UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

POLIEDROS PLATÔNICOS

HAMILTON SOARES PEREIRA

BELO HORIZONTE
2011

HAMILTON SOARES PEREIRA

POLIEDROS PLATÔNICOS

Monografia apresentada à Universidade Federal de Minas gerais como exigência parcial para obtenção de título de Pós graduação em Matemática para Professores do Ensino Básico sob a orientação do Professor Paulo Antônio Fonseca Machado

BELO HORIZONTE
2011

DEDICATÓRIA

Para meu filho Yan, á minha esposa Amanda e a meus pais Sylvio e Rosa, por acreditarem e me incentivarem nesta etapa da minha vida.

AGRADECIMENTOS

À Deus, em primeiro lugar, por me proporcionar saúde para trabalhar.

À minha esposa Amanda que me engrandeceu enquanto eu parecia pequeno.

À todos os meus colegas de trabalho que me incentivaram, especialmente à Cynthia.

Aos meus alunos Laís, Caroline, Jonathan, Larissa e Marina que colaboraram nas construções.

Aos meus pais Sylvio e Rosa que me mostraram a importância dos estudos.

À minha avó Renné que tudo fez para mim, ao Yan e meus irmãos Silvia e Júnior que sempre acreditaram no meu sucesso.

Aos meus mestres Wagner Lannes e Paulo Machado que tanto foram importantes para minha carreira e à Maria do Rosário

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar um breve estudo dos poliedros platônicos. Primeiramente, faremos uma breve apresentação da história da Geometria, citaremos alguns matemáticos e suas contribuições para o estudo dos poliedros. Através de tais estudos provamos a existência dos mesmos, e o porquê de existirem apenas cinco poliedros regulares. Conceituaremos os poliedros, apresentando a construção do tetraedro, do cubo e do octaedro. Verificamos que os Poliedros de Platão satisfazem as condições necessárias e suficientes para a existência de um poliedro convexo. Após estes estudos mostraremos atividades práticas com os poliedros de Platão. Apresentaremos algumas atividades pedagógicas que podem ser realizadas em sala de aula. Canudinhos e barbantes foram usados para a confecção dos poliedros. E por fim com régua e compasso, fizemos os poliedros platônicos planificados, além do icosaedro truncado. Tais atividades práticas contribuem e muito para o aprendizado em sala de aula.

Palavras-chave: Geometria. Ângulos Poliédricos. Poliedros de Platão.

SUMÁRIO

1. Introdução 8

2. História da Geometria 9

2.1. Platão... 9

2.2. Euclides..11

2.3. Johannes Kepler..12

2.4. Euler..13

3. Diedros 13

4. Existem Poliedros regulares? 14

4.1. Poliedros convexos 15

4.2. Poliedros não convexos 15

4.3. Poliedros regulares...16

4.4. Apenas cinco poliedros regulares, por quê? 16

5. Relação de Euler 18

5.1. Teorema 19

6. Poliedros de Platão 20

6.1. Construção de poliedros platônicos 21

6.1.1. Construção do tetraedro 21

6.1.2. Construção do cubo 22

6.1.3. Construção do octaedro 24

7. Construção em sala de aula 26

7.1. Primeira atividade...26

7.2. Segunda atividade 27

7.3. Terceira atividade 28

7.4. Quarta atividade 29

7.5. Quinta atividade 30

7.6. Sexta atividade 31

7.7. Sétima atividade 32

7.7.1. Planificação do cubo 33

7.8. Oitava atividade 34

7.9. Nona atividade 35

7.10. Décima atividade 37

7.11. Décima primeira atividade 38

8. Considerações Finais 41

Referências 42

1.INTRODUÇÃO

O ensino de Geometria na escola básica é, muitas vezes, deixado em segundo plano ou até totalmente abandonado por falhas na formação do professor ou por ausência de material didático capaz de favorecer a interpretação do aluno. Para esse, que já apresenta dificuldade em Geometria Plana, visualizar sólidos geométricos é, então, desmotivante.

Neste trabalho apresento os *sólidos platônicos*. Este nome foi dado devido à forma que Platão utilizou para explicar a natureza através de um tratado filosófico intitulado *Timeu.* Nele, Platão associa a cada um dos elementos clássicos (terra, ar, água e fogo) um poliedro regular. Terra é associada ao cubo, ar ao octaedro, água ao icosaedro e fogo ao tetraedro. Com relação ao quinto sólido platônico, o dodecaedro, Platão escreve: “Faltava ainda uma quinta construção que o Deus utilizou para organizar todas as constelações do céu”.

Euclides descreveu matematicamente os sólidos platônicos no Livro XIII de *Os Elementos*. Para cada sólido, Euclides calcula a razão entre o diâmetro da esfera circunscrita e o comprimento da aresta do sólido. Na proposição 18, ele demonstra que não existem outros poliedros regulares.

No decorrer do trabalho, mostro também, através de planificações, porque há somente cinco poliedros regulares, faço a construção dos três primeiramente citados, apresento o teorema de Euler $V - A + F = 2$ e, ao final, sugiro algumas atividades pedagógicas de construção de poliedros que podem ser utilizadas pelos professores com finalidade de auxiliar a visualização e compreensão dos alunos.

2.HISTÓRIA DA GEOMETRIA

A provável origem da Geometria, vem das medições de terrenos na agrimensura na antigo Egito . A palavra Geometria tem sua origem grega do termo *geometrein,* significando medição de terra (geo = terra, metrein = medição).

A contribuição de Platão para a Geometria vem do pressuposto de que são necessárias demonstrações dedutivas e não apenas verificações experimentais.

Euclides, provavelmente discípulo da escola platônica-pitagórica, organiza as matérias de seus mestres de um modo sistemático, com definições e princípios, levando em conta a via dedutiva a que Platão faz referência.

Já Kepler associou a Geometria à Astronomia, tentou encontrar sólidos geométricos que o levaram a entender a posição dos planetas no Universo. Para Kepler uma Astronomia perfeita deveria incorporar os poliedros regulares que eram conhecidos desde os gregos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

O trabalho Leonhard Euler representa o desenvolvimento da Matemática como ferramenta de análise. Envolveu-se em diversas áreas, não fazia distinção entre a Matemática pura e a aplicada. A relação de Euler possui extrema importância na determinação do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo e alguns não convexos.

2.1 **Platão**

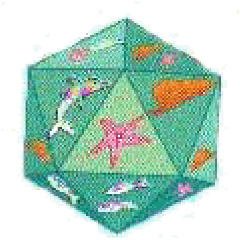
Platão nasceu em Atenas por volta de 428 a.C. e é considerado um dos grandes gênios da humanidade. A maior parte de seus trabalhos sobreviveu até hoje, o que permite uma ampla visão do pensamento grego, pois Platão escreveu sobre quase todos os assuntos da época. Fundou uma Academia na qual achava-se inscrito sobre a porta “Que ninguém que ignore a Geometria entre aqui”. Conforme veremos no decorrer deste trabalho, existem apenas cinco poliedros regulares que chamaremos de Poliedros de Platão. São conhecidos assim porque no *Timeu,* Platão associou os poliedros regulares aos elementos da natureza.

O tetraedro representa o fogo, pois seu átomo teria a forma de um poliedro com quatro lados.

O cubo, único poliedro regular com seis faces quadrangulares, representa a terra porque Platão acreditava que átomos da terra seriam cubos, os quais permitiam ser colocados perfeitamente lado a lado, dando-lhes estabilidade.

O octaedro representava o ar, pois o modelo de Platão para o átomo de ar era um poliedro com oito faces.

O icosaedro representava a água porque acreditava que os átomos de água teriam forma de icosaedros.



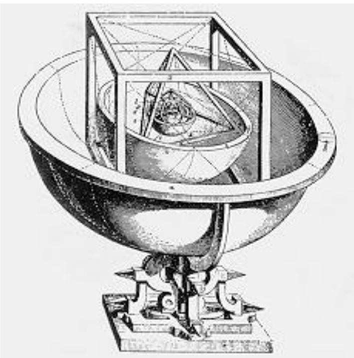
E por fim, o dodecaedro representava o universo, porque o cosmos seria constituído por átomos em forma de dodecaedro.

2.2 Euclides

Euclides, nascido em Alexandria por volta de 325 a.C., foi um dos matemáticos mais importantes graças à sua obra *Elementos*. Trata-se de treze livros que reuniram e sistematizaram os conhecimentos matemáticos contemporâneos de forma tão perfeita que durante 2000 anos foram objeto de estudo. A obra *Elementos* lhe rendeu o título de “Pai da Geometria”.

2.3 Johannes Kepler

Kepler nasceu na Alemanha em 1571 e foi um dos mais importantes cientistas do seu tempo. Tinha interesse nas relações matemáticas entre os objetos do Universo. Baseado na Filosofia de Platão e procurou desenvolver um modelo para o Sistema Solar. Na época só se conheciam seis planetas (Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno) que segundo Kepler deveriam ser harmonizados com os cinco poliedros regulares de Platão (cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro). Concordava também com o modelo proposto por Copérnico e ainda afirmou que as órbitas em volta do Sol estavam circunscritas em esferas que envolviam os cinco poliedros platônicos. A órbita de Saturno, o planeta mais longe do Sol, estava inscrita em um cubo. A este, se inseria outra esfera que continha a órbita de Júpiter. Nesta se inscrevia um tetraedro e sobre ele uma esfera com a órbita de Marte. Entre Marte e Terra o dodecaedro, entre Terra e Vênus um icosaedro e finalmente entre Vênus e Mercúrio um octaedro. Na figura seguinte podemos observar o modelo complexo de Kepler.



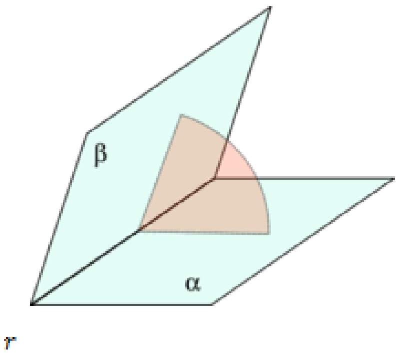
2.4 Euler

Leonhard Paul Euler nasceu em Basileia, Suíca em 1707. Publicou centenas de trabalhos que foram importantes para a matemática, a física, a engenharia e a astronomia. Euler descobriu uma relação na matemática que é $V - A + F = 2$ para qualquer poliedro convexo com V vértices, F faces e A arestas.

3. Diedros

Para definir um poliedro devemos, primeiramente, definir diedros. Um diedro ou â*ngulo diedro*, ou *ângulo diédrico* é a reunião de dois semiplanos de mesma origem não contidos num mesmo plano.

A origem comum dos semiplanos é a aresta do diedro e os dois semiplanos são suas faces.



Assim, α e β são dois semiplanos de mesma origem r, distintos e não opostos.

$$\alpha\hat{r}\beta = \alpha \cup \beta$$

4.EXISTEM POLIEDROS REGULARES?

Para iniciar os estudos dos poliedros regulares definiremos ***poliedro convexo*****.**

Dolce (2005,p.124), define poliedro convexo da seguinte maneira:

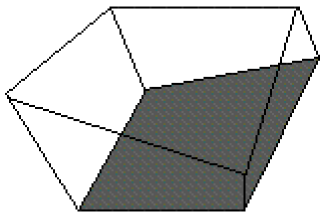
"Consideramos um número finito *n*, ($n \geq 4$) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que :

• dois polígonos não estão num mesmo plano;

• cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;

• o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semiespaço."

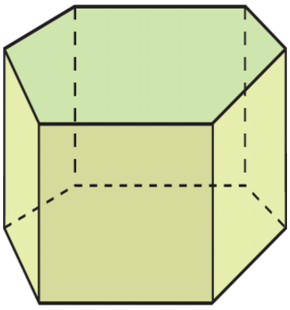
Assim, ficam determinados *n* desses semiespaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A intersecção desses semiespaços é chamada *poliedro convexo*.

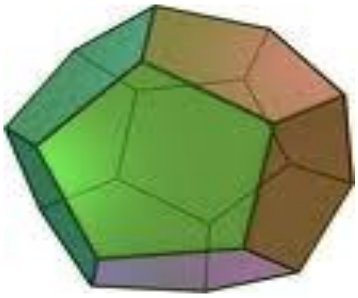


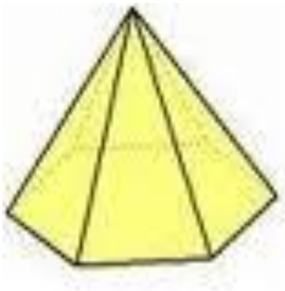
Pode-se mostrar que um poliedro será convexo quando os ângulos diedros formados por duas faces consecutivas forem menores que 180º. Cada polígono é chamado *face do poliedro*. O segmento que intercepta duas faces é chamado *aresta do poliedro*. Cada vértice do polígono é chamado *vértice do poliedro.*

Veja alguns poliedros convexos e alguns não convexos.

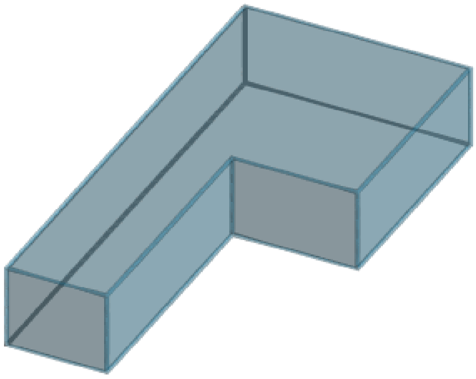
4.1 Poliedros convexos

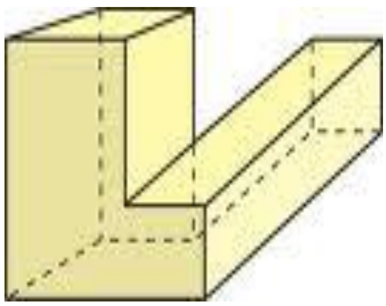






4.2 Poliedros não convexos





4.3 Poliedros regulares

Posteriormente afirmamos que o *poliedro regular* é definido como poliedro convexo em que todas as faces são polígonos regulares congruentes entre si e seus ângulos poliédricos são congruentes. De cada vértice parte o mesmo número de arestas.

4.4 Apenas cinco poliedros regulares, por quê?

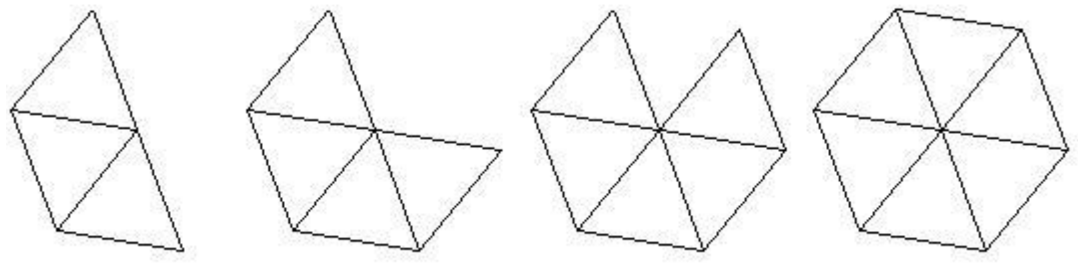
Podemos mostrar que só há cinco poliedros regulares fazendo suas planificações. Nivelando os cantos de um poliedro, a soma dos ângulos dos polígonos unidos em cada vértice será inferior a 360º. E ainda consideramos as possibilidades de união de polígonos regulares e precisamos de, pelo menos, três faces unidas em cada vértice para formar um sólido.

Para construir poliedros platônicos, por definição, podemos utilizar apenas polígonos regulares congruentes. Primeiramente vamos considerar o triângulo equilátero, já que é o polígono regular com menor número de lados. Analisaremos os poliedros cujas faces são formadas apenas por triângulos equiláteros. Consideremos os vértices dos possíveis poliedros.

Sabemos que para existir um poliedro, necessitamos de pelo menos três faces unidas em cada vértice. Portanto com dois triângulos equiláteros, não se consegue constituir um vértice de um poliedro. Já com três triângulos equiláteros é possível construir um vértice de um tetraedro. Planificando os poliedros sabemos que a soma dos ângulos das faces poligonais unidos em cada vértice deve ser inferior a 360º. Com três triângulos equiláteros unidos pelo mesmo vértice, temos 180º como soma de seus ângulos.

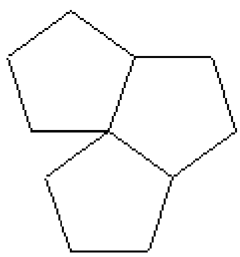
Se considerarmos quatro triângulos equiláteros, a soma dos ângulos internos adjacentes no vértice é de 240º, obteremos o octaedro. Considerando cinco desses triângulos num vértice, essa soma é de 300º, ainda inferior a 360º, e obteremos o icosaedro. Se considerarmos seis triângulos equiláteros, seria impossível formar um poliedro. A soma dos ângulos internos adjacentes no vértice é, neste caso, 360º, o que deixaria os ângulos num mesmo plano formando uma pavimentação do plano em torno do suposto vértice.

Considerando um número maior de triângulos equiláteros em torno de um vértice, obviamente não possibilita a construção de um poliedro.

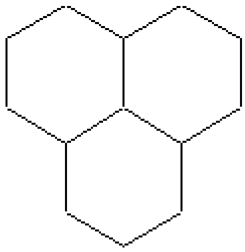


Analisando os quadrados como faces do poliedro, concluímos que só se pode construir o cubo visto mais de três quadrados adjacentes unidos pelo mesmo vértice estariam no mesmo plano.

Verificando agora os pentágonos como faces do poliedro. Concluímos que só podemos construir o dodecaedro. Não será possível inserir mais de três pentágonos adjacentes com vértice comum já que a soma dos ângulos seria maior do que 360º.



Com hexágonos não se consegue construir nenhum sólido platônico. Basta observar que três hexágonos adjacentes em torno de um vértice pavimentam o plano, pois a soma dos ângulos internos desses hexágonos é igual a 360º, o que não permite formar um sólido. Obviamente um número maior de hexágonos também não permite a construção de um poliedro platônico. Analogamente, com polígonos com um número maior de lados isso também não é possível.



5.RELAÇÃO DE EULER

O matemático suíço Leonhard Euler descobriu uma relação muito importante na determinação do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo. Ela permite que os cálculos sejam realizados no intuito de determinarmos o número de elementos de um poliedro. Trata-se da equação $V - A + F = 2$ sendo V o número de vértices, A o número de arestas de F o número de faces de um poliedro. Mas, a recíproca pode não ser verdadeira, conforme o exemplo:

Há três números naturais $V = 7$, $A = 9$ e $F = 4$ que satisfazem a equação $V - A + F = 2$, contudo não são números que podem ser atribuídos a poliedros já que, com quatro faces só existe o tetraedro. Portanto, veremos agora as condições que os números V, A e F devem satisfazer, além da relação de Euler, para garantir a existência de um poliedro com esses números de vértices, faces e arestas.

O seguinte teorema nos dá condições necessárias e suficientes para a existência de um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces.

5.1Teorema

Existe um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces se, e somente se:

i) $A \geq 6$

ii) $V - A + F = 2$

iii) $A + 6 \leq 3F \leq 2A$

iv) $A + 6 \leq 3V \leq 2A$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada no artigo "*V – A+ F = 2. Existe o poliedro?" De Eduardo Wagner, Revista do professor de Matemática 47,2001.*

No tetraedro, observamos que o número de arestas é igual a 6 o que satisfaz à primeira condição. Também é verificada a relação de Euler (4 – 6 + 4 = 2). Quanto à terceira condição, se somarmos 6 ao número de arestas, triplicarmos o número de faces e dobrarmos o número de arestas, teremos valores iguais. E como o número de vértices é igual ao número de faces, satisfaremos também à quarta condição.

$i) 6 \geq 6$

$ii) 4 - 6 + 4 = 2$

$iii) 6 + 6 \leq 3 \cdot 4 \leq 2 \cdot 6$

$iv) 6 + 6 \leq 3 \cdot 4 \leq 2 \cdot 6$

Como o cubo tem doze arestas, está satisfeita a primeira condição. A relação de Euler também é verificada, pois 8 -12 + 6 = 2. A soma de 6 com o número de arestas é igual ao triplo do número de faces que é menor do que o dobro do número de arestas. E o triplo do número de vértices é igual ao dobro do número de arestas.

$i) 12 \geq 6$

$ii) 8 - 12 + 6 = 2$

$ii) 12 + 6 \leq 3 \cdot 6 \leq 2 \cdot 12$

$iv) 12 + 6 \leq 3 \cdot 8 \leq 2 \cdot 12$

Assim como o cubo, o octaedro tem doze arestas o que satisfaz à primeira condição. Podemos também verificar no octaedro a relação de Euler (6 – 12 + 8 =2). O número de arestas somado a 6 é menor do que o triplo do número de faces que é igual ao dobro do número de arestas. E a quarta condição também é satisfeita pois, o número de arestas mais 6 é igual ao triplo do número de vértices que é igual ao dobro do número de arestas.

$i) 12 \geq 6$

$ii) 6 - 12 + 8 = 2$

$iii) 12 + 6 \leq 3 \cdot 8 \leq 2 \cdot 12$

$iv) 12 + 6 \leq 3 \cdot 6 \leq 2 \cdot 12$

O dodecaedro tem 30 arestas satisfazendo assim, à primeira condição. Verifica-se a relação de Euler já que 20 – 30 + 12 = 2. O número de arestas somado a 6 é igual ao triplo do número de faces que é menor do que o dobro do número de arestas. E o dobro do número de aresta é igual ao triplo do número de vértices que são maiores do que o número de arestas somados a 6.

$i) 30 \geq 6$

$ii) 12 - 30 + 20 = 2$

$iii) 30 + 6 \leq 3 \cdot 12 \leq 2 \cdot 30$

$iv) 30 + 6 \leq 3 \cdot 20 \leq 2 \cdot 30$

O icosaedro também tem 30 arestas assim como o dodecaedro verificando a primeira condição. Aplica-se também a relação de Euler (12 – 30 + 20 = 2). Já que o triplo do número de faces, o dobro do número de arestas e o triplo do número de vértices são iguais e maiores do que o número de arestas somado a 6, satisfazemos assim a terceira e quarta condições.

$i) 30 \geq 6$

$ii) 12 - 30 + 20 = 2$

$iii) 30 + 6 \leq 3 \cdot 20 \leq 2 \cdot 30$

$iv) 30 + 6 \leq 3 \cdot 12 \leq 2 \cdot 30$

Como as condições de existência de um poliedro convexo são verificadas nos poliedros de Platão, afirmamos que eles realmente existem, pelo teorema.

6.POLIEDROS DE PLATÃO

Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se:

• todas as faces têm o mesmo número de arestas;

• todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número arestas;

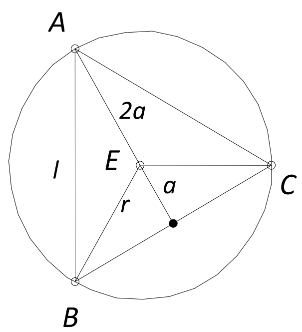
• satisfaz a relação de Euler (*V –A +F = 2*)

6.1.Construção de poliedros platônicos

Vamos apresentar a construção do tetraedro, em seguida do cubo e finalmente do octaedro. As construções do dodecaedro e do icosaedro poderão ser tema de um futuro trabalho.

6.1.1 Construção do tetraedro

Consideremos um triângulo equilátero ABC de lado l e marcamos o baricentro E. Sabemos que o raio r de uma circunferência circunscrita em um triângulo equilátero equivale a $\frac{2}{3}$ da mediana. Portanto, se a é o apótema do triângulo ABC, chamaremos a mediana de $3a$ e calculamos a em função de l .



$$(3a)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow a = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

$$r^2 = \left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow r = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

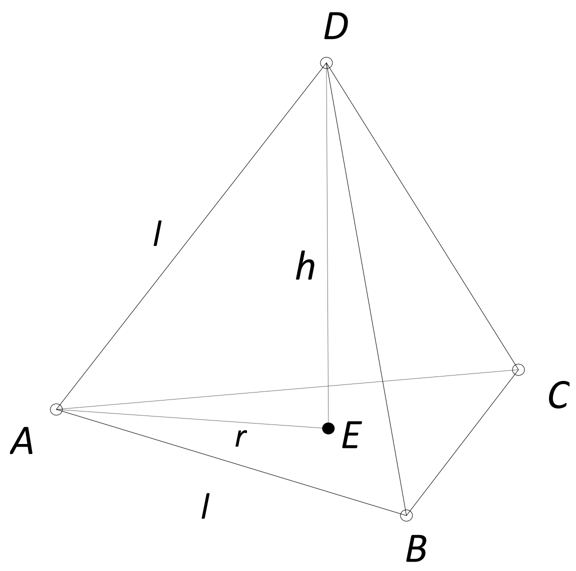
Como, no triângulo equilátero, o ortocentro coincide com o baricentro, podemos calcular o apótema a em função de l. Pelo baricentro E, equidistante de A, B e C com medida $r = \frac{l\sqrt{3}}{3}$, traçamos um segmento ED, perpendicular ao plano do triângulo ABC, de medida h conforme veremos a seguir.

$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{2l^2}{3}$$

$$h = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

Traçamos os segmentos AD, BD e CD. Como $(AD)^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow (AD)^2 = \left(\frac{l\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow AD = l.$

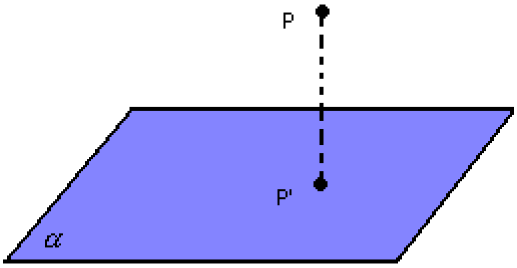


Analogamente podemos mostrar que $BD = CD = l$. Logo ∆ABD, ∆ACD e ∆BCD são equiláteros assim como ∆ABC. Temos então um tetraedro regular.

6.1.2 Construção do cubo

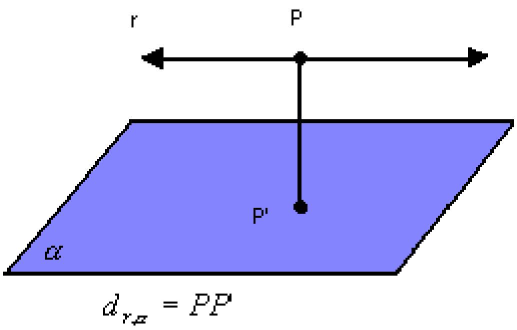
Antes de iniciarmos a construção do cubo vamos definir *distância entre ponto e plano*, *distância entre reta e planos paralelos* e *distância entre planos paralelos*.

Chama-se *distância entre um ponto P e um plano* α a distância entre esse ponto e o pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto. A distância é o segmento de reta PP'.

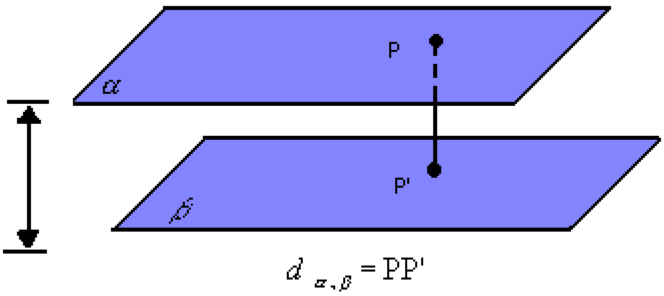


Chamamos de *distância entre uma r reta e um plano paralelo* α a distância entre um ponto qualquer da reta e o plano.

Podemos justificar a definição acima pela seguinte propriedade: **Se uma reta e um plano são paralelos, os pontos da reta são equidistantes ao plano.**

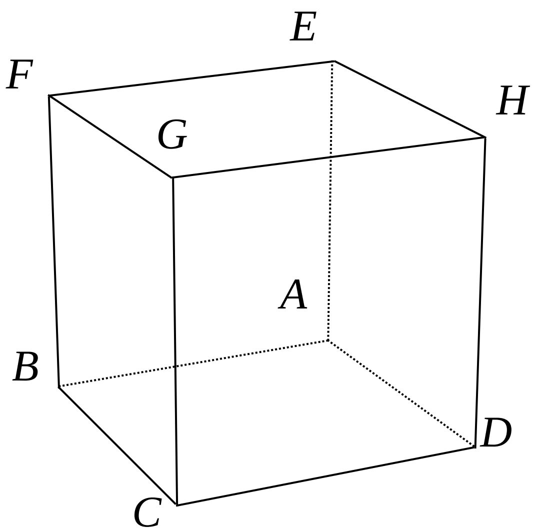


A *distância entre dois planos paralelos* é a distância um ponto qualquer de um deles e o outro plano.



Iniciando a construção do cubo, consideremos um quadrado ABCD com lado medindo l. Traçamos os segmentos AE, BF, CG e DH de medidas também l perpendiculares ao plano do quadrado ABCD. Traçamos os segmentos EF, FG, GH e HE de medidas l.

Como os vértices E, F, G e H estão à mesma distância l do plano do quadrado ABCD. Qualquer ponto do quadrado EFGH é equidistante do plano do quadrado ABCD. Logo, E, F, G e H são coplanares. O cubo de aresta l é o conjunto de pontos limitados pelos os quadrados ABCD, EFGH, BCGF, CDHG, AEHD e ABFE.

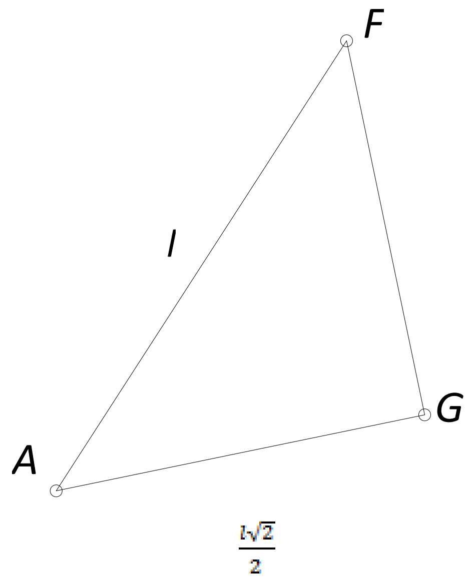


6.1.3 Construção do octaedro

Consideremos um quadrado ABCD de lado l. Vamos marcar um ponto G, intersecção das diagonais do quadrado ABCD. A medida da diagonal do quadrado é dada por $l\sqrt{2}$. Então, G é equidistante aos vértices A, B, C e D sendo AG = $\frac{l\sqrt{2}}{2}$.

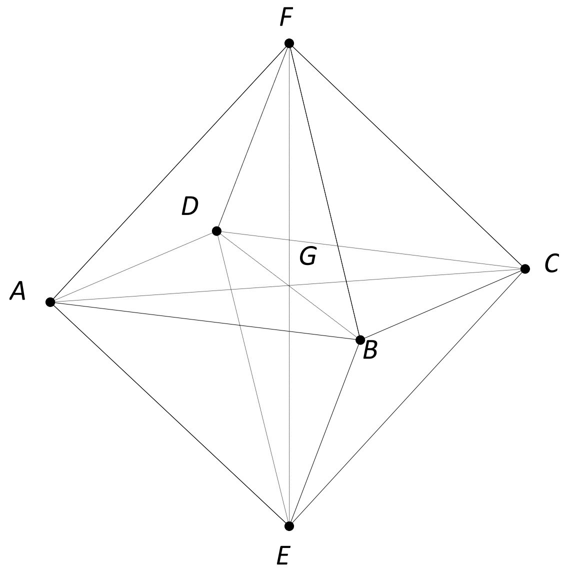
Traçamos uma reta perpendicular ao plano do quadrado ABCD que passa por G e um segmento l com um extremo em A e o outro em um ponto F pertencente a reta. O segmento GF terá comprimento $\frac{l\sqrt{2}}{2}$ conforme veremos a seguir.

Cálculo do segmento GF



$$(GF)^2 + \left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow (GF)^2 = l^2 - \frac{l^2}{2} \Rightarrow GF = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

Podemos traçar também os segmentos BF, CF e DF, de medida l. Analogamente, marcamos um ponto E na reta que contém o segmento GF e equidistante do ponto F em relação ao ponto G. Traçamos os segmentos AE, BE, CE e DE. O octaedro regular é o sólido limitado pelos triângulos equiláteros ABF, BCF, CDF, ADF, ABE, BCE, CDE e ADE.



7. CONSTRUÇÕES EM SALA DE AULA

O estudo da Geometria apresenta várias dificuldades no que diz respeito ao entendimento dos conceitos e aplicações que envolvem os conteúdos estudados. Desde os anos iniciais do ensino fundamental os professores geralmente trabalham com as figuras e objetos planos. No entanto esses são conceitos abstratos que não fazem relações com objetos da nossa realidade.

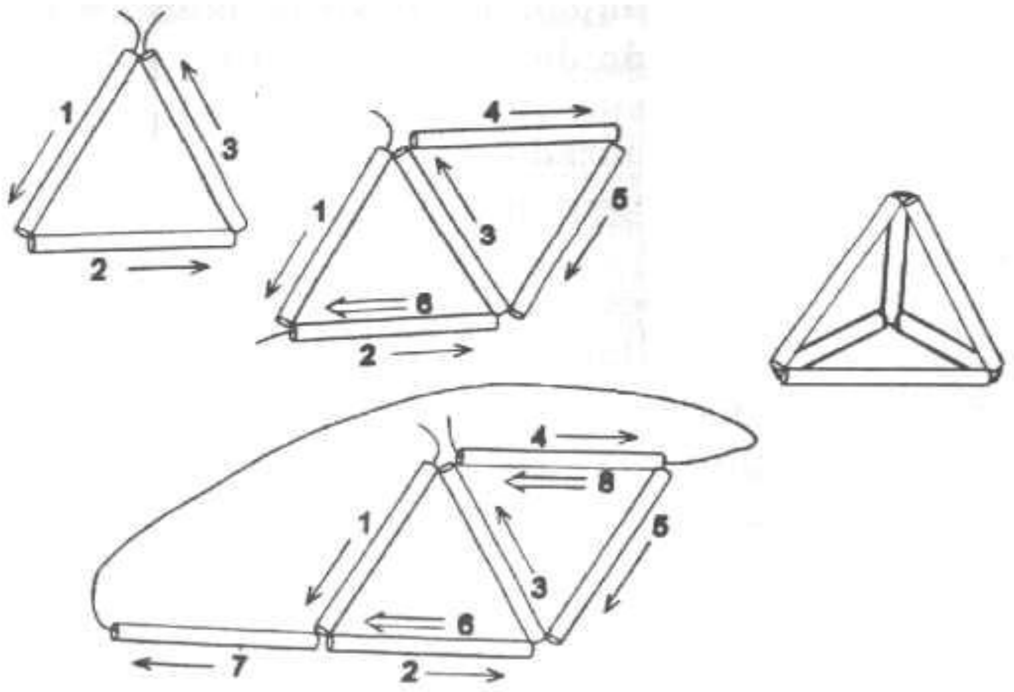
A geometria espacial, em particular, é quase sempre tratada por meio de dedução de fórmulas e resolução de exercícios o que acarreta a não visualização dos objetos com elementos do nosso cotidiano.

Na minha prática docente, observo que o aluno necessita experimentar conceitos de geometria espacial construindo poliedros com planificações em papel, canudos ou varetas.

Algumas atividades com planificação em papel ou com canudos e linha grossa ou palitos de churrasco e anéis elásticos podem ser realizadas pelos alunos com intuito de auxiliar a visualização, despertar a criatividade e desenvolver ideias matemáticas. O aluno deve ter conhecimentos básicos de poliedros. Saber identificar, suas nomenclaturas e reconhecer poliedros convexos e não convexos. Espero que eles desenvolvam algumas habilidades como resolver problemas de cálculo de áreas laterais, volumes e reconhecer eixos de simetria, levantar outras hipóteses e criar suas próprias maneiras de aprender. Nas atividades a seguir, sugiro canudos, linha, tesoura e uma agulha grossa para passar a linha por dentro dos canudos. Nos esquemas, o símbolo $\rightarrow$ indica o sentido em que a linha deve passar por um canudo vazio e o símbolo $\Rightarrow$ indica o sentido em que a linha deve passar por um canudo já ocupado. Em outras atividades mais simples proponho o uso de planificações dos poliedros platônicos em papel cartão ou cartolina.

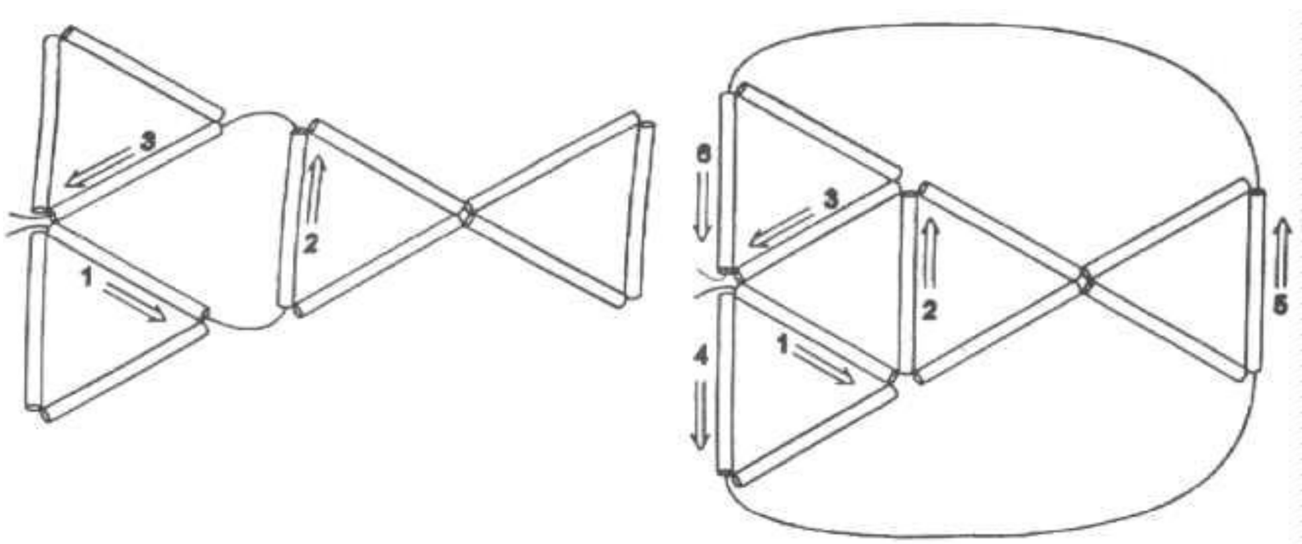
7.1 Primeira atividade: Construção de um tetraedro regular com canudos e barbante

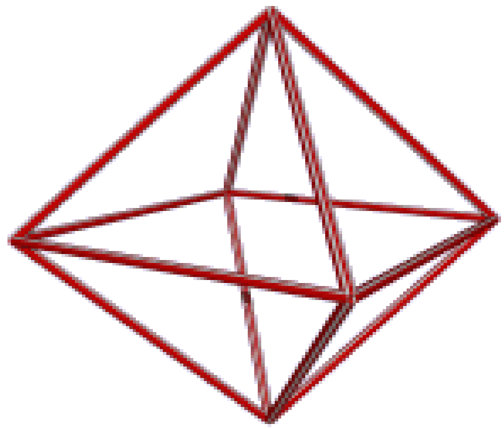
Corte seis pedaços iguais de canudos. Passe a linha através de três canudos construindo um triângulo e feche com um nó. Passe o restante da linha por outros dois pedaços de canudo juntando e formando mais um triângulo com um dos lados do primeiro triângulo. Depois passe a linha por um dos lados desse triângulo e pelo último pedaço que ainda não foi usado. Finalize com um nó. Temos então a estrutura de um tetraedro regular.



7.2 Segunda atividade: Construção de um octaedro regular com canudos e barbante

Com doze pedaços iguais de canudos, construa quatro triângulos e junte-os dois a dois conforme a figura abaixo. Teremos a estrutura de um octaedro regular.

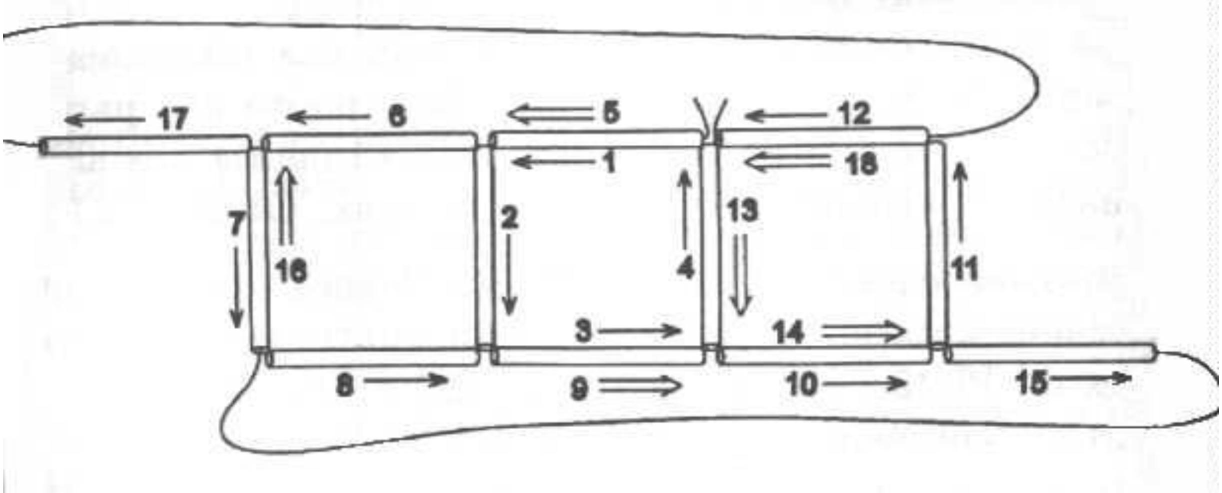


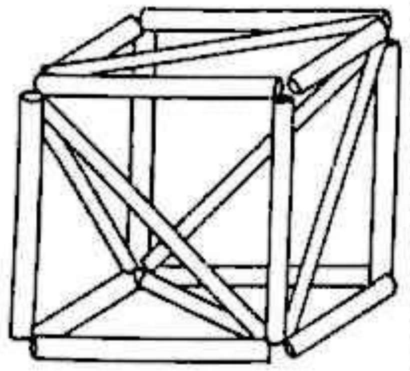


7.3 Terceira atividade: Construção de um cubo e as diagonais das faces com canudos e barbante

A estrutura do cubo feito com linha e canudos não têm rigidez. Por isso, faremos um cubo com suas diagonais. Inicialmente corte doze pedaços de canudos de mesmo tamanho. Passe a linha através de quatro canudos e passe novamente por dentro do primeiro canudo, construindo um quadrado. Considerando um dos lados desse quadrado e passando a linha por mais três canudos, construa mais um quadrado. Ainda faltam dois canudos para completar as arestas do cubo. Amarre-os de maneira a completá-lo.

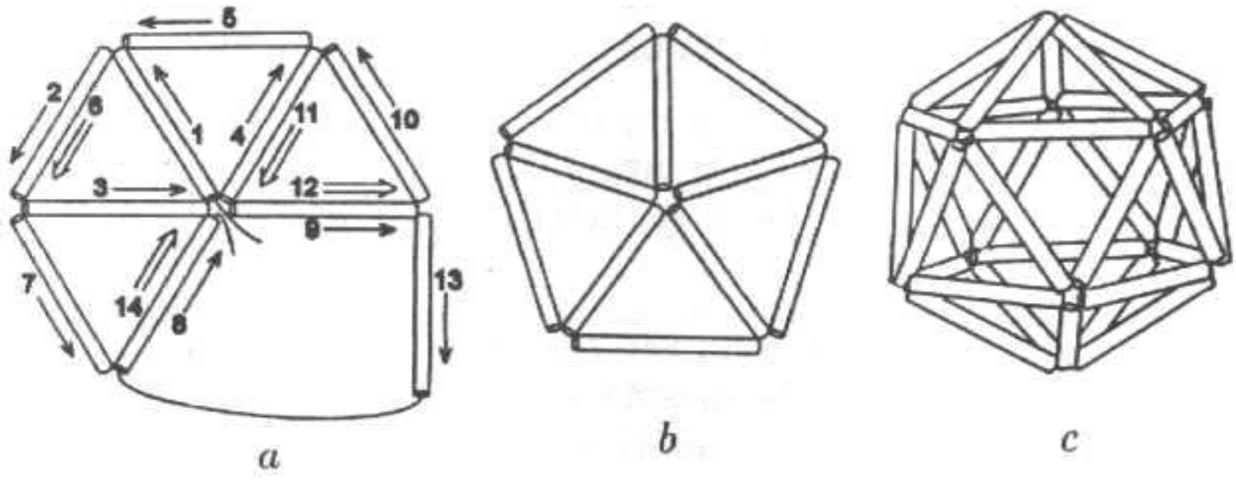
Para dar rigidez ao cubo, corte mais seis pedaços de canudo do tamanho das diagonais das faces. Prenda-as de acordo com a figura.





7.4 Quarta atividade: Construção de um icosaedro regular com canudos e barbante

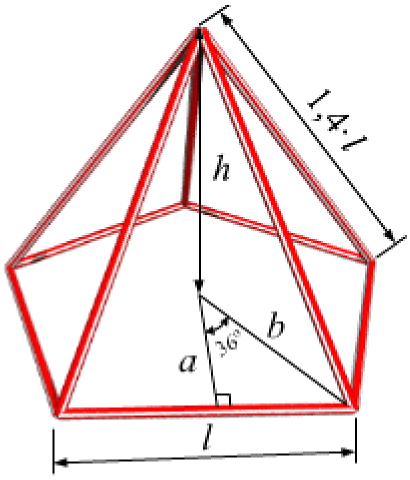
Corte trinta pedaços iguais de canudos. Construa quatro triângulos e una-os obtendo uma pirâmide de base pentagonal. Repita esse procedimento e obtenha outra pirâmide. Junte cada uma das pirâmides através dos vértices das bases, por meio de canudos, de tal forma que em cada vértice se encontrem cinco canudos. Teremos então, um icosaedro regular.



7.5 Quinta atividade: Construção de um dodecaedro regular com canudos e barbante

Na construção do dodecaedro regular, a maior dificuldade encontrada é dar estabilidade à estrutura. Por esse motivo, uniremos todos os vértices do dodecaedro ao centro do poliedro.

Cada aresta da estrutura tem como medida um canudo de lado *l*. Precisaremos de 30 canudos de lado *l.* A construção começa pela base, e depois levantamos uma pirâmide conforme a figura seguinte.



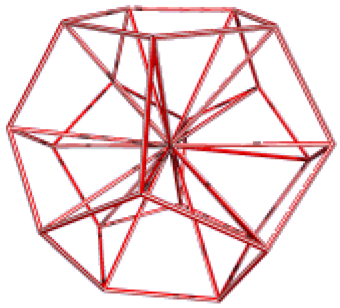
Mas não é uma pirâmide qualquer, pois o dodecaedro deverá ter no fim do processo 12 pentágonos iguais, e para que isso ocorra esta pirâmide deverá ter uma altura específica.

Através das características do pentágono podemos encontrar o apótema *a* e a distância *b* do centro ao vértice do pentágono.

$$a = \frac{l}{2 \cdot \tan 36^\circ} \qquad b = \frac{l}{2 \cdot \text{sen } 36^\circ}$$

É possível concluir que *h*, altura da pirâmide, é dada por $h = \frac{2a+b}{2}$. Lembre-se que *l* é o lado do pentágono, e também o comprimento dos canudos que formam as arestas. Utilizando o teorema de Pitágoras, encontramos o comprimento dos canudos que ligarão os vértices como sendo de 1,4·*l*.

Assim, precisaremos de mais 20 canudos de comprimento 1,4l para fazer a estrutura interna. Logo teremos um dodecaedro regular construído com canudos semelhante ao da figura abaixo.



7.6 Sexta atividade: Planificação de um tetraedro regular com régua e compasso.

1º passo: Em papel cartão, construa um segmento de reta AB.

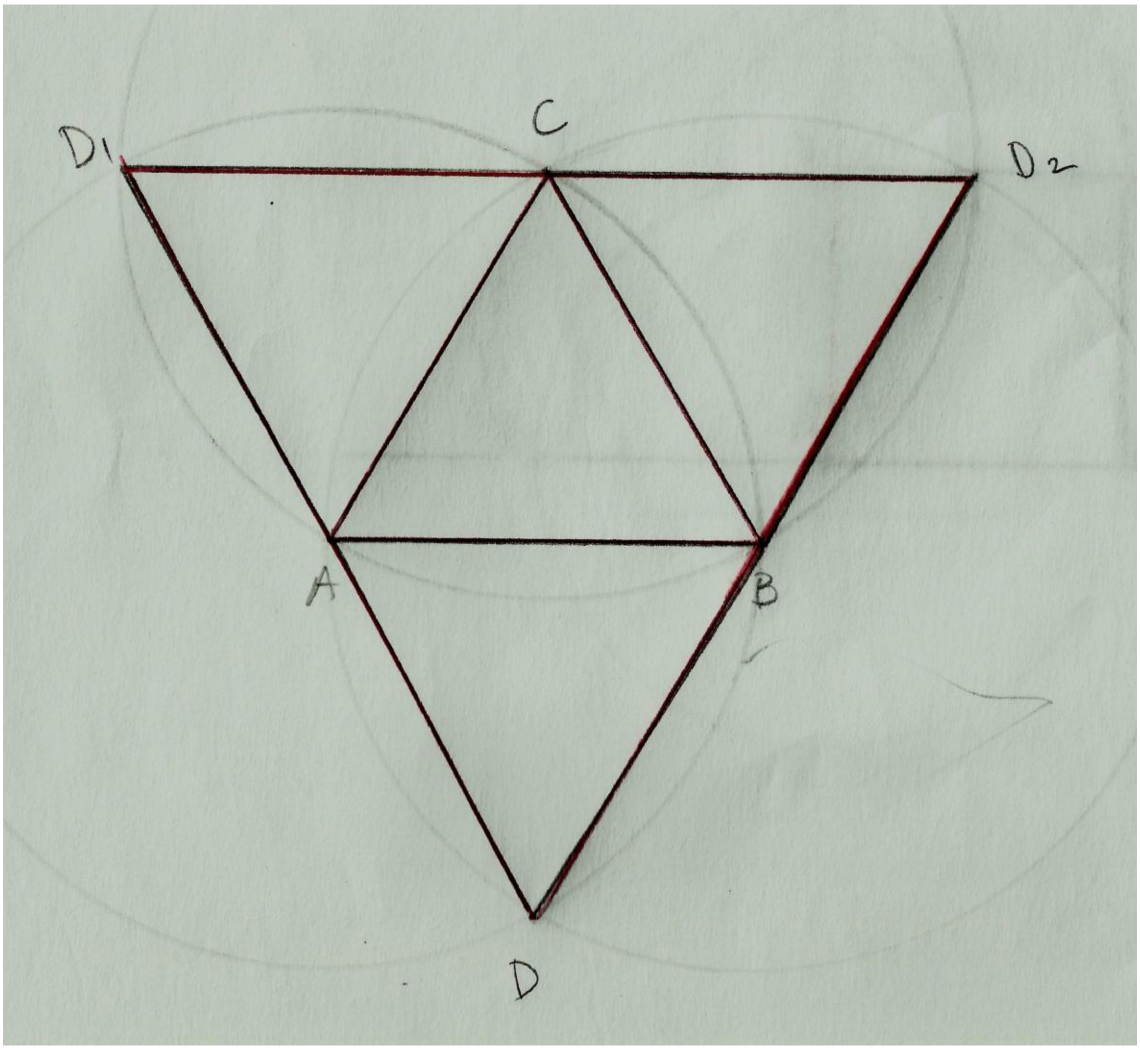
2º passo: Com centro em A e raio AB construa a circunferência C_1 e com centro em B e raio AB construa a circunferência C_2.

3º passo: Nas intersecções desses dois círculos marcamos os pontos C e D.

4º passo: Traçamos os segmentos AC, BC, AD e BD.

5º passo: Agora, com centro em C e raio AC, trace uma terceira circunferência C_3. Na intersecção de C_1 e C_3, marcamos o ponto D_1 e na intersecção de C_2 e C_3, marcamos o ponto D_2.

6º passo: Traçamos os segmentos AD_1, CD_1, BD_2 e CD_2. Temos então, uma das planificações de um tetraedro regular.



7.7 Sétima atividade: Planificação de um cubo com régua e compasso

Para planificar um cubo primeiramente, devemos mostrar como construir retas perpendiculares.

1º passo: Trace uma reta r e um ponto P com P $\in$ r.

2º passo: Determine A e B traçando um arco qualquer com centro P.

3º passo: Trace dois arcos de mesmo raio com centros em A e em B. A sua intersecção chamaremos de C.

4º passo: Trace a reta que passa por C e por P que é perpendicular a r e chame de s.

Temos assim, r//s.

7.7.1 **Planificação do cubo**

1º passo: Traçamos um segmento AB e um ângulo reto com vértice em A.

2º passo: Determinamos D com um arco de centro A e raio AB. Depois determinamos C com dois arcos de raio AB e centros em B e em D.

3º passo: Destacamos o quadrado ABCD.

4º passo: Prolongamos a reta que passa por A e por B que chamaremos de r no sentido de B. Para o restante da planificação do cubo, todos os arcos terão raio AB.

5º passo: Traçamos um arco com centro em B e na intersecção dele com r marcamos o ponto E.

6º passo: Agora, com centro em E e em C, traçamos dois arcos e marcamos F na intersecção deles.

7º passo: Destacamos o quadrado BEFC.

8º passo: Traçamos um arco com centro em E e na intersecção dele com r marcamos o ponto G.

9º passo: Agora, com centro em G e em F, traçamos dois arcos e marcamos H na intersecção deles.

10º passo: Destacamos o quadrado EGHF.

11º passo: Traçamos um arco com centro em G e na intersecção dele com r marcamos o ponto I.

12º passo: Agora, com centro em I e em H, traçamos dois arcos e marcamos J na intersecção deles.

13º passo: Destacamos o quadrado GIJH.

14º passo: Prolongamos o segmento EF nos dois sentidos e chamaremos esta reta de s.

15º passo: Trace o arco com centro em F. A sua intersecção com s chamaremos de K.

16º passo: Agora, com centro em H e em K, trace dois arcos e marque L na intersecção deles.

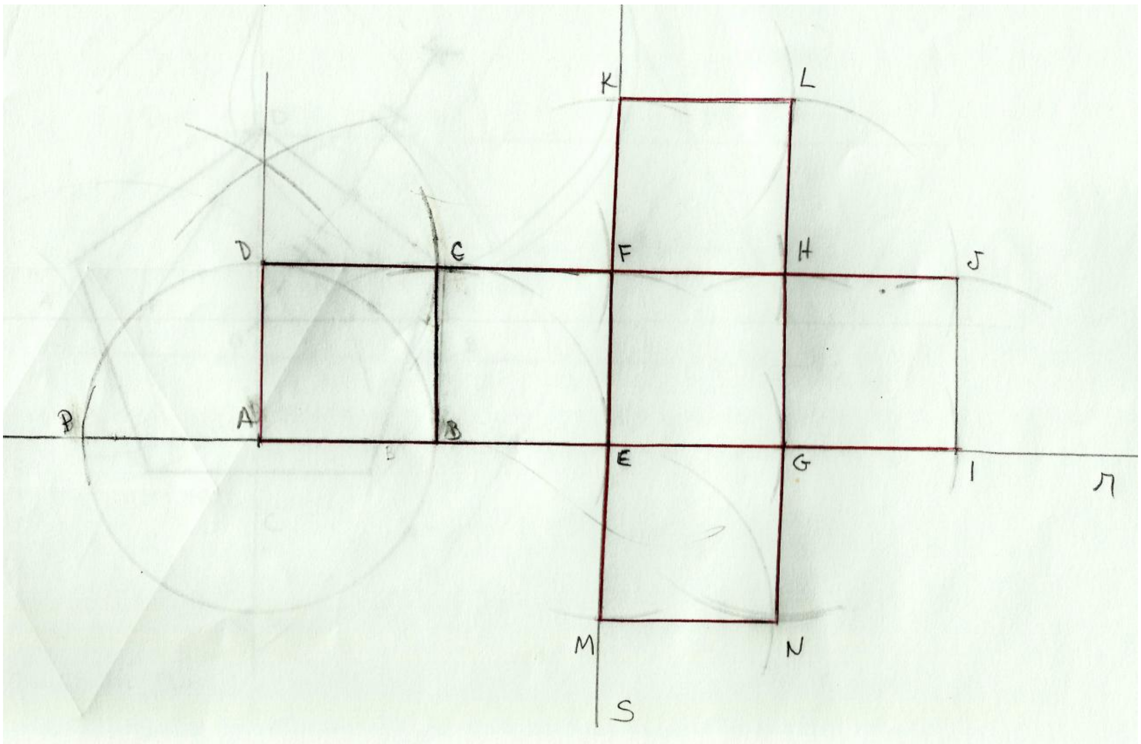
17º passo: Destaque o quadrado FHLK.

18º passo: Trace o arco com centro em E. A sua intersecção com s chamaremos de M.

19º passo: Agora, com centro em G e em M, trace dois arcos e marque N na intersecção deles.

20º passo: Destaque o quadrado EGNM.

Temos assim, uma panificação do cubo.



7.8 Oitava atividade: Planificação de um octaedro regular com régua e compasso

1º passo: Repita a construção do tetraedro regular da sexta atividade e use também o raio AB.

2º passo: Trace uma circunferência C_4 com centro em D_1.

3º passo: Marque o ponto E na intersecção de C_1 e C_4 e trace os segmentos D_1E e AE.

4º passo: Trace uma circunferência C_5 com centro em D_2.

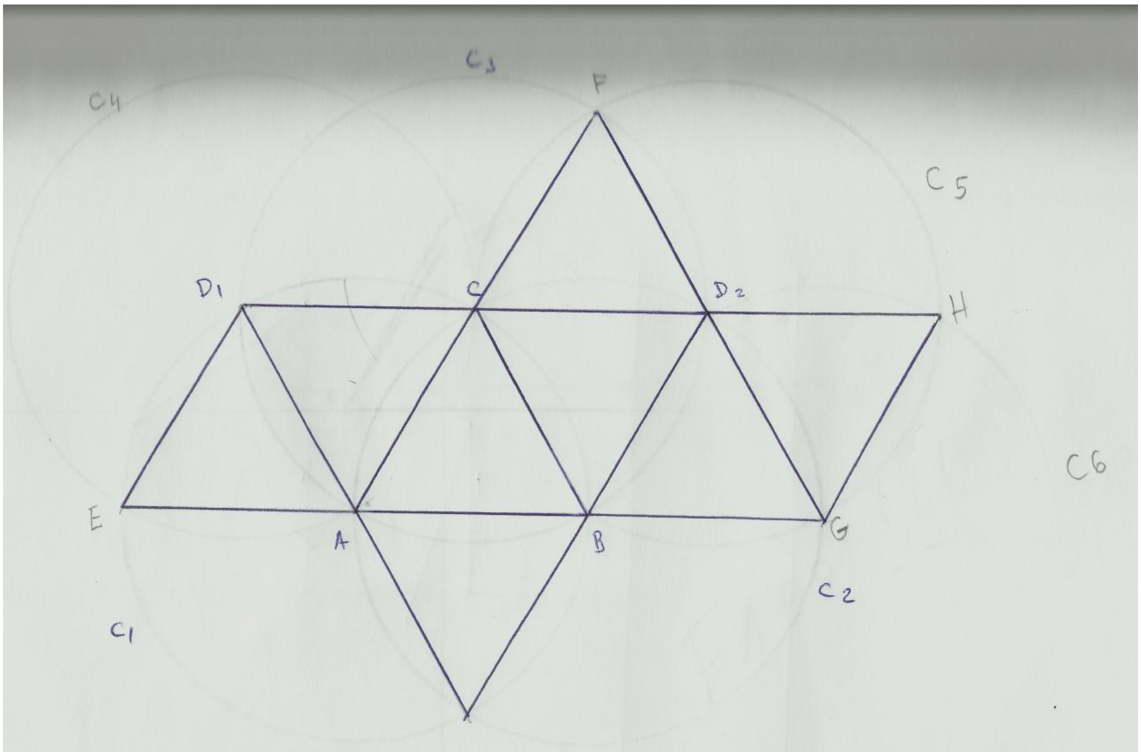
5º passo: Marque o ponto F na intersecção de C_3 e C_5 destaque os segmentos CF e D_2F.

6º passo: Marque o ponto G na intersecção de C_2 e C_5 e destaque os segmentos BG e D_2G.

7º passo: Trace uma circunferência C_6 com centro em G.

8º passo: Marque o ponto H na intersecção de C_5 e C_6 e destaque os segmentos GH e D_2H.

Temos assim, a planificação de um octaedro regular.



7.9 Nona atividade: Poliedro e a bola de futebol

Na copa do mundo de futebol de 1970 a bola foi confeccionada com pentágonos e hexágonos. Esta estrutura poliédrica chama-se *icosaedro truncado*, e é constituída de 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais. O icosaedro truncado é um dos treze poliedros conhecidos como *sólidos de Arquimedes* e tem 32 faces (sendo 12 pentagonais e 20 hexagonais), 90 arestas e 60 vértices. É claro que não podemos construir uma superfície esférica dessa maneira. A bola de futebol é um poliedro inflado. Faremos então uma planificação dessa estrutura iniciando com um pentágono regular inscrito numa circunferência.

1º passo: Trace uma circunferência C_1 de centro O e duas perpendiculares AB e CD com intersecção em O.

2º passo: Determine E, ponto médio de AB.

3º passo: Determine F, com arco de centro E e raio ED. Destaque o segmento FD que será o lado do pentágono regular.

4º passo: Com lado FD determine G, H, I e J. Destaque o pentágono regular inscrito na circunferência DHJIG.

5º passo: Com raio FD trace uma circunferência C_2 de centro G e uma circunferência C_3 de centro D.

6º passo: Marque o ponto T na intersecção de C_2 e C_3 que fica fora do pentágono DHJIG e trace a circunferência C_4 de raio TD e centro T.

7º passo: Marque os pontos K e L nas intersecções de C_2 e C_3.

8º passo: Com raio FD trace uma circunferência C_5 com centro em K e uma circunferência C_6 com centro em L.

9º passo: Marque os pontos M e N respectivamente nas intersecções de C_4 e C_5 e C_4 e C_6. E destaque o hexágono regular GKMNLD.

10º passo: Repita o processo do 5º ao 8º passo a partir de MN e destaque o hexágono regular MNPQRS.

11º passo: Construa outro hexágono regular LDN'M'K'G' a partir de LD.

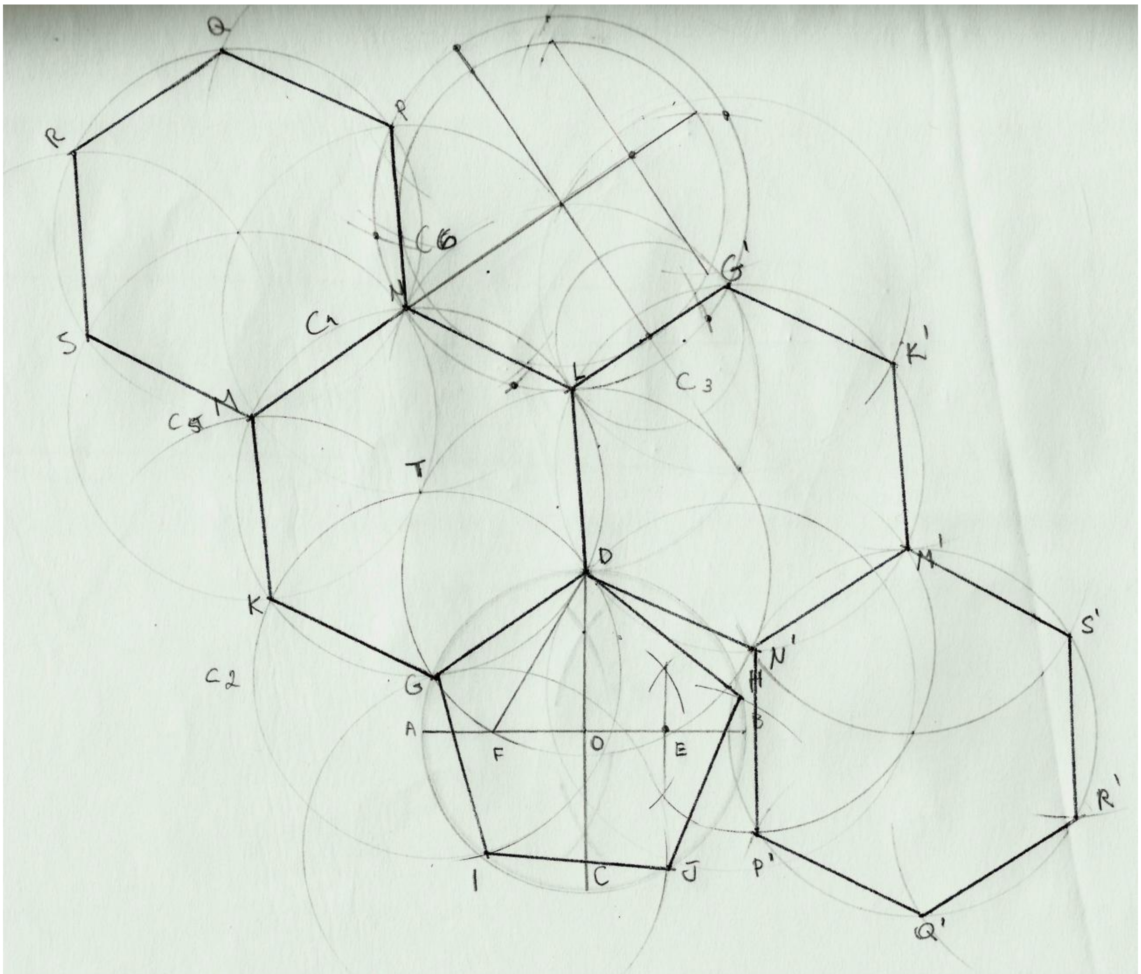
12º passo: A partir de N'M', construa um hexágono regular N'M'S'R'Q'P'.

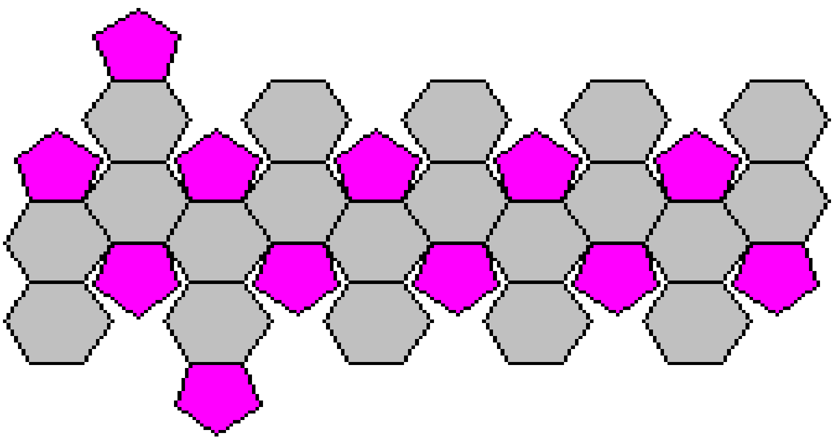
13º passo: Construa dois pentágonos regulares a partir de LG' e Q'R' externos aos hexágonos.

14º passo: Repita os três últimos passos começando por G'K'.

15º passo: Construa novamente uma estrutura de dois hexágonos e um pentágono conforme os nove primeiros passos, porém com o pentágono do lado oposto ao pentágono da primeira estrutura.

16º passo: Repita este processo mais seis vezes sempre alternando a posição do pentágono e terá a seguinte planificação de um icosaedro truncado.





7.10 Décima atividade: Planificação de um dodecaedro

1º passo: Trace o segmento AB perpendicular ao segmento CD com centro em O e uma circunferência C_1 de raio AO.

2º passo: Determine E, ponto médio de OB.

3º passo: Determine F, com arco de centro E e raio ED. Destaque o segmento FD que chamaremos de l, lado de um pentágono regular.

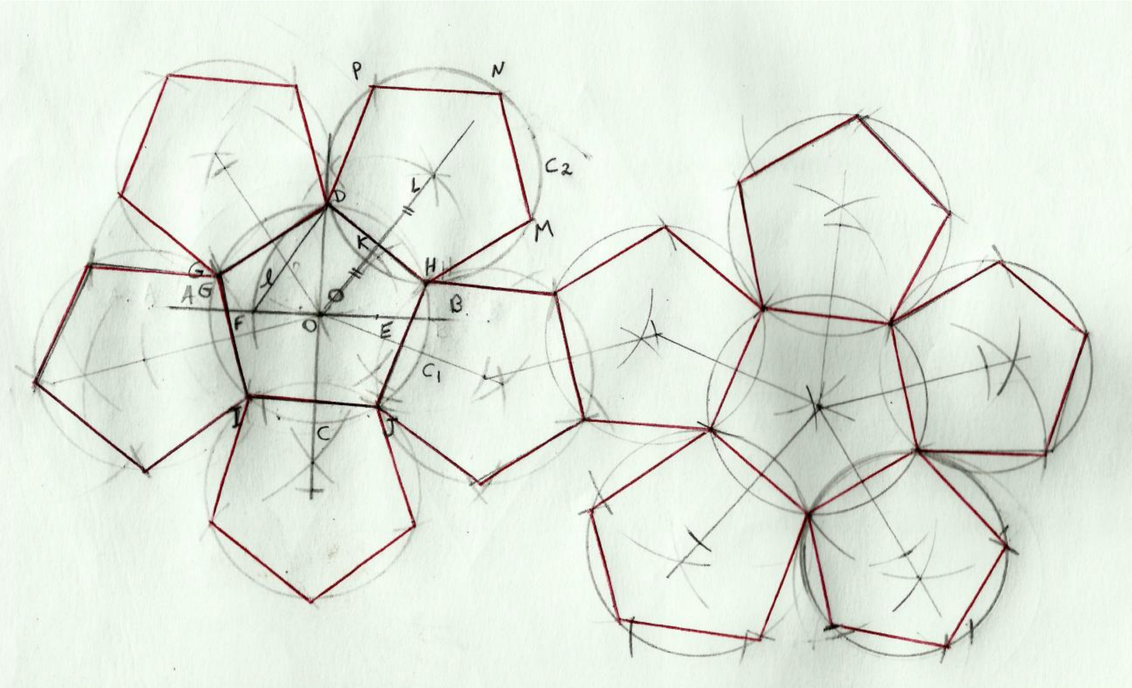
4º passo: Com o lado l, determine G, H I e J e destaque o pentágono regular inscrito na circunferência C_1.

5º passo: Marque K, ponto médio de HD e trace um segmento KL na mediatriz de HD sendo KL = HD.

6º passo: Com centro em L, trace uma circunferência C_2 de raio OB (idêntica a C_1).

7º passo: Determine sobre C_2, M, N e P de medida DH e destaque o pentágono DHMNP.

8º passo: Repita o 5º, o 6º e o 7º passo tomando como referência os outros lados do pentágono DHJIG.



7.11.Décima primeira atividade: Planificação de um icosaedro regular com régua e compasso

1º passo: Construa um triângulo equilátero ABC e um triângulo eqüilátero ABD com D oposto a C.

2º passo: Com centro em B trace uma circunferência C_1, uma circunferência C_2 com centro em C e uma circunferência C_3 com centro em D, todas com raio de medida igual a AB.

3º passo: Marque os pontos E e F nas intersecções de C_1 com C_2 e C_1 com C_3 respectivamente e destaque o triângulo BCE.

4º passo: Trace uma circunferência C_4 com raio CE e centro em E, marque o ponto G nas intersecções de C_2 e C_4 e destaque o triângulo CEG.

5º passo: Na outra intersecção de C_1 e C_4, marque o ponto H e destaque os triângulos BEH e BFH.

6º passo: Com centro em H e raio EH trace uma circunferência C_5 e, com centro em F e raio FH, trace uma circunferência C_6. Marque os pontos I e J nas intersecções de C_4 com C_5 e C_5 com C_6 respectivamente. Destaque o triângulo EHI.

7º passo: Trace uma circunferência C_7 de raio EI e centro em I. Marque o ponto K na intersecção de C_4 e C_7 e o ponto L na intersecção de C_5 e C_7. Destaque os triângulos EIK, HIL e HJL.

8º passo: Trace uma circunferência C_8 de centro em L e raio HL e uma circunferência C_9 com centro em J e raio JL. Marque os pontos M e N nas intersecções de C_7 com C_8 e C_8 com C_9. Destaque o triângulo ILM.

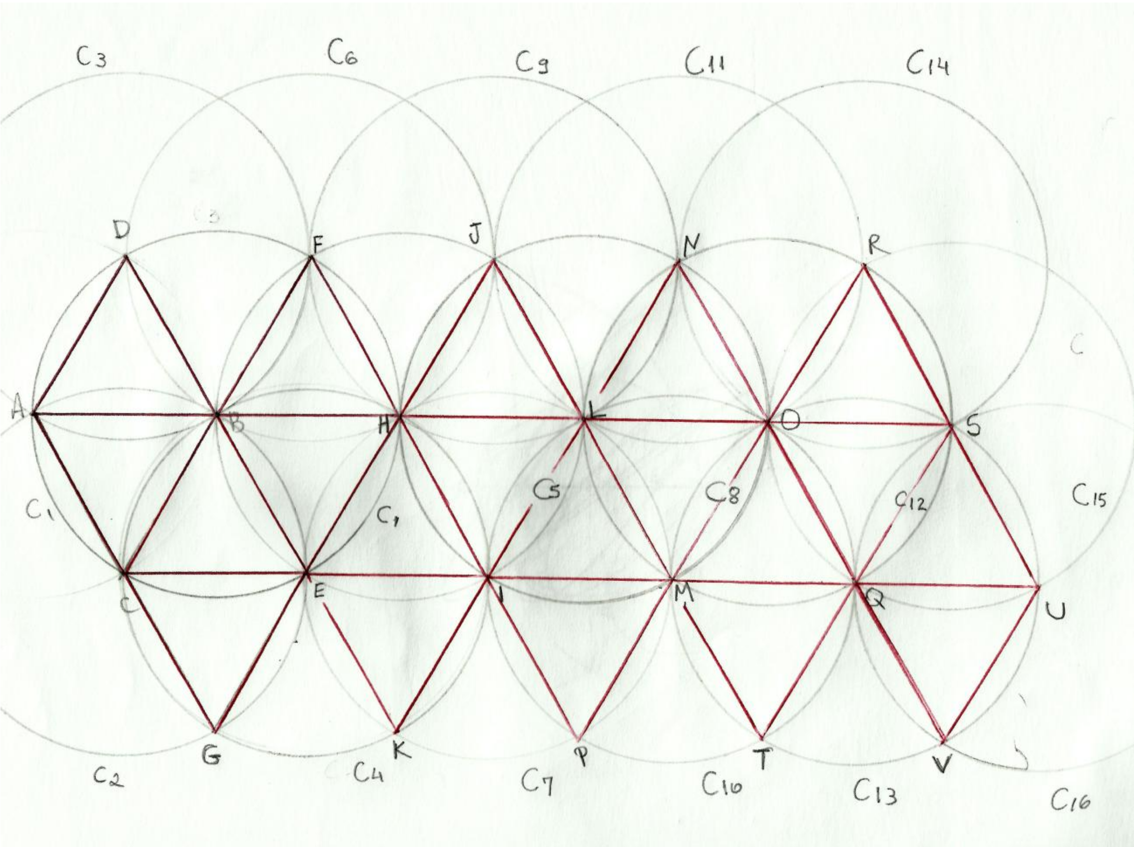
9º passo: Trace uma circunferência C_{10} com centro em M e raio LM e uma circunferência C_{11} com centro em N e raio LN. Marque o ponto O na intersecção de C_{10} com C_{11} e o ponto P na intersecção de C_7 com C_{10}. Destaque os triângulos IMP, LMO e LNO.

10º passo: Trace uma circunferência C_{12} com centro O e raio MO. Marque o ponto Q na intersecção de C_{10} com C_{12} e o ponto R na intersecção de C_{11} com C_{12}. Destaque o triângulo MOQ.

11º passo: Trace uma circunferência C_{13} com centro em Q e raio MQ e uma circunferência C_{14} com centro em R e raio NR. Marque os pontos S na intersecção de C_{13} e C_{14} e T na intersecção de C_{10} e C_{13}. Destaque os triângulos MQT, OQS e OSR.

12º passo: Trace uma circunferência C_{15} com centro em S e marque o ponto U na intersecção de C_{13} com C_{15}. Depois trace uma circunferência C_{16} com centro em U e raio QU e marque o ponto V na intersecção de C_{13} com C_{16}. Destaque os triângulos QUV e QUS.

Assim, tem-se uma planificação de um icosaedro regular.


C3
C6
C9
C11
C14
D
F
J
N
R
A
B
H
L
O
S
C1
C7
C5
C8
C12
C15
C
E
I
M
Q
U
G
K
P
T
V
C2
C4
C7
C10
C13
C16

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na minha prática docente, cada vez mais me convenço de que o uso de materiais manipuláveis e construções com régua e compasso são indispensáveis na percepção dos sólidos geométricos no desenvolvimento das ideias matemáticas.

Os alunos apresentam inúmeros obstáculos na visualização dos poliedros de Platão. Por isso creio que a utilização de estruturas poliédricas confeccionadas com canudos e linha deve ser uma forma a facilitar o ensino-aprendizagem da Geometria Espacial tornando-a muito mais atrativa, agradável e motivadora.

Através da experiência de construir esqueletos de poliedros, os alunos têm a oportunidade de observar o que está sendo estudado, aprimorar a coordenação motora, propor soluções de problemas, estruturar a capacidade dedutiva e até resgatar ou aguçar o interesse por outras disciplinas.

Portanto as atividades propostas contribuem para um melhor aprendizado dos alunos no estudo dos poliedros.

REFERÊNCIAS

DOLCE, Osvaldo, POMPEO, José Nicolau, Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria espacial posição e métrica, Vol.9, 7ª Ed, São Paulo Ed. Atual, 1993.

DOLCE, Osvaldo, POMPEO, José Nicolau, Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria espacial posição e métrica, Vol.10, 6ª Ed,7ª reimpressão, São Paulo Ed. Atual, 2005.

História da geometria disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm16/historia.htm Acessado em 26 de Outubro de 2011.

LOPES, Elizabeth Teixeira, KANEGAE, Cecilia Fujiko. Desenho Geométrico, Vol 3, Scipione, 1995.

LOPES, Elizabeth Teixeira, KANEGAE, Cecilia Fujiko. Desenho Geométrico, Vol 4, Scipione, 1995.

NETTO, Sergio Lima, Construções Geométricas: Exercícios e Soluções, Rio de Janeiro, SBM, 2009.

PUIG ADAM, Pedro. **Curso de Geometria Métrica.** 2. ed. Madrid: Nuevas Graficas, 1949-1950. 2 v.

PUIG ADAM, Pedro. **Curso de Geometria Métrica.** 7. ed. Madrid: Nuevas Graficas, 1958-1961. 2 v.

PEDONE, Nelma Maria Duarte, Poliedros de Platão,Revista do Professor de Matemática, nº 15 – Sociedade Brasileira de Matemática, 1989.

WAGNER , Eduardo, V – A + F = 2. Existe o poliedro?, Revista do Professor de Matemática, nº 47 – Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.