

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**

Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

Natália de Lima Silva

**CARACTERIZAÇÃO DE UMA CURVA CONVEXA PELA CURVATURA**

Belo Horizonte - MG  
2011

Natália de Lima Silva

## **CARACTERIZAÇÃO DE UMA CURVA CONVEXA PELA CURVATURA**

Monografia apresentada para conclusão do curso de Especialização em Matemática para professores com ênfase em Cálculo da Universidade Federal de Minas Gerais.

Orientador: Alberto Berly Sarmiento

Belo Horizonte - MG  
2011

Dedico este trabalho aos meus familiares pela paciência e compreensão em minha ausência e a todos que de alguma forma ajudaram-me a concretizá-lo.

Agradeço a todos que me apoiaram nessa caminhada principalmente a Deus, meus familiares, meus amigos, meus professores, meu orientador Sarmiento pela colaboração na execução deste trabalho. Esta conquista é resultado de nosso trabalho. Obrigada a todos.

*“Você não pode ensinar nada a um homem. Você pode apenas ajudá-lo a encontrar a resposta dentro dele mesmo.”*

***(Galileu Galilei)***

## Sumário

### INTRODUÇÃO

<b>1. CONCEITOS BÁSICOS .....</b>	<b>8</b>
1.1 CURVAS PLANAS PARAMETRIZADAS .....	8
1.1.1 A CICLÓIDE .....	11
1.1.2 A HIPOCICLÓIDE .....	14
1.2 REPARAMETRIZAÇÃO .....	16
1.3 CAMPO DE VETORES.....	17
1.4 CURVAS DIFERENCIÁVEIS.....	17
1.5 COMPRIMENTO DO ARCO.....	19
1.6 CURVATURA DE UMA CURVA PLANA.....	24
<b>2. CURVAS CONVEXAS .....</b>	<b>31</b>
2.1 CARACTERIZAÇÃO DA CONVEXIDADE PELA 2ª DERIVADA.....	31
2.2 CARACTERIZAÇÃO LOCAL DA CURVA CONVEXA PELA CURVATURA.....	35
2.3 ÍNDICE DE ROTAÇÃO, TEOREMA DE JORDAN E TEOREMA DO MÁXIMO E MÍNIMO GLOBAL PARA FUNÇÕES CONTÍNUAS .....	42
2.4 CARACTERIZAÇÃO GLOBAL DA CURVA CONVEXA PELA CURVATURA.....	46

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA

## INTRODUÇÃO

Este tema foi escolhido na busca de um melhor entendimento sobre o assunto. Dentro da Teoria de Curvas Planas da Geometria Diferencial encontramos o teorema das Curvas Convexas.

Esta monografia está organizada em dois capítulos. No primeiro, faz-se uma introdução dos conceitos básicos que serão necessários ao longo deste trabalho, tais como: curvas planas parametrizadas, exemplos como a cicloide e a hipocicloide; reparametrização, curvas diferenciáveis, comprimento do arco e curvatura de uma curva. No segundo capítulo, faz-se um estudo detalhado sobre curvas convexas apresentando uma caracterização local e global pela curvatura.

# Capítulo 1

## 1 CONCEITOS BÁSICOS

### 1.1 Curvas Planas Parametrizadas

Seja  $I$  um intervalo da reta  $\mathbb{R}$  (eventualmente  $I = \mathbb{R}$ ). Uma *parametrização* é uma aplicação contínua  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . A variável  $t \in I$  é chamado *parâmetro* de  $f$ . A imagem de  $f$ ,  $\text{Im } f = \{q \in \mathbb{R}^2; q = f(t), t \in I\}$ , é chamada de *arco parametrizado*. Arcos parametrizados são também chamados traços.

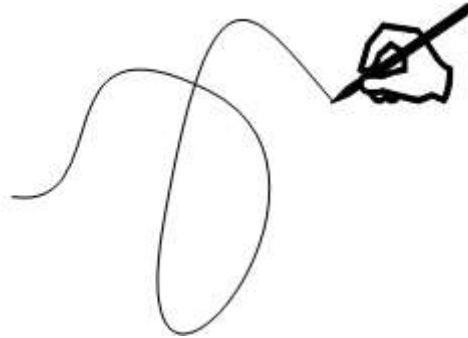


Figura 1: Um arco parametrizado pode ser definido, simplesmente como uma figura “desenhada” com um único traço, sem tirar o lápis do papel.

É importante ressaltar que escrever curvas na forma parametrizada na maioria das vezes, torna-se bem conveniente, pois através dessas equações as explorações das propriedades geométricas e físicas tornam-se mais simplificadas.

Algumas curvas definidas por equações paramétricas  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$  podem ser expressas pela eliminação do parâmetro, na forma  $k = F(x,y)$  na qual denominamos de *equação cartesiana*.

**Exemplo 1:** A elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  pode ser parametrizada fazendo-se as seguintes considerações:



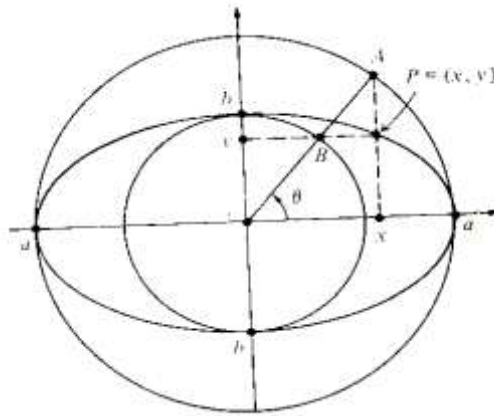


Figura 2: Elipse

Como  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  existe um ângulo  $\theta$  tal que  $\cos \theta = \frac{x}{a}$  e  $\sin \theta = \frac{y}{b}$ ; logo:

$x = a \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$  (**equações paramétricas**).

Quando  $\theta$  varia de 0 a  $2\pi$ , o ponto  $P = (x, y)$  parte de  $(a, 0)$  e completa uma volta sobre a elipse no sentido anti-horário. Observe que  $\theta$  não é o ângulo central do arco de elipse a ao ponto  $P(x, y)$ .  $\theta$  é o ângulo central subtendido pelos arcos determinados pelo eixo polar e pelos pontos A e B sobre as duas circunferências, uma circunscrita à elipse e a outra inscrita na elipse. P é a interseção da reta vertical por A com a reta horizontal por B.

■

Diz-se que um ponto qualquer  $q \in \text{Im } f$  é duplo se existe dois parâmetros  $t_1$  e  $t_2$  em  $I$ , com  $t_1 \neq t_2$ , tais que  $f(t_1) = f(t_2) = q$  (figura 3). Um ponto *triplo* é um ponto  $q$  tal que  $f(t_1) = f(t_2) = f(t_3) = q$ , com  $t_1 \neq t_2 \neq t_3$  e assim sucessivamente (figura 4). Portanto um ponto de *multiplicidade finita* é um ponto  $q \in \text{Im } f$  caracterizado por um conjunto finito de parâmetros distintos nos quais  $f$  assume o valor  $q$ . Diz-se que  $q \in \text{Im } f$  é simples se existe um único  $t \in I$  tal que  $f(t) = q$ .

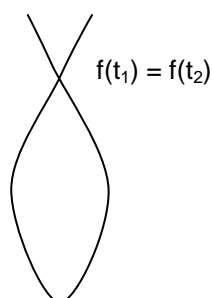


Figura 3: Ponto Duplo

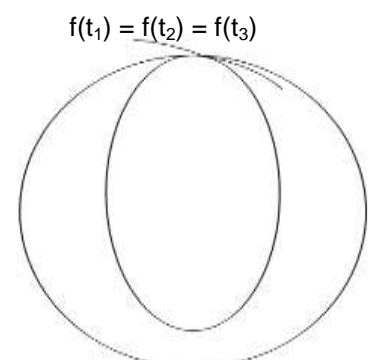


Figura 4: Ponto Triplo

Um arco parametrizado simples é constituído de pontos simples, isto é, o arco de uma curva não possui interseção. Isto ocorre se  $f$  for uma parametrização injetora (e, portanto  $f: I \rightarrow \text{Im}(f)$  é bijetora). Diz-se que  $f$  é uma curva simples ou sem auto-interseções.

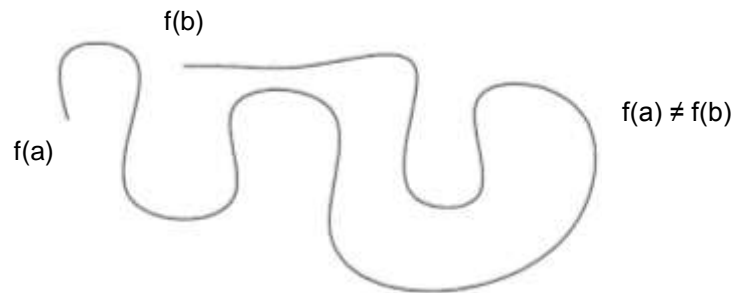


Figura 5: Arco parametrizado simples.

O domínio  $I \subset \mathbb{R}$  pode ser um intervalo fechado  $I = [a, b]$  caso  $f(a), f(b)$  são as extremidades do arco. Uma curva é dita fechada, se as extremidades coincidem, isto é,  $f(a) = f(b)$ .

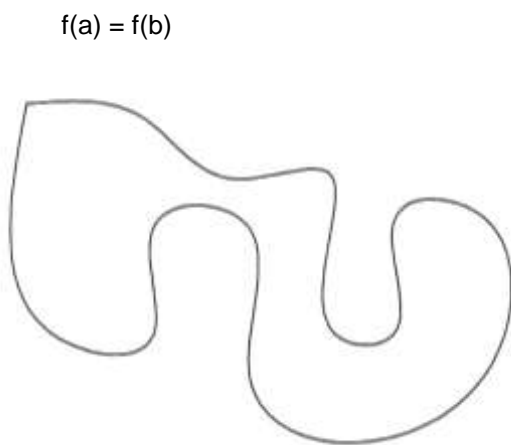


Figura 6: Arco parametrizado fechado simples.

$f(a) = f(b) = f(c) = f(d)$

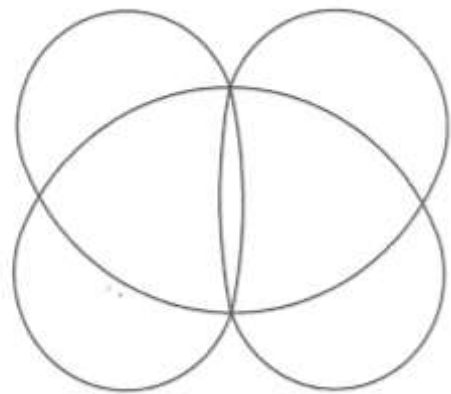


Figura 7: Arco parametrizado fechado.

**Exemplo 2:** A parametrização  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  tem como traço o círculo  $C$  de centro na origem do plano, raio  $r$  e extremidades iguais,  $f(0) = f(2\pi)$ . O círculo  $C$  é um exemplo de arco parametrizado fechado do plano que admite outras parametrizações. Por exemplo:  $g(u) = (r \cos(u), r \sin(u))$ ,  $u \in [2\pi, 4\pi]$

$$\pi] \text{ e } h(v) = \left( r \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, r \frac{2t}{t^2 + 1} \right), \text{ onde } t \in \mathbb{Q}.$$

Verificaremos se a equação acima é realmente um círculo de fórmula  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$

$$\left( r \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right)^2 + \left( r \frac{2t}{t^2 + 1} \right)^2 = r^2 \left[ \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^4 + 2t^2 + 1} + \frac{4t^2}{t^4 + 2t^2 + 1} \right] = r^2 \left( \frac{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2}{t^4 + 2t^2 + 1} \right) = r^2 \left( \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^4 + 2t^2 + 1} \right) = r^2$$

■

### 1.1.1 Ciclóide

A cicloide é a curva traçada por um ponto fixo  $P$  da circunferência de um círculo quando este rola, sem deslizar, por uma reta com velocidade uniforme.

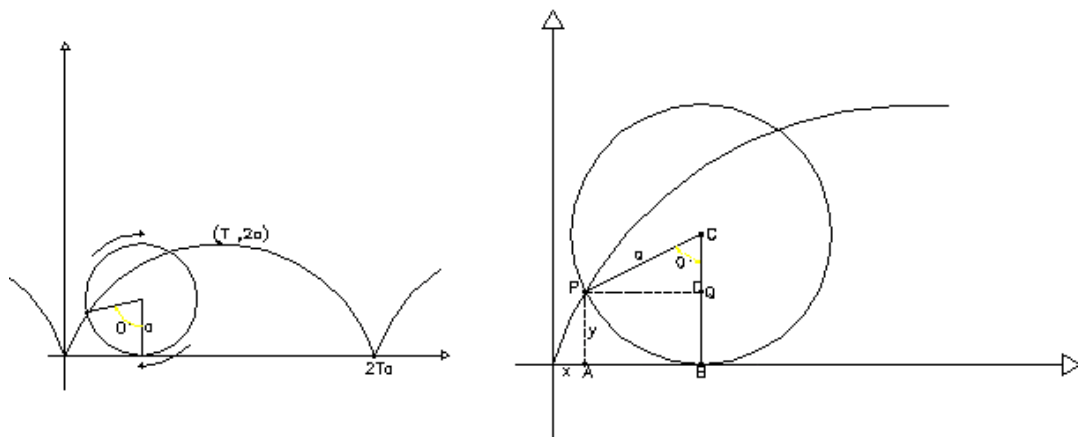


Figura 8: A cicloide traçada por um ponto da circunferência quando o círculo rola por uma reta.

As propriedades geométricas da Cicloide foram, ao longo dos tempos, inspirações de grandes matemáticos da história, começando por Galileu em 1600, o primeiro a notar a cicloide e a investigar suas propriedades. Ele, na verdade, não descobriu quaisquer dessas propriedades, mas deu à curva seu nome e recomendou seu estudo a seus amigos, incluindo Mersenne que informou a Descartes que descobriu, em 1638, uma construção para a tangente à cicloide. Em 1644, o discípulo de Galileu,

Toricelli (que inventou o barômetro), publicou sua descoberta da área sob o arco. O comprimento do arco de cicloide foi descoberto em 1658 pelo grande arquiteto inglês Christopher Wren. (*Simmons, George F., 1925-Cálculo com geometria analítica vol.2 pag. 260*).

O único modo conveniente de representar uma cicloide é por meio de equações paramétricas. Para obtermos as equações paramétricas da cicloide, admitamos que a reta  $s$  é o eixo -  $OX$ ; o círculo  $C$  inicia o movimento com centro no ponto  $(0; r)$ ; o ponto  $P$  coincide com a origem do sistema de coordenadas no início do movimento.

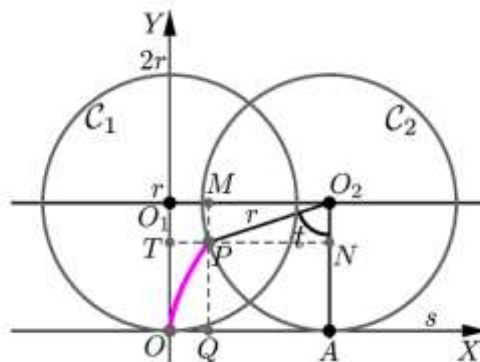


Figura 9: Desenvolvimento da cicloide.

De acordo com a Figura 9,  $O_1$  e  $O_2$  são os centros de  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente;  $P = (x, y)$  o ponto da cicloide em  $C_2$ ;  $A$  é o ponto em que  $C_2$  toca o eixo -  $OX$ ;  $Q = (x, 0)$  e  $T = (0, y)$  as projeções ortogonais de  $P$  sobre os eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente;  $M$  e  $N$  as projeções ortogonais de  $P$  sobre  $O_2O_1$  e  $O_2A$  e  $t$  a medida do ângulo  $A\hat{O}_2P$ , tomada em radianos.

Note que o segmento  $OA$  tem o mesmo comprimento que o arco de  $A$  a  $P$  sobre o círculo  $C_2$ , que consiste dos pontos que já fizeram contato com a reta  $s$ . Como  $t$  é a medida de  $A\hat{O}_2P$ , o comprimento do arco de  $C_2$  de  $A$  a  $P$  que já fez contato com  $s$  é  $rt$ . Logo  $|OA| = rt$ .

Analisando o sinal de  $\sin t$  e  $\cos t$  nos intervalos  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ,  $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ,

vemos que as coordenadas  $x$  e  $y$  de  $P$  são determinadas por meio das seguintes relações, obtendo assim as equações paramétricas da cicloide:

$$x = |OQ| = |OA| - |QA| = |OA| - |O_2M| = rt - r \sin t = r(t - \sin t)$$

$$y = |OT| = |OO_1| - |TO_1| = r - |O_2N| = r - r \cos t = r(1 - \cos t)$$

De acordo com a variação de  $t$ , o movimento será descrito pelas figuras abaixo:

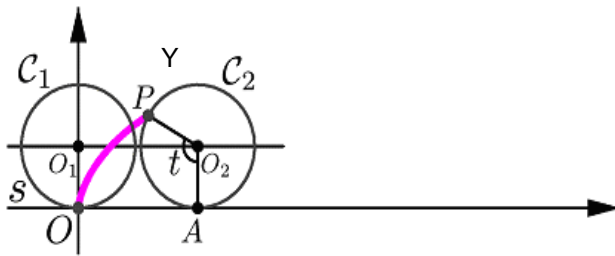


Figura 10:  $t = \frac{2\pi}{3}$

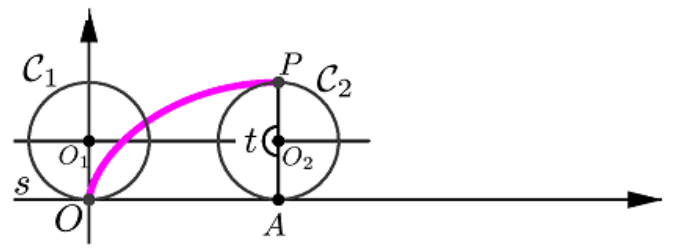


Figura 11:  $t = \pi$

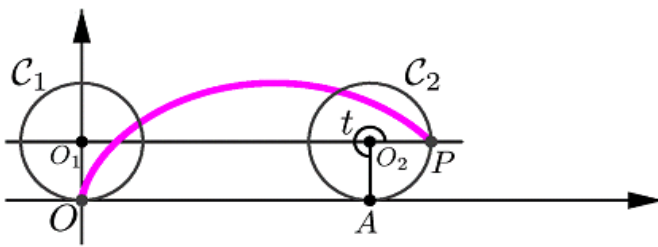


Figura 12:  $t = \frac{3\pi}{2}$

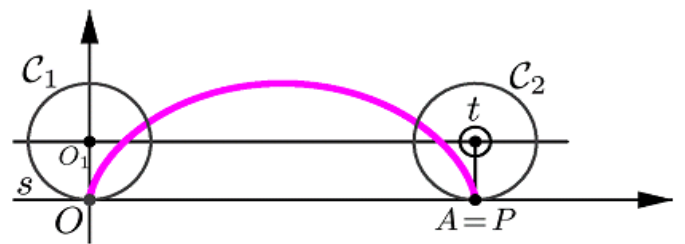


Figura 13:  $t = 2\pi$

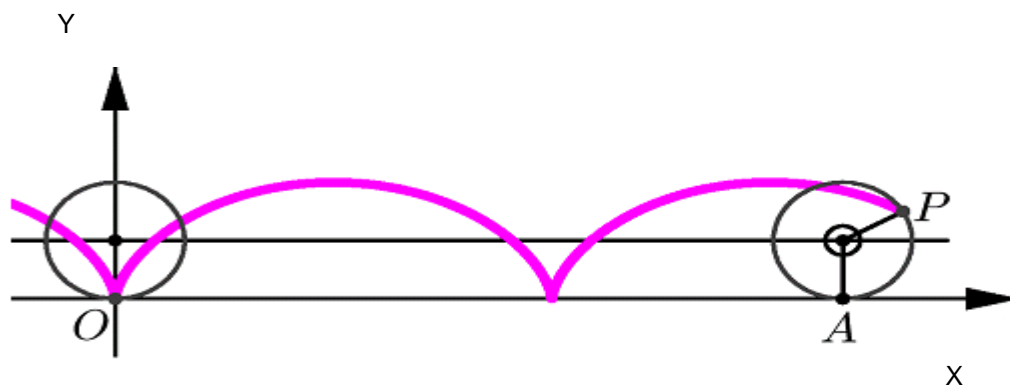


Figura 14: Ciclóide

### 1.1.2 Hipociclóide

A hipociclóide é uma curva cuja construção é semelhante à cicloide, em que o círculo rola na parte interna de uma circunferência fixa. O lugar geométrico de um ponto  $P$  fixo sobre a circunferência rolante chama hipociclóide do grego hipo (sob ou abaixo).

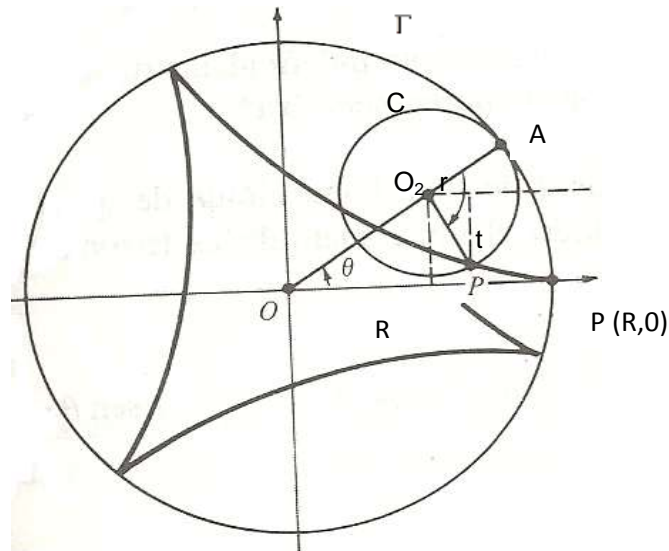


Figura 15: Hipociclóide

Seja  $\Gamma$  um círculo de raio  $R$  com centro na origem  $(0,0)$  e  $C$  um círculo de raio  $r < R$  tangente interno com  $\Gamma$  no ponto  $A$ . O círculo  $C$  rola em cima do círculo  $\Gamma$  iniciando o movimento com centro no ponto  $O_2(R - r, 0)$  e  $P$  com posição inicial de  $P = (R, 0)$ .

Determinemos as coordenadas do ponto  $P = (x,y)$  em termos de um parâmetro, quando  $C$  rola sobre  $\Gamma$  sem deslizar.

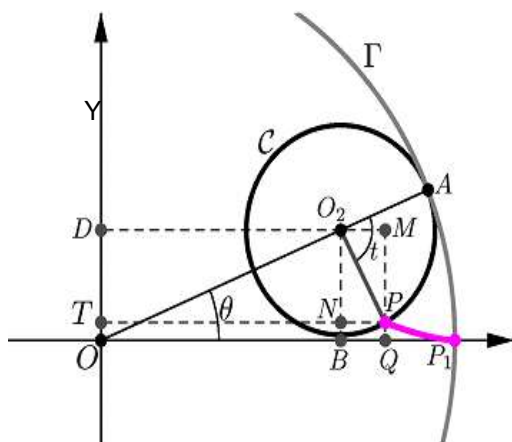


Figura 16: P descrevendo uma hipociclóide.

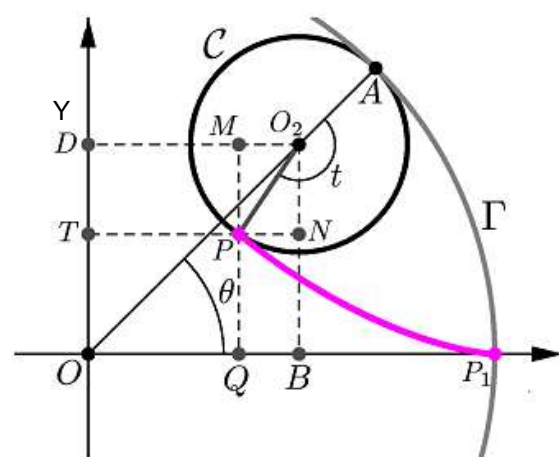


Figura 17: P continuando o movimento.

Acompanhe a Figura 16, a designação dos seguintes elementos: A é o ponto de C que toca  $\Gamma$ ;  $O_2$  o centro de C; B e D as projeções de  $O_2$  sobre os eixos OX e OY;  $Q = (x; 0)$  e  $T = (0; y)$  as projeções de P sobre OX e OY; M e N as projeções de P sobre  $O_2D$  e  $O_2B$ , respectivamente.

Com essas notações, considerando o caso em que B está entre O e Q, mostrado na Figura 16, temos:

$$\begin{aligned}x &= |OQ| = |OB| + |BQ| = |OB| + |O_2M|, \\y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|.\end{aligned}$$

Sabendo que o centro de C descreve um círculo de raio  $R - r$ , e sendo  $\theta$  a medida do ângulo do semi-eixo OX positivo para  $OO_2$ , no sentido anti-horário, obtemos:  $|OB| = (R - r) \cos \theta$  e  $|OD| = (R - r) \sin \theta$ .

Denotando  $t$  a medida do ângulo de  $O_2A$  para  $O_2P$ , no sentido horário, temos:

$$\sphericalangle OO_2P = \pi - t \quad \text{e} \quad \sphericalangle NO_2B = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\text{Logo, } \sphericalangle NO_2B = \frac{\pi}{2} + \theta + \sphericalangle PO_2P = (\theta - t) + \frac{\pi}{2}$$

Portanto, no triângulo-retângulo  $PNO_2$ , temos:

$$\begin{aligned}|BQ| &= r \sin (\sphericalangle NO_2B) = r \sin \left( (\theta - t) + \frac{\pi}{2} \right) = r \cos (\theta - t) = r \cos (t - \theta), \\|O_2N| &= r \cos (\sphericalangle NO_2B) = r \cos \left( (\theta - t) + \frac{\pi}{2} \right) = -r \sin (\theta - t) = r \sin (t - \theta).\end{aligned} \tag{8}$$

Substituindo essas identidades nas relações (8) e que  $t = \frac{R\theta}{r}$ , obtemos as seguintes equações paramétricas da hipociclóide:

$$\begin{aligned}x &= |OB| + |BQ| = (R - r) \cos \theta + r \cos \left( \left( \frac{R-r}{r} \right) \theta \right) \\y &= |OD| - |TD| = (R - r) \sin \theta - r \sin \left( \left( \frac{R-r}{r} \right) \theta \right),\end{aligned} \quad \theta \in \mathbb{R}$$



Considerando  $r \in \mathbb{R}$  e parâmetro, podemos considerar algumas situações:

- Se  $r$  for um número inteiro ( $m$ ), então a hipociclóide tem  $m$  cúspides (pontos onde a curva toca o eixo  $x$ ) e o ponto  $P$  retorna a  $A$  depois que o círculo menor rolar  $m$  vezes sobre a circunferência fixa.
- Se  $r$  for um número irracional  $\left(\frac{m}{n}\right)$  logo a curva terá infinitos números de cúspides.

## 1.2 Reparametrização

Dada uma curva parametrizada  $r: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  com parâmetro  $t$  e um aplicação contínua estritamente crescente ou decrescente  $t: J \rightarrow I$  com variável  $h$  (isto é,  $t = t(h)$ ), então o conjunto  $g(h) = (f \circ t)(h) = f(t(h))$  é chamado uma reparametrização de  $f$ , a função  $t = t(h)$  é chamado de mudança de parâmetros.

Se  $h$  for estritamente crescente, diz-se que a reparametrização  $g$  preserva a orientação. Se  $h$  for estritamente decrescente, diz-se que  $g$  inverte a orientação.

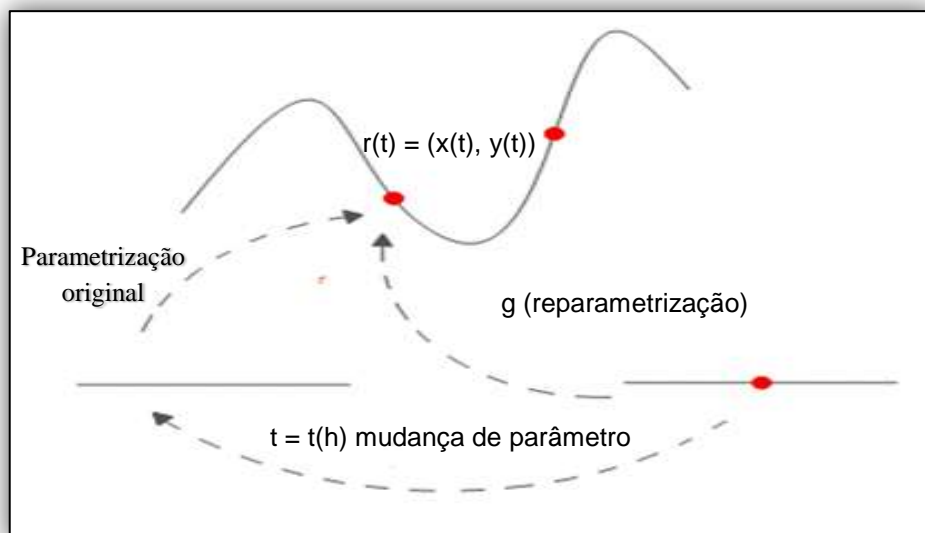


Figura 18: Idéia geométrica de uma reparametrização.



### 1.3 Campo de Vetores sobre Curvas

Intuitivamente, um campo de vetores  $X(t)$  ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação que a cada  $t \in I$  associa um vetor. Paralelamente para efeito de visualizar, vamos a transladar o vetor de modo que sua origem seja  $\alpha(t)$ .

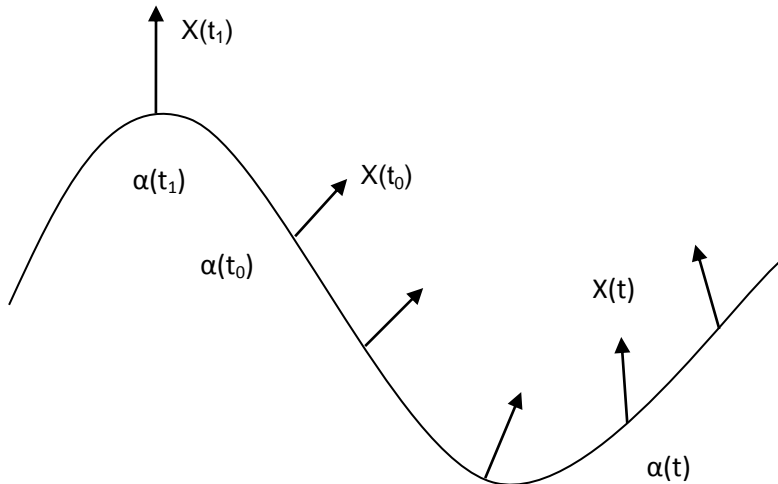


Figura 19: Campo de vetores  $X(t)$  ao longo de uma curva  $\alpha$ .

Um exemplo importante de campo de vetores sobre uma curva  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  que usaremos frequentemente é o campo dado pelos vetores tangentes a curva.

### 1.4 Curvas Diferenciáveis

Uma parametrização  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é diferenciável no ponto  $t_0$  se existe o seguinte limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \neq 0$$

Neste caso o valor do limite denotamos por  $f'(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0)$ .

Uma parametrização  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é “diferenciável”, se  $f$  for diferenciável em todo ponto  $t \in I$ .

Se  $f(t) = (x(t), y(t))$  e é diferenciável no ponto  $t_0$  isto é, existe o limite:

$$\begin{aligned} f'(t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x(t_0 + h), y(t_0 + h)) - (x(t_0), y(t_0))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (x(t_0 + h) - x(t_0), y(t_0 + h) - y(t_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}, \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h} \right) = \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h} \right) = (x'(t_0), y'(t_0)). \end{aligned}$$

Então o limite  $f'(t_0)$  é um vetor do plano  $(x'(t_0), y'(t_0))$ . Assim temos que,  $f = (x, y)$  é diferenciável se, as funções coordenadas  $x(t)$  e  $y(t)$  são diferenciáveis.

Por outro lado se  $f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq 0$  é um vetor não nulo, notemos do quociente de Newton:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h_2) - f(t_0)}{h_2} = f'(t_0)$$

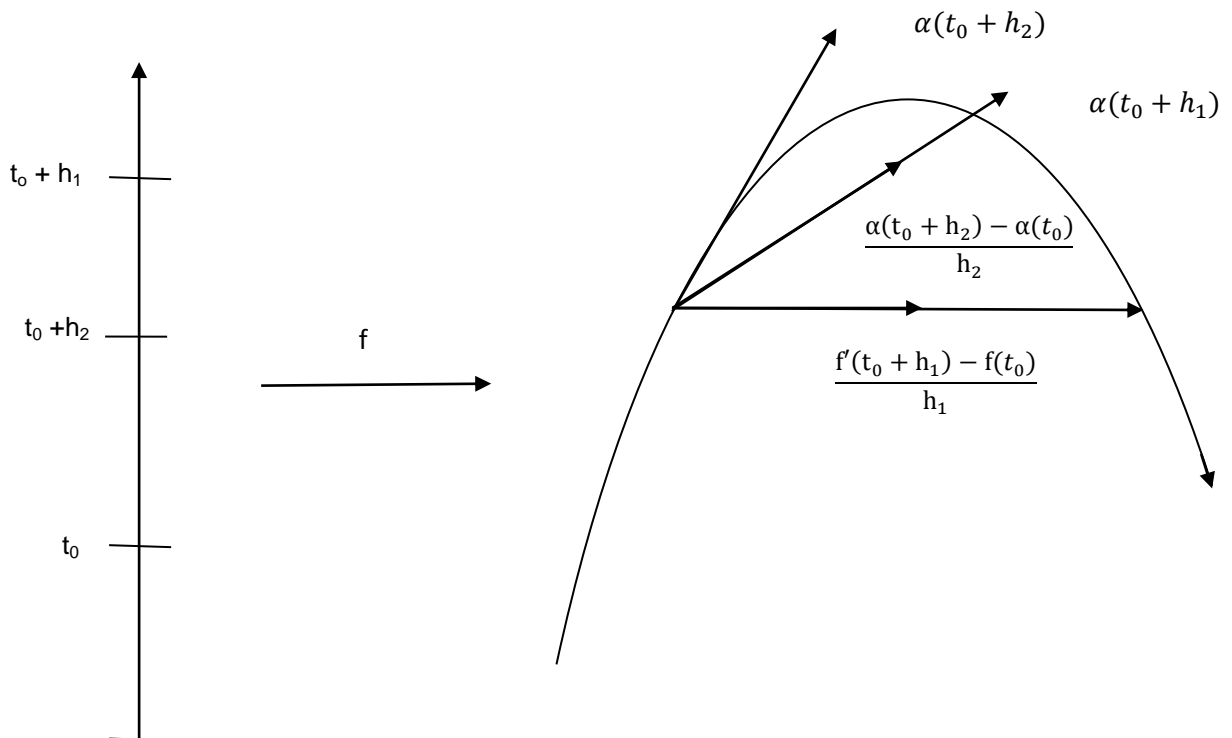


Figura 20: Vetores Direção das Retas Secantes

Os vetores  $\frac{1}{h}(f(t_0+h) - f(t_0))$  são vetores direção das retas secantes que passam por  $\alpha(t_0)$ , à medida que  $h \rightarrow 0$ , isto é,  $t_0 + h$  tende para  $t_0$ , vemos que  $f(t_0+h)$  tende a  $f(t_0)$ , logo as retas secantes que passam por  $\alpha(t_0)$  tendem à reta tangente a curva em  $\alpha(t_0)$  cujo vetor direção será  $f'(t_0)$ . Razão pela qual  $f'(t_0)$  é chamado de vetor tangente à curva no ponto  $f(t_0)$ . Com isto, a equação da reta tangente à curva no ponto  $f(t_0)$  é:

$$T(\tau) = f(t_0) + \tau f'(t_0)$$

Uma Parametrização é dita regular se o vetor tangente é não nulo em todo ponto.

### 1.5 Comprimento Do Arco

Seja  $C$  uma curva regular plana, parametrizada por  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  e consideremos uma seqüência de pontos  $a = t_0, t_1, \dots, t_n = b \in I \subset \mathbb{R}$ . Então  $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n) \in C = f(I)$  é uma seqüência de pontos que determina uma linha poligonal inscrita na curva. Na medida em que formos subdividindo o intervalo  $[a, b]$  com mais pontos, mais poligonal se aproxima da curva. Representemos  $f(t)$  pelo par  $(x(t), y(t))$ . Então as imagens da subdivisão são os pontos  $(x(t_i), y(t_i))$ , que por simplicidade denotaremos por  $(x_i, y_i)$ , e o seu comprimento é  $|\sum_{i=1}^n (x_i, y_i) - (x_{i-1}, y_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ .

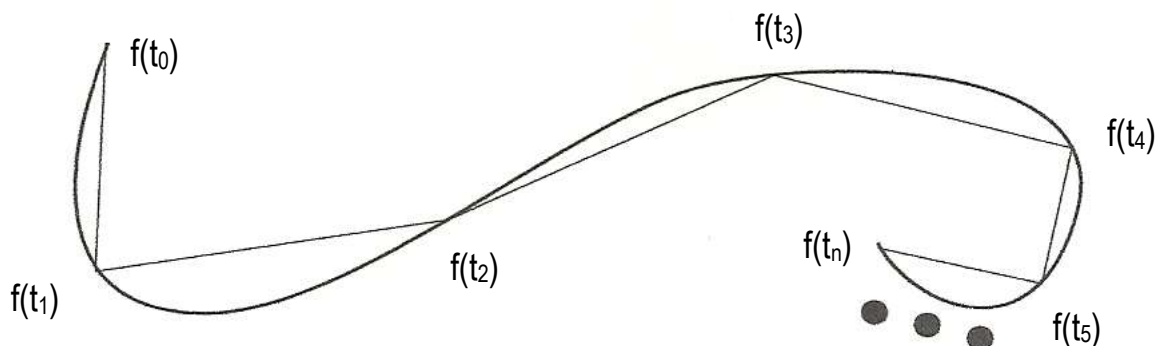


Figura 21: Comprimento do Arco.

A curva  $f$  é contínua e diferenciável no intervalo  $I$ , donde o mesmo ocorre para as funções coordenadas  $(x(t), y(t))$ . Logo podemos aplicar o “Teorema do Valor Médio” que diz que: *se uma função  $g$  é contínua no intervalo fechado  $[a,b]$  e derivável no intervalo aberto  $(a, b)$ , então, existirá um número  $c$  no intervalo aberto  $(a,b)$ , tal que:*

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Assim aplicando o TVM (Teorema do Valor Médio) em cada somando e em cada coordenada temos:

$$f_x = x(t), y(t)$$

$$x'(c_i) = \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})}$$

$$x_{t_i} - x_{t_{i-1}} = (t_i - t_{i-1}) x'(\varepsilon_i) \quad \text{e} \quad y_{t_i} - y_{t_{i-1}} = (t_i - t_{i-1}) y'(\eta_i).$$

Denotando  $t_i - t_{i-1} = \delta_i > 0$  tem-se que o comprimento é dado por:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{[(x'(\varepsilon_i))^2 + (y'(\eta_i))^2]} \delta_i^2$$

Vamos a considerar poligonais com um número cada vez maior de pontos, isto é, vamos a calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{[(x'(\varepsilon_i))^2 + (y'(\eta_i))^2]} \delta_i$$

Se  $\delta$  é o valor máximo dos  $\delta_i$ , como a derivada é contínua, então novamente do Cálculo sabe-se que o limite quando  $\delta$  tende a zero (ou seja,  $n \rightarrow \infty$ ) se existe, é

chamado a integral de  $a$  até de  $b$ , da forma:  $s = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$

*comprimento do arco.* ■

**Exemplo 3:** O comprimento de um arco da cicloide é quatro vezes o diâmetro do círculo rolante.

Como  $t(\theta) = a(t - \sin t)$ , então  $x'(t) = a(1 - \cos t) dt$  e  $y = a(1 - \cos t)$ . Logo  $y'(t) = a \sin t dt$  o elemento de comprimento do arco é dado por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = a^2 [(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t] dt^2 = 2a^2 [1 - \cos t] dt^2 = \\ &= 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2} t dt^2. \end{aligned}$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2}t\right)} dt.$$

O comprimento de um arco é, portanto,  $L = \int ds = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{1}{2} \theta d\theta = -4a \cos \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = 8a$

■

**Definição 1:** Seja  $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização regular da curva  $C$ . Para todo  $t \in [a, b]$ , associamos  $s(t)$  o comprimento da curva correspondente ao intervalo  $[a, t]$ , isto é:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du.$$

Assim a função  $s: I \rightarrow I$  é denominado função do comprimento do arco.

Lembrando que o produto escalar:

$$\langle (u, v), (w, z) \rangle = uw + vz$$

Como:  $f(u) = (x(u), y(u))$  e  $f'(u) = (x'(u), y'(u))$  então:

$$\langle f'(u), f'(u) \rangle = \langle (x', y'), (x', y') \rangle = x'(u)^2 + y'(u)^2$$

⇒ Assim podemos escrever na forma vetorial

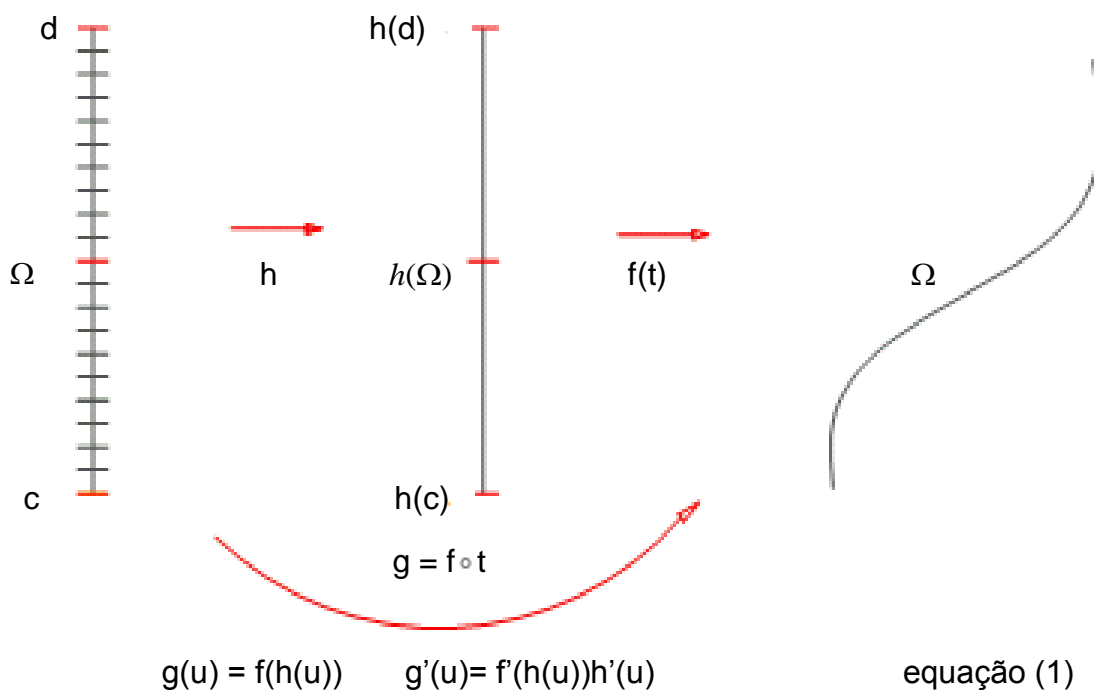
$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du = \int_a^t \sqrt{\langle f'(u), f'(u) \rangle} du = \int_a^t \|f'(u)\| du$$

**Definição 2:** A Parametrização  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma parametrização pelo comprimento do arco (PPCA) se para todo  $t \in [a,b] \in I$ ,

$$s(t) = \int_a^t \|f'(u)\| du = t - a$$

**Teorema 1.** Seja  $C$  uma curva regular. Então a função comprimento de arco, a menos do sinal independe da parametrização escolhida.

**Demonstração:**



O comprimento do arco  $\alpha$  com parametrização  $g$  é:  $s = \int_c^d \|g'(u)\| du =$  equação

(1), logo:  $s = \int_c^d \|f'(h(u))h'(u)\| du$ . Como  $h'(u) = \frac{dt}{du}$ , então temos:

$\int_c^d \left\| f'(t) \frac{dt}{du} \right\| du = \int_c^d \|f'(u)\| dt = \int_{h(c)}^{h(d)} \|f'(t)\| dt = s =$  comprimento do arco  $\alpha$  com parametrização  $f$ .

**Teorema 2** Uma parametrização regular  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  da curva  $C$  é parametrizada pelo comprimento do arco se, e somente se,  $\|f'(t)\| = 1$  para todo  $t \in I$ .

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Supondo que  $f$  é uma parametrização pelo comprimento do arco para todo  $t$ .

$$\int_a^t \|f'(u)\| du = t - a$$

Derivando temos para todo  $t$ :

$\frac{d}{dt} \int_a^t \|f'(u)\| du = \frac{d}{dt} (t-a)$ , pelo Teorema Fundamental do Cálculo, logo  $\|f'(t)\| = 1$ , para todo  $t$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $\|f'(t)\| = 1$ . Vamos calcular o comprimento do arco entre  $a$  e  $t$ .

$\int_a^t \|f'(u)\| du$ , substituindo temos:  $\int_a^t du = t - a$  logo pela definição a curva  $C$  está parametrizada pelo comprimento do arco.

■

**Teorema 3** Seja  $C$  uma curva regular. Então  $C$  sempre pode ser parametrizada pelo comprimento do arco.

**Demonstração:** De fato, se  $f$  é uma parametrização de  $C$ , como,  $s(t) = \|f'(t)\| > 0$ , a função comprimento do arco  $s(t) = \int_a^t \|f'(u)\| du$  derivando com relação a  $t$  e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo temos:  $s'(t) = \|f'(t)\|$ , como  $f$  é parametrização regular  $\|f'(t)\| > 0$ . A função  $s(t)$  é estritamente crescente. Então  $s = s(t) \rightarrow t = t(s)$ , portanto a função comprimento do arco é invertível logo  $r \circ s(t) = t$  para todo  $t$ .

Devido:

$$(r \circ s)'(t) = \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{dr}{ds} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} = \frac{1}{\|f'(t)\|} > 0$$

Seja  $g = f \circ r$  a reparametrização de  $C$  e  $r$ , e  $s$  o parâmetro definido pela função  $s$ , isto é, colocamos  $s = s(t)$ . Então,  $g'(s) = f'(r(s)) r'(s) = f'(t) r'(s)$ , ou seja,

$$\left| \frac{dg}{ds} \right| = \left| \frac{df}{dt} \cdot \frac{dr}{ds} \right| = \left| \frac{f'(t)}{f'(t)} \right| = 1$$

Donde o teorema acima  $C$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

**Exemplo 4:** Consideremos uma elipse parametrizada por  $f(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ . Então  $|f'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 1$ .

Observemos que a elipse não está parametrizada pelo comprimento do arco. Vamos à parametrizar pelo comprimento do arco

$$s = \int_0^t |f'(u)| du = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = t \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ vamos inverter } t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Logo a elipse parametrizada pelo comprimento do arco

$$g(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

■

## 1.6 Curvatura De Uma Curva Plana

Na seção anterior vimos que toda curva regular do plano pode ser parametrizada pelo comprimento do arco (teorema 3). Consideremos uma curva regular

$$f(s) = (x(s), y(s)), s \in I,$$

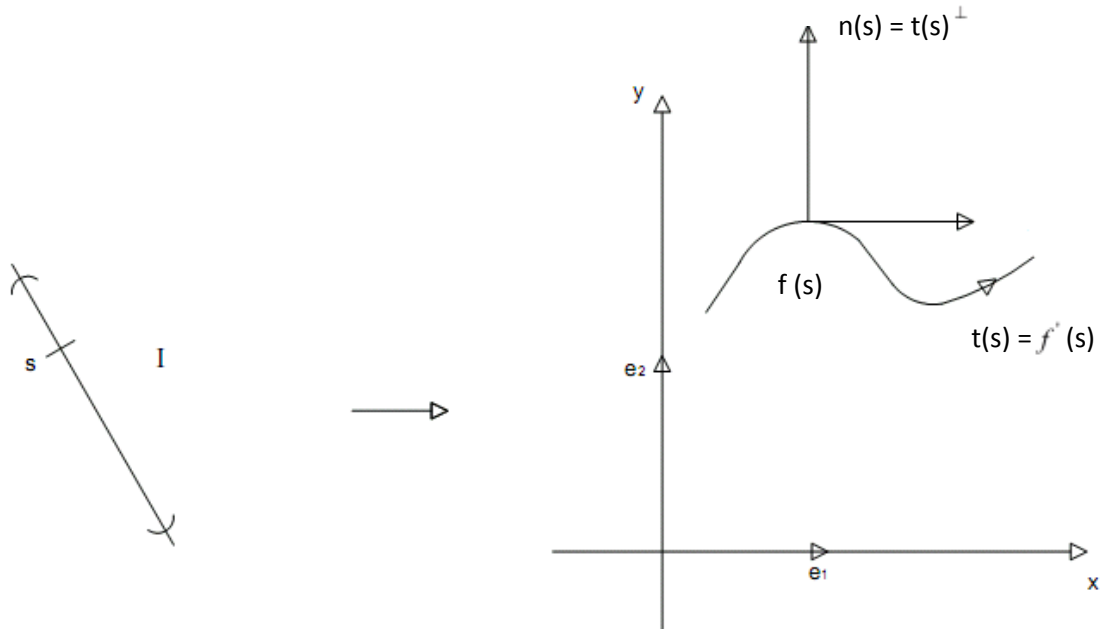
parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . Para cada  $s \in I$ ,  $f'(s)$  é um vetor unitário

( $\|f'(s)\| = 1$ ), isto é:

$$f'(s) = (x'(s), y'(s)).$$



Seja  $n(s) = f'(s)^\perp = (-y'(s), x'(s))$  o vetor unitário ortogonal a  $f'(s)$ , pois  $f'(s) \cdot f'(s)^\perp = 0$



O conjunto de vetores  $f'(s)$  e  $n(s)$  é dito *referencial de Frenet* da curva  $\alpha$  em  $s$ .

Como  $f'(s)$  é unitário então:

$$\|f'(s)\| = 1 \Rightarrow \|f'(s)\|^2 = 1 \Rightarrow \langle f'(s), f'(s) \rangle = 1.$$

Derivando esta última igualdade, temos que:

$$\langle f'', f' \rangle + \langle f', f'' \rangle = 0 \Rightarrow 2 \cdot \langle f'', f' \rangle = 0 \Rightarrow \langle f'', f' \rangle = 0 \Rightarrow f'(s) \perp f''(s).$$

Segue-se que  $f''(s)$  é ortogonal a  $f'(s)$  e, portanto  $f''(s)$  é paralelo a  $n(s)$  logo  $f''$  é proporcional a  $n(s)$ . Este fator de proporcionalidade, denotado por  $k(s)$ , é chamado *curvatura* de  $\alpha$  em  $s$ , isto é,

$$f''(s) = k(s)n(s).$$

Considerando a curva  $f(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$ , multiplicando escalarmente  $n(s)$  na equação anterior temos:

$$\langle f''(s), n(s) \rangle = \langle k(s) \cdot n(s), n(s) \rangle = k(s) \underbrace{\langle n(s), n(s) \rangle}_{\substack{= \\ 1}} = k(s)$$

Donde:

$$k(s) = \langle f'', n \rangle = \langle (x'', y''), (-y', x') \rangle = (x' y'' - y' x'')$$

**Assim:  $k(s) = x' y'' - y' x''$ .**

Analogamente, como  $n(s)$  é unitário, segue-se que  $n'(s)$  é ortogonal a  $n(s)$  e, portanto  $n'(s)$  é proporcional a  $f'(s)$ . Como  $n' = \lambda f'$  temos que:

$$\lambda \langle f', f' \rangle = \langle f', \lambda f' \rangle = \langle n'(s), f'(s) \rangle = -x'(s) y''(s) + x''(s) y'(s) = -k(s),$$

e podemos concluir que:

$$n'(s) = -k(s) f'(s).$$

Seja  $t(s) = f'(s)$ , resumindo o exposto acima, se  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , então o referencial de Frenet  $t(s)$ ,  $n(s)$  satisfaz as equações:

$$\begin{cases} f''(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)f'(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) \end{cases}$$

que são as *fórmulas de Frenet* de uma curva plana.

**Proposição 1:** Seja  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização diferenciável PPCA, definida por  $f(t) = (x(s), y(s))$ . Se  $\theta(s)$  é o ângulo que  $f'(s)$  faz com o eixo  $x$ . Então:

$$K(s) = \theta'(s)$$

$$|k(s)| = \|f''(s)\|$$

**Demonstração:**  $f$  é parametrizado pelo comprimento do arco. Seja  $\theta$  a função ângulo



$$\theta'(s) = \frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2} = \frac{\cancel{(x')^2} \cdot x' \cdot y'' - y' \cdot \cancel{(x')^2} \cdot x''}{((x')^2 + (y')^2)} \text{ onde, } ((x')^2 + (y')^2) = \|f'(s)\|^2 = 1$$

Isso nos dá que:

$$\theta'(s) = \frac{x'(s) \cdot y''(s) - y'(s) \cdot x''(s)}{\|f'(s)\|^2 = 1} = x'(s) \cdot y''(s) - y' \cdot x'' = k(s)$$

$$\theta'(s) = k(s)$$

A segunda igualdade sai de  $f''(s) = k(s) \cdot n(s)$ , aplicando norma

$$\begin{aligned} \|f''(s)\| &= |k(s)| \cdot \|n(s)\| \\ |k(s)| &= \|f''(s)\| \end{aligned}$$

■

### Proposição 2: Curvatura para qualquer parametrização

Seja  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma Parametrização Diferenciável, definida por  $f(t) = (x(t), y(t))$ . Então a curvatura de  $f$  em  $t \in I$  é dada pela expressão:

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^3}}$$

**Demonstração:** Seja  $t_0 \in I$ , arbitrário. Considere  $h: J \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização de  $r$  de modo que  $h$  seja parametrizada pelo comprimento do arco (PPCA). Assim temos que  $r(t_0) = h \circ \Gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ , onde  $\Gamma: I \rightarrow J$ , e  $h(s) = r \circ g(s_0) = (\hat{x}(s_0), \hat{y}(s_0))$  onde  $g: J \rightarrow I$ . Assim temos:

$$r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) = (h' \circ \Gamma(t_0)) \Gamma'(t_0) = \frac{dh}{ds} \Gamma'(t_0)$$

(1.1)

$$e \quad r''(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0)) = (h'' \circ \Gamma(t_0) \Gamma'(t_0)^2 + (h' \circ \Gamma(t_0) \Gamma''(t_0)) = \frac{d^2 h}{ds^2} (\Gamma(t_0))^2 + \frac{dh}{ds} \Gamma''(t_0) \quad (1.2)$$

Sabendo que  $\Gamma'(t_0) > 0$  e utilizando a equação (1.1) podemos concluir que

$$\text{Como } \|h' \circ \Gamma(t_0)\| = 1, \text{ temos que } \Gamma'(t_0) = \|r'(t_0)\| \quad (1.3)$$

Desta forma obtemos:

$$\Gamma'(t_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \left\{ (r'(t) \cdot r'(t))^{\frac{1}{2}} \right\} = \frac{r''(t_0) \cdot r'(t_0)}{\|r''(t_0)\|}$$

Se  $T_h$  o vetor tangente unitário da curva  $h$ . Temos portanto:

$$\frac{dh}{ds}(s_0) = T_h(s_0) = T_h(\Gamma(t_0)) = \frac{dh}{ds}(\Gamma(t_0)) = (1.2) = \frac{r'(t_0)}{\|r'(t_0)\|}$$

Assim a derivada do vetor tangente é dada por

$$T'_h(s_0) = \frac{dT_h}{ds}(T(t_0)) = \frac{d^2 h}{ds^2}(\Gamma(t_0)) = \frac{1}{\Gamma'(t_0)} (r''(t_0) - \Gamma''(t_0) T_h(\Gamma(t_0)))$$

Denote o vetor tangente da curva  $r$  por  $T_r$ . Sabendo que  $r(t) = h \circ \Gamma(t)$ , sendo assim isto implica que  $T_r(t) = (h \circ \Gamma(t)) \Gamma'(t)$ . Logo,

$$\frac{T_r}{\|r'(t)\|} = T_h(\Gamma(t)) = (\hat{x}'(\Gamma(t)), \hat{y}'(\Gamma(t)))$$

Seja  $N_h$  o vetor normal da curva  $h$ . Sabemos que este vetor é dado por:

$$N_h(s_0) = N_h(\Gamma(t_0)) = (-\hat{y}'(\Gamma(t_0)), \hat{x}'(\Gamma(t_0))) = \frac{1}{\|r'(t_0)\|} (-y'(t_0), x'(t_0))$$

De acordo com a definição de curvatura  $T'(s) = k(s) N(s)$ ,  $s \in I$ , temos que:

$$k(s_0) = k(\Gamma(t_0)) = \frac{dT_h}{ds}(\Gamma(t_0))N_h(\Gamma(t_0)). \quad (1.4)$$

Substituindo  $N_h$  e  $\frac{dT_h}{ds}$  em (1.1) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|r'(t_0)\|^2} (r''(t_0) - \Gamma''(t_0)T_h(t_0))N_h(\Gamma(t_0)) &= \frac{1}{\|r'(t_0)\|^2} (r''(t_0)N_h(\Gamma(t_0))) = \\ \frac{1}{\|r'(t_0)\|^2} \left( (x''(t_0), y''(t_0)) \frac{1}{\|r'(t_0)\|^2} (-y'(t_0), x'(t_0)) \right) &= \\ \frac{1}{\|r'(t_0)\|^3} (-y'(t_0)x''(t_0) + x'(t_0)y''(t_0)) &= \\ \frac{x'(t_0)y''(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)}{\|r'(t_0)\|^3} \end{aligned}$$

■

# Capítulo 2

## 2 CURVAS CONVEXAS

### 2.1. Caracterização da Convexidade pela 2ª derivada

A idéia de convexidade (concavidade) aparece no estudo de gráficos de funções reais. O ingrediente principal para este estudo é a segunda derivada.

As figuras abaixo mostram o gráfico de duas funções crescentes no intervalo  $(a,b)$ . Ambos os gráficos unem o ponto A ao B, mas eles são diferentes, pois inclinam-se em direções diferentes. Como distinguir entre esses dois tipos de comportamento?

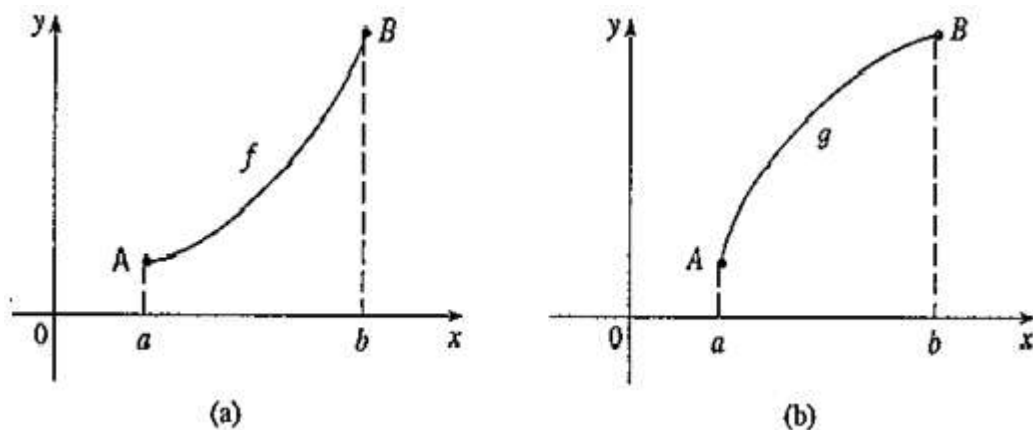


Figura 22: Gráfico de Funções Crescentes com inclinações diferentes

Notemos que na figura (a), traçada a reta tangente ao gráfico da função, o gráfico fica todo no semiplano superior definido pela tangente, neste caso dizemos que a curva é **côncava para cima** ou podemos dizer que a curva é **convexa para baixo**.

Notemos que na figura (b), traçada a reta tangente ao gráfico da função, o gráfico fica todo no semiplano inferior definido pela tangente, neste caso dizemos que a curva é **côncava para baixo** ou podemos dizer que a curva é **convexa para cima**.

Por uma convenção histórica ficaremos nesta seção com o conceito de

“concavidade”.

A figura 23 mostra o gráfico de uma função que é côncava para cima nos intervalos  $(b,c)$ ,  $(d,e)$  e  $(e,p)$ , e côncava para baixo nos intervalos  $(a,b)$ ,  $(c,d)$  e  $(p,q)$ .

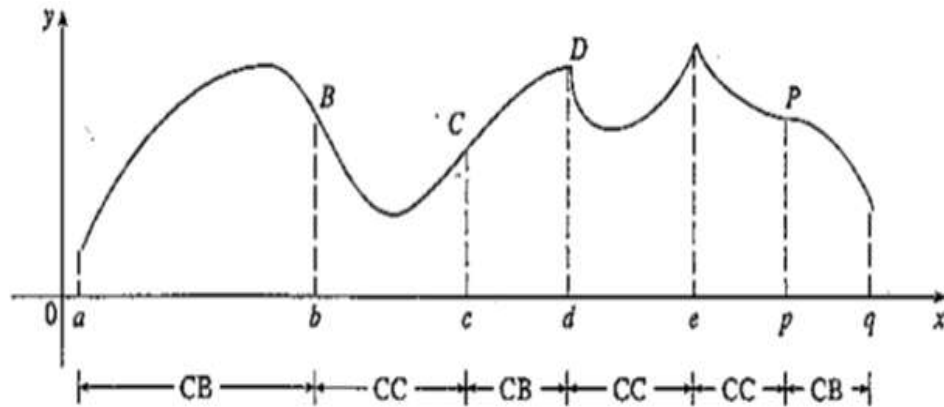


Figura 23: Curva Côncava.

Vamos observar como a derivada segunda pode nos ajudar a determinar os intervalos de concavidade.

Consideremos o gráfico de uma função côncava para cima no intervalo  $(a,b)$ .

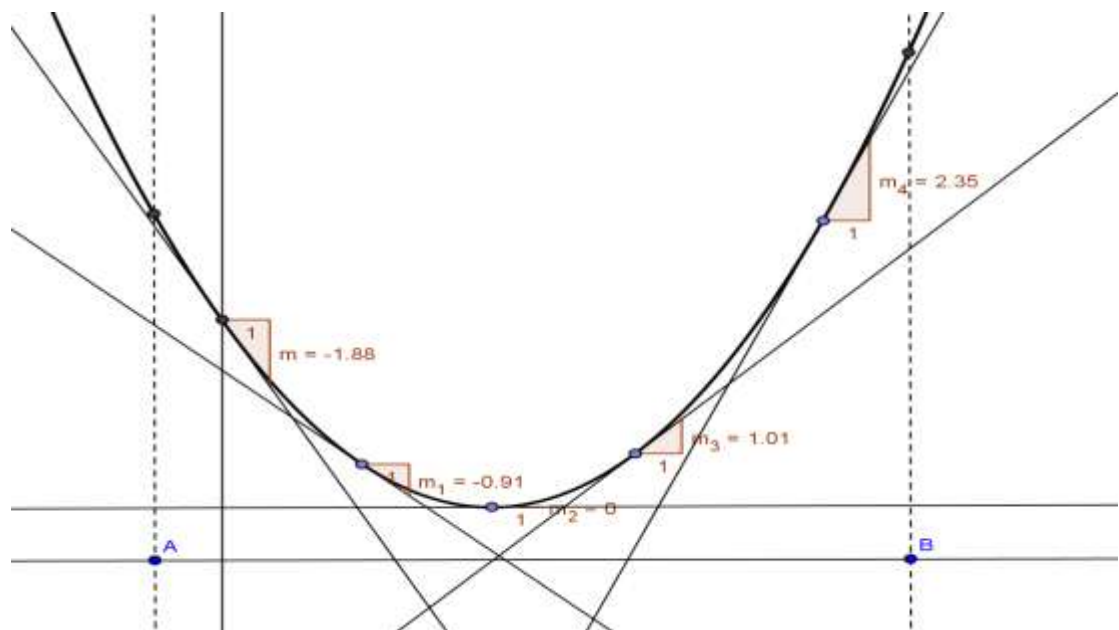


Figura 24: Curva Côncava para cima.



Notemos que, indo da esquerda para a direita, a inclinação da tangente cresce. No caso que a função seja duas vezes derivável, isso significa que a derivada de  $f$ ,  $(f')$  é crescente, isto é,  $(f')' = f''$  é positiva.

Da mesma forma, considerem o gráfico de uma função côncava para baixo no intervalo  $(a,b)$ .

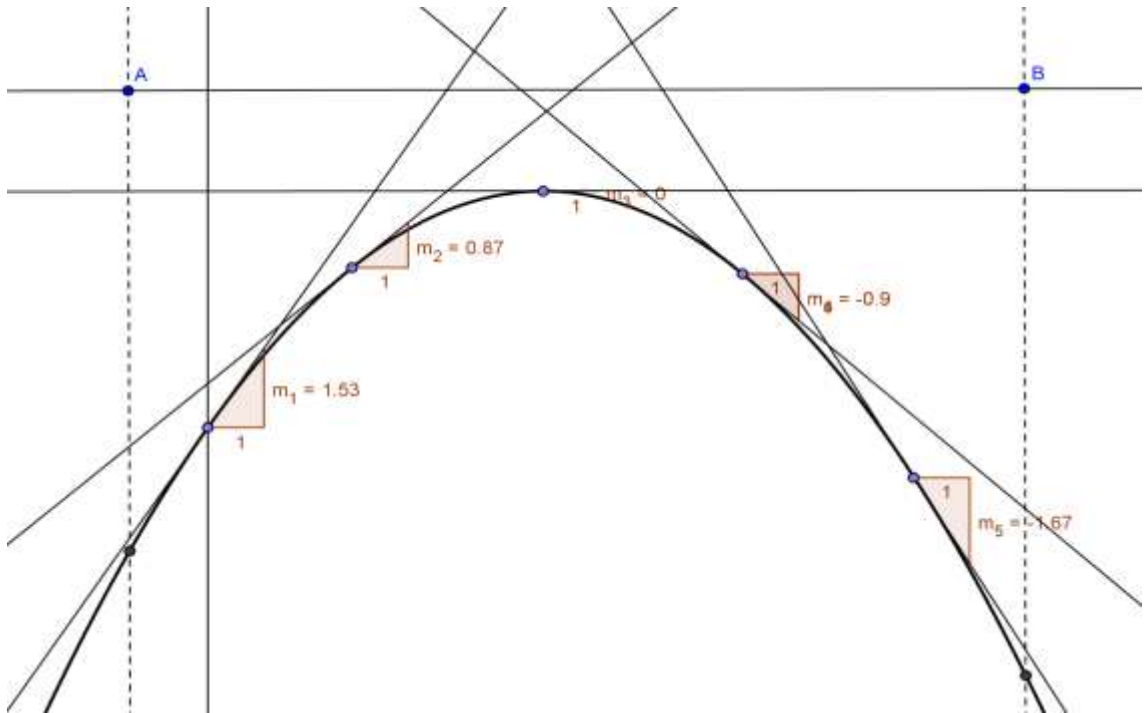


Figura 25: Curva Côncava para baixo.

Notemos que, indo da esquerda para a direita, a inclinação da tangente decresce. No caso que a função seja duas vezes derivável, isso significa que a derivada de  $f$ ,  $(f')$  é decrescente, isto é,  $(f')' = f''$  é negativa.

#### Teorema 4 Teste de Concavidade

- Se  $f''(x) > 0$ , para todo  $x$  em  $I$ , então o gráfico de  $f$  é côncavo para cima em  $I$ .
- Se  $f''(x) < 0$ , para todo  $x$  em  $I$ , então o gráfico de  $f$  é côncavo para baixo em  $I$ .

**Prova de (a).** Seja  $a$  um número qualquer em  $I$ . Precisamos mostrar que a curva  $y=f(x)$  fica acima da reta tangente no ponto  $(a,f(a))$ . A equação dessa tangente é:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Assim, devemos mostrar que  $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$ , qualquer que seja  $x \in I$  ( $x \neq a$ ).

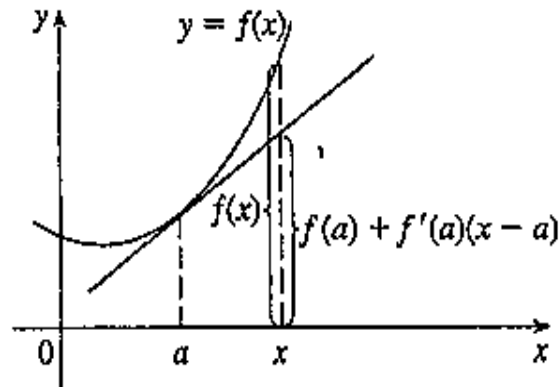


Figura 26: Curva acima da reta tangente.

Vamos considerar primeiro o caso onde  $x > a$ . Aplicando o Teorema do Valor Médio a  $f$  no intervalo  $[a, x]$ , obteremos um número  $c$  onde  $a < c < x$ , tal que

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) \quad (1)$$

Uma vez que  $f'' > 0$  em  $I$  sabemos que  $f'$  é crescente em  $I$ . Assim, uma vez que  $a < c$ , temos  $f'(a) < f'(c)$ . Portanto, multiplicando essa desigualdade pelo número positivo  $(x - a)$ , obtemos:

$$f'(a)(x - a) < f'(c)(x - a) \quad (2)$$

Somado agora  $f(a)$  a ambos os lados dessa igualdade, obtemos:

$$f(a) + f'(a)(x - a) < f(a) + f'(c)(x - a)$$

Mais da equação (1), temos  $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ . Dessa forma, essa desigualdade fica:

$$\underbrace{f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)}_{\text{Equação da Reta Tangente}}$$

que é o que queríamos provar. O gráfico de  $f$  está por cima da reta tangente.

Para o caso onde  $x < a$ , temos  $f'(c) < f'(a)$ , mas a multiplicação pelo número negativo  $(x-a)$  reverte o sinal da desigualdade; assim obtemos (2) e (3) como anteriormente. E provamos o gráfico de  $f$  está por cima da reta tangente.

**Prova de (b).** A prova do caso (b) é semelhante. ■

## 2.2. Caracterização Local da Curva Convexa pela Curvatura

Dizemos que uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é convexa em  $t_0 \in I$ , se existe  $\delta > 0$ , tal que  $\alpha((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$  esteja inteiramente contido num dos semi-planos determinados pela reta tangente à  $\alpha$  em  $t_0$ . Na figura abaixo, a curva  $\alpha$  é convexa nos pontos  $t_0$  e  $t_2$ , e não é convexa em  $t_1$ .

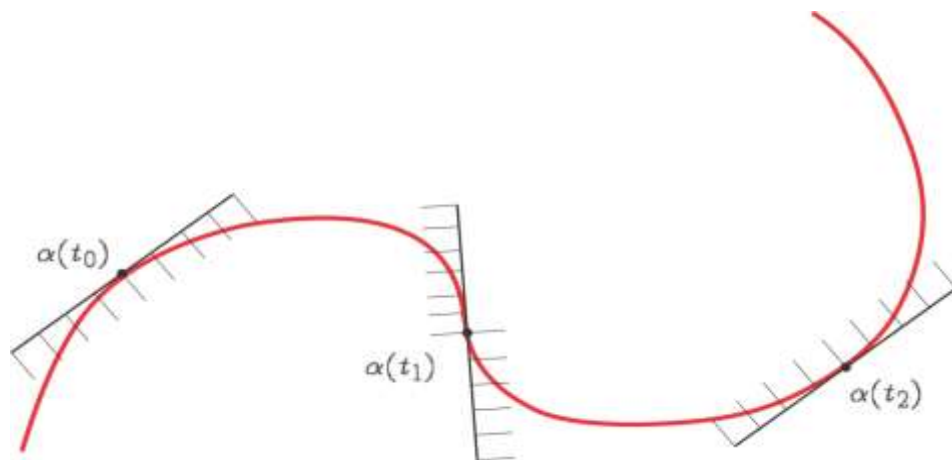


Figura 27: Representação de uma Curva Convexa em alguns pontos e não Convexa em outros.

Numa curva convexa em  $t_0$ , temos que, para todo  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , a função definida por

$$h_{t_0}(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), N(t_0) \rangle,$$

onde  $N(t) = \alpha'(t)^\perp$  é o campo normal de  $\alpha$ , **não muda de sinal**.

De fato,

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \alpha$$

+ + -  
+

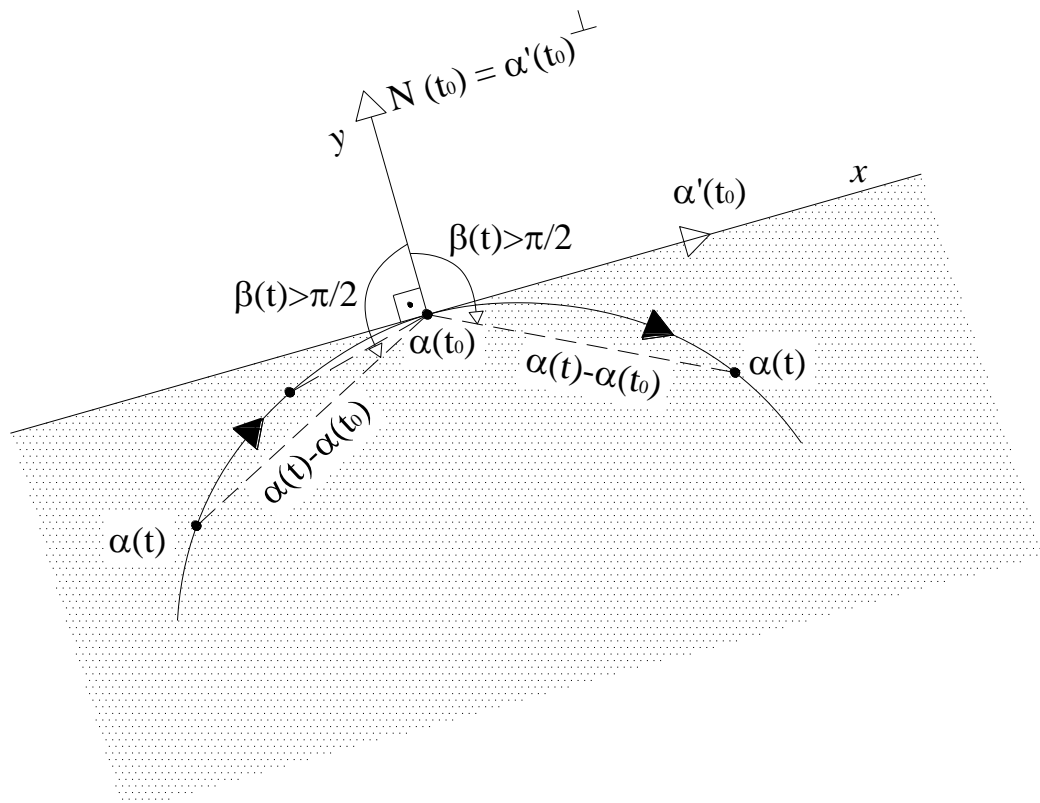
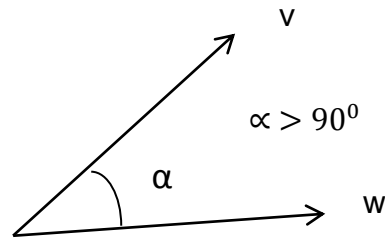


Figura 28: Representação de uma Curva onde o Campo Normal não muda de sinal.

Na figura 28 notamos que o ângulo entre o vetor normal à curva no ponto  $\alpha(t_0)$  e o vetor  $\alpha(t) - \alpha(t_0)$  pode ocorrer só de duas formas:

- No caso que o vetor normal aponta para “fora”, este ângulo varia entre  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ .
- No outro caso, o  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , com isto, um certo produto escalar não deve mudar de sinal: ou é negativo ou é positivo, respectivamente.

A curva  $\alpha$  é dita estritamente convexa em  $t_0$ , se  $\alpha$  é convexa em  $t_0$  e existe  $\delta > 0$ , tal que  $\alpha(t_0)$  é o único ponto de  $\alpha((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$  sobre a reta tangente de  $\alpha$  em  $t_0$ .

Na figura abaixo,  $\alpha$  é convexa em  $x=0$ ,  $y=0$  é a reta tangente a  $\alpha(0)$ , então  $\alpha(0)=0$ .

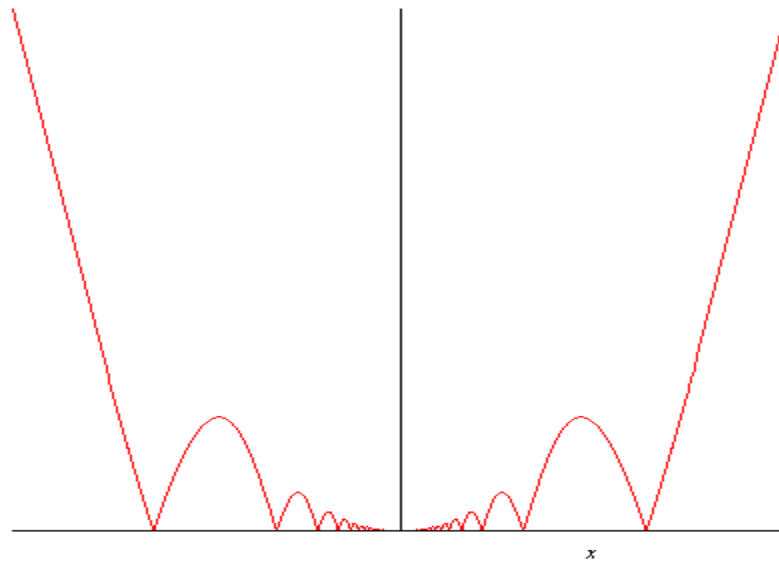


Figura 29: Representação de uma curva que não é estritamente convexa

**Proposição 4.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e de classe  $C^2$ . Se a curvatura de  $\alpha$  em  $t_0 \in I$  é não nula, então  $\alpha$  é estritamente convexa em  $t_0$ .

**Prova.** Pelo Teorema (3), podemos **supor** que  $\alpha$  é PPCA com parâmetro  $s$  e  $t_0$  corresponde a  $s_0$ .

- Primeiramente vamos supor que  $k(s_0) > 0$ .

Pela observação  $h_{s_0} : (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}, S \rightarrow h_{s_0}(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), N(s_0) \rangle$  não muda de sinal ou  $h_{s_0}$  é  $\geq 0$  ou  $h_{s_0}$  é  $\leq 0$  e  $h_{s_0}(s_0) = 0$ , logo  $s_0$  ou é ponto de mínimo local de  $h_{s_0}$  ou  $s_0$  é ponto de máximo local de  $h_{s_0}$ .

Derivando  $h_{s_0}(s) = h'(s) = \langle \alpha'(s), N(s_0) \rangle + \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), N'(s_0) \rangle = \langle \alpha'(s), N(s_0) \rangle$

Calculando em  $s_0$ :  $h'(s_0) = \langle \alpha'(s_0), N(s_0) \rangle = \langle \alpha'(s_0), \alpha'(s_0)^\perp \rangle = 0$

$s_0$  é ponto crítico de  $h$ . Vamos a estudar a natureza deste ponto crítico.

Calcular a segunda derivada em  $s_0$ :  $h''_{s_0}(s) = \langle \alpha''(s), N(s_0) \rangle$ .

Logo,

$$\begin{aligned} h''_{s_0}(s_0) &= \langle \alpha''(s_0), N(s_0) \rangle = k(s_0)N(s_0) = \langle k(s_0)N(s_0), N(s_0) \rangle = \\ &= k(s_0) \langle N(s_0), N(s_0) \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h''_{s_0}(s_0) = k(s_0) > 0.$$

Em particular  $h''_{s_0}(s_0) > 0$ .

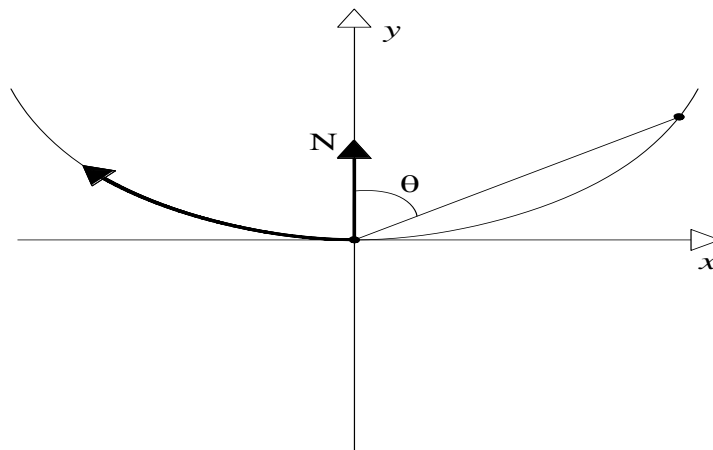
Então  $s_0$  é **ponto de mínimo estrito**. Isto é, existe  $\delta > 0$ , tal que  $h(s) >$

$$h(s_0) = 0, \quad \forall s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \text{ com } s \neq s_0.$$

Assim  $h(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), N(s_0) \rangle > 0, \quad \forall s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \text{ com } s \neq s_0$ .

O ângulo  $\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), N(s_0) \rangle < \frac{\pi}{2}, \quad \forall s \neq s_0$ , logo  $\alpha(s_0)$  é o único ponto de

$\alpha(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  que está sobre a reta tangente em  $\alpha(s_0)$ .



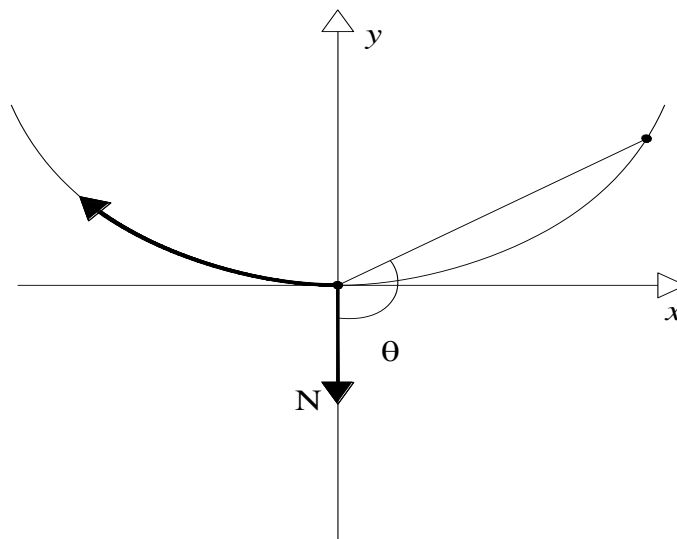
- No outro caso vamos supor que  $k(s_0) < 0$ .

Fazendo o mesmo processo acima, temos que  $h''_{s_0}(s_0) = k(s_0) < 0$

Então  $s_0$  é **ponto de máximo estrito**. Isto é, existe  $\delta > 0$ , tal que  $h(s) < h(s_0) = 0$ ,  $\forall s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  com  $s \neq s_0$ .

Assim  $h(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), N(s_0) \rangle < 0$ ,  $\forall s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  com  $s \neq s_0$ .

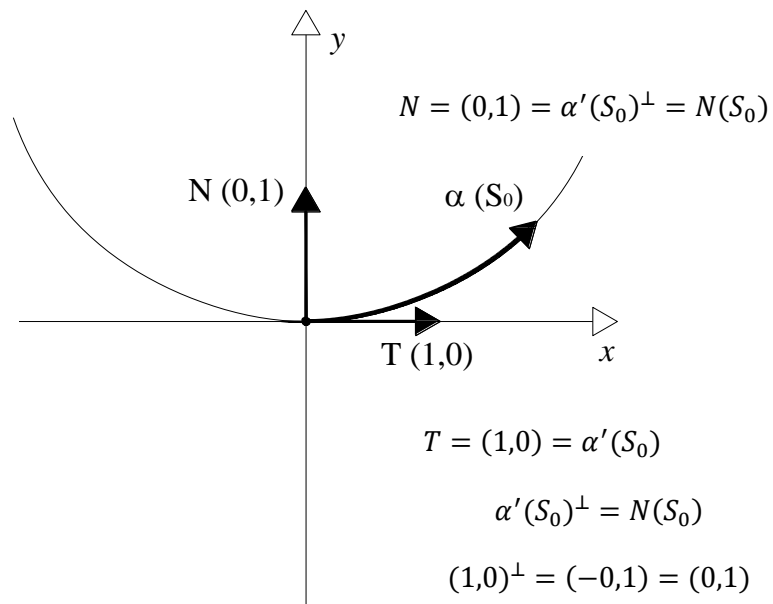
O ângulo  $\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), N(s_0) \rangle > \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall s \neq s_0$ , logo  $\alpha(s_0)$  é o único ponto de  $\alpha(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  que está sobre a reta tangente em  $\alpha(s_0)$ .



■

**Proposição 5.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular com função de curvatura  $k$ . Suponha que exista  $\delta > 0$ , tal que,  $\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$ ,  $k(t) \geq 0$ . Então  $\alpha$  é convexa em  $t_0$ . Além disso, o traço de  $\alpha$  restrito ao intervalo  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  está contido no semiplano determinado pela reta tangente à curva  $\alpha$  em  $t_0$  para o qual, aponta o vetor  $N(t_0)$ .

**Prova.** Suponha, sem perda de generalidade, que  $\alpha$  esteja parametrizada pelo comprimento de arco. Escolha o sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  ou com uma translação pudesse pensar que  $\alpha(s_0) = (0,0)$  e com uma rotação podemos colocar na forma que  $\alpha'(s_0) = T(s_0) = (1,0)$  e  $N(s_0) = (0,1)$ .



Em relação ao sistema de coordenadas acima, a curva  $\alpha$  é dada por:

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)), \text{ com } \alpha(s_0) = (0,0) \text{ e } T(s_0) = (1,0)$$

A prova reduz-se, nesse caso, a mostrar que existe  $\delta_1 > 0$ , tal que  $y(s) \geq 0, \forall t \in (s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1)$ . Assim a curva está de um lado da reta tangente (eixo x) em  $\alpha(s_0)$ . Pela proposição 1 do Capítulo 1 têm-se que  $k(s) = \theta'(s) = \|f''(s)\|$  onde  $\theta$  é o ângulo da curva e Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que:

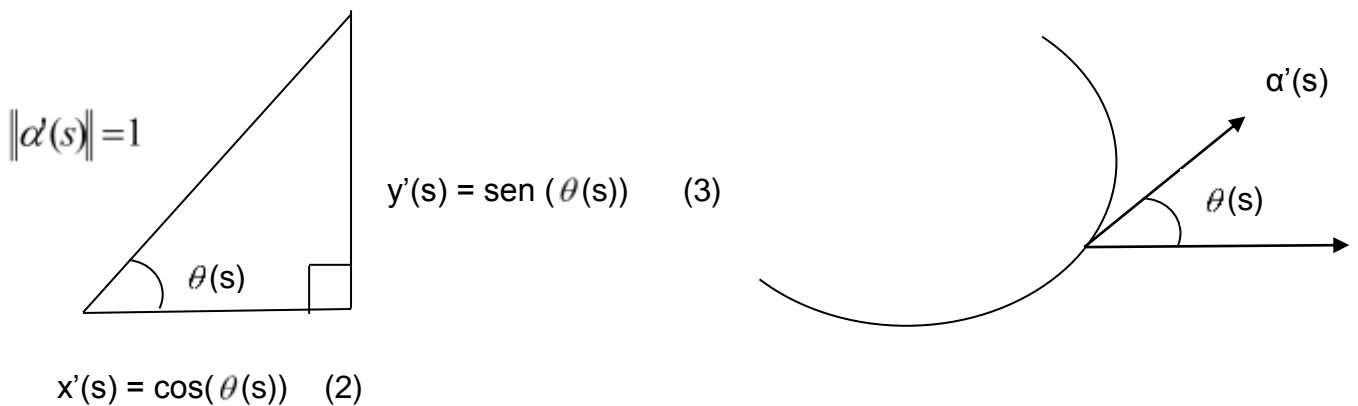
$$\int_{s_0}^s k(t) dt = \int_{s_0}^s \theta'(t) dt$$

$$\theta(s) - \theta(s_0) = \int_{s_0}^s k(t) dt$$

Com  $\theta(s_0)=0$  temos que,  $\theta(s) = \int_{s_0}^s k(t) dt \rightarrow$  (Equação 1)

Como  $\alpha$  é PPCA temos que  $\alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$  é unitário.





Substituindo a equação 1 em (2) e (3) respectivamente temos:

$$x'(s) = \text{cos}\left(\int_{s_0}^s k(t) dt\right) \text{ e } y'(s) = \text{sen}\left(\int_{s_0}^s k(t) dt\right)$$

Por hipótese  $k(t) \geq 0$ , para todo  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \Rightarrow$

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s k(t) dt \geq 0, \forall s \in (s_0, s_0 + \delta)$$

Considerando  $\delta$  pequeno, podemos supor que  $0 \leq \theta < \pi$ , então seno é positivo, logo  $y'(s) > 0, \forall s \in (s_0, s_0 + \delta)$ . Assim  $y$  é crescente no intervalo  $(s_0, s_0 + \delta)$ .

Por outro lado no intervalo  $(s_0 - \delta, s_0)$ , a integral  $\int_{s_0}^s k(t) dt$  é negativa, então  $\theta(s) \leq 0, \forall s \in (s_0 - \delta, s_0)$  e seno de um ângulo  $-\pi < \theta \leq 0$  é negativo, logo  $y'(s) \leq 0$ . Assim  $y$  é decrescente no intervalo  $(s_0 - \delta, s_0)$ .

Logo,  $y$  é não-crescente no intervalo  $[s_0 - \delta_1, s_0]$  e não-decrescente em  $[s_0, s_0 + \delta_1]$ . Como  $y(s_0) = 0$ , temos  $y(s) \geq 0, \forall t \in [s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1]$ , o que concluiu a prova. ■

### 2.3. Índice de Rotação, Teorema de Jordan e Teorema do Máximo e Mínimo Local para Funções Contínuas

Na prova do Teorema Principal desta monografia, vamos usar o Teorema do Índice de Rotação, Teorema da Curva de Jordan e o Teorema do Máximo e Mínimo Global para Funções Contínuas.

**Teorema 5 Teorema do Índice de Rotação:** O índice de rotação de uma curva simples fechada é  $\pm 1$ , onde o sinal depende da orientação da curva.

Seja  $\alpha: [a, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva plana fechada PPCA dada por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ . Então o Vetor Tangente  $T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$  é unitário. O Vetor Tangente define uma curva  $t: [a, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , (chamado de indicatriz tangente), esta é uma curva diferenciável cujo traço está contido em um círculo de raio 1.

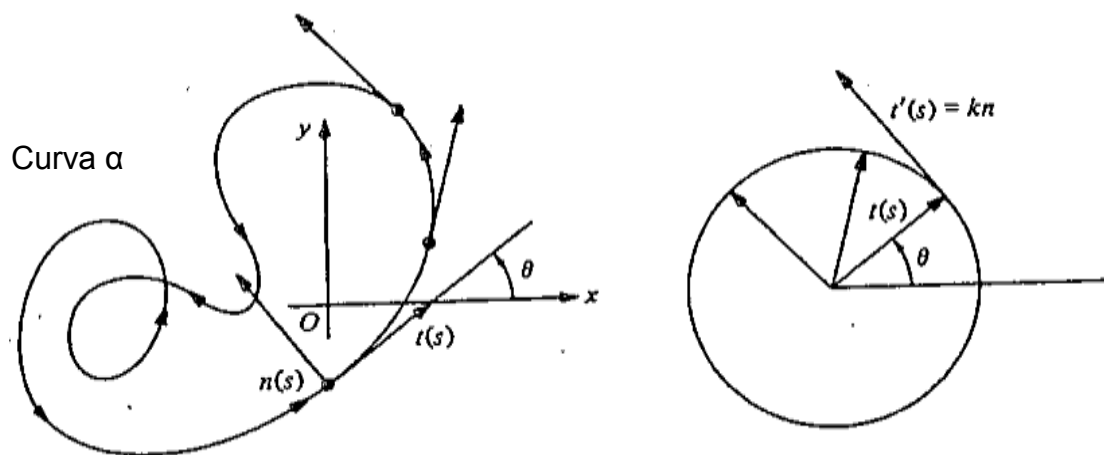


Figura 30: Curva Indicatriz Tangente.

Consideremos a função global diferenciável  $\theta: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$\theta(s) - \theta(0) = \int_0^s k(t) dt.$$

Intuitivamente, a  $\int_0^s k(t) dt$  mede a rotação total do vetor tangente no intervalo  $[0, s]$  que é  $\theta(s) - \theta(0)$ , isto é, o ângulo total descrito pelo ponto  $T(s)$  da indicatriz

tangente, à medida que percorremos a curva  $\alpha$  de 0 a  $s$ . Como  $\alpha$  é fechada, este ângulo é um múltiplo inteiro de  $2\pi$ ; ou seja,

$$\int_0^l k(s) ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi I, I \in \mathbb{Z}.$$

Este número inteiro  $I$  é chamado de **índice de rotação** da curva  $\alpha$ .

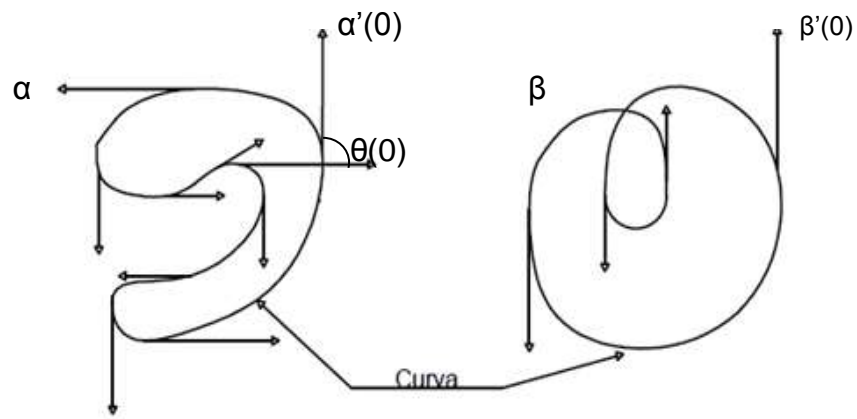


Figura 31: Representação do Índice de Rotação.

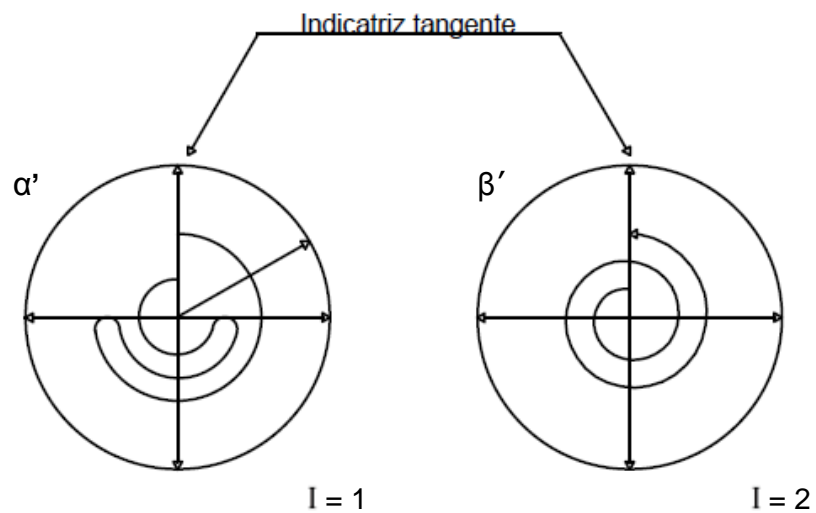


Figura 32: Representação do Índice de Rotação.

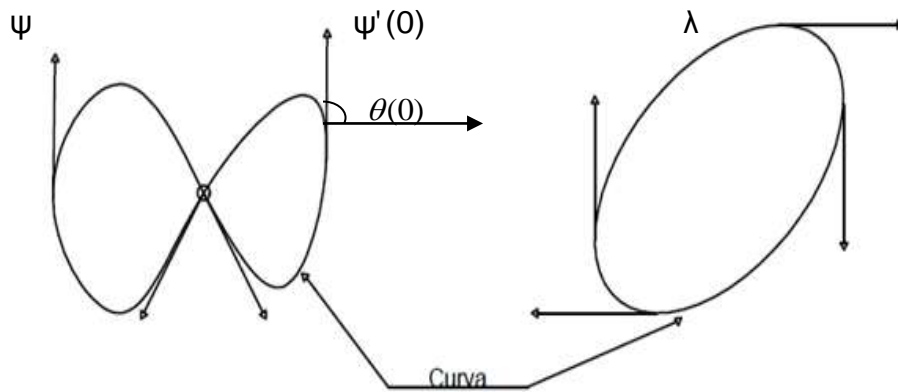


Figura 33: Representação do Índice de Rotação.

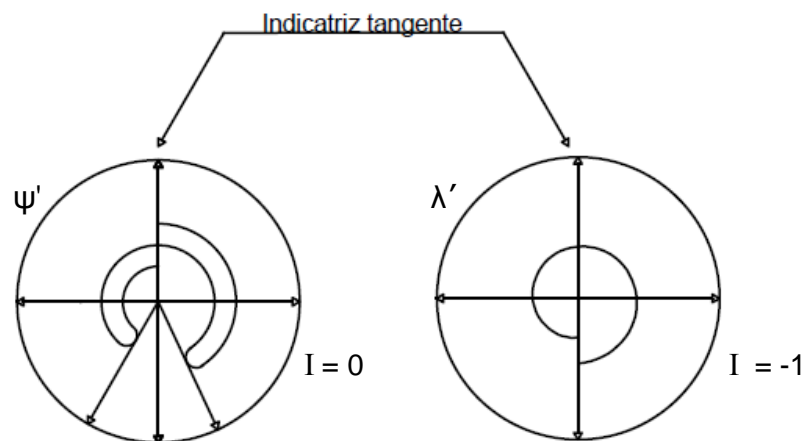


Figura 34: Representação do Índice de Rotação.

Observe que o índice de rotação muda de sinal quando mudamos a orientação da curva.

Outro Teorema que faremos uso, sem demonstração é o teorema de Jordan. A complexidade da prova do Teorema de Jordan surpreendeu muitos matemáticos de sua época. Na literatura temos muitas provas desse teorema e, no caso da curva ser apenas contínua, as demonstrações apresentam um certo grau de complexidade. O Teorema de Jordan talvez seja um dos resultados matemáticos em que mais facilmente podemos acreditar, sem percebermos a dificuldade de sua demonstração. Ele também é um belo exemplo de que desenhar é, de fato, diferente de provar.

**Teorema 6 Teorema da Curva de Jordan:** Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva plana, contínua, simples e fechada. Então  $\mathbb{R}^2 - \alpha : ([a, b])$  tem exatamente duas componentes convexas, e  $\alpha : ([a, b])$  é a fronteira comum dessas componentes.

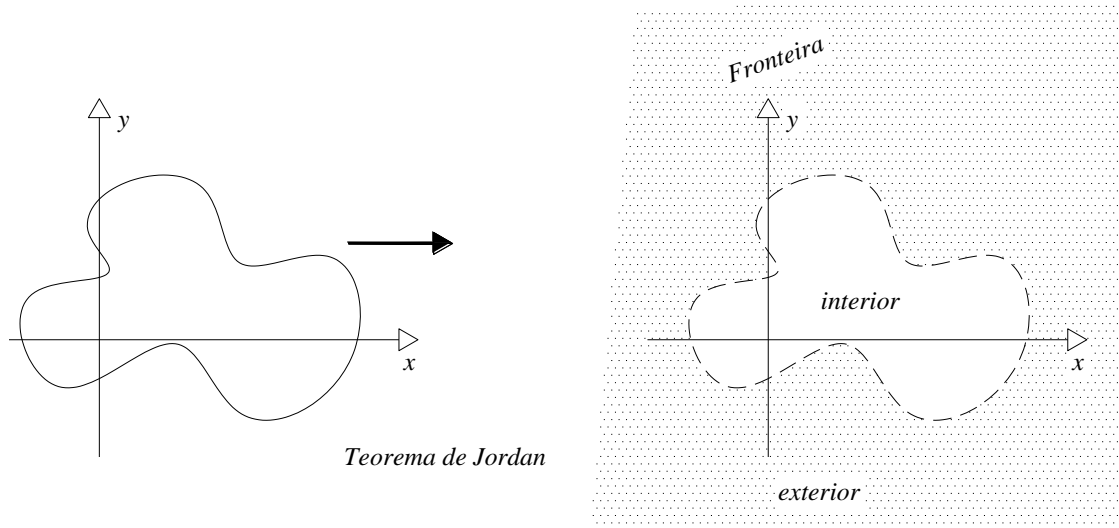


Figura 35: Teorema de Jordan.

Muitas vezes, ao colocar hipóteses adicionais sobre a curva, a prova é facilitada. Assim provar o Teorema de Jordan, no caso em que a curva for regular e de classe  $C^2$  pode ser encontrado em [Alencar].

**Teorema 7 Teorema do Máximo e Mínimo Global para Funções Contínuas:** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua,  $f$  atinge valor máximo e mínimo em pontos de  $[a, b]$ . Isto é,  $\exists t_0$  e  $t_1 \in [a, b]$ , tal que  $f(t_0) \leq f(x) \leq f(t_1), \forall x \in [a, b]$ .

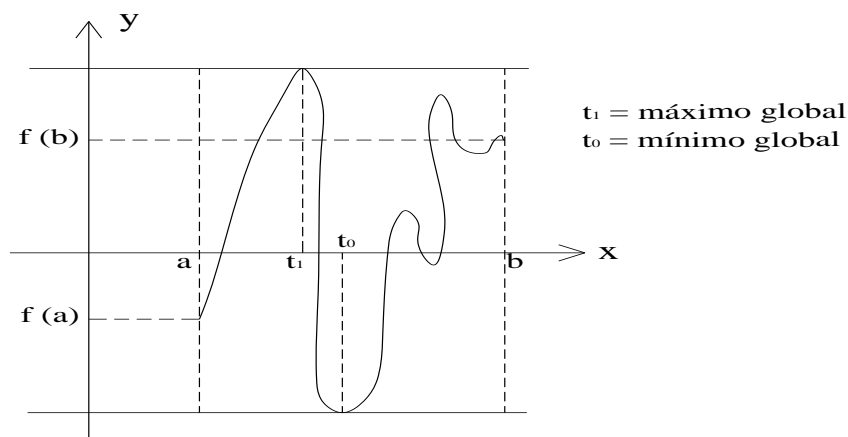
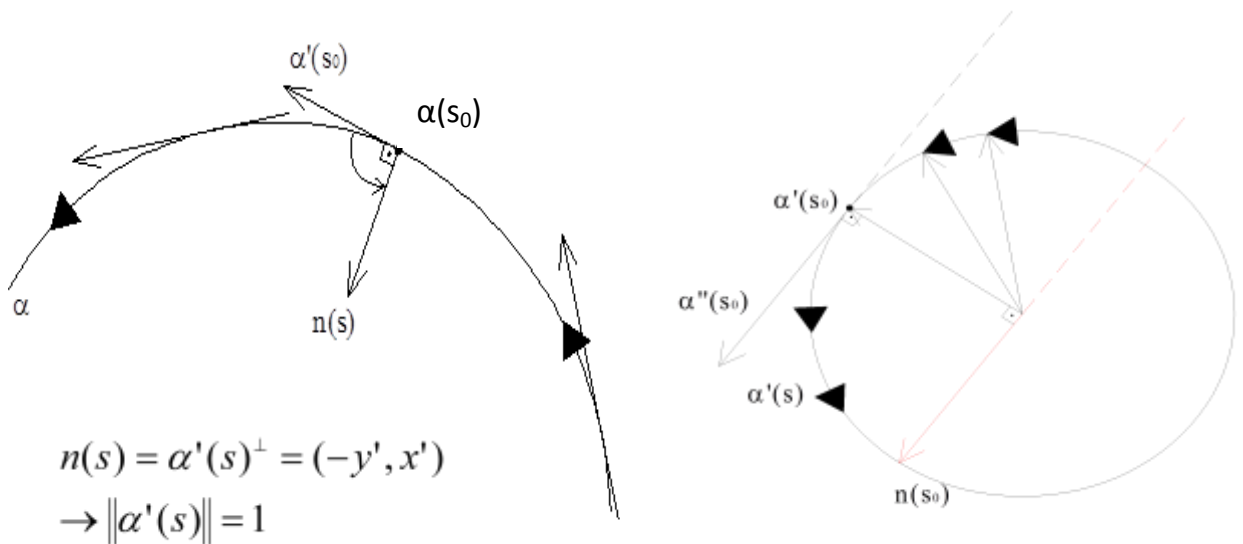


Figura 36: Teorema de Máximo e Mínimo Global.

### 2.4. Caracterização Global da Curva Convexa pela Curvatura

**Teorema 8 Teorema Principal:** Uma curva regular, fechada e simples  $\alpha : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é convexa se, e somente se, sua curvatura não muda de sinal.

**Prova:** Como  $\alpha$  é uma curva simples e fechada (de Jordan) PPCA, pelo *Teorema de Jordan*, seu traço delimita uma região limitada convexa  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Orientando  $\alpha$  de modo que em algum  $s_0 \in [a,b]$  o vetor normal no ponto  $\alpha(s_0)$  aponta para a região  $\Omega$ . Pela continuidade do vetor normal  $N$  de  $\alpha$ , temos que, para todo  $s \in [a,b]$ ,  $N(s)$  aponta para  $\Omega$ . Observe que em  $s_0$ ,  $k(s_0) \geq 0$ , uma vez que o traço de  $\alpha$  está contido no semi-plano determinado pela reta tangente a  $\alpha$  em  $s_0$ .



$$\left. \begin{aligned} \alpha''(s) // n(s_0) \\ \alpha'' = k.n \end{aligned} \right\} \alpha'' \text{ e } n \text{ est\~{a}o na mesma dire\~{c}\~{a}o$$

$$k(s_0) \geq 0$$

( $\Leftarrow$ ) Por hipótese  $k$  não muda de sinal e como  $k(s_0) \geq 0$ , então  $k(s) \geq 0 \forall s \in [a,b]$ .

Fixe  $s_1 \in [a,b]$  e consideremos a função  $h_{s_1} : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , que é dada por:

$$h_{s_1}(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_1), N(s_1) \rangle,$$

notemos que como  $\alpha$  é contínua,  $h_{s_1}$  é função contínua. Vamos a mostrar que  $h_{s_1}$  não muda de sinal em  $[a,b]$ . Suponha que por contradição que  $h_{s_1}$  muda de sinal.

Pelo *Teorema do Máximo e Mínimo Global*,  $h_{s_1}$  assume um mínimo negativo e um máximo positivo em pontos  $s_2$  (mínimo) e  $s_3$  (máximo), distintos de  $s_1$ . Assim  $h'_{s_1}(s_2) = 0$  e  $h'_{s_1}(s_3) = 0$ .

$$\text{Como } h'_{s_1}(s) = \langle \alpha'(s), N(s_1) \rangle \Rightarrow \begin{cases} h'_{s_1}(s_1) = \langle \alpha'(s_1), N(s_1) \rangle = 0 \\ h'_{s_1}(s_2) = \langle \alpha'(s_2), N(s_1) \rangle = 0 \\ h'_{s_1}(s_3) = \langle \alpha'(s_3), N(s_1) \rangle = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \alpha'(s_1), \alpha'(s_2), \alpha'(s_3) \perp N(s_1)$ . Logo as retas tangentes á curva em  $\alpha$  em  $s_1, s_2$  e  $s_3$  são paralelas.

Por hipótese,  $\alpha$  é uma curva simples e foi parametrizada no sentido anti-horário. Logo, pelo *Teorema da Rotação das Tangentes*, seu índice de rotação é  $R_\alpha = +1$ .

Seja  $\theta: [a,b] \rightarrow R$  uma função angular para indicatriz tangente de  $\alpha$  em relação a  $(0,0)$ , com  $\theta(a) = 0$ . Pela proposição 1 (Capítulo 1), a derivada de  $\theta$  é dada por:

$$\theta'(s) = k(s) \geq 0, \forall s.$$

Se  $\theta'(s) \geq 0, \forall s$ ,  $\theta$  é não-decrescente. Como  $R_\alpha = 1$ , o vetor  $\alpha'$  deve dar uma volta e o ângulo  $\theta$  é não-decrescente, a imagem de  $\theta$  é o intervalo  $[0, 2\pi]$ . Como temos pelo menos três pontos do traço de  $\alpha$  com retas tangentes paralelas, em pelo menos dois desses pontos, o vetor tangente tem a mesma direção, o ângulo  $\theta$  possui o mesmo valor. Como  $\theta$  é não decrescente, ela deve ser constante em algum intervalo da forma  $[s_i, s_j], i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Isto significa que o traço de  $\alpha$  contém um segmento de reta ligando  $\alpha(s_i)$  a  $\alpha(s_j)$ .

Se  $\alpha(s_2) = 0 \rightarrow h \geq 0$ , se  $\alpha(s_3) = 0 \rightarrow h \leq 0$ , portanto  $h_{s_1}(s_i) = h_{s_1}(s_j) = 0$ , o que contradiz a escolha dos pontos  $s_2$  e  $s_3$ . Logo  $h_{s_1}$  não muda de sinal, pela demonstração. Como  $s_1$  é arbitrário em  $[a, b]$ ,  $\alpha$  é convexa.

( $\Rightarrow$ ) Reciprocamente, vamos provar que com a parametrização escolhida no início da demonstração, isto é, com o vetor normal apontando para dentro da região ( $k(s_0) \geq 0$ ), devemos ter  $k(s) \geq 0, \forall s$ .

Por absurdo, suponha que para algum  $s_1 \in [a, b]$ ,  $k(s_1) < 0$ . Consideremos a aproximação de ordem dois de  $\alpha$  no ponto  $s_1$ , então temos:

$$\alpha(s) = \alpha(s_1) + (s - s_1)\alpha'(s_1) + \frac{(s - s_1)^2}{2!} k(s_1)N(s_1) + R(s);$$

onde  $\lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\|R(s)\|}{(s - s_1)^2} = 0$ .

Na função  $h_{s_1}(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_1), N(s_1) \rangle$ , substituímos

$$\alpha(s) - \alpha(s_1) = (s - s_1)\alpha'(s_1) + \frac{(s - s_1)^2}{2!} k(s_1)N(s_1) + R(s),$$

Então temos:

$$\begin{aligned} h_{s_1}(s) &= \left\langle (s - s_1)\alpha'(s_1) + \frac{(s - s_1)^2}{2!} k(s_1)N(s_1) + R(s), N(s_1) \right\rangle = \\ &= (s - s_1)\langle \alpha'(s_1), N(s_1) \rangle + \frac{(s - s_1)^2}{2!} k(s_1)\langle N(s_1), N(s_1) \rangle + \langle R(s), N(s_1) \rangle = \\ h_{s_1}(s) &= (s - s_1)^2 \frac{k(s_1)}{2!} + \langle R(s), N(s_1) \rangle = (s - s_1)^2 \frac{k(s_1)}{2!} + \|R(s)\| \cdot \|N(s_1)\| \cdot \cos(\varphi) \\ h_{s_1}(s) &= (s - s_1)^2 \left[ \frac{k(s_1)}{2} + \frac{\|R(s)\|}{(s - s_1)^2} \cdot \|N(s_1)\| \cdot \cos(\varphi) \right]. \end{aligned}$$



Como  $\|N(s_1)\| \cdot \cos(\varphi)$  é limitado,  $\lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\|R(s)\|}{(s - s_1)^2} = 0$  e  $\frac{k(s_1)}{2} < 0$  é constante negativa, então para  $s$  suficientemente próximo de  $s_1$  temos que  $\left[ \frac{k(s_1)}{2} + \frac{R_2(s)}{(s - s_1)^2} \right] < 0$ , logo multiplicando por  $(s - s_1)^2$  que é positivo, temos que  $h_{s_1}(s) < 0$  para  $0 < (s - s_1)^2 < \varepsilon$ , isto é o ângulo que o vetor  $N(s_1)$  faz com o vetor  $\alpha(s) - \alpha(s_1)$  é maior que  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\forall s$  com  $0 < |s - s_1| < \varepsilon$ , ver figura abaixo.

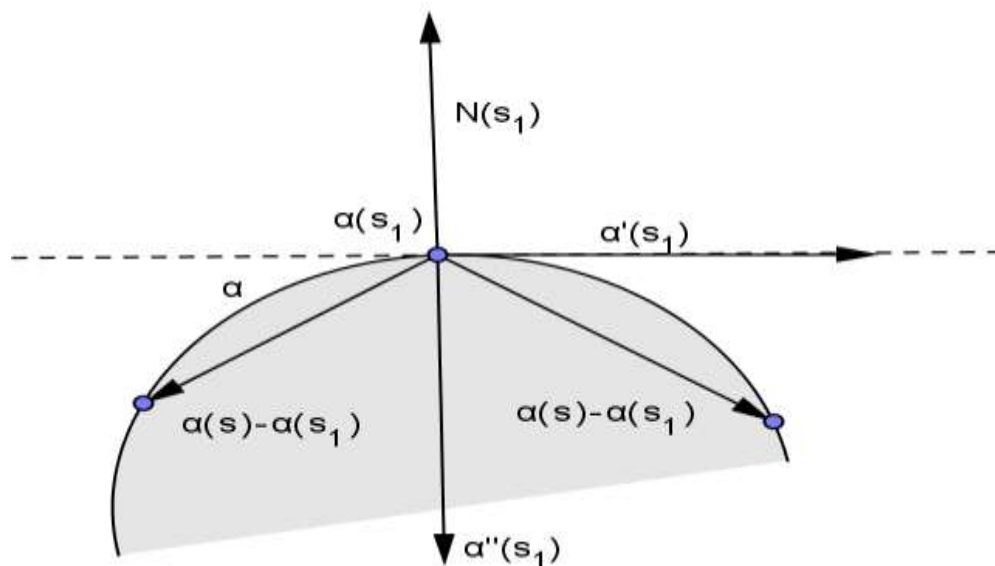


Figura 37: Representação de uma curva convexa.

A curva em pontos próximos de  $s_1$  está no semi-plano determinado pela reta tangente em  $\alpha(s_1)$  e oposto ao vetor normal  $N(s_1)$ . Pela hipótese de convexidade a região achurada na figura indica a região convexa, como o vetor normal ficou apontando para o lado da região convexa, isto contradiz o fato de ter parametrizado a curva inicialmente com vetor normal apontando sempre para dentro da região limitada. Por tanto não existe  $s_1$  com  $k(s_1) < 0$ , assim  $k(s) \geq 0$  para todo  $s$  com  $0 < |s - s_1| < \varepsilon$ .

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Alencar] Hilário; SANTOS, Walcy. *Geometria Diferencial das Curvas Planas*. 24<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2002.

[Tenenblat] KETI. *Introdução à Geometria Diferencial*. Ed. UNB, 1990.

[Malta 1] Iaci. *Cálculo a uma variável*. PUC – Rio, v.1, 2 ed, 2002.

[Malta 2] Iaci. *Cálculo a uma variável*. PUC – Rio, v.2, 2 ed, 2002.

[Simmons] George F. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Ed. Mac Graw – Hill, v.2, 1987.

[Rodrigues] Paulo R. *Introdução às Curvas e Superfícies*. Editora Universidade Federal Fluminense, Cap. 2, 2001.

[Stewart] James. *Cálculo*. Volume 1. 5 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, cap. 4, 2006.