UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS (UFMG)

CELSO EDUARDO DE SOUZA FREIRE

FORMA CANÔNICA DE JORDAN REAL DE ORDEM DOIS

BELO HORIZONTE

2012

CELSO EDUARDO DE SOUZA FREIRE

FORMA CANÔNICA DE JORDAN REAL DE ORDEM DOIS

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática da UFMG, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Especialista em Matemática para Professores, com Ênfase em Matemática do Ensino Básico (Orientador: Prof. Jose Antonio G Miranda).

BELO HORIZONTE

2012

CELSO EDURDO DE SOUZA FREIRE

FORMA CANÔNICA DE JORDAN REAL DE ORDEM DOIS

Data de aprovação:_____ de _________________________ de _______.

____

Professor: José Antônio Gonçalves Miranda

____

Professor: Ezequiel Rodrigues Barbosa

____

Professor: Viktor Bekkert

RESUMO

Esta pesquisa teve como proposta o estudo do teorema da Forma Canônica de Jordan,verificando os processos para descobrir autovalores e autovetores a partir do estudo de um polinômio característico de segundo grau.

O objetivo foi analisar os casos em que não podemos diagonalizar uma matriz, em função de a matriz não possuir autovalores reais, ou seja, se existissem estes valores pertenceriam ao plano imaginário, sendo, portanto, números complexos.

Palavras chave–autovalor, autovetor, números complexos .

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Deus e a nossa família, pela base sólida que nos proporcionaram dando a força necessária para encarar a vida de frente. Aos mestres desta instituição que fizeram parte dessa jornada em sala de aula e nos corredores. Aos amigos que enfrentaram ferozmente essa batalha de aprendizagem e desafios, e principalmente ao meu amigo Adélio e ao professor José Antônio que me ajudaram a vencer mais essa etapa em minha vida.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao estudar o processo de Diagonalização de matrizes de segunda ordem, me despertou o interesse, em analisar os casos em que não podemos diagonalizar uma matriz, em função de a matriz não possuir autovalores e autovetores reais, portanto as raízes do polinômio característico são números complexos com parte imaginaria não nula . E os casos em que uma matriz possuir apenas um autovalor real.

Na tentativa de compreender tal processo inicialmente realizamos um estudo no qual identificamos que estes autovalores e autovetores recebem a denominação de autovalores e autovetores generalizados ou complexos, quando λ pertencer aos conjuntos dos números complexos. E nos deparamos com a existência de um teorema conhecido como: O teorema da Forma canônica de Jordan real que seria uma forma de representar uma matriz através de outra matriz semelhante à original e mais simples que a original.

Definição1:

Dizemos que duas matrizes A e B de mesmo tamanho são matrizes semelhante quando existe uma matriz P invertivel tal que:

$A = PBP^{-1} \rightarrow AP = PB$

Teorema da forma Canônica de Jordan:

Seja A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, e sejam λ_1 e λ_2 raízes do polinômio característico de A. Então ocorre uma das seguintes possibilidades:

1) A ~ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ou seja A é diagonalizável.
2) A~ $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ onde $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$
3) A ~ $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$onde $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$

O objetivo desse trabalho é desenvolver um estudo com intuito de compreender a segunda e a terceira possibilidade do teorema da forma Canônica de Jordan.

Para que haja uma maior compreensão do processo de diagonalização, mais especificamente no que tange a diagonalização de matrizes de segunda ordem. Desenvolvemos um estudo conjunto com o aluno do curso de pós-graduação Adélio Daniel de Sousa Freitas a respeito de diagonalização de matrizes de segunda ordem. Este estudo nos indicou que:

Diagonalizar matrizes é o processo de transformar uma matriz A diagonalizável em uma matriz D diagonal.

Definição 2: Matriz diagonal é uma matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero. Sendo que os elementos da diagonal principal podem ser, ou não, iguais a zero.

Para que A seja diagonalizável ainda é necessário que a matriz P seja invertível.

Definição 2.1: uma matriz quadrada $A = A(a_{ij})_{nxn}$ é invertivel ou não singular, se existe uma matriz $B = (b_{ij})_{nxn}$ tal que:

$$AB= BA= I$$

Em que I_n é a matriz identidade. A matriz B é chamada de inversa de A. Se A não tem inversa dizemos que A é singular ou não invertível.

Definição 2.2: "uma matriz A_{nxn}, é diagonalizável, se existem matrizes P invertivel e D diagonal tais que $A = PDP^{-1}$, ou equivalente, AP=PD."

Portanto Sendo A uma matriz diagonalizável, as colunas da matriz P, são autovetores associados a autovalores,os autovalores são elementos da matriz Diagonal D.

Definição 2.3: um numero real λ é chamado de autovalor se existir um vetor não nulo V em R^n de modo que $AV = \lambda V$.

Definição 2.4: Um vetor não nulo v em v é dito um autovetor v se existe um número real λ tal que $Av = \lambda v$.

Definição 2.5: O polinômio característico de uma matriz A é um polinômio de grau n na variável λ obtido pela expansão do determinante

$$p(\lambda) = \det.(A - \lambda I).$$

A raiz do polinômio característico λ será autovalor de A se e somente se a equação ter uma solução não trivial, ou seja: $\det.(A - \lambda I) = 0$

Definição 2.6: Determinante de uma matriz é uma função matricial que associa a cada matriz quadrada um escalar. Esta função permite saber se a matriz tem ou não inversa, pois as que não têm são precisamente aquelas cujo determinante é igual a zero.

O entendimento do polinômio característico é muito importante no estudo de diagonalização de matrizes. Desenvolvemos então um estudo afim de aprofundar o conhecimento acerca do polinômio característico, mais precisamente no que se refere ao caso em que as matrizes são quadradas de ordem dois.

Sendo $P = [\ v_1\ v_2]$ $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

Supondo que v_1 v_2 são autovetores linearmente independentes associados a λ_1 λ_2, respectivamente.

Como:

$AV_j = \lambda_j V_j$, para j=1,2

$AP = A.\ [v_1\ v_2] = [\ AV_1\ AV_2]$

$= [\ \lambda_1 v_1\ \lambda_2 v_2] = [\ v_1\ v_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = PD$

Como v_1 e v_2 são linearmente independentes a matriz P é invertivel. Portanto multiplicando por P ambos os lados da igualdade $A = PDP^{-1}$ obtivemos que $AP = PDP^{-1}P$, como $PP^{-1} = I_n$, que é o elemento neutro do produto de matrizes concluímos que AP = PD.

Sejam :

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ e $P = [v_1\ v_2]$ em que v_j é a coluna j de P. usando as definições de P e D temos que:

$AP = A\ [V_1\ V_2] = [\ AV_1\ AV_2]$

$PD = [\ v_1\ v_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = [\ \lambda_1 v_1\ \lambda_2 v_2]$ temos que: $AV_j = \lambda_j V_j$, Neste caso dizemos que um número λ é autovalor de uma matriz A, se existir um vetor V não nulo tal que

$$AV = \lambda V$$

Ou seja, o sistema de duas equações com duas incógnitas ter solução não trivial.

Desse modo seja a matriz A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2x2}$ $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ autovetores linearmente independente λ autovalor de A temos:

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases}$$

Para que a solução do sistema acima tenha solução não trivial temos que:

$$\begin{cases} ax - \lambda x + by = 0 \\ cx - \lambda y + dy = 0 \end{cases}$$

Colocando x e y em evidencia temos:

$$\begin{cases} (a - \lambda)x + by = 0 \\ cx + (d - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Temos portanto dois casos a considerar:

1º caso $\lambda \neq a$

Multiplicando $\left(\frac{-c}{(a-\lambda)}\right)(a - \lambda)x + by = 0$

Somando com $cx + (d - \lambda)y = 0$

Temos: $\left(\frac{-cb}{(a-\lambda)} + (d - \lambda)\right)$y = 0

Igualando ao mesmo denominador:

$$\left(\frac{-cb+(a-\lambda)(d-\lambda)}{(a-\lambda)}\right)y=0$$

$$\left(\frac{-cb+ad-a\lambda+d\lambda+\lambda^2}{(a-\lambda)}\right)y = 0$$

$$\left(\frac{\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-cb)}{(a-\lambda)}\right)y=0$$

Neste caso o sistema (1) tem solução não nula se e somente se λ é raiz do polinômio $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - cb)$.

2º caso λ= a

Se λ= a teremos que o polinômio possuirá raízes se e somente se c ou b igual a zero.

Se b $\neq 0$ implica que y igual a zero e implica que c igual a zero

Se b = 0 e c = 0 implica que $\lambda \neq 0$ ou seja λ = a ou λ= d que é raiz do polinômio λ^2 – (a + d)λ + (ad –cb) = 0 que é valido portanto para todo λ,podendo ser então **chamado de polinômio característico**, onde: (a + d) é o traço da Matriz A, e (ad - bc) é o determinante da matriz A.

Portanto mostramos que o sistema (1) terá solução não nula se e somente se λ é uma raiz real do polinômio λ^2 – (a + d)λ + (ad –cb), ou seja λ é autovalor se e somente se for raiz do polinômio.

Podemos então escrever o polinômio com a seguinte notação: P(λ) = λ^2 - Tr(A)λ + det.(A), o discriminante dessa equação dependerá dos elementos da matriz A. Sendo, portanto Δ = Tr^2(A) – 4det.(A).

Ou seja:

Δ= $(a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc) \rightarrow (a-d)^2 + 4bc$

As raízes do polinômio característico serão obtidas:

$$\lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc}}{2}$$

$$\frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$$

Dado uma matriz qualquer A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ temos que P(λ) = λ^2 - Tr(A)λ + det.(A) é o polinômio característico e o seu discriminante é Δ = Tr^2(A) – 4det.(A). dessa forma temos três casos a avaliar

1º caso: Δ > 0 existirá duas raízes reais.

2º caso Δ = 0 existirá apenas uma raiz real.

3^0 casos Δ <0 não existirá raiz real.

CAP.1 **NÚMEROS COMPLEXOS**

Como nosso objetivo é realizar um estudo do que ocorre quando o polinômio característico não possui raízes reais, ou seja as suas raízes pertencem ao campo dos complexos. Buscando uma maior compreensão do processo, percebemos a necessidade em revisar conhecimentos básicos a respeito de números complexos. O propósito deste capitulo é o de revisar o conteúdo " números complexos", no intuito de dar continuidade ao nosso estudo.

Definição 3: Números complexos é todo número que pode ser escrito na forma $Z= a + bi$ onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária. O numero real **a** é a parte real do número complexo Z e o numero real b é a parte imaginária do numero complexo Z, denotado por: a= Re(z); b IM(z)

Os números complexos são úteis para resolver equações do tipo $x^2+1=0$ uma vez que não existe qualquer número real com a propriedade que o seu quadrado seja igual a −1. Todo número complexo tem a forma a+bi, onde a e b são números reais e a unidade imaginária i tem a propriedade $i^2=-1$.

O conjunto dos números reais pode ser considerado como um subconjunto dos números complexos com b=0. Se a=0 o número complexo 0+bi=bi recebe o nome de número imaginário puro.

Exemplos:

1. z=3+0i é um número real, pois Re(z)=3 e Im(z)=0.
2. z=7+4i é um número complexo, pois Re(z)=7 e Im(z)=4.
3. z=0+5i é um número imaginário puro, pois Re(z)=0 e Im(z)=−5.

Dois números complexos z=a+bi e w=c+di são iguais se, e somente se, a=c e b=d.

Adição de subtração de números complexos:

Sejam os números complexos z=a+bi e w=c+di. Definimos a adição e a subtração entre os números complexos z e w, respectivamente por:

$$z+w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$z-w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Produto de Números Complexos:

Sejam os números complexos z=a+bi e w=c+di.

Definimos o produto entre os números complexos z e w, por z.w = (a+bi).(c+di) = (ac−bd) + (ad+bc)i

Conjugado de um Número Complexo:

O conjugado de um número complexo z=a+bi é definido como o número complexo $\bar{z}$ =a−bi.

As propriedades gerais do conjugado são:

1. O conjugado do conjugado de z é igual a z, isto é, z =$\bar{z}$.
2. O conjugado da soma de dois números complexos é igual à soma dos conjugados desses números, isto é, (z+w)= $\bar{z}$ +$\bar{w}$.
3. O conjugado do produto de dois números complexos é igual ao produto dos conjugados desses números, isto é, (z.w)=$\bar{z}$.$\bar{w}$.
4. Se z for um número real, o conjugado de z é o próprio z e além disso:

Divisão de Números Complexos:

Sejam os números complexos z=a+bi e w=c+di. Definimos a divisão entre z e w, por

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$$

Muitas vezes usaremos a notação mais simples z/w para representar a divisão de z por w.

O conjugado de um número complexo z=a+bi é definido como o número complexo $\bar{z}$ =a−bi.

As propriedades gerais do conjugado são:

5. O conjugado do conjugado de z é igual a z, isto é, (z)=$\bar{z}$.
6. O conjugado da soma de dois números complexos é igual à soma dos conjugados desses números, isto é, (z+w)= $\bar{z}$ +$\bar{w}$.
7. O conjugado do produto de dois números complexos é igual ao produto dos conjugados desses números, isto é, (z.w)=$\bar{z}$.$\bar{w}$.
8. Se z for um número real, o conjugado de z é o próprio z e além disso:

Re(z)=½(z+$\bar{z}$) e Im(z)=½(z−$\bar{z}$)

CAP. 2 **A FORMA CANÔNICA DE JORDAN**

Ao analisarmos as possíveis raízes do polinômio característico, nos deparamos com o caso em que as raízes são raízes complexas , portanto, não possui autovalores reais, sendo portanto a solução do sistema obtida no plano imaginário, ou seja a solução do sistema esta no conjunto dos números complexos. Portanto as raízes do polinômio característico serão obtidas por:

$\frac{(a+d)\pm i\sqrt{4(ad-bc)-(a+d)^2}}{2} = \alpha \pm i\beta$, o que nos remete ao teorema da forma canônica de Jordan.

Definição4: Uma matriz A diz-se <u>semelhante</u> a uma matriz B se existir uma matriz invertível P tal que $B = P^{-1} A P$.

Se A é semelhante a B então B é semelhante a A.

$PBP^{-1} = PP^{-1} A PP^{-1} \Rightarrow PBP^{-1} = A$ Denota se por $A \sim B$.

De acordo com o teorema da forma canônica de Jordan no caso 2x2:

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, e sejam λ_1 e λ_2 raízes do polinômio característico de A. Então ocorre uma das seguintes possibilidades:

1) $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ou seja A é diagonalizável.
2) $A \sim \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ onde $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$
3) $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ onde $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$

No primeiro caso as matrizes são diagonalizáveis, pois possui autovalores distintos, caso já abordado na introdução deste trabalho.

No segundo caso temos que $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ são raízes do polinômio característico, temos que estes são autovalores generalizados de uma matriz A. Supondo que exista uma matriz P e uma matriz J ambas de segunda de modo AP = PJ, então J é uma matriz semelhante a matriz A.

Nosso objetivo é então demonstrar a existência da Matriz J de tal forma que satisfaça a a igualdade AP = PJ.

Demonstração:

Seja A um matriz qualquer A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Sendo o polinômio característico P(λ)= λ^2 – Tr(A) λ + det.(A), temos que:

Δ = Tr(A) – 4det(A) < 0

Portando { A_{2x2} $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $(a – d)^2$ + 4bc < 0

- Sendo portanto uma solução cujas raízes complexas o que implica em não diagonalizáveis.

  λ_1= $\alpha + \beta i$ e $\bar{\lambda}_2 = \alpha - \beta i$ são raízes pertencentes ao conjuntos complexos

  Hipótese: PJ = AP tese A ~ J

  J($\alpha + \beta i$) = $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

  Seja a matriz A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, J=$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, W = (U + Vi) em que suas colunas são formadas a partir de autovetores complexos e λ= $\alpha + \beta i$, autovalor complexos de A. Seja P = [u,v] sendo portanto u e v as colunas da matriz P temos:

$$AW= \lambda W$$

  Temos que: AW = A(U + Vi) = Au+ Avi

$$\lambda W =(\alpha + \beta i)(U + Vi) = = \alpha U - \beta V + i(\alpha V + \beta U)$$

  logo: Au+ Avi = $\alpha u - \beta v + i(\alpha v + \beta u)$

Au = $\alpha u - \beta v$

Av= ($\alpha v + \beta u$)

Conclusão:

Au= $\alpha v - \beta u$ = $\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Av = $\beta u + \alpha v$= $\beta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$+ $\alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

PJ = [u, v] $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ ou seja

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha u_{1-}\beta v_1 & \vdots & \beta u_{1+}\alpha v_1 \\ \alpha u_{2-}\beta v_2 & \vdots & \beta u_{2+}\alpha v_2 \end{pmatrix}$$

$\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ - $\beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $\beta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

∴ concluímos que AP = PJ.

Analisando o sistema $\begin{cases} (\ a - \lambda)x + by = 0 \\ cx + (\ d - \lambda)y = 0 \end{cases}$ Seja (a – λ)x + by = 0, a primeira equação do sistema, isolando y teremos: Y= - $\frac{(a - \lambda)x}{b}$.

Seja A um matriz cujos raízes do polinômio característico sejam complexos, podemos encontrar os elementos que formam as colunas da matriz P ou seja os autovetores generalizados da matriz A.

$Exemplo$:

$Seja\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

O polinômio característico de A é p(λ) = $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ e portanto os autovalores são:

$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{22-4.2}}{2}$ = -1 $\pm i$

Portanto -1 $\pm i$ são autovalores complexos da matriz A, onde:

λ_1 = -1 + i e λ_2 = -1-i .

Para encontrarmos os autovetores complexos utilizaremos:

Supondo que x = 1 temos:

Y= - $\frac{(a-\lambda)x}{b}$,logo: y = - $\frac{(0-(-1+\mathrm{i})1}{1}$ → y = -1 + i

Como x = 1e y = -1 + i temos que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ + i$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Temos então vetores reais u = $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e v= $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que são linearmente independentes e portanto constituem uma base B = [u,v] logo P = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. De posse das Matrizes A, P e J podemos verificar se satisfaz a igualdade AP = PJ

AP = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

PJ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$=

Portanto: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ ~ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

No 3º caso da forma Canônica de Jordan analisamos o matrizes que possui apenas uma autovalor real.Dessa forma:

Dado a matriz A_{2x2} $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, seja o polinômio característico da matriz A tal que o polinômio possua apenas uma raiz, ou seja, duas raízes iguais então:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a+d}{2}$

Neste caso dizemos que o discriminante do polinômio característico é zero.

Logo $\Delta = (a-d)^2 - 4bc$=0

Temos portanto dois sub casos a considerar:

I: A matriz (A – λI) = 0 o que significa que A = λI e portanto já é diagonal.

II: A matriz (A – λI) não e nula. Neste caso existe um vetor W tal que (A – λI) $w \neq 0$

Aplicando a propriedade distributiva da matemática :

(A – λI) w = Aw – λw = v →Aw = λw + v

Substituindo λ e realizando alguns cálculos temos que:

$(A - \lambda I)^2 = A^2 - 2A\lambda + \lambda^2 I =$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - 2\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\lambda a & -2\lambda b \\ -2\lambda c & -2\lambda d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc - 2\lambda a + \lambda^2 & ab + bd - 2\lambda d \\ ac + dc - 2\lambda c & bc + d^2 - 2\lambda d + \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analisando cada um dos elemento da igualdade acima temos:

$C_{11} = a^2 + bc - 2\lambda a + \lambda^2 = 0$

$$= a^2 + bc - 2a\left(\frac{a+d}{2}\right) + \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = 0$$

$$= a^2 + bc - a^2 - ad + \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = 0$$

$= \frac{4bc - 4ad + a^2\ 2ad + d^2}{4}$ = 0

= $(a + d)^2$ – 4(ad – bc) = $\Delta = 0$

C_{12} = ab + bd - 2λb = 0

= ab + bd – 2b $\left(\frac{a+d}{2}\right)$= 0

= ac + dc – ac –dc = 0

C_{21} = ac + dc - 2λc = 0

= ac + dc – 2c$\left(\frac{a+d}{2}\right)$= 0

= ac + dc – ac –dc = 0

C_{22} = $bc + d^2 - 2\lambda d + \lambda^2 = 0$

= $bc + d^2 - 2d\left(\frac{a+d}{2}\right) + (\frac{a+d}{2})^2 \quad = 0$

= $bc + d^2 - ad - d^2 + (\frac{a+d}{4})^2 \quad = 0$

= $\frac{bc - ad + (a+d)^2}{4}$ = 0

= 4bc -4ad + $(a+ d)^2$ =0

$(a + d)^2$ – 4(a +d – bc) = $\Delta = 0$

Inicialmente escolhemos w = (w_1,w_2) um vetor que não é autovetor ou seja (A – λI)w≠ $\overline{0}$

Então:

(A- λI)v= (A-λI)(A-λI)w

$(A-\lambda I)^2 v = \bar{0}v = \bar{0}$

Logo v é autovetor de A

Da definição de v segue que: Aw = v + λw

Assim:

P = [v w] = $\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ e J= $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ são tais que:

Ap = A [v w] = [Av Aw] = [λvv + λw] =

$= \begin{pmatrix} \lambda v_1 & v_1 & + & v_1 + \lambda w_1 \\ \lambda v_2 & v_2 & + & v_2 + \lambda w_2 \end{pmatrix}$ = PJ

Exemplo:

Seja A$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ temos que o polinômio λ^2 – (a + d) λ + (ad –cb) = 0 é polinômio característico. Logo:

Δ = $\frac{a+d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$

Δ = $\frac{1+1\pm\sqrt{(1-1)^2+4(0)(-2)}}{2}$

$\frac{2\pm\sqrt{0}}{2}$ temos portanto uma única raiz: λ_1= 1 λ_2 = 1, apresentando apenas um auto valor.

Queremos mostrar que AP= P$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Temos que (a- λI) = $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Multiplicando $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ por um vetor w =$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que não e autovetor da matriz temos:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq 0$ encontramos então um vetor v= $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ que por ser um múltiplo da matriz A, é um autovetor da matriz A.

Verificando a igualdade AP= P$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ temos:

$AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

P$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

Logo concluímos que AP =PJ

CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Este trabalho foi importante na compreensão do teorema da Forma canônica de Jordan, uma vez que ao construirmos uma matriz J de segunda ordem observamos que os autovalores complexos são as raízes do polinômio característico, Todo número complexo é formado de um numero real α conjugado com um numero imaginário β logo verificamos que os elementos reais α dos autovalores complexos formam os elementos da diagonal principal da matriz J enquanto os elementos β imaginários formam os elementos da diagonal secundária de J.

Dessa forma verificamos que, dada uma matriz A de segunda ordem que não possuir autovalores reais, podemos encontrar uma matriz J semelhante a matriz A, de modo que J = $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

De modo análogo verificamos que quando uma matriz possuir apenas um autovalor real, ainda de acordo com o teorema de Jordan , podemos encontrar uma matriz J semelhante a Matriz A, de modo que J = $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Este trabalho foi desenvolvido de forma simples uma vez, que permitirá a compreensão de alunos e professores que tenham o intuito de melhor compreender o Teorema da Forma canônica de Jordan.

REFERENCIAL TEÓRICO

(1) CARMO,M.P, Morgado, A.C., Wagner, E. e Pitombeira, J.B. Trigonometria e Números Complexos. CPM, SBM.

(2) BARRETO Filho,Benigno, 1952, Matemática aula por aula:vol. Único: ensino médio/ Benigno Barreto Filho, Cláudio Xavier Barreto- São Paulo: FTD, 2000.

(3) HILL, D. R.; KOLMAN, B. Introdução à Álgebra Linear com aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

(4) LEON, S. J. Álgebra Linear com Aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

(5) POOLE, D. Algebra Linear. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

(6) SANTOS, REGINALDO Matrizes, Vetores e Geometria Analítica / Reginaldo J. Santos – Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2010

ANEXOS

NÚMEROS COMPLEXO

História

O conceito de número complexo teve um desenvolvimento gradual. Começaram a ser utilizados formalmente no século XVI em fórmulas de resolução de equações de terceiro e quarto graus.

Os primeiros que conseguiram dar soluções a equações cúbicas foram Scipione del Ferro e Tartaglia. Este último, depois de ter sido alvo de muita insistência, passou os resultados que tinha obtido a Girolamo Cardano, que prometeu não divulgá-los. Cardano, depois de conferir a exatidão das resoluções de Tartaglia, não honrou sua promessa e publicou os resultados, mencionando o autor, em sua obra Ars Magna de 1545, iniciando uma enorme inimizade.

A fórmula deduzida por Tartaglia afirmava que a solução da equação $x^3 + px + q = 0$ era dada por

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}.$$

Um problema inquietante percebido na época foi que algumas equações (as equações que tem três raízes reais, chamadas de casus irreducibilis levavam a raízes quadradas de números negativos.

Por exemplo, a equação:

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

tem três raízes reais, como se pode observar facilmente ou pelo gráfico da função:

$$f(x) = x^3 - 15x - 4$$

ou por fatoração:

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1) = 0$$

se e somente se:

$x = 4;$
$x = -2 - \sqrt{3};$

ou:

$x = -2 + \sqrt{3}.$

Entretanto, usando-se a fórmula de Tartaglia, chega-se a:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Essa questão evidenciou o fato de que havia mais a se investigar e a se aprender sobre os números.

Rafael Bombelli experimentou escrever as expressões:

$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$

na forma:

$a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$

respectivamente. Admitindo válidas as propriedades usuais das operações tais como comutativa, distributiva etc., usou-as nas expressões obtidas, obtendo *a* = 2 e *b* = 1. Com isso, chegou a:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

No início, os números complexos não eram vistos como números, mas sim como um artifício algébrico útil para se resolver equações. Descartes, no século XVII, os chamou de *números imaginários*.

Abraham de Moivre e Euler, no século XVIII começaram a estabelecer uma estrutura algébrica para os números complexos. Em particular, Euler denotou a raiz quadrada de -1 por *i*. Ainda no século XVIII os números complexos passaram a ser interpretados como pontos do plano (plano de Argand-Gauss), o que permitiu a escrita de um número complexo na forma polar. Com isso, conseguiu-se calcular potências e raízes de modo eficiente e claro. Ainda no século XVIII, Gauss demonstrou