UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ICEx – Departamento de Matemática

ANDRÉ GRIPP DE RESENDE CHAGAS

Interseção entre retas e cônicas com régua e compasso

Professor Orientador: Jorge Sabatucci

BELO HORIZONTE
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ICEx – Departamento de Matemática

ANDRÉ GRIPP DE RESENDE CHAGAS

Interseção entre retas e cônicas com régua e compasso

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da UFMG, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Especialista em Matemática para Professores do Ensino Básico.

Professor Orientador: Jorge Sabatucci

BELO HORIZONTE
2010

ATA DA 100ª MONOGRAFIA DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES, APRESENTADA PELO ALUNO ANDRÉ GRIPP DE RESENDE CHAGAS.

Aos quatorze dias do mês de dezembro de 2010, às 16h00, na Sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Matemática para Professores, para julgar a apresentação da monografia do aluno **André Gripp de Resende Chagas**, intitulada: *"Interseção entre retas e cônicas com régua e compasso"*, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática, na Ênfase em Matemática do Ensino Básico. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Jorge Sabatucci, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado, por unanimidade, com nota 98 e conceito A. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 14 de dezembro de 2010.

Sabatucci

Prof. Jorge Sabatucci
Orientador

Paul A. F. Machado

Prof. Paulo Antônio Fonseca Machado
Examinador

Prof. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi
Examinador

Agradeço a minha esposa pela paciência
e amor, ao professor Jorge Sabatucci pela
orientação nessa monografia e ao longo
de
minha formação acadêmica e a todos os
professores que participaram de minha
formação como educador.

RESUMO

No plano, definir as cônicas como lugares geométricos; identificar quando uma cônica e uma reta possuem interseções; e, utilizando régua e compasso, determinar a interseção de uma cônica com uma reta.

ABSTRACT

In the plane, to define the conics as geometric places; to identify when a conic and a straight line have intersections; and, by using ruler and compass, to determine the intersections of a conic and a line.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é abordar a resolução, com régua e compasso, de problemas que envolvam a interseção entre retas e cônicas. Veremos como, em posse dos elementos que definem a cônica, determinar pontos do plano que pertençam a essa cônica. Vamos também determinar as retas tangentes a uma cônica a partir de um ponto do plano e como determinar as interseções de uma cônica com uma reta dada.

O capítulo 2 abordará três temas: tangente a uma circunferência, potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical. Esses temas servirão de pré-requisito para o estudo a ser realizado sobre as cônicas.

O capítulo 3 tratará da caracterização das parábolas, da determinação de pontos do plano que pertençam a uma parábola dada, do traçado de tangentes a uma parábola e da determinação dos pontos de interseção entre uma parábola e uma reta qualquer do plano.

O capítulo 4 tratará da caracterização das elipses, da determinação de pontos do plano que pertençam a uma elipse dada, do traçado de tangentes a uma elipse e da determinação dos pontos de interseção entre uma elipse e uma reta qualquer do plano.

O capítulo 5 tratará da caracterização das hipérboles, da determinação de pontos do plano que pertençam a uma hipérbole dada, do traçado de tangentes a uma hipérbole e da determinação dos pontos de interseção entre uma hipérbole e uma reta qualquer do plano.

CAPÍTULO 2 – PRELIMINARES

2.1 – TANGENTE A UMA CIRCUNFERÊNCIA

Nessa seção daremos uma definição para retas tangentes a uma circunferência e mostraremos como determinar a reta tangente a uma circunferência por um ponto Q desta. Em seguida, veremos como traçar retas tangentes à circunferência a partir de um ponto P que não pertence à circunferência dada.

Dados dois pontos Q e Q' pertencentes a uma circunferência, definimos a reta tangente à circunferência no ponto Q como a posição limite da reta $\overleftrightarrow{QQ'}$ quando Q' tende para Q.

Prosseguiremos com a construção da reta tangente a uma circunferência em um ponto pertencente à mesma.

Seja $C(O,r)$ uma circunferência de centro O e raio r e seja Q um ponto pertencente a essa circunferência.

Para determinarmos a reta tangente a $C(O,r)$ pelo ponto Q, tomaremos um ponto Q' de $C(O,r)$, distinto de Q, tal que Q, O e Q' não sejam colineares. Analisaremos o que acontece com a reta $\overleftrightarrow{QQ'}$ à medida que Q' tende para Q.

Seja $\overrightarrow{OM}$ a bissetriz do ângulo $Q\hat{O}Q'$ (**figura I**). Como o triângulo $\Delta QOQ'$ é isósceles, $\overline{OM}$ é também a altura relativa ao lado $\overline{QQ'}$, logo $\overline{QQ'}$ é perpendicular a $\overline{OM}$.

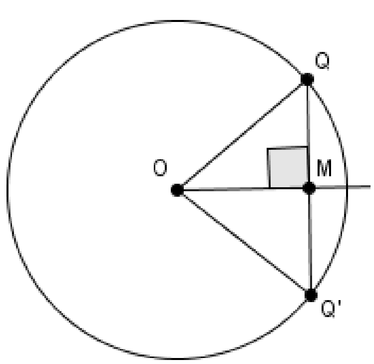

Figura I

Queremos mostrar que M tenderá para o ponto Q quando Q' tender para Q, assim, a reta $\overleftrightarrow{OM}$ tenderá para a reta $\overleftrightarrow{OQ}$. Como $\overleftrightarrow{QQ'}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{OM}$, poderemos construir a reta tangente a uma circunferência por um ponto $Q \in C(O,r)$ como sendo a reta perpendicular a $\overleftrightarrow{OQ}$ que contém Q. De fato, podemos afirmar que M tenderá para o ponto Q quando Q' tender para Q, pois, pelo triângulo ΔQOM, temos

$$\overline{QM} = \overline{OQ} \cdot sen(Q\hat{O}M). \qquad (1)$$

À medida que Q' tende a Q, o ângulo $Q\hat{O}M$ tende a zero, pois $Q\hat{O}M = \frac{Q\hat{O}Q'}{2}$. Então, pela equação (1) temos que quando Q' tende para Q, $\overline{QM}$ tende para zero, como queríamos demonstrar.

Diante do exposto podemos concluir que a reta tangente a um ponto $Q \in C(O,r)$ é a reta perpendicular ao raio $\overline{OQ}$ pelo ponto Q.

Mostraremos agora como traçar uma reta tangente a $C(O,r)$ a partir de um ponto P do plano, tal que $P \notin C(O,r)$.

Suponhamos que tal construção seja possível. A **figura II** mostra o problema resolvido.

Na figura, os ângulos $O\hat{Q}P$ e $O\hat{Q}'P$ são retos, pois $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overline{PQ'}$ são retas tangentes à circunferência em Q e Q' respectivamente, portanto Q e Q' estão sobre a circunferência de diâmetro $\overline{OP}$.

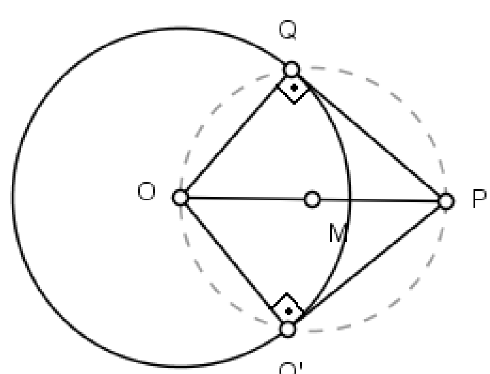

Figura II

Logo, para encontrarmos os pontos Q e Q' por onde passam as tangentes a $C(O,r)$ a partir de P, basta traçarmos a circunferência de diâmetro $\overline{OP}$. Os pontos Q e Q' procurados estarão na interseção dessa circunferência com o círculo de centro O e raio r dado.

A construção do círculo de diâmetro $\overline{OP}$ sempre pode ser realizada, entretanto o círculo construído somente terá interseção com $C(O,r)$ quando P for um ponto externo a $C(O,r)$, isto é, $\overline{PO} > r$. Se P for interno a $C(O,r)$, qualquer reta contendo P será secante à circunferência dada.

2.2 – POTÊNCIA DE UM PONTO COM RELAÇÃO A UMA CIRCUNFERÊNCIA

Definição – *Dados um ponto P qualquer do plano e uma circunferência $C(O,r)$, definimos a potência de P com relação a $C(O,r)$ como*

$$pot_C(P) = \overline{PO}^2 - r^2$$

Se P for um ponto interior à circunferência sua potência em relação a $C(O,r)$ será um número negativo. Caso P esteja sobre a circunferência, $pot_C(P) = 0$. Se P for externo à circunferência sua potência em relação a $C(O,r)$ será positiva.

Teorema 1 – *Seja P um ponto pertencente a uma reta s qualquer que corta $C(O,r)$ em pontos A e B distintos. O produto $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ é constante.*

Demonstração – Consideraremos inicialmente o caso em que P é externo à circunferência.

Seja M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Faremos $\overline{AM} = \overline{MB} = m$.

Pela **figura III**,

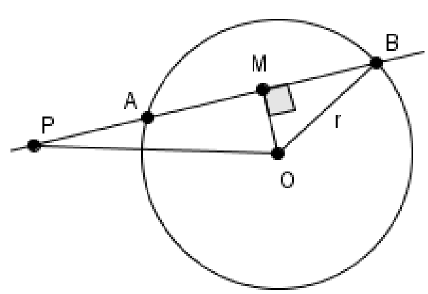

Figura III

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (\overline{PM} - m)(\overline{PM} + m) =$

$\overline{PM}^2 - m^2 = \overline{PM}^2 + \overline{OM}^2 - (m^2 + \overline{OM}^2) =$

$\overline{PO}^2 - r^2 = pot_C(P)$

Se P é um ponto interno à circunferência (**figura IV**) temos,

$-\overline{PA} \cdot \overline{PB} = -(m - \overline{PM})(m + \overline{PM}) =$

$\overline{PM}^2 - m^2 = \overline{PM}^2 + \overline{OM}^2 - (m^2 + \overline{OM}^2) =$

$\overline{PO}^2 - r^2 = pot_C(P)$

Logo, $-\overline{PA} \cdot \overline{PB} = Pot_C(P) = constante.$

Então, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = constante.$

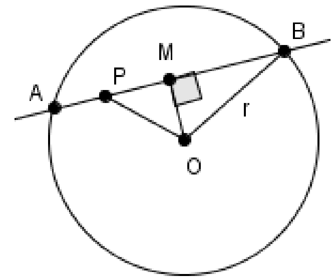

Figura IV

Se P estiver sobre a circunferência, então P se confunde com A ou com B e o produto $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ será nulo. Caso a reta s seja tangente à circunferência em um ponto T, então, pelo teorema de Pitágoras, $pot_C(P) = \overline{PT}^2$.

2.3 – EIXO RADICAL

Definição – *Dadas duas circunferências C e C', definimos o eixo radical das circunferências dadas como o lugar geométrico dos pontos que possuem a mesma potência com relação a C e C'.*

Teorema 2 – *O eixo radical a duas circunferências C e C' não concêntricas, é uma reta perpendicular à linha dos centros de C e C'.*

Demonstração – Consideremos duas circunferências não concêntricas C e C' de centros A e B e raios R e r, respectivamente. Primeiramente queremos mostrar que existe algum ponto P tal que $pot_C(P) = pot_{C'}(P)$.

Para isso, tomemos uma circunferência C'' cujo centro F não esteja sobre $\overleftrightarrow{AB}$ e tal que $C \cap C'' = \{D, E\}$ e $C' \cap C'' = \{G, H\}$. (**figura V**)

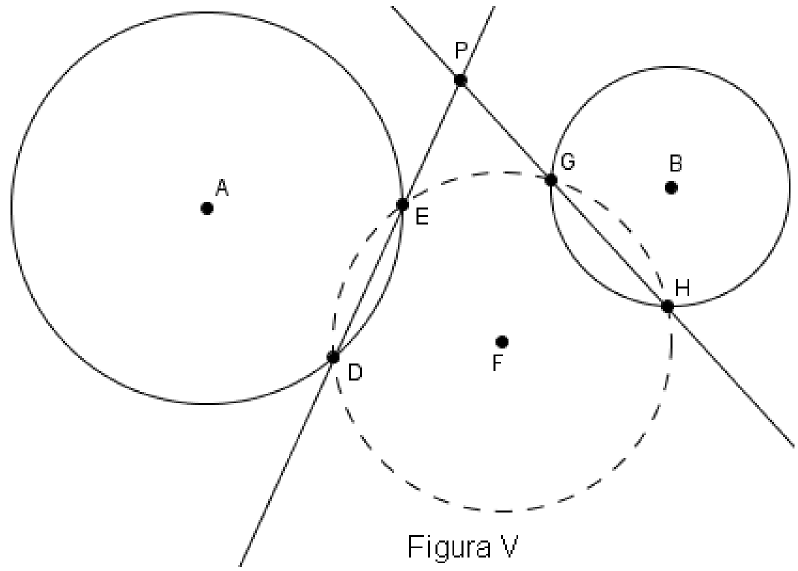

Figura V

Pelo teorema 1, $\overline{PE} \cdot \overline{PD} = \overline{PG} \cdot \overline{PH}$, ou seja, $pot_C(P) = pot_{C'}(P)$, como queríamos demonstrar.

Vamos então mostrar que todos os pontos que possuem a mesma potência com relação às circunferências C e C' são colineares.

Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$. Seja P um ponto que tenha a mesma potência com relação às duas circunferências dadas e seja H a projeção ortogonal de P sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

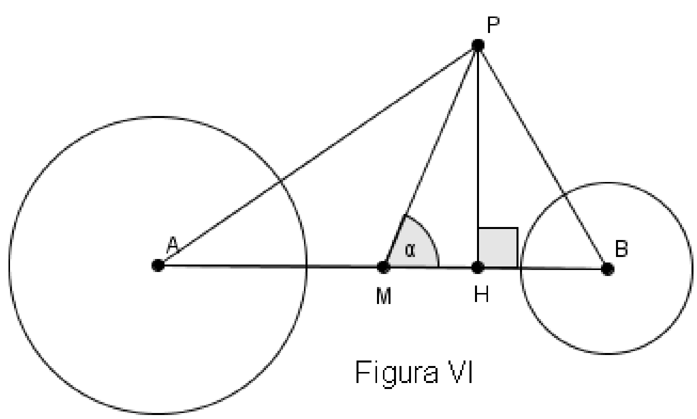

Figura VI

Como P possui a mesma potência com relação aos dois círculos, então $\overline{PA}^2 - R^2 = \overline{PB}^2 - r^2$, de onde obtemos $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = R^2 - r^2$.

Utilizando a lei dos cossenos nos triângulos ΔPMA e ΔPMB obtemos

- $\overline{PA}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MP}^2 + 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{MP} \cdot cos(\alpha)$
- $\overline{PB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MP}^2 - 2 \cdot \overline{BM} \cdot \overline{MP} \cdot cos(\alpha)$

Como $\overline{BM} = \overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2}$, ao subtrairmos as duas equações obtemos

$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 4 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{MP} \cdot cos(\alpha)$, de onde tiramos

$R^2 - r^2 = 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{HM}$.

Logo, $\overline{HM} = \frac{R^2 - r^2}{2 \cdot \overline{AB}}$ (2)

O segmento $\overline{HM}$ tem medida constante, isso significa que H, a projeção ortogonal de P sobre $\overleftrightarrow{AB}$, é um ponto fixo na reta $\overleftrightarrow{AB}$, ou seja, todos os pontos que possuem a mesma potência com relação a C e C' estão sobre uma reta perpendicular à linha dos centros de C e C'.

Mostraremos finalmente que todos os pontos pertencentes à reta $\overleftrightarrow{HP}$ possuem a mesma potência com relação a C e C'.

Queremos mostrar que se $P \in \overleftrightarrow{HP}$, então $\overline{PA}^2 - R^2 - (\overline{PB}^2 - r^2) = 0$. (3)

Temos,

$\overline{PA}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HA}^2 = \overline{PH}^2 + (\overline{HM} + \overline{MA})^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HM}^2 + 2\overline{HM} \cdot \overline{MA} + \overline{MA}^2$ (4)

e

$\overline{PB}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{PH}^2 + (\overline{MB} - \overline{MH})^2 = \overline{PH}^2 + \overline{MB}^2 - 2\overline{MB} \cdot \overline{MH} + \overline{MH}^2$ (5)

Substituindo (4) e (5) em (3) e usando $\overline{MA} = \overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2}$ obtemos

$\overline{PA}^2 - R^2 - (\overline{PB}^2 - r^2) =$

$$4\overline{HM} \cdot \frac{\overline{AB}}{2} - R^2 + r^2$$

Usando (2),

$$4\frac{R^2 - r^2}{2 \cdot \overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{2} - R^2 + r^2 = 0$$

Logo, o lugar geométrico dos pontos que possuem a mesma potência com relação às duas circunferências dadas é uma reta perpendicular à linha dos centros dessas circunferências, como queríamos demonstrar.

Caso C e C' sejam secantes, o eixo radical dessas circunferências será a reta que passa pelos pontos de interseção entre essas circunferências. Se as circunferências dadas forem tangentes em um ponto T, o eixo radical de ambas será a reta tangente às circunferências C e C' no ponto T. Tais fatos decorrem da aplicação do **teorema 1**.

CAPÍTULO 3 – PARÁBOLAS

No presente capítulo estabeleceremos uma definição de parábola e construiremos pontos dessa parábola. Em seguida, traçaremos retas tangentes à parábola que contenham um ponto específico do plano. Por fim, determinaremos quantos e quais são os pontos de interseção entre uma parábola e uma reta dadas.

3.1 – DEFINIÇÕES

Começaremos apresentando duas definições para a parábola e mostraremos que essas definições são equivalentes.

Definição 1 – *Dado um ponto F não pertencente a uma reta d, denominamos parábola de foco F e diretriz d o lugar geométrico dos centros dos círculos tangentes a d e que contêm F.*

Denominaremos o ponto F de **foco** e a reta d de **reta diretriz** da parábola. Representaremos uma parábola de foco F e reta diretriz d por $P(F,d)$.

O foco F e os pontos da reta diretriz não pertencem à parábola, por definição. Mostraremos como, de posse dos elementos que definem a parábola, determinarmos pontos pertencentes a $P(F,d)$. Para isso, analisaremos a **figura 1**, que mostra um ponto $M \in P(F,d)$.

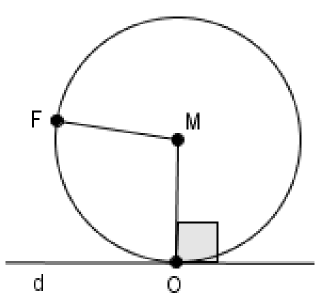

Figura 1

Nessa figura, o ponto O é o ponto de tangencia entre d e $C(M,\overline{MF})$. Por definição, $\overline{MO} = \overline{MF}$, logo M está sobre a mediatriz do segmento $\overline{FO}$.

Então, para encontrarmos um ponto M pertencente a $P(F,d)$ devemos escolher um ponto O qualquer sobre a reta diretriz e traçarmos uma reta perpendicular a d por O. O ponto M procurado pertencerá à interseção entre a reta perpendicular traçada e a mediatriz de $\overline{FO}$.

A construção descrita acima nos permite estabelecer uma bijeção entre os pontos da parábola e os pontos da reta diretriz. Essa bijeção será frequentemente usada na resolução de problemas.

Prosseguiremos à apresentação de uma segunda definição para a parábola e demonstraremos que as definições apresentadas são equivalentes.

Definição 2 – *Dados uma reta d e um ponto F não pertencente a essa reta, definimos uma parábola como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de d e F.*

Teorema – *As definições 1 e 2 são equivalentes*.

Começaremos mostrando que a definição 1 implica na definição 2.

De fato, se M é o centro de um círculo tangente a d em um ponto O e que contém F, o segmento $\overline{MO}$ será perpendicular à reta diretriz e M será equidistante de F e d, conforme estabelecido pela definição 1.

Reciprocamente, se M é um ponto equidistante de F e d, o círculo de centro M e raio $\overline{MF}$ será tangente à reta d no ponto O conforme estabelecido pela definição 1 (**figura 2**).

Dessa forma, fica demonstrada a equivalência entre as definições 1 e 2.

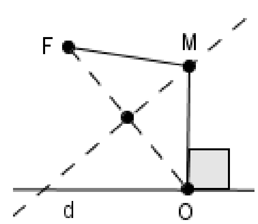

Figura 2

3.2 – TANGENTES

Nesta seção iremos analisar quando é possível traçar uma ou mais retas tangentes a uma parábola de modo que essas retas tangentes contenham um ponto específico do plano. Iniciaremos analisando o traçado da reta tangente à parábola por um ponto $M \in P(F, d)$. Depois, estudaremos como traçar tangentes à parábola a partir de pontos não pertencentes a $P(F, d)$.

3.2.1 – Tangentes por um ponto da parábola

Dado um ponto $M \in P(F, d)$, queremos determinar a reta tangente à parábola em M. Para isso, tomaremos um ponto $M' \in P(F, d)$, distinto de M, e analisaremos o que acontece com a reta $\overleftrightarrow{MM'}$ quando M' tende para M.

De acordo com a definição 1, existem dois círculos C e C' com centros em M e M' que são tangentes à diretriz nos pontos O e O', respectivamente (**figura 3**). O foco F pertence a C e a C'.

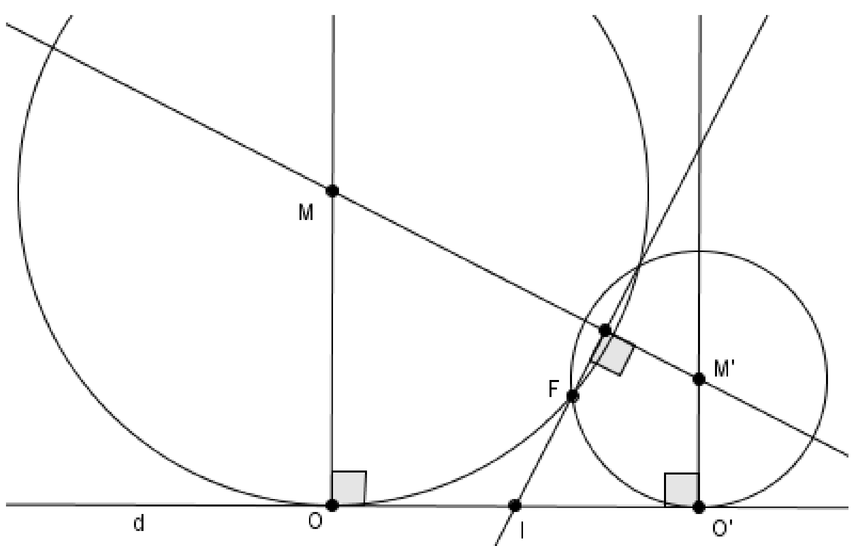

Figura 3

O eixo radical de C e C' intercepta a reta diretriz no ponto I. Afirmamos que I é ponto médio de $\overline{OO'}$. De fato, I pertence ao eixo radical de C e C', portanto $pot_C(I) = pot_{C'}(I)$, o que implica $\overline{IO}^2 = \overline{IO'}^2$. Então, $\overline{IO} = \overline{IO'}$.

Se fizermos M' tender para M, o ponto O' tenderá para O, algo que podemos garantir pelo fato do segmento $\overline{OO'}$ ter comprimento menor ou igual ao do segmento $\overline{MM'}$ já que $\overline{OO'}$ é a projeção ortogonal de $\overline{MM'}$ sobre a reta diretriz. Dessa forma, o ponto I também tenderá para o ponto O e o eixo radical $\overleftrightarrow{FI}$ tenderá para a reta $\overleftrightarrow{FO}$.

Como M e M' são centros dos círculos C e C', $\overleftrightarrow{MM'}$ é perpendicular ao eixo radical $\overleftrightarrow{FI}$. Definiremos então a tangente a $P(F,d)$ em M como sendo a reta perpendicular a $\overleftrightarrow{FO}$ que contém M (**figura 4**).

Observação: Tendo em vista que M pertence a $P(F,d)$ e portanto, $\overline{MF} = \overline{MO}$, a tangente procurada é altura relativa a $\overline{FO}$ do triângulo isósceles ΔMFO, ou seja, a tangente procurada é a mediatriz do segmento $\overline{FO}$.

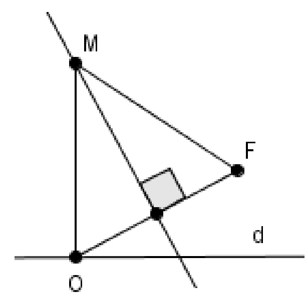

Figura 4

Corolário – *Se M é um ponto da parábola $P(F,d)$, e O é a projeção de M sobre d,os pontos O e F são simétricos em relação à reta tangente à parábola em M.*

3.2.2 – Tangentes por um ponto não pertencente à parábola

Iremos agora procurar por retas tangentes à parábola que contenham um ponto P tal que $P \notin P(F,d)$.

Suponhamos que tal construção seja possível. Vamos analisar o problema resolvido conforme mostrado pela **figura 5**.

A figura mostra uma parábola definida pelo foco F e pela diretriz d. O ponto P é um ponto qualquer do plano e a reta $\overleftrightarrow{PM}$ é tangente à parábola em M. Os pontos O e Q são as projeções ortogonais sobre d dos pontos M e P, nessa ordem.

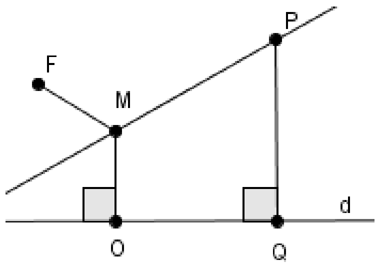

Figura 5

A reta $\overleftrightarrow{PM}$, tangente à parábola, é a mediatriz do segmento $\overline{FO}$. Como P está sobre essa mediatriz, $\overline{PF} = \overline{PO}$.

Temos então uma maneira simples de encontrarmos o ponto O e, consequentemente, o ponto M com o qual podemos determinar a reta tangente à parábola por P. Basta traçarmos um círculo de centro P e raio $\overline{PF}$. O ponto O procurado estará na interseção do círculo traçado com a reta diretriz.

A análise feita parte do pressuposto de que o problema considerado tem solução. Para que a construção descrita acima possa ser realizada precisamos apenas que o círculo de centro P e raio $\overline{PF}$ tenha, de fato, alguma interseção com a reta diretriz. Temos três possibilidades:

- Se $\overline{PQ} > \overline{PF}$ então o círculo de centro P e raio $\overline{PF}$ não possui interseção com a reta diretriz da parábola e portanto, o problema não tem solução.
- Se $\overline{PQ} = \overline{PF}$, P pertencerá à parábola, caso que já foi considerado na seção 3.2.1.
- Se $\overline{PQ} < \overline{PF}$, então o círculo de centro P e raio $\overline{PF}$ intercepta d em dois pontos distintos. Nesse caso o problema apresenta duas soluções, ou seja, existem duas retas que partem de P e são tangentes à parábola.

3.3 – INTERSEÇÃO ENTRE RETA E PARÁBOLA

Dadas uma parábola $P(F,d)$ e uma reta r qualquer, iremos procurar, quando existirem, os pontos de interseção entre r e $P(F,d)$. Dividiremos a análise em dois casos.

1° caso: r não contém o foco da parábola.

De acordo com a definição 1, encontrar um ponto de interseção entre uma reta r e uma parábola $P(F,d)$ é o mesmo que encontrar sobre r o centro de um círculo que contenha F e que seja tangente a d.

Qualquer círculo com centro sobre r e que contenha F também conterá F', o simétrico de F com relação à reta r (**figura 6)**, pois r contém um diâmetro do círculo e o círculo é simétrico em relação a qualquer de seus diâmetros.

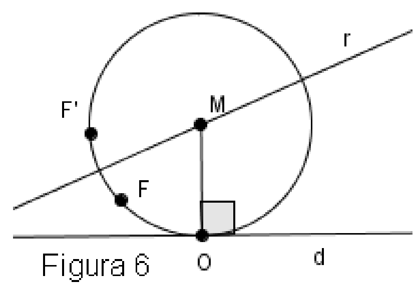

Figura 6

Nosso problema se resume então a encontrar uma circunferência tangente à diretriz que contenha os pontos F e F'. A existência de soluções para esse problema está diretamente relacionada com as posições relativas entre F, d e F'.

- Se F e F' estiverem em semiplanos distintos definidos pela reta diretriz o círculo que passa por F e F' será secante a d quando deveria ser tangente. Nesse caso, o problema não terá solução.
- Se F' estiver sobre d, podemos tomar o ponto M associado ao ponto F' de d. A reta r será a mediatriz de $\overline{FF'}$, portanto será a reta tangente

à parábola no ponto M (veja corolário da seção 3.2.1). Logo, o problema terá apenas uma solução.

- Se F e F' estiverem no mesmo semiplano definido pela reta diretriz, o problema terá até duas soluções. Vejamos como encontrá-las.

Queremos encontrar sobre r o centro do círculo C que contém F e F' e é tangente à reta diretriz.

Se a reta $\overleftrightarrow{FF'}$ for paralela à diretriz, a reta r será perpendicular a d. Seja I o ponto de interseção entre r e d. O ponto M procurado estará na interseção entre r e a mediatriz de $\overline{FI}$ (**figura 7**).

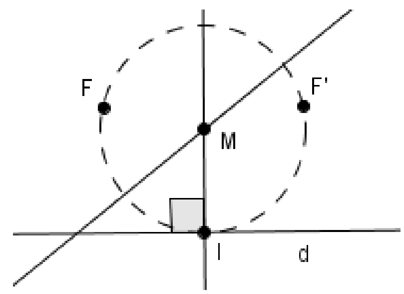

Figura 7

Caso $\overleftrightarrow{FF'}$ não seja paralela a d, construímos um círculo auxiliar C' com centro sobre r de modo que C' contenha F e F' e não seja tangente a d. Os círculos C e C' são secantes nos pontos F e F' por construção, logo o eixo radical de C e C' é a reta $\overleftrightarrow{FF'}$. Essa reta intercepta a reta diretriz no ponto I.

Por definição, o ponto I possui a mesma potência com relação a C e C' (**figura 8**).

Partindo de I, traçamos então uma reta tangente a C' no ponto T.

Seja O o ponto tangência entre C e d.

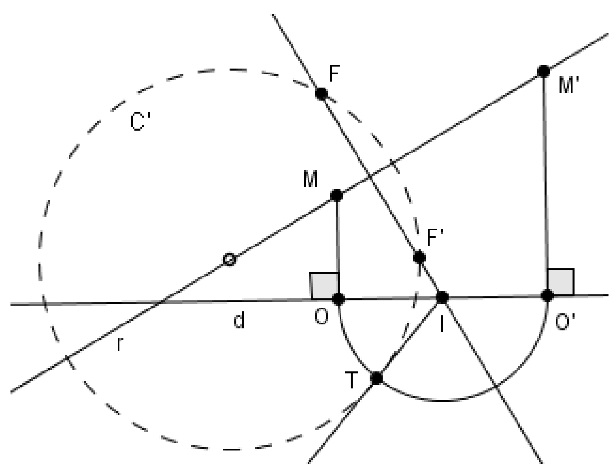

Figura 8

Como I pertence ao eixo radical de C e C', $\overline{IT}^2 = \overline{IO}^2$. Logo, $\overline{IT} = \overline{IO}$.

Então, para encontrarmos o ponto O, basta traçarmos uma circunferência de centro I e raio $\overline{IT}$. A interseção entre $C(I,\overline{IT})$ e a reta diretriz será formada pelos pontos O e O', projeções ortogonais sobre d dos pontos M e M' procurados.

Diante do exposto, concluímos que se F e F', simétrico de F em relação à reta r, estiverem em um mesmo semiplano definido pela reta diretriz e se $\overleftrightarrow{FF'}$ não for paralela à diretriz, r terá dois pontos de interseção com $P(F,d)$.

2° caso: r contém F.

Se r for perpendicular a d, essas retas se interceptarão em um ponto que chamaremos de I. O círculo procurado terá centro em M, ponto médio de $\overline{FI}$, e raio de medida $\overline{MI}$.

Caso r não seja perpendicular a d, novamente procuramos por um círculo C tangente a d, que contenha F e com centro sobre r.

Seja M o centro do círculo C procurado. Como F pertence a C, $\overline{MF}$ é um raio de C. A reta perpendicular a r em F intercepta d no ponto I (**figura 9**).

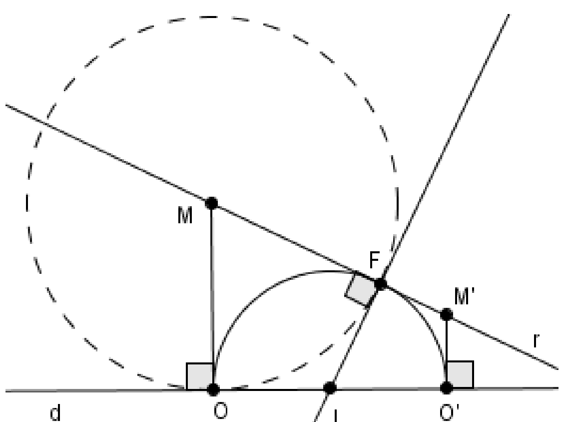

Figura 9

Seja O o ponto de tangência entre d e C. Como $\overleftrightarrow{IF}$ e $\overleftrightarrow{IO}$ são retas tangentes a C, $\overline{IF} = \overline{IO}$. Logo, para encontrarmos o ponto O, basta traçarmos o círculo de centro I e raio $\overline{IF}$. Esse círculo interceptará a diretriz nos pontos O e O', projeções ortogonais dos pontos M e M' procurados.

Então, se r não for perpendicular a d e contiver o foco F da parábola, a reta r terá dois pontos de interseção com $P(F,d)$.

CAPÍTULO 4 – ELIPSES

Esse capítulo seguirá a mesma sequência do capítulo anterior, apenas diferindo no objeto a ser estudado. Estabeleceremos uma definição para a elipse e identificaremos pontos dessa elipse no plano. Veremos como traçar retas tangentes à elipse que contenham um ponto específico do plano e determinaremos quantas e quais são as interseções entre uma elipse e uma reta qualquer do plano.

4.1 – DEFINIÇÕES

Assim como feito para as parábolas, apresentaremos duas definições para a elipse e mostraremos que essas definições são equivalentes.

Definição 1 - *Dados um comprimento de medida $2a$ e dois pontos F e F' com $\overline{FF'} < 2a$, definimos a elipse como o lugar geométrico dos centros M das circunferências tangentes a $C(F, 2a)$ que contém F'.*

Denominaremos os pontos F e F' de **focos** da elipse e o comprimento $2a$ de **parâmetro** da elipse. Representaremos uma elipse de focos F e F' e parâmetro $2a$ por $E(F, F', 2a)$. O círculo $C(F, 2a)$ será chamado **círculo diretor** associado ao foco F da elipse e será representado por $D(F)$

Construiremos pontos pertencentes a uma elipse dada. Para isso, analisemos a **figura 10** que mostra um ponto $M \in E(F, F', 2a)$.

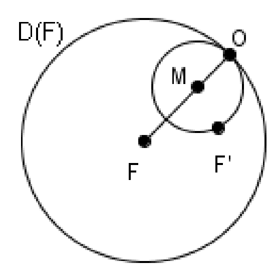

Figura 10

Na figura, traçamos $D(F)$. O ponto O pertence à interseção de $D(F)$ com $C(M, \overline{MF'})$. Como, por definição,

$\overline{MF'} = \overline{MO}$, o ponto M está sobre a mediatriz do segmento $\overline{OF'}$.

Temos assim uma maneira de determinarmos um ponto qualquer de uma elipse dada. Basta traçarmos $D(F)$ e escolhermos um ponto O qualquer sobre essa circunferência. O ponto M procurado pertencerá à interseção entre o raio $\overline{FO}$ e a mediatriz de $\overline{OF'}$.

A construção feita para encontrarmos M nos mostra que é possível estabelecer uma bijeção entre os pontos da elipse e os pontos do círculo diretor associado a F.

Estabeleceremos agora outra definição para a elipse.

Definição 2 – *Dados dois pontos F e F' e um comprimento $2a$ maior que a distância entre F e F', chamamos de elipse o lugar geométrico dos pontos M cuja soma das distâncias $\overline{MF}$ e $\overline{MF'}$ seja igual a $2a$.*

Teorema – As definições 1 e 2 são equivalentes.

Mostraremos inicialmente que a definição 1 implica na definição 2.

Pela definição 1**,** se $M \in E(F, F', 2a)$ então, $\overline{MF'} = \overline{MO}$.

Como $\overline{FM} + \overline{MO} = 2a$, então $\overline{FM} + \overline{MF'} = 2a$, conforme afirmado pela definição 2.

Reciprocamente, pela definição 2, $\overline{MF} + \overline{MF'} = 2a$. Seja $\overline{MO}$ o raio de $D(F)$ que contém M. Temos $\overline{FM} + \overline{MO} = 2a$ de onde obtemos $\overline{MF'} = \overline{MO}$ (**figura 11**). Então, o círculo de centro M tangente a $D(F)$ em O, contém o ponto F' conforme afirmado pela definição 1.

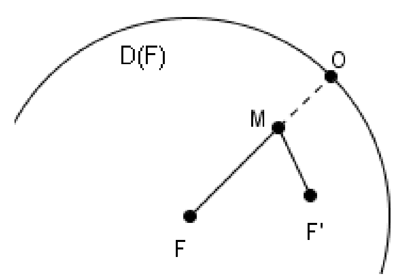

Figura 11

Fica assim demonstrada a equivalência entre as definições 1 e 2.

Observação: Na construção feita para encontrarmos um ponto $M \in E(F, F', 2a)$, poderíamos ter invertido os papeis de F e F' sem nenhum prejuízo, como mostra a **figura 12**.

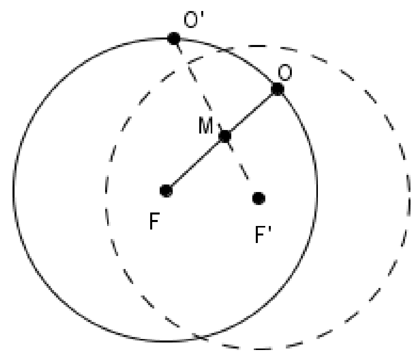

Figura 12

Na figura, temos os focos F e F' de uma elipse e, centrado em cada um dos focos, um círculo de raio $2a$. O ponto M pertence a $E(F, F', 2a)$ e foi obtido interceptando-se o raio $\overline{FO}$ com a mediatriz de $\overline{OF'}$.

Então, $\overline{FM} + \overline{MF'} = 2a$, $\overline{F'M} + \overline{MO'} = 2a$ e $\overline{MO} = \overline{MF'}$, de onde concluímos que $\overline{MO'} = \overline{FM}$. Isto significa que M pertence ao raio $\overline{F'O'}$ e também pertence à mediatriz de $\overline{FO'}$, ou seja, os pontos da elipse $E(F, F', 2a)$ podem ser construídos utilizando-se o círculo diretor associado a qualquer um dos focos.

4.2 – TANGENTES

Iremos agora analisar quando é possível traçar uma ou mais retas tangentes a uma elipse de modo que essas retas tangentes contenham pontos específicos do plano. Iniciaremos o capítulo estudando o traçado de retas tangentes à elipse em um ponto $M \in E(F, F', 2a)$. A seguir, estudaremos como traçar tangentes à elipse a partir de pontos não pertencentes a $E(F, F', 2a)$.

4.2.1 – Tangentes por um ponto da elipse

Dado um ponto $M \in E(F, F', 2a)$, queremos determinar a reta tangente à elipse em M. Para isso tomaremos um ponto M' da elipse, distinto de M tal que $\overline{MM'}$ não contenha F. Analisaremos o que acontece com a reta $\overleftrightarrow{MM'}$ quando M' tende para M. De acordo com a definição 1, M e M' são centros de círculos C e C', os quais contêm F' e são ambos tangentes a $D(F)$ nos pontos O e O', respectivamente (**figura13**).

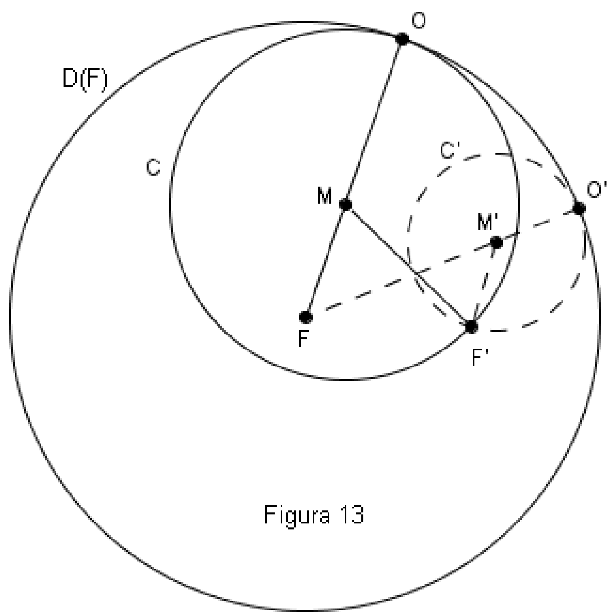

Figura 13

Tracemos as retas tangentes ao círculo diretor nos pontos O e O'.

Essas retas se cortam no ponto I. Afirmamos que I possui a mesma potência com relação às circunferências C e C'. De fato, $\overleftrightarrow{IO}$ é o eixo radical de $D(F)$ e C, logo $pot_C(I) = pot_{D(F)}(I)$. Da mesma forma, $\overleftrightarrow{IO'}$ é o eixo radical de $D(F)$ e C', portanto $pot_{C'}(I) = pot_{D(F)}(I)$. Então, $pot_C(I) = pot_{C'}(I)$, como queríamos demonstrar.

O ponto F' está na interseção das circunferências C e C', logo pertence ao eixo radical dessas circunferências. O mesmo ocorre com o ponto I, pelo exposto acima. Podemos então afirmar que o eixo radical de C e C' é a reta $\overleftrightarrow{F'I}$. A reta $\overleftrightarrow{MM'}$ que contém os centros dos círculos C e C' é portanto, perpendicular à reta $\overleftrightarrow{F'I}$, eixo radical de C e C'. (**figura 14**).

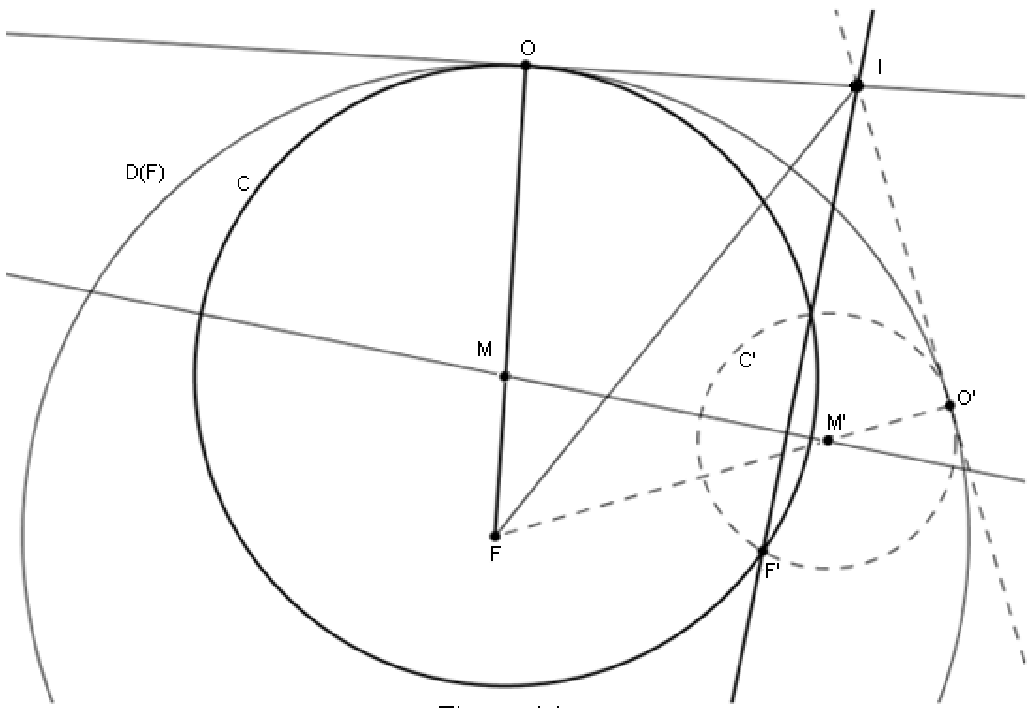

Figura 14

Queremos analisar o que ocorre com a reta $\overleftrightarrow{MM'}$ quando M' tende para M. Sabemos que $\overleftrightarrow{MM'}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{F'I}$ e que F' é um ponto fixo. Mostraremos que quando M' tende para M, a reta $\overleftrightarrow{F'I}$ tende para a reta $\overleftrightarrow{FO}$.

Nossa demonstração se dividirá em duas etapas.

Inicialmente mostraremos que quando M' tende para M, o ângulo $O\hat{F}O' = \alpha$, tende para zero.

De fato, utilizando a lei dos senos no $\Delta MFM'$ obtemos

$\frac{\overline{MM'}}{sen(\alpha)} = \frac{\overline{FM}}{sen\left(\widehat{FM'M}\right)}$ logo,

$$sen(\alpha) = \frac{\overline{(MM')}}{\overline{FM}} \cdot sen\left(F\widehat{M'}M\right)$$

Como $sen(F\widehat{M'}M)$ possui valor positivo menor que 1 e MM' tende para zero, concluímos que $sen(\alpha)$ tende para zero, ou seja, o ângulo $O\hat{F}O' = \alpha$ tende para zero, como queríamos demonstrar.

Mostraremos finalmente que o ponto I tende para o ponto O quando M' tende para M.

Consideremos o triângulo ΔIOF retângulo em O. Nele podemos destacar a relação

$$\overline{IO} = \overline{FO} \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2a \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Como α tende para zero, o mesmo ocorrerá com $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ logo, $\overline{IO}$ também tenderá para zero. Isso significa que o ponto I tende para o ponto O quando M' tende para M.

Dessa forma demonstramos que quando M' tende para M, a reta $\overleftrightarrow{F'I}$ tende para a reta $\overleftrightarrow{F'O}$ e essa reta é perpendicular a $\overleftrightarrow{MM'}$. Assim, definiremos a reta tangente a $E(F, F', 2a)$ no ponto M como sendo a perpendicular a $\overleftrightarrow{F'O}$ que contém M.

Observação: Como $M \in E(F, F', 2a)$ e portanto $\overline{MF'} = \overline{MO}$, a reta tangente à elipse no ponto M é a mediatriz do segmento $\overline{F'O}$ (**figura 15**)

Corolário – *Se M é um ponto da elipse $E(F, F', 2a)$ e O é o ponto do círculo diretor associado a M, então O e F' são simétricos com relação à reta tangente à elipse no ponto M.*

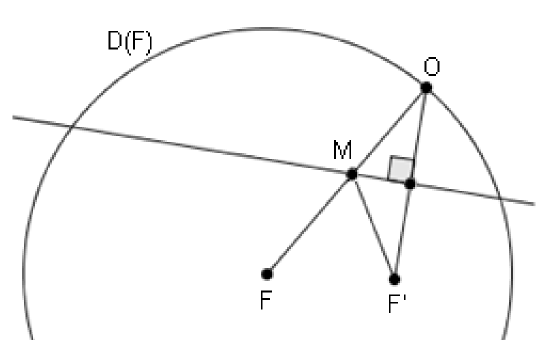

Figura 15

4.2.2 – Tangentes por um ponto não pertencente à elipse

Nessa seção determinaremos quando e como será possível traçar retas tangentes à elipse e que contenham um ponto P tal que $P \notin E(F, F', 2a)$.

Suponhamos que tal construção seja possível. Vamos analisar a **figura 16** que apresenta o problema resolvido.

A figura mostra uma elipse $E(F, F', 2a)$ com seu círculo diretor associado ao foco F. O ponto P é um ponto qualquer do plano, $M \in E(F, F', 2a)$ e a reta $\overleftrightarrow{PM}$ é tangente à elipse em M. O ponto O é o ponto do círculo diretor associado a M por meio da bijeção definida na página 24.

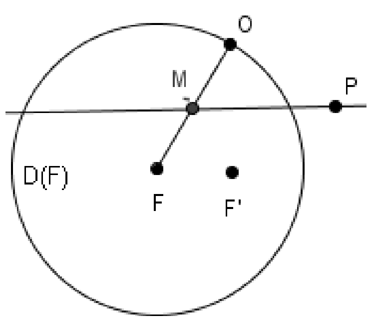

Figura 16

Como $\overleftrightarrow{PM}$ é tangente a $E(F, F', 2a)$ em M, $\overleftrightarrow{PM}$ é a mediatriz do segmento $\overline{OF'}$. Uma vez que P pertence a essa mediatriz temos $\overline{PO} = \overline{PF'}$.

Temos então uma maneira de encontrarmos o ponto O e, consequentemente, o ponto M com o qual podemos determinar a reta $\overleftrightarrow{PM}$ tangente à parábola. Basta traçarmos o círculo de centro P e raio $\overline{PF'}$. A interseção entre esse círculo e o círculo diretor nos dará o ponto O procurado.

O problema de encontrar tangentes a uma elipse a partir de um ponto P do plano terá solução sempre que houver interseção entre $D(F)$ e $C(P, \overline{PF'})$. Vejamos quando essa interseção existe.

Dividiremos nossa análise em dois casos.

1° Caso: P é externo a $D(F)$ ou está sobre $D(F)$

Nesse caso, o círculo $C(P, \overline{PF'})$ possuirá pontos externos a $D(F)$ e ao menos um ponto interno ao círculo diretor, – o foco F'. Então, os círculos $D(F)$ e $C(P, \overline{PF'})$ serão secantes. Logo, será possível traçarmos duas retas tangentes à elipse a partir de P.

2° Caso: P é interno a $D(F)$.

A **figura 17** mostra os círculos $D(F)$ e $C(P, \overline{PF'})$. O ponto P é qualquer e P' é o ponto de $C(P, \overline{PF'})$ mais distante de F. Se P' estiver sobre o círculo diretor ou for externo a $D(F)$, a interseção entre $D(F)$ e $C(P, \overline{PF'})$ será não vazia, então o problema de traçar de uma tangente à elipse a partir de P terá solução. Em outras palavras, podemos traçar tangentes à elipse a partir de um ponto P apenas quando tivermos $\overline{FP'} \geq 2a$.

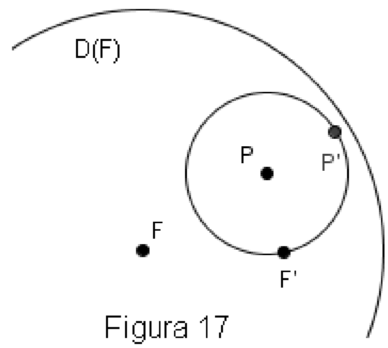

Figura 17

Queremos mostrar que $\overline{FP'} = \overline{PF} + \overline{PF'}$ e que portanto, o problema em questão terá soluções sempre que $\overline{PF} + \overline{PF'} \geq 2a$. Começaremos mostrando por absurdo que F, P e P' são colineares.

Suponha que F, P e P' não sejam colineares. Pela desigualdade triangular temos $\overline{FP'} < \overline{FP} + \overline{PP'}$. Tomemos um ponto $Q \in C(P, \overline{PF'})$ colinear a P e F e externo ao segmento $\overline{FP}$. Temos $\overline{FQ} = \overline{FP} + \overline{PQ}$ o que implica $\overline{FP'} < \overline{FQ}$, absurdo pois P' é o ponto de $C(P, \overline{PF'})$ mais distante de F. Logo F, P e P' são colineares.

Podemos então afirmar que $\overline{FP'} = \overline{PF} + \overline{PP'}$. Por construção temos $\overline{PP'} = \overline{PF'}$ então, $\overline{FP'} = \overline{PF} + \overline{PF'}$, como queríamos demonstrar.

Concluímos então que

- Se $\overline{PF} + \overline{PF'} < 2a$ os círculos $D(F)$ e $C(P, \overline{PF'})$ não possuem interseções e por isso não será possível traçar tangentes à elipse a partir de P.
- Se $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ os círculos $D(F)$ e $C(P, \overline{PF'})$ serão tangentes e portanto somente existirá uma tangente à elipse por P. Nesse caso $P \in E(F, F', 2a)$, situação já considerada na seção 4.2.1
- Se $\overline{PF} + \overline{PF'} > 2a$ os círculos $D(F)$ e $C(P, \overline{PF'})$ possuirão dois pontos de interseção. Logo, será possível traçarmos duas retas tangentes à elipse a partir de P. Note que no 1° caso considerado, também tínhamos $\overline{PF} + \overline{PF'} \geq 2a$ já que cada uma das medidas $\overline{PF}$ e $\overline{PF'}$ era maior ou igual a $2a$.

4.3 – INTERSEÇÃO ENTRE RETA E ELIPSE

Dadas uma elipse $E(F, F', 2a)$ e uma reta r qualquer do plano, queremos determinar quando existem e quais são os pontos de interseção entre r e $E(F, F', 2a)$. Para analisarmos problema, o dividiremos em dois casos.

1° caso: a reta r não contém nenhum dos focos.

De acordo com a definição 1, encontrar os pontos de interseção entre uma reta r e uma elipse $E(F, F', 2a)$ significa encontrar sobre r o centro de um círculo C que contenha F' e que seja tangente a $D(F)$.

Qualquer círculo com centro em r e que contenha F' deverá também conter o ponto F'', simétrico a F' com relação a r (**figura 18**), pois r contém um diâmetro de C e o círculo é simétrico com relação a qualquer um de seus diâmetros.

Nosso problema se resume então a traçar o círculo tangente a $D(F)$ que contém os pontos F' e F''.

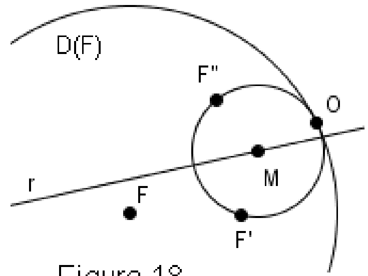

Figura 18

- Se F'' for externo ao círculo diretor, C e $D(F)$ serão secantes quando deveriam ser tangentes. Nesse caso o problema não terá solução.
- Se F'' estiver sobre $D(F)$, basta tomarmos o ponto M associado ao ponto F'' do círculo diretor. A reta r será a mediatriz de $\overline{F'F''}$, portanto será a reta tangente à elipse em M (veja corolário da seção 4.2.1). Logo o problema terá apenas uma solução
- Se F'' for interno ao círculo diretor o problema terá duas soluções. Procederemos à demonstração desse fato e mostraremos como encontrá-las.

Queremos encontrar sobre r o centro do círculo C que contém F' e F'' e é tangente ao círculo diretor no ponto O. Uma vez de posse do ponto O essa construção poderá ser realizada facilmente. Para determinarmos esse ponto construiremos um círculo auxiliar C' com centro D sobre r e que contenha os pontos F' e F''.

Por construção, a circunferência C procurada e a circunferência auxiliar C' são secantes em F' e F'' logo, o eixo radical de C e C' é a reta $\overleftrightarrow{F'F''}$.

Tracemos então a reta s, eixo radical das circunferências C' e $D(F)$ (**figura 19**). Afirmamos que s é concorrente à reta $\overleftrightarrow{F'F''}$. Para demonstrarmos esse fato, basta lembrarmos que o eixo radical de duas circunferências é perpendicular à linha que une os centros dessas circunferências. As retas $\overleftrightarrow{DF}$ e r são concorrentes uma vez que r não contém nenhum dos focos, por suposição. Como s e $\overleftrightarrow{F'F''}$ são perpendiculares a $\overleftrightarrow{DF}$ e a r respectivamente, s e $\overleftrightarrow{F'F''}$ também serão concorrentes. Chamaremos de I o ponto de interseção entre essas retas.

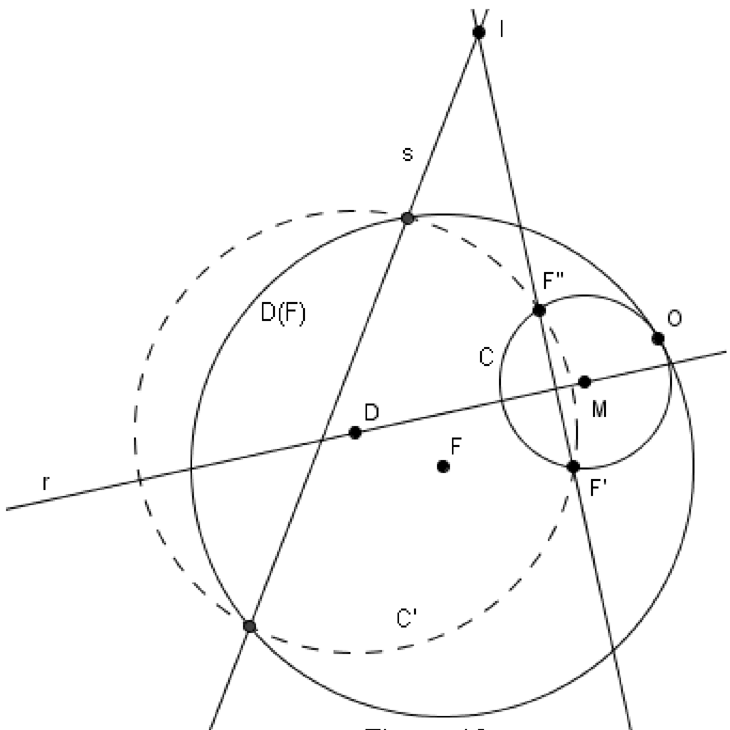

Figura 19

Como, por construção, $pot_C(I) = pot_{C'}(I)$ e $pot_{C'}(I) = pot_{D(F)}(I)$, então $pot_C(I) = pot_{D(F)}(I)$. Por outro lado, o ponto O também pertence ao eixo radical de $D(F)$ e C uma vez que tem potência nula com relação a ambas as circunferências. Logo, o eixo radical de $D(F)$ e C é a reta $\overleftrightarrow{IO}$, tangente ao círculo diretor conforme demonstrado na seção 2.3.

Podemos então encontrar o ponto O de tangência entre C e $D(F)$ traçando a reta tangente ao círculo diretor a partir do ponto I.

Como na realidade existem duas retas tangentes a $D(F)$ a partir de I, existirão dois pontos de interseção entre r e a elipse $E(F, F', 2a)$.

O leitor pode se perguntar se a solução encontrada seria diferente caso o círculo auxiliar C' traçado fosse outro uma vez que a única restrição sobre C' é que contenha F' e F''. A resposta para essa questão é negativa. Sua demonstração pode ser encontrada no apêndice.

2° caso: r contém algum dos focos.

Suponhamos que r contenha F. O ponto de interseção entre r e a elipse será o centro M de um círculo C que contenha F' e seja tangente a $D(F)$.

A reta r corta o círculo diretor nos pontos O e O' (**figura 20**). Qualquer círculo com centro sobre r e que seja tangente a $D(F)$ deverá conter O ou O' uma vez que r contém um diâmetro do círculo diretor. Isso implica que nosso problema terá duas soluções M e M'.

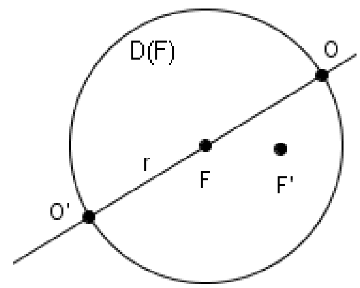

Figura 20

Como M pertence à elipse $E(F, F', 2a)$, teremos $\overline{MO} = \overline{MF'}$ logo a interseção entre a reta r e a mediatriz de $\overline{OF'}$ nos dará o ponto M procurado. Da mesma forma, o ponto M' pertencerá à interseção de r com a mediatriz de $\overline{M'F'}$ (**figura 21**).

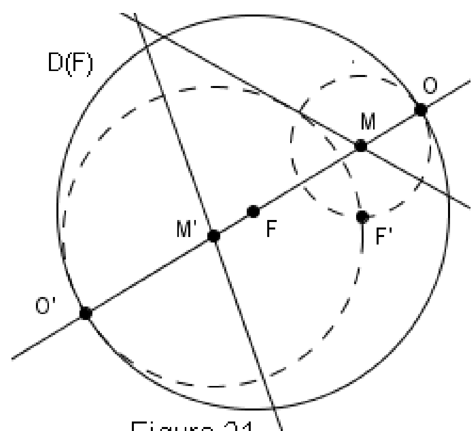

Figura 21

Caso a reta r contivesse o foco F' em vez de F, bastaria trocarmos os papéis dos focos, traçando o círculo diretor associado ao foco F' e repetirmos a construção realizada para a reta contendo F.

CAPÍTULO 5 – HIPÉRBOLES

O estudo das hipérboles se assemelha ao estudo das elipses. Este capítulo seguirá os mesmos moldes do capítulo anterior. Estabeleceremos uma definição para a hipérbole e mostraremos como construir pontos dessa hipérbole. Definiremos como traçar tangentes à hipérbole quem contenham um ponto específico do plano e determinaremos quantas e quais são as interseções entre uma hipérbole e uma reta dadas.

5.1 – DEFINIÇÕES

Nesta seção apresentaremos duas definições distintas mas equivalentes para a hipérbole.

Definição 1 – *Dados um comprimento de medida $2a$ e dois pontos F e F' com $\overline{FF'} > 2a$, definimos a hipérbole como o lugar geométrico dos centros M das circunferências tangentes a $C(F, 2a)$ que contêm F'.*

Denominaremos os pontos F e F' de **focos** da hipérbole e o segmento $2a$ de **parâmetro** da hipérbole. Representaremos uma hipérbole de focos F e F' e parâmetro $2a$ por $H(F, F', 2a)$. O círculo $C(F, 2a)$ será denominado **círculo diretor** associado ao foco F da hipérbole e será representado por $D(F)$.

Se M é o centro de um círculo $C(M, \overline{MF'})$ tangente a $D(F)$ em O, uma das duas situações deve ocorrer: ou $C(M, \overline{MF'})$ e $D(F)$ são tangentes externamente ou $C(M, \overline{MF'})$ e $D(F)$ são tangentes internamente com $D(F)$ interno a $C(M, \overline{MF'})$. Para construirmos pontos pertencentes a $H(F, F', 2a)$ devemos considerar os dois casos.

A figura 22 ilustra o caso em que D(F) e C(M,MF') são tangentes externamente e a figura 23 ilustra o caso em que são tangentes internamente.

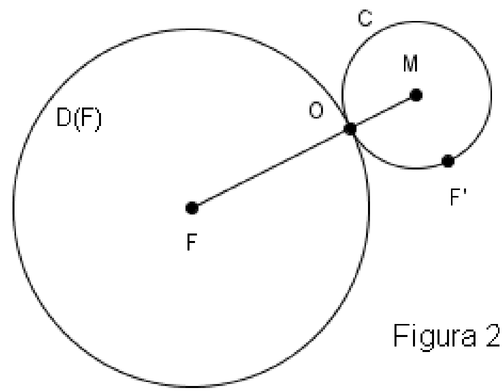

Figura 22

Em qualquer duas figuras temos, $M \in H(F, F', 2a)$. O ponto O é ponto de tangência entre $C(M, \overline{MF'})$ e $D(F)$.

Os pontos F, O e M são colineares. Como, por definição, $\overline{MF'} = \overline{MO}$ temos que M pertence à mediatriz do segmento $\overline{OF'}$ e também à reta $\overleftrightarrow{OF}$, logo M pertence à interseção de $\overleftrightarrow{OF}$ com a mediatriz de $\overline{OF'}$.

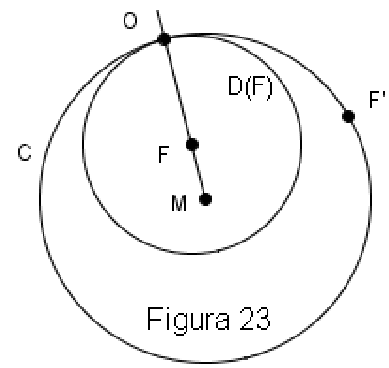

Figura 23

Em ambos os casos pudemos concluir que M pertence à interseção de $\overleftrightarrow{OF}$ com a mediatriz de $\overline{OF'}$. Temos assim uma maneira de determinarmos um ponto M qualquer de uma hipérbole dada. Basta traçarmos $D(F)$ e escolhermos um ponto O qualquer sobre essa circunferência. O ponto M procurado pertencerá à interseção de $\overleftrightarrow{FO}$ com a mediatriz de $\overline{OF'}$.

A construção descrita para determinarmos um ponto M da hipérbole não é válida para qualquer escolha do ponto O do círculo diretor pois, quando $\overline{OF'}$ é tangente ao círculo diretor, a mediatriz de $\overline{OF'}$ será paralela a $\overleftrightarrow{OF}$. Desta forma, a interseção entre $\overleftrightarrow{OF}$ e a mediatriz de $\overline{OF'}$ será vazia. Para resolvermos esse problema eliminaremos do círculo diretor os pontos O que fazem $\overleftrightarrow{OF'}$ tangente a $D(F)$.

Existem duas retas tangentes ao círculo diretor a partir de F'. Chamemos de T e T' os pontos de tangência dessas retas com $D(F)$. Se eliminarmos do círculo diretor os pontos T e T', obteremos novo conjunto aberto ao qual denominaremos **circulo diretor***. Denotaremos o círculo diretor* por $D(F)^*$.

Demonstraremos que a construção feita para encontrarmos M nos fornece uma bijeção entre os pontos M da hipérbole e os pontos O do círculo diretor*. Para tal demonstração precisamos mostrar que cada ponto O está relacionado a um único ponto M da hipérbole pela construção descrita para encontrarmos M e que dois pontos O e O' distintos do círculo diretor irão produzir pontos M e M' distintos. De fato, para cada escolha de O obtemos um único ponto M, pois M pertence à interseção de duas retas, que deve ser formada por apenas um único ponto. Ao mesmo tempo, se O e O' são dois pontos distintos do círculo diretor* temos duas possibilidades.

1° caso: $\overleftrightarrow{OF}$ e $\overleftrightarrow{O'F}$ são concorrentes em F.

Nesse caso M pertencerá à reta $\overleftrightarrow{OF}$ e M' pertencerá à reta $\overleftrightarrow{O'F}$. Como o ponto F de interseção entre $\overleftrightarrow{OF}$ e $\overleftrightarrow{O'F}$ não pertence $H(F, F', 2a)$ pela definição de hipérbole e $\overleftrightarrow{OF}$ e $\overleftrightarrow{O'F}$ são distintas, M e M' devem ser distintos.

2° caso: $\overleftrightarrow{OF}$ e $\overleftrightarrow{O'F}$ são coincidentes.

As retas $\overleftrightarrow{OF}$ e $\overleftrightarrow{O'F}$ somente serão coincidentes se O e O' forem pontos diametralmente opostos de $D(F)^*$. Suponha por absurdo que M e M' sejam coincidentes. Isso significa que M pertence à mediatriz de $\overline{OF'}$ e à mediatriz de $\overline{O'F'}$. Então, $\overline{OM} = \overline{MF'}$ e $\overline{O'M} = \overline{MF'}$ de onde podemos concluir que $\overline{OM} = \overline{O'M}$. Como O e O' são pontos diametralmente opostos ao círculo diretor*, M deve coincidir com o ponto F, centro de $D(F)^*$, uma contradição uma vez que F não pertence à hipérbole.

Fica assim demonstrada a bijeção entre os pontos de $D(F)^*$ e os pontos de $H(F, F', 2a)$.

Estabeleceremos agora uma nova definição para a hipérbole.

Definição 1 – *Dados um segmento de medida $2a$ e dois pontos F e F' do plano tais que $\overline{FF'}$ seja maior que $2a$, chamamos de hipérbole ao lugar geométrico dos pontos M tais que $\left|\overline{MF} - \overline{MF'}\right| = 2a$.*

Teorema – *As definições 1 e 2 são equivalentes*.

Demonstração – Para demonstrarmos que a definição 1 implica na definição 2, analisaremos dois casos distintos.

1° caso: $D(F)$ e $C(M, \overline{MF'})$ são tangentes externas

Pela **figura 22** temos $\overline{MF} - \overline{MO} = 2a$. Por definição temos $\overline{MO} = \overline{MF'}$ de onde obtemos $\overline{MF} - \overline{MF'} = 2a$.

2° caso: $D(F)$ e $C(M, \overline{MF'})$ são tangentes internas.

Pela **figura 23** temos $\overline{MO} - \overline{MF} = 2a$. Por definição temos $\overline{MO} = \overline{MF'}$ de onde obtemos $\overline{MF'} - \overline{MF} = 2a$.

A partir do exposto podemos concluir que $\left|\overline{MF} - \overline{MF'}\right| = 2a$, o que demonstra que a definição 1 implica na definição 2.

Para demonstrarmos a recíproca, novamente dividiremos nossa análise em dois casos.

1° caso: $\overline{MF} > \overline{MF'}$

Nesse caso teremos $\overline{MF} - \overline{MF'} = 2a$. Se traçarmos a reta $\overleftrightarrow{MF}$ e tomarmos na interseção de $\overleftrightarrow{MF}$ e $D(F)^*$ o ponto O interno ao segmento $\overline{MF}$, teremos $\overline{MF} - \overline{MO} = 2a$. Então, podemos concluir que $\overline{MF'} = \overline{MO}$. Isso significa que o círculo de centro M e raio $\overline{MF'}$ é tangente a $D(F)^*$ em O, conforme afirmado pela definição 1.

2° caso: $\overline{MF} < \overline{MF'}$

Nesse caso teremos $\overline{MF'} - \overline{MF} = 2a$. Se traçarmos a reta $\overleftrightarrow{MF}$ e tomarmos na interseção de $\overleftrightarrow{MF}$ e $D(F)^*$ o ponto O externo ao segmento $\overline{MF}$, teremos $\overline{MO} - \overline{MF} = 2a$. Então, podemos concluir que $\overline{MF'} = \overline{MO}$. Logo, o círculo de centro M e raio $\overline{MF'}$ é tangente a $D(F)^*$ em O, conforme afirmado pela definição 1.

Fica então demonstrada a equivalência entre as definições 1 e 2.

Encerraremos essa seção com a demonstração de que os pontos da hipérbole $H(F, F', 2a)$ poderiam ser obtidos utilizando-se o círculo diretor associado a F' sem nenhum prejuízo.

Suponhamos que $\overline{MF}$ seja maior que $\overline{MF'}$. A **figura 24** mostra um ponto $M \in H(F, F', 2a)$ e os círculos diretores associados aos focos F e F'. Os pontos O e O' pertencem à interseção de $\overleftrightarrow{FM}$ com $D(F)^*$ e de $\overleftrightarrow{F'M}$ com $D(F')^*$

Na figura temos $\overline{MF} - \overline{MF'} = 2a$ e $\overline{MO'} - \overline{MF'} = 2a$, logo $\overline{MF} = \overline{MO}$. Isso significa que o círculo de centro M e raio $\overline{MF}$ é tangente à circunferência $D(F')^*$ no ponto O. Dessa forma poderíamos usar o círculo diretor associado a F' para obter a hipérbole sem nenhum prejuízo.

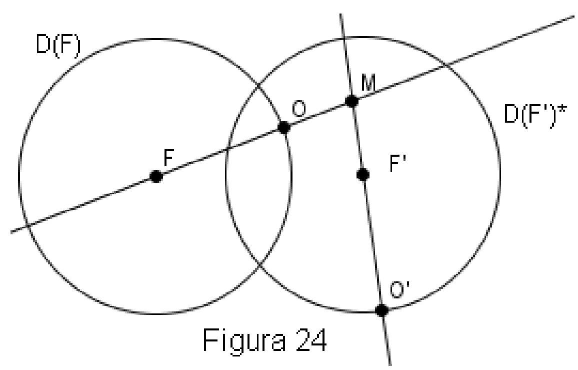

Figura 24

A demonstração desse fato para o caso em que $\overline{MF}$ é menor que $\overline{MF'}$ se dá de modo análogo.

5.2 – TANGENTES

Nessa seção analisaremos quando é possível traçar uma ou mais retas tangentes a uma hipérbole de modo que essas tangentes contenham pontos específicos do plano. Iniciaremos o capítulo definindo como traçar retas tangentes à hipérbole por um ponto $M \in H(F, 'F', 2a)$. A seguir estudaremos como traçar tangentes à hipérbole por pontos exteriores a essa hipérbole.

5.2.1 – Tangentes por um ponto da hipérbole

Dado um ponto $M \in H(F, 'F', 2a)$, queremos determinar a reta tangente à hipérbole em M. Para isso tomaremos um ponto M' da hipérbole, próximo de M e distinto de M, tal que $\overline{MM'}$ não contenha F. Analisaremos o que acontece com a reta $\overleftrightarrow{MM'}$ quando M' tende para M e definiremos a posição limite de $\overleftrightarrow{MM'}$ como sendo a tangente à hipérbole por M. De acordo com a definição 1, M e M' são centros dos círculos C e C', os quais contêm F' e são ambos tangentes a $D(F)^*$ nos pontos O e O', respectivamente (**figura 25**).

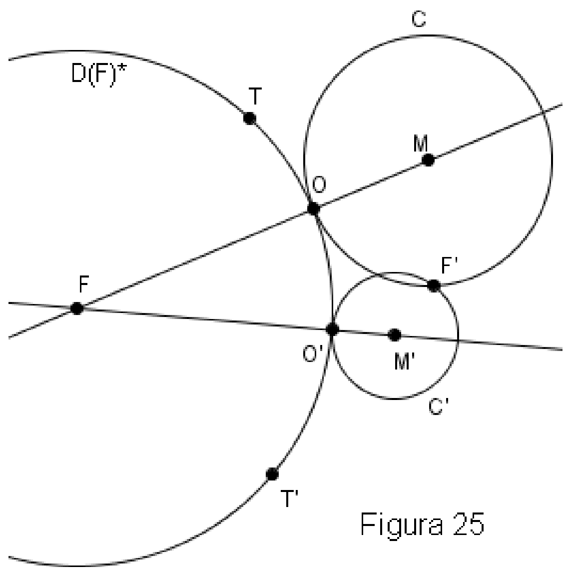

Figura 25

Tracemos as retas tangentes ao círculo diretor nos pontos O e O'. Essas retas se interceptam no ponto I. Afirmamos que I possui a mesma potência com relação às circunferências C e C'.

De fato, $\overleftrightarrow{IO}$ é o eixo radical de $D(F)^*$ e C uma vez que essas circunferências são tangentes em O. Logo, $pot_{D(F)^*}(I) = pot_C(I)$. Da mesma forma, $\overleftrightarrow{IO'}$ é o eixo radical de $D(F)^*$ e C', o que implica $pot_{D(F)^*}(I) = pot_{C'}(I)$. Então, $pot_C(I) = pot_{C'}(I)$, como queríamos demonstrar.

O ponto F' pertence à interseção das circunferências C e C', logo pertence ao eixo radical dessas circunferências. O mesmo ocorre com o ponto I. Podemos então afirmar que o eixo radical de C e C' é a reta $\overleftrightarrow{F'I}$.

A reta $\overleftrightarrow{MM'}$ que contém os centros dos círculos C e C' é, portanto, perpendicular à reta $\overleftrightarrow{F'I}$, eixo radical de C e C' (**figura 26**).

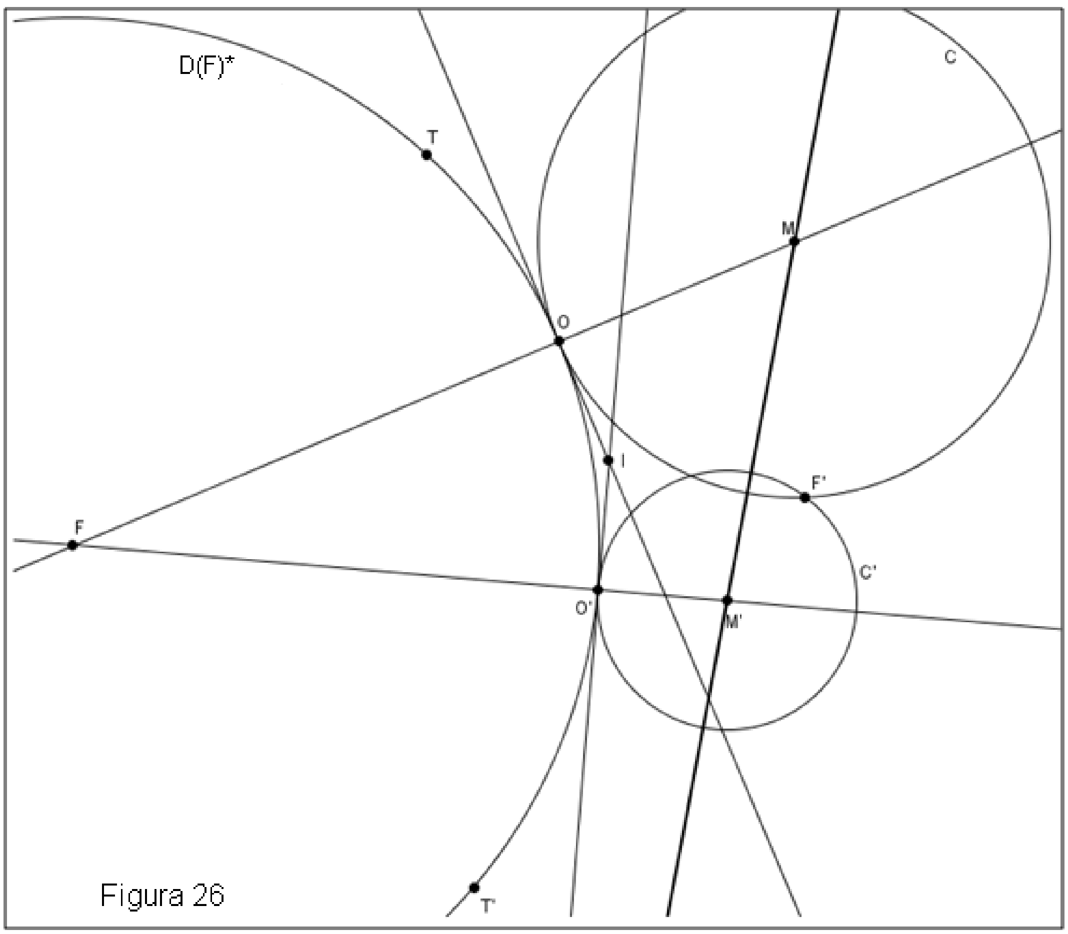

Figura 26

Queremos analisar o que ocorre com a reta $\overleftrightarrow{MM'}$ quando M' tende para M. Sabemos que $\overleftrightarrow{MM'}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{F'I}$ então, se analisarmos o que acontece com o ponto I quando M' tende para M, poderemos tirar conclusões sobre a reta MM'.

Primeiramente iremos mostrar que, quando M' tende para M, o ângulo $O\hat{F}O' = \alpha$, tende para zero.

De fato, pela lei dos senos no $\Delta MFM'$ obtemos

$\frac{\overline{MM'}}{sen(\propto)} = \frac{\overline{FM}}{sen\left(F\widehat{M'}M\right)}$, logo

$sen(\alpha) = \frac{\overline{MM'}}{\overline{FM}} \cdot sen\left(F\widehat{M'}M\right)$.

Como $sen\left(F\widehat{M'}M\right)$ possui valor positivo menor que 1 e $\overline{MM'}$ tende para zero, concluímos que $sen(\alpha)$ tende para zero. Logo, o ângulo $O\hat{F}O' = \alpha$ tende para zero, como queríamos demonstrar.

Mostraremos finalmente que o ponto I tende para o ponto O quando M' tende para M.

Consideremos o triângulo ΔIOF retângulo em O. Nele podemos destacar a relação

$\overline{IO} = \overline{FO} \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2a \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Como α tende para zero, o mesmo ocorrerá com $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, logo $\overline{IO}$ também tenderá para zero. Isso significa que o ponto I tende para o ponto O quando M' tende para M.

Observação: como $M \in H(F, F', 2a)$ e portanto $\overline{MF'} = \overline{MO}$, a reta tangente à elipse no ponto M é a mediatriz do segmento $\overline{F'O}$ (**figura 27**).

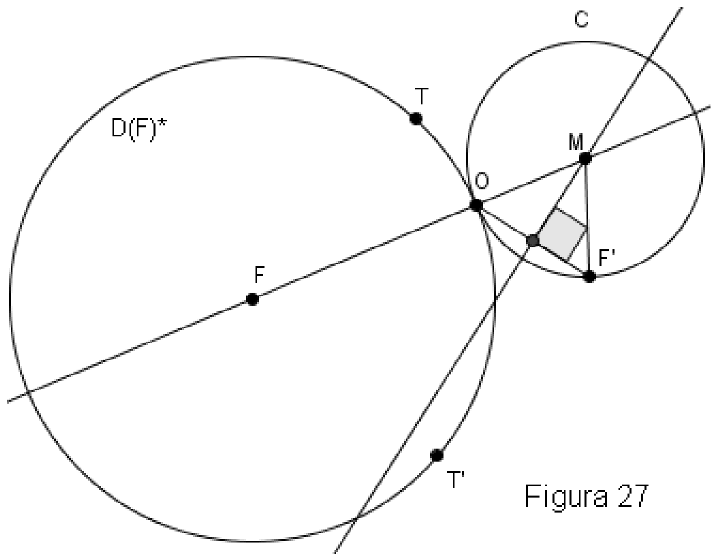

Figura 27

Corolário – *Se M é um ponto da hipérbole $H(F, F', 2a)$ e O é o ponto do círculo diretor associado a M, então O e F' apresentam simetria com relação à reta tangente à hipérbole no ponto M.*

5.2.2 – Tangentes por um ponto não pertencente à hipérbole

Nessa seção determinaremos quando e como é possível traçar retas tangentes à hipérbole que contenham um ponto P tal que $P \notin H(F, F', 2a)$

Suponhamos que tal construção seja possível. Vamos analisar a **figura 28** que apresenta o problema resolvido.

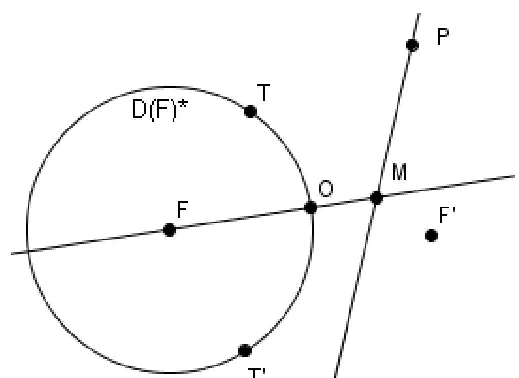

Figura 28

A figura mostra uma hipérbole $H(F, F', 2a)$ com seu círculo diretor* associado ao foco F. O ponto P é um ponto qualquer do plano, $M \in H(F, F', 2a)$ e a reta $\overleftrightarrow{PM}$ é tangente à hipérbole em M.

O ponto O é o ponto de $D(F)^*$ relacionado ao ponto M por meio da bijeção definida na página 38.

Como $\overleftrightarrow{PM}$ é tangente a $E(F, F', 2a)$ em M, $\overleftrightarrow{PM}$ é a mediatriz do segmento $\overline{OF'}$. Uma vez que P pertence a essa mediatriz temos $\overline{PO} = \overline{PF'}$.

Temos então uma maneira de encontrarmos o ponto O e, consequentemente, o ponto M com o qual podemos determinar a reta $\overleftrightarrow{PM}$ tangente à hipérbole. Basta traçarmos o círculo de centro P e raio PF'. A interseção entre esse círculo e o círculo diretor* nos dará o ponto O procurado.

O problema de encontrar tangentes a uma hipérbole a partir de um ponto P do plano terá solução sempre que houver interseção entre $D(F)^*$ e $C(P, \overline{PF'})$. Vejamos quando essa interseção existe.

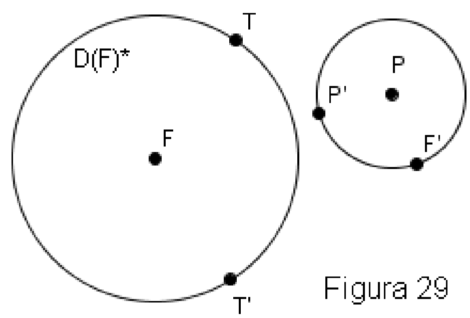

Figura 29

A **figura 29** mostra os círculos $D(F)^*$ e $C(P, \overline{PF'})$. O ponto P é qualquer e P' é o ponto de $C(P, \overline{PF'})$ mais próximo de F. Se P' estiver sobre o círculo diretor* ou for interno a $D(F)^*$, a interseção entre $D(F)^*$ e $C(P, \overline{PF'})$ será não vazia. Então, o problema de traçar uma tangente à hipérbole a partir de P terá solução[1]. Ou seja, podemos traçar tangentes à hipérbole a partir de um ponto P apenas quando tivermos $\overline{FP'} \leq 2a$

Queremos mostrar que $FP' = |\overline{FP} - \overline{PF'}|$ e que, portanto, o problema em questão terá solução quando $|\overline{FP} - \overline{PF'}| \leq 2a$. Começaremos nossa demonstração mostrando que F, P e P' são colineares.

[1] A menos que algum dos pontos de interseção entre $C(P, \overline{PF'})$ e $D(F)$ coincida com T ou T', o que eliminaria uma das soluções. Isso somente ocorrerá se P estiver sobre a mediatriz de $\overline{F'T}$ ou de $\overline{F'T'}$ (ou sobre a interseção das duas mediatrizes, situação em que o problema não terá solução)

Suponha, por absurdo, que F, P e P' não sejam colineares. Pela desigualdade triangular temos $\overline{FP} - \overline{PP'} < \overline{FP'}$, de onde tiramos $\overline{FP} - \overline{PF'} < \overline{FP'}$. Tomemos então um ponto Q pertencente a $C(P, \overline{PF'})$ colinear a P e F. Temos três possibilidades.

- $\overline{PF} = \overline{PF'}$

Nesse caso $\overline{PQ} = \overline{PF} = \overline{PF'}$ logo $\overline{FP} - \overline{PQ} = \overline{FP} - \overline{PF'} = 0$ de onde tiramos $\overline{FP'} > \overline{FQ}$, absurdo pois P' é o ponto de $C(P, \overline{PF'})$ mais próximo de F. Logo, F, P e P' são colineares.

- $\overline{PF} > \overline{PF'}$

Se tomarmos Q interno a $\overline{PF}$ teremos $\overline{PF} - \overline{PQ} = \overline{FQ}$ de onde tiramos $\overline{PF} - \overline{PF'} = \overline{FQ}$ o que nos fornece $\overline{FP'} > \overline{FQ}$, absurdo.

- $\overline{PF} < \overline{PF'}$

Se tomarmos um ponto Q externo a $\overline{PF}$ teremos $\overline{PQ} = \overline{FQ} + \overline{PF}$ o que fornece $\overline{PF'} = \overline{FQ} + \overline{PF}$. Pela desigualdade triangular no $\Delta PFP'$ temos $\overline{FP'} + \overline{FP} > \overline{PP'}$, de onde tiramos $\overline{PF'} + \overline{FP} > \overline{PF'}$. Igualando as duas equações com PF' obtemos $\overline{FP'} > \overline{FQ}$, um absurdo.

Concluímos então que P,F e P' são colineares. Podemos então afirmar que $\overline{FP'} = |\overline{PP'} - \overline{PF}|$. Por construção temos $\overline{PP'} = \overline{PF'}$, então $FP' = |\overline{FP} - \overline{PF'}|$ como queríamos demonstrar.

Concluímos então que:

- Se $|\overline{FP} - \overline{PF'}| > 2a$, os círculos $D(F)^*$ e $C(P, \overline{PF'})$ não possuem interseções e, por isso, não será possível traçar tangentes à hipérbole a partir de P.

- Se $|\overline{FP} - \overline{PF'}| = 2a$, o ponto P pertencerá à hipérbole. Os círculos $D(F)^*$ e $C(P, \overline{PF'})$ serão tangentes e, portanto, somente existirá uma única reta tangente à elipse por P, a menos que P esteja sobre a mediatriz de $\overline{F'T}$ ou de $\overline{F'T'}$.
- Se $|\overline{FP} - \overline{PF'}| < 2a$, os círculos $D(F)^*$ e $C(P, \overline{PF'})$ possuirão dois pontos de interseção, a menos que P esteja sobre a mediatriz de $\overline{F'T}$ ou de $\overline{F'T'}$. Logo, será possível traçarmos até duas retas tangentes à hipérbole a partir de P.

5.3 – INTERSEÇÃO ENTRE RETA E HIPÉRBOLE

Dadas uma hipérbole $H(F, F', 2a)$ e uma reta r qualquer do plano, queremos determinar quando existem e quais são os pontos de interseção entre r e $H(F, F', 2a)$. Para analisarmos o problema o dividiremos em dois casos.

1°caso: a reta r não contém nenhum dos focos da hipérbole.

De acordo com a definição 1**,** encontrar os pontos de interseção entre uma reta r e uma hipérbole $H(F, F', 2a)$ significa encontrar sobre r o centro de um círculo C que contenha F' e que seja tangente a $D(F)^*$.

Qualquer círculo com centro em r e que contenha F' deverá conter também o ponto F'', simétrico a F' com relação a r (**figura 30**), pois r contém um

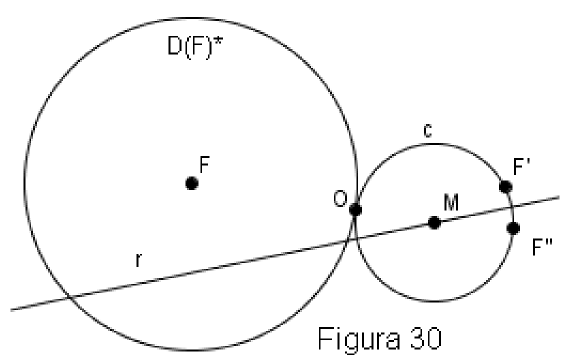

Figura 30

diâmetro de C e o círculo é simétrico com relação a qualquer de seus diâmetros.

Nosso problema se resume então a traçar o círculo tangente a $D(F)^*$ que contém os pontos F' e F''.

- Se F'' for interno ao círculo diretor, C e $D(F)^*$ serão secantes quando deveriam ser tangentes. Nesse caso o problema não terá solução.
- Se F'' estiver sobre $D(F)^*$, basta tomarmos o ponto M relacionado ao ponto F'' do círculo diretor*. A reta r será a mediatriz de $\overline{F'F''}$, portanto será a reta tangente à hipérbole em M (veja corolário da seção 5.2.1). Logo, o problema terá apenas uma solução.
- Se F'' for externo ao círculo diretor* o problema terá até duas soluções. Procederemos à demonstração desse fato e mostraremos como encontrar essas soluções.

Queremos encontrar sobre r o centro do círculo C que contém F' e F'' e é tangente a $D(F)^*$ no ponto O. Uma vez de posse do ponto O a construção desse círculo poderá ser realizada facilmente. Para determinarmos esse ponto construiremos um círculo auxiliar C' com centro D sobre r e que contenha os pontos F' e F''.

Por construção, C e C' são secantes em F' e F'', logo o eixo radical de C e C' é a reta $\overleftrightarrow{F'F''}$. Tracemos então a reta s, eixo radical das circunferências C' e $D(F)^*$ (**figura 31**). Afirmamos que s é concorrente à reta $\overleftrightarrow{F'F''}$. A demonstração desse fato é idêntica à feita na página 32 para as elipses, portanto será omitida.

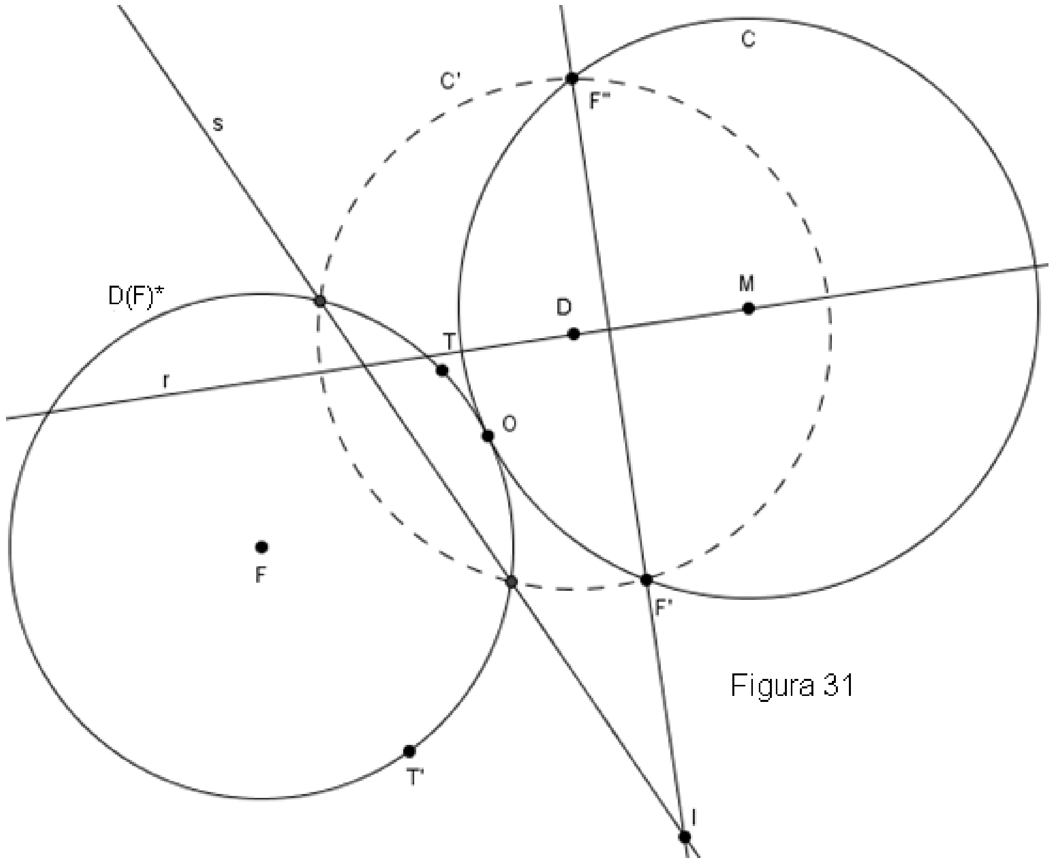

Figura 31

Como, por construção, $pot_C(I) = pot_{C'}(I)$ e $pot_{C'}(I) = pot_{D(F)^*}(I)$, então $pot_C(I) = pot_{D(F)^*}(I)$ o que implica que I pertence ao eixo radical de $D(F)^*$ e C. Ao mesmo tempo, o ponto O também pertence ao eixo radical de $D(F)^*$ e C uma vez que tem potência nula com relação a ambas as circunferências. Logo, o eixo radical de $D(F)^*$ e C é a reta $\overleftrightarrow{IO}$, tangente ao círculo diretor* conforme demonstrado em 1.3.

Podemos então encontrar o ponto O de tangência entre C e $D(F)^*$ traçando a reta tangente ao círculo diretor* a partir de I. Como na realidade existem duas retas tangentes a $D(F)^*$ a partir de I, existirão dois pontos de interseção entre r e a hipérbole $H(F, F', 2a)$.

2° caso: r contém algum dos focos

Suponhamos que r contenha F. O ponto de interseção entre r e a hipérbole será o centro M de uma circunferência C que contenha F' e seja tangente a $D(F)^*$.

A reta r intercepta $D(F)^*$ nos pontos O e O' (**figura 32**). Qualquer circunferência com centro sobre r e que seja tangente ao círculo diretor* deverá conter O ou O' pois r contém um diâmetro de $D(F)^*$. Isso implica que nosso problema terá duas soluções M e M'.

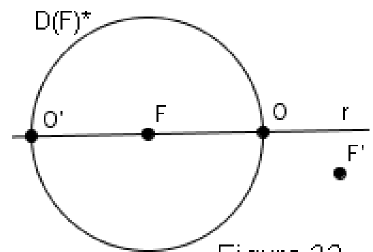

Figura 32

Como M pertence à hipérbole $H(F, F', 2a)$, teremos $\overline{MO} = \overline{MF'}$, logo a interseção entre a reta r e a mediatriz de $\overline{OF'}$ nos dará o ponto M procurado. Da mesma forma, o ponto M' pertencerá à interseção de r com a mediatriz de $\overline{M'F'}$ (**figura 33**).

Caso a reta r contivesse F' em vez de F, bastaria trocarmos os papéis dos focos traçando o círculo diretor* associado ao foco F' e repetirmos a construção realizada para a reta contendo F.

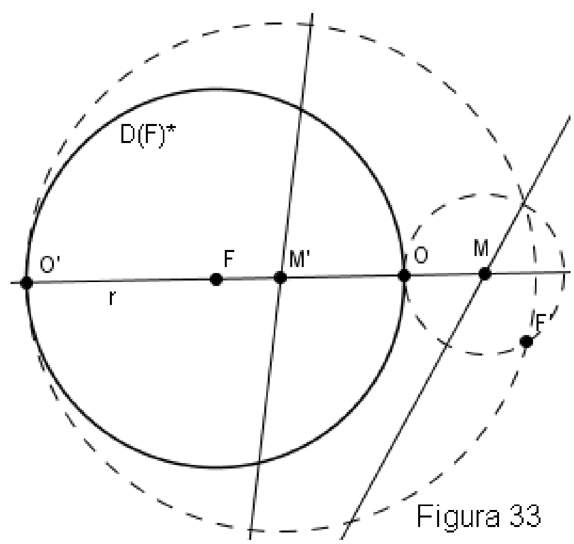

Figura 33

CAPÍTULO 6 – CONCLUSÃO

Usualmente, no estudo do desenho geométrico, buscamos estabelecer uma associação entre a imagem de um objeto e suas propriedades. Dessa forma, um círculo passa a ser mais do a imagem gráfica de um objeto redondo, pois associamos a essa imagem algumas propriedades como, por exemplo, a de ser o lugar geométrico dos pontos que possuem uma mesma distância dada de um centro.

Entretanto, no estudo das cônicas apresentado nesse trabalho, a associação entre a imagem do objeto estudado e suas propriedades não acontece, simplesmente porque não temos a imagem do objeto. Chamamos a atenção para o fato de que esse trabalho não apresenta a imagem de **nenhuma** cônica.

Todo nosso estudo é feito baseado nos elementos que definem as cônicas – no caso da parábola, uma reta diretriz e um foco – e nas propriedades que os pontos das cônicas apresentam com relação a esses objetos. Como consequência, uma pessoa que não conhecesse a imagem de uma hipérbole poderia, ao terminar o estudo do capítulo 4, dizer com precisão quais seriam os pontos de interseção entre uma hipérbole e uma reta dadas, entretanto continuaria sem conhecer a imagem de uma hipérbole.

Considero portanto que esse trabalho pode ser útil a estudantes de geometria do ensino superior brasileiro ao apresentar um texto em português que trata do desenho geométrico sob uma perspectiva não usual, a de se trabalhar apenas com as propriedades de um objeto.

APÊNDICE

Teorema – Se C é um círculo de centro O que contém em seu interior pontos F e F' distintos, o eixo radical de C e de qualquer circunferência C' que contenha os pontos F e F', intercepta a reta $\overleftrightarrow{FF'}$ em um ponto I que independe da escolha de C'.

Demonstração – Tomemos uma circunferência C e, em seu interior, os pontos F e F'. Sejam C' e C'' duas circunferências distintas que contêm os pontos F e F'.

Tomemos então o ponto I, interseção entre o eixo radical de C e C' e da reta $\overleftrightarrow{FF'}$. Queremos mostrar que I também pertence ao eixo radical de C e C'' (**figura 34**).

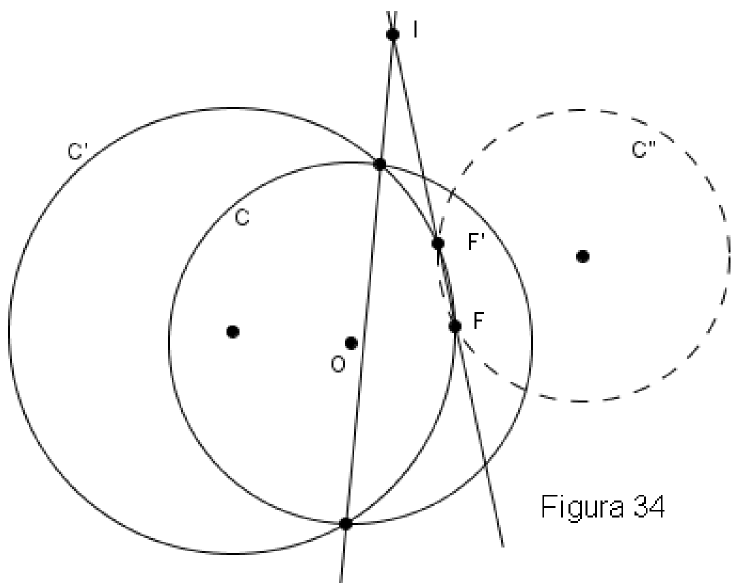

Figura 34

Como I está sobre o eixo radical de C e C', podemos afirmar que

$$pot_C(I) = pot_{C'}(I)$$

As circunferências C’ e C'' se interceptam nos pontos F e F' por construção. Então, o eixo radical de C' e C'' é a reta $\overleftrightarrow{FF'}$. Como I pertence a essa reta, temos

$$pot_{C'}(I) = pot_{C''}(I)$$

e, por transitividade,

$$pot_{C}(I) = pot_{C''}(I)$$

Logo, I pertence ao eixo radical das circunferências C e C'', como queríamos demonstrar.

BIBLIOGRAFIA

- R. Maillard e A. Millet (1945): Géométrie, Ed. Hachette

- Giongo, Affonso Rocha (1975): *Curso de desenho geométrico*. 26 ed. São Paulo, Nobel, 1975

- Wagner, Eduardo (2001): *Potência de um ponto em relação a uma circunferência*. Revista do Professor de Matemática, n° 45.