UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas - Departamento De Matemática

SIRLENE RESENDE DE FARIA

A CATENÁRIA

BELO HORIZONTE
2011

SIRLENE RESENDE DE FARIA

A CATENÁRIA

Monografia apresentada ao Programa de Pós–graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo da Universidade Federal de Minas Gerais UFMG, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientador: Paulo Antonio Fonseca Machado

BELO HORIZONTE
2011

SIRLENE RESENDE DE FARIA

A CATENÁRIA

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à obtenção do Título de especialista em Matemática com ênfase em Cálculo pela Universidade Federal de Minas Gerais.

Data da apresentação: 16/11/2011

Banca examinadora:

Alberto Berly Sarmiento Vera

Sacha Friedli

BELO HORIZONTE
2011

A matemática é a honra do Espírito Humano.

Leibniz

Sumário

Introdução

Esta monografia é um estudo realizado sobre aplicações de integral.

No primeiro capítulo, estudaremos o enfoque histórico do cálculo, com ênfase em Isaac Newton e Leibniz.

No segundo capítulo, demonstramos a equação da catenária, que descreve a curva de um cabo flexível, não elástico e homogêneo suspenso nas extremidades. Vamos estudar o problema de um cabo preso em seus dois extremos como os que empregados nas companhias elétricas para levar a corrente de alta tensão entre as centrais elétricas e os centros de consumo. A catenária como a ciclóide são duas curvas importantes na Física e na Matemática. A curva que descreve um cabo que está fixo por seus dois extremos e não está submetido a outras forças diferentes do seu próprio peso(gravidade) é uma catenária. A catenária foi confundida a princípio com a parábola(por Galileu Galilei) até que o problema foi resolvido pelos irmãos Bernoulli simultaneamente com Leibniz e Huygens.

Capítulo 1

Enfoque Histórico - os precursores do Cálculo

1.1 Isaac Newton

"Se eu enxerguei mais longe que Descartes é porque me sustentei sobre os ombros de gigantes."(Isaac Newton)

Isaac Newton (1642 - 1727), natural de Woosthorpe, norte da Inglaterra, foi um dos grandes gênios da ciência [3].

Por volta de 1669, fez a importante descoberta matemática, denominada dos *fluxos*, baseado no estudo das quantidade variáveis inerentes ao movimento. Newton observou que para descrever um movimento é necessário descrever um processo, ou seja, como o movimento ocorre em uma certa variação de tempo concomitante a uma variação da posição. Existe portanto, um processo, uma dinâmica que deve ser descrita.

Como todo processo é dinâmico, a descrição do movimento nos permite traduzir em linguagem matemática os mais diversos fenômenos da natureza. Newton conseguiu estabelecer uma relação entre curva e movimento, pensando na curva como movimento de um ponto no plano. Isto lhe permitiu desenvolver os métodos das *fluxions* - derivações - e *fluentes* - funções, utilizados na construção da mecânica clássica.

A grande motivação newtoniana ocorreu a partir da ideia que para descrever *movimento* é imprescindível pensar inicialmente em *variação*. Newton criou o conceito de **momento de fluente**, que pretendia descrever pequenas variações, e que equivale modernamente ao conceito de *diferencial*.

Como "toda função descreve uma variação", Newton denominou função de **fluente**, (alguns autores sugerem que este nome deveria ter preservado ao longo da história, dado seu caráter elucidativo).

Contudo, para descrever um movimento, não basta examinarmos a variação da posição sobre a variação do tempo, posto que isso resultaria em uma medida de velocidade, não descrevendo o movimento em si. A solução para esse problema é o conceito de derivada, que Newton denominou por **fluxo**.

Temos, portanto, a seguinte equivalência:

- Fluente $\leftrightarrow$ Função;
- Momento da fluente $\leftrightarrow$ Diferencial;
- Fluxo $\leftrightarrow$ Derivada.

Em notação moderna o fluxo equivale a $\frac{dy}{dt}$, onde t representa o tempo. Logo, fluxo do fluente é a taxa de variação da função.

Para Newton, a integração consistia em achar fluentes (funções) para um dado fluxo (derivada) considerando-se, desta maneira, a integração como inversa da derivação.

Até então os dois problemas eram considerados separadamente. A percepção de que se tratava de fato de um só problema foi uma das grandes contribuições de Newton e Leibniz para o cálculo.

Em resumo, pode-se dizer que o primeiro conceito criado por Newton foi de *diferencial* (momento do fluente), uma vez que é necessário definir-se a variação da função. Mas, como não é suficiente a variação da função, foi necessário pensar também na relação da posição com a variação do tempo para intervalos de tempo muito pequenos, ou seja, criou-se o conceito de *derivada* (fluxo). Newton denotava o fluxo de x por $\dot{x}$.

Newton ressaltou que se pode, em qualquer problema, cancelar os termos que aparecem multiplicados por potências de o expoentes iguais a ou maiores que 2 e encontrar uma equação envolvendo as coordenadas x e y do ponto gerador da curva e seus fluxos $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Essa idéia de desprezar estes termos, somente foi justificada através de conhecimentos primitivos de limite.

Transcreveremos abaixo um trecho de Baron (1985), no qual Newton define os fluxões e fluentes:

"Falta agora, como ilustração dessa arte analítica explicitarmos alguns problemas típicos e tão especiais como a natureza de curvas que os representam. Mas sobretudo eu observaria que as dificuldades dessa espécie podem ser todas reduzidas a somente dois problemas que proporei com vista ao espaço percorrido por qualquer movimento local acelerado ou retardado:"

Dado o comprimento do espaço percorrido continuamente (quer dizer em cada instante de tempo), ache a velocidade num instante qualquer. Dada continuamente a velocidade do movimento ache o comprimento do espaço percorrido num instante qualquer que é medido e representado por um segundo espaço x, que cresce com a velocidade uniforme, então $2\dot{x}x$ designará a descrição da velocidade pela qual o espaço no mesmo momento de tempo está sendo percorrido. E, portanto considerarei em seguida as quantidades como se fossem geradas por um aumento contínuo do espaço no qual um objeto se move descrevendo sua trajetória.

Não podemos ter porém, uma estimativa do tempo exceto no sentido de ser exposto e medido por um movimento local uniforme. Além disso, somente quantidade da mesma espécie e, do mesmo modo, a suas taxas de crescimento e decrescimento podem ser comparadas entre si. É por essas razões que no que se segue não considerarei o tempo como tal. Portanto, de uma das quantidades apresentadas que são da mesma espécie, suporei que elas aumentam num fluxo uniforme: a ela, e a todas as outras, podemos nos referir como se fossem o tempo. Assim, a palavra "tempo"não deve ser transferida erradamente a ela por simples analogia. Desta forma, se você encontrar em seguida a palavra "tempo"(como a tenho tratado no meu texto a fim de obter mais clareza e distinção) esse nome não deve ser entendido como tempo formalmente considerado, mas como sendo aquela outra quantidade cujo o aumento ou fluxo uniforme interpreta e mede o tempo.

Mas, para distinguir as quantidades que considero perceptíveis, porém indefinidamente crescentes, das outras que em todo caso devem ser conhecidas e determinadas e que são designadas pelas letras inicias a, b, c, etc. chamarei as primeiras de fluentes e designa-las-ei pelas letras finais v, x, y e z. As velocidades com as quais elas fluem e que aumentam pelo movimento gerador (que eu chamaria mais adequadamente de fluxões ou simplesmente velocidades) designarei pelas letras $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$: a saber para a velocidade da quantidade v colocarei $\dot{v}$ e para as velocidades das outras quantidades colocarei $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ respectivamente.

Ilustraremos a seguir o procedimento utilizado por Newton.
Considere a equação de uma curva cúbica:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0 \tag{1.1}$$

Substituindo-se x por $x+\dot{x}o$ (x mais variação do fluxo -derivada da fluente vezes variação do tempo num intervalo de tempo infinitamente pequeno, que em notação moderna fica $x + \frac{dx}{dt}.dt$) e y por $y + \dot{y}o$ (que, da mesma forma descrita para x, denota-se modernamente por $y + \frac{dy}{dt}.dt$), obtém-se:

$$[x + (\dot{x}o)]^3 - a[x + (\dot{x}o)]^2 + a[x + (\dot{x}o)].[y + (\dot{y}o)] - [y + (\dot{y}o)]^3 = 0$$

Desenvolvendo-se a expressão acima e simplificando obtemos:

$$\begin{gathered}(x^3 - ax^2 + axy - y^3) + 3x^2(\dot{x}o) + 3x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3 - 2ax(\dot{x}o) - 2a(\dot{x}o)^2 + \\ + ax(\dot{y}o) + a(\dot{x}o)y + a(\dot{x}o)(\dot{y}o) - 3y^2(\dot{y}o) - 3y(\dot{y}o)^2 - (\dot{y}o)^3 = 0\end{gathered}$$

Observe que de (1.1) o termo entre parêntesis na expressão acima é nulo, donde obtemos:

$$\begin{gathered}3x^2(\dot{x}o) + 3x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3 - 2ax(\dot{x}o) - 2a(\dot{x}o)^2 + ax(\dot{y}o) + \\ + a(\dot{x}o)y + a(\dot{x}o)(\dot{y}o) - 3y^2(\dot{y}o) - 3y(\dot{y}o)^2 - (\dot{y}o)^3 = 0\end{gathered}$$

Cancelando na expressão acima os termos nos quais o possui expoente maior ou igual a 2, tem-se que:

$$3x^2(\dot{x}o) - 2ax(\dot{x}o) + ax(\dot{y}o) + a(\dot{x}o)y + a(\dot{x}o)(\dot{y}o) - 3y^2(\dot{y}o) = 0$$

Dividindo por o (intervalo de tempo infinitamente pequeno) temos:

$$3x^2(\dot{x}) - 2ax(\dot{x}) + ax(\dot{y}) + a(\dot{x})y + \overbrace{a(\dot{x}o)y}^{0} - 3y^2(\dot{y}) = 0$$

Como: o tende para zero; o termo $a(\dot{x}o)y$ é considerado nulo, na expressão anterior. Obtemos assim:

$$3x^2(\dot{x}) - 2ax(\dot{x}) + ax(\dot{y}) + a(\dot{x})y - 3y^2(\dot{y}) = 0$$

Como se pode observar, o resultado obtido é a derivação implícita da expressão (1.1) onde se entende que y é função de x. Em notação moderna:

$$3x^2 - 2ax + axy' + ay - 3y^2y' = 0$$

Com efeito, Newton sabia que a derivada da velocidade, por exemplo, era a aceleração e a integral da aceleração era a velocidade.

Com o metódo dos fluxos Newton estudou vários problemas como determinar máximos e mínimos; tangentes a curvas; curvaturas de curvas; pontos de inflexão e concavidade; concavidades de curvas; quadraturas e retificações de curvas.

Newton considerou dois tipos de problemas:

- Dada uma relação entre fluentes (função) e fluxos (derivada) encontrar fluentes (função); como no exemplo acima.

- Dada uma relação entre fluxos (derivada) e fluentes (função) encontra-se fluentes (integrar).

1.2 Leibniz

"Tomando a matemática desde o início do mundo até o tempo de Newton, o que ele fez é de longe a melhor metade"(Leibniz)[3]

Baseado em [5], Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), natural de Leipzig, Alemanha, pode ser descrito como um homem de hábitos moderados, menos no trabalho. Um temperamento forte mas que facilmente se acalmava, muito autoconfiante e tolerante com diferenças de opiniões. É considerado um grande sábio do século XVII e o verdadeiro fundador da Matemática Moderna europeia.

Em 1673 sob orientação de Christiaan Huygens (1629-1695) , Leibniz iniciou seu estudo em escritos matemáticos de Pascal e outros. Foi analisando o artigo de Pascal, *Traité des sinus du quart de cercle* (tratado sobre os senos de um quarto de círculo), que identificou que a tangente de uma curva pode ser encontrada a partir do quociente das diferenças das coordenadas e das abscissas, e fazendo com que se tornassem infinitamente pequenas. Também observou que a área sob uma curva qualquer poderia ser obtida através da soma de retângulos de largura infinitamente pequenas preenchendo essa área. Através desses estudos percebeu que a diferenciação e integração são uma inversa da outra e estão ligados por meio do triângulo infinitesimal.

Em 1675 introduziu o símbolo moderno da integral, um "s"alongado, que tem como definição latina *summa* (soma), com o objetivo de indicar uma soma de indivisíveis. Semanas depois já escrevia diferenciais e derivadas, assim como integrais, em notações muito próximas das atuais, tal como dx,

dy e dy/dx, e as integrais sendo $\int(x)dy$ e $\int(y)dx$. Muito da notação moderna se deve a Leibniz.

Em 1684 foi publicado o primeiro artigo de Leibniz sobre cálculo diferencial, no qual apresentou as fórmulas para produtos, quocientes e potências, mas nunca tentou explicá-las ou justificá-las:

- $d(xy) = xdy + ydx$
- $d(\frac{x}{y}) = \dfrac{ydx - xdy}{y^2}$
- $d(x)^n = nx^{(n-1)}dx$

Leibniz pensava em dx e dy como incrementos infinitamente pequenos, ou "infinitesimais". Derivou estas formulas desprezando infinitesimais de ordem superior. Na visão de Leibniz para encontrar a diferencial de xy era só fazer o produto $(x + dx)(y + dy)$ menos a quantidade xy, ou seja:

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xy + xdy + ydx + dxdy - xy = d(xy)$$

Como $dxdy$ é infinitamente pequeno, pode então ser desprezada, tornando a diferencial de xy:

$$d(xy) = xdy + ydx$$

Leibniz estabeleceu a condição $dy = 0$ para máximos e mínimos, e ddy igual a zero para pontos de inflexão e fez várias aplicações geométricas. Em 1686 é publicado o segundo artigo de Leibniz sobre cálculo, no qual, sem explicações, ele afirma que integral e derivada são uma inversa da outra.

O Teorema Fundamental do Cálculo foi um grande passo decisivo. Este foi desenvolvido tanto por Leibniz como por Newton, de maneira independente, mas o enfoque Leibniziano é muito mais geométrico que o de Newton. Neste trabalho vamos priorizar a leitura que Newton empreendeu.

1.3 A evolução do cálculo após o século XVII

O cálculo descoberto no século XVII por Newton e Leibniz, foi notavelmente poderoso e eficiente para solucionar problemas que eram considerados sem solução em tempos anteriores. Devido a sua aplicabilidade, atraiu pesquisadores de diversas áreas da época. Uma pródiga produção se iniciou, os processos aplicados eram justificados com o argumento de que eles funcionavam, ou seja, não existia uma preocupação cuidadosa com os fundamentos do assunto. Algo novo, entretanto, começava a surgir.

Apesar de todo o avanço, a falta de consistência nos fundamentos do Cálculo oferecia um alvo fácil para a crítica, e esta partiu do filosófo George Berkeley (1685-1753). Para ele os principios utilizados no cálculo necessitavam de maior clareza e segurança. Tanto Newton quanto Leibniz tratavam com infinitésimos sem definir claramente o que seriam. A teoria de Newton abordava magnitudes contínuas e no entanto, postulava a divisibilidade infinita de espaço e tempo. Falava de um fluxo mas lidava com ele como se fosse uma sucessão de saltos diminutos.

Diz Berkeley:

> " Certos críticos rigorosos da lógica em religião acreditam e pressupõe todos esses pontos: são homens que dizem acreditar apenas naquilo vêem. Esses homens, que só tem tratado de pontos claros dificilmente admitiram que alguns pontos obscuros podem não parecer totalmente lógicos. Mas aquele que consegue digerir uma segunda ou terceira fluxão, uma segunda ou terceira diferença não precisa, creio, melindrar-se com nenhum ponto de divindade.(*apud* Baron (1985), pág.19)'"

Devido aos absurdos e contradições que tinham se insinuados na matemática e a necessidade de uma fundamentação lógica e rigorosa do cálculo, o século XVIII, foi dedicado à exploração de novos e poderosos métodos, mas, somente no século XIX os fundamentos do cálculo foram firmemente fixados. Estes consistiram em:

- Considerar as variáveis como funções de uma variável independente;
- Introduzir a função derivada como um conceito fundamental do Cálculo;
- Usar um conceito de limite bem explicito na definição de derivada.

Desta forma, as variáveis do Cálculo de 1700 foram substituídas por funções; as fluxões e diferenciais foram substituídas pela função derivada e a falta de clareza com relação às infinitesimais e razões últimas foi eliminada através do conceito de limite. Essa mudança nos conceitos fundamentais do

Cálculo foi um processo bastante complicado; pode ser considerado completo nos livros de Cauchy (1789 - 1857) por volta de 1820.

Com Cauchy, alcança-se o enfoque moderno do cálculo:

- o conceito fundamental do cálculo diferencial é a derivada definida como limite;
- o conceito de integral refere-se ao somatório e não o inverso diferenciação;
- portanto o teorema fundamental do cálculo tornou-se um teorema que precisa ser provado, ao invés de ser um corolário da definição de integral.

Capítulo 2

A Catenária

A catenária (do latim *catena*, corrente) é conhecida como uma curva que descreve o aspecto de um cabo suspenso por suas extremidades sumetido apenas à força da gravidade.

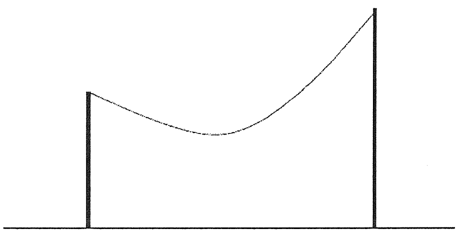

Figura 2.1 Catenária

O problema de descrever matematicamente a forma da curva formada por um fio suspenso entre dois pontos e sob ação exclusiva da gravidade foi proposto por Galileu Galilei, mencionando a conjectura de que a curva fosse uma parábola. Aos 17 anos de idade, o matemático e físico holandês Christiaan Huygens mostrou, em 1647, com argumentos físicos, que a conjectura era falsa sem, contudo, descobrir a expressão analítica da curva. Em 1669, um outro matemático, Joachim Jungius (1587-1657), publicou um trabalho também refutando a idéia de Galileu, de que a Catenária seria uma parábola.

Em 1690 Jakob Bernoulli desafiou publicamente os matemáticos da época a resolverem o problema da catenária, o que fez com que surgissem três soluções (dos matemáticos Johann Bernoulli, Huygens e Leibniz) as quais consistiam em uma descrição geometrica da curva (equivalente a sua equação) e em listas das principais propriedades da catenária, mas nenhuma das soluções explicavam o método pelo qual os resultados haviam sido encontrados. Comparando os três métodos conclui-se que o estudo da catenária contribuiu para os métodos matemáticos rivais, o euclidiano clássico e o novo cálculo diferencial. Huygens mostrou que o problema poderia ser resolvido através do estilo clássico. Leibniz e Bernoulli, resolveram através do cálculo diferencial, sendo suas soluções muito mais diretas que Huygens. Estas três soluções marcam o fim do estilo arquimediano na matemática, como o primeiro sucesso público do novo cálculo.

Com o objetivo de demonstrar como tal problema foi resolvido no século XVII apresentaremos a solução de Johann Bernoulli que é mais simples que de Leibniz.

A solução consiste em três partes. Bernoulli, primeiramente, deduz, a partir de argumentos da mecânica clássica dos corpos em equilibrío, uma equação diferencial que deve ser satisfeita pela curva, determinando assim a equação diferencial abaixo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}$$

onde s é o comprimento do arco e a é uma constante. Sabemos que:

$$s = \int \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]} dy$$

Observamos que a equação diferencial não pode ser resolvida diretamente, pois as variáveis x e y aparecem implicitamente em s.

Sendo assim, Bernoulli transforma a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a}{s}$ numa equação diferencial que envolve x e y explicitamente; obtendo:

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

Na terceira parte resolve esta equação determinando a curva que a satisfaz.

2.1 Dedução da equação catenária

A resolução determinada por Bernoulli consistiu numa construção geométrica, ou seja, por método formal de construção de pontos da curva, interpretando-a como uma área, pois na época em que resolveu o problema não tinha a sua disposição as funções logarítmicas e exponencial.

De acordo com seu raciocínio, as hipóteses levantadas sobre a corrente suspensa foram:

I) A corrente é completamente flexivel (Fig 2.2)

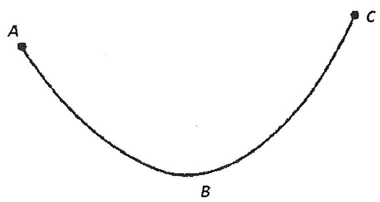

Figura 2.2

II) F_1 e F_2 são as forças necessárias para sustentar a corrente ABC em A e C, bem como para sustentar o peso D, que é igual ao peso da corrente ABC suspenso por cordas sem peso AD, CD ao longo das tangentes à curva em A e C (Fig 2.3 e 2.4)

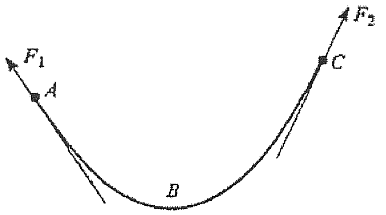

Figura 2.3

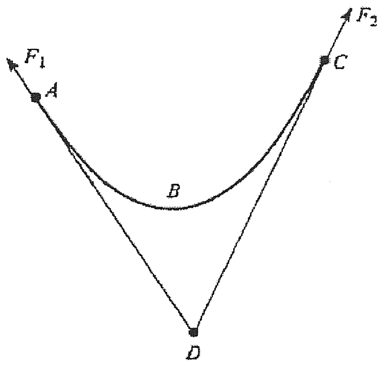

Figura 2.4

III) Se a corrente está livremente suspensa nos pontos fixos A e C, e se o ponto F for fixado e a parte AF retirada, a parte FBC não muda de forma, logo a corda é inextensível (Fig 2.5).

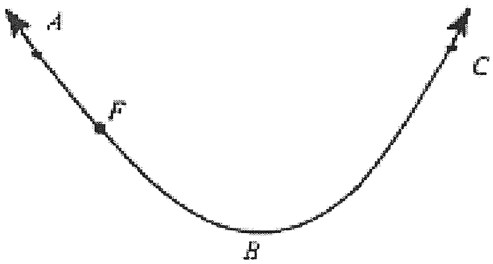

Figura 2.5

IV) Supondo-se agora que o ponto mais baixo da corrente, B, seja fixo, a hipótese (III), implica que a força $\overrightarrow{F_0}$ exercida pela corrente em B e que é necessária para manter a corrente na posição B, é independente da posição na catenária do outro ponto de suspensão A (Fig 2.6).

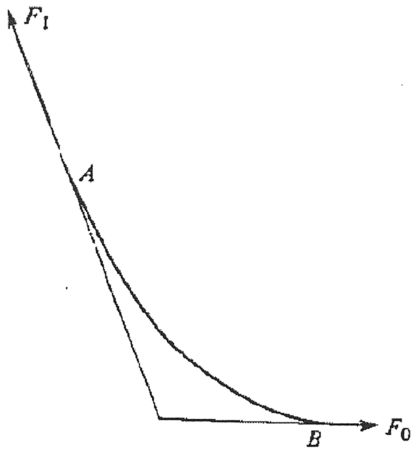

Figura 2.6

V) Se $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$, sustentam o peso $\overrightarrow{P}$ atuando no ponto D (Fig 2.4), com cordas sem peso formando ângulos ϕ_1 e ϕ_2 com a vertical, conforme figura abaixo.

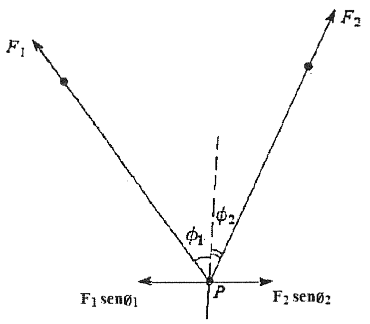

Figura 2.7

VI) Devido ao fato de haver equilibrío, a soma das forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ deve equiparar-se à força P; portanto a diagonal ao paralelogramo, formada por $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$, igual em comprimento à força P está situada na mesma linha. Decompondo-se F_1 e F_2 ao longo de eixos horizontais e verticais, ou seja, $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{P}$ as componentes $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ horizontais anulam-se, e a soma das verticais é igual a P. Portanto:

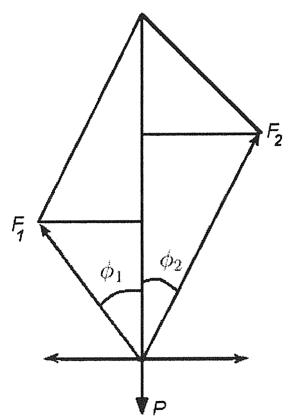

Figura 2.8

$$F_1 \mathrm{sen}\,\phi_1 = F_2 \mathrm{sen}\,\phi_2,$$

onde:

$$F_1 = \|\overrightarrow{F_1}\| \quad e \quad F_2 = \|\overrightarrow{F_2}\|$$

donde:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\mathrm{sen}\,\phi_2}{\mathrm{sen}\,\phi_1} \tag{2.1}$$

Também temos:

$$F_1 \cos\phi_1 + F_2 \cos\phi_2 = P \tag{2.2}$$

onde:

$$P = \|\overrightarrow{P}\|$$

Agora,

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\mathrm{sen}\,\phi_2}{\mathrm{sen}\,\phi_1} \Rightarrow F_1 = F_2 \frac{\mathrm{sen}\,\phi_2}{\mathrm{sen}\,\phi_1}$$

que podemos substituir em (2.2), chegando à:

$$F_2 \left(\frac{\mathrm{sen}\,\phi_2}{\mathrm{sen}\,\phi_1} \cos\phi_1 + \cos\phi_2 \right) = P$$

logo:

$$\frac{P}{F_2} = \left[\frac{\mathrm{sen}\,\phi_2 . \cos\phi_1 + \cos\phi_2 \mathrm{sen}\,\phi_1}{\mathrm{sen}\,\phi_1} \right]$$

$$\frac{P}{F_2} = \frac{\mathrm{sen}\,(\phi_1 + \phi_2)}{\mathrm{sen}\,\phi_1} \tag{2.3}$$

De modo semelhante é deduzida a razão entre P e F_1.

$$\frac{P}{F_1} = \frac{\mathrm{sen}\,(\phi_1 + \phi_2)}{\mathrm{sen}\,\phi_2}$$

Bernoulli considerava que F_1 e F_0 sustentavam a corrente A e no ponto mais baixo B, respectivamente (Fig 2.6). Estas mesmas forças podem sustentar o peso da corrente AB em E, daí Bernoulli supõe, já que o peso da corrente está distribuído ao longo do comprimento, as unidades de peso e de comprimento podem ser escolhidas de tal modo que o peso da corrente AB seja igual ao comprimento $\frac{S}{2}$. Como F_0 é constante, Bernoulli o torna igual a a.

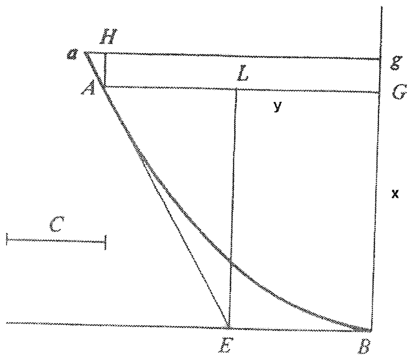

Figura 2.9

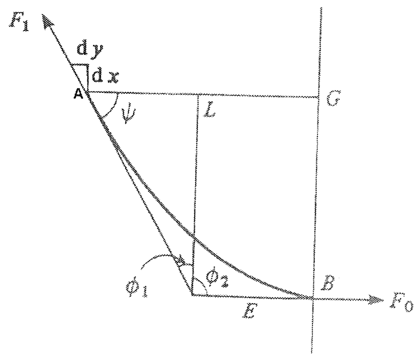

Figura 2.10

Consequências da hipótese VI.

A) Aplicando em (2.3):

$$\frac{\text{Peso } AB}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\phi_1 + \frac{\pi}{2})}{\operatorname{sen}\phi_1}$$

onde, analisando (Fig 2.10):

$$P = S = PesoAB \quad , \quad F_2 = F_0 \quad , \quad F_0 = a \quad e \quad \phi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\phi_1 + \phi_2 + \psi = 180 \qquad e \qquad \phi_1 + \phi_2 = 180 - \psi$$

$$\operatorname{sen}(\phi_1 + \phi_2) = \operatorname{sen} 180 \cos\psi - sen\psi \cos 180$$

donde:

$$sen(\phi_1 + \phi_2) = -\operatorname{sen}\psi(-1)$$

$$\operatorname{sen}(\phi_1 + \phi_2) = \operatorname{sen}\psi$$

Assim:

$$\frac{s}{a} = \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\phi_1} = \frac{\frac{EL}{AE}}{\frac{AL}{AE}} = \frac{EL}{AE}\frac{AE}{AL} = \frac{EL}{AL}$$

B) Na figura 2.10:

$$\cos\phi_1 = \frac{EL}{F_1} \Rightarrow F_1 = \frac{EL}{\cos\phi_1}$$

$$\operatorname{sen}\phi_1 = \frac{AL}{F_1} \Rightarrow F_1 = \frac{AL}{\operatorname{sen}\phi_1}$$

Temos que:

$$\frac{EL}{\cos\phi_1} = \frac{AL}{\operatorname{sen}\phi_1} \Rightarrow \frac{EL}{AL} = \frac{\cos\phi_1}{\operatorname{sen}\phi_1}$$

Como o corpo está em equilíbrio, o somatório das forças tem que ser igual a zero. Daí temos que o peso P é igual a EL, mas:

$$P = \operatorname{sen}(\phi_1 + \phi_2)$$

então:

$$\frac{EL}{AL} = \frac{\operatorname{sen}(\phi_1 + \phi_2)}{\operatorname{sen}\phi_1}$$

$$\frac{EL}{AL} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + \phi_1)}{\operatorname{sen}\phi_1}$$

$$\frac{EL}{AL} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\phi_1 + \operatorname{sen}\phi_1\cos\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen}\phi_1}$$

Donde:

$$\frac{EL}{AL} = \frac{\cos\phi_1}{\operatorname{sen}\phi_1} = \frac{s}{a}$$

C) Os triângulos ELA e AaH são semelhantes, veja (Fig 2.9), logo:

$$\frac{EL}{dx} = \frac{AL}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{EL}{AL}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{EL}{AL} = \frac{s}{a}$$

(da consequência A):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{s}{a}$$

Portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}$$

é a equação diferencial da catenária em função de y, x e s.

2.2 Resolução da equação diferencial da catenária

Conforme demonstrado na seção anterior, a equação diferencial da catenária é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}$$

Escrevendo a função acima em termos de x e y, temos:

$$s = \frac{adx}{dy}$$

Estamos tratando de uma parte infinitesimal da curva, começamos estudando s e ds.

O raciocínio abaixo é meramente ilustrativo e destituído de rigor.

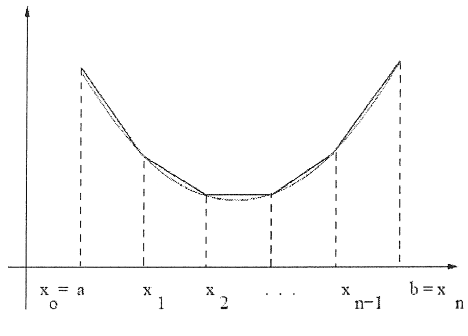

Figura 2.11

I - Se dividirmos a curva em subintervalos infinitamente pequenos, os arcos de curvas acima deles são quase retas. O comprimento do segmento que faz aproximação para o arco acima do subintervalo $[x_{n-1}, x_n]$ é:

$$\sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2}$$

A soma:

$$\sum \sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2} \tag{2.4}$$

é uma aproximação para o comprimento da curva.

Dividindo e multiplicando (2.4) por Δy_n; obtemos:

$$S = \sum_n \frac{\sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2}}{\Delta y_n} \quad \Delta y_n$$

donde:

$$S = \sum_n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x_n}{\Delta y_n}\right)^2} \quad \Delta y_n$$

O limite dessa soma, quando $\Delta x_n \to 0$ ou quando $n \to \infty$ fornece o comprimento da curva. Então s(x) é o comprimento desse arco.

$$S = \int_y^{y_n} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

Além disso, tem-se que:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad \therefore \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Dividindo a igualdade acima por dy, temos:

$$\frac{ds}{dy} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dy} \quad \therefore \quad \frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{dy^2}{dy^2}}$$

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{dx^2}{dy^2} + 1} \quad \therefore \quad ds = \sqrt{\frac{dx^2}{dy^2} + 1} \quad dy$$

integrando ambos os lados:

$$\int ds = \int \sqrt{\frac{dx^2}{dy^2} + 1} \quad dy$$

$$s = \int \sqrt{\frac{dx^2}{dy^2} + 1} \quad dy$$

Como as variáveis aparecem implicitamente em "s", dessa forma, a equação diferencial não pode ser resolvida diretamente.

II - Partindo da equação e resolvendo a diferencial, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}$$

$$s = a\frac{dx}{dy}$$

$$ds = \frac{ad^2xdy - adxd^2y}{dy^2}$$

Bernoulli supõe, sem explicar explicitamente, que todas as diferenciais de y são iguais, isto é que dy é constante, ou que $ddy = 0$. Esta suposição equivale a considerar x e s como funções de y (dx e ds podem variar).

Logo:

$$ds = \frac{ad^2xdy}{dy^2}$$

dividindo ambos os lados por dy:

$$\frac{ds}{dy} = \frac{ad^2x}{dy^2}$$

multiplicando ambos os lados por $\frac{dy}{ds}$:

$$1 = \frac{ad^2x}{dyds} = \frac{ax''}{s'}$$

Como:

$$s' = \sqrt{1 + (x')^2}$$

tem-se que:

$$1 = \frac{ax''}{\sqrt{1 + (x')^2}}$$

$$1 = \frac{ax''}{\sqrt{1 + (x')^2}}$$

multiplicando ambos os lados por $x' = dx$

$$x' = \frac{ax'x''}{\sqrt{1 + (x')^2}}$$

$$\sqrt{1 + (x')^2}dx = ax''dx$$

$$dx = \frac{ax''dx}{\sqrt{1 + (x')^2}}$$

Integrando ambos os lados:

$$x = a \int \frac{x''dx}{\sqrt{1+(x')^2}} \tag{2.5}$$

Para calcular a integral indefinida (2.5), seja:

$$x' = u \qquad\qquad du = x''dx \tag{2.6}$$

Substituindo teremos:

$$x = a \int \frac{udu}{\sqrt{1+u^2}} \tag{2.7}$$

Sendo:

$$v = 1 + u^2 \qquad dv = 2udu \qquad \therefore \qquad udu = \frac{dv}{2} \tag{2.8}$$

Reescrevendo e resolvendo (2.7) em função de v:

$$x = a \int \frac{dv}{2\sqrt{v}}$$

$$x = av^{\frac{1}{2}} + c \tag{2.9}$$

De (2.8) e (2.6), reescrevemos (2.9) em função de x, que é a resolução de (2.5).

$$x = a\sqrt{1+(x')^2} + c$$

Bernoulli omite a constante de integração c pois a origem de x está situado a distância do ponto mais baixo da catenária; Assim:

$$x^2 = a^2(1+(x')^2)$$
$$a.(x') = \sqrt{x^2 - a^2}$$
$$\frac{ax'}{\sqrt{x^2-a^2}} = 1$$

Como:

$$x' = \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{a\frac{dx}{dy}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = 1$$

$$a\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = dy$$

Mas, como consequência da omissão da constante "c", $x > a$, então Bernoullli substitui x por $x + a$, obtemos:

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{x^2 + 2ax}}$$

Separa-se as variáveis da equação de modo que sua solução seja possível integrando ambos lados da equação:

$$\int dy = \int \frac{adx}{\sqrt{x^2 + 2ax}}$$

ou

$$y + c = \int \frac{adx}{\sqrt{x^2 + 2ax}}$$

Assim Bernoulli chega a equação diferencial que deseja resolver.

III - Interpretação geometrica da catenária:

Citamos agora as próprias palavras de Bernoulli:

> Tracem as normais AK e GH, encontrando-se em B. Seja $BA = a$. e construa uma hipérbole equilateral BC com vértice B e centro A. Construa agora uma curva DI com a propriedade de que em todos os lugares BA seja a metade proporcional entre KC e KD, isto é, que $KD = \frac{aa}{\sqrt{2ax + xx}}$. Trace agora a paralela AF e tome o retângulo AG, igual a área HBKDI. Prolonguem DK e FG, e seu ponto de interseção E estará na curva necessária. (*apud* Baron (1985))'

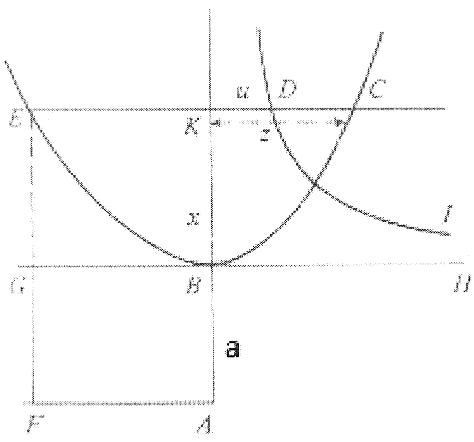

Figura 2.12

Na figura (Fig 2.12): EB é a catenária;
BC uma hipérbole de centro em A e vertice B;
DI uma curva que obedece a propriedade:

$$\frac{KC}{BA} = \frac{BA}{KD}$$

Pois em todos os lugares BA deve ser a metade proporcional entre KC e KD.
Daí tem-se:

$$KD = \frac{(BA)^2}{KC}$$

sendo:

$$BA = a \qquad KD = \frac{(a)^2}{KC} \qquad KC = z$$

$$Z = \sqrt{2ax + x^2} \text{ (equação da hipérbole)}$$

Demonstração:

Como:

$$z^2 = 2ax + x^2$$

$$z = \sqrt{x^2 + 2ax} \qquad \Rightarrow \qquad \text{equação da hipérbole.}$$

Área:

$$ay = \int KDdx$$

$$ay = \int \frac{a^2}{KC}dx$$

$$ay = \int \frac{a^2}{z}dx$$

$$ay = \int \frac{a^2}{\sqrt{2ax + x^2}}dx$$

$$y = \frac{\int \frac{a^2}{\sqrt{2ax + x^2}}dx}{a}$$

a é constante:

$$y = a\int \frac{1}{\sqrt{2ax + x^2}}dx$$

A construção feita por Bernoulli resulta numa curva que satisfaz a equação diferencial da catenária.

IV - Resolvendo a integral da catenária em notação moderna.

$$y = \int \frac{a}{\sqrt{2ax + x^2}}dx$$

Multiplicando e divindindo a integral por $a + x + \sqrt{x^2 + 2ax}$ obtém-se:

$$y + c = a\int \frac{a + x + \sqrt{x^2 + 2ax}}{a + x + \sqrt{x^2 + 2ax}\sqrt{x^2 + 2ax}}dx$$

Por substituição, resolvemos a integral abaixo:

$$u = a + x + \sqrt{x^2 + 2ax}$$

$$du = 1 + \frac{x+a}{\sqrt{x^2+2ax}}dx$$

$$dx = \frac{du\sqrt{x^2+2ax}}{a+x+\sqrt{x^2+2ax}} = \frac{du\sqrt{x^2+2ax}}{u}$$

Assim:

$$y + c = a\int \frac{u}{u\sqrt{x^2+2ax}} \quad \frac{du\sqrt{x^2+2ax}}{u}$$

$$y + c = a\int \frac{1}{u}du$$

$$y + c = a\log u + c$$

$$y + c = a\log(a + x + \sqrt{(x^2+2ax)})$$

que é a equação da catenária. Como a catenária passa pela origem , conclui-se que $c = a\log a$.

Reescrevendo a equação da catenária, temos:

$$y + a\log a = a\log(a + x + \sqrt{(x^2+2ax)})$$

dividindo os dois lados da igualdade por a:

$$\frac{y}{a} = \log(a + x + \sqrt{(x^2+2ax)}) - \log a$$

$$e^{\frac{y}{a}} = e^{\log\frac{(a+x+\sqrt{(x^2+2ax)})}{a}}$$

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{a+x+\sqrt{(x^2+2ax)}}{a}$$

$$ae^{\frac{y}{a}} - a - x = \sqrt{(x^2+2ax)}$$

Elevando ao quadrado os dois lados da igualdade:

$$a^2e^{\frac{2y}{a}} - 2a^2e^{\frac{y}{a}} - 2axe^{\frac{y}{a}} + a^2 = 0$$

Dividindo a expressão por a, temos:

$$ae^{\frac{2y}{a}} - 2ae^{\frac{y}{a}} - 2xe^{\frac{y}{a}} + a = 0$$

Dividindo a expressão acima por $e^{\frac{y}{a}}$, obtemos:

$$ae^{\frac{y}{a}} - 2a - 2x + \frac{a}{e^{\frac{y}{a}}} = 0$$

$$a.(e^{\frac{y}{a}} + e^{\frac{-y}{a}}) = 2(a + x)$$

$$\frac{a}{2}(e^{\frac{y}{a}} + e^{\frac{-y}{a}}) - a = x$$

Utilizando as funções exponenciais e logarítmicas descobertas por Euler, a resolução da equação integral da catenária em função de x e y é dada por:

$$\boxed{x = \frac{1}{2}.a(e^{\frac{y}{a}} + e^{\frac{-y}{a}}) - a}$$

Referências Bibliográficas

[1] Andery, Maria Amália...et al. Para Compreender a Ciência: Uma Perspectiva Histórica. 12ª edição - Rio de Janeiro, Editora Garamond; São Paulo Editora EDUC, 2003, 436p., páginas 237 a 250.

[2] Baron, Margareth E. e BOS, H.J.M. Curso de Historia da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1985. unidade 5, 49 p.,páginas 38 à 49.

[3] Boyer, Carl Benjamin. História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 2ª reimpressão 1999, 496 p., páginas 269 a 279.

[4] Eves, Howard. Introdução a História da Matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo, Editora da Unicamp, 2002, 843 p. páginas 436 a 445.

[5] Simmons, George F.,Cálculo com Geometria Analítica. Tradução de Seiji Hariki. São Paulo, Editora McGraw-Hill, 1987. volume 1, 829 p. páginas 611 a 614 e 708 a 724.