

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Priscilla Bieites de Souza Macedo

DIFERENTES DEMONSTRAÇÕES PARA O LIMITE: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}$

Belo Horizonte
2010

Priscilla Bieites de Souza Macedo

DIFERENTES DEMONSTRAÇÕES PARA O LIMITE: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}$

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de **Especialista em Cálculo.**

Professor Orientador: Jorge Sabatucci

Belo Horizonte

2010

Priscilla Bieites de Souza Macedo

DIFERENTES DEMONSTRAÇÕES PARA O LIMITE: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}$

BANCA EXAMINADORA

Prof. Jorge Sabatucci (Orientador)
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Prof.
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Prof.
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Belo Horizonte, 30 de setembro de 2010.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo demonstrar de três maneiras diferentes que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1$. Em duas das demonstrações utilizaremos desigualdades entre áreas de figuras planas e na terceira compararemos os centróides de figuras planas.

Finalizaremos esboçando o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Palavras-chave: área, limite, centróide

ABSTRACT

This work intends to demonstrate by three different ways that $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1$. In two of the statements we use inequality between areas of plane figures and the third will compare the centroids of plane figures. We conclude by sketching the graph of

the function $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Keywords: area, limit, centroid

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	6
CAPÍTULO 1 – PRELIMINARES	7
CAPÍTULO 2 – DEMONSTRAÇÕES	9
2.1 Primeira demonstração geométrica (Clássica)	9
2.1.1 Cálculo do $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(h)}{h}$	9
2.1.2 Cálculo do $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(h)}{h}$	10
2.2 Segunda demonstração geométrica	11
2.3 Demonstração utilizando o centróide.....	13
2.3.1 Cálculo do centróide do triângulo AOB.....	13
2.3.2 Cálculo do centróide da região R	14
Cálculo da abscissa do centróide	15
Cálculo da ordenada do centróide.....	15
2.3.3 Cálculo do centróide do triângulo OCD.	16
2.4 Comparação das coordenadas dos centróides das três figuras	16
CAPÍTULO 3 - GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$	18
Estudo do sinal de $f'(x)$	19
Estudo do sinal de $f''(x)$	24
Esboço do gráfico da função $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$	24
CONCLUSÃO	26
BIBLIOGRAFIA.....	27

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de demonstrar de diferentes maneiras que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1$. Para tanto, o texto foi dividido em três capítulos:

No Capítulo 1 são apresentados conceitos, definições e resultados que serão utilizados nos capítulos posteriores.

O Capítulo 2 é composto por três seções. Cada uma delas contém uma demonstração de que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1$.

Na primeira seção é apresentada a demonstração frequentemente encontrada nos livros de Cálculo Diferencial e Integral, baseada em desigualdades entre as áreas de três regiões.

Na segunda seção é apresentada uma demonstração a partir de um polígono de $n + 1$ lados inscrito em uma circunferência.

Por fim, a terceira seção apresenta uma demonstração que também é feita através de desigualdades, no entanto, entre os centróides de três regiões diferentes.

O Capítulo 3 apresenta o estudo do comportamento da função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}, \text{ culminando com o esboço de seu gráfico.}$$

CAPÍTULO 1 – PRELIMINARES

Neste capítulo listaremos alguns resultados de cálculo e de geometria, sem demonstrá-los, que serão utilizados em capítulos posteriores.

1.1 Teorema do confronto – Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções reais definidas em um domínio $D \subseteq \mathfrak{R}$ e seja α um ponto de acumulação* deste domínio tais que:

- Existem $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = L$; e
- $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.

Então existe o limite $\lim_{x \rightarrow \alpha} h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = L$.

1.2 Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções definidas no domínio $D \subseteq \mathfrak{R}$. Suponha que α represente um ponto de acumulação de D , ∞ ou $-\infty$.

Se $g(x)$ é uma função limitada e $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \cdot g(x) = 0$.

1.3 Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções reais definidas em um domínio $D \subseteq \mathfrak{R}$ e seja α um ponto de acumulação deste domínio.

Se existem os limites $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$, então existem $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f + g)(x)$ e

$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f \cdot g)(x)$. Além disso, $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$ e

$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$.

1.4 Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções contínuas e deriváveis em um intervalo I , tais que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Seja, ainda, a um ponto de acumulação de I . Se

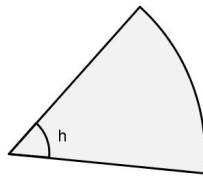
*Dizemos que x_0 é ponto de acumulação de um conjunto $D \subset \mathfrak{R}$ se cada intervalo aberto contendo x_0 intersecta D em um ponto diferente de x_0 .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ e existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ou é infinito. Então existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e

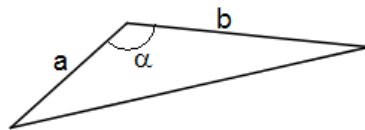
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1.5 Seja P_n um polígono convexo de n lados inscrito em um círculo de raio r , tal que as medidas de seus lados tendem a zero se, e somente se, $n \rightarrow \infty$. Então $A_p \rightarrow \pi r^2$, em que A_p é a área de P_n .

1.6 A área de um setor circular de raio r e ângulo central h , é dada por $\frac{r^2 h}{2}$, com h real, entre 0 e 2π .



1.7 A área de um triângulo qualquer pode ser calculada por $\frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}$, onde a e b são dois lados conhecidos e α o ângulo formado entre eles.



CAPÍTULO 2 – DEMONSTRAÇÕES

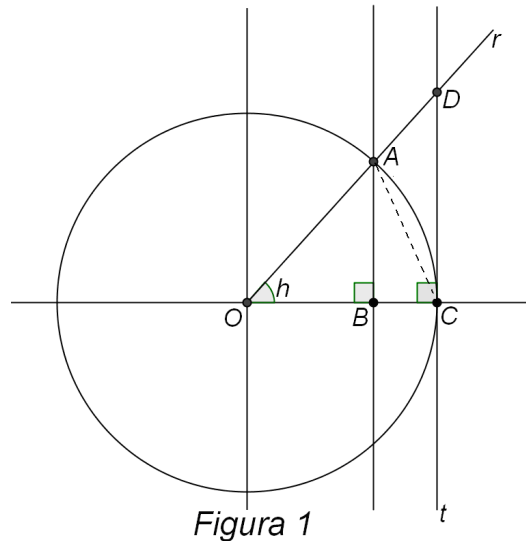
Nesse capítulo apresentaremos três maneiras diferentes para calcular o $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}$, em que h é um número real.

2.1 Primeira demonstração Geométrica (Clássica)

A demonstração que será apresentada é frequentemente encontrada nos livros de Cálculo. Para demonstrá-la precisaremos

calcular os limites laterais: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(h)}{h}$ e

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(h)}{h}.$$



2.1.1 Cálculo do $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(h)}{h}$

Neste caso, interessa-nos estudar o comportamento de $\frac{\text{sen}(h)}{h}$ para valores de h positivos e próximos de zero. Podemos então considerar valores de h no primeiro quadrante, ou seja, $0 < h < \frac{\pi}{2}$.

Na *figura 1* tem-se uma circunferência de centro na origem e raio igual a 1, uma semi-reta r de origem O que forma um ângulo h com raio \overline{OC} , em que C é o ponto de coordenadas $(1,0)$.

A semirreta r intersecta a circunferência em um ponto que representaremos por A .

A reta t tangencia a circunferência no ponto C e intersecta r no ponto D .

Sabemos então, que $\overline{CD} = \operatorname{tg}(h)$ e que as coordenadas de A são $(\cos(h), \operatorname{sen}(h))$.

Sejam:

$S_{\Delta AOC}$, a área do triângulo isósceles de vértices A, O e C;

$S_{\Delta COD}$, a área do triângulo retângulo de vértices C, O e D;

S_{OAC} , a área do setor circular de vértice O e ângulo central igual a h .

Analisando a *figura 1*, temos que:

$$S_{\Delta AOC} = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{1 \cdot \operatorname{sen}(h)}{2} = \frac{\operatorname{sen}(h)}{2} \quad (\text{I});$$

$$S_{OAC} = \frac{h}{2} \quad (\text{II});$$

$$S_{\Delta COD} = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg}(h)}{2} = \frac{\operatorname{tg}(h)}{2} \quad (\text{III}); \text{ e que}$$

$$S_{\Delta AOC} < S_{OAC} < S_{\Delta COD} \quad (\text{IV}).$$

De I, II, III e IV, temos $\frac{\operatorname{sen}(h)}{2} < \frac{h}{2} < \frac{\operatorname{tg}(h)}{2}$. Utilizando o fato que $h > 0$, podemos

concluir que essas desigualdades são equivalentes às seguintes $\cos(h) < \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} < 1$.

Como $\lim_{h \rightarrow 0^+} \cos(h) = 1$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1$, pelo Teorema do Confronto, concluímos que o

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1.$$

2.1.2 Cálculo do $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}$

Agora, vamos estudar o comportamento de $\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}$ para valores de h negativos e

próximos de zero. Podemos então considerar valores de h no quarto quadrante, ou

seja, $-\frac{\pi}{2} < h < 0$.

Vamos relacionar o limite à esquerda de 0 com o limite à direita de 0. Para tanto,

seja $\alpha = -h$, então $h \rightarrow 0^-$, se e somente se, $\alpha \rightarrow 0^+$.

Então, $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(h)}{h} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(-\alpha)}{-\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}$, pois $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$.

Dessa forma, concluímos que $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(h)}{h} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} = 1$.

De 2.1.1 e 2.1.2, concluímos que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1$, para h real.

2.2 Segunda demonstração

Utilizaremos o seguinte fato para essa demonstração: dado α com $0 < \alpha < 2\pi$, existe um número natural n e um número real β , com $0 \leq \beta < \alpha$, tais que $n\alpha + \beta = 2\pi$ (β é o resto da divisão de 2π por α). Essa expressão nos fornece

$$n = \frac{2\pi - \beta}{\alpha} \quad (\text{I}).$$

Esse fato nos permite inscrever em um círculo um polígono P_{n+1} composto de $n+1$ triângulos isósceles, sendo que n deles possuem ângulo no vértice igual a α e um deles igual a β , conforme *figura 2*.

Considerando um círculo de raio 1 e representando a área do polígono por A_P ; a área do triângulo isósceles de ângulo no vértice igual a α por A_α ; e a área do triângulo isósceles de ângulo no vértice igual a β por A_β , podemos escrever

$$A_{P_{n+1}} = nA_\alpha + A_\beta \quad (\text{II}).$$

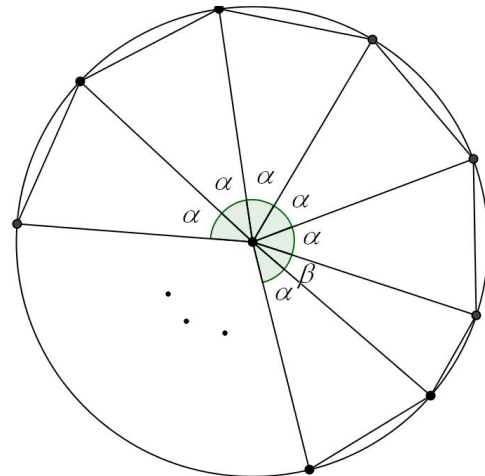


Figura 2

Temos que:

$$A_\alpha = \frac{1 \cdot 1 \cdot \text{sen}\alpha}{2} = \frac{\text{sen}\alpha}{2} \quad (\text{III});$$

$$A_\beta = \frac{1 \cdot 1 \cdot \text{sen}\beta}{2} = \frac{\text{sen}\beta}{2} \quad (\text{IV}).$$

De I, II, III e IV obtemos $A_{P_{n+1}} = n \frac{\text{sen}\alpha}{2} + \frac{\text{sen}\beta}{2}$

$$= \frac{2\pi - \beta}{\alpha} \cdot \frac{\text{sen}\alpha}{2} + \frac{\text{sen}\beta}{2}$$

$$= \frac{2\pi - \beta}{2} \cdot \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha} + \frac{\text{sen}\beta}{2} \text{ (V).}$$

Da geometria plana, como registrado no Capítulo 1, temos que $A_{P_{n+1}} \rightarrow \pi$ (VI).

Sabemos que $\frac{\text{sen}\beta}{2} \rightarrow 0$, quando $\alpha \rightarrow 0^+$, pois $0 \leq \beta < \alpha$ (VII).

De V, VI e VII, concluímos que existe o limite de $\frac{2\pi - \beta}{2} \cdot \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha}$, quando $\alpha \rightarrow 0^+$.

Esse fato nos permite escrever:

$$\pi = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A_{P_{n+1}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{2\pi - \beta}{2} \cdot \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha} + \frac{\text{sen}\beta}{2} \right)$$

$$\pi = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{2\pi - \beta}{2} \cdot \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha} + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}\beta}{2}$$

Como existem os limites de $\frac{2\pi - \beta}{2} \cdot \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha}$ e de $\frac{2\pi - \beta}{2}$, então:

$$\pi = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{2\pi - \beta}{2} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha}$$

$$\pi = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{2\pi}{2} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha}$$

$$\pi = \pi \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha}$$

$$1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha}.$$

Com o mesmo argumento utilizado em 2.1.2, concluímos que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} = 1$.

Portanto, o $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} = 1$.

2.3 Demonstração utilizando o centróide

Para essa demonstração compararemos os centróides das seguintes regiões:

- ✓ O setor circular R de raio 1 e ângulo central 2α ;
- ✓ O triângulo OAB em que os lados OA e OB são os prolongamentos dos raios OC e OD até a reta tangente ao arco CD no ponto E ; e
- ✓ O triângulo OCD de lados iguais a 1.

Para tanto, vamos dispor essas regiões em um plano cartesiano de forma que fiquem simétricas em relação ao eixo das ordenadas e tenham vértice na origem, conforme *figura 3*.

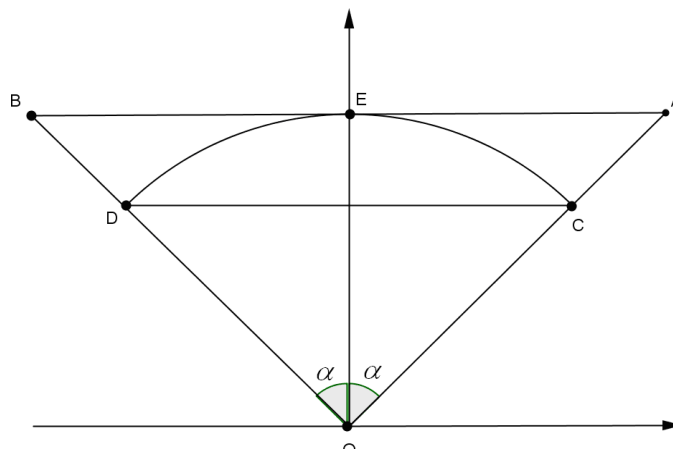


Figura 3

2.3.1 Cálculo do centróide do triângulo AOB

A abscissa $X_{\Delta OAB}$ do centróide do triângulo isósceles OAB é zero, pois esse triângulo é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

A ordenada $Y_{\Delta OAB}$ do centróide do triângulo OAB é igual a $\frac{2}{3}$ da altura desse triângulo relativa ao lado AB. Como essa altura é igual a 1, temos que $Y_{\Delta OAB} = \frac{2}{3}$.

Portanto, as coordenadas do centróide do triângulo OAB são $\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

2.3.2 Cálculo do centróide da região R

Tracemos um segmento perpendicular ao eixo das abscissas pelo ponto de abscissa x , interceptando o setor circular nos pontos E e F, conforme *figura 4*.

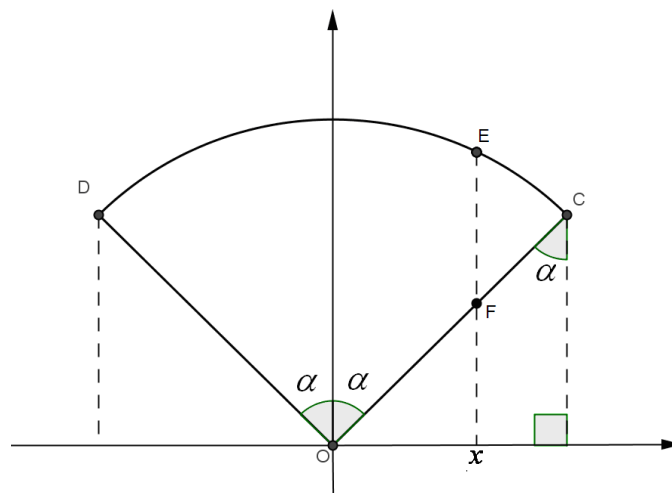


Figura 4

Temos que:

O ponto E tem coordenadas $(x, \sqrt{1-x^2})$, pois ele pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ e tem abscissa x .

O ponto C tem coordenadas $(\text{sen}\alpha, \text{cos}\alpha)$, da trigonometria.

O ponto F tem coordenadas $(x, \text{cot } g(\alpha))$, pois pertence à reta de equação $y = x \text{ cot } g(\alpha)$ e tem abscissa x .

O ponto D tem coordenadas $(-\text{sen}\alpha, \text{cos}\alpha)$, pois ele é simétrico ao ponto C em relação ao eixo das ordenadas.

Do Cálculo Diferencial e Integral temos que as coordenadas do centróide de R são dadas por:

$$\bar{X} = \frac{\iint_R x \, dx \, dy}{Área(R)} \quad \text{e} \quad \bar{Y} = \frac{\iint_R y \, dx \, dy}{Área(R)}$$

Cálculo da abscissa do centróide

Observando que a região R e a função $g(x, y) = x$ são simétricas e em relação ao eixo das ordenadas, assim temos que $\iint_R x \, dx \, dy = 0$ e, portanto, $\bar{X} = 0$.

Cálculo da ordenada do centróide

A ordenada \bar{Y} do centróide é dada por:

$$\bar{Y} = \frac{\int_{-sen(\alpha)}^0 \left[\int_{-x \cot g(\alpha)}^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right] dx + \int_0^{sen(\alpha)} \left[\int_{x \cot g(\alpha)}^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right] dx}{\alpha} = \frac{2 \left(\int_0^{sen(\alpha)} \left[\int_{x \cot g(\alpha)}^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right] dx \right)}{\alpha}, \quad \text{pois a}$$

função $f(x, y) = y$ e a região R são simétricas em relação ao eixo das ordenadas.

$$\text{Portanto, } \bar{Y} = \frac{2 \left(\int_0^{sen(\alpha)} \left[\frac{(\sqrt{1-x^2})^2}{2} - \frac{(x \cot g(\alpha))^2}{2} \right] dx \right)}{\alpha}$$

$$= \frac{2 \left(\int_0^{sen(\alpha)} \left[\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2 \cot^2 g(\alpha)}{2} \right] dx \right)}{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3 \cot g^2(\alpha)}{6} \right]_0^{\text{sen}(\alpha)}}{\alpha} \\
&= \frac{\frac{1}{3} \left(3\text{sen}(\alpha) - \text{sen}^3(\alpha) - \text{sen}^3(\alpha) \frac{\cos^2(\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} \right)}{\alpha} \\
&= \frac{3\text{sen}(\alpha) - \text{sen}^3(\alpha) - \text{sen}(\alpha) \left(1 - \text{sen}^2(\alpha) \right)}{3\alpha} \\
&= \frac{2}{3\alpha} \text{sen}(\alpha).
\end{aligned}$$

Portanto, o centróide da região R tem coordenadas $\left(0, \frac{2}{3\alpha} \text{sen}(\alpha) \right)$.

2.3.3 Cálculo do centróide do triângulo OCD

A abscissa $X_{\Delta OCD}$ do centróide do triângulo isósceles OCD é 0, pois esse triângulo é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

A ordenada $Y_{\Delta OCD}$ do centróide do triângulo OCD é igual a $\frac{2}{3}$ da altura desse triângulo relativa ao lado CD. Como essa altura é igual a $\cos(\alpha)$, temos que

$$Y_{\Delta OCD} = \frac{2}{3} \cos(\alpha).$$

Portanto, as coordenadas do centróide do triângulo OCD são $\left(0, \frac{2}{3} \cos(\alpha) \right)$.

2.4 Comparação das coordenadas dos centróides das três figuras

Da Física e do fato de uma figura plana ser considerada homogênea (portanto de densidade constante), podemos observar que as abscissas dos centróides dessas regiões são iguais a zero e, além disso, que as regiões $\Delta OCD, R$ e ΔOAB , dispostas

como na *figura 3* nos levam às seguintes relações entre as ordenadas de seus

centróides: $\frac{2}{3}\cos(\alpha) < \frac{2\text{sen}(\alpha)}{3\alpha} < \frac{2}{3}$. Essas desigualdades são equivalentes às

seguintes $\cos(\alpha) < \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} < 1$.

Como $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \cos(\alpha) = 1$ e $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} 1 = 1$, pelo Teorema do Confronto, concluímos que o

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} = 1.$$

Com o mesmo argumento utilizado em 2.1.2, concluímos que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} = 1$.

Portanto, o $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \alpha}{\alpha} = 1$.

CAPÍTULO 3 - GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Neste capítulo já supomos conhecidas as derivadas das funções trigonométricas.

As etapas a seguir nos permitirão esboçar o gráfico dessa função.

✓ O domínio da função é $(-\infty, \infty)$.

✓ A função é par.

De fato, se $x \neq 0$, então

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\text{sen}(-x)}{-x} \\ &= \frac{\text{sen}(x)}{x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Portanto, $f(-x) = f(x)$ para $x \neq 0$.

Vale observar também que $f(-0) = f(0) = 1$.

Dessa forma concluímos que a função é par.

✓ Interceptos com os eixos coordenados.

Com o eixo y : Para $x = 0$, temos que $y = 1$. Portanto o ponto $(0, 1)$.

Com o eixo x : Nesse caso devemos ter $y = \frac{\text{sen}(x)}{x} = 0$. Isso nos leva aos pontos

$(n\pi, 0)$, com n inteiro.

✓ Temos os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 0$, pois $\text{sen}(x)$ é uma função limitada e $\frac{1}{x}$ tende a zero, quando

$x \rightarrow \infty$. Como $f(x)$ é par, concluímos também que o $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 0$.

✓ Estudo do sinal da primeira derivada e o comportamento da função.

Derivada de $f(x)$:

Para $x \neq 0$ temos $f'(x) = \frac{x \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2}$.

O procedimento a seguir nos permite verificar a existência de $f'(0)$.

Temos,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(h) - h}{h^2} \end{aligned}$$

Utilizando a regra de L'Hôpital, duas vezes, obtemos que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$.

Podemos concluir que $f'(0)$ existe e é igual a 0.

$$\text{Portanto } f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Estudo do sinal de $f'(x)$

Para $x \neq 0$ temos x^2 positivo e, portanto, o sinal de $f'(x)$ será o sinal do numerador $x \cos(x) - \operatorname{sen}(x)$.

Considerando $z = x \cos(x) - \operatorname{sen}(x)$, temos que:

$x \cos(x) - \operatorname{sen}(x) = 0$, se e somente se, $\cos(x) \neq 0$. Isso mostra que $x \cos(x) - \operatorname{sen}(x) = 0 \Leftrightarrow x - \operatorname{tg}(x) = 0$.

Analisando o sinal de $x - \operatorname{tg}(x)$.

O gráfico a seguir das funções $y = x$ e $y = \operatorname{tg}(x)$ nos auxiliaram no estudo de sinal.

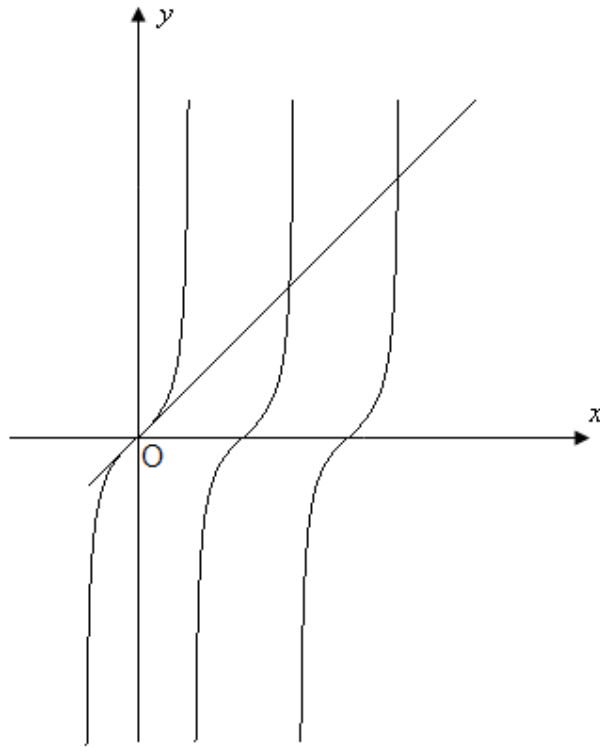


Figura 5

Para determinarmos as raízes de $z = x \cos(x) - \text{sen}(x)$ em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, consideremos

$w = x - \text{tg}(x)$, portanto $w' = 1 - \sec^2(x) \leq 0$, ou seja, w é decrescente e como $w(0) = 0$,

o sinal de w em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é:

$$\begin{array}{c} + \quad - \\ | \quad | \quad | \\ -\frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Assim em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a função w tem somente 0 como raiz.

Agora, sejam x_1, x_2, x_3, \dots as abscissas das interseções de $y = x$ e $y = \text{tg}(x)$, que são as raízes de $x - \text{tg}(x) = 0$, conforme figura 6.

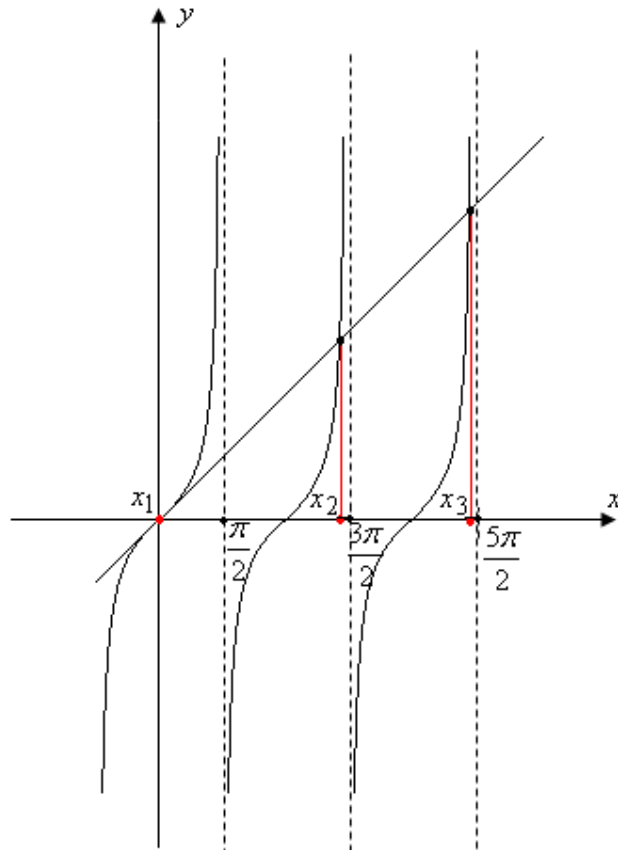
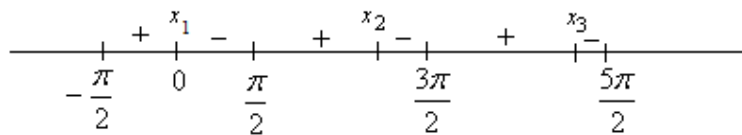
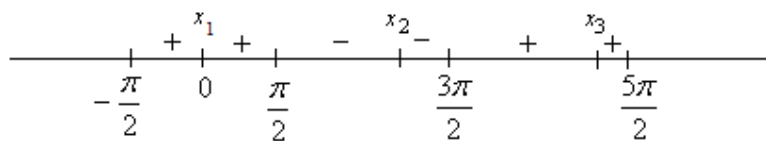


Figura 6

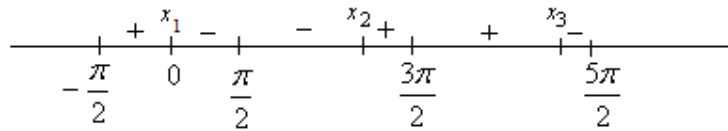
Analisando o estudo de sinal no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e a posição relativa da reta de equação $y = x$ e da curva $y = tg(x)$, obtemos os seguintes sinais de $w = x - tg(x)$:



Agora, para analisar o sinal de $z = w \cos(x) = x \cos(x) - \text{sen}(x)$, estudaremos o sinal de $\cos(x)$



Portanto, o sinal de $z = x \cos(x) - \operatorname{sen}(x) = \cos(x)(x - \operatorname{tg}(x))$, para $\cos(x) \neq 0$ é:



Desse estudo podemos observar que x_1, x_3, \dots, x_{n+1} , são pontos de máximos locais de z .

Vejamos:

$$\frac{3\pi}{2} < x_3 < \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{7\pi}{2} < x_5 < \frac{9\pi}{2}$$

$$\frac{11\pi}{2} < x_7 < \frac{13\pi}{2}$$

Portanto, temos: $(4n-1)\frac{\pi}{2} < x_{2n+1} < (4n+1)\frac{\pi}{2}$, com $n \geq 1$

$$2n\pi - \frac{\pi}{2} < x_{2n+1} < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{x_{2n+1}} < \frac{\operatorname{sen}(x_{2n+1})}{x_{2n+1}} < \frac{\operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{x_{2n+1}}, \text{ com } x_{2n+1} > 0$$

Como vimos que a função z é decrescente no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, o maior valor que ela admite é no ponto 0, que é igual 1, portanto este é o máximo local.

Podemos observar também que x_2, x_4, \dots, x_{2n} , são pontos de mínimo locais, pois estão nos intervalos especificados abaixo e são os pontos em que z muda de sinal.

$$\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} < x_4 < \frac{7\pi}{2}$$

$$\frac{9\pi}{2} < x_6 < \frac{11\pi}{2}$$

Portanto, temos: $(4n+1)\frac{\pi}{2} < x_{2n} < (4n-1)\frac{\pi}{2}$, com $n \geq 0$

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} < x_{2n} < 2n\pi - \frac{\pi}{2}$$

✓ Estudo do sinal da segunda derivada e o comportamento da função.

Segunda derivada de $f(x)$:

$$\text{Para } x \neq 0 \text{ temos } f''(x) = \frac{-x^2 \operatorname{sen}(x) - 2x \cos(x) + 2 \operatorname{sen}(x)}{x^3}.$$

O procedimento a seguir nos permite verificar a existência de $f''(0)$.

Temos,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cos(h) - \operatorname{sen}(h)}{h^2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cos(h) - \operatorname{sen}(h)}{h^3} \end{aligned}$$

Utilizando a regra de L'Hôpital, obtemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cos(h) - \operatorname{sen}(h)}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - h \operatorname{sen}(h) - \cos(h)}{3h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}(h)}{3h}$$

Utilizando a regra de L'Hôpital novamente, obtemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}(h)}{3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\cos(h)}{3} = -\frac{1}{3}.$$

E daí concluímos que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = -\frac{1}{3}$ e podemos concluir que $f''(0)$ existe e

é igual a $-\frac{1}{3}$.

$$\text{Portanto } f''(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 \operatorname{sen}(x) - 2x \cos(x) + 2 \operatorname{sen}(x)}{x^3}, & x \neq 0 \\ -\frac{1}{3}, & x = 0 \end{cases}$$

Estudo do sinal de $f''(x)$

Considerando $u = -x^2 \operatorname{sen}(x) - 2x \cos(x) + 2 \operatorname{sen}(x)$ e $u' = -x^2 \cos(x)$, temos que

$u(0) = 0$ e $u' = -x^2 \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com k inteiro. Dessa maneira temos:

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} + 2 < 0;$$

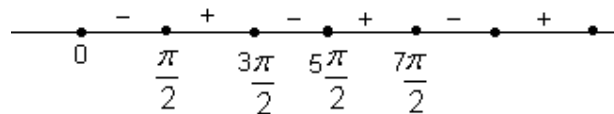
$$u\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{9\pi^2}{4} - 2 > 0;$$

$$u\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -\frac{25\pi^2}{4} + 2 < 0;$$

$$u\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \frac{49\pi^2}{4} - 2 > 0;$$

Isto é, $u\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = \begin{cases} \text{negativo se } n \text{ é par} \\ \text{positivo se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

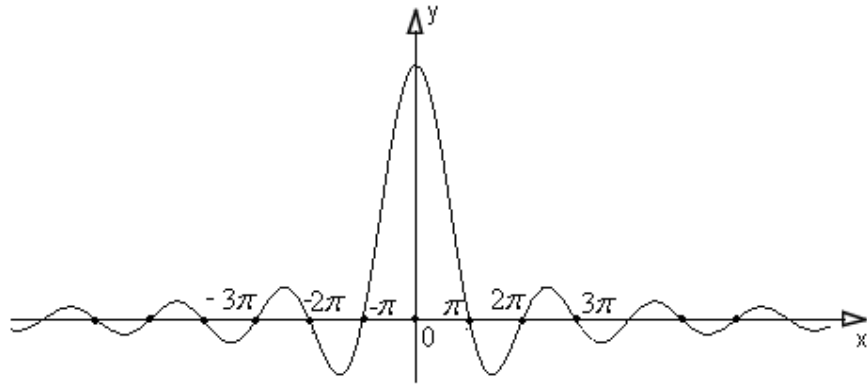
Portanto o sinal de $u' = -x^2 \cos(x)$ é:



Isso nos permite estudar as regiões em que o gráfico de f é côncavo para cima ou para baixo.

Esboço do gráfico da função $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Cumprida as etapas propostas no início do Capítulo 3 obtemos o seguinte esboço para o gráfico $y = f(x)$.



CONCLUSÃO

Este trabalho tinha como objetivo inicial demonstrar de diferentes maneiras que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1$. Todas essas demonstrações são simples de serem realizadas e, na minha opinião, poderiam ser apresentadas para os alunos durante os cursos de cálculo. Eu mesma só conhecia a demonstração denominada como clássica, que é geralmente encontrada nos livros de cálculo.

Ao desenvolver o trabalho, surgiu a idéia de esboçar o gráfico da função

$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$, e então nos deparamos com algumas dificuldades, para

contorná-las, utilizamos vários artifícios, o que fez com que eu precisasse utilizar diversos conteúdos de cálculo. Portanto, a elaboração desta monografia foi extremamente importante para rever e consolidar determinados conteúdos que foram vistos durante minha graduação e pós-graduação, além de ser uma nova experiência.

Espero que esta possa ser utilizada por outros alunos, e possa também auxiliá-los durante o processo de pesquisa e elaboração de seus trabalhos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Gearhart, W.B.; Shultz, H.S. The Function $\frac{\sin(x)}{x}$. The College Mathematics Journal, March 1990, Volume 21, Number 2, p. 90-99.

[2] Simmons, G. F., Cálculo com Geometria Analítica, vol. 1, Makron Books do Brasil Editora Ltda, S. P., 1987, p.