LUCIANA FRANÇA DA CUNHA

TEOREMA DE TARSKI

Monografia apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientadora: Elaine Gouvêa Pimentel

Belo Horizonte
2011

Aos meus pais,
Pedro e Maura,
dedico.

"Se não posso fazer tudo que devo,
devo fazer tudo que posso".

Santo Agostinho

Agradeço a Deus pelas oportunidades na minha vida.

A todos os meus familiares, especialmente aos meus pais e irmãos, por seu incondicional incentivo e amor.

Ao André, pelo apoio, compreensão e carinho.

A professora orientadora Elaine Gouvêa Pimentel pelas constantes sugestões e pelas contribuições para esse trabalho.

Aos amigos, por seu incontestável apoio, pelos momentos de descontração e, principalmente, pela paciência.

Meus mais sinceros agradecimentos.

Sumário

Capítulo 1

RESUMO

Neste trabalho são apresentadas as noções básicas de topologia necessárias para a demonstração do Teorema de Tarski.

No primeiro capítulo é apresentada a definição de topologia bem como alguns exemplos. Logo depois, são apresentadas as topologias da ordem e produto. Em seguida, conceitos de subespaço, conjuntos fechados, ponto limite e espaços de Hausdorff são abordados. Continuidade de aplicações em espaço topológicos, homeomorfismos e contrução de funções contínuas também são apresentados, assim como alguns conceitos relativos a eles.

No capítulo 2, é apresentada a topologia de Scott e, por fim, o Teorema de Tarski e sua demonstração. Esse teorema é importante na área de semântica de linguagens de programação, porque possibilita a descrição matemática do comportamento de comandos de recursão, como o WHILE.

Capítulo 2

INTRODUÇÃO

Topologia é o ramo da matemática que se preocupa com as propriedades de objetos geométricos que são preservadas quando aplicamos a elas transformações bijetoras e contínuas, chamadas homeomorfismos. Na topologia, não existe diferença entre uma xícara de café e uma rosquinha, pois uma xícara pode ser transformada em uma rosquinha, sem ser feito nenhum corte, nem colagens; este é o significado de dizer que as propriedades de um objeto geométrico são preservadas por homeomorfismos. Na topologia, temos as áreas: point-set topology, topologia algébrica e topologia diferencial. Neste trabalho será estudada a point-set topology que é o ramo da matemática que estuda as propriedades dos espaços topológicos e das estruturas que são ali definida. A point-set topology estuda algumas noções básicas da topologia, como conjuntos abertos e fechados, interior e fecho de um conjunto, entre outras. É conhecida também como topologia geral, que como o nome já diz, nos fornece uma fundação para os outros ramos da topologia

A topologia é uma ferramenta essencial para certos aspectos da teoria da computação. Por outro lado, os problemas que surgem no ambiente computacional forneceram estímulos novos e interessantes para a topologia. Esses problemas também têm aumentado a interação entre a topologia e áreas relacionadas da matemática como a teoria da ordem e da álgebra topológica. Neste trabalho, destacamos algumas dessas interações entre topologia e teoria da computação, enfocando os aspectos que têm sido mais útil para uma determinada área da computação teórica - semântica denotacional.

Capítulo 3

TOPOLOGIA

3.1 Conjuntos Abertos

Seja X um conjunto não vazio. Denotemos por $\mathrm{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X e por $U^c = X - U$ o complementar de U em X.

Definição 1. *Uma topologia sobre X é uma coleção $\mathcal{T} \subset P(X)$ tal que:*

i) $\emptyset$ e $X \in \mathcal{T}$.

ii) Dada uma coleção arbitrária $\{U_\alpha \in \mathcal{T} / \alpha \in I\}$, então:

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}$$

iii) Dados $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$, então:

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$$

Em outras palavras, uma topologia é uma coleção de subconjuntos de X tais que o conjunto vazio e o conjunto X devem pertencer à topologia; a reunião arbitrária de elementos da topologia deve pertencer à topologia e a interseção finita de elementos da topologia deve pertencer à topologia.

Os elementos de $\mathcal{T}$ são ditos conjuntos abertos de X ou simplesmente abertos de X.

O par $(X,\mathcal{T})$ é chamado espaço topológico.

Exemplo 1. *Todo conjunto X não vazio possui as seguintes topologias:*
$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset\}$, chamada topologia trivial. Logo, os únicos subconjuntos abertos de X são $\emptyset$ e X.
$\mathcal{T}_2 = P(X)$, chamada topologia discreta. Logo, todos os subconjuntos de X são abertos.
Se X tem mais de 2 elementos $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$.

Exemplo 2. *Seja $X = \{a,\ b,\ c\}$. Verifiquemos se as seguintes coleções de subconjuntos de X são uma topologia em X.*

1. $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$.

2. $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$.

3. $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

Claramente, $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_3$ são topologias em X. $\mathcal{T}_2$ não é uma topologia em X, pois:

$$\{a\} \cup \{b\} \notin \mathcal{T}_2$$

Exemplo 3. *Seja X um conjunto; seja $\mathcal{T}_f$ uma coleção de todos os subconjuntos U de X tais que $X - U$ é finito ou é todo X. Então $\mathcal{T}_f$ é uma topologia em X, chamada topologia do complementar finito.*
De fato,

i) *X e $\emptyset$ estão em X pois $X - X$ é finito e X - $\emptyset$ é todo X.*

ii) *Se $\{U_\alpha\}$ é uma coleção de elementos de $\mathcal{T}_f$, devemos mostrar que $\bigcup U_\alpha$ está em $\mathcal{T}_f$. Mas, o conjunto X - $\bigcup U_\alpha = \bigcap (X - U_\alpha)$ é finito pois cada X - U_α é finito.*

iii) *Se $U_1, U_2, \ldots, U_n$ são elementos não vazios de $\mathcal{T}_f$, mostraremos que $\bigcap U_i$ está em $\mathcal{T}_f$. Temos X - $\bigcap U_i = \bigcup (X - U_i)$ um conjunto finito, pois é união de conjuntos finitos.*

Exemplo 4. *Seja X um conjunto e seja $\mathcal{T}_c$ a coleção de subconjuntos U de X tal que $X - U$ é enumerável ou é todo X. Então $\mathcal{T}_c$ é uma topologia de X como podemos verificar.*

i) *Tanto $\emptyset$ e X estão em $\mathcal{T}_c$, pois $X - \emptyset = X$ é todo X e $X - X = \emptyset$ é enumerável.*

ii) *Sejam $U_1, U_2, ..., U_n$ elementos $\mathcal{T}_c$. Para mostrar que $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}_c$, calculamos*

$$X - \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X - U_i).$$

O último conjunto é união finita de conjuntos enumeráveis e, portanto, enumerável. Logo $X - \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ é enumerável e então, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}_c$.

iii) *Para mostrar que $\cup U_i$ pertence a $\mathcal{T}_c$ onde cada $U_i \in \mathcal{T}_c$, calculamos*

$$X - \cup U_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X - U_i).$$

O último conjunto é interseção finita de conjuntos enumeráveis e, portanto, enumerável. Logo $X - \cup U_i$ é enumerável e então $\cup U_i \in \mathcal{T}_c$.

Definição 2. *Suponha que $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ são duas topologias no conjunto X. Se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, dizemos que $\mathcal{T}'$ é mais fina que $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}$ é mais grossa que $\mathcal{T}'$; se $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ dizemos que $\mathcal{T}'$ é estritamente mais fina que $\mathcal{T}$ ou que $\mathcal{T}$ é estritamente mais grossa que $\mathcal{T}'$. E ainda, $\mathcal{T}'$ é comparável com $\mathcal{T}$ se $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ ou $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$.*

Obervação: Duas topologias em X não precisam ser comparáveis.

3.2 Base para uma topologia

Definição 3. *Seja X um conjunto. A base para uma topologia X é uma coleção β de subconjuntos de X (chamados de elementos da base) tal que*

i) Para cada $x \in X$, existe um elemento da base β contendo x, isto é, $\forall x \in X\ \exists\ B \in \beta / x \in B$.

ii) Se x pertence a interseção de dois elementos B_1 e B_2 da base β, então existe um elemento B_3 da base contendo x, tal que, $B_3 \subset B_1 \cap B_2$, isto é, se $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists\ B_3; x \in B_3$ e $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Se β satisfaz as duas condições, definimos a topologia $\mathcal{T}$ gerada por β da seguinte forma: Um subconjunto U de X é chamado conjunto aberto em X (ou seja, um elemento de $\mathcal{T}$), se para cada $x \in U$, existe um elemento da base $B \in \beta$ tal que $x \in B$ e $B \subset U$.

Se β é uma base de $\mathcal{T}$, dizemos que β gera a topologia $\mathcal{T}$, ou que $\mathcal{T}$ é a topologia gerada por β.

Teorema 1. *β é uma base para $\mathcal{T}$ se, e somente se, para todo $A \in \mathcal{T}$, temos que $A = \bigcup\limits_{B \in \beta} B$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se β satisfaz *i* e *ii* e se existir uma topologia que tem β como base, todo aberto nesta topologia pode ser escrito como união arbitrária de elementos de β. Definamos:

$$\mathcal{T} = \{\text{U} \in X/U \text{ é união arbitrária de elementos de } \beta\}.$$

Devemos provar que $\mathcal{T}$ é uma topologia sobre X.

Claramente $\emptyset \in \mathcal{T}$; por outro lado $X \in \mathcal{T}$ pelo item *i*, pois $X = \cup B_\alpha$, uma vez que $\forall x \in X, \exists B \subset \beta$ tal que $x \in B$

Sejam $A_\alpha \in \mathcal{T}$, arbitrários, cada $A_\alpha = \cup B_{\alpha,\mu}$ onde $B_{\alpha,\mu} \in \beta$; então:

$$A = \bigcup_\alpha \left(\bigcup_\mu B_{\alpha,\mu} \right) = \bigcup_{\alpha,\mu} \beta_{\alpha,\mu} \in \mathcal{T}.$$

Agora consideremos A_1 e $A_2 \in \mathcal{T}$, então $A_1 = \bigcup\limits_\alpha B_\alpha$ e $A_2 = \bigcup\limits_\mu B_\mu$, então:

$$B_\mu = \bigcup_{\alpha,\mu} (B_\alpha \cap B_\mu).$$

Se $x \in A_1 \cap A_2$, existe pelo menos um par de índices (α, μ) tal que $x \in B_\alpha \cap B_\mu$. Por *ii* existe $B \in \beta$ tal que:

$$x \in B \subset B_\alpha \cap B_\mu \subset A_1 \cap A_2;$$

logo, $A_1 \cap A_2$ é aberto. O caso geral segue por indução.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $x \in A$; como $A \in \mathcal{T}$ temos:

$$\mathrm{A} = \cup B_\alpha,\ \alpha \in \mathrm{I};$$

onde $B_\alpha \in \beta$. Logo, existe $\alpha_0 \in \mathrm{I}$ tal que:

$$x \in B_{\alpha_0} \subset A.$$

E ainda, seja $x \in B_1 \cap B_2$ então $x \in B_1$ e $x \in B_2$ onde B_1 e B_2 são abertos básicos da topologia $\mathcal{T}$. Logo $B_1 \cap B_2$ é um aberto e então, $\exists B_3 \subset B_1 \cap B_2$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. □

Observações:

a) O teorema anterior mostra que, de fato, a coleção $\mathcal{T}$ de elementos de uma base β gera uma topologia.

b) Como $\beta \subset \mathcal{T}$, então toda união de elementos de β também pertence a $\mathcal{T}$.

c) Para todo $A \in \mathcal{T}$ existe $B \in \beta$ tal que $B \subset A$. De fato, seja $x \in A$; como $A \in \mathcal{T}$ e β é uma base de $\mathcal{T}$, então:

$$A = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha$$

onde $B_\alpha \in \beta$. Logo, existe $\alpha \in \Gamma$ tal que:

$$x \in B_\alpha \subset A.$$

d) Os conjuntos $B \in \beta$ tal que $x \in B$ são chamados vizinhanças do ponto x.

Exemplo 5. *Seja X um conjunto, a coleção de todos os pontos de X é uma base para a topologia discreta em X, isto é, a base de X é $\beta_1 = \{\{x\}/x \in \mathbb{R}\}$.*

Exemplo 6. *A base para a topologia trivial em X é $\beta_2 = \{X\}$.*

Lema 2. *Seja X um conjunto; seja β a base para a topologia $\mathcal{T}$ em X. Então $\mathcal{T}$ é uma coleção de toda união de elementos de β.*

Demonstração. Tome a coleção de elementos de β. Pela observação (b), temos que toda união de elementos de β também pertence a topologia $\mathcal{T}$. Por outro lado, seja $U \in \mathcal{T}$, e tome para cada $x \in U$ um elemento B_x de β tal que $x \in B_x \subset U$. Então $U = \bigcup_{x \in U} B_x$.

Logo $\mathcal{T}$ é igual a coleção de toda união de elementos de β. □

Lema 3. *Seja X um espaço topológico. Suponha que $\mathcal{C}$ é a coleção de todos os conjuntos abertos de X tais que para cada conjunto aberto de X e cada $x \in U$, existe um elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset U$. Então $\mathcal{C}$ é base para a topologia de X.*

Demonstração. Devemos mostrar que $\mathcal{C}$ é uma base. Para a primeira condição de base, tome $x \in X$. Como X é um conjunto aberto, temos $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset X$ por hipótese.

Para a segunda condição, seja $x \in C_1 \cap C_2$, onde C_1 e C_2 são elementos de $\mathcal{C}$. Como C_1 e C_2 são abertos, $C_1 \cap C_2$ também é aberto. Portanto, existe por hipótese um elemento C_3 em $\mathcal{C}$ tal que $x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$.

Seja $\mathcal{T}$ a coleção de conjuntos abertos de X; devemos mostrar que a topologia $\mathcal{T}'$ gerada por $\mathcal{C}$ é a mesma topologia $\mathcal{T}$. Primeiro, note que se $U \in \mathcal{T}$ e se $x \in U$, então por hipótese, existe um elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset U$. Segue que $U \in \mathcal{T}'$, por definição.

Por outro lado, se $W \in \mathcal{T}'$, então W é a união de elementos de $\mathcal{C}$ pelo lema 2. Como cada elemento de $\mathcal{C}$ pertence a $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}$ é uma topologia, W pertence a $\mathcal{T}$. $\square$

Quando topologias são dadas por bases, é útil um critério em termos de bases para determinar se uma topologia é mais fina que a outra. Tal critério é o seguinte:

Lema 4. *Sejam β e β' bases para duas topologias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$, respectivamente, em X. As informações são equivalentes:*

i) $\mathcal{T}'$ é mais fina que $\mathcal{T}$.

ii) Para cada $x \in X$ e cada elemento da base $B \in \beta$ contendo x, existe um elemento da base $B' \in \beta'$ tal que $x \in B' \subset B$.

Demonstração. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Seja $x \in X$ e $B \in \beta$, com $x \in B$. Sabemos que B é um aberto de $\mathcal{T}$ por definição e $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ pela condição *i)*, ou seja, $B \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Logo $B \in \mathcal{T}'$.

Como $\mathcal{T}'$ é gerado por β', $\exists$ um elemento $B' \in \beta'$ tal que $x \in B' \subset B$.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Agora tome um elemento U de $\mathcal{T}$ e mostraremos que $U \in \mathcal{T}'$. Seja $x \in U$. Como β gera $\mathcal{T}$, $\exists$ um elemento $B \in \beta$ tal que $x \in \beta \subset U$.

Pelo item *ii)*, $\exists$ um elemento $B' \in \beta'$ tal que $x \in B' \subset B$. Então $x \in B' \subset U$ e $U \in \mathcal{T}'$ por definição. Logo $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. $\square$

Proposição 5. *Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de abertos de X tal que para $U \subset X$ aberto e $x \in U$ $\exists$ $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset U$. Então $\mathcal{C}$ é uma base para X.*

Demonstração. (i) Para cada $x \in X$, $\exists$ um elemento C da base contendo x por hipótese.

(ii) Se $x \in C_1 \cap C_2$ onde C_1 e C_2 são abertos então $\exists$ $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C_3$.

$\square$

Definição 4. *Se β é uma coleção de todos os conjuntos abertos da reta real,*

$$(a, b) = \{x / a < x < b\},$$

a topologia gerada por β é chamada de topologia standard na reta real. Se β' é a coleção de todos os intervalos semi-abertos da forma

$$[a, b) = \{x / a \leq x < b\}, \text{ onde } a < b,$$

a topologia gerada por β' é chamada de topologia do limite inferior em $\mathbb{R}$. Quando $\mathbb{R}$ tem a topologia do limite inferior, denotamos por $\mathbb{R}_l$. Finalmente, seja K o conjunto de todos os números da forma $1/n$, para $n \in \mathbb{Z}_+$, e seja β'' a coleção de todos os intervalos abertos (a,b), do conjunto de intervalos abertos da forma (a,b) - K. A topologia gerada por β'' é chamada de k-topologia em $\mathbb{R}$. Quando $\mathbb{R}$ tem essa topologia denotamos por $\mathbb{R}_k$.

Definição 5. *Uma subbase S para uma topologia em X é uma coleção de objetos de X cuja união é X. A topologia $\mathcal{T}$ gerada por S é a união de interseções finitas de elementos de S.*

Definição 6. *Se β é uma coleção de intervalos abertos na reta real,*

$$(a,b) = \{x|a < x < b\},$$

a topologia gerada por β é chamada topologia standard na reta real. Se β' é a coleção de intervalos semi-abertos da forma

$$[a,b) = \{x|a \leq x < b\},$$

onde $a < b$, a topologia gerada por β' é chamada de topologia do limite inferior em $\mathbb{R}$. Quando $\mathbb{R}$ for tomada com a topologia do limite inferior, denotaremos por $\mathbb{R}_l$. Finalmente, seja K o conjunto de todos os números da forma $1/n$, para $n \in \mathbb{Z}_+$, e seja β'' a coleção de todos os intervalos abertos (a,b), juntamente com todos os conjuntos da forma $(a,b) - K$. A topologia gerada por β'' é chamada de K-topologia em $\mathbb{R}$. Quando $\mathbb{R}$ for tomada com essa topologia, denotaremos por $\mathbb{R}_K$.

3.3 Topologia da Ordem

Definição 7. *Dizemos que o conjunto A tem uma relação de ordem (ou ordem simples) se tem as seguintes propriedades:*

1 (Simétrica) Para cada x e y em A tal que $x \neq y$, temos xCy ou yCx.

2 (Reflexiva) Para cada x em A temos a relação xCx.

3 (Transitiva) Se xCy e yCz, então xCz.

Se X é um conjunto simplesmente ordenado, com a topologia standard para X, definimos

Definição 8. *Seja X um conjunto simplesmente ordenado; suponha que X tem mais de um elemento. Seja β a coleção de todos os conjuntos do seguinte tipo:*

i) Todo intervalo aberto (a,b) está em X, isto é, $(a,b) = \{x/x \in X \text{ e } a < x < b\}$.

ii) Todo intervalo da forma $[\perp, b)$, onde $\perp$ é o menor elemento (se houver), está em X.

iii) Todo intervalo da forma $(a, \top]$, onde $\top$ é o maior elemento (se houver), está em X.

A coleção β é uma base para uma topologia em X, que é chamada a topologia da ordem.

Se X não possui o menor elemento, não existem conjuntos do tipo (ii), e se X não possui maior elemento, não existem conjuntos do tipo (iii).

Proposição 6. *β é de fato uma base.*

Demonstração. i) Se $x \in X$ então $x \in B \in \beta$.

ii) Se $x \in B_1 \cap B_2$ então $B_1 \cap B_2 = B_3 \in \beta$.

□

Exemplo 7. *Os inteiros positivos $\mathbb{Z}_+$ formam um conjunto ordenado com menor elemento. A topologia da ordem em $\mathbb{Z}_+$ é a topologia discreta, pois cada ponto é um conjunto aberto: Se $n > 1$ então o conjunto unitário contendo n, $\{n\} = (n-1, n+1)$ é um elemento da base; e se $n = 1$, o conjunto $\{1\} = [1, 2)$ é um elemento da base.*

Definição 9. *Se X é um conjunto ordenado, e a é um elemento de X, existem quatro subconjuntos de X que são chamados de intervalos determinados por a. Eles são os seguintes:*

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x | x < a\},$$
$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\},$$
$$(-\infty, a] = \{x | x \leq a\}.$$

O conjunto dos dois primeiros tipos são chamados de "intervalos abertos" e o conjuntos dos dois últimos tipos são chamados "intervalos fechados".

3.4 Topologia Produto

Se X e Y são espaços topológicos, existe uma maneira padrão de definir uma topologia no produto cartesiano $X \times Y$.

Definição 10. *Sejam X e Y espaços topológicos. A topologia produto em $X \times Y$ é a topologia tendo como base a coleção β de todos os conjuntos da forma $U \times V$, onde U é um subconjunto aberto de X e V é um subconjunto aberto de Y.*

De fato, β é uma base. A primeira condição é trivial, já que o $X \times Y$ é um elemento da base. A segunda condição é simples, pois a interseção de quaisquer dois elementos da base $U_1 \times V_1$ e $U_2 \times V_2$ é outro elemento da base. E ainda,

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2),$$

é um elemento da base, pois $U_1 \cap U_2$ e $V_1 \cap V_2$ são abertos em X e Y, respectivamente.

Observação: Nem todos os abertos de $X \times Y$ são da forma $U \times V$ com U aberto em X e V aberto em Y.

Teorema 7. *Se β é uma base para a topologia em X e $\mathcal{C}$ é uma base para a topologia em Y, então a coleção*

$$\mathcal{D} = \{B \times C | B \in \beta \text{ e } C \in \mathcal{C}\}$$

é uma base para a topologia de $X \times Y$.

Demonstração. Dado um conjunto aberto W de $X \times Y$ e um ponto $x \times y$ de W, por definição da topologia do produto, existe um elemento da base $U \times V$ tal que $x \times y \in U \times V \subset W$. Como β e $\mathcal{C}$ são bases para as topologias em X e Y, respectivamente, podemos escolher um elemento B de β tal que $x \in B \subset U$, e um elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $y \in C \subset V$. Então $x \times y \in B \times C \subset W$. Como a coleção $\mathcal{D}$ satisfaz o critério do lema 3, temos $\mathcal{D}$ uma base de $X \times Y$. □

Exemplo 8. *Temos a topologia standard em $\mathbb{R}$: a topologia da ordem. A topologia produto em $\mathbb{R}^2$ é chamada topologia standard em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Uma base para essa topologia é a coleção de todos os produtos de conjuntos abertos de $\mathbb{R}$, e ainda, o teorema provou que a coleção de todos os produtos $(a, b) \times (c, d)$ de intervalos abertos em $\mathbb{R}$ servirá também como base para a topologia em $\mathbb{R}^2$.*

Definição 11. *Sejam $\pi_1 : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x$ e $\pi_2 : X \times Y \to Y, (x, y) \mapsto y$ projeções sobrejetoras. Se U é aberto em X, então $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ é aberto em $X \times Y$. Da mesma forma $\pi_2^{-1}(V)$.*

$$\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) = U \times V$$

3.5 Subespaço Topológico

Definição 12. *Seja X um espaço topológico com topologia $\mathcal{T}$. Se Y é um subconjunto de X, então a coleção*

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U / U \in \mathcal{T}\}$$

é uma topologia em Y, chamada de topologia do subespaço. Com essa topologia, Y é chamado de subespaço de X; e seus conjuntos abertos são compostos por todas as interseções de conjuntos abertos de X com Y.

De fato $\mathcal{T}_Y$ é uma topologia. Ele contém $\emptyset$ e Y, pois

$$\emptyset = Y \cap \emptyset \text{ e } Y = Y \cap X,$$

onde $\emptyset$ e X são elementos de $\mathcal{T}_Y$. O fato de que as intersecções finitas e uniões arbitrárias pertencerem a $\mathcal{T}_Y$ segue a partir das equações

$$(U_1 \cap Y) \cap ... \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap ... \cap U_n) \cap Y,$$

$$\bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap Y) = (\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha) \cap Y.$$

Lema 8. *Se β é base para a topologia X, então a coleção*

$$\beta_Y = \{B \cap Y | B \in \beta\}$$

é base para o subespaço topológico Y.

Demonstração. Seja U aberto em X e tome $y \in U \cap Y$, podemos encontrar um elemento B de β tal que $y \in B \subset U$. Então $y \in B \cap Y \subset U \cap Y$. Pelo lema 3 temos que β_Y é base para o subespaço topológico Y. □

Lema 9. *Seja Y um subespaço de X. Se U é aberto em Y e Y é aberto em X, então U é aberto em X.*

Demonstração. Como U é aberto em Y, $U = Y \cap V$ para algum conjunto V aberto em X. Como Y e V são ambos abertos em X, então $Y \cap V$ também é aberto em X. □

Teorema 10. *Se A é um subespaço de X e B um subespaço de Y, então a topologia do produto em $A \times B$ é a mesma topologia em $A \times B$ herdada pelo subespaço de $X \times Y$.*

Demonstração. Seja o conjunto $U \times V$ um elemento da base de $X \times Y$, onde U é aberto em X e V é aberto em Y. Portanto, $(U \times V) \cap (A \times B)$ é o elemento da base para a topologia do subespaço de $A \times B$. Assim

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B).$$

Como $U \cap A$ e $V \cap B$ são os conjuntos abertos das topologias em um subespaço de A e B, respectivamente, o conjunto $(U \cap A) \times (V \cap B)$ é o elemento da base para a topologia produto em $A \times B$. A conclusão é que as bases para a topologia do subespaço de $A \times B$ e para a topologia produto em $A \times B$ são os mesmos. Então as topologias são as mesmas. □

3.6 Conjuntos Fechados e ponto limite

Definição 13. *Seja $F \subset X$. F é dito fechado em X se $F^c \in \mathcal{T}$. Isto é, um conjunto é fechado se, e somente se, seu complementar é um conjunto aberto.*

Exemplo 9. *X e $\emptyset$ são fechados em X, pois seus complementares são os conjuntos abertos $\emptyset$ e X, respectivamente.*

Exemplo 10. *Seja o conjunto X, e $\mathcal{T}$, a topologia do complementar finito em X definida no exemplo 3. Os conjuntos fechados em X, são todos os subconjuntos finitos de X e o próprio X. De fato, pelo exemplo 1 temos que o próprio conjunto X é fechado.*
Seja F um conjunto finito de X. Então F^c é um aberto de X por definição de $\mathcal{T}$.

Exemplo 11. *Na topologia discreta de um conjunto X, todo subconjunto de X é um aberto da topologia. Então todo subconjunto de X é fechado também.*

Teorema 11. *Seja X um espaço topológico. Então:*

i) *$\emptyset$ e X são fechados.*

ii) *Interseção qualquer de fechados é fechado.*

iii) *União finita de fechados é fechado.*

Demonstração. i) No exemplo 9 vimos que $\emptyset$ e X são fechados.

ii) Seja a coleção de fechados $\{F_\alpha\}_{\alpha\in J}$. Sabemos por DeMorgan que

$$X - \bigcap_{\alpha\in J} F_\alpha = \bigcup_{\alpha\in j}(X - F_\alpha)$$

Como os conjuntos $X - F_\alpha$ são abertos por definição, $\bigcup_{\alpha\in j}(X - F_\alpha)$ é uma união de conjuntos abertos e, portanto, aberto. Assim, $\cap F_\alpha$ é fechado.

iii) Igualmente, se F_i é fechado para $i = 1, ..., n$, considere a equação

$$X - \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n}(X - F_i).$$

Como a interseção finita de conjuntos abertos é aberto, temos $\cup F_i$ fechado.

□

Teorema 12. *Seja Y um subespaço de X. Então o conjunto A é fechado em Y se e somente se A é igual a inteseção de um conjunto fechado de X com Y.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Tome $A = C \cap Y$, onde C é fechado em X. Então $X - C$ é aberto em X, e ainda, $(X - C) \cap Y$ é aberto em Y, por definição de espaço topológico. Mas $(X - C) \cap Y = Y - A$. Então $Y - A$ é aberto em Y e A é fechado em Y.

($\Rightarrow$) Seja A fechado em Y. Então $Y - A$ é aberto em Y e por definição é igual a interseção de um conjunto aberto U de X com Y. Temos que $X - U$ é fechado em X, e $A = Y \cap (X - U)$, de modo que, A é igual a interseção de um conjunto fechado de X com Y, como queríamos. □

Definição 14. *Seja um subconjunto A de um subespaço X. O interior de A é definido como a união de todos os conjuntos abertos contidos em A, e o fecho de A é definido como a interseção de todos os conjuntos fechados contendo A.*

O interior de A é denotado por $IntA$ e o fecho de A por ClA ou por $\overline{A}$. Temos que $IntA$ é aberto, pois é união de abertos. Do mesmo modo, ClA é um conjunto fechado. E ainda,

$$IntA \subset A \subset ClA.$$

Se A é aberto, temos $A = IntA$; se A é fechado, $A = ClA$.

Teorema 13. *Seja Y um subespaço de X; seja A um subconjunto de Y; seja $\overline{A}$ o fecho de A em X. Então o fecho de A em Y é $\overline{A} \cap Y$.*

Demonstração. Seja B o fecho de A em Y. O conjunto $\overline{A}$ é fechado em X, então $\overline{A} \cap Y$ é fechado em Y pelo teorema 12. Como $\overline{A} \cap Y$ contém A e B é a interseção de todas subconjuntos de Y contendo A por definição, temos $B \subset (\overline{A} \cap Y)$.

Por outro lado, sabemos que B é fechado em Y. Pelo teorema 12, $B = C \cap Y$ para algum conjunto C fechado em X. Então C é um conjunto fechado em X contendo A; pois $\overline{A}$ é a interseção de todos os conjuntos fechados, logo $\overline{A} \subset C$. Então $(\overline{A} \cap Y) \subset (C \cap Y) = B$ □

Teorema 14. *Seja A um subconjunto do espaço topológico X.*

(a) Então $x \in \overline{A}$ se e somente se todo conjunto aberto U que contém x intersepta A.

(b) Suponha que a topologia de X é dada por uma base, então $x \in \overline{A}$ se e somente se todo elemento da base B contendo x intersepta A.

Demonstração. Provaremos o item (a) pela contrapositiva, isto é, $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow$ existe um conjunto aberto U contendo x tal que
$$U \cap A = \emptyset.$$

Dessa forma, se $x \notin \overline{A}$, o conjunto $U = X - \overline{A}$ é um conjunto aberto contendo x mas não intersepta A, como queríamos. Por outro lado, se existe um conjunto aberto U contendo x mas não interseptando A, então $X - U$ é um conjunto fechado contendo A. Por definição do fecho de $\overline{A}$, o conjunto $X - U$ deve conter $\overline{A}$; portanto, x não pode estar em $\overline{A}$.

No item (b), se todo conjunto aberto contendo x intersepta A, temos que todo elemento B da base contém x, pois B é um conjunto aberto. Por outro lado, se todo elemento da base contendo x intersepta A, temos que todo conjunto aberto U contém x, pois U contém um elemento da base contendo x. □

Exemplo 12. *Considere o subespaço $Y = (0, 1]$ da reta real $\mathbb{R}$. O conjunto $A = (0, \frac{1}{2})$ é um subconjunto de Y; seu fecho em $\mathbb{R}$ é o conjunto $[0, \frac{1}{2}]$, e seu fecho em Y é o conjunto $[0, \frac{1}{2}] \cap Y = (0, \frac{1}{2}]$.*

Definição 15. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X e seja x um ponto de X. Dizemos que x é um ponto limite (ponto de acumulação) de A se toda U_x vizinhança de x intercepta A em algum ponto diferente de x. Denotamos o conjunto de pontos limite de A por A'*

Observação: Se x é um ponto de acumulação então $x \in \overline{A - X}$.

Exemplo 13. *Considere a reta real $\mathbb{R}$. Se $A = (0, 1]$, então o ponto 0 é um ponto de acumulação de A assim como $\frac{1}{2}$ também é. Assim, todo ponto do intervalo $[0, 1]$ é um ponto de acumulação de A, mas qualquer outro ponto de $\mathbb{R}$ não é ponto de acumulação de A.*

Teorema 15. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X. Então $\overline{A} = A \cup A'$.*

Demonstração. Se x está em A', toda vizinhança de x intersepta A. Portanto, pelo teorema 14, X pertence a $\overline{A}$. Por definição $A \subset \overline{A}$, então $A \cup A' \subset \overline{A}$.

Para demonstrar a inclusão inversa, tomaremos x um ponto de $\overline{A}$ e mostraremos que $x \in A \cup A'$. Se x não pertence a A, é trivial que $x \in A \cup A'$; suponha que x não pertence a A. Como $x \in \overline{A}$, sabemos que toda vizinhança U de x intersepta A; como $x \notin A$, o conjunto U intersepta A em um ponto diferente de x. Então $x \in A'$, e mais, $x \in A \cup A'$. □

Corolário 16. *Um subconjunto A de um espaço topológico X é fechado se e somente se A contém todos os seus pontos limites.*

Demonstração. O conjunto A é fechado se e somente se $A = \overline{A}$, ou então, A é fechado se e somente se $A' \subset A$. □

3.7 Espaço de Hausdorff

Definição 16. *Um espaço topológico X é dito separável de existem dois subconjuntos abertos U e V, disjuntos e não vazios, de X cuja união é X.*

Definição 17. *Um espaço topológico X é chamado de espaço de Hausdorff (ou espaço separado) se quaisquer dois pontos distintos têm vizinhanças disjuntas, isto é, para cada par x_1, x_2 de pontos distintos de X, existem vizinhanças U_1 e U_2 de x_1 e x_2, respectivamente, tais que U_1 e U_2 são disjuntos.*

Teorema 17. *Todo conjunto finito de pontos em um espaço de Hausdorff X é fechado.*

Demonstração. É suficiente mostrar que todo conjunto unitário $\{x_0\}$ é fechado. Se x é um ponto de X diferente de $\{x_0\}$, então $\{x\}$ e $\{x_0\}$ possuem diferentes vizinhanças U e V, respctivamente. Como U não intersepta $\{x_0\}$, o ponto $\{x\}$ não está no fecho do conjunto $\{x_0\}$. Assim, o fecho do conjunto $\{x_0\}$ é o próprio conjunto $\{x_0\}$, portanto, fechado. □

A condição que define o ponto de um conjunto finito ser fechado foi dado um nome próprio: ele é chamado o axioma T_1.

Teorema 18. *Seja X um espaço satisfazendo o axioma T_1; seja A um subconjunto de X. Então o ponto x é um ponto de acumulação de A se e somente se toda vizinhança de x contém infinitos pontos de A.*

Demonstração. Se toda vizinhança de x intersepta A em infinitos pontos, certamente intercepta A em algum ponto que não ele próprio, de modo que x é um ponto de acumulação de A.

Por outro lado, suponha que x é um ponto de acumulação de A, e suponha que alguma vizinhança U de x intercepta A em apenas um número finito de pontos. Então U também intercepta $A - \{x\}$ em um número finito de pontos; seja $\{x_1, ..., x_m\}$ os pontos de $U \cap (A - \{x\})$. O conjunto $X - \{x_1, ..., x_m\}$ é aberto em X, pois o conjunto finito de pontos $\{x_1, ..., x_m\}$ é fechado; então

$$U \cap (X - \{x_1, ..., x_m\})$$

é uma vizinhança de x que intercepta o conjunto $(A - \{x\})$ em infinitos pontos. Essa contradição se deve ao fato de supor que x não era ponto de acumulação de A. □

Teorema 19. *Se X é Hausdorff então $\{x_n\}$ converge para no máximo um ponto.*

Demonstração. Suponha que $\{x_n\} \to a$ e $\{x_n\} \to b$, onde $a \neq b$. Como X é Hausdorff existem U e V vizinhanças de a e b tais que $U \cap V = \emptyset$. Pela defnição de convergência de sequência $\exists$ finitos elementos de $\{x_n\}$ que não pertencem a U. Logo V só pode conter finitos elementos de $\{x_n\}$. Absurdo pois por suposição $\{x_n\} \to b$ e V é vizinhança de b. Logo, $\{x_n\}$ converge para no máximo um ponto. □

Teorema 20. *Todo conjunto simplesmente ordenado é Hausdorff na topologia da ordem. Se X e Y são Hausdorff então $X \times Y$ é Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $a, b \in X, a \neq b$. Então $a < b$ ou $b < a$. Sem perda de generalidade, suponha $a < b$. Se $\exists c$ tal que $a < c < b$ então basta tomar $(-\infty, c)$ e (c, ∞) vizinhanças de a e b respectivamente. A interseção dessas duas vizinhanças é vazia. Se tal c não existe, tome $(-\infty, b)$ e (a, ∞). □

A condição de Hausdorff é uma das inúmeras condições que se pode impor em um espaço topológico. Cada vez que se impõe essa condição, pode-se provar mais teoremas fortes, mas limitando a classe de espaços de aplicação desses teoremas. Grande parte da investigação que tem sido feito em topologia desde o seu início, tem-se centrado no problema de encontrar condições que serão fortes o suficiente para permitir que teoremas interessantes sobre os espaços satisfaçam essas condições, e ainda não tão fortes que eles se limitam ao leque de aplicações dos resultados.

3.8 Funções Contínuas

Definição 18. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é dita contínua, se para cada subconjunto aberto V de Y, o conjunto $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de X.*

Sabemos que $f^{-1}(V)$ é o conjunto de todos os pontos x de X para o qual $f(x) \in V$; e mais, $f^{-1}(V)$ é vazio se V não intersepta o conjunto imagem $f(X)$.

Continuidade de uma função não depende apenas da função f, mas também das topologias específicas para seu domínio e contradomínio. Se queremos enfatizar esse fato, podemos dizer que f é contínua em relação a topologias específicas em X e Y.

Se a topologia do espaço Y é dada por uma base β, então para comprovar a continuidade de f, basta mostrar que a imagem inversa de cada elemento da base é aberto: O conjunto arbitrário $V \subset Y$, V aberto, pode ser escrito como uma união de elementos da base

$$V = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha.$$

Então,

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha),$$

de modo que $f^{-1}(V)$ é aberto se cada conjunto $f^{-1}(B_\alpha)$ é aberto.

Se a topologia em Y é dada por uma subbase S, para comprovar a continuidade de f, ainda é suficiente mostrar que a imagem inversa de cada elemento da subbase é aberto: O elemento arbitrário base $B \subset Y$ pode ser escrito como uma intersecção finita $S_1 \cap ... \cap S_n$ de elementos da subbase; segue-se a partir da equação

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap ... \cap f^{-1}(S_n)$$

que a imagem inversa de cada elemento base é aberta.

Exemplo 14. *Vamos considerar uma função como as estudadas na análise,*

$$f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Na análise, define-se a continuidade de f pela definição de ϵ e δ. Mostraremos que a definição dada em análise implica na definição dada em topologia.

Dado x_0 em $\mathbb{R}$, e dado $\epsilon > 0$, o intervalo $V = (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ é um conjunto aberto no espaço de contra-domínio $\mathbb{R}$. Portanto, $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto no espaço de domínio $\mathbb{R}$.

Isso se deve ao fato de $f^{-1}(V)$ conter o ponto x_0, e contém algum elemento da base (a, b) onde $x_0 \in (a, b)$. Então, se $|x - x_0| < \delta$, o ponto x deve estar em (a, b), de modo que $f(x_0) \in V$, e $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, conforme desejado.

Exemplo 15. *Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais na sua topologia usual, e seja $\mathbb{R}_l$ o mesmo conjunto na topologia do limite inferior. Seja*

$$f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$$

a função identidade, $f(x) = x$ para cada número real x. Então f não é uma função contínua; a imagem inversa do conjunto aberto $[a, b)$ de $\mathbb{R}_l$ é o próprio $[a, b)$, que não é aberto em $\mathbb{R}$. Por outro lado, a função identidade

$$g = \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$$

é contínua, pois a imagem inversa de (a, b) é o próprio (a, b), que é aberto em $\mathbb{R}_l$.

Teorema 21. *Sejam X e Y espaços topológicos; seja $f = X \to Y$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) f é contínua.

(2) Para cada subconjunto A de X, temos $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(3) Para cada conjunto fechado B de Y, o conjunto $f^{-1}(B)$ é fechado em X.

(4) Para cada $x \in X$ e cada vizinhança V de $f(x)$, existe uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subset V$.

Se a condição (4) é válida para o ponto x de X, dizemos que f é contínua no ponto x.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Suponha que f é contínua. Seja A um subconjunto de X. Mostraremos que, se $x \in \overline{A}$, então $f(x) \in \overline{f(A)}$. Seja V uma vizinhança de $f(x)$. Então $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto de X contendo x; deve se cruzam em um determinado ponto y. Assim V intercepta $f(A)$ no ponto $f(y)$, de modo que, $f(x) \in \overline{f(A)}$, como queríamos.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja B um conjunto fechado em Y e seja $A = f^{-1}(B)$. Queremos provar que A é fechado em X, ou seja, $\overline{A} = A$. Em teoria dos conjuntos, temos $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$. Portanto, se $x \in \overline{A}$,

$$f(x) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \bar{(}B) = B,$$

de modo que $x \in f^{-1}(B) = A$. Assim, $\overline{A} \subset A$, isto é, $\overline{A} = A$, como queríamos.

(3) $\Rightarrow$ (1) Seja V um conjunto aberto de Y e $B = Y - V$. Então

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(V) = X - f^{-1}(V).$$

Agora B é um conjunto fechado em Y. Então $f^{-1}(B)$ é fechado em X por hipótese, de modo que $f^{-1}(V)$ é aberto em X.

(1) $\Rightarrow$ (4) Seja $x \in X$ e seja V uma vizinhança de $f(x)$. Então o conjunto $U = f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x tal que $f(U)\ subset V$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Seja V um conjunto aberto de Y; tome x um ponto de $f^{-1}(V)$. Então $f(x) \in V$, e por hipótese, existe uma vizinhança U_x de x tal que $f(U_x) \subset V$. Então $U_x \subset f^{-1}(V)$ onde resulta que $f^{-1}(V)$ pode ser escrito como a união dos conjuntos abertos U_x, portanto, aberto. $\square$

3.9 Homeomorfismos

Definição 19. *Sejam X e Y espaços topológicos; e seja $f : X \to Y$ uma função bijetiva. Se tanto a função f como a função inversa*

$$f^{-1} : Y \to X$$

são contínuas, então f é chamada um homeomorfismo.

A condição para que f^{-1} seja contínua, diz que, para cada conjunto aberto U de X, a imagem inversa de U sob a aplicação $f^{-1} : Y \to X$ é aberto em Y. Mas a imagem inversa de U sob a aplicação f^{-1} é o mesmo que a imagem de U sob a aplicação f.

Uma outra forma de definir um homeomorfismo é dizer que é uma correspondência bijetiva $f : X \to Y$ tal que $f(U)$ é aberto se e somente se U é aberto.

Esta observação mostra que um homeomorfismo $f : X \to Y$ nos dá uma corrrespondência bijetiva não só entre X e Y, mas entre as coleções de conjuntos abertos de X e de Y. Como resultado, qualquer propriedade de X que é totalmente expressa em termos da topologia de X (isto é, em termos de conjuntos abertos de X), através da função f, correspondente para o espaço Y. Essa propriedade de X é chamada propriedade topológica de X.

Um isomorfismo é uma correspondência bijetiva que preserva a estrutura algébrica dos envolvidos. O conceito análogo na topologia é de homeomorfismo, que é uma correspondência bijetiva que preserva a estrutura topológica dos envolvidos.

Agora, suponha que $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua injetiva, onde X e Y são espaços topológicos. Seja Z o conjunto imagem $f(X)$, considerado como um subespaço de Y; então a função $f' : X \to Z$ obtidos por restringir o contradomínio, é bijetiva. Se f' passa a ser um homeomorfismo de X com Z, dizemos que a aplicação $f : X \to Y$ é uma imersão de X em Y.

Exemplo 16. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 1$ é um homeomorfismo. Se definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pela equação*

$$g(y) = \tfrac{1}{3}(y - 1)$$

então pode-se verificar facilmente que $f(g(y)) = x$ para todos os números reais x e y. Conclui-se que f é bijetiva e que $g = f^{-1}$; a continuidade de f e g é um resultado familiar do cálculo.

Exemplo 17. *A função $F : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \tfrac{x}{1-x^2}$$

é um homeomorfismo. F é uma correspondência bijetiva, e sua inversa é a função definida por

$$G(y) = \tfrac{2y}{1+(1+4y^2)^{1/2}}.$$

O fato de que F é um homeomorfismo pode ser provado de duas maneiras. Uma maneira é observar o porque F preserva a ordem e é bijetiva, F leva um elemento da base na topologia da ordem em $(-1, 1)$ para um elemento da base na topologia da ordem em $\mathbb{R}$, e vice-versa. Como resultado, F é automaticamente um homeomorfismo de $(-1, 1)$ em $\mathbb{R}$ (ambos na topologia da ordem). Como a topologia da ordem em $(-1, 1)$ e o mesmo que a topologia usual, F é um homeomorfismo de $(-1, 1)$ em $\mathbb{R}$. A segunda maneira de mostrar um homeomorfismo F é usar a continuidade algébrica das funções e a função raiz quadrada para mostrar que tanto F e G são contínuas. Estes fatos são conhecidos do cálculo.

Exemplo 18. *Uma função bijetiva $f : X \to Y$ pode ser contínua, sem ser um homeomorfismo. Uma dessas funções é a aplicação da identidade $g : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$ considerada no exemplo 15. Outro exemplo é o seguinte: Seja S^1 o círculo unitário,*

$$S^1 = \{x \times y / x^2 + y^2 = 1\},$$

considerado como um subespaço do plano $\mathbb{R}^2$, e seja

$$f : [0, 1) \to S^1$$

a aplicação definida por $f = \Big(cos(2\pi t), sen(2\pi t)\Big)$. O fato de que f é bijetiva e contínua decorre de propriedades familiares das funções trigonométricas. Mas a função f^{-1} não é contínua. A imagem de f sobre um conjunto aberto $U = \left[0, \frac{1}{4}\right)$ do domínio, por exemplo, não é aberto em S^1, ou seja, o ponto $p = f(0) = (1, 0)$ não está em nenhum conjunto aberto V de $\mathbb{R}^2$ tais que $V \cap S^1 \subset f(U)$.

Exemplo 19. *Considere a função*

$$g : [0, 1) \to \mathbb{R}^2$$

obtidos a partir da função f do exemplo anterior, expandindo o intervalo. A aplicação g é um exemplo de uma função contínua injetiva que não é uma imersão.

3.10 Construção de funções contínuas

Teorema 22. *(Regras para a construção de funções contínuas). Sejam X, Y e Z espaços topológicos.*

(a) (função constante) Se $f : X \to Y$ leva todos os pontos de X no único ponto de y_0 de Y, então f é contínua.

(b) (Inclusão) Se A é um subespaço de X, a função $j : A \to X$ é contínua.

(c) (Composição) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são contínuas, então a aplicação $g \circ f : X \to Z$ é contínua.

(d) (Restringindo o domínio) Se $f : X \to Y$ é contínua, e se A é um subespaço de X, então a função restrita $f|A : A \to Y$ é contínua.

(e) (Restringindo ou ampliando o contradomínio) Seja $f : X \to Y$ contínua. Se Z é um subespaço de Y contendo o conjunto imagem $f(X)$, então a função $g : X \to Z$ obtida por restringir o contradomínio de f é contínua. Se Z é um espaço tendo Y como subespaço, então a função $h : X \to Z$ obtida através da expanção do contradomínio de f é contínua.

(f) (Continuidade local) A aplicação $f : X \to Y$ é contínua se X pode ser escrito como a união de conjuntos abertos U_α tal que $f|U_\alpha$ é contínua para cada α.

Demonstração. (a) Seja $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$. Seja V um aberto em Y. O conjunto $f^{-1}(V)$ é igual a X ou 0, dependendo se V contém y_0 ou não. Em ambos os casos, $f^{-1}(V)$ é aberto.

(b) Se U é aberto em X, então $j^{-1}(U) = U \cap A$, é aberto pela definição de topologia do subespaço.

(c) Se U é aberto em Z, então $g^{-1}(U)$ é aberto em Y e $f^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto em X. Mas

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$$

pela teoria dos conjuntos.

(d) A função $f|A$ é igual à composição da imersão $j : A \to X$ e da aplicação $f : X \to Y$, onde ambas são funções contínuas.

(e) Seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Se $f(X) \subset Z \subset Y$, devemos mostrar que a função $g : X \to Z$ obtida a partir de f é contínua. Seja B um aberto em Z. Então $B = Z \cap U$ para algum conjunto aberto U de Y. Como Z contém o conjunto imagem $f(X)$,

$$f^{-1}(U) = g^{-1}(B),$$

pela teoria dos conjuntos. Uma vez que $(f^{-1}(U)$ é aberto, temos que $(g^{-1}(B)$ também é. Para mostrar que $h : X \to Z$ é contínua se Z é um subespaço de Y, observamos que h é a composição da aplicação $f : X \to Y$ e da imersão $j : Y \to Z$.

(f) Por hipótese, podemos escrever X como uma união de conjuntos abertos U_α tal que $f|U_\alpha$ é contínua para cada α. Seja V um conjunto aberto em Y. Então,

$$f^{-1}(V) \cap U_\alpha = (f|U_\alpha)^{-1}(V),$$

pois ambas as expressões representam o conjunto dos pontos $x \in U_\alpha$ para os quais $f(x) \in V$. Como $f|U_\alpha$ é contínua, este conjunto é aberto em U_α e, portanto, aberto em X. Mas

$$f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha (f^{-1}(V) \cap U_\alpha),$$

de modo que $f^{-1}(V)$ também é aberto em X.

$\square$

Capítulo 4

TOPOLOGIA DE SCOTT

4.1 Topologia e Ordem

Começaremos com um exemplo:

Exemplo 20. *Seja* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ *o conjunto dos números naturais, e seja* $(\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$ *denotando o conjunto das funções parciais de* $\mathbb{N}$ *nele mesmo. Considere a família de funções parciais* $f_n \in (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$ *definida por*

$$f_n(m) = \begin{cases} m! & se\ m < n, \\ indefinido & em\ outro\ caso. \end{cases}$$

O conjunto das funções $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para a função* $FAC : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *através de* $FAC(m) = m!(\forall m \in \mathbb{N})$.

Para encontrar uma topologia adequada em $(\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$ para expressar essa convergência, primeiro identificaremos $(\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$ como um espaço total de funções. Seja $\perp$ um elemento que não está em $\mathbb{N}$, e defina $\mathbb{N}_\perp = \mathbb{N} \cup \{\perp\}$. Interpretamos $\perp$ como indefinido, e definimos uma injetividade

$$f \mapsto f_\perp : (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) \to (\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp)\, por\ f_\perp(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \text{ é definido,} \\ \perp & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Então é claro que $\{f_\perp | f \in (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})\}$ é precisamente o conjunto de auto aplicações de $\mathbb{N}_\perp$ que são estritas, isto é, aplicações que mandam $\perp$ em si mesmo. Se conferir com a topologia discreta, então todas as funções $(\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp)$ são contínuas.

Definição 20. *Definimos a topologia compacto-aberto num espaço de funções. Se* F *é um conjunto de aplicações contínuas de* X *em* Y*, a topologia compacto-aberto em* F *é a topologia para a qual uma base de vizinhanças de um elemento* $f \in F$ *é dada pela interseção de um número finito de conjuntos da forma* $\{g \in F : gK \subset U\}$*, para todo* $K \subset U$ *compacto e* $U \subset Y$ *aberto tais que* $fK \subset U$.

Proposição 23. *Na topologia compacto-aberto em* $(\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp)$*, a sequência* $\{f_{n\perp}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $FAC_\perp$.

Demonstração. Como $\mathbb{N}_\perp$ é discreto, a topologia compacto-aberta sobre $(\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp)$ é a mesma que a topologia da convergência pontual. □

Definição 21. *Definimos a ordem extensional de um espaço* $(\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$*, por*

$$f \sqsubseteq g \text{ se e somente se } dom(f) \subseteq dom(g) \& g|_{dom(f)} = f,$$

onde $dom(f) = f^{-1}(\mathbb{N})$.

Claramente, nesta ordem familiar, qualquer incremento de funções parciais tem um supremo - a união. Além disso, a função FAC é o supremo da família $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definição 22. *Seja P um conjunto. Uma ordem parcial sobre P é uma relação $\leq$, tal que $\forall x, y, z \in P$, são válidas as seguintes propriedades:*

1) Reflexividade: $x \leq x$;

2) Antissimétrica: se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;

3) Transitividade: se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

Uma relação que satisfaz apenas as propriedades de reflexividade e transitividade é chamada de pré-ordem. Um conjunto P munido de uma relação de ordem "$\leq$" e satisfazendo as três propriedades acima, é dito um conjunto parcialmente ordenado (poset), com representação genérica $\langle P, \leq \rangle$.

Note que toda relação de ordem sobre P, dá origem a outra relação "¡", chamada desigualdade estrita. Assim, $x < y$ em P, se e somente se, $x \leq y$ e $x \neq y$.

Definição 23. *Uma cadeia é um subconjunto B de uma ordem parcial P, onde $\forall x, y \in B, x \leq y$ ou $y \leq x$.*

Exemplo 21. *O conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) com a ordem usual $\leq$, é uma cadeia.*

Definição 24. *Seja $S \subseteq P$. Um elemento $x \in P$ é chamado um majorante de S, se x está acima de todo elemento de S, isto é, $\forall y \in S, y \leq x$. Usa-se a notação UB(S) para representar o conjunto de todos os majorantes de S.*

Do mesmo modo, um elemento $x \in P$ é chamado um minorante de S, se x está abaixo de todo elemento de S, isto é, $\forall y \in S, x \leq y$. Usa-se a notação LB(S) para representar o conjunto de todos os minorantes de S.

Um subconjunto A de P é um conjunto para cima (upward), se sempre que $x \in A$ e $x \leq y$, então $y \in A$. Usa-se a notação $\uparrow A$ para representar o conjunto de todos os elementos acima de algum elemento de A, isto é, $\uparrow A = \{x \in P / y \leq x$ para algum $y \in A\}$.

Do mesmo modo, um conjunto é para baixo (downward), se sempre que $x \in A$ e $y \leq x$, então $y \in A$. Usa-se a notação $\downarrow A$ para representar o conjunto de todos os elementos abaixo de algum elemento de A, isto é, $\downarrow A = \{x \in P / x \leq y$ para algum $y \in A\}$.

Quando A é um conjunto unitário $\{x\}$, usa-se a notação $\uparrow x$ em vez de $\uparrow \{x\}$ e $\downarrow x$ em vez de $\downarrow \{x\}$.

Definição 25. *Um elemento $x \in P$ é maximal, se não existe nenhum outro elemento de P acima dele, isto é, se $\uparrow x \cap P = \{x\}$.*

Do mesmo modo, um elemento $x \in P$ é minimal, se não existe nenhum outro elemento de P abaixo dele, isto é, se $\downarrow x \cap P = \{x\}$.

Caso o maximal ou minimal de P existam e sejam únicos, diz-se que eles são o elemento máximo ou "top" $\top$ e mínimo ou "bottom" $\bot$, respectivamente.

Definição 26. *Para qualquer subconjunto $S \subseteq P$, o elemento minimal de UB(S), onde esse minimal é único, é chamado majorante mínimo de S. Caso contrário, o conjunto dos majorantes mínimos de S é denotado por MUB(S).*

Do mesmo modo, o elemento maximal de LB(S), onde esse maximal é único, é chamado minorante máximo de S. Caso contrário, o conjunto dos minorantes maximais de S é denotado por MLB(S).

Definição 27. *O menor elemento do UB(S), caso exista, diz-se supremo de S, denotado por $\sqcup S$.*

Do mesmo modo, o maior elemento do LB(S), caso exista, diz-se ínfimo de S, denotado por $\sqcap S$.

Assim, dado um poset $\langle P, \leq \rangle$, com $S \subseteq P$ e os elementos $x, y \in P$:

1) $x = \sqcup S$ se as seguintes condições são satisfeitas:

a) $x \in UB(S)$, e

b) se $x' \in UB(S)$, então $x \leq x'$;

2) $y = \sqcap S$ se as seguintes condições são satisfeitas:

a) $y \in LB(S)$, e

b) se $y' \in LB(S)$, então $y' \leq y$.

Dessa maneira, pode-se observar que o supremo/ínfimo são limitantes de um conjunto parcialmente ordenado-poset.

Definição 28. *Seja $\langle P, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado.*

- *Um subconjunto $D \subseteq P$ é dirigido se, e somente se, $D \neq \emptyset$ e se para todo $a, b \in D$, existe $c \in D$, tal que $a \leq c$ e $b \leq c$.*

- *P é um conjunto de ordem parcial completa dirigida (dcpo) se todo subconjunto dirigido de P tem um limite superior. Se um dcpo tem um menor elemento - usualmente denotado por $\perp$ - é chamado de ordem parcial completa (cpo).*

Exemplo 22. *Cadeias são exemplos mais imediatos de conjuntos dirigidos.*

Claramente um conjunto dirigido é não vazio, pois o conjunto vazio é um subconjunto finito de cada conjunto.

Por exemplo, a família $(\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$ é um cpo: a função indefinida é o menor elemento e, o supremo de uma família de funções dirigidas é a união.

Definição 29. *Seja $\langle P, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado. O subconjunto $U \subseteq P$ é um aberto de Scott se*

- $U = \uparrow U = \{y \in P / \exists\ (x \in U)\ x \leq y\}$ *é um conjunto "upper".*

- $(\forall\ D \subseteq P\ dirigido), \sqcup D \in U \Rightarrow D \cap U \neq \emptyset$

Proposição 24. $\mathcal{T} = \{A \subseteq P/A$ *é um aberto de Scott*$\}$ *é uma topologia.*

Demonstração. i) $\emptyset, P \in \mathcal{T}$
De fato, $\emptyset$ é um aberto de $\mathcal{T}$.
P é um aberto de $\mathcal{T}$ pois $\forall y \in P\ \exists\ x \in P$ tal que $x \leq y$ pois P é parcialmente ordenado e ainda, se $D \subseteq P$ é um conjunto dirigido e $\sqcup D \in P$ temos $D \cap P \neq \emptyset$.

ii) A união de elementos de $\mathcal{T}$ é um aberto em $\mathcal{T}$.
Dada uma família arbitrária de abertos de Scott, $\mathcal{T} = \{P_i\}_{i \in I}$, se $x \in \bigcup P_i$ e $x \leq y$, então $\exists\ j \in J$ tal que $x \in P_j \in \mathcal{T}$, ou seja, $y \in P_j \subseteq \mathcal{T}$. Se $D \subseteq P$ é um conjunto dirigido e $\sqcup D \in \bigcup P_i$, então *exists* $k \in I$ tal que $\sqcup D \in P_k$, $P_k \in \mathcal{T}$ e consequentemente, $D \cap P_k \neq \emptyset$, o que significa que $D \cap \bigcup P_i \neq \emptyset$.

iii) A interseção finita de elementos de $\mathcal{T}$ é um aberto em $\mathcal{T}$.
Sejam P_1 e $P_2 \in \mathcal{T}$. Se $x \in (P_1 \cap P_2)$ e $x \leq y$, então $x \in P_1$ e $x \in P_2$, e como $P_1, P_2 \in \mathcal{T}$ e $x \leq y$, então $y \in P_1$ e $y \in P_2$. Consequentemente, $y \in (P_1 \cap P_2)$.
Se $D \subseteq P$ é um conjunto dirigido tal que $\sqcup D \in (P_1 \cap P_2)$, então $\sqcup D \in P_1$ e $\sqcup D \in P_2$ e como P_1 e P_2 são abertos de Scott, então $D \cap P_1 \neq \emptyset$ e $D \cap P_2 \neq \emptyset$, o que significa que $D \cap (P_1 \cap P_2) \neq \emptyset$.

□

Lembrete: Alguns axiomas de separação:

T_0: Um espaço topológico X é dito ser $\mathcal{T}_0$ (ou a topologia de X é dita $\mathcal{T}_0$) se, e somente se, dados dois pontos distintos $x, y \in X (x \neq y)$, existe um aberto contendo um destes pontos e não contendo o outro.

T_1: Um espaço topológico X é dito ser $\mathcal{T}_1$ se, e somente se, dados dois pontos distintos $x, y \in X (x \neq y)$, existem abertos U e V tais que $x \in U$, $y \in V$, $x \notin V$ e $y \notin U$.

T_2: Um espaço topológico X é dito ser $\mathcal{T}_2$ (ou Hausdorff) se, e somente se, dados dois pontos distintos $x, y \in X (x \neq y)$, existem abertos disjuntos U e V tais que $x \in U$ e $y \in V$.
Existem ainda outros axiomas de separação $(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_{3_{1/2}}, \mathcal{T}_4, ...)$.

Proposição 25. *Seja P um conjunto parcialmente ordenado.*

i) A família de conjuntos abertos de Scott é uma topologia $\mathcal{T}_0$ em P.

ii) Se $x, y \in P$ e existe um conjunto aberto contendo x mas não contém y então $x \nleq y$.

iii) As afirmações são equivalentes:

(a) A topologia de Scott é $\mathcal{T}_1$.

(b) P tem uma ordem discreta.

(c) A topologia de Scott é $\mathcal{T}_2$.

(d) A topologia de Scott é discreta.

Demonstração. i) Seja U_α a família de conjuntos abertos de Scott em P e sejam $x, y \in P$. Se $x \not\leq y \ \exists\ U_{\alpha i} = y \uparrow$ tal que $x \notin U_{\alpha i}$.

Se $x \leq y \ \exists\ U_{\alpha j} = y \uparrow$ tal que $x \notin U_{\alpha j}$.

ii) Suponha por absurdo que $x \in U$ e $x \leq y$. Assim $y \in U$ por definição de conjunto upper. Absurdo! Logo $x \not\leq y$.

iii) $(a \Rightarrow b)$ Seja P um conjunto parcialmente ordenado. Como a topologia de Scott é $\mathcal{T}_1$, temos que, para todo $x, y \in P \ \exists\ U$ e $U' \in \mathcal{T}$ tais que $x \in U$ então $y \notin U$ e $y \in U'$ então $x \notin U'$. Logo $x \not\leq y$ e $y \not\leq x \ \forall\ y \in P$. Logo todo ponto de P é isolado.

$(b \Rightarrow c)$ Como todo elemento de P é isolado, temos que para cada $x, y \in P \ \exists\ U_x$ contendo somente x e U_y contendo somente y, onde U_x e U_y são abertos de Scott. Logo $U_x \cap U_y = \emptyset$.

$(c \Rightarrow d)$ Para cada $x, y \in P$ temos U e U' tais que $x \in U, y \in U', x \notin U', y \notin U$ e $U \cap U' \neq \emptyset$. Por ii temos que $x \not\leq y \ \ \forall y$. Logo a topologia de Scott é discreta.

$(d \Rightarrow a)$ $\mathcal{T}$ é discreta então cada subconjunto de P é um aberto de Scott. Assim tome $D \subsetneq P$ um subconjunto não vazio de P. Se $x \in D$ temos que $x \notin P - D$. Tome $y \in P - D$ e então $y \notin D$. Logo $\mathcal{T}$ é $\mathcal{T}_1$. □

Definição 30. *Sejam P e Q poset´s. Uma função $f : P \to Q$ diz-se monotônica se para todo $x, y \in P$, com $x \leq y$, tem-se $f(x) \leq f(y)$ em Q.*

Definição 31. *Sejam D e E dcpo´s. Uma função $f : D \to E$ diz-se Scott contínua, se para cada conjunto dirigido Δ de D tem-se $f(\sqcup\Delta) = \sqcup f(\Delta)$.*

Proposição 26. *Seja P um cpo, e tome P com a topologia de Scott.*

i) Se $D \subseteq P$ é dirigido, então $\sqcup D$ é um ponto de acumulação de D, e ainda, $\sqcup D$ é o maior ponto de acumulação de D.

ii) Sejam I e J conjuntos dirigidos, e seja $(i, j) \mapsto x_{ij} : I \times J \to P$ uma função monnotônica. Então:
(a) $\sqcup_{i\in I} \sqcup_{j\in J} x_{ij} = \sqcup_{j\in J} \sqcup_{i\in I} x_{ij}$.
(b) Se $I = J$, então $\sqcup_{i\in I} \sqcup_{j\in J} x_{ij} = \sqcup_{i\in I} x_{ii}$.

iii) Se Q é também um cpo, então $f : P \to Q$ é uma função contínua se, e somente se, f é monotônica e preserva supremos e conjuntos dirigidos.

*Demonstração. i)*Temos que $\sqcup D \in P$. Assim, seja U um aberto de Scott contendo $\sqcup D$. Por definição de abertos, temos que $D \cap U \neq \emptyset$.

Se $\sqcup D \notin D$ então $D \cap (U - \sqcup D) \neq \emptyset$.

Se $\sqcup D \in D$, então D é fechado pela direita, pois $\sqcup D$ é o maior elemento de D. Logo $\sqcup D$ é um ponto de acumulação.

E ainda, $\sqcup D$ é o maior ponto de acumulação de D por definição de supremo.

ii) a) Se I é um conjunto dirigido, então $\forall F_i \subseteq I$ finito, $\exists x_i \in I$ tal que $y_i \leq x_i (\forall y_i \in F_i)$.

Da mesma forma, se J é um conjunto dirigido, então $\forall F_j \subseteq J$ finito, $\exists x_j \in J$ tal que $y_j \leq x_j (\forall y_j \in F_j)$.

Assim, $\forall F_i \times F_j \subseteq I \times J$, F_i, F_j finitos, temos $(x_i, x_j) \in I \times J$ tal que $(y_i, y_j) \leq (x_i, x_j)$ $(\forall (y_i, y_j) \in F_i \times F_j)$.

Logo, $I \times J$ é um conjunto dirigido.

Sabemos que x_{ij} é monotônica, então $X_{ij}(I \times J) = Im(x_{ij}) \subseteq P$ é um conjunto dirigido, como provaremos em iii).

Por i), temos que $\sqcup_{i \in I} \sqcup_{j \in J} x_{ij}$ é um ponto de acumulação de $Im(x_{ij})$ e mais, $\sqcup_{i \in I} \sqcup_{j \in J} x_{ij}$ é o maior ponto de acumulação $Im(x_{ij})$.

De maneira análoga, $\sqcup_{j \in J} \sqcup_{i \in I} x_{ij}$ é o maior ponto de acumulação $Im(x_{ij})$.

Logo $\sqcup_{i \in I} \sqcup_{j \in J} x_{ij} = \sqcup_{j \in J} \sqcup_{i \in I} x_{ij}$.

b) Por (a), se $I = J$, $\sqcup_{i \in I} \sqcup_{j \in J} x_{ij} = \sqcup_{i \in I} \sqcup_{i \in I} x_{ii} = \sqcup_{i \in I} x_{ii}$.

iii) $(\Rightarrow)$ f é contínua. Então dados $x, y \in P$ tais que $x \leq y$, temos que $f(x) \leq f(y)$ onde $f(x), f(y) \in Q$. Logo f é monotônica.

Dado D um conjunto dirigido em P, temos que $\forall F \subseteq D, \exists\, x \in D; y \leq x$ $(\forall y \in F)$. Assim $\forall f(F) \subseteq f(D), \exists\, f(x) \in f(D); f(y) \leq f(x)$ $(\forall f(y) \in f(F))$. Então $f(D)$ é um conjunto dirigido.

Se $\sqcup D$ é o supremo de D temos $f(\sqcup D) = \sqcup D f(D)$ pela definição de função contínua. Então $f(\sqcup D)$ é o supremos de $f(D)$. Logo f preserva supremos.

$(\Leftarrow)$ f é monotônica e preserva supremos e conjuntos dirigidos.

Se $x, y \in P$ tais que $x \leq y$ então $f(x) \leq f(y)$ pois f é monotônica.

Dado um conjunto dirigido D temos que $f(D)$ é também um conjunto dirigido e ainda, $f(\sqcup D) = \sqcup D f(D)$. Logo f é contínua. □

Teorema 27. *(TARSKI) Seja P um cpo, e seja $f : P \to P$ uma função monotônica e contínua. Então $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$ é o menor ponto fixo de f.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$ é um ponto fixo de f. Se f é contínua, então

$$f\Big(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)\Big) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f\Big(f^n(\perp)\Big).$$

Desenvolvendo,

$$f\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp)\Big) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^{n+1}(\perp).$$

Reindexando,

$$f\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp)\Big) = \bigsqcup_{n=1,2,\dots} f^{n}(\perp).$$

Por definição de $\perp$,

$$f\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp)\Big) = \perp \sqcup \bigsqcup_{n=1,2,\dots} f^{n}(\perp).$$

E, finalmente,

$$f\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp)\Big) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^{n}(\perp).$$

Para mostrar que $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp)$ é o menor ponto fixo de f, temos

$$\perp \sqsubseteq y.$$

Assim

$$f(\perp) \sqsubseteq f(y) = y.$$

Por indução,

$$\forall n \geq 0, f^n(\perp) \sqsubseteq y.$$

Assim, y é uma cota superior $\forall$ $f^n(\perp)$, ou ainda,

$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp) \sqsubseteq y.$$

$\square$

Capítulo 5

CONCLUSÃO

Observei, através dos estudos desenvolvidos, o importante papel que a topologia desempenha na Matemática, sendo, em um certo sentido, o elo formal entre a Geometria e a Análise. Além de fornecer uma sistematização lógica para os princípios físicos da Análise, ela gera ferramentas que são úteis para várias áreas da Matemática. Adicionalmente, considero que os estudos desenvolvidos contribuiram muito para a minha formação, principalmente no que se refere à formalização de conceitos matemáticos.

Referências Bibliográficas

[1] Mislove, W. Michael, *Topology, Domain Theory and Theoretical Computer Science*, Departmente of Mathematics Tulane University New Orleans (1997), pp.55.

[2] Munkres,J.R., *Topology, A first course*, Prentice:Hall, New Jersey, (1975), pp.537.

[3] Santos, José Medeiros, *Em direção a uma representação para equações algébricas: Uma lógica equacional local*, Departamento de Informática e Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, (2001), pp.161.

[4] Lima, E. L., *Elementos de Topologia Geral*, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, R.J., (1970).