Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Especialização em Matemática para Professores / Cálculo

A utilização de séries de potências no cálculo de um valor aproximado para o número pi

Fernando César Cardoso

Belo Horizonte
2011

Fernando César Cardoso

A utilização de séries de potências no cálculo de um valor aproximado para o número pi

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito para obtenção do Grau de *Especialista em Matemática.*

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Alfonso Chincaro Egusquiza

Belo Horizonte
2011

Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Especialização em Matemática para Professores / Cálculo

Monografia intitulada **“**A utilização de séries de potências no cálculo de um valor aproximado para o número pi**”**, de autoria do pós-graduando Fernando César Cardoso.

Membros componentes da banca examinadora:

____

Prof. Dr. Eduardo Alfonso Chincaro Egusquiza – Orientador

____

Prof. Dr. Paulo Antonio Fonseca Machado

____

Prof. Dr. Alberto Berly Sarmiento Vera

____

Prof. Dr. Paulo Antonio Fonseca Machado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática para Professores

Belo Horizonte

2011

Para Benedito Amâncio Moraes (Duca), meu mestre, minha referência e meu ídolo.

Agradecimentos

À Deus, por tudo que sou e possuo.

À minha família pelo amor, pelo carinho e por acreditarem que o estudo é prioridade.

Ao Professor Eduardo Chincaro, pelos ensinamentos, pela confiança, dedicação e paciência.

Ao amigo Aldécio pela cooperação e boa vontade.

À Daniela e aos meus amigos que, por quase dois anos, me escutaram reclamar do cansaço e me deram força para continuar.

Aos meus alunos, por me fazerem acreditar que vale a pena estudar, aprender e ensinar.

Recebam meu mais sincero muito obrigado.

Resumo

Este trabalho apresenta um método para calcular um valor aproximado do número π usando séries de potências. Seu principal propósito é traçar uma ponte entre a Teoria das Séries de Potências do Cálculo Diferencial e Integral e a estimativa do valor aproximado deste conhecido número.

Palavras-chave: Séries; séries numéricas; sequências; pi

Sumário

INTRODUÇÃO

O número π tem tido um papel destacado no desenvolvimento das Matemáticas desde o inicio desta ciência em que este aparece no cálculo de áreas até nos episódios mais recentes em que o referido número aparece freqüentemente.

Nesta monografia apresentamos um método para calcular um valor aproximado do número π usando séries de potências. O principal propósito deste trabalho é traçar uma ponte entre a Teoria das Séries de Potências do Cálculo Diferencial e Integral e a estimativa do valor aproximado deste conhecido número.

Esta monografia é a ultima etapa da nossa Especialização em Cálculo no Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais.

Nos capítulos 1 e 2 desenvolvemos de maneira rigorosa a teoria de séries de potências convergentes. Enunciamos e algumas vezes incluímos as demonstrações dos principais teoremas do Cálculo de séries como o Teste da Comparação, Teste da Convergência Absoluta, Teste da Série Alternada e Teste da Razão.

No capítulo 3 provamos os teoremas da derivação e da integração termo a termo das séries de potências.

No capítulo 4 obtemos a representação da função arctg x como série de potências e a usamos para obter uma aproximação de π com 4 casas decimais.

CAPÍTULO 1: UM POUCO DA HÍSTÓRIA DO NÚMERO π

Neste capítulo mostraremos as mais importantes descobertas históricas associadas ao cálculo do número π, partindo de um dos problemas clássicos da geometria: a quadratura do círculo. Este problema consiste em construir um quadrado cuja área seja igual à área de um círculo dado.

Diretamente ligado a este problema, está o número π, razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro.

No Oriente antigo este número era tomado como 3 . Os primeiros vestígios de uma estimativa de π, provavelmente utilizada no problema da quadratura do círculo egípcia é dada no papiro Rhind e tomava-se $\pi = (4/3)^4 = 3{,}1604...$

A primeira tentativa científica de calcular π pode ter sido de Arquimedes, em 240 ac. Sabendo que o comprimento da circunferência está entre o perímetro de um polígono regular inscrito e o perímetro de um polígono regular circunscrito, ele limitou o valor de π chegando a conclusão de que ele estava entre 223/71 e 22/7. Este método ficou conhecido como “método clássico de Arquimedes” ou “método dos polígonos”.

Depois de Arquimedes, em 150 dc, a primeira aproximação notável de π foi dada por Ptolomeu na maior obra de astronomia até então já produzida na Grécia antiga: *Syntaxis mathematica*. Nesta obra o valor de π era 377/120.

Na China, no ano 480, o mecânico Tsu Ch’ung-chih obteve, para aplicação no problema da quadratura do círculo, a aproximação 355/113, correta até a 6ª casa decimal.

Em 1429, Al-Kashi, assistente do astrônomo real de Samarcanda calculou, pelo método clássico (dos polígonos) o valor de π até a 16ª casa decimal.

Quase duas décadas depois, em 1610, o holandês Ludolph calculou π até a 35ª casa decimal pelo método clássico usando um polígono de 2^{62} lados, registros dizem que para isso ele gastou grande parte da sua vida.

No ano de 1671, ocorreu o seria a maior descoberta para o cálculo de um valor aproximado para o número π. O matemático escocês James Gregory obteve a série infinita $arc\ tg\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ ...\quad (-1 \leq x \leq 1)$ que ficou conhecida como "série de Gregory. Para ele, passou desapercebido que para $x = 1$ obtinha-se $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$ e que esta série convergia lentamente. Quem observou isso foi Leibniz, três anos depois.

Em 1699 Abraham Sharp encontrou 71 casas decimais para π usando a série de Gregory para $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ e em 1706 John Machin obteve 100 casas decimais utilizando esta mesma série com a relação $\frac{\pi}{4} = 4\,arc\ tg\left(\frac{1}{5}\right) - arc\ tg\left(\frac{1}{239}\right)$.

Johann Heinrich Lambert provou em 1767 que π é irracional e o desafio, a partir daí, passou a ser encontrar o maior número possível de casas decimais para o número π. Assim, em 1844 Zacharias Dase obteve 200 casas decimais utilizando a série de Gregory com a relação $\frac{\pi}{4} = arc\ tg\left(\frac{1}{2}\right) + arc\ tg\left(\frac{1}{5}\right) + arc\ tg\left(\frac{1}{8}\right)$ e em 1981 dois matemáticos japoneses calcularam, em um computador, 2.000.038 casas decimais, gastando 137,3 horas usando a relação $\frac{\pi}{4} = 32\,arc\ tg\left(\frac{1}{10}\right) - 4\,arc\ tg\left(\frac{1}{239}\right) - 16\,arc\ tg\left(\frac{1}{515}\right)$.

CAPÍTULO 2: SEQUÊNCIAS

Neste capítulo desenvolvemos os conceitos de sequências e de limite de uma sequência e enunciamos, na maioria das vezes, sem provar, alguns teoremas básicos sobre esta matéria que darão base a este trabalho. As demonstrações encontram-se nas nossas referências ([Stewart] e [Lima] , [4] e [6]).

2.1 DEFINIÇÕES SOBRE SEQUÊNCIAS

Definição 1

Uma ***sequência*** de números reais é uma função $a: N \to R$, que associa a cada número natural n um número real a_n, chamado de ***n-ésimo*** termo da sequência.

Escreve-se $(a_1, a_2, a_3, ... a_n ...)$ ou $(a_n)_{n \in N}$, $\{a_n\}$ ou simplesmente (a_n) para indicar a sequência cujo $n-ésimo$ termo é a_n.

Definição 2

Um número C é denominado ***limitante inferior*** de uma sequência $\{a_n\}$ se $C \leq a_n$ para todo inteiro positivo n, e é denominado ***limitante superior*** de uma sequência $\{a_n\}$ se $C \geq a_n$ para todo inteiro positivo n.

Definição 3

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é ***crescente*** se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n, e dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é ***decrescente*** se $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n.

Se uma sequência é decrescente ou se ela é crescente, ela é denominada ***monótona***.

Definição 4

Uma sequência $\{a_n\}$ tem ***limite*** L, escrevendo-se, então, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe um número n_0 positivo tal que se $n > n_0$, então $|a_n - L| < \varepsilon$.

Exemplo 1: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ De fato: Dado $\varepsilon > 0$ definimos

$n_0 = \min\left\{n \in N : n > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ se $n > n_0$.

Definição 5

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é ***convergente*** se existe um número real λ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda$. Neste caso, dizemos que a sequência converge para λ.

2.2 PROPRIEDADES DOS LIMITES

Proposição 1 (Propriedades dos limites)

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências convergentes e os seus limites são *A* e *B* respectivamente, temos que:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n . b_n = A.B$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ se $B \neq 0$ (neste caso, $B \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n > n_0, b_n \neq 0$)

(d) $a_n \leq b_n \Rightarrow A \leq B$

Provaremos aqui o item (a), a demonstração dos demais itens se encontra em [LEITHOLD].

Provando (a): Seja dado $\varepsilon > 0$.

Temos: • $\lim_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow \exists\, n_1 \in N : n > n_1 \Rightarrow |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ ***(1)***

• $\lim_{n\to\infty} b_n = B \Rightarrow \exists\, n_2 \in N : n > n_2 \Rightarrow |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ ***(2)***

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Se $n > n_0$ então $n > n_1$ e $n > n_2$.

Portanto, efetuando a soma ***(1)*** + ***(2)*** obtemos

$|a_n + b_n - (A+B)| \le |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon \Rightarrow |a_n + b_n - (A+B)| < \varepsilon$ se $n > n_0$ ***(3)***.

Assim, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ temos:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in N : n > n_0 \Rightarrow |a_n + b_n - (A+B)| < \varepsilon$ e pela definição 4 podemos escrever

$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$.

<u>2.3 TEOREMAS SOBRE SEQUÊNCIAS</u>

Teorema 1

Se $\{a_n\}$ é uma sequência crescente e C um ***limitante superior*** dessa sequência, então $\{a_n\}$ é convergente e $\lim_{n\to+\infty} a_n \le C$.

Teorema 2

Se $\{a_n\}$ é uma sequência decrescente e C um ***limitante inferior*** dessa sequência, então $\{a_n\}$ é convergente e $\lim_{n\to+\infty} a_n \ge C$.

Exemplo 2: $\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \quad se\,|r|<1$

<u>Solução</u>. Usaremos a desigualdade de Bernouilli: $(1+x)^n \geq 1+nx$, se $x \in R$, $x \geq -1$e $n \in N$. A prova desta desigualdade é por indução e segundo ([Lima] , [5]) Ex. 1 pag. 14, óbvio para $n=1$.

Para todo número real $x \geq -1$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $(1+x)^n \geq 1+nx$. Supondo a desigualdade válida para n, multiplicamos ambos os membros pelo número $1+x \geq 0$ e obtemos $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2$

$$(1+x)^{n+1} = 1+(n+1)x+nx^2$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

Agora, provaremos que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, no caso em que $0<r<1$. Neste caso temos $0<r^{n+1}<r^n$, $\{r^n\}$ é assim uma sequência decrescente limitada inferiormente por 0 e portanto esta sequência converge pelo Teorema 2. Por outro lado, $0<r<1 \Rightarrow r=\dfrac{1}{1+x}, x>0$. Então, pela desigualdade de Bernouilli, $0<r^n = \dfrac{1}{(1+x)^n} \leq \dfrac{1}{1+nx}$.

Então, utilizando a Proposição 1 (d), temos que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

No caso geral, usando o caso acima provado, temos que $|r|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$. Donde, no caso geral, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

CAPÍTULO 3: SÉRIES

Nesta seção definiremos séries numéricas e critérios de convergência para estas séries. Não demonstraremos os teoremas mais elementares cuja prova está feita ou sugerida em vários livros de Cálculo, tais como [Stewart]. Provaremos, porém, que toda série absolutamente convergente é convergente.

3.1 DEFINIÇÃO DE SÉRIES E DEFINIÇÃO DE SÉRIES CONVERGENTES

Definição 5

(a) Se tentarmos somar os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obteremos uma expressão da forma $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ que é denominada ***série infinita***, ou apenas ***série***, e é denotada pelo símbolo $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ou $\sum a_n$.

(b) Chamamos de ***soma parcial*** até o ***n-ésimo*** termo de uma série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a soma dos ***n*** primeiros termos desta série. $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_N$.

(c) Uma série infinita $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ com sequência de somas parciais S_n é ***convergente*** se $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ para algum número real S . Se tal limite não existe, ou é igual a $\pm\infty$, a série é ***divergente***.

(d) Se $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ é uma série infinita convergente e $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, então S é chamada de ***soma*** da série, e escrevemos $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ Se a série diverge, não tem soma.

Exemplo 3: (série geométrica)

$$\sum_{n=0}^{\infty} cr^n = \frac{c}{1-r} \quad se \quad |r| < 1, c \in R.$$

<u>Solução</u>: Sabe-se que $S_n = \dfrac{c(1-r^N)}{1-r}$ e assim, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} cr^n = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{c(1-r^N)}{1-r} = \frac{c}{1-r}$.

Aqui usamos que, pelo Exemplo 2, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} r^N = 0 \quad se\, |r| < 1$.

Teorema 3 (Propriedades básicas das séries)

Seja c uma constante não nula.

a) Se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e sua soma é S, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c.a_n$ também é convergente e sua soma é $c.S$.

b) Se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c.a_n$ também é divergente.

Teorema 4

Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são séries infinitas convergentes cujas somas são S e R respectivamente, então:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série convergente e sua soma é $S + R$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série convergente e sua soma é $S - R$.

Provando (a): Suponhamos que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = R$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} \underbrace{a_1 + a_2 + ... + a_n}_{S_n} = S$ e $\lim_{n\to\infty} \underbrace{b_1 + b_2 + ... + b_n}_{R_n} = R$.

Efetuando a soma $S_n + R_n$ obtemos

$$S_n + R_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + b_1 + b_2 + ... + b_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n) = T_n$$

E dessa forma, pela Proposição 1 (a), $\lim_{n\to\infty} T_n = S + R$ o que equivale a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = S + R$.

3.2 TEOREMAS SOBRE SÉRIES CONVERGENTES

Teorema 5

Uma ***série*** infinita de termos positivos é ***convergente*** se e somente se sua sequência de somas parciais tiver um limitante superior.

Teorema 6 (Teste da comparação)

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ séries de termos positivos, então:

a) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge e $a_n \le b_n$ para todo inteiro positivo n, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

b) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge e $a_n \ge b_n$ para todo inteiro positivo n, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Teorema 7

Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots$ números alternadamente positivos e negativos, como $1, -2, 3, -4, 5, -6\ldots$.

(a) Se $|a_{n+1}| < |a_n|$ para todo n inteiro e positivo, e $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ então a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

(b) O erro ao se aproximar a soma infinita desta série pela soma parcial é $\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_n - \sum_{i=1}^{N} a_n \right| < |a_{N+1}|$.

<u>3.3 CONVERGÊNCIA ABSOLUTA</u>

Definição 6

Uma série infinita $\sum a_n$ é ***absolutamente convergente*** se a série $\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$, obtida tomando-se o valor absoluto de cada termo, é convergente.

Note que se $\sum a_n$ é uma série de termos positivos, então a convergência absoluta coincide com a convergência, pois $|a_n| = a_n$.

Teorema 8

Se a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente, ela é convergente e $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Prova: Tomemos três séries infinitas $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$ com sequências de somas parciais $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ e $\{r_n\}$ respectivamente. Para todo n natural temos $a_n + |a_n| = 0$ ou $a_n + |a_n| = 2|a_n|$, gerando a desigualdade

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \quad \textbf{\textit{(4)}}.$$

Observe que isto implica que $\{r_n\}$ é crescente dado que $0 \leq a_n + |a_n|$.

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é convergente, ela tem uma soma que denotaremos por T. A sequência $\{t_n\}$ é crescente com termos positivos e assim, $t_n \leq T$ para todo n natural.

De ***(4)*** temos que $0 \leq r_n \leq 2t_n \leq 2T$. Assim, temos que a sequência crescente $\{r_n\}$ tem $2T$ como limitante superior e pelo teorema 5 obtemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$ é convergente e denotaremos sua soma de R.

Como em ***(4)***, $\{r_n\}$ é uma sequência crescente e pelo teorema 1 podemos concluir que $R \leq 2T$.

Cada uma das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$ é convergente e pelo teorema 4 concluímos que $\sum_{n=1}^{+\infty} [(a_n + |a_n|) - |a_n|] = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

Seja S a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, então pelo teorema 4, $S = R - T$ e como $R \le 2T$ temos $S \le 2T - T = T$.

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e tem soma S, segue do teorema 3 que $\sum_{n=1}^{+\infty} (-a_n)$ é convergente com soma $-S$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} |-a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = T$ podemos substituir $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ por $\sum_{n=1}^{+\infty} (-a_n)$ em ***(*)*** encontrando $-S \le T$. Como $S \le T$ e $-S \le T$, temos $|S| \le T$. Dessa forma, podemos escrever $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ e concluímos a demonstração do teorema.

3.4 TESTE DA RAZÃO

Teorema 9

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série infinita de termos não nulos. Então:

a) Se $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, a série é absolutamente convergente.

b) Se $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \pm\infty$, a série é divergente.

c) Se $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, nada podemos concluir sobre sua convergência ou divergência.

CAPÍTULO 4: SÉRIES DE POTÊNCIAS

Nesta seção consideramos séries de potências da variável x e definimos o raio de convergência destas séries. Estudamos em detalhes a derivação e a integração termo a termo de uma série de potências e provamos que o raio de convergência da série derivada e da integral é o mesmo da série original.

4.1 DEFINIÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Definição 7

Denomina-se ***série de potências*** em $(x-b)$ toda série da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + a_3(x-b)^3 + ... + a_n(x-b)^n + ...$ onde x é uma variável e os a_n\`s são constantes chamadas ***coeficientes*** da série.

Se existe um número positivo R tal que a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-b)^n$ converge se $|x-b| < R$ e diverge se $|x-b| > R$ então R é denominado ***raio de convergência*** da série de potências.

O ***intervalo de convergência*** de uma série de potências é aquele que consiste em todos os valores de x para os quais a série converge.

4.2 TEOREMAS SOBRE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Teorema 10 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)

Seja $f:[a,b]\to R$ n vezes derivável no intervalo aberto (a,b) com $f^{(n-1)}$ contínua em $[a,b]$. Então existe $\varepsilon \in (a,b)$ tal que

$$f(b) = f(a) + f`(a)(b-a) + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\varepsilon)}{n!}(b-a)^n .$$

Pondo $b = a + h$, isto quer dizer que dizer que existe θ, com $0 < \theta < 1$, tal que

$$f(a+h) = f(a) + f`(a).h + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}.h^n .$$

Prova: Seja $\varphi:[a,b]\to R$ definida por $\varphi(x) = f(b) - f(x) - f`(x)(b-x) - ... - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}.(b-x)^{n-1} - \frac{K}{n!}(b-x)^n$, onde a constante $K$ é escolhida de modo que $\varphi(a) = 0$. Então $\varphi$ é contínua em $(a,b)$, com $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Vê-se facilmente que $\varphi`(x) = \frac{K - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}.(b-x)^{n-1}$.

Pelo Teorema de Rolle, existe $\varepsilon \in (a,b)$ tal que $\varphi`(\varepsilon) = 0$. Isto significa que $K = f^{(n)}(\varepsilon)$. O teorema 10 se obtém fazendo $x = a$ na definição de φ e lembrando que $\varphi(a) = 0$.

Teorema 11

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é uma série de potências com raio de convergência $R > 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ também tem R como raio de convergência.

Prova: Seja x um número do intervalo $(-R, R)$, assim $|x| < R$.

Tomemos um número x_1 tal que $|x| < |x_1| < R$. Sendo $|x_1| < R$, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n {x_1}^n$ é convergente e $\lim_{n \to +\infty} a_n x_1^n = 0$; e pela definição de limite, para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 natural tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n\, x_1^n| < \varepsilon$.

Se tomarmos $\varepsilon = 1$, existe um número $n_0 \in N$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n x_1^n| < 1$.

Seja M o maior dos números $|a_1 x_1|, |a_2 x_1^2|, |a_3 x_1^3|, \ldots, |a_n x_1^n|, 1$. Então $|a_n x_1^n| \leq M$ ***(5)*** para todo n natural.

Fazendo $|n a_n x^{n-1}| = \left| n a_n \cdot \frac{x^{n-1}}{x_1^n} \cdot x_1^n \right| = n \cdot \frac{|a_n {x_1}^n|}{|x_1|} \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1}$ ***(6)***.

Substituindo ***(5)*** em ***(6)*** obtemos $|n a_n x^{n-1}| \leq n \cdot \frac{M}{x_1} \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1}$.

Aplicando o teste da razão ***(Teorema 9)*** à série $\frac{M}{|x_1|} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1}$ ***(7)*** temos:

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(n+1)|x^n|}{x_1^n} \cdot \frac{|x_1|^{n-1}}{n|x|^{n-1}} \right| = \left| \frac{x}{x_1} \right| \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$$

Assim, a série ***(7)*** é absolutamente convergente e através do teste da comparação, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ ***(8)*** também é absolutamente convergente.

Se $x \in (-R, R)$ e R' é o raio de convergência da série ***(8)***, então $R' \geq R$.

Dessa forma, resta mostrar que não podemos ter $R' > R$.

Suponha $R' > R$ e tomemos um número x_2 tal que $R < |x_2| < R'$.

Sendo $|x_2| > R$ temos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x_2{}^n$ é divergente ***(9)***.

Como $|x_2| < R'$, temos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x_2{}^{n-1}$ é absolutamente convergente.

Mas, $|x_2| . \sum_{n=1}^{+\infty} \left| n\, a_n\, x_2{}^{n-1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| n\, a_n\, x_2{}^n \right|$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| n\, a_n\, x_2{}^n \right|$ é convergente ***(10)***.

Como n é natural, $\left| a_n\, x_2^n \right| \leq n \left| a_n\, x_2^n \right| = \left| n\, a_n\, x_2^n \right|$ e assim temos que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| a_n x_2{}^n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n \left| a_n x_2{}^n \right|$ e aplicando o teste da comparação ***(Teorema 6)*** concluímos que $\sum_{n=1}^{+\infty} n \left| a_n\, x_2{}^n \right|$ diverge de acordo com ***(9)*** contradizendo a afirmação ***(10)***. Logo, a hipótese de que $R' > R$ é falsa, restando $R' = R$.

Teorema 12

Se o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é $R > 0$, então R também é o raio de convergência da série $\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\; x^{n-2}$.

<u>Prova</u>: Na demonstração do teorema 11, provamos que a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ tem raio de convergência R é a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, também é convergente e tem raio de convergência $R' = R$.

Então, para mostrar que a série $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n\ x^{n-2}$ é convergente com raio de convergência R, basta aplicar o teorema 11 à série $\sum_{n=2}^{+\infty} na_n x^{n-1}$.

Assim faremos: Temos $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ e $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n\ x^{n-2}$, fazendo $k=n-1$ obtemos $\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}x^k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)k\,a_{k+1}x^{k-1}$. Tomando $(k+1)a_{k+1}=b_k$ encontramos $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} kb_k x^{k-1}$ que pelo teorema 9 convergem e possuem mesmo raio de convergência.

<u>4.3 DIFERENCIAÇÃO TERMO A TERMO</u>

Teorema 13 (Teorema da diferenciação termo a termo)

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é $R>0$. Então, se f é uma função, definida por $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ***(11)*** $f'(x))$ existe para todo $x\in(-R,R)$ e $f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n x^{n-1}$.

<u>Prova</u>: Sejam x e b dois números distintos pertencentes ao intervalo $(-R,R)$.

Da fórmula de Taylor, pelo teorema 10 podemos tomar $n=1$, e escrever: $f(x)=f(b)+\frac{f'(b)}{1!}(x-b)+\frac{f''(\varepsilon)}{2!}(x-b)^2$.

Usando esta fórmula com $f(x)=x^n$ temos para todo n natural $x^n=b^n+nb^{n-1}(x-b)+\frac{1}{2}n(n-1)(\varepsilon_n)^{n-2}(x-b)^2$ ***(12)*** onde ε_n está entre b e x para todo n natural. De ***(11)*** temos que:

$$f(x)-f(b)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nb^n=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n-a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb^n=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x^n-b^n)$$

Como $x\neq b$ podemos dividir por $x-b$ e de acordo com ***(12)*** obtemos a equação

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\frac{1}{x-b}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n[nb^{n-1}(x-b)+\frac{1}{2}n(n-1)(\varepsilon_n)^{n-2}(x-b)^2]$$

Assim, $\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nb^{n-1}+\frac{1}{2}(x-b).\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_n(\varepsilon_n)^{n-2}$ ***(13)***

Como b pertence ao intervalo $(-R,R)$ segue do teorema 11 que $\sum_{n=1}^{+\infty}na_nb^{n-1}$ é absolutamente convergente.

Como x e b estão no intervalo $(-R,R)$ existe um número $K>0$ tal que $|b|<K<R$ e $|x|<K<R$. Então, pelo teorema 12, temos que $\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nK^{n-2}$ é absolutamente convergente.

Sendo $|n(n-1)a_n(\varepsilon_n)^{n-2}|<|n(n-1)a_nK^{n-2}|$ ***(14)*** para todo ε_n podemos concluir, através do teste da comparação, que $\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_n(\varepsilon_n)^{n-2}$ é absolutamente convergente.

Segue de ***(13)*** que $\left|\frac{f(x)-f(b)}{x-b}-\sum_{n=1}^{+\infty}na_nb^{n-1}\right|=\left|\frac{1}{2}(x-b).\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_n(\varepsilon_n)^{n-2}\right|$ ***(15)***.

Utilizando, em ***(15)***, o teorema 8: se a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ é absolutamente convergente, então ela é convergente e $\left|\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\right|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$; obtemos

$\left|\frac{f(x)-f(b)}{x-b}-\sum_{n=1}^{+\infty}na_nb^{n-1}\right|\leq\frac{1}{2}|x-b|.\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)|a_n||\varepsilon_n|^{n-2}$ ***(16)***.

De ***(14)*** e de ***(16)*** obtemos: $\left|\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}-\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n b^{n-1}\right| \leq \dfrac{1}{2}|x-b|.\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n| K^{n-2}$ onde $0<K<R$. Como a série do lado direito é absolutamente convergente, o limite do lado direito, quando x tende para b, é zero e $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n b^{n-1}$ o que equivale a $f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n b^{n-1}$ e como b pode ser qualquer número do intervalo $(-R,R)$ concluímos a demonstração do teorema.

<u>4.4 INTEGRAÇÃO TERMO A TERMO</u>

Teorema 14 (Teorema da integração termo a termo)

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ uma série de potências com raio de convergência $R>0$. Se f é uma função definida por $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ então f é integrável em todo subintervalo fechado de $(-R,R)$ e calculamos a integral de f integrando a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ termo a termo.

Assim, se $x\in(-R,R)$ então $\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ e a série resultante possui R como raio de convergência.

<u>Prova:</u> Seja g uma função definida por $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$. Como os termos da série de potências que representa $f(x)$ são as derivadas dos termos da série de potências que representa $g(x)$, de acordo com o teorema 11, as duas séries tem o mesmo raio de convergência e, pelo teorema 13, temos que $g'(x)=f(x)$ para todo $x\in(-R,R)$.

Do teorema 12, segue que $f'(x)=g''(x)$ para todo $x\in(-R,R)$. Como f é diferenciável em $(-R,R)$, então f é contínua nesse intervalo e, como conseqüência, f é contínua em todo subintervalo fechado de $(-R,R)$.

Se tomarmos $x\in(-R,R)$ teremos f contínua e integrável no intervalo $[0\,,\,x]$ se $0\le x$, ou no intervalo $[x\,,\,0]$ se $0\ge x$.

Assim, $\int_0^x f(t)\,dt=g(x)-g(0)=g(x)$ o que equivale a $\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ concluindo a demonstração do teorema.

CAPÍTULO 5: ENCONTRANDO UM VALOR APROXIMADO PARA π

Nesta seção aplicaremos os resultados sobre a teoria de séries de potências demonstrados na seção anterior para calcular um valor aproximado do número π, usando somas parciais da série da função $arc\,tg\ x$.

5.1 SÉRIE DE *arc tg (x)*

Utilizando os teoremas demonstrados anteriormente, podemos encontrar uma série de potências que represente $arc\,tg(x)$.

Uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ define uma função cujo domínio é o intervalo de convergência desta série.

Uma série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} cr^n = \frac{c}{1-r}$ converge para a soma $\frac{c}{1-r}$ se $|r|<1$ e diverge se $|r| \geq 1$.

Considerando uma série geométrica com $c=1$ e $r=x$, temos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge para a soma $\frac{1}{1-x}$ se $|x|<1$ e esta define uma função f tal que $f(x)=\frac{1}{1-x}$, e assim, $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^n+...$ se $|x|<1$ e substituindo x por $-x^2$ encontramos $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+...+(-1)^n x^{2n}+...$ se $|x|<1$.

Integrando termo a termo obtemos $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+...$ e encontramos a série procurada: $arc\,tg(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ se $|x|<1$.

Vamos mostrar que o intervalo de convergência da série de potências que representa $arc\,tg(x)$ é $[-1\,,1]$ de modo que $arc\,tg(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ se $|x|\le 1$ fazendo com que esta representação seja válida para todo x no intervalo $[-1\,,1]$.

Assim faremos: Integrando o desenvolvimento finito de $\frac{1}{1+x^2}$ obtemos $arc\;tg(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^{n-1}\,\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+r_n(x)$, onde $r_n(x)=(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$.

De fato, no caso em que a razão da série geométrica é $r=-t^2$, temos a igualdade $S_n=1-t^2+t^4+...+(-1)^{n-1}t^{2n-2}=\frac{1-(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}$ que é válida para todo $|t|\le 1$.

Portanto, $arctg\;x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_0^x\left[S_n+\left(\frac{1}{1+t^2}-S_n\right)\right]dt=$

$$\int_0^x\left(1-t^2+t^4+...+(-1)^{n-1}t^{2n-2}\right)dt+\int_0^x\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1-(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\right)dt=$$

$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+(-1)^{n-1}\,\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+r_n(x)$, onde $r_n(x)$ é a integral acima.

Para todo $x\in[-1\,,1]$ Temos $|r_n(x)|\le\int_0^{|x|}t^{2n}dt=\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}\le\frac{1}{2n+1}$, logo $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$, portanto vale a igualdade $arc\;tg(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ para todo $x\in[-1\,,1]$ e podemos escrever $arc\;tg(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...$ ***(17)***.

Como provamos que ***(17)*** vale para $x\in[-1\,,1]$ podemos agora tomar $x=1$ obtendo $arc\;tg(1)=1-\frac{1^3}{3}+\frac{1^5}{5}-\frac{1^7}{7}+...\Rightarrow\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+(-1)^n\,\frac{1}{2n+1}+...$***(18)***

5.2 CÁLCULO DE π COM 4 CASAS DECIMAIS

Encontrar o valor numérico da soma de n termos da série ***(18)*** e multiplicá-lo por 4 ainda não nos dá uma aproximação razoável para o valor de π, pois ela converge lentamente. Então, escreveremos $\frac{\pi}{4}$ como $arc\,tg\left(\frac{1}{2}\right)+arc\,tg\left(\frac{1}{3}\right)$. Antes, vamos provar que $\frac{\pi}{4}=arc\,tg\left(\frac{1}{2}\right)+arc\,tg\left(\frac{1}{3}\right)$.

<u>Prova</u>: Seja $\alpha = arc\,tg\left(\frac{1}{2}\right)$ e $\beta = arc\,tg\left(\frac{1}{3}\right)$. Temos que $tg\,(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha . tg\,\beta} = \dfrac{1/2+1/3}{1-1/2 . 1/3} = \dfrac{5/6}{1-1/6}=\dfrac{5/6}{5/6}=1=tg\left(\frac{\pi}{4}\right)$ assim, $\frac{\pi}{4}=\alpha+\beta=arc\,tg\left(\frac{1}{2}\right)+arc\,tg\left(\frac{1}{3}\right)$.

Agora, substituiremos $x=\frac{1}{2}$ e $x=\frac{1}{3}$ na fórmula ***(17)*** e tomaremos o número de termos necessários para obter uma aproximação de π com 4 casas decimais.

- Para $x=\frac{1}{2}$ temos:

$$arc\,tg\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9-\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13}-\frac{1}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{15}+\ldots$$

$$arc\,tg\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{160}-\frac{1}{896}+\frac{1}{4608}-\frac{1}{22528}+\frac{1}{106492}-\frac{1}{491520}+\ldots$$

$$arc\,tg\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}5-0{,}0416+0{,}00625-0{,}00112+0{,}00022-0{,}00004+0{,}00001-0{,}000002+\ldots$$

$$arc\,tg\left(\frac{1}{2}\right)\approx 0{,}463648=S_8$$

Pelo teorema 7, o erro ao calcular $arc\,tg\left(\frac{1}{2}\right)$ é menor que

$$\left|\frac{1}{17}\left(\frac{1}{2}\right)^{17}\right|=\frac{1}{17 . 2^{17}}=\frac{1}{1.114.112}<\frac{1}{10^6}.$$

- Para $x = \frac{1}{3}$ temos:

$$arc\,tg\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9 - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{11} + \ldots$$

$$arc\,tg\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} - \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147} - \frac{1}{1948617} + \ldots$$

$$arc\,tg\left(\frac{1}{3}\right) = 0{,}33333 - 0{,}01235 + 0{,}00082 - 0{,}00007 + 0{,}00001 - 0{,}000001 + \ldots$$

$$arc\,tg\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0{,}321742 = T_6$$

Pelo teorema 7, o erro ao calcular $arc\,tg\left(\frac{1}{3}\right)$ é menor que

$$\left|\frac{1}{13}\left(\frac{1}{3}\right)^{13}\right| = \frac{1}{13.\,81.81.\,243} = \frac{1}{20.726.199} < \frac{1}{10^6}\,.$$

Então, $\frac{\pi}{4} = 0{,}463648 + 0{,}321742 = 0{,}78539$ e multiplicando por 4 obtemos $\pi = 3{,}14156$ uma aproximação razoável para quatro casas decimais.

O erro ao aproximar $\frac{\pi}{4}$ pela adição das somas parciais S_8 e T_6 anteriores é menor que a soma dos erros, ou seja, menor que $\frac{2}{10^6}$:

$$\left|arc\,tg\left(\frac{1}{2}\right) + arc\,tg\left(\frac{1}{3}\right) - (S_8 + T_6)\right| = \left|\left[arc\,tg\left(\frac{1}{2}\right) - S_8\right] + \left[arc\,tg\left(\frac{1}{3}\right) - T_6\right]\right| < \left|arc\,tg\left(\frac{1}{2}\right) - S_8\right| + \left|arc\,tg\left(\frac{1}{3}\right) - T_6\right| < \frac{2}{10^6}$$

Donde, multiplicando por 4, temos que o erro ao calcular π é menor que $\frac{8}{10^6}$ e portanto menor que $\frac{1}{10^5}$. Portanto não há erro ao calcular, desta maneira, as quatro primeiras casas decimais de π.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando aceitamos o desafio de encontrar um valor aproximado para o número π não imaginávamos que para se chegar a um número tão conhecido passaríamos por definições e teoremas que se ligam formando uma lógica crescente que reflete a beleza da Matemática e, principalmente, do Cálculo Diferencial Integral.

Hoje, conhece-se milhares de casas decimais do número pi e apesar deste trabalho chegar apenas até sua quarta casa, seu principal objetivo, que era detalhar o caminho a ser seguido para se chegar até ela foi cumprido, citando todas as definições e teoremas e demonstrando os mais relevantes.

APÊNDICE

TEOREMA DE ROLLE: Seja $f:[a,b] \to R$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a,b) então existe $\varepsilon \in (a,b)$ tal que $f`(\varepsilon) = 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ÁVILA, G.S.S. Cálculo II Diferencial e Integral, Rio de Janeiro, Livros técnicos e Científicos, Brasília, Editora Universidade Federal de Brasília, 1978.

[2] EVES, Howard. Introdução à história da matemática; tradução Hygino H. Rodrigues; Campinas - SP. Editora UNICAMPI, 2004.

[3] LEITOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica, volume 2. 2ª ed. São Paulo. Editora Harper & Row do Brasil Ltda 1982.

[4] LIMA, Elon Lages. Análise Real, volume 1. 2ª ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1993. 200p.; (Coleção Matemática Universitária)

[5] LIMA, Elon Lages. Análise no Espaço R^n. Brasília, Ed. universidade de Brasília, 1970. 98p.

[6] LIMA, Elon Lages. Curso de Análise; v.1. 12.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009. 431p.; ilust.; (Projeto Euclides)

[7] SIMMONS, George F. Cálculo com Geometria Analítica, volume 2; tradução Seiji Hariki; revisão técnica Rodney Carlos Bassanezi, Sílvio de Alencastro Pregnolatto. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[8] STEWART, James. Cálculo volume 2, 6ª edição; tradução técnica Antônio Carlos Moretti, Antônio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

[9] SWOKOWSKI, Earl Willian. Cálculo com Geometria Analítica; tradução Alfredo Alves de Faria; revisão técnica Victor Hugo Teixeira Rodrigues, Antônio Gabriel da Silva St. Aubyn. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983.