\rho_L$	massa específica do lubrificante	892	kg/m <sup>3</sup>
$E$	módulo de elasticidade do eixo	$205 \times 10^9$	Pa
$\nu$	coeficiente de Poisson do eixo	0,3	-
$\rho$	massa específica do eixo	7850	kg/m <sup>3</sup>
$W$	carga estática em cada mancal	100	N
$\omega$	rotação	2000	rpm

Para este exemplo é adotada uma malha de 80 elementos para o eixo e de 210 a 2100 elementos para o filme fluido, dependendo da razão de esbeltez  $L/D$ , de modo a garantir menos de 1% de erro relativo. Os pontos de equilíbrio estáticos são mostrados na Figura 4.37.

A integração numérica das equações de movimento permitem obter as amplitudes de vibração do rotor na primeira velocidade crítica (VC). São apresentadas na Figura 4.36, em escala  $log-log$ , a amplitude adimensional da resposta desbalanceada calculada no mancal 1, para o rotor operando na primeira VC, em função da razão de esbeltez ( $L/D$ ) dos mancais. São considerados três tipos de mancais elípticos, com valores de pré-carga  $M_p=0$ ;  $M_p=0,45$ ;  $M_p=0,90$ .

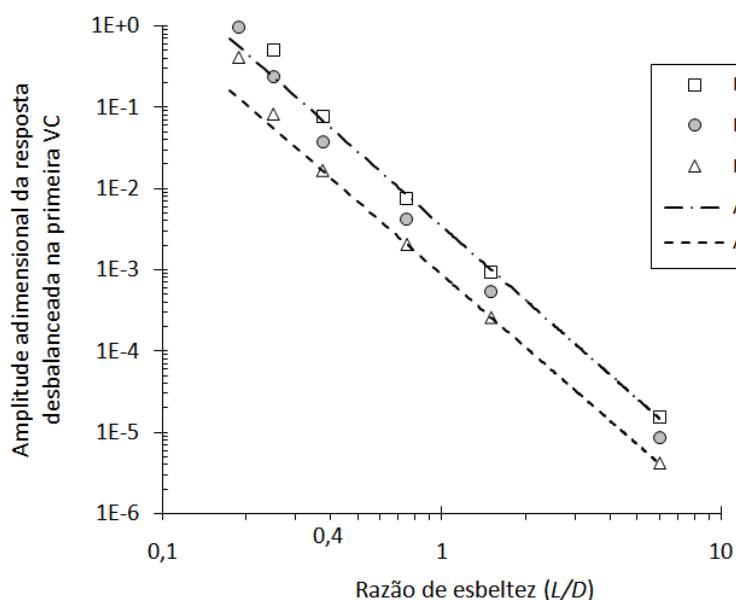


Figura 4.36 – Amplitude de vibração na primeira VC em função da razão de esbeltez dos mancais elípticos

Na Figura 4.36 observa-se que os pontos se mantêm alinhados e próximos das curvas de ajuste, para os valores de  $L/D$  maiores que 0,4, que foi destacado no eixo horizontal. Como a escala é logarítmica em ambos eixos, isto não indica uma linearidade, mas alguma relação de potência entre a amplitude na  $VC$  e a razão de esbeltez dos mancais. A linha traço-ponto apresentada no gráfico representa o ajuste feito para os valores obtidos com  $Mp=0,90$ , e a linha tracejada representa o ajuste feito para os valores obtidos com  $Mp=0$ . O ajuste de curvas mostra que há uma relação cúbica inversa entre a amplitude da resposta desbalanceada ( $Ampl$ ) e a razão de esbeltez ( $L/D$ ) do mancal, com um coeficiente de determinação  $R^2$  maior que 0,999. Desta forma, é possível prever o valor da amplitude calculada, dentro desta faixa, pela expressão:

$$Ampl. = a. (L/D)^{-3} ,$$

onde a constante  $a$  depende da pré-carga ( $Mp$ ) do mancal elíptico.

Observa-se ainda, pela Figura 4.36, que os pontos são bem alinhados para as curvas de ajuste obtidas, para valores de  $L/D > 0,4$ . E esta faixa de valores de razão de esbeltez corresponde à faixa onde a excentricidade adimensional no ponto de equilíbrio estático  $\varepsilon_o$  é menor que 0,35. Este valor é próximo ao obtido nas análises apresentadas nas subseções anteriores, onde se observa uma relação algébrica repetitiva para os parâmetros de desempenho dos mancais na faixa  $\varepsilon_o < 0,3$ .

O resultado apresentado na Figura 4.36 mostra também que o procedimento baseado no MEF pode ser usado na predição da influência da razão de esbeltez dos mancais elípticos na resposta desbalanceada do sistema rotor-mancal, o que é importante na análise de alterações de projetos de máquinas rotativas.

Outro resultado importante é destacado a seguir. Constata-se que a excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático apresenta uma relação cúbica inversa com o valor de  $L/D$ . Esta relação provém dos ajustes de curva apresentados na Figura 4.37, onde pode-se observar os valores calculados para  $\varepsilon_o$  em função de  $L/D$ . A linha fina horizontal equivale a  $\varepsilon_o = 0,3$ .

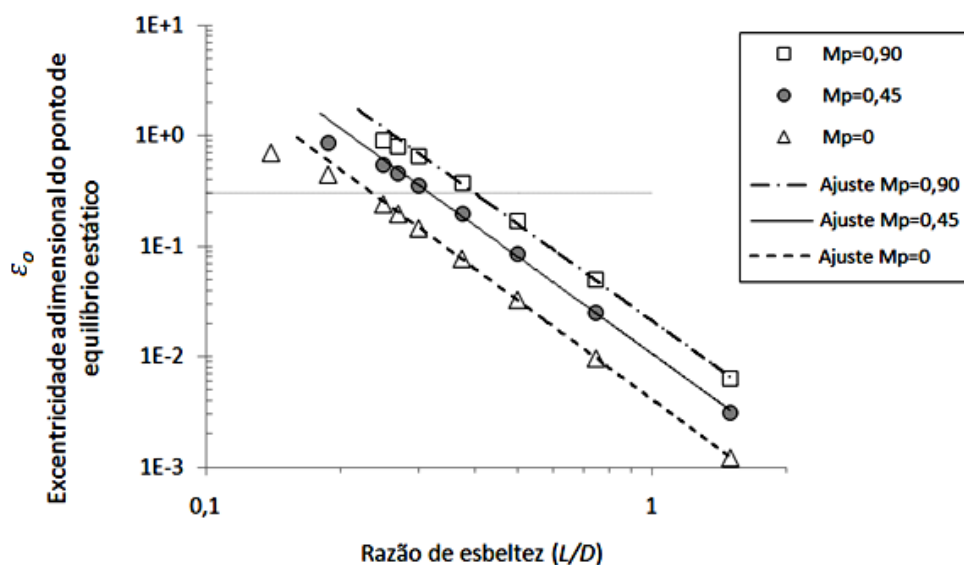


Figura 4.37 – Curvas de ajuste da excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático em função da razão de esbeltez dos mancais elípticos

É observado que os pontos do gráfico seguem alinhados com as curvas de ajuste para valores de  $\varepsilon_0 < 0,3$ , para o mancal cilíndrico ( $Mp=0$ ) e vão se afastando deste alinhamento para valores maiores de  $\varepsilon_0$ . Para os mancais elípticos os pontos seguem alinhados com a curva de ajuste para valores de  $\varepsilon_0$  um pouco maiores. Como o gráfico está em escala *log-log*, o fato das curvas de ajuste serem retas não significa uma relação de linearidade. De fato, a relação entre  $\varepsilon_0$  e  $L/D$  identificada para este exemplo é:

$$\varepsilon = a \cdot (L/D)^{-3}$$

onde  $a$  é uma constante de proporcionalidade que varia com a pré-carga. Esta relação é válida para os três valores de pré-carga considerados neste exemplo. Tendo em vista esta relação, define-se como “razão de ajuste” o valor  $\varepsilon_0 \cdot (L/D)^3$ , para se examinar em qual faixa de excentricidade esta razão é mantida aproximadamente constante. A Figura 4.38 ilustra como a razão de ajuste varia em função de  $\varepsilon_0$ . São incluídas linhas tracejadas para auxiliar na observação do alinhamento dos pontos. É possível perceber que a razão de ajuste é aproximadamente constante até um certo valor de  $\varepsilon$ , que varia com a pré-carga  $Mp$ .

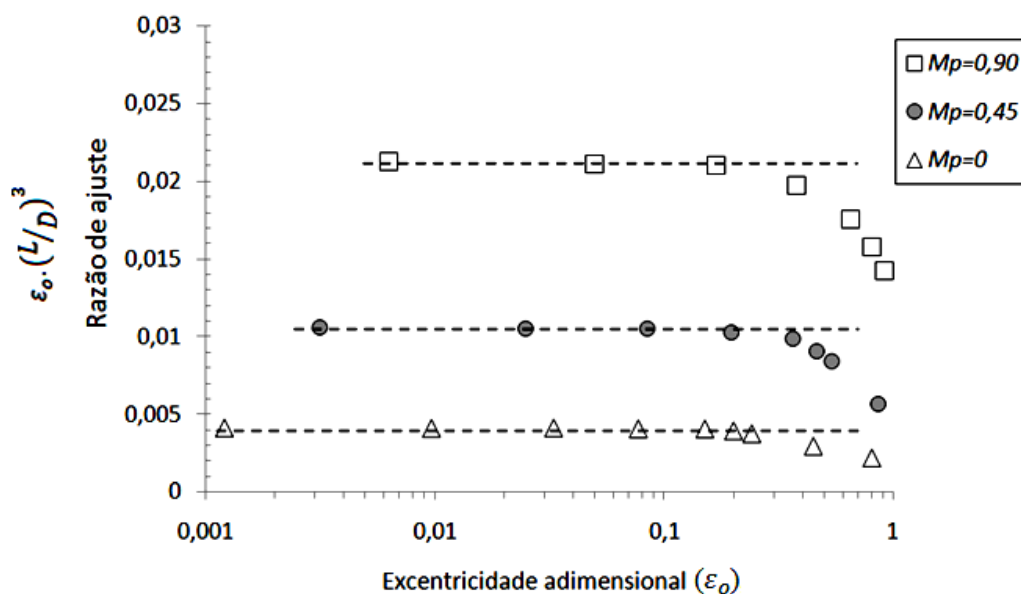


Figura 4.38 – Razão de ajuste de  $L/D$  em função da excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático  $\epsilon_0$  dos mancais

Para melhor identificar um valor limite de  $(\epsilon_0)$ , são apresentados na Figura 4.42 os valores dos erros relativos da razão de ajuste em função da excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático. Estes erros indicam o quanto os pontos da Figura 4.38 estão distantes das retas de referência, ou seja, o quanto cada valor está distante do ajuste de curva calculado.

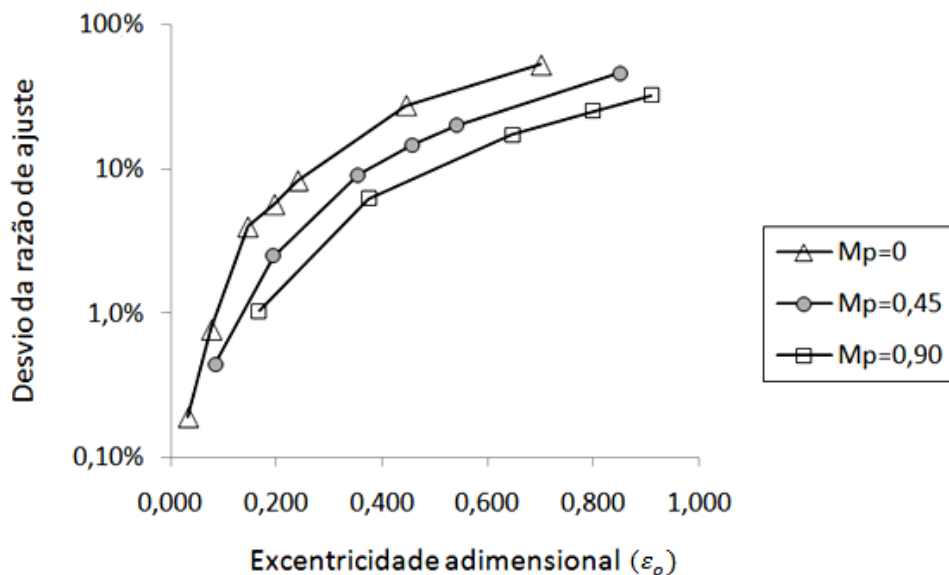


Figura 4.39 – Erros relativos da razão de ajuste de  $L/D$  em função da excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático dos mancais

Percebe-se que os mancais elípticos analisados ( $M_p=0,90$  e  $M_p=0,45$ ) desviam menos do ajuste de curva do que o mancal cilíndrico ( $M_p=0$ ). Pelas curvas da Figura 4.39 observa-se que os mancais elípticos analisados, quando possuem um valor  $\varepsilon_o < 0,3$ , apresentam um desvio pequeno em relação à curva de ajuste, próximo de 5%. Esta faixa de  $\varepsilon_o < 0,3$  equivale à faixa identificada nos demais resultados apresentados neste trabalho, onde são observadas relações algébricas que se mantém com aproximadamente 5% de precisão. Este desvio pode estar relacionado com alguma perturbação numérica do procedimento computacional implementado, que leva a resultados menos confiáveis para valores elevados de excentricidade, principalmente quando  $\varepsilon_o > 0,3$ .

#### 4.3.3 A resposta desbalanceada em função da folga radial dos mancais elípticos

A resposta desbalanceada do sistema rotor-mancais é analisada nesta seção em função da folga radial nos mancais. A folga tem uma forte influência nos coeficientes de força dos mancais hidrodinâmicos, o que provoca uma variação nos níveis de vibração do sistema, principalmente nas velocidades críticas. Os parâmetros do sistema analisado são apresentados na Tabela 4.15, exceto o comprimento dos mancais que foi fixado em 75mm, e a folga passou a ser variável. O rotor ilustrado esquematicamente na Figura 4.35.

São considerados três tipos de mancais elípticos, com pré-cargas ( $M_p$ ) de 0, 0,45 e 0,90. As amplitudes de vibração são calculadas no Mancais 1, para o rotor operando na primeira velocidade crítica. As amplitudes são apresentadas de maneira adimensional na Figura 4.40, em escala logarítmica, onde a linha traço-ponto apresentada no gráfico representa o ajuste feito para os valores obtidos com  $M_p=0,90$ , e a linha tracejada representa o ajuste para os valores obtidos com  $M_p=0$ . Não é apresentada a linha do ajuste para  $M_p=0,45$  por motivos estéticos. Para os três valores de  $M_p$  é identificada uma relação quadrática entre a amplitude adimensional da resposta desbalanceada e a folga radial dos mancais.



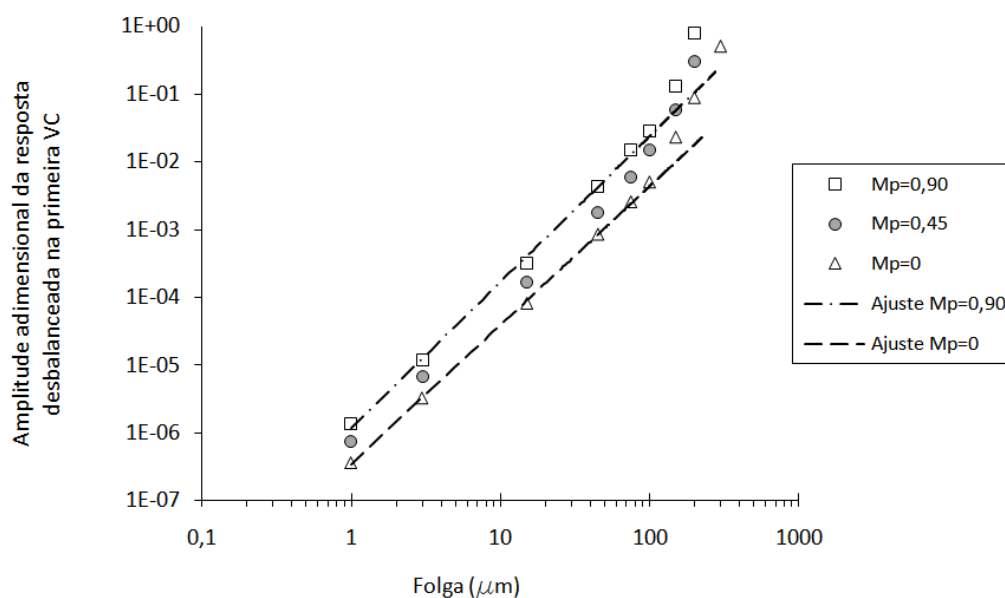


Figura 4.40 – Amplitude de vibração na primeira VC em função da folga radial dos mancais

É observado na Figura 4.40 que os pontos se mantêm alinhados e próximos das curvas de ajuste, para os valores de folga de até aproximadamente  $150\mu\text{m}$ . Como a escala é logarítmica em ambos eixos, isto não indica uma linearidade, mas sim a relação quadrática identificada pelo ajuste de curva.

Na análise da excentricidade  $\varepsilon_o$  em função da folga radial  $c$ , é também identificada uma relação quadrática, dada pela expressão  $\varepsilon_o = a \cdot c^2$ , onde  $a$  é uma constante de proporcionalidade que varia com a pré-carga  $M_p$ . Tendo em vista esta relação, define-se uma nova “razão de ajuste” pela expressão  $\varepsilon_o/c^2$ , para se analisar em qual faixa de excentricidade esta razão é mantida aproximadamente constante. A Figura 4.41 apresenta os valores obtidos para a razão de ajuste em função de  $\varepsilon_o$ . São incluídas linhas tracejadas para auxiliar na observação do alinhamento dos pontos. É possível perceber que a razão de ajuste é aproximadamente constante até um certo valor de  $\varepsilon_o$ , que varia com a pré-carga  $M_p$ .

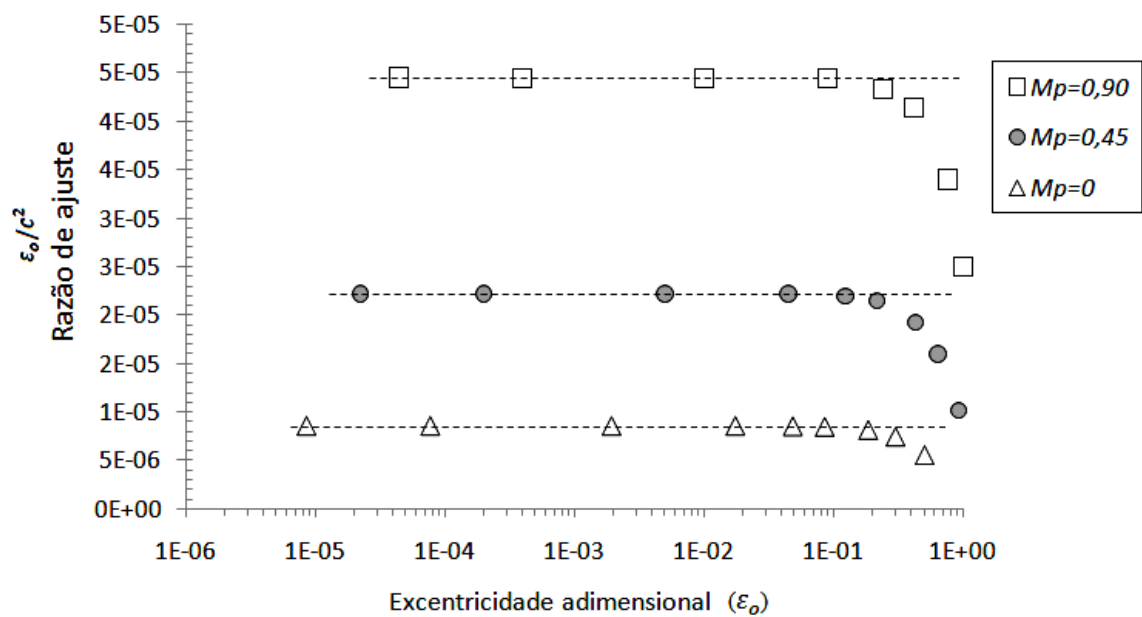


Figura 4.41 – Razão de ajuste da folga radial em função da excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático dos mancais

Para melhor identificar um valor limite de  $\varepsilon_o$ , são apresentados na Figura 4.42 os valores dos erros relativos da razão de ajuste em função de  $\varepsilon_o$ . Estes erros indicam o quanto os pontos da Figura 4.41 estão distantes das retas de referência, ou seja, o quanto cada valor está distante do ajuste de curva calculado.

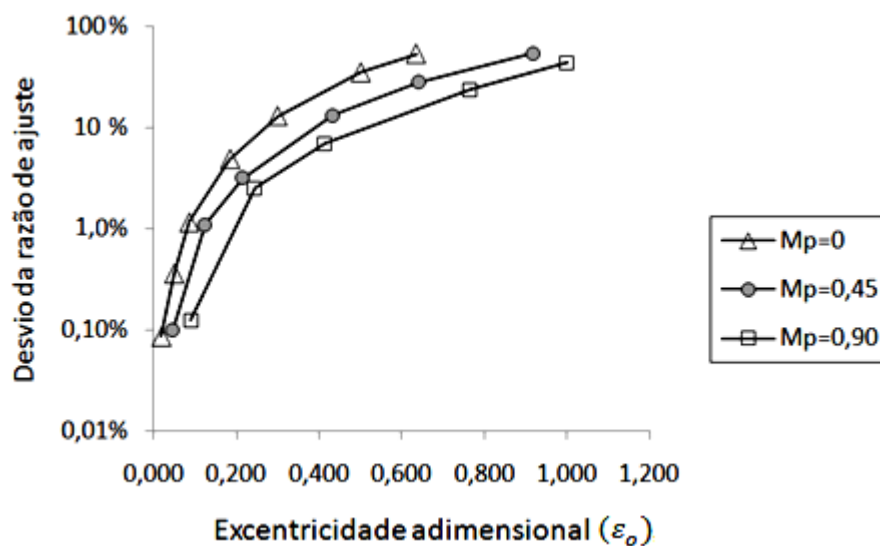


Figura 4.42 – Erros relativos da razão de ajuste da folga radial em função da excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático dos mancais

É observado novamente que os mancais elípticos analisados ( $Mp=0,90$  e  $Mp=0,45$ ) desviam menos do ajuste de curva do que o mancal cilíndrico ( $Mp=0$ ), e que para uma excentricidade adimensional  $\varepsilon_0 < 0,3$ , os mancais elípticos apresentam um desvio pequeno em relação à curva de ajuste, próximo de 5%. Este resultado é muito parecido com aquele identificado na seção anterior, onde é analisada a resposta desbalanceada em função da razão de esbeltez  $L/D$  dos mancais.

A literatura técnica afirma que, sob determinadas condições operacionais, os mancais elípticos apresentam uma faixa de operação mais ampla do que os mancais cilíndricos (CORREIA, 2007). Desta forma, pode-se estabelecer uma relação entre os resultados obtidos pelo MEF implementado e esta afirmação da literatura, se for considerado que o desvio em relação à curva de ajuste está relacionado com algum tipo de limitação operacional.

## 5 CONCLUSÕES

O procedimento computacional aqui desenvolvido, baseado no MEF, permite prever o comportamento dinâmico de diferentes tipos de rotores compostos por eixo flexível, discos massivos e mancais hidrodinâmicos de perfil cilíndrico ou elíptico. Os resultados produzidos permitem validar o modelo pela comparação com valores experimentais coletados em uma bancada de teste e também com valores publicados na literatura.

O presente trabalho apresenta uma importante contribuição na análise de sistemas rotor-mancal pelo fato de investigar o sistema rotativo de maneira ampla, tanto para o eixo flexível, quanto para os mancais. São considerados no modelo do eixo flexível os efeitos de deformação por cisalhamento, inércia rotatória e efeito giroscópico, e para o modelo dos mancais hidrodinâmicos cilíndricos e elípticos são considerados todos os coeficientes de força independentes, sem o uso de teorias simplificadas, como os modelos de mancal curto ou de mancal longo.

Este procedimento computacional é muito útil não apenas para se determinar a resposta desbalanceada de rotores, como também para se avaliar a viabilidade de alterações de projeto, capazes de melhorar o comportamento dinâmico de máquinas rotativas.

Os coeficientes de força dos mancais hidrodinâmicos desempenham um importante papel no projeto de máquinas rotativas, na previsão de sua capacidade de suportar vibrações e de operar em condições estáveis. Os resultados apresentados neste trabalho mostram claramente a influência dos parâmetros geométricos dos mancais hidrodinâmicos de geometria fixa, cilíndricos e elípticos, nos seus coeficientes de força e na resposta desbalanceada do sistema rotativo.

Os resultados numéricos obtidos pelo MEF aqui desenvolvido apresentam um erro relativo de aproximadamente 4% para as frequências naturais, em relação aos resultados experimentais e da literatura.

A análise da influência da folga radial dos mancais elípticos nos coeficientes de força mostra que os coeficientes de rigidez direta adimensionais variam pouco, dentro da faixa operacional onde a excentricidade adimensional do ponto de equilíbrio estático ( $\varepsilon_0$ ) é menor que 0,3. Acima deste valor, os coeficientes de rigidez direta adimensionais diminuem consideravelmente.

Observa-se ainda que o coeficiente de rigidez cruzado adimensional ( $k_{xy}$ ) é inversamente proporcional ao  $\varepsilon_0$ , o que permite introduzir um novo adimensional: o “coeficiente de rigidez cruzada adimensional modificado”, definido por  $\bar{k}_{xy} = \varepsilon_0 \cdot k_{xy}$ . Este coeficiente também apresenta valores aproximadamente constantes, quando se varia a folga do mancal elíptico, dentro da faixa onde  $\varepsilon_0 < 0,3$ . Também são observados valores aproximadamente constantes para a razão  $C_{xy}/K_{xx}$  e para o amortecimento efetivo ( $2\omega C_{xx}/K_{xy}$ ), quando se varia a folga, mantendo-se  $\varepsilon_0 < 0,3$ .

A análise da influência da razão de esbeltez ( $L/D$ ) dos mancais elípticos nos coeficientes de força permite observar que o amortecimento efetivo ( $2\omega C_{xx}/K_{xy}$ ) e o coeficiente de amortecimento cruzado adimensional ( $c_{xy}$ ) dos mancais elípticos seguem um padrão comum quando  $\varepsilon_0 < 0,3$ . Para o amortecimento efetivo, os valores são aproximadamente constantes enquanto para  $c_{xy}$ , observa-se uma relação linear entre  $c_{xy}$  e  $\varepsilon_0$ , nesta faixa.

Na análise da influência da pré-carga ( $Mp$ ) dos mancais elípticos nos coeficientes de força, observa-se uma proporcionalidade entre  $Mp$  e  $(k_{yy})^{2/3}$  e entre  $Mp$  e  $(k_{xx})^{1/2}$  na faixa onde  $\varepsilon_0 < 0,3$ . É identificado também que o amortecimento efetivo ( $2\omega C_{xx}/K_{xy}$ ) varia linearmente com  $Mp$  nesta faixa.

É mostrado através de um exemplo de rotor flexível apoiado em mancais elípticos, que a razão de amplificação da resposta desbalanceada atinge um mínimo para um exemplo de mancal com  $Mp=0,45$ . A literatura técnica apresenta uma recomendação de aplicação de mancais elípticos com pré-carga de aproximadamente 0,5, por apresentar melhor estabilidade (PINKUS, 1956; ALLAIRE e FLACK, 1981). Portanto, para o exemplo de rotor analisado, este resultado mostra uma concordância entre os valores obtidos pelo MEF para a razão de amplificação e a recomendação da literatura, no que diz respeito à estabilidade de mancais elípticos.

A análise da resposta desbalanceada permite observar que a amplitude de vibração na primeira velocidade crítica é proporcional a  $(L/D)^{-3}$ , e também proporcional ao quadrado da folga radial ( $c^2$ ), na faixa onde  $\varepsilon_0 < 0,3$ . Esta proporcionalidade é mantida em uma faixa operacional mais ampla para os mancais elípticos do que para os mancais cilíndricos analisados.

Este resultado de aproximadamente 0,3 encontra respaldo na literatura técnica, que afirma que o procedimento linearizado de perturbação em torno da posição de equilíbrio é válido para até

40% da folga do mancal (LUND,1987). Esta observação é também destacada no trabalho de Sawicki e Rao (2004). Além disso, Furukawa *et al.* (1996) observam que a não linearidade do filme fluido produz grandes diferenças entre os valores calculados e os medidos experimentalmente, em especial na região de alta excentricidade.

Desta forma, sugere-se para trabalhos futuros, a investigações mais aprofundadas sobre os efeitos dinâmicos que ocorrem quando o ponto de equilíbrio estático ultrapassa o limite de 40% da folga do mancal . O método aqui implementado adota um procedimento de perturbação linear em torno da posição de equilíbrio, obtendo equações de lubrificação de ordem zero e de primeira ordem, baseadas na equação de Reynolds. Sugere-se ainda a implementação de um modelo que considere termos de ordem superior na obtenção das equações de lubrificação, ou que adote algum outro modelo não-linear.

Sugere-se ainda aplicar a metodologia deste trabalho em outros procedimentos computacionais, para observar faixas onde os resultados possam apresentar padrões repetitivos. Sugere-se investigar a existência de relações algébricas entre os parâmetros do sistema e os resultados, e que possam se manter válidas dentro de uma faixa de valores.

Outras abordagens que podem ampliar os resultados do presente trabalho, incluem a análise de mancais hidrodinâmicos de geometria variável, com fluidos não-newtonianos, e a análise de efeitos térmicos nos parâmetros de desempenho destes mancais.

Os resultados deste trabalho fornecem subsídio à área de projeto de máquinas rotativas, uma vez que o procedimento computacional desenvolvido permite prever seu comportamento dinâmico para diversas condições operacionais.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ABDULJABBAR, Z.; ELMADANY, M. M.; AL-BAHKALI, E., 1997, On the vibration and control of a flexible rotor mounted on fluid film bearings, *Computers & Structures*, Volume 65, Issue 6, December 1997, Pages 849-856.
2. AL-HUSSAIN, K. M. , 2003, Dynamic Stability of Two Rigid Rotors Connected by a Flexible Coupling with Angular Misalignment, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 266, Issue 2, 11 September 2003, Pages 217-234
3. ALLAIRE, P.E., FLACK R.D.,1981, Design of Journal Bearings for Rotating Machinery, *Proceedings of the Tenth Turbomachinery Symposium*, Houston, USA, pp.25-45.
4. ALMEIDA JUNIOR, A. X., FARIA, M. T. C., 2003, Análise da Vibração Torcional em Hidrogeradores utilizando o Método de Elementos Finitos, *XXIV CILAMCE*, Ouro Preto, MG, Brasil, 14p.
5. ARMENTROUT, R. W., 1998, Transient Analysis of Rotor-Bearing Systems Using Approximate Support Models, *Ph.D. dissertation in Mechanical Engineering* – Vanderbilt University – USA.
6. BACHSCHMID, N., VANIA, A., 2002, Model Based Analysis of the Non-Linear Behaviour of Oil-Film Journal Bearings, *Sixth International Conference on Rotor Dynamics*, 2002, Sydney. Paper-ID 28, 10p.
7. BALANTRAPU, A. R. K., 2004, Identification of Force Coefficients in Flexible Rotor-Bearing Systems – Enhancements and Further Validations, *MSc. Thesis*, Texas A&M University, Texas, USA.
8. BATHE, K. J, 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall.
9. BAVASTRI, C. A., FERREIRA, E. M. S., ESPÍNDOLA, J. J., LOPES, E. M. O., 2008, Modeling of Dynamic Rotors with Flexible Bearings due to the use of Viscoelastic Materials, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sci. & Eng. (ABCM)*, 2008, Brazil.
10. BERRY, J.E., 1994, Predictive Maintenance and Vibration Signature Analysis II, *Technical Associates of Charlotte Inc.*, Charlotte, NC, Australia.
11. BODE, H. A., MENEZES, J. C., 2005, Dynamic Analysis of a Rotor-Bearing System by Finite Elements, *18th International Congress of Mechanical Engineering*, COBEM 2005 (ABCM), November 6-11, 2005, Brazil.
12. BOEDO, S., BOOKER, J.F., 1997, Surface Roughness and Structural Inertia in a Mode-Based Mass-Conserving Elastohydrodynamic Lubrication Model, *ASME Journal of Tribology*, vol. 119, pp. 449-455.
13. BORU, F.E., 2010, Numerical and Experimental Response and Stability Investigations of Anisotropic Rotor-Bearing Systems, *PhD.Dissertantion*, University of Kassel, Germany

14. BUSSE, L., HEIBERGER, D. e WEY, J., 1980. Aspects of Shaft Dynamics for Industrial Turbines, *Brown Boveri Review*, Vol. 67, pp. 292-299.
15. CAPONE, G., D'AGOSTINO, V., GUIDA, D., 1994, A Finite Length Plain Journal Bearing Theory, *Journal of Tribology*, v.116, pp.648-653, july 1994.
16. CHAPRA, S.C. e CANALE, R.P. , 2002, Numerical Methods for Engineers, McGraw-Hill, 4th Ed., New York, EUA.
17. CHEN, J.H., e LEE, A.C., 1997, "Identification of Linearized Dynamic Characteristics of Rolling Element Bearings", *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 119, pp. 60-69.
18. CHENG Mei, MENG Guang , JING Jian-ping, 2008, Numerical Analysis of Nonlinear Rotor-bearing-seal System, *J. Shanghai Jiaotong Univ. (Sci.)*, 2008, 13(4): 418-425.
19. CHILDS, D.W., GRAVISS, K., 1982, A Note on Critical Speed Solutions for Finite-Element-Based Rotor Models, *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 104, pp. 412-416.
20. CHILDS, D.W.,1993. *Turbomachinery Rotordynamics*, McGraw-Hill, New York, USA, 476 pp.
21. CHOY, F. K., Braun, M. J., e Hu, Y. 1991. Nonlinear Effects in a Plain Journal Bearing—Part I: Analytical Study and Part II: Results. *ASME Journal of Tribology* 113:555-570.
22. CHOY, F. K., Braun, M. J., e Hu, Y. 1992. Nonlinear Transient and Frequency Response Analysis of a Hydrodynamic Journal Bearing. *ASME Journal of Tribology* 114:448-454.
23. CHU, C. S., Wood, K. L., e Busch-Vishniac, I. J. 1998, A Nonlinear Dynamic Model with Confidence Bounds for Hydrodynamic Bearings. *ASME Journal of Tribology* 120:595-604.
24. CLOUGH R. W., PENZIEN J. , 1975, Dynamics of Structures. Mcgraw-Hill professional.
25. CORREIA, F. A. G., 2007, Determinação de Características de Desempenho de Mancais Radiais Elípticos Utilizando o Método de Elementos Finitos, *Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil.
26. COUPER, G. R., 1966, The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics, June 1966, pp.335-340.
27. COUTO, P. R. C., 2006, Análise de Mancais Radiais Hidrodinâmicos com Aplicação em Compressores Herméticos de Refrigeração. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2006. Tese (Doutorado).
28. CRAGGS, A., 1993, Effect of Distributed Bearing Stiffness on the Critical Speeds of Shafts, *Journal of Sound and Vibration*, 160, 559-565.
29. DIANA, G., MASSA E., PIZZIGONI, 1975, A Finite Element Method for Computing Oil Whirl Instability of a Rotating Shaft Supported by Elastic Bearings, *Institution of Mechanical Engineers Publications*, IV IFToMM, Newcastle, 1975, p.659-663.



30. DIEN.I.K. e ELROD.H.G., 1983 A Generalized Steady-State Reynolds Equation for Non-Newtonian Fluids, With Application to Journal Bearings, *Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology*, 105, 385-390.
31. DIMARAGONAS, A.D., 1975, A General Method for Stability Analysis of Rotating Shafts, *Ingenieur-Archiv*, Vol.44, pp. 9-20.
32. EHRICH, F.F., 1992, *Handbook of Rotordynamics*, McGraw-Hill, USA, 452p.
33. ELHIBIR, S., 2009, Dynamic Analysis of a Rotor-Bearing System, *Cleveland State University*, MSc. Thesis, August, 1997.
34. ELMADANY, Mohamed M., ABDULJABBAR, Zohair S., AL-ABDULWAHAB ,A.A., 2001, On the Dynamic Analysis of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements, *Final Research Report*, Mechanical Engineering Department, King Saud University, Riyadh.
35. ENGWALL, M. A., 1991, Squeeze Film Bearing Damper Supporting a Rigid Rotor: Analysis, Experiments, Dynamic Simulation and Design Study. *Ph.D. Dissertation*, Department of Mechanical Engineering, Stanford University.
36. ESPÍNDOLA, J.J., FLOODY, S. E., 1999, On the Modeling of Metal-Elastomer Composite Structures: A Finite Element Method Approach, *Applied Mechanics in the Americas - PACAM IV*, Vol. 8, pp.1335-1342.
37. FARIA, M.T.C., 1990, Estudos do Comportamento Dinâmico de Rotores Flexíveis Assimétricos Através do Método de Elementos Finitos, *Dissertação de Mestrado*, UFSC, Florianópolis.
38. FARIA, M. T. C., BARCELLOS, C. S., 1991, Velocidades Críticas e Frequências Naturais de Rotores Flexíveis Assimétricos, *Anais do 11º Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (XI COBEM)*, São Paulo, SP, Brazil, pp.165-168.
39. FARIA, M. T. C., CORREIA , F., A. G., Diniz , D. L. E., 2006, Procedimento de Elementos Finitos para Análise de Mancais Radiais Cilíndricos Lubrificados a Óleo, *Proceedings of the XXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2006*, Belém, PA, Brazil.
40. FARIA, M. T. C., MIRANDA, W.M., 2012, Pressure dam influence on the performance of gas face seals, *Tribology International*, 47 (2012) 134–141.
41. FLACK, R.D., ROOKE, J.H., 1980, A Theoretical-Experimental Comparison of the Synchronous Response of a Bowed Rotor in Five Different Sets of Fluid Film Bearings, *Journal of Sound and Vibration*, v. 73, n.4, p. 505-517.
42. FURUKAWA, T., Matsumoto, I., Esaki, J., 1996, Nonlinear Analysis of Dynamic Characteristics of Cylindrical Bearing Oil Film, *JSME International Journal Series C*, v.39, n.3, pp. 577-585, 1996.
43. GASCH, R., 1976, Vibration of Large Turbo-Rotors in Fluid-Film Bearing on an Elastic Foundation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 47, pp.53-73.
44. GOMEZ-Mancilla, J., NOSOV, V., SILVA-Navarro, G., 2005, Rotor-Bearing System Stability Performance Comparing Hybrid versus Conventional Bearings, *International Journal of Rotating Machinery*, 2005; 1, 16-22.

45. GANESAN, R., 2000, Effects of bearing and shaft asymmetries on the instability of rotors operating at near-critical speeds, *Mechanism and Machine Theory*, Volume 35, Issue 5, May 2000, Pages 737-752.
46. GUO, Z., KIRK, R. G., 2003, Instability Boundary for Rotor-Hydrodynamic Bearing Systems, Part 1: Jeffcott Rotor with External Damping, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, October 2003, Vol. 125, 417-422.
47. GUO, Z., KIRK, R. G., 2003b, Instability Boundary for Rotor-Hydrodynamic Bearing Systems, Part 2: Rotor with External Flexible Damped Support, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, October 2003, Vol. 125, 423-426.
48. GUNTER, E.J., 1970, Influence of Flexibly Mounted Rolling Element Bearing on Rotor Response, Part I - Linear Analysis, *Journal of Lubrication Technology*, Transactions ASME, Series, F92, pp.59-75.
49. GUPTA, K.K., 1974 Eigenproblem Solution of Damped Structural Systems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, pp.877-911.
50. HAMROCK, B.J., 1994, Fundamentals of Fluid Film Lubrication, *McGraw-Hill*, New York, EUA.
51. HIRANI, H., Suh, N. P., 2005, Journal Bearing Design Using Multi Objective Genetic Algorithm and Axiomatic Design Approaches. *Tribology International*. Vol. 38, 2005, pp. 481-491.
52. HOLLIS, P., e TAYLOR, D. L., 1986, Hopf Bifurcation to Limit Cycles in Fluid Film Bearings, *Trans. ASME, J. Tribology*, 108(2), pp. 184–189.
53. HONG, Seong-Wook, SEO, Yong-Gyu, PARK, Jong-Heuck, 2001, A Study on the Synchronous Response of General Rotor-Bearing Systems due to Initial Deformation, *KSME International Journal*, Vol. 15 No.9, pp. 1226-1239.
54. HONG, S. W. e PARK, J.,H, 1999, Dynamic Analysis of Multi-Stepped, Distributed Parameter Rotor-Bearing Systems, *Journal of Sound and Vibration*, 227(4), 769-785.
55. HU, W.; MIAH H.; FENG, N. S.; HAHN, E. J., 2000, A rig for testing lateral misalignment effects in a flexible rotor supported on three or more hydrodynamic journal bearings, *Tribology International*, Volume 33, Issues 3-4, April 2000, Pages 197-204.
56. JEI, Yang-Gyu, LEE, Chong-Won, 1988, Finite Element Model of Asymmetrical Rotor-Bearing Systems, *KSME Journal*. Vol. 2, No.2, pp. 116-124.
57. JEFFCOTT, H. H., 1919, The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed-The Effect of Want of Balance, *Philos. Mag.*,37, pp. 304–314.
58. KALITA, M, KAKOTY, S. K., 2004, Analysis of whirl speeds for rotor-bearing systems supported on fluid film bearings, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 18, Issue 6, November 2004, Pages 1369-1380.
59. KARLBERG, M., 2010, Approximated Stiffness Coefficients in Rotor Systems Supported by Bearings with Clearance, *International Journal of Rotating*

*Machinery*, Volume 2010, Article ID 540101, 5 pages.

60. KIRK, R.G., GUNTER, E.J., 1972, The Effect of Support Flexibility and Damping on the Synchronous Response of a Single-Mass Flexible Rotor, *ASME Journal of Engineering for Industries*, Vol.94, pp.221-232.
61. KOSTRZEWSKY, J., FLACK, R, 1990, Accuracy Evaluation of Experimentally Derived Dynamic Coefficients of Fluid Film Bearings – PartII: Case Studies. *Tribol. Transacions* 1990; 33(1):115–21.
62. KRAMER., E., 1993, Dynamics of Rotors and Foundations, New York, Springer-Verlag, 1993, p. 381.
63. KUMAR, A., SINHASAN, R., SING, D. V., 1980, Performance Characteristics of Two-Lobe Hydrodynamic Journal Bearings, *Journal of Lubrication Technology*, Vol.102, p. 425-429.
64. LANG, O.R. e STEINHILPER, W., 1978, Gleitlager Konstruktionsbücher, Springer-Verlag, 2a. Ed., Berlim, p. 132 e 153.
65. LAVAINNE, J., 2003, Sensitivity of a Compressor Repeating-Stage to Geometry Variation, *Thesis (S.M.)--Massachusetts Institute of Technology, USA*.
66. LAZARUS A., PRABEL B., COMBESURE D., 2010, A 3D Finite Element Model For The Vibration Analysis Of Asymmetric Rotating Machines, *Journal of Sound and Vibration*, vol.329 n.18 pp:3780-3797.
67. LUND, J.W., e THOMSEN, K. K. 1978, Calculation Method and Data for the Dynamic Coefficients of Oil Lubricated Journal Bearings. *Topics in Fluid Bearing and Rotor Bearing System Design and Optimization*, ASME, New York, 1–28.
68. LUND, J.W., 1980, Sensitivity of the Critical Speeds of a Rotor to Changes in the Design, *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 102, pp.115-121.
69. LUND, J. W. 1987, Review of the Concept for Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings. *ASME Journal of Tribology* , 109:38–41.
70. LUND, J.W., 1994, Application of Modal Methods in Rotor Dynamics, 4<sup>th</sup> IFTOMM Conference - *Rotordynamics*, Chicago, USA, pp.317-320.
71. MACHADO, L.H.J., 2006, Análise Experimental do Comportamento Dinâmico de Mancais Radiais Hidrodinâmicos de Geometria Fixa, *Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil.
72. MEIROVITCH, L., 1974, A New Method of Solution of the Eigenvalue Problem for Gyroscopic Systems, *AIAA Journal*, vol. 12, n.10, pp.1337-1342.
73. MEIROVITCH L., 1967, Analytical Methods in Vibration. The Macmillan Company, New York.
74. MEIROVITCH, L., RYLAND, G., 1979, Response of Slightly Damped Gyroscopic Systems, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 67, n. 1, pp.1-19.
75. MEIROVITCH, L., 1980, Computational Methods in Structural Dynamics, *Sijthoff & Noofdhoff International Publishers, The Netherlands*.

76. MIDDLETON, V., 1973, Radial Stiffness of Bearings, *Tribology Handbook*, In M. J. Neal (ed), Butterworths, London, 1973.
77. MIRANDA, W.M, FARIA, M.T.C, 2012, Lateral Vibration Analysis of Flexible Shafts Supported on Elliptical Journal Bearings, *Tribology Letters*, Vol.46(2012), no. 3.
78. MIRANDA, W.M., MACHADO, L.H.J., FARIA, M.T.C., 2005, Some Insights Into the Dynamic Response of Flexible Rotors Supported on Fluid Film Bearings, *18<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering, COBEM 2005*, Ouro Preto, MG, Brasil, 8p.
79. MUSZYNSKA A., 1986, Model Testing of Rotor/Bearing System, *The International Journal of Analytical and Experimental Model Analysis*, 1986, 1(3): 15–34.
80. NELSON, H.D. , 1980. A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory, *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol.102, pp. 793-803.
81. NELSON, H.D. e McVAUGH, J.M., 1976. The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements, *ASME Journal of Engineering for Industry*, May 1976, p. 593-600.
82. NORDMANN, R. M., 1982, Parameter identification and sensitivity analysis in rotating machinery , University of Kaiserslautern, Department of Mechanical Engineering, German Federal Republic, 1982.
83. OCVRK, F. W., 1952, Short-Bearing Approximation for Full Journal Bearings, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), Technical Report TN 2808, 1952.
84. ÖZGÜVEN, H.N., ÖZKAN, L. Z., 1984, Whirl Speeds and Unbalance Response of MultiBearing Rotors Using Finite Elements, *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol.106, pp.72-79.
85. PALAZZOLO, A.B., WANG, B.P., PILKEY, W.D., 1983, Eigensolution Reanalysis of Rotor Dynamic Systems by the Generalized Receptance Method, *ASME Journal of Engineering for Power*, vol. 105, pp.543-550.
86. PINKUS, O.,1956, Analysis of Elliptical Bearings, *Transactions of ASME*, 78 (1956) 965-973.
87. PINKUS, O.,1956b, Power Loss in Elliptical and Three-lobe Bearings, *Transactions of ASME*, 78 (1956) 899-904.
88. PINKUS, O., 1987, The Reynolds Centennial: A Brief History of the Theory of Hydrodynamic Lubrication, *Transactions of the ASME - Journal of Tribology*, Vol.109, pp.2-20, 1987.
89. PLAUT, R.H., HUSEYIN, K.,1972, Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors in Non-Self-Adjoint Systems, *AIAA Journal*, vol. 11, n. 2, pp.250-253.
90. POLK, S.R., 1974, “Finite Element Formulation and Solution of Flexible Rotor-Rigid Disc Systems for Natural Frequencies and Critical Whirl Speeds, *M.S.E Engineering Report*, Arizona State University, Tempe, AZ.
91. QIU, Z. L., e TIEU, A. K. 1996. The Effect of Perturbation Amplitudes on Eight

- Coefficients of Journal Bearings. *STLE Tribology Transactions* 39:469–475.
92. RAGHUNANDANA, K., 2007, Inverse Design Methodology for the Stability Design of Elliptical Bearings Operating with Non-Newtonian Lubricants, *World Congress on Engineering and Computer Science 2007*, WCECS 2007, October 24-26, 2007, San Francisco, USA.
  93. RAJALINGHAM C., PRABHU B.S., 1987, The Influence of Variation of Viscosity with Temperature on the Steady State Characteristics of Journal Bearings – Simplified Analysis, *Tribology International*, v.20, n.5, pp.261-266, 1987.
  94. RAJAN, N., NELSON, H. D., CHEN, W. J., 1986, Parameter Sensitivity in the Dynamics of Rotor-Bearing Systems, *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, pp. 197-206.
  95. RAO, B. S., Sekhar, A. S. e Majumdar, B. C., 1996, Analysis of Rotors Considering Distributed Bearing Stiffness and Damping, *Computers & Structures*, Vol. 61, No. 5, pp. 951-955, 1996.
  96. RAO, S.S., 1995, Mechanical Vibrations, *Addison-Wesley Publishing Co.*, WCECS 2007, October 24-26, 2007, San Francisco, USA
  97. REZVANI, M.A., 2009, A Harmonic Balance Approach for the Analysis of Flexible Rotor Bearing Systems on Non-Linear Support, *Transaction B: Mechanical Engineering*, Vol.16, No. 5, pp. 413-424.
  98. ROHDE, S. M., MALLISTER, G. T., 1975, “A Variational Formulation for a Class of Free Boundary Problems Arising in Hydrodynamic Lubrication,” *Int. J. Eng. Sci.*, 13, pp. 841–850.
  99. RUHL, R. L., 1970, Dynamics of Distributed Parameter Rotor Systems: Transfer Matrix and Finite Element Techniques, *PhD dissertation*, Cornell University.
  100. RUHL, R. L., BOOKER, J. F., 1972, A Finite Element Model for Distributed Parameter Turbo-rotor Systems” *ASME Journal of Engineering for Industry*, 68, pp. 128-132.
  101. SALDARRIAGA, M. R. V., 2007, Atenuação de Vibrações em Máquinas Rotativas Flexíveis Usando Materiais Viscoelásticos nos Suportes, *Tese de Doutorado*, Universidade Federal de Uberlândia, Brasil.
  102. SANTANA, Pedro Menezes, 2009, Resposta Complexa de um Sistema Rotor-Mancais-Fundação, *Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica*, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009, 94 p.
  103. SAWICKI, J. T., Rao, T. V. V. L. N. , 2004, A Nonlinear Model for Prediction of Dynamic Coefficients in a Hydrodynamic Journal Bearing, *International Journal of Rotating Machinery*, 10(6): 507–513, 2004.
  104. SEHGAL, R., 2010, Experimental Measurement of Oil Film Temperatures for Elliptical Journal Bearing Profile Using Different Grade Oils, *Tribology Online*, 5,6 (2010) 291-299.
  105. SHEN, G., Xiao, Z., Zhang, W., Zheng, T., 2006, Nonlinear Behavior Analysis of a Rotor Supported on Fluid-Film Bearings, *Journal of Vibration and Acoustics*,

February 2006, Vol.128, 35-40.

- 106.SINOUE, J. J., VILLA, C., Thouverez, F., 2005, Experimental and Numerical Investigations of a Flexible Rotor on Flexible Bearing Supports. *International Journal of Rotating Machinery*, vol.3, 179–189.
- 107.SINGH, A., 1978, Stability of Finite Two Lobe Journal Bearings for Rigid and Flexible Rotors, *Ph.D. Thesis*, University of Allahabad, 1978.
- 108.SINGH, A., GUPTA, B.K., 1982, Stability Limits of Elliptical Journal Bearings Supporting Flexible Rotors, *Wear*, Volume 77, Issue 2, 1 April 1982, Pages 159-170.
- 109.SOMMERFELD, A.,1904, Zur Hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung, *Zs. Math. And Phys.*, Vol. 50 No.1, 1904, pp.97-155.
- 110.STEPHENSON, R.W., ROUCH, K.E., 1992, Generating Matrices of the Foundation Structure of a Rotor System From Test Data, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 154, pp.467-484.
- 111.STERNLICHT, B., 1964, Mechanical Design and System Handbook, H.A. Rothbart (ed), 1964 – Chap. 12.
- 112.STERNLICHT, B., LEWIS, P., 1968, Vibration Problems With High-Speed Turbomachinery, *ASME Journal of Engineering for Industry*, pp.174-186.
- 113.SUNDARARAJAN, P. , 1996, Response and Stability of Nonlinear Rotor Bearing Systems, *PhD Dissertation*, Texas A&M University, Texas, USA.
- 114.TADEO, A. T.,2003, Modelagem dos Acoplamentos Mecânicos nos Sistemas Horizontais Rotor-Acoplamento-Mancal, Universidade Estadual de Campinas. Fevereiro de 2003, 250p. Tese (Doutorado).
- 115.TAPIA T., A., CAVALCA, K. L., 2002, Modeling Effect of Flexible and Rigid Couplings in Mechanical Systems, *6th IFToMM - Conference on Rotor Dynamics*, Sidney, Australia, 2002, pp. 1-9.
- 116.TAYLOR, A. G., CRAGGS, A., 1994, A Finite Element Model for a Flexible Non-Symmetric Rotor on Distributed Bearing: a Stability Study, *Journal of Sound and Vibration*, 173, 1-22.
- 117.THORKILDSEN, T., 1972, Solution of a Distributed Mass and Unbalanced Rotor System Using a Consistent Mass Matrix Approach, *MSE Engineering Report*, Arizona State University, June 1972.
- 118.TIWARI, M., GUPTA, K., PRAKASH, O., 2000, Dynamic Response of an Unbalanced Rotor Supported on Ball Bearings, *Journal of Sound and Vibration* (2000) 238(5), 757-779.
- 119.TRAILL-NASH R. W., COLLAR A. R., 1953, The Effects of Shear Flexibility and Rotatory Inertia on the Bending Vibrations of Beams. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 6, 186-222, March 1953.
- 120.TIMOSHENKO, 1918, *Vibration Problems in Engineering*, Dvan Nostrand Co, New York.
- 121.VANCE, J.M., 1988. *Rotordynamics of Turbomachinery*, McGraw-Hill, New York,

USA, 370p.

- 122.VANCE, J.M., MURPHY, B.T., TRIPP H.A., 1987, Critical speeds of turbomachinery: computer predictions vs. experimental measurements – Part II: effect of tilt-pad Bearing and foundation dynamics. *ASME Journal of Vibration Acoustics, Stress, Reliability in Design*, Vol. 109, pp.8-14
- 123.VINCENT, Antoine, 2003, Impact of Geometric Variability on Compressor Repeating-Stage Performance, *Thesis (S.M.)*--Massachusetts Institute of Technology, USA.
- 124.WANG, Y., Wang, X., 2010, Nonlinear Vibration Analysis for a Jeffcott Rotor with Seal and Air-Film Bearing Excitations, *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2010, Article ID 657361, 14 pages.
- 125.WENHUI, X.; YOU GANG, T.; YUSHU C.,2007, Analysis of motion stability of the flexible rotor-bearing system with two unbalanced disks, *Journal of Sound and Vibration*, In Press.
- 126.WILCOCK, D. F., 1961, Orthogonally Displaced Bearings – I, *ASLE Transactions*, 4 (1961) 117-123.
- 127.YAN-Jun, L.U., Lie YU, LIU Heng, ZHANG Yong-fang, 2006, Complex Nonlinear Behaviors of a Rotor Dynamical System with non-analytical Journal Bearing Supports, *Journal of Shanghai University (English Edition)*, 10(3) : p247 – 255.
- 128.YAN , Z., WANG L., QIAO G., ZHENG, T., 2010, An Analytical Model for Complete Dynamical Coefficients of a Tilting-Pad Journal Bearing, *Tribology International*, 43 (2010), p.7–15.
- 129.ZEIDAN, F. Y., 1992, Developments in Fluid Film Bearing Technology, *Turbomachinery International*, September/October, p.1-8.
- 130.ZEIDAN, F.Y., PAQUETTE, D.J., 1994, Application of High Speed and High Performance Fluid Film Bearings in Rotating Machinery, *Proceedings of the 23rd Turbomachinery Symposium*, p.209 233
- 131.ZHANG, L., LUO, J., 1991, Updating of Selected Structural Parameters Based on Localization of Modelling Error, *Journal of Nanjing Aeronautical Institute*, v.8, n.1, pp. 51-60.
- 132.ZHANG Zhi-ming, ZHU Li-jin, YU Jun, 1999, Effect of Film Force Nonlinearity on Unbalance Response of a Jeffcot Rotor-Journal Bearing System, *Journal of Shanghai University*, Vol. 3 No. 3 Sep. 1999, Shanghai, China.
- 133.ZHAO S., XU, H., MENG, G. , ZHU, J., 2005, Stability and response analysis of symmetrical single-disk flexible rotor-bearing system, *Tribology International*, Volume 38, Issue 8, August 2005, Pages 749-756
- 134.ZORZI, E.S. e NELSON, H.D., 1977. Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems With Internal Damping, *ASME Journal of Engineering for Power*, pp. 71-76.

## ANEXO A - Fundamentos da Teoria de Viga

Neste Anexo são apresentadas de maneira breve as expressões das teorias de viga de Euler-Bernoulli, de Rayleigh, e de Timoshenko. A Teoria de Viga de Timoshenko é a forma mais completa, representando a vibração lateral de vigas, a partir da qual podem-se derivar as outras duas teorias como casos particulares desta (BORU, 2010).

### A.1. Teoria de Viga de Euler-Bernoulli

A Teoria de Viga de Euler-Bernoulli foi formulada no século XVIII, e o detalhamento de sua derivação é apresentado em Clough e Penzien (1975) e em Meirovitch (1967).

Considere a viga ilustrada na Fig. A.1 sob a ação de uma carga distribuída variável  $q(x,t)$  e uma deflexão lateral  $v(x,t)$  na direção  $y$ . As propriedades da viga são sua rigidez à flexão,  $EI(x)$  e a massa específica  $\rho A(x)$ .

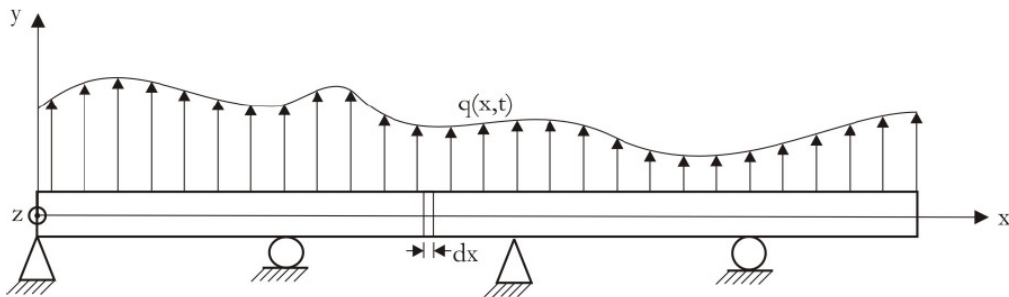


Figura A.1 - Viga de Euler-Bernoulli sob carregamento distribuído (Boru, 2010)

A equação da Teoria de Viga de Euler-Bernoulli é definida por :

$$q - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_z(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = \rho A(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (\text{A.1})$$

Para uma viga com seção transversal uniforme ao longo de  $x$ , a Equação (A.1) é simplificada para a forma

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - q + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.2})$$



## A.2. Teoria de Viga de Rayleigh

A Teoria de Viga de Rayleigh considera a inércia rotacional da viga, além da inércia translacional. Assim, para um modelo dinâmico de uma viga em rotação, as frequências naturais serão mais bem representadas.

A equação da Teoria de Viga de Rayleigh é definida por :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_z(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - q + \rho A(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho I_z(x) \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} \right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Se for considerado o caso da viga com seção transversal uniforme ao longo de  $x$ , a equação (A.3) é simplificada para a forma

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - q + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho I_z \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} = 0 \quad (\text{A.4})$$

A Teoria de Viga de Rayleigh é uma extensão da teoria de Euler-Bernoulli, o que pode ser observado comparando-se os três primeiros termos da equação (A.4) com a equação (A.2). O termo adicional da equação (A.4) é relativo à inércia rotatória.

## A.3. Teoria de Viga de Timoshenko

A inclusão da inércia rotatória nos modelos dinâmicos foi considerada insuficiente para se melhorar os resultados do cálculo da frequência natural de vigas (BORU, 2010). Assim, foi proposto incluir o efeito de deformação por cisalhamento, o que aumenta a flexibilidade do elemento de viga. Este modelo levou à Teoria de Viga de Timoshenko. Assim, as frequências naturais reduziram o suficiente para se aproximar daquelas obtidas experimentalmente (TRAILL-NASH e COLLAR, 1953).

A Teoria de Viga de Timoshenko considera que a deformação por cisalhamento em uma seção transversal é diretamente proporcional à força de cisalhamento, para materiais isotrópicos com propriedades lineares, através da expressão

$$Q = \kappa GA(x) \beta. \quad (\text{A.5})$$

A constante  $\kappa$  depende da forma da seção transversal da viga, podendo assumir valores como 11/13 para seções circulares e 5/6 para seções retangulares. O termo  $\kappa A(x)$  representa a área efetiva de cisalhamento da seção transversal.

Considerando a seção transversal da viga uniforme, a expressão da Teoria de Viga de Timoshenko, é dada por:

$$\begin{array}{c}
 \text{Teoria de Rayleigh} \\
 \left( \begin{array}{c} \text{Teoria de Euler-Bernoulli} \\ EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - q + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho I_z \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Deformação por cisalhamento} \\ \frac{EI_z}{\kappa GA} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( q - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \end{array} \right) \\
 - \left( \begin{array}{c} \text{Deformação por cisalhamento e} \\ \text{inércia rotatória combinados} \\ \frac{\rho I_z}{\kappa GA} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( q - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \end{array} \right) = 0
 \end{array}$$

Pode-se observar que as duas teorias de viga anteriormente apresentadas são casos particulares da teoria de viga de Timoshenko. Se a viga não sofrer deformação por cisalhamento, o que implica em considerar que sua resistência ao cisalhamento é muito grande, basta fazer  $\kappa \rightarrow \infty$ , e os dois últimos termos serão nulos, levando à teoria de vigas de Rayleigh.

## ANEXO B – Funções de Interpolação

As funções de interpolação para o problema de flexão são obtidas do problema estático da viga, considerando os efeitos de flexão e cisalhamento simultaneamente (FARIA, 1990). Estas funções são descritas a seguir.

Denota-se por  $\nu$  a variável adimensional que descreve a posição de uma seção transversal qualquer do elemento em relação à sua extremidade inicial. Sendo  $\delta$  a variável que define cada seção do elemento de rotor a partir do nó inicial, e  $l$  o comprimento do elemento, a variável adimensional é dada por  $\nu = \delta/l$ .

Para as funções de interpolação de flexão no plano de deflexão, são considerados os efeitos de cisalhamento transversal  $f_x$  e  $f_y$  distintos:

$$f_x = \frac{12EI_y}{K_xAGl^2}$$

$$f_y = \frac{12EI_x}{K_yAGl^2}$$

onde  $A$  é a área da seção transversal,  $G$  é o módulo de elasticidade ao cisalhamento,  $l$  é o comprimento do elemento,  $E$  é o módulo de elasticidade,  $I$  é o momento de inércia, e  $K$  é o fator de forma do cisalhamento transversal. Para a seção transversal circular (COUPER, 1966),

$$K_x = K_y = \frac{6(1 + \nu)}{7 + 6\nu}$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

### B.1 - Funções de Interpolação para o deslocamento linear unitário no primeiro nó

As funções de interpolação  $\psi_1^x$  e  $\phi_1^x$  são obtidas como descrito a seguir (FARIA, 1990).

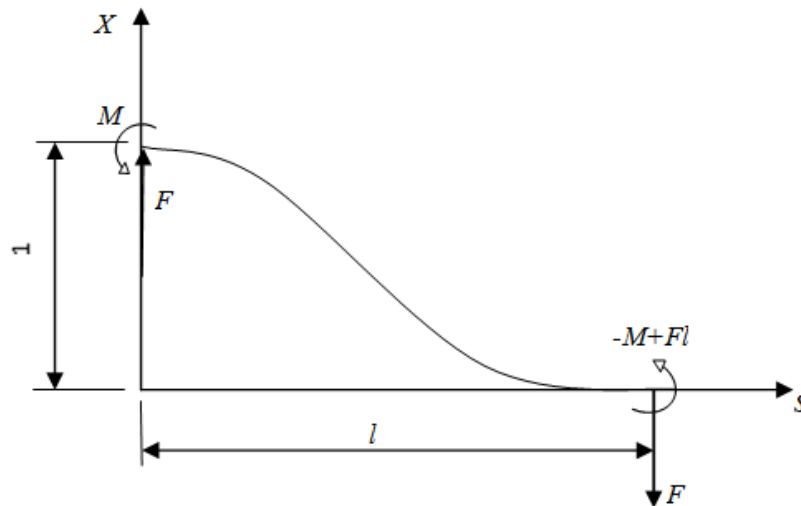


Figura B.1 – Deslocamento linear unitário no primeiro nó

As equações diferenciais para o deslocamento linear unitário no primeiro nó (Fig. B.1) são escritas na seguinte forma:

$$EI_y V_f'' = Fs - M \quad (\text{B.1})$$

$$K_x G A V_c' = -F = \text{constante} \quad (\text{B.2})$$

onde  $V_f$  e  $V_c$  são as contribuições de flexão e de cisalhamento, respectivamente, e  $V = V_f + V_c$ . A solução das equações é escrita como:

$$EI_y V = \frac{1}{6} F s^3 - \frac{1}{2} M s^2 + \left( C_1 - F \frac{f_y l^2}{12} \right) s + C_2$$

$$EI_y V' = \frac{F s^2}{2} - M s + \left( C_1 - F \frac{f_y l^2}{12} \right)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração. As condições de contorno do problema são:

$$\text{Em } s = v = 0, \quad V_c' = V' = -F / (K_x G A) \text{ e } V = 1,$$

$$\text{Em } s = l, \quad V_c' = V'$$

Obtém-se assim a expressão

$$\psi_1^x = \frac{1}{1 + f_x} [1 - 3v^2 + 2v^3 + f_x(1 - v)]$$

que, derivada em relação à posição, leva a

$$\phi_1^x = \frac{1}{1 + f_x} \left[ \frac{6}{l} (v^2 - v) \right]$$

### B.2 - Funções de Interpolação para o deslocamento angular unitário no primeiro nó

As funções de interpolação  $\psi_2^x$  e  $\phi_2^x$  são obtidas como descrito a seguir. Considere as condições de contorno

Em  $s = 0$ ,  $V=0$  e  $V'=V_f$

Em  $s = l$ ,  $V=0$  e  $V'=V_c$

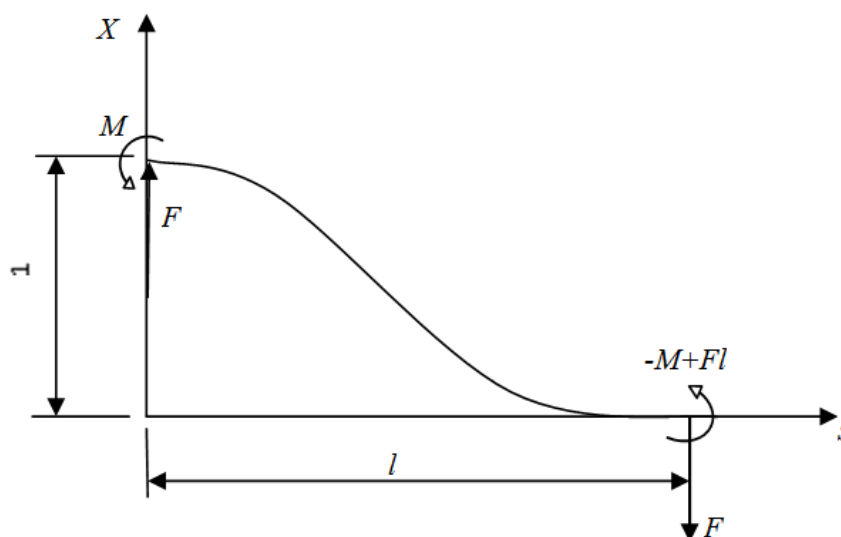


Figura B.2 – Deslocamento angular unitário no primeiro nó

Considerando-se as equações (B.1) e (B.2) e as condições de contorno, obtém-se

$$EI_y V = \frac{1}{6} F s^3 - \frac{1}{2} M s^2 + \left( \frac{Ml}{2} - \frac{Fl^2}{6} \right) s$$

e a equação da linha elástica é escrita como

$$EI_y V = \frac{Fl^3}{6} \left[ (v^3 - 2v^2 + v) + \frac{f_x}{2} (-v^2 + v) \right]$$

Então,

$$\psi_2^x = \frac{1}{1+f_x} \left[ l(v^3 - 2v^2 + v) + f_x \frac{l}{2}(v - v^2) \right]$$

e para se obter  $\phi_2^x$ , basta derivar a equação elástica

$$EI_y V' = \frac{Fl^2}{6} \left[ (3v^2 - 4v + 1) + \frac{f_x}{2}(1 - 2v) \right]$$

Mas como a rotação  $\rho_0$  em  $s = 0$  possui o seguinte valor

$$EI_y \rho_0 = \frac{Fl^2}{6} (1 + f_y)$$

deve-se adicionar a deformação

$$\frac{Fl^2 f_y}{12}$$

em  $EI_y V'$ , para se obter a rotação das seções. Obtém-se então

$$\phi_2^x = \frac{1}{1+f_x} [3v^2 - 4v + 1 + f_x(1 - v)]$$

### B.3 - Funções de Interpolação para o deslocamento linear unitário no segundo nó

As funções de interpolação  $\psi_3^x$  e  $\phi_3^x$  são obtidas como descrito a seguir.

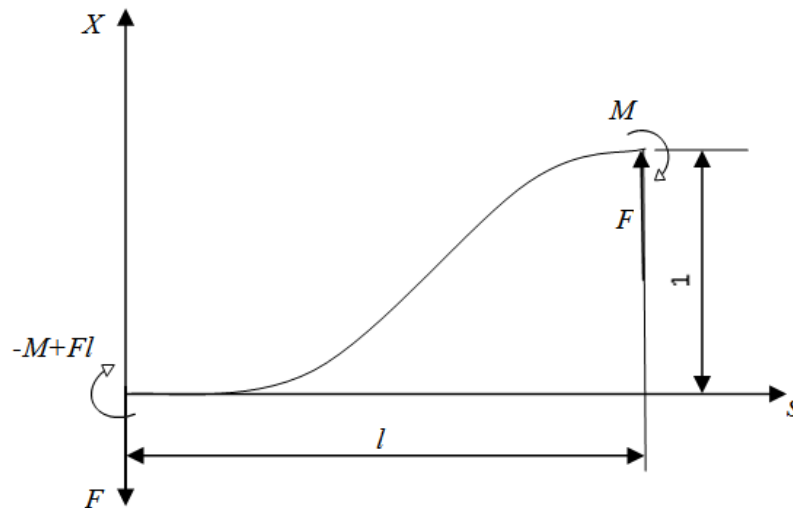


Figura B.3 – Deslocamento linear unitário no segundo nó

As equações diferenciais para o deslocamento linear unitário no segundo nó (Fig. B.3) são escritas na seguinte forma:

$$EI_y V_f'' = Fl - M - Fs \quad (\text{B.3})$$

$$K_x GAV_c' = F = \text{constante} \quad (\text{B.4})$$

A solução geral das equações é escrita como

$$EI_y V = \frac{1}{2}(Fl - M)s^2 - \frac{1}{6}Fs^3 + \left(C_1 + F\frac{f_y l^2}{12}\right)s + C_2$$

As condições de contorno são dadas por

$$\text{Em } s = 0, \quad V_c' = V' \text{ e } V = 0,$$

$$\text{Em } s = l, \quad V_c' = V' \text{ e } V = 1,$$

Obtém-se assim a equação elástica

$$EI_y V = \frac{Fl^3}{12}(3v^2 - 2v^3 + f_x v)$$

e a expressão de  $\psi_3^x$

$$\psi_3^x = \frac{1}{1 + f_x}(3v^2 - 2v^3 + f_x v)$$

que, derivada em relação à posição, leva a

$$\phi_3^x = \frac{1}{1 + f_x} \left[ \frac{6}{l}(v - v^2) \right]$$

### B.1 - Funções de Interpolação para o deslocamento angular unitário no segundo nó

As funções de interpolação  $\psi_4^x$  e  $\phi_4^x$  são obtidas como descrito a seguir.

Obtém-se as equações diferenciais através da Figura B.4:

$$EI_y V_f'' = (M - Fl) + Fs \quad (\text{B.5})$$

$$K_x GAV_c' = -F \quad (\text{B.6})$$

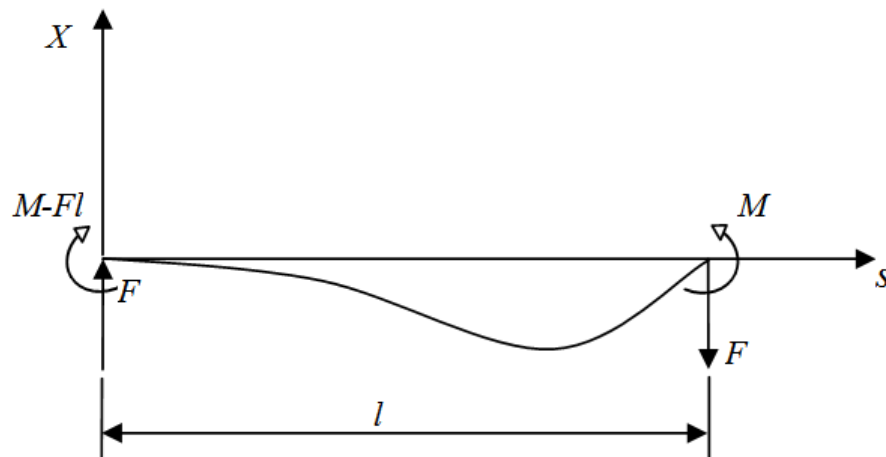


Figura B.4 – Deslocamento angular unitário no segundo nó

A solução geral das equações (B.5) e (B.6) é escrita como

$$EI_y V = \frac{1}{2}(M - Fl)s^2 + \frac{1}{6}Fs^3 + \left(C_1 - F\frac{f_y l^2}{12}\right)s + C_2$$

As condições de contorno são dadas por

$$\text{Em } s = 0, \quad V'_c = V' = -F/(K_x GA) \text{ e } V = 0$$

$$\text{Em } s = l, \quad V' = V'_c + V'_f \text{ e } V = 0,$$

Obtém-se assim a equação elástica

$$EI_y V = \frac{Fl^3}{12}[2v^3 - 2v^2 + f_x(-v + v^2)]$$

e a expressão de  $\psi_4^x$

$$\psi_4^x = \frac{l}{1 + f_x}[v^3 - v^2 + \frac{f_x}{2}(-v + v^2)]$$

Para se obter  $\phi_4^x$ , deriva-se a equação elástica em relação à posição

$$EI_y V' = \frac{Fl^2}{6}\left[3v^2 - 2v + \frac{f_x}{2}(-1 + 2v)\right]$$

Mas como a rotação  $\rho_0$  em  $s = 0$  possui o valor

$$EI_y \rho_0 = \frac{-Fl^2}{12} f_y$$

deve-se adicionar a deformação



$$\frac{Fl^2 f_y}{12}$$

em  $EI_y V'$ , para se obter a rotação das seções. Obtém-se então

$$\phi_4^x = \frac{1}{1 + f_x} (3\nu^2 - 2\nu + f_x \nu)$$

## ANEXO C – Matrizes de Elementos Finitos do Rotor

São apresentadas a seguir as matrizes do elemento finito de rotor, para elementos de eixo baseados na teoria de viga de Timoshenko (NELSON, 1980; FARIA, 1990). Considera-se o eixo simétrico ( $I_x=I_y=I$ ), o efeito de cisalhamento isotrópico ( $f_x=f_y=f$ ) e as seguintes constantes:

$I$  = momento médio de inércia de área da seção transversal;

$I_{dm}$  = momento diametral de inércia de massa por unidade de comprimento;

$I_p$  = momento polar de inércia de massa por unidade de comprimento;

$f$  = efeito de cisalhamento;

$l$  = comprimento do elemento;

$E$  = módulo de elasticidade;

$\rho$  = massa específica;

$A$  = área da seção transversal

$\{p_e\}$  = coordenadas generalizadas no sistema rotativo

$\{q_e\}$  = coordenadas generalizadas no sistema inercial

$\{\dot{q}_e\} = d\{q_e\}/dt$

### C.1 – Matriz de inércia de translação

A matriz  $M_e$  representativa da inércia de translação do elemento finito do rotor é obtida pela integração da expressão da energia cinética  $T_M$  do elemento finito do rotor, dada por

$$T_M = \frac{1}{2} \int_0^l m_e \{ \dot{V} \ \dot{W} \} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix} ds$$

Usando as funções de interpolação na expressão da energia cinética, obtém-se a matriz  $T_M$  que satisfaz à expressão

$$T_M = \frac{1}{2} \{\dot{q}_e\}^T [M_e] \{\dot{q}_e\}$$

A matriz  $M_e$  é simétrica e descrita como:

$$[M_e] = \frac{\rho A l}{420(1+f)^2} \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & M_{14} & M_{15} & 0 & 0 & M_{18} \\ & M_{22} & M_{23} & 0 & 0 & M_{26} & M_{27} & 0 \\ & & M_{33} & 0 & 0 & M_{36} & M_{37} & 0 \\ & & & M_{44} & M_{45} & 0 & 0 & M_{48} \\ & & & & M_{55} & 0 & 0 & M_{58} \\ & & & & & M_{66} & M_{67} & 0 \\ & & & & & & M_{77} & 0 \\ & & & & & & & M_{88} \end{bmatrix}$$

*Simétrica*

onde,

$$\begin{aligned} M_{11} &= 156 + 294f + 140f^2 \\ M_{14} &= 22l + 38,5lf + 17,50f^2 \\ M_{15} &= 54 + 126f + 70f^2 \\ M_{18} &= -13l - 31,5lf - 17,5lf^2 \\ M_{22} &= M_{11} \\ M_{23} &= M_{58} = -M_{14} \\ M_{26} &= M_{15} \\ M_{27} &= M_{45} = -M_{18} \\ M_{33} &= l^2(4 + 7f + 3,5f^2) \\ M_{36} &= M_{18} \\ M_{37} &= l^2(-3 - 7f - 3,5f^2) \\ M_{44} &= M_{77} = M_{88} = M_{33} \\ M_{48} &= M_{37} \\ M_{55} &= M_{66} = M_{11} \\ M_{67} &= M_{14} \end{aligned}$$

## C.2 – Matriz de inércia de rotação

A matriz de inércia de rotação do elemento finito do rotor é obtida pela substituição das funções de interpolação na expressão da energia cinética  $T_N$  do elemento finito, dada por

$$T_N = \frac{1}{2} \int_0^l I_{dm} \{\dot{\beta} \quad \dot{\Gamma}\} \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \end{Bmatrix} ds$$

Usando as funções de interpolação na expressão da energia cinética, obtém-se a matriz  $N_e$

representativa da inércia de rotação do elemento, que satisfaz à expressão

$$T_N = \frac{1}{2} \{\dot{q}_e\}^T [N_e] \{\dot{q}_e\}$$

A matriz  $N_e$  é simétrica e descrita como:

$$[N_e] = \frac{I_{dm}}{30(1+f)^2 l} \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 & N_{14} & N_{15} & 0 & 0 & N_{18} \\ & N_{22} & N_{23} & 0 & 0 & N_{26} & N_{27} & 0 \\ & & N_{33} & 0 & 0 & N_{36} & N_{37} & 0 \\ & & & N_{44} & N_{45} & 0 & 0 & N_{48} \\ & & & & N_{55} & 0 & 0 & N_{58} \\ & & & & & N_{66} & N_{67} & 0 \\ & & & & & & N_{77} & 0 \\ & & & & & & & N_{88} \end{bmatrix}$$

*Simétrica*

onde,

$$N_{11} = N_{22} = N_{55} = N_{66} = 36$$

$$N_{14} = 3l - 15lf$$

$$N_{15} = N_{26} = -36$$

$$N_{18} = N_{36} = N_{67} = N_{14}$$

$$N_{23} = N_{27} = N_{45} = N_{58} = -N_{14}$$

$$N_{33} = l^2(4 + 5f + 10f^2)$$

$$N_{37} = l^2(-1 - 5f + 5f^2)$$

$$N_{44} = N_{77} = N_{88} = N_{33}$$

$$N_{48} = N_{37}$$

### C.3 – Matriz de efeitos giroscópicos

A matriz  $G_e$  representativa dos efeitos giroscópicos do elemento finito do rotor é obtida pela relação

$$[G_e] = [H_e] - [H_e]^T$$

onde a matriz  $[H_e]$  é obtida pela integração da expressão da energia cinética  $T_G$  do elemento finito do rotor, dada por

$$T_G = -\Omega \int_0^l I_p \Gamma \dot{\beta} ds$$

onde  $\Omega$  é a rotação do rotor,  $I_p$  é o momento polar de inércia da seção,  $\Gamma$  e  $\beta$  são os vetores

rotação da seção em torno dos eixos  $x$  e  $y$ . Aplicando as funções de interpolação na expressão da energia cinética, obtém-se a matriz  $[H_e]$  que satisfaz à expressão

$$T_G = -\Omega\{\dot{q}_e\}^T [H_e] \{\dot{q}_e\}$$

A matriz  $[G_e] = [H_e] - [H_e]^T$  é anti-simétrica e descrita como:

$$[G_e] = \frac{I_p}{30(1+f)^2 l} \begin{bmatrix} 0 & G_{12} & G_{13} & 0 & 0 & G_{16} & G_{17} & 0 \\ & 0 & 0 & G_{24} & G_{25} & 0 & 0 & G_{28} \\ & & 0 & G_{34} & G_{35} & 0 & 0 & G_{38} \\ & & & 0 & 0 & G_{46} & G_{47} & 0 \\ & & & & 0 & G_{56} & G_{57} & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & G_{68} \\ & & & & & & 0 & G_{78} \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

onde,

$$G_{12} = G_{25} = G_{56} = -36$$

$$G_{13} = 3l - 15lf$$

$$G_{16} = 36$$

$$G_{17} = G_{24} = G_{28} = G_{35} = G_{46} = G_{13}$$

$$G_{34} = l^2(-4 - 5f - 10f^2)$$

$$G_{38} = l^2(1 + 5f - 5f^2)$$

$$G_{47} = -G_{38}$$

$$G_{57} = G_{68} = -G_{13}$$

$$G_{78} = -G_{34}$$

#### C.4 – Matriz de rigidez

A matriz de rigidez do elemento finito do rotor  $K_e$  é obtida integrando-se a energia potencial elástica  $V$  ao longo do comprimento do elemento, usando as funções de interpolação. Obtém-se a matriz  $K_e$ , que satisfaz à expressão

$$V = \frac{1}{2} \{p_e\}^T [K_e] \{p_e\}$$



## ANEXO D – Método Numérico de Newmark

Neste Anexo apresenta-se inicialmente o algoritmo de método de Newmark, usado para a integração numérica no tempo da equação do movimento Eq.(1), conforme Bathe (1982). Posteriormente, são mostrados os critérios adotados no presente trabalho para garantir a convergência do método, sem um elevado custo computacional.

### A) Valores iniciais:

*Passo 1:* Valores iniciais para os vetores deslocamento, velocidade e aceleração:  $\{U_0\}$ ,

$$\{\dot{U}_0\}, \{\ddot{U}_0\}$$

*Passo 2:* Defina um intervalo de tempo  $\Delta t$ , e os parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$ , tais que

$$\delta \geq 0.50; \quad \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$$

*Passo 3:* Calcule as constantes

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1; \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1;$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta); \quad a_7 = \delta \Delta t$$

*Passo 4:* Crie a matriz de rigidez efetiva  $KK = K + a_0M + a_1C$ .

### B) Para cada iteração no tempo $\Delta t$ :

*Passo 1:* Calcule a carga efetiva  $RR$  no instante  $t + \Delta t$ :

$${}^{t+\Delta t}RR = {}^{t+\Delta t}R + M(a_0 {}^tU + a_2 {}^t\dot{U} + a_3 {}^t\ddot{U}) + C(a_1 {}^tU + a_4 {}^t\dot{U} + a_5 {}^t\ddot{U})$$

*Passo 2:* Resolva a equação abaixo, para obter o vetor deslocamento  $U$  em  $t + \Delta t$ :

$$KK {}^{t+\Delta t}U = {}^{t+\Delta t}RR$$

*Passo 3:* Calcule os vetores velocidade e aceleração em  $t + \Delta t$ :

$${}^{t+\Delta t}\ddot{U} = a_0 ({}^{t+\Delta t}U - {}^tU) - a_2 {}^t\dot{U} - a_3 {}^t\ddot{U}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^t\dot{U} + a_6 {}^t\ddot{U} + a_7 {}^{t+\Delta t}\ddot{U}$$

Para se garantir a convergência do método, foram adotados os parâmetros  $\alpha = 1/4$  e  $\delta=1/2$ , que são os parâmetros de integração que possibilitam estabilidade incondicional para o procedimento de integração de Newmark (BATHE, 1982) . É importante fazer uma boa escolha do incremento de tempo  $\Delta t$ , adequado para assegurar a estabilidade do método de integração no tempo. O valor do incremento de tempo  $\Delta t$  deve ser menor do que o valor crítico  $\Delta t_{cr}$ , dado pela equação D.1 (BATHE, 1982):

$$\Delta t_{cr} = \frac{\tau_n}{\pi}, \quad (D.1)$$

sendo  $\tau_n$  o menor período natural do sistema. Se o incremento de tempo é maior que o valor crítico, o método de Newmark apresentará problemas de convergência (ALMEIDA JÚNIOR e FARIA, 2003). No presente trabalho, a escolha do incremento de tempo  $\Delta t$  foi feita baseando-se no fato de que a força de desbalanceamento é aplicada a cada intervalo  $\Delta t$ . Portanto, se este intervalo for muito grande, a força poderia deixar de ser aplicada durante cada ciclo do eixo. É importante garantir que esta força seja aplicada simetricamente durante cada ciclo, ou seja, que para cada valor de rotação  $\omega$  (rad/s), a força de desbalanceamento seja aplicada simetricamente em todas as direções. Para que isto fosse possível, foi adotada a seguinte expressão para o cálculo do incremento de tempo  $\Delta t$ :

$$\Delta t \leq \frac{2\pi}{12\omega} \quad (D.2)$$

Com o incremento da equação (D.2), garante-se que ocorram pelo menos 12 iterações a cada ciclo do eixo, ou seja, uma a cada 30°, o que garante a simetria da força de desbalanceamento. Este critério garante também que  $\Delta t < \Delta t_{cr}$ . Posteriormente, foi feito o estudo da convergência dos resultados em função do intervalo  $\Delta t$ , para se otimizar o custo computacional do método implementado.