UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Queda dos corpos e Equações Diferenciais num primeiro curso de Cálculo

Anderson Aparecido Cassemiro

BELO HORIZONTE

2011

UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Queda dos corpos e Equações Diferenciais num primeiro curso de Cálculo

Monografia desenvolvida como requisito para aprovação no curso (Especialização em Matemática para Professores) ênfase em cálculo, pela Universidade Federal de Minas Gerais.

Orientador: Professor Dr. Grey Ercole

Aluno: Anderson Aparecido Cassemiro

Orientador: Professor Dr. Grey Ercole

Belo Horizonte

2011

Anderson Aparecido Cassemiro

Queda dos corpos e Equações Diferenciais num primeiro curso de Cálculo

COMISSÃO EXAMINADORA

Professor Dr. Grey Ercole
Universidade Federal de Minas Gerais

Professor Dr. Francisco Dutenhefner
Universidade Federal de Minas Gerais

Professor Ms. Jorge Sabatucci
Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte, 08 de junho de 2011

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a “Deus” por estar sempre iluminando o meu caminho.

Agradeço de todo coração ao professor Dr. Grey Ercole, que foi mais que um orientador, sempre disposto a mostrar o melhor caminho para o desenvolvimento desta monografia. Acredito que ele foi fundamental para a realização deste trabalho.

Agradeço e dedico de todo o coração esta monografia aos meus pais Geraldo Cassemiro (in memória) e Maria Aparecida Vasconcelos Cassemiro, aos meus padrinhos e familiares por acreditarem sempre em mim.

Agradeço de todo coração a todos os professores do Departamento de Matemática da UFMG, principalmente ao professores Jorge Sabatucci e Francisco Dutenhefner por participarem da Comissão Examinadora e contribuírem com sugestões que enriqueceram ainda mais esta monografia.

Agradeço de todo coração a todos que trabalham na Secretaria de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da UFMG.

Agradeço de todo coração às pessoas que digitaram e contribuíram para a finalização desta monografia.

RESUMO

Um breve resumo das ideias de Aristóteles, Galileu e Isaac Newton sobre o movimento de queda dos corpos é apresentado.

O tema Queda dos Corpos é desenvolvido, inicialmente desconsiderando-se a resistência do ar, como no Ensino Médio. Posteriormente, com o auxílio de ferramentas básicas do Cálculo Diferencial e Integral, a resistência do ar é considerada.

Palavras chave: **Resistência do ar, Cálculo, Equações Diferenciais de Primeira Ordem.**

ABSTRACT

A brief summary of the ideas of Aristotle, Galileo and Isaac Newton about the motion of falling bodies is presented.

The theme Falling Bodies is developed, initially disregarding air resistance, as in high school. Later, with the aid of basic tools of Differential and Integral Calculus, the air resistance is considered.

Keywords: **Air Resistance, Calculus, First-Order Ordinary Differential Equations.**

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 1

2. QUEDA DOS CORPOS: ARISTÓTELES, GALILEU E NEWTON 2

2.1. ARISTÓTELES 2
2.2. GALILEU 2
2.3. ISAAC NEWTON 3

3. QUEDA LIVRE 4

3.1. LANÇAMENTO VERTICAL PARA CIMA 6
3.1.1. Aplicações 6
3.2. LANÇAMENTO VERTICAL PARA BAIXO 9
3.2.1. Aplicações 10

4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 1ª ORDEM 12

4.1. EQUAÇÕES SEPARÁVEIS 12
4.2. EQUAÇÕES LINEARES 15

5. QUEDA LIVRE: ABORDAGEM VIA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS. 17

5.1. LANÇAMENTO PARA CIMA. 17
5.2. LANÇAMENTO PARA BAIXO. 19
5.3. VELOCIDADE DE ESCAPE 21

6. QUEDA LIVRE E A RESISTÊNCIA DO AR: ABORDAGEM VIA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS. 24

6.1. APLICAÇÕES 25

7. CONCLUSÃO 29

8 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 30

1. INTRODUÇÃO

O movimento de queda de um corpo nos é muito familiar. É o copo que nos escapa da mão e vai ao chão, a borracha que cai da carteira, o tijolo que despenca do alto da construção, a moeda que cai do balcão, etc. São incontáveis os exemplos. Pois bem, esse simples movimento de queda já provocava indagações há 2 mil anos. O primeiro a propor uma teoria para explicar a queda dos corpos foi Aristóteles (384-322 a.c). Depois dele, vários filósofos e pensadores discutiram o fenômeno até que Galileu apresentou uma explicação mais satisfatória, sendo essa, mais tarde, finalizada por Isaac Newton.

Apresentaremos o tema “Queda dos Corpos” primeiramente seguindo uma abordagem do Ensino Médio (desprezando a resistência do ar) e, logo após, passaremos a utilizar argumentos do Cálculo Diferencial e Integral (equações diferenciais de 1ª ordem) para estudar este tema em ambas as situações: desprezando-se a resistência do ar (equação separável) e considerando-se a resistência do ar (equação linear).

É importante reforçar, que diante de um mundo repleto de tecnologias, está cada vez mais complicado conquistar a atenção de cada estudante, mas, nota-se que quando o professor procura apresentar uma relação entre a teoria e a realidade, ou seja, revelando aos alunos que as raízes de inúmeras teorias matemáticas estão em problemas da natureza, este tende a compreender melhor e perceber que estas raízes proporcionaram o notável crescimento de grande parte da matemática no passado e principalmente para a matemática que conhecemos hoje, imprescindível em muitos ramos do conhecimento humano. Assim, o grande objetivo deste trabalho, é tentar servir de auxílio, principalmente para alunos que estão iniciando em cálculo, e simplesmente alertá-los o quanto conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral são fundamentais para ajudar a compreender e explicar fenômenos simples que ocorrem na natureza.

2. QUEDA DOS CORPOS: Aristóteles, Galileu e Newton

2.1. Aristóteles

Suponha que duas pedras, sendo uma mais pesada do que a outra, fossem abandonadas, ao mesmo tempo, de uma mesma altura. Você acha que os tempos que elas gastariam para chegar ao solo seriam iguais ou diferentes?

O grande filósofo grego Aristóteles, que viveu aproximadamente 300 anos antes de Cristo, afirmava que a pedra mais pesada, cairia mais rapidamente, atingindo o solo antes da mais leve. Esta afirmação foi aceita como verdadeira durante vários séculos e, ao que tudo indica, Aristóteles e seus seguidores nunca se preocuparam em verificar, por meio de experiências, se isto realmente acontecia.

2.2. Galileu

Galileu Galilei, famoso físico italiano do século XVII, considerado o introdutor do método experimental na física, acreditava que qualquer afirmativa referente ao comportamento da natureza só deveria ser aceita após sua comprovação por meio de experiências cuidadosas. Para testar as idéias de Aristóteles, conta-se que Galileu realizou a experiência descrita a seguir.

Estando do alto da Torre de Pisa, Galileu abandonou simultaneamente algumas esferas de pesos diferentes, verificando que todas chegaram ao solo no mesmo instante. Assim, a experiência de Galileu contradizia as idéias de Aristóteles; apesar disso, muitos seguidores do pensamento aristotélico não se deixaram convencer. Galileu chegou a ser alvo de perseguições por pregar idéias consideradas revolucionárias.

Se você deixar cair de uma certa altura, simultaneamente, uma pedra e uma pena, verificará que a pedra cairá mais rapidamente. Galileu observando este fato, que parecia ser contrário a sua experiência da Torre de Pisa, lançou a hipótese de que talvez o ar exercesse uma ação retardadora maior sobre a pena. Por isto, a pena gastaria mais tempo do que a pedra para cair.

2.3. Isaac Newton

Para resolver o impasse entre as idéias de Aristóteles e Galileu sobre a queda dos corpos, surge a figura de Isaac Newton, famoso físico e matemático, que nasceu na Inglaterra em 1642.

Segundo Isaac Newton, a queda de corpos lançados de uma mesma altura, não ocorre simultaneamente, devido ao fato de que os corpos em queda próximos à superfície da Terra estão sob a influência de uma segunda força, proveniente da interação com o ar, que gera uma resistência ao movimento.

Mas como isso é possível se Galileu demonstrou do alto da Torre de Pisa que os corpos, mesmo os de diferentes massas, caem juntos?

A questão é que Galileu utilizou corpos muito pesados, enquanto o efeito retardador da força de resistência do ar é mais perceptível para os corpos mais leves (penas, esferas de isopor ocas, algodão...). Além disso, esse efeito retardador é tanto maior quanto maior for a área transversal perpendicular à direção do movimento. Exemplo: Uma folha de papel amassada na forma de uma bola cai mais rápido que uma folha de papel aberta.

Dois corpos, independentes de suas massas, só atingirão simultaneamente o solo, se estiverem apenas sob a influência da força gravitacional.

Para isso, Newton imaginou um tubo de vidro onde fosse criado vácuo (ausência de ar). Nessas condições, sem a influência da resistência do ar, uma pedra e uma pena no interior do tubo atingem o piso ao mesmo tempo.

Assim, desprezando os efeitos provenientes de quaisquer outras interações sobre os corpos abandonados próximo à superfície da Terra, é de se admitir que todos eles caiam, independente de suas massas, com a mesma aceleração g, cuja intensidade é constante e de aproximadamente $\boldsymbol{9,8m/s^2}$.

A esse movimento de queda no vácuo ou no ar, quando é possível desprezar o efeito retardador da força de resistência do ar, damos o nome de queda livre.

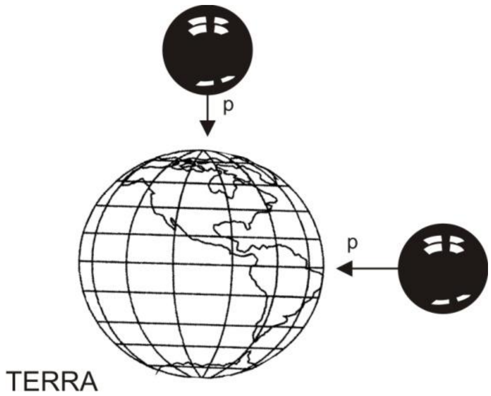
Sendo assim, durante a queda livre, a cada segundo que passa, a intensidade da velocidade do corpo aumenta 9,8m/s. Na subida sua velocidade diminui 9,8m/s a cada segundo.

Logo, quando dois corpos quaisquer são abandonados de uma mesma altura e caem no vácuo ou no ar com resistência desprezível (queda livre), o tempo de queda é igual para ambos, mesmo que seus pesos sejam diferentes.

3. QUEDA LIVRE

Em uma região em torno da Terra todos os corpos sofrem influência da força gravitacional. Tal região é denominada campo gravitacional.

A força que a Terra exerce sobre os corpos situados em seu campo gravitacional é denominada força peso, representada pela letra P.



Essa força, que é sempre dirigida para o centro da Terra, é que faz os corpos caírem sobre ela.

Assim, estudaremos o movimento que os corpos realizam no vácuo nas proximidades da Terra.

Este movimento é denominado Queda Livre.

Como já foi mencionado, Galileu Galilei realizou uma série de experiências sobre a queda livre dos corpos e chegou às seguintes conclusões:

- Todos os corpos, independentemente de sua massa, forma ou tamanho, caem com a mesma aceleração.
- As distâncias percorridas por um corpo em queda livre são proporcionais ao quadrado dos tempos gastos em percorrê-las, isto é, a função horária das posições, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$, é do 2º grau.

A aceleração constante que age sobre o corpo em queda livre é denominada aceleração da gravidade, sendo representada pela letra g.

A aceleração da gravidade varia inversamente com o quadrado da distância ao centro da Terra. Quando se passa do equador para o polo esta aceleração varia de $g \approx 9,78\,m/s^2$ para $g \approx 9,83\,m/s^2$. Ao nível do mar $g \approx 9,8\,m/s^2$. Apesar disso, costuma-se, para efeito de cálculos, considerar $g = 10m/s^2$.

Portanto, se a aceleração da gravidade é constante e a função horária das posições é do 2º grau, decorre que a queda livre é um MRUV (Movimento Retilíneo Uniformemente Variado) sendo válidas todas as funções e conceitos desse movimento adotados no Ensino Médio.

Assim, suponha que um corpo seja lançado para baixo com uma velocidade inicial v_0 (veja a Figura 1).

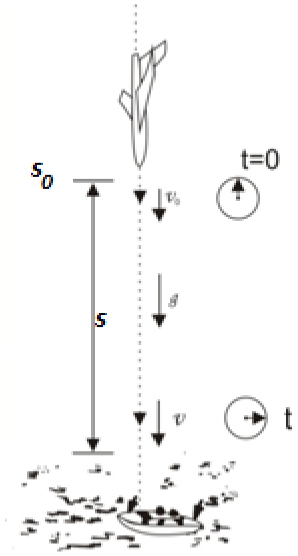


Figura 1. O corpo é lançado para baixo com uma velocidade inicial v_0. A aceleração do movimento é a aceleração da gravidade

O corpo é lançado para baixo, a partir da posição s_0, com uma velocidade inicial v_0. A aceleração do movimento é a aceleração da gravidade.

Após cair durante um tempo t, como sua aceleração é g, ele terá uma velocidade v dada por

$$v = v_0 + gt$$

e percorrerá uma distância Δs dada por

$$\Delta s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 ,$$

em que $\Delta s = s - s_0$ e s é a posição do corpo no instante t.

Como consequência, é também válida a relação

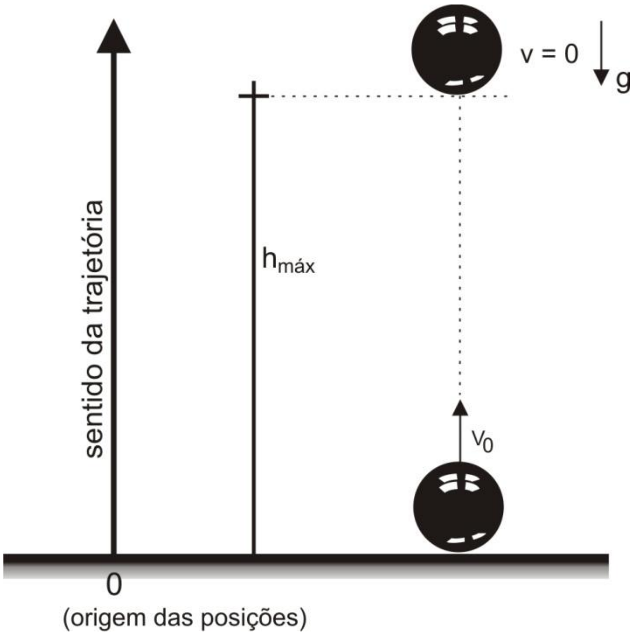
$$v^2 = {v_0}^2 + 2g\Delta s$$

entre $\boldsymbol{v}$ e $\Delta\boldsymbol{s}$.

Estas mesmas equações podem ser empregadas para o movimento de subida, bastando lembrar que, neste caso, o movimento é retardado (aceleração negativa).

3.1. Lançamento vertical para cima

Seja um corpo lançado verticalmente para cima, no vácuo, com velocidade inicial $\boldsymbol{v_0}$.



Observe que:

- Na subida, a aceleração da gravidade é negativa, pois é contrário ao sentido do positivo da trajetória (adotado arbitrariamente).
- No instante em que o corpo atinge a altura máxima a sua velocidade é zero.
- Na subida, o movimento é uniformemente retardado.

3.1.1. Aplicações

1. ([2]) Um corpo é lançado do solo, verticalmente para cima, com velocidade inicial de $\boldsymbol{20 m/s}$. Desprezando-se a resistência do ar e admitindo-se $\boldsymbol{g = 10\ m/s^2}$, pede-se:

a) A função $\boldsymbol{s = s(t)}$

Resolução:

Adotaremos como positiva a trajetória para cima: o movimento em questão é um MUV.

Pela fórmula

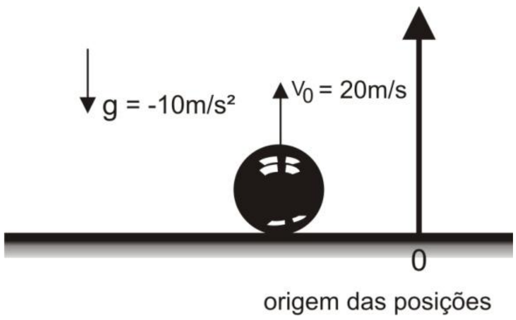
$$\boldsymbol{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\boldsymbol{s = 20t - 5t^2}$$

Com: $\boldsymbol{v_0 = 20\ m/s}$

$\boldsymbol{v_0 = 0}$

$\boldsymbol{g = -10\ m/s^2}$



b) A função $\boldsymbol{v = v(t)}$

Resolução:

$\boldsymbol{v = v_0 + gt}$

$\boldsymbol{v = 20 - 10t}$

c) O tempo $\boldsymbol{t_1}$ gasto pelo corpo para atingir a altura máxima.

Resolução:

Na altura máxima ($\boldsymbol{v = 0}$)

$\boldsymbol{v = 20 - 10t_1}$

$\boldsymbol{0 = 20 - 10t_1}$

$\boldsymbol{t_1 = 2}$ (em segundos)

d) A altura máxima $\boldsymbol{h_m}$ atingida em relação ao solo é o valor de $\boldsymbol{s}$ quando $\boldsymbol{t = t_1 = 2}$.

Resolução:

Substituindo $\boldsymbol{t = 2}$ em $\boldsymbol{s = 20t - 5t^2}$, temos:

$\boldsymbol{h_m = 20.2 - 5.2^2 = 20}$ (em metros)

e) O tempo $\boldsymbol{t_2}$ gasto pelo corpo para atingir o solo.

Resolução:

No solo ($\boldsymbol{s = 0}$) o corpo retorna à origem. Logo, devemos tomar $\boldsymbol{s = 0}$ e $\boldsymbol{t = t_2}$ na expressão $\boldsymbol{s = 20t - 5t^2}$ de $\boldsymbol{s}$ como função de $\boldsymbol{t}$:

$\boldsymbol{0 = 20t_2 - 5{t_2}^2}$

$\boldsymbol{5t_2(-t_2 + 4) = 0}$

$\boldsymbol{t_2 = 4}$ ($\boldsymbol{t_2 = 0}$ deve ser descartado porque é o instante do lançamento).

f) A velocidade do corpo ao tocar o solo.

Resolução:

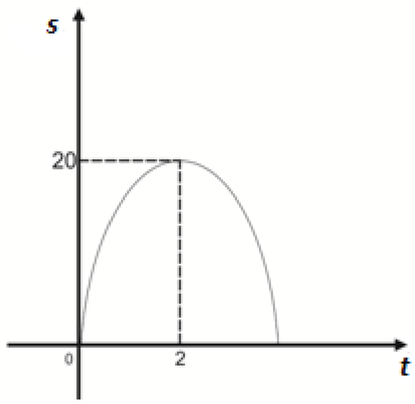
Substituindo $\boldsymbol{t = t_2 = 4}$ em $\boldsymbol{v = 20 - 10t}$, obtemos:

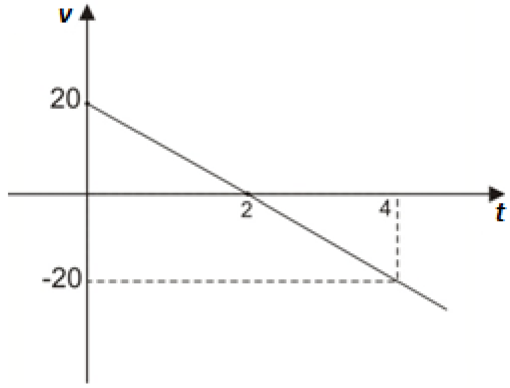
$\boldsymbol{v = 20 - 10.4 = -20}$ (negativa porque é contrária ao sentido positivo adotado)

Observe que:

- Tempo de subida = Tempo de descida.
- Velocidade de saída = Velocidade de chegada (em módulo).

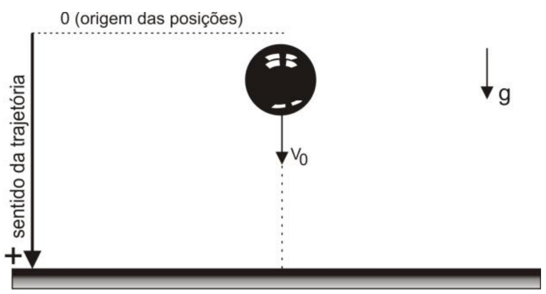
g) Construir os gráficos $\boldsymbol{s = s(t)}$ e $\boldsymbol{v = v(t)}$.





3.2. Lançamento vertical para baixo

Seja um corpo lançado verticalmente para baixo, no vácuo, com velocidade inicial, $\boldsymbol{v_0}$.



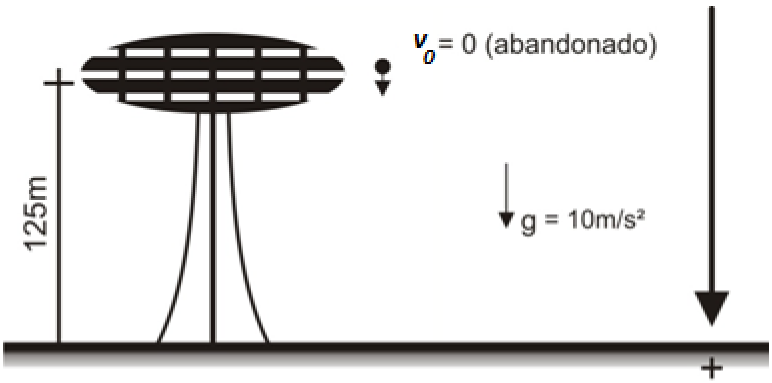
Observe que:

- Na descida a aceleração da gravidade é positiva, pois concorda com o sentido positivo da trajetória.
- Na descida o movimento é uniformemente acelerado.

- Quando se diz que o corpo foi abandonado, sua velocidade inicial é zero $\boldsymbol{v_0 = 0}$.

3.2.1. Aplicações

1- Um corpo é abandonado do alto de uma torre de 125 metros de altura em relação ao solo. Desprezando-se a resistência do ar e admitindo-se $\boldsymbol{g = 10}$ (em $\boldsymbol{m/s^2}$), pede-se:



a) A função $\boldsymbol{s = s(t)}$

Resolução:

A expressão $\boldsymbol{s = s_0 + v_o t + \frac{1}{2} g t^2}$ com $\boldsymbol{s_0 = 0}$, $\boldsymbol{v_0 = 0}$ e $\boldsymbol{g = 10}$ torna-se $\boldsymbol{s = 5t^2}$.

b) A função $\boldsymbol{v = v(t)}$

Resolução:

A expressão $\boldsymbol{v = v_0 + gt}$ com $\boldsymbol{v_0 = 0}$ e $\boldsymbol{g = 10}$ torna-se $\boldsymbol{v = 10t}$.

c) O tempo $\boldsymbol{t_1}$ gasto para o corpo atingir o solo.

Resolução:

Da expressão $\boldsymbol{s = 5t^2}$ com $\boldsymbol{s = 125}$ e $\boldsymbol{t = t_1}$ nos dá $\boldsymbol{125 = 5{t_1}^2}$, ou seja $\boldsymbol{t_1 = 5}$ (em segundos)***.***

d) A velocidade $\boldsymbol{v_1}$ do corpo ao atingir o solo.

Resolução:

Da expressão $\boldsymbol{v = 10t}$ com $\boldsymbol{v = v_1}$ e $\boldsymbol{t = t_1 = 5}$ obtemos $\boldsymbol{v_1 = 50}$ (em metros por segundo).

4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 1ª ORDEM

Definição: Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de ordem *n* é uma equação da forma $\boldsymbol{F\,(t, y, y', y'', y''' \dots, y^{(n)}) = 0}$ em que $\boldsymbol{y = y(t)}$ é a função a ser determinada.

Observação: $\boldsymbol{t}$ é a variável independente $\boldsymbol{y}$ é a variável dependente.

A ordem *n* da EDO é a maior ordem de derivação que aparece na equação.

Ex: 1) $\boldsymbol{y' = ky}$, $(\boldsymbol{k = constante})$

2) $\boldsymbol{y'' = y'}$

3) $\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = y^2}$

4) $\boldsymbol{y' = ky(c - y)}$; $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{c}$ constantes pode modelar uma dinâmica populacional em que a taxa de variação $(\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx}})$ da população $(\boldsymbol{y})$ depende da própria população e da diferença entre a capacidade máxima (*c*) – isto é, o valor máximo sustentável para a população – e a população.

Para iniciarmos o estudo sobre Queda dos Corpos, a nível do Ensino Superior, apresentaremos dois tipos especiais de equações diferenciais de 1ª ordem: Equações Separáveis, que serão aplicadas quando desprezarmos a resistência do ar e Equações Lineares de 1ª Ordem, que utilizaremos quando considerarmos resistência do ar.

4.1. Equações Separáveis

Uma equação diferencial de primeira ordem da forma

$$\boldsymbol{g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)} \qquad (4.1.1)$$

é chamada de separável ou de variáveis separáveis.

Seja $\boldsymbol{G(y) = \int g(y)dy}$ uma primitiva de $\boldsymbol{g(y)}$. Então, $\boldsymbol{\frac{dG}{dy} = g}$ e, assim,

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}G\big(y(x)\big) = \frac{dG}{dy}\frac{dy}{dx} = f(x)},$$

$$\int \frac{d}{dx} G\big(y(x)\big) dx = \int f(x) dx$$

$$G\big(y(x)\big) = \int f(x) dx + C$$

em que C é uma constante de integração.

Conclusão: y é solução da equação algébrica

$$G(y) - F(x) = C \qquad (4.1.2)$$

em que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, isto é, $F(x) = \int f(x) dx$

Observação: Derivando a equação algébrica (4.1.2) implicitamente $(y = y(x))$ em relação a x obtemos (4.1.1). Portanto, (4.1.1). e (4.1.2) são equações equivalentes, e chamamos (4.1.2) de solução geral de (4.1.1).

Observação: Lembrando que a nomenclatura separável provém do modo de escrever, $g(y)y' = f(x)$, usando formas diferenciais $(y' = \frac{dy}{dx})$ que denota a derivada de uma função y em relação à variável independente x, podemos operar assim:

$$g(y)y' = f(x)$$

ou

$$g(y)dy = f(x)dx,$$

obtendo, operacionalmente,

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C,$$

uma fórmula que se justifica por (4.2).

Exemplo: Vamos resolver a equação diferencial $2y\frac{dy}{dx} = -4x$.

Solução.

$$2y\frac{dy}{dx} = -4x$$

$$2ydy = -4xdx$$

$$\int ydy = -2\int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{2x^2}{2} + C$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

$$y^2 + 2x^2 = C \ \ (Família\ de\ Elípses\ se\ C > 0).$$

Exercício

([1]) Resolva por separação de variáveis, as equações diferenciais dadas.

$a)\ y' = xy^2$.

Solução.

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

$$dy = xy^2 dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x dx$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y} = K \ \ (K = -C).$$

b) $x(x+3)dy - y(2x+3)dx = 0.$

Solução.

$$x(x+3)dy = y(2x+3)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(2x+3)dx}{x^2+3x}$$

$$ln|y| = \int \frac{d\mu}{\mu} \quad (\mu = x^2 + 3x)$$

$$ln|y| = ln(x^2+3x) + ln|c|$$

$$ln|y| = ln(|x^2+3x|.c)$$

$$y = c|x^2+3x|.$$

4.2. Equações Lineares

Uma equação diferencial é linear de 1ª ordem quando é de primeiro grau na variável dependente e em todas as suas derivadas.

Trabalharemos uma tal equação na seguinte forma geral

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \qquad (4.2.1)$$

em que o coeficiente da derivada é 1.

Método de Resolução:

Com o propósito de reduzir a EDO (4.2.1) a uma EDO separável, seja

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} > 0.$$

Esta função é chamada fator integrante da EDO linear de 1ª ordem (4.2.1).

Multiplicando a EDO por μ obtemos a seguinte equação equivalente

$$\mu\frac{dy}{dt} + \mu p y = \mu q.$$

Notando que o termo à esquerda da igualdade é a derivada do produto μy encontramos

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu q.$$

Daí, por integração:

$$\mu y = \int \mu\, q\, dt + c,$$

em que c é uma constante que absorve as constantes de integração das duas integrais indefinidas. Portanto,

$$y(t) = \frac{\int \mu\, q\, dt + c}{\mu(t)}.$$

Esta expressão é chamada solução geral.

Exemplos

a) [7] Encontre a solução geral da EDO $\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t$.

Nesta EDO temos $p(t) = \frac{2}{t}$ e $q(t) = t$. Assim,

$$\mu = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\int \frac{1}{t}dt} = e^{2ln|t|} = e^{ln|t|^2} = |t|^2 = t^2$$

e multiplicando a EDO por t^2 encontramos

$$t^2 \frac{dy}{dt} + 2\, ty = t^3$$

$$(t^2 y)' = t^3$$

$$t^2 y = \int t^3 dt + c$$

$$t^2 y = \frac{t^4}{4} + c$$

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{c}{t^2}.$$

b) Resolva o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' + (1 - 2x)y = e^{-x} \\ \qquad y(0) = 2. \end{cases}$$

Primeiramente encontramos a solução geral da EDO $y' + (1 - 2x)y = e^{-x}$:

$$\mu = e^{\int (1-2x)dx} = e^{x-x^2}$$

$$e^{x-x^2} y' + (1 - 2x)e^{x-x^2} y = xe^{-x}.e^{x-x^2}$$

$$\left(e^{x-x^2} y\right)' = xe^{-x^2}$$

$$e^{x-x^2} y = \int xe^{-x^2} dx + c$$

$$e^{x-x^2} y = -\frac{1}{2}\int e^u du + c \quad (substitui\text{ção}\, u = -x^2 = u)$$

$$e^{x-x^2} y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

$$y = -\frac{1}{2} e^{-x} + ce^{-x+x^2}$$

Considerando $y(0) = 2$:

$$2 = -\frac{1}{2} e^0 + c.e^0$$

$$2 = \frac{1}{2} + c$$

$$c = \frac{5}{2}$$

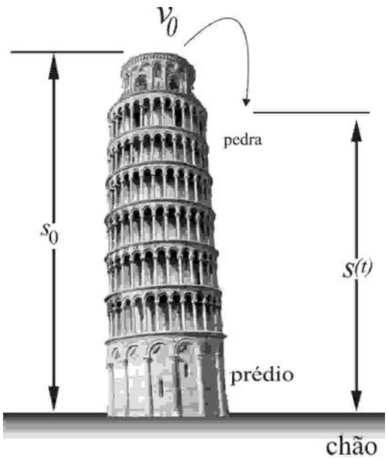
$$y = -\frac{1}{2} e^{-x} + \frac{5}{2} e^{x^2-x}.$$

5. QUEDA LIVRE: Abordagem via Equações Diferenciais.

Seguindo [8], lembre-se da física elementar que a primeira lei do movimento de Newton estabelece que o corpo permanecerá em repouso ou continuará movendo-se a uma velocidade constante, a não ser que esteja agindo sobre ele uma força externa. Em cada caso, isso equivale a dizer que quando a soma das forças $\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}$ - isto é, a força líquida ou resultante – que age sobre o corpo for zero, a aceleração $\boldsymbol{a}$ do corpo será zero. A segunda lei do movimento de Newton indica que, quando a força líquida que age sobre o corpo for diferente de zero, essa força líquida será proporcional à sua aceleração $\boldsymbol{a}$ ou, mais prescisamente, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{ma}$, onde $\boldsymbol{m}$ é a massa do corpo.

5.1. Lançamento para cima.

Suponha agora que uma pedra seja jogada para cima do topo de um prédio.



Qual é a posição $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$ da pedra em relação ao chão no instante $\boldsymbol{t}$? A aceleração da pedra é a derivada segunda $\frac{\boldsymbol{d^2s}}{\boldsymbol{dt^2}}$. Se assumirmos como positiva a direção para cima e que nenhuma outra força além da gravidade age sobre a pedra, ou seja, se desprezarmos a resistência do ar, obteremos a segunda Lei de Newton.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{ma}$$

$$-\boldsymbol{mg} = \boldsymbol{m}\,\frac{\boldsymbol{d^2s}}{\boldsymbol{dt^2}}$$

ou,

$$\frac{\boldsymbol{d^2s}}{\boldsymbol{dt^2}} = -\boldsymbol{g}.$$

Em outras palavras, a força líquida é simplesmente o peso $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{W}$ da pedra próximo à superfície da Terra. Lembre-se de que a magnitude do peso é $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{mg}$, onde $\boldsymbol{m}$ é a massa do corpo e $\boldsymbol{g}$ é aceleração devida à gravidade. O sinal negativo foi usado porque o peso da pedra é uma força dirigida para baixo, oposta à direção do movimento, considerada como a direção positiva. Isto quer dizer que o movimento será regido por uma aceleração negativa (a pedra é atirada para cima mas a gravidade puxa-a para baixo).

Se a altura do prédio é $\boldsymbol{s_0}$ e a velocidade inicial da pedra é $\boldsymbol{v_0}$, então $\boldsymbol{s}$ é determinada, com base no problema de valor inicial de segunda ordem:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g, \qquad s(0) = s_0\,; \quad s'(0) = v_0.$$

A equação poderá ser resolvida integrando-se duas vezes a EDO de segunda ordem acima em relação a $\boldsymbol{t}$. Este procedimento gera duas constantes de integração que serão determinadas pelas condições iniciais.

Podemos reescrever a EDO de segunda ordem

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g$$

como uma EDO separável para a função $\boldsymbol{s'}$:

$$\frac{ds'}{dt} = -g$$

$$ds' = -gdt.$$

Daí,

$$\int ds' = -g\int dt$$

$$s' = -gt + c_1.$$

Como $\boldsymbol{s'(0)} = \boldsymbol{v_0}$, temos

$$v_0 = -g.0 + c_1,$$

Isto é, $\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{c_1}$ e então

$$s' = -gt + v_0$$

ou

$$\frac{ds}{dt} = -gt + v_0$$

ou, ainda

$$\boldsymbol{ds = (-gt + v_0)dt.}$$

Esta é mais uma EDO separável. Logo,

$$\int \boldsymbol{ds} = \int (\boldsymbol{-gt + v_0})\boldsymbol{dt}$$

nos dá

$$\boldsymbol{s = -\frac{1}{2}.gt^2 + v_0t + c_2} \qquad\qquad (\mathbf{5.1})$$

Como $\boldsymbol{s(0) = s_0}$, temos

$$\boldsymbol{s_0 = -\frac{1}{2}g.0^2 + v_0.0 + c_2}$$

isto é, $\boldsymbol{s_0 = c_2}$.

Portanto, substituindo $\boldsymbol{s_0 = c_2}$ em (5.1) podemos reconhecer a fórmula da física elementar do Ensino Médio:

$$\boldsymbol{s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0.}$$

5.2. Lançamento para baixo.

Suponha agora que a pedra seja lançada para baixo. Então

$$\boldsymbol{\frac{d^2s}{dt^2} = g.}$$

Note que o peso atua no sentido do movimento, o que se traduz em uma aceleração positiva $\boldsymbol{g}$. Desta forma, é conveniente adotar como direção positiva a que aponta para baixo.

Repetindo os procedimentos anteriores de resolução de duas equações separáveis (trocando – $\boldsymbol{g}$ por $\boldsymbol{g}$) vamos encontrar

$$\boldsymbol{s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + c_2}$$

Se para $\boldsymbol{t = 0}$ tivermos $\boldsymbol{s_0 = 0}$, resultará $\boldsymbol{c_2 = 0}$, dando, finalmente:

$$\boldsymbol{s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t.}$$

Então, se $\boldsymbol{v_0}$ é nulo, resta a bem conhecida fórmula

$$\boldsymbol{s = \frac{1}{2}gt^2}$$

segundo a qual o espaço percorrido em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo.

Exemplo. ([4]) De um balão parado a 3000m acima do solo, uma pedra é lançada, diretamente ao solo, com a velocidade de 15m/s. Achar a posição e a velocidade da pedra 20s depois.

Resolução: Consideremos positiva a direção do movimento da pedra (para baixo) e consideremos a posição do balão como a origem do movimento, isto é, $\boldsymbol{s(0) = 0}$.

Uma vez que a aceleração da pedra (que é constante e igual a $\boldsymbol{9,8m/s}$) é a taxa de variação da velocidade, temos

$$\boldsymbol{a = \frac{dv}{dt} = 9,8 \Longrightarrow v = 9,8\,t + c.}$$

Quando $\boldsymbol{t = 0}$, a velocidade (inicial) correspondente é $\boldsymbol{v = 15\,m/s}$. Portanto, substituindo esses valores na expressão acima que relaciona a velocidade com o tempo, encontramos $\boldsymbol{c = 15}$ e, assim,

$$\boldsymbol{v = 9,8t + 15.}$$

Agora, como a velocidade é a taxa de variação da posição ($\boldsymbol{v = \frac{ds}{dt}}$), temos

$$\boldsymbol{\frac{ds}{dt} = 9,8t + 15}$$

ou, na forma separável

$$\boldsymbol{ds = (9,8t + 15)dt.}$$

Integrando esta EDO encontramos

$$\boldsymbol{\int ds = 9,8\int tdt + 15\int dt}$$

$$\boldsymbol{s = \frac{9,8t^2}{2} + 15t + k}$$

$$\boldsymbol{s = 4,9t^2 + 15t + k.}$$

Quando $\boldsymbol{t = 0}$ temos $\boldsymbol{s = 0}$. Daí, substituindo esses valores na expressão acima, encontramos $\boldsymbol{k = 0}$ e, portanto, a expressão para $\boldsymbol{s}$ como função de $\boldsymbol{t}$ é:

$$\boldsymbol{s = 4,9t^2 + 15t.}$$

Quando $\boldsymbol{t = 20}$ temos, $\boldsymbol{s = 4,9(20)^2 + 15(20) = 2260.}$ Isto significa que a pedra, nesse instante, está a $\boldsymbol{740}$ metros do chão ($\boldsymbol{3000 - 2260 = 740}$).

Para encontrarmos a velocidade da pedra nesse instante basta voltarmos na expressão $\boldsymbol{v = 9,8t + 15}$ e substituirmos $\boldsymbol{t = 20}$. Fazendo isto obtemos

$$\boldsymbol{v = 9,8(20) - 15 = 211 \ m/s}.$$

5.3. Velocidade de Escape

Um dos problemas interessantes em mecânica é aquele que consiste em determinar a velocidade inicial necessária para colocar um projétil fora da órbita da Terra.

Seguindo [6], admitiremos que a única força que atua no corpo seja o seu peso, $\boldsymbol{w(x)}$, dado por:

$$\boldsymbol{w(x) = -\frac{K}{(R + x)^2}}$$

Onde $\boldsymbol{K}$ é uma constante, $\boldsymbol{R}$ o raio da Terra e $\boldsymbol{x}$ é a distância do corpo à superfície da mesma. Esta expressão para $\boldsymbol{w}$ segue a Lei de Atração Gravitacional, visto que o peso de um corpo, isto é, a força de atração entre este e a Terra, é proporcional ao inverso do quadrado de sua distância ao centro da Terra.

Por definição da aceleração da gravidade, $\boldsymbol{g}$, o peso de um corpo de massa $\boldsymbol{m}$, sobre a superfície da Terra é $\boldsymbol{w(0) = -mg}$, logo,

$$\boldsymbol{-mg = w(0) = -\frac{K}{R^2}}.$$

De onde concluímos que $\boldsymbol{K = mgR^2}$.

Portanto,

$$\boldsymbol{w(x) = -\frac{mgR^2}{(R + x)^2}}.$$

Da segunda Lei de Newton, temos

$$\boldsymbol{ma = m\frac{dv}{dt} = w(x) = -\frac{mgR^2}{(R + x)^2}},$$

ou seja

$$\boldsymbol{\frac{dv}{dt} = -\frac{gR^2}{(R + x)^2}}.$$

Podemos supor que $\boldsymbol{v = v(x)}$, onde $\boldsymbol{x = x(t)}$. Assim, da Regra da Cadeia, temos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

teremos o seguinte problema de valor inicial:

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2} \text{ , } v(0) = v_0.$$

Estamos supondo que o projétil está sendo lançado verticalmente para cima, a partir da superfície da Terra, $\boldsymbol{x_0 = 0}$ com velocidade inicial $\boldsymbol{v_0}$. A equação acima é de variáveis separáveis e a solução do problema de valor inicial será apresentada a seguir:

$$vdv = -\frac{gR^2}{(R+x)^2} dx$$

$$\int vdv = -gR^2 \int \frac{dx}{(R+x)^2}.$$

Resolvendo a segunda integral por meio da mudança de variáveis

$$\begin{cases} R + x = u \\ dx = du \end{cases}$$

encontramos

$$\frac{v^2}{2} = -gR^2 \int u^{-2} du + c$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{gR^2 u^{-1}}{-1} + c$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{u} + c$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{R+x} + c$$

Como $\boldsymbol{x_0 = 0}$, segue-se que

$$\frac{{v_0}^2}{2} = \frac{gR^{\cancel{2}}}{\cancel{R}} + c$$

$$\frac{{v_0}^2}{2} = gR + c,$$

e $\boldsymbol{c = \frac{{v_0}^2}{2} - gR.}$

Portanto,

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{R+x} + \frac{{v_0}^2}{2} - gR$$

$$v^2 = \frac{2gR^2}{R+x} + {v_0}^2 - 2gR,$$

ou seja,

$$v = \pm\sqrt{{v_0}^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R+x}},$$

onde escolhemos o sinal +, para indicar que o projétil está subindo, ou seja, x está crescendo com o tempo.

Quando o projétil atingir a altura máxima, x_{max} a sua velocidade será zero, ou seja,

$$0 = {v_0}^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R+x_{max}}$$

o que nos dá

$$ {v_0}^2 = 2gR - \frac{2gR^2}{R+x_{max}}$$

$${v_0}^2 = 2gR\left(\frac{R+x_{max}-R}{R+x_{max}}\right).$$

Portanto, a velocidade inicial necessária para elevar o corpo até a altura máxima, x_{max} é :

$$v_0 = \sqrt{2gR\frac{x_{max}}{R+x_{max}}}.$$

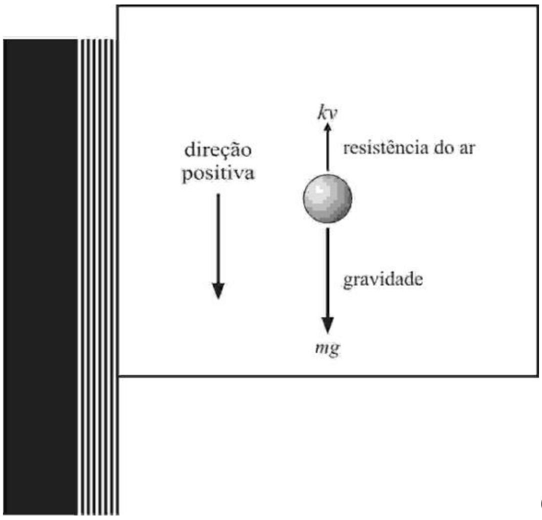
Velocidade de escape, v_e, é encontrada fazendo-se $x_{max} \rightarrow \infty$ na expressão acima, ou seja,

$$v_e = \sqrt{2gR} \cong 11,1\ km/s$$

Se considerássemos o atrito, a velocidade de escape seria maior do que o valor encontrado acima.

6. QUEDA LIVRE E A RESISTÊNCIA DO AR: Abordagem via Equações Diferenciais.

([8]) Antes dos famosos experimentos de Galileu na Torre inclinada de Pisa, acreditava-se que os objetos mais pesados em queda livre, como uma bala de canhão, caíam com uma aceleração maior do que a de objetos mais leves, como uma pena. Obviamente, uma bala de canhão, e uma pena, quando largadas simultaneamente da mesma altura, caem a taxas diferentes, mas isso não se deve ao fato de a bala de canhão ser mais pesada. A diferença das taxas é devida à resistência do ar. Sob algumas circunstâncias, um corpo em queda com massa $\boldsymbol{m}$, como uma pena com baixa densidade e formato irregular, encontra uma resistência do ar proporcional a sua velocidade instantânea $\boldsymbol{v}$. Se nessas circunstâncias, tomarmos a direção positiva como orientada para baixo, a força líquida que age sobre a massa será dada por $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} = \boldsymbol{mg} - \boldsymbol{Kv}$, onde o peso $\boldsymbol{F_1} = \boldsymbol{mg}$ do corpo é a força que age na direção positiva e a resistência do ar $\boldsymbol{F_2} = -\boldsymbol{Kv}$ é uma força chamada <u>*amortecimento viscoso*</u> que age na direção oposta ou para cima. Veja a figura.



Corpo em queda com massa $\boldsymbol{m}$.

Agora, como $\boldsymbol{v}$ está relacionado com a aceleração $\boldsymbol{a}$ através de $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}}$, a segunda Lei de Newton torna-se $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{ma} = \boldsymbol{m}.\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}}$. Substituindo a força líquida na Segunda Lei de Newton, obtemos a equação diferencial de primeira ordem para velocidade $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})$ do corpo no instante $\boldsymbol{t}$**:**

$$\boldsymbol{m}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{mg} - \boldsymbol{Kv}.$$

Aqui, $\boldsymbol{K}$ é uma constante de proporcionalidade positiva. Se $\boldsymbol{s(t)}$ for a distância do corpo em queda no instante $\boldsymbol{t}$ a partir do ponto inicial, então $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{dt}}$ e $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{d^2s}}{\boldsymbol{dt^2}}$. Em termos de $\boldsymbol{s}$, é uma equação diferencial de segunda ordem.

$$\boldsymbol{m\frac{dv}{dt} = mg - Kv}$$

$$\boldsymbol{m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - K\frac{ds}{dt}}$$

ou

$$\boldsymbol{m\frac{d^2s}{dt^2} + K\frac{ds}{dt} = mg.}$$

6.1. Aplicações

1. ([8]) Vimos que uma equação diferencial governando a velocidade $\boldsymbol{v}$ de uma massa em queda sujeita à resistência do ar proporcional à velocidade instantânea é:

$$\boldsymbol{m\frac{dv}{dt} = mg - Kv,}$$

onde $\boldsymbol{K} > 0$ é uma constante de proporcionalidade. O sentido positivo é para baixo.

a) Resolva a equação sujeita à condição inicial $\boldsymbol{v(o) = v_0}$.

Resolução:

$$\boldsymbol{m\frac{dv}{dt} = mg - Kv}$$

$\boldsymbol{\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m}v = g}$ $\Rightarrow$ Equação Linear de Primeira Ordem.

Então:

$$\boldsymbol{\frac{dv}{dt} + \frac{Kv}{m} = \quad g}$$

$\quad\quad \Lsh \boldsymbol{P(t)} \quad \Lsh \boldsymbol{q(t)}$

$$\boldsymbol{\mu = e^{\int P(t)dt} = e^{\int \frac{K}{m}dt} = e^{\frac{K}{m}\int dt} = e^{\frac{K}{m}t}} \text{ (fator integrante)}$$

Multiplicando a equação pelo fator integrante $\boldsymbol{e^{\frac{K}{m}t}}$:

$$\frac{e^{\frac{K}{m}t}dv}{dt} + e^{\frac{K}{m}t}.\frac{K_v}{m} = e^{\frac{K}{m}t}.g$$

$$\left(e^{\frac{K}{m}t}v\right)' = ge^{\frac{K}{m}t}$$

$$e^{\frac{K}{m}t}v = \int ge^{\frac{K}{m}t}\,dt + c_1$$

Utilizando a mudança de variáveis $\frac{K}{m}t = u$ na integral acima obtemos

$$ve^{\frac{K}{m}t} = g\frac{m}{k}\int e^u du + c_1$$

$$ve^{\frac{K}{m}t} = g\frac{m}{k}e^{\frac{K}{m}t} + c_1.$$

Por fim, multiplicando esta última equação por $e^{\frac{-K}{m}t}$ encontramos

$$v = \frac{mg}{k} + c_1 e^{-\frac{K}{m}t}.$$

Condição inicial: $v(o) = v_0$:

$$v_0 = \frac{mg}{k} + c_1\, e^{-\frac{K}{m}0}$$

$$v_0 = \frac{mg}{k} + c_1 e^0$$

$$v_0 = \frac{mg}{k} + c_1$$

$$c_1 = v_0 - \frac{mg}{k} \Longrightarrow v(t) = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{K}\right)e^{-\frac{K}{m}t}.$$

b) Se a distancia s, medida do ponto onde a massa foi abandonada até o solo, estiver relacionada com a velocidade por $\frac{ds}{dt} = v$, ache uma expressão explicita para s, se $s(0) = 0$.

Consideramos:

$$v = \frac{mg}{K} + c_1 e^{-\frac{K}{m}t}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{mg}{K} + c_1 e^{-\frac{K}{m}t}$$

$$\int ds = \int \left(\frac{mg}{K} + c_1 e^{-\frac{K}{m}t}\right) dt + c_2$$

$$\int ds = \int \frac{mg}{K} dt + \int c_1 \, e^{-\frac{K}{m}t} \, dt + c_2$$

$$s = \frac{mgt}{K} - \frac{mc_1}{K} e^{-\frac{K}{m}t} + c_2$$

Condição inicial $\Longrightarrow s(0) = 0$

$$0 = \frac{mg}{K} 0 - \frac{mc_1}{K} e^{-\frac{K}{m}0} + c_2$$

$$c_2 = \frac{mc_1}{K}$$

Então:

$$s = \frac{mgt}{K} - \frac{mc_1}{K} e^{-\frac{K}{m}t} + \frac{mc_1}{K}$$

$$s = \frac{mgt}{K} + \frac{mc_1}{K}\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right)$$

e como $c_1 = v_0 - \frac{mg}{K}$ temos

$$s = \frac{mgt}{K} + \frac{m}{K}\left(v_0 - \frac{mg}{K}\right)\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right).$$

2. ([3]) Um corpo de massa 10 kg é abandonado de uma certa altura. Sabe-se que as únicas forças atuando sobre ele são o seu peso e uma força de resistência proporcional à velocidade. Admitindo-se que 1 segundo após ter sido abandonado a sua velocidade é de 10 m/s, determine a velocidade no instante **t**. Suponha a aceleração da gravidade 10 $\mathbf{m/s^2}$.

Resolução:

A queda do corpo é regida pela equação $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - Kv$ ou $m\frac{dv}{dt} = mg - Kv$

Dados:
$m = 10\,kg$
$g = 10\,m/s^2$
$v = 10\,m/s$

$$10\frac{dv}{dt} = 100 - Kv$$

$$10\frac{dv}{dt} + Kv = 100$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{Kv}{10} = 10$$

$P(t) = \frac{K}{10}$ e $q(t) = 10$

$\mu = e^{\int P(t)dt} = e^{\int \frac{K}{10}dt} = e^{\frac{Kt}{10}}$

Multiplicando a equação por $e^{\frac{Kt}{10}}$:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{Kv}{10} = 10 \, . \left(e^{\frac{Kt}{10}}\right)$$

$$e^{\frac{Kt}{10}}\frac{dv}{dt} + \frac{Kv}{10} \, . e^{\frac{Kt}{10}} = 10 \, . e^{\frac{Kt}{10}}$$

$$(e^{\frac{Kt}{10}}v)' = 10 \, . e^{\frac{Kt}{10}}$$

$$e^{\frac{Kt}{10}}v = 10\int e^{\frac{Kt}{10}}\,dt + c_1$$

$$e^{\frac{Kt}{10}}v = 10\int e^{u}\frac{du}{\frac{k}{10}} + c_1$$

$$e^{\frac{Kt}{10}}v = \frac{10}{\frac{K}{10}}\int e^{u}du + c_1$$

$$e^{\frac{Kt}{10}}v = \frac{100}{K}e^{\frac{Kt}{10}} + c_1$$

$$v = \frac{100}{K} . e^{-\frac{Kt}{10}}e^{\frac{Kt}{10}} + c_1 e^{-\frac{Kt}{10}}$$

$v = \frac{100}{K} + c_1 e^{-\frac{Kt}{10}}$, sabe-se que $v(0) = 0$:

$$0 = \frac{100}{K} + c_1 e^{0} \Rightarrow c_1 = -\frac{100}{K}$$

$$\frac{K}{10}t = u$$

$$\frac{K}{10}dt = du$$

$$dt = \frac{du}{\frac{K}{10}}$$

Logo, $v = \frac{100}{k} - \frac{100}{k}e^{-\frac{Kt}{10}}$

ou $v = \frac{100}{K}\left(1 - e^{-\frac{Kt}{10}}\right)$.

Como $v(1) = 10$ tem-se, $10 = \frac{100}{K}\left(1 - e^{-\frac{K1}{10}}\right)$

$$10 = \frac{100}{K}\left(1 - e^{-\frac{K}{10}}\right)$$

$K = 10\left(1 - e^{-\frac{K}{10}}\right)$, onde K é a raiz da equação.

7. CONCLUSÃO

Propor um tema como “Queda dos Corpos”, leva-nos a perceber o quanto é importante para o desenvolvimento de nossos estudantes, a interdisciplinaridade, ou seja, instigá-lo a aprender que uma boa compreensão de um determinado assunto poderá ser facilitada a partir do momento em que se adquire a capacidade de unir várias disciplinas. Assim, ao realizar esta monografia como parte do curso (Especialização em Cálculo) pudemos perceber como é importante compreender que para entender o complexo contexto de uma matemática mais elaborada, em muitos casos, devemos recorrer às bases do conhecimento e descobrir que muito que conhecemos hoje está relacionado aos inúmeros questionamentos do passado. Portanto, sabendo que grande parte das dificuldades de alunos iniciantes em cálculo se refere as suas aplicações, ou seja, onde e como aplicar conceitos sobre derivada e integral, consideramos nesta monografia a possibilidade de se introduzir tópicos sobre equações diferenciais dentro de um curso de cálculo e, dessa forma, reduzir certas ansiedades que surgem quanto ao porque resolver tantas integrais. Esta estratégia permitiria ao estudante perceber o quanto é importante empenhar-se logo no início de qualquer curso, principalmente no que se refere a área de exatas. Serviria, também, para motivá-lo futuramente num curso de equações diferenciais de nível mais complexo, onde verificará que um dos grandes objetivos dessas equações é solucionar problemas de outras ciências.

8 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ABDELHAY, J. Elementos de Cálculo Diferencial e Integral – Rio de Janeiro, Editora Científica, 1956. Exercício pág -481.

[2] Bonjorno, Regina F. S. Azenha – Física 1. São Paulo – FTD, 1985 – exercício: pág: 70 -73.

[3] Guidorizzi, Hamilton Luiz – Um Curso de Cáculo – v.1, 1986 – exercício 5 - pág. 404.

[4] JR, Frank Ayres – Cálculo Diferencial e Integral, 1966. Exercício 9 pág 171.

[5] Luz. Antônio Máximo Ribeiro da e Álvares, Beatriz Alvarenga – Física de olho no mundo do Trabalho. São Paulo, Scipione, 2003 – p. 30-32.

[6] Lima, Paulo Cupertino – Apostila – Equações Diferenciais A. UFMG – pág 152 – ex: 2,54 – pág 31-32.

[7] Santos, Reginaldo J. – Apostila – Introdução às Equações Diferencias Ordinárias, Belo Horizonte, Imprensa Universitária da UFMG – Pág 22.

[8] Zill., Denis G. – Equações Diferenciais com aplicações em Modelagem. São Paulo, Thomson, 2003, pág 27-29, exercício 29 – Pág 106.

[7] http://www.cefet-rj.br/aluno/trabalhos/posgraduação/as-leis-de-newton/queda-livre.html