

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS (UFMG)**

**ADÉLIO DANIEL DE SOUSA FREITAS**

**O ESTUDO DA DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS  
DE 2º ORDEM.**

**BELO HORIZONTE**

**2012**

**ADÉLIO DANIEL DE SOUSA FREITAS**

**O ESTUDO DA DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS DE 2º  
ORDEM.**

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática da UFMG, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Especialista em Matemática para Professores, com Ênfase em Matemática do Ensino Básico (Orientador: Prof. Jose Antonio G Miranda).

**BELO HORIZONTE**

**2012**

**ADÉLIO DANIEL DE SOUSA FREITAS**

**O ESTUDO DA DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS  
DE 2º ORDEM.**

Data de aprovação: \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

---

Professor: José Antônio Gonçalves Miranda

---

Professor: Ezequiel Rodrigues Barbosa

---

Professor: Viktor Bekkert

## RESUMO

Esta pesquisa teve como proposta o estudo da Diagonalização de matrizes simétricas de segunda ordem. Dando ênfase aos processos de descobrir autovalores e autovetores a partir do estudo de um polinômio característico de segundo grau.

O objetivo foi desenvolver estratégias que permitissem a um professor de matemática trabalhar com a Diagonalização de matrizes, sem ficar preso à álgebra linear, proporcionando maior entendimento por parte do discente, uma vez que, normalmente os alunos do ensino médio regular encontram-se familiarizados com cálculos algébricos, e através do estudo de um polinômio de segundo grau denominado: polinômio característico possa identificar os autovalores e autovetores associados ao processo de Diagonalização. Ao final identificar possíveis aplicações.

Palavras-chave: diagonalização de matrizes simétricas.

## Agradecimentos

Agradecemos a Deus e a minha esposa Tatiane, pelo incentivo e perseverança nas horas difíceis. Aos professores desta instituição que fizeram parte dessa jornada.

## SUMARIO

<b>Introdução.....</b>	<b>7</b>
<b>Cap.1: O ESTUDO DO POLINOMIO CARACTERISTICO DE MATRIZES DE SEGUNDA ORDEM.....</b>	<b>10</b>
<b>Cap. 2. DIAGOANALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMETRICAS.....</b>	<b>16</b>
<b>Cap.3: Identificação e Simplificação Geral das equações das cônicas.....</b>	<b>19</b>
<b>Considerações Finais.....</b>	<b>22</b>
<b>Referências.....</b>	<b>23</b>

## INTRODUÇÃO

Durante o período de especialização, sentir a necessidade de aprofundar meus conhecimentos no que tange ao ensino de matrizes, mais especificamente no estudo de Diagonalização de matrizes simétricas de segunda ordem. O objetivo foi desenvolver estratégias que permitissem a um professor de matemática trabalhar com a Diagonalização de matrizes, sem ficar preso à álgebra linear, proporcionando maior entendimento por parte do discente, uma vez que, normalmente os alunos do ensino médio regular encontram-se familiarizados com cálculos algébricos, e através do estudo de um polinômio de segundo grau denominado: polinômio característico seja capaz de identificar os autovalores e autovetores associados ao processo de diagonalização e analisar o processo de diagonalização em matrizes simétrica de segunda ordem.

### **Teorema:**

Seja  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}_{2 \times 2}$  então A é uma matriz diagonalizável

Matrizes simétricas têm características particulares em relação aos seus autovalores e autovetores, estamos interessados em encontrar condições sob as quais uma matriz simétrica é diagonalizável. Dessa forma buscamos a partir do conceito de diagonalização verificar que fatores garantem a diagonalização de matrizes simétricas.

Ao estudarmos diagonalização de matrizes simétricas de segunda ordem, revisaremos o conteúdo diagonalização de matrizes, enfatizando algumas definições importantes para que ocorra efetivamente a compreensão do processo de transformar uma matriz A de ordem dois diagonalizável em uma matriz D diagonal.

**Definição 1:** Matriz diagonal é uma matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero. Sendo que os elementos da diagonal principal podem ser, ou não, iguais a zero.

**Definição 1.1:** uma matriz quadrada  $A = A(a_{ij})_{n \times n}$  é invertível ou não singular, se existe uma matriz  $B = (b_{ij})_{n \times n}$  tal que:

$$AB = BA = I_n$$

A matriz B diz se inversa de A e escreve-se  $B = A^{-1}$

Caso a matriz A não possuir inversa dizemos que A é singular ou não invertível.

**Definição 1.2:** “uma matriz  $A_{n \times n}$ , é diagonalizável, se existem matrizes P invertível e D diagonal tais que  $A = PDP^{-1}$ , ou equivalente,  $AP = PD$ .”

Sendo A uma matriz diagonalizável, as colunas da matriz P, são autovetores associados a autovalores, que por sua vez são elementos da matriz Diagonal D.

**Definição 1.3:** Um vetor não nulo é dito um autovetor v se existe um número real  $\lambda$  tal que  $Av = \lambda v$ .

**Definição 1.4:** um numero real  $\lambda$  é chamado de autovalor se existir um vetor não nulo v em  $R^n$  de modo que  $Av = \lambda v$ .

Portanto um escalar  $\lambda$  é um autovalor de A se existe um vetor não nulo v associado a  $\lambda$ , e conseqüentemente o vetor v é um autovetor de A, associado a  $\lambda$ , de modo que  $Av = \lambda v$

Exemplo 1:

Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ como } Av = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3v$ , logo  $\lambda = 3$  é um autovalor de A e  $v = (1 \ -2)^t$  é um autovalor associado a  $\lambda$ .

De fato, qualquer múltiplo não nulo de v também é um autovetor, já que:

$$A(\alpha x) = \alpha Ax$$



Sendo  $\alpha$  escalar, temos que o produto de números reais é comutativo e o produto de escalar por vetor é associativo, então temos que:

$$\alpha Av = \alpha \lambda v \rightarrow \lambda(\alpha v)$$

Para que A seja diagonalizável ainda é necessário que a matriz P seja invertível.

Da relação  $AP=PD$ , podemos identificar um polinômio denominado: polinômio Característico. O entendimento do polinômio característico é muito importante no estudo de diagonalização de matrizes, pois a partir das raízes do polinômio característico de uma matriz A, identificamos os autovalores e os autovetores associados.

**Definição 1.5:** O polinômio característico de uma matriz A é um polinômio de grau n na variável  $\lambda$  obtido pela expansão do determinante

$$p(\lambda) = \det.(A - \lambda I).$$

A raiz do polinômio característico  $\lambda$  será autovalor de A se e somente se a equação tiver uma solução não trivial, ou seja:  $\det.(A - \lambda I) = 0$

**Definição 1.6:** Determinante de uma matriz é uma função matricial que associa a cada matriz quadrada um escalar. Esta função permite saber se a matriz tem ou não inversa, pois as que não têm são precisamente aquelas cujo determinante é igual a zero.

Ressaltamos que para o caso em que a matriz  $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , temos que  $\text{Det.}(A) = (ad - bc)$

Desenvolvemos então um estudo a fim de aprofundar o conhecimento acerca do polinômio característico, mais precisamente no que se refere ao caso em que as matrizes são quadradas de ordem dois. O desenvolvimento desse estudo é retratado no segundo capítulo deste trabalho.

## Cap.1: O ESTUDO DO POLINOMIO CARACTERISTICO DE MATRIZES DE SEGUNDA ORDEM

O propósito deste capítulo é descrever o estudo desenvolvido na busca de facilitar a compreensão a cerca de polinômio característico de uma matriz quadrada de segunda ordem, demonstrando sua relação com autovalores e autovetores associados a uma matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ .

Partindo da definição de diagonalização de matrizes, temos que uma matriz  $A$  será diagonalizável se existir matrizes  $P$  e  $D$  que satisfazem a igualdade:  $A = PDP^{-1}$  em que  $P$  é uma matriz constituída de duas colunas formadas pelos autovetores associados a autovalores da matriz  $A$ , e  $D$  uma matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são justamente os autovalores associados à matriz  $A$ . Devemos nos ater que a igualdade somente existirá caso a matriz  $P$  seja invertível.

Portando seja  $P = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$   $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , Supondo que  $v_1$   $v_2$   $w_1$   $w_2$  são autovetores linearmente independentes associados a  $\lambda_1$   $\lambda_2$ , respectivamente, teremos que a matriz  $P$  é invertível.

Multiplicando por  $P$  ambos os lados da igualdade  $A = PDP^{-1}$  obtivemos que  $AP = PDP^{-1}P$ , como  $PP^{-1} = I$ , que é o elemento neutro do produto de matrizes, concluímos que  $AP = PD$ .

Sejam :

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  e  $P = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ . usando as definições de  $P$  e  $D$  temos que:

$$AP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 & aw_1 + bw_2 \\ cv_1 + dv_2 & cw_1 + dw_2 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & w_1 \lambda_2 \\ \lambda_1 v_2 & w_2 \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Como  $AP = PD$  temos que:  $av_1 + bv_2 = \lambda_1 v_1$ , e  $aw_1 + bw_2 = \lambda_2 w_2$ , portanto  
 $AV = \lambda V$

Temos então um sistema de duas equações com duas incógnitas. De acordo com a definição **1.5**, as raízes do polinômio característico  $\lambda$  será autovalor de  $A$  se e somente se a equação ter uma solução não trivial.

Desse modo seja a matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2 \times 2}$   $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  autovetores linearmente independente e  $\lambda$  autovalor de  $A$  temos:

$$1) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases}$$

Para que a solução do sistema acima tenha solução não trivial temos que:

$$\begin{cases} ax - \lambda x + by = 0 \\ cx - \lambda y + dy = 0 \end{cases}$$

Colocando  $x$  e  $y$  em evidencia temos:

$$\begin{cases} (a - \lambda)x + by = 0 \\ cx + (d - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Temos, portanto dois casos a considerar:

1º caso  $\lambda \neq a$

$$\text{Multiplicando } \left( \frac{-c}{(a-\lambda)} \right) (a - \lambda)x + by = 0$$

$$\text{Somando com } cx + (d - \lambda)y = 0$$

$$\text{Temos: } \left( \frac{-cb}{(a-\lambda)} + (d - \lambda) \right) y = 0$$

Igualando ao mesmo denominador:

$$\left( \frac{-cb + (a-\lambda)(d-\lambda)}{(a-\lambda)} \right) y = 0$$

$$\left( \frac{-cb + ad - a\lambda + d\lambda + \lambda^2}{(a-\lambda)} \right) y = 0$$

$$\left( \frac{\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - cb)}{(a-\lambda)} \right) y = 0$$

Neste caso o sistema (1) tem solução não nula se e somente se  $\lambda$  é raiz do polinômio  $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - cb)$ .

2º caso  $\lambda = a$

Se  $\lambda = a$  teremos que o polinômio possuirá raízes se e somente se  $c$  ou  $b$  igual a zero.

Se  $b \neq 0$  implica que  $y$  igual a zero e implica que  $c$  igual a zero

Se  $b = 0$  e  $c = 0$  implica que  $\lambda \neq 0$  ou seja  $\lambda = a$  ou  $\lambda = d$  que é raiz do polinômio  $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - cb) = 0$  que é válido portanto para todo  $\lambda$ , podendo ser então **chamado de polinômio característico**, onde:  $(a + d)$  é o traço da Matriz  $A$ , e  $(ad - bc)$  é o determinante da matriz  $A$ .

Portanto mostramos que o sistema (1) terá solução não nula se e somente se  $\lambda$  é uma raiz real do polinômio  $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - cb)$ , ou seja  $\lambda$  é autovalor se e somente se for raiz do polinômio.

Podemos então escrever o polinômio com a seguinte notação:  $P(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det.(A)$ , o discriminante dessa equação dependerá dos elementos da matriz  $A$ . Sendo, portanto  $\Delta = \text{Tr}^2(A) - 4\det.(A)$ .

Ou seja:

$$\Delta = (a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc) \rightarrow (a - d)^2 + 4bc$$

As raízes do polinômio característico serão obtidas:

$$\lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc}}{2}$$

$$\frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$$

Temos então três casos a se considerar:

1º caso:  $\Delta > 0$  existirá duas raízes reais.

2º caso  $\Delta = 0$  existirá apenas uma raiz real.

3º casos  $\Delta < 0$  não existirá raiz real.

Exemplo 1:

$$\Delta > 0$$

$$\text{Dada } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos :

$$\Delta = \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$$

$$\Delta = \frac{1+1 \pm \sqrt{(1-1)^2 + 4(-1)(-4)}}{2}$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \quad \text{temos portanto duas raízes: } \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -1$$

Exemplo 2:

$$\Delta = 0$$

$$\text{Dado } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$$

$$\Delta = \frac{1+1 \pm \sqrt{(1-1)^2 + 4(0)(-2)}}{2}$$

$\frac{2 \pm \sqrt{0}}{2}$  temos portanto uma única raiz:  $\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 2$ , apresentando apenas um auto valor.

Exemplo 3 :

$$\Delta < 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$$

$$\frac{2+2 \pm \sqrt{(2-2)^2 + 4(-3)(3)}}{2}$$

$$\frac{4 \pm \sqrt{-36}}{4} \text{ Como o discriminante menor que zero não há autovalores reais.}$$

Sendo, portanto  $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - cb)$  um polinômio característicos, busquemos agora identificar os autovetores associados aos autovalores.

$$\text{Analisando o sistema } \begin{cases} (a - \lambda)x + by = 0 \\ cx + (d - \lambda)y = 0 \end{cases} \text{ Seja } (a - \lambda)x + by = 0, \text{ a}$$

primeira equação do sistema, isolando  $y$  teremos:  $y = -\frac{(a - \lambda)x}{b}$ , com  $b \neq 0$

Utilizando o 1º caso como exemplo temos que:

Dada a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ , vamos tentar encontrar os autovetores associados aos seus autovalores.

Seja  $(a - \lambda)x + by = 0$ , a primeira equação do sistema, isolando  $y$  teremos:

$$-y = \frac{(a - \lambda)x}{b} = -y = \frac{(1-3)x}{-1} \equiv -y = 2x (-1)$$

$y = -2x$  chamando  $y$  e  $x$  de  $\alpha$  temos que:

$$y = -2\alpha \quad x = \alpha \text{ logo } S = \{ \alpha, -2\alpha \}$$

$$-y = \frac{(1+1)x}{-1} \equiv -y = 2x (-1) = y = 2x$$

Chamando  $y$  e  $x$  de  $\alpha$  temos que  $y = 2\alpha x = \alpha$ , logo  $S = \{ \alpha, 2\alpha \}$ , dessa forma podemos construir a matriz  $P$ , uma vez que os autovetores encontrados devem formar as colunas da matriz  $P$ . desse modo  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

Fazendo  $AP = PD$  encontramos facilmente a matriz diagonal semelhante à matriz  $A$ . Dessa forma  $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Após termos revisado o processo de diagonalização em matrizes quadradas de segunda ordem, bem como verificado o polinômio característico da mesma, trataremos a partir do terceiro capítulo da avaliação de matrizes simétricas e conseqüentemente do estudo do teorema:

**Teorema:**

Seja  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}_{2 \times 2}$  então  $A$  é diagonalizável.

## Cap. 2. DIAGOANALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS

O Objetivo desse capítulo é estudar o processo de Diagonalização em matrizes simétricas, se  $A = A^T$ , quadradas de segunda ordem. Verificando condições que garantem a diagonalização a fim de elucidar o teorema:

Seja  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}_{2 \times 2}$  então  $A$  é uma matriz simétrica e diagonalizável

A matriz simétrica tem características particulares em relação aos seus autovalores e autovetores, queremos aqui demonstrar, que os autovalores de uma matriz simétrica sempre serão números reais.

**Lema: Matrizes simétricas possuem autovalores reais e distintos**

Se  $A$  é simétrica então  $\Delta \geq 0$

Demonstração:

Suponha  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}_{2 \times 2}$  uma matriz simétrica.

Seja  $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - c^2) = 0$  polinômio característico de  $A$ .

Temos que o discriminante desse polinômio será:

$$\Delta = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4c^2$$

Em matrizes simétrica de segunda ordem temos que  $b = c$  logo:

$$\Delta = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4c^2 \rightarrow \Delta = (a - d)^2 + 4c^2$$

Ora a soma de dois quadrados, de forma alguma será negativa.

Logo:  $\Delta \geq 0$

Temos então dois casos a considerar:

1º caso:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow a = d \text{ e } c = 0 \rightarrow A = I_n \text{ portanto } A \text{ é diagonal .}$$

2º caso:

Se  $c \neq 0 \rightarrow \Delta > 0$  Quando o discriminante de uma equação quadrática é maior que zero, sabemos que tal equação apresenta duas raízes distintas, o que no caso do polinômio característico nos garantem dois autovalores distintos.



Um produto escalar de vetores ortogonais e ortonormais no plano é tal que:

Seja  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$  e  $P$  o produto escalar definido como  $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$ . Quando escrevemos os vetores como matrizes colunas vale que  $uv = u^T v$ .

Dois vetores  $u$  e  $v$  de  $V$  são ortogonais se e somente se  $u \cdot v = 0$ .  $u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$ . Isto geometricamente significa que são perpendiculares.

Dessa forma verificaremos outras maneiras de garantir a diagonalização de matrizes simétricas de segunda ordem, para tanto estudaremos o 2º e 3º teorema que retrata a diagonalização de matrizes ortogonalmente diagonalizável:

### **Teorema 2:**

Se  $A$  é ortogonalmente diagonalizável então  $A$  é simétrica.

Demonstração:

Se  $A$  é ortogonalmente diagonalizável, então existe uma matriz ortogonal  $Q$  e uma matriz diagonal  $D$  tais que  $Q^T A Q = D$ .

Como  $Q^{-1} = Q^T$ , temos que  $Q^T Q = I = Q Q^T$

Assim :

$$Q D Q^T = Q Q^T A Q Q^T = I A I = A$$

Então:

$$A^T = (Q D Q^T)^T = (Q^T)^T D^T Q^T = Q D Q^T = A$$

Uma vez que toda matriz diagonal é simétrica concluímos que  $A$  é simétrica.

Concluímos então que toda matriz simétrica é ortogonalmente diagonalizável.

### **Teorema 3:**

Se  $A$  é uma matriz simétrica, então dois autovetores quaisquer, correspondentes aos autovalores distintos de  $A$ , são ortogonais.

Demonstração:

Sejam  $v_1$  e  $v_2$  autovetores correspondentes aos autovalores distintos  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , de modo que:  $Av_1 = \lambda_1 v_1$  e  $Av_2 = \lambda_2 v_2$ , usando  $A^T = A$  e o fato de que  $xy = x^T y$  para dois vetores  $x$  e  $y$  quaisquer  $\mathbb{R}^2$ , temos:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot (v_1 \cdot v_2) &= (\lambda_1 \cdot v_1) \cdot v_2 = Av_1 \cdot v_2 = (Av_1)^T v_2 \\ &= (v_1^T A^T) v_2 = (v_1^T A) v_2 = v_1^T (Av_2) \\ &= v_1^T (\lambda_2 v_2) = \lambda_2 (v_1^T v_2) = \lambda_2 (v_1 \cdot v_2) \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } (\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 \cdot v_2) = 0$$

Mas  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ , por isso  $v_1 \cdot v_2 = 0$  como queríamos demonstrar

Dessa identificamos as condições que garantem que matrizes simétricas são matrizes ortogonalmente diagonalizáveis.

### Cap. 3 IDENTIFICAÇÃO E SIMPLIFICAÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL DAS CONICAS

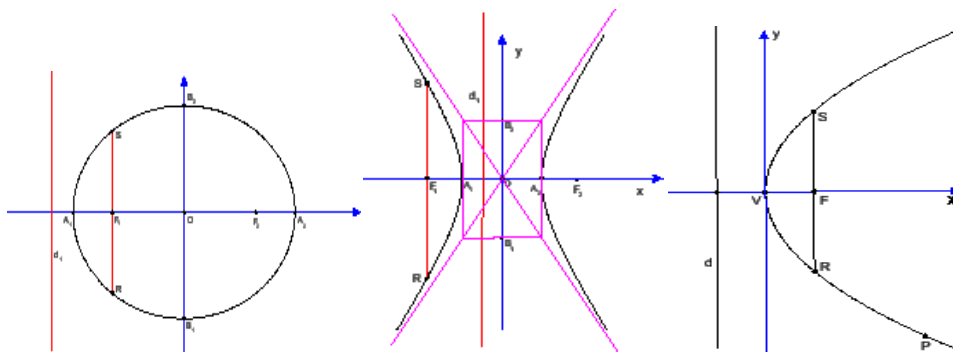
O objetivo deste capítulo é o de identificar possíveis aplicações, em que o estudo de diagonalização de matrizes simétricas de segunda ordem, possa contribuir como uma ferramenta matemática capaz de facilitar determinados cálculos.

Uma possível aplicação da diagonalização de matrizes simétricas está relacionada à identificação e simplificação da equação de uma cônica.

Chama-se cônica ao lugar geométrico dos pontos  $\mathbb{R}^2$  cujas coordenadas  $(x, y)$  em relação à base canônica, satisfazem a equação de segundo grau.

$$ax^2 + by^2 + 2xy + dx + ey + f = 0$$

Na qual  $a, b, c$  não são todos nulos. A representação cônica pode ser obtida da intersecção de um cone circular com um plano. As cônicas mais importantes são: elipse, hipérbole e parábola, essas cônicas são chamadas de cônicas não degeneradas.



Em nosso estudo vamos considerar apenas equações homogêneas de grau dois, ou seja,  $d=f=e=0$ .

A equação de uma cônica na posição padrão não possui o termo em  $xy$  (chamado de termo cruzado). A presença do termo cruzado na equação indica que a cônica saiu da posição padrão devido a uma rotação.

O problema de identificar tais cônicas se reduz a encontrar um sistema de coordenadas mais apropriado, em que a equação do segundo grau tem a forma mais simples possível e permite a identificação imediata da curva através da comparação com equações modelos.

Para identificar a cônica não degenerada cujo gráfico não está na posição padrão e cuja equação apresenta o termo cruzado, realiza-se uma rotação ou mudança de sistema de coordenadas, através de mudança de base, da canônica para uma base de autovetores ortonormais.

Dessa forma fazendo uso da diagonalização de matrizes simétricas como ferramenta auxiliar podemos escrever a equação da cônica  $ax^2 + by^2 + 2cxy = 0$  na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad (1) \text{ onde } v_C = (x \ y), A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \text{ e } C = \{ (1,0), (0,1) \}$$

A matriz quadrada de segunda ordem  $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$  é uma matriz simétrica, sabemos que matrizes simétricas possuem dois autovalores distintos, portanto a matriz  $A$  é diagonalizável. Os autovalores da matriz  $A$  associados aos autovetores de  $A$ , formam uma matriz  $P$  que diagonaliza a matriz  $A$  ortogonalmente e a matriz diagonal  $D$  correspondente.

Mudança da base da canônica  $C$  para a base dos autovetores unitários  $P$ .

Como  $v_C = M_C^P v_P = C^{-1} \cdot P \cdot v_P = P \cdot v_P$ . Substituindo na equação (1)  $v_C$  por  $P \cdot v_P$

$$\text{Se } v_P = (x', y'), \text{ podemos escrever: } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \leftrightarrow [x \ y] = [x' \ y']$$

Substituindo  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  e  $[x' \ y']$  na equação (1), vem:

$$[x' \ y'] P^T \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 0$$

Como  $P^t . A . P = D$ , a equação assume a forma

$$[x' \ y'] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 0 \quad \text{Que é a equação da cônica em relação do sistema } x'y'.$$

A identificação de uma cônica só depende dos sinais dos autovalores, ou seja, se tem mesmo sinal é elipse sinais trocados hipérbole e um autovalor zero é parábola

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os estudos desenvolvidos para a elaboração deste trabalho nos proporcionaram ganhos consideráveis de conhecimentos relacionados à como diagonalizar uma matriz de segunda ordem, analisando possíveis dificuldades e buscando caminhos para solucioná-las. Mostraram-nos a importância desenvolver estratégias que permitissem à um professor de matemática trabalhar com a Diagonalização de matrizes, sem ficar preso à álgebra linear, proporcionando maior entendimento por parte do discente, uma vez que, normalmente os alunos do ensino médio regular encontram-se familiarizados com cálculos algébricos.

No que diz respeito às aplicações dos conceitos, pudemos perceber a a aplicação na identificação de uma cônica, bem como a simplificação da equação geral das cônicas.

Consideramos que se pudermos assim fazer com que o discente construa melhor os conceitos, então vale a pena disponibilizar-se de um tempo a mais para prepararmos situações em que a aprendizagem se efetiva.

**REFERENCIAL TEORICO:**

- (1) BARRETO Filho, Benigno, 1952, Matemática aula por aula:vol. Único: ensino médio/ Benigno Barreto Filho, Cláudio Xavier Barreto- São Paulo: FTD, 2000.
- (2) HILL, D. R.; KOLMAN, B. Introdução à Álgebra Linear com aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- (3) LEON, S. J. Álgebra Linear com Aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- (4) POOLE, D. Algebra Linear. São Paulo: Thomson Learning, 2006.
- (5) SANTO REGINALDO, Reginaldo Matrizes, Vetores e Geometria Analítica / Reginaldo J. Santos – Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2010