

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE  
UM MODELO DE FISSURAÇÃO PARA O  
CONCRETO  
BASEADO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS ESTENDIDO (XFEM)**

**Kelson Pothin Wolff**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE UM  
MODELO DE FISSURAÇÃO PARA O CONCRETO  
BASEADO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
ESTENDIDO (XFEM)**

Kelson Pothin Wolff

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira  
DEES - UFMG (Orientador)

---

Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli  
Departamento de Engenharia Civil - UNESP

Belo Horizonte, 23 de Agosto de 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Data: **Agosto de 2010**

Autor: **Kelson Pothin Wolff**

Título da Dissertação: **Implementação Computacional de um  
Modelo de Fissuração para o Concreto  
Baseado no Método dos Elementos  
Finitos Estendido (XFEM)**

Departamento: **Engenharia de Estruturas**

Título: **Mestre**      Convocação: **Setembro**      Ano: **2010**

GARANTE-SE À Universidade Federal de Minas Gerais O DIREITO DE CIRCULAÇÃO E DE POSSE DE COPIAS PARA FINS NÃO COMERCIAIS DO TRABALHO SUPRA CITADO.

O AUTOR RESERVA-SE, AINDA, OUTROS DIREITOS DE PUBLICAÇÃO E PROPRIEDADE, E NEM A DISSERTAÇÃO NEM PARTES DELA PODEM SER REPRODUZIDAS DE QUALQUER FORMA SEM A PERMISSÃO DO AUTOR.

---

Assinatura do Autor

*Assim como a lua e as estrelas do nosso sistema planetário resplandecem pela luz refletida do sol, assim também os grandes pensadores do mundo, tanto quanto são verdadeiros os seus ensinamentos, refletem os raios do Sol da Justiça. Cada raio de pensamento, cada lampejo do intelecto, procede da Luz do mundo.*

Ellen G. White

*À minha esposa e à nossa família.*

# Índice

<b>Índice</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Abreviaturas e Siglas</b>	<b>ix</b>
<b>Resumo</b>	<b>x</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>xii</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	4
1.1.1 Objetivos Gerais . . . . .	4
1.1.2 Objetivos Específicos . . . . .	5
1.2 Organização do Texto . . . . .	5
<b>2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA A FISSURAÇÃO DO CONCRETO</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução . . . . .	7
2.2 Caracterização do Comportamento do Concreto Fissurado . . . . .	11
2.3 Classificação dos Modelos Constitutivos usados para o Concreto . . . . .	20
2.4 Modelo de Fissura Fictícia ou Coesiva . . . . .	23
<b>3 MODELOS NUMÉRICOS PARA A FISSURAÇÃO DO CONCRETO</b>	<b>31</b>
3.1 Introdução . . . . .	31
3.2 Classificação dos Modelos Numéricos . . . . .	32
3.2.1 Métodos de Representação Geométrica . . . . .	34
3.2.2 Métodos de Representação Não Geométrica . . . . .	36
3.3 Evolução dos Modelos Numéricos . . . . .	45
<b>4 MODELO NUMÉRICO ADOTADO</b>	<b>49</b>
4.1 Introdução . . . . .	49
4.2 Cinemática do Salto de Deslocamentos . . . . .	51

4.3	Um Caso Particular das Funções de Partição da Unidade . . . . .	52
4.4	Formulação Variacional . . . . .	56
4.5	Modelo Constitutivo Discretizado . . . . .	59
4.6	Implementação Computacional . . . . .	64
<b>5</b>	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS</b>	<b>70</b>
5.1	Introdução . . . . .	70
5.2	Tração - Modo I . . . . .	72
5.3	Compressão Diametral . . . . .	78
5.4	Flexão em 3 Pontos . . . . .	84
5.4.1	Introdução . . . . .	84
5.4.2	Fissura de Trajetória Linear . . . . .	88
5.4.3	Fissura de Trajetória Curva . . . . .	99
5.5	Cisalhamento em 4 Pontos . . . . .	104
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>111</b>
6.1	Contribuições deste Trabalho . . . . .	111
6.2	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	112
<b>A</b>	<b>O Modelo de Fissuras Coesivas, o XFEM e o Núcleo Numérico do INSANE</b>	<b>115</b>
A.1	Introdução . . . . .	115
A.2	Núcleo Numérico . . . . .	117
A.3	Assembler . . . . .	118
A.4	Model . . . . .	118
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>131</b>

# Lista de Figuras

2.1	Diferentes tipos de respostas da tensão uniaxial $\times$ deformação dos materiais . . . . .	8
2.2	Rupturas estruturais em diferentes materiais . . . . .	9
2.3	Alguns mecanismos de tenacidade na zona de processo de fratura . . . . .	12
2.4	Propagação da fissura no modo I para o concreto e as rochas . . . . .	14
2.5	Estágios de propagação da fissura no modo I . . . . .	15
2.6	Chapa de concreto sujeita à tração . . . . .	17
2.7	Relações tensão $\times$ deslocamento e estágios diferentes da fissuração . . . . .	17
2.8	Localizações das fissuras internas para diferentes estágios de carga . . . . .	19
2.9	Modos de ruptura . . . . .	21
2.10	Modos da localização de deformações . . . . .	22
2.11	Curva de $\sigma(w)$ . . . . .	25
2.12	Modelo de fissura parcialmente frágil . . . . .	26
2.13	Propagação da fissura no modo I . . . . .	27
2.14	Ilustração do uso do modelo de fissura fictícia na análise de elementos finitos . . . . .	29
2.15	Comparação entre as curvas carga-deslocamento: curva prevista e curva medida, para viga fletida por 3 pontos . . . . .	30
3.1	Classificação dos métodos numéricos baseados no MEF segundo a representação da propagação da fissuração . . . . .	33
3.2	Modelo de fissuras em banda para a fissuração do concreto e rocha . . . . .	38
3.3	Descrição cinemática da zona de fissuração . . . . .	40
3.4	Evolução dos principais modelos numéricos de elementos finitos . . . . .	45
3.5	Principais diferenças entre a formulação dos elementos finitos estendidos e a formulação dos elementos com descontinuidade forte embutida . . . . .	48

4.1	Corpo $\Omega$ cortado por uma descontinuidade $\Gamma_d$ . . . . .	51
4.2	Forças relativas às tensões coesivas agindo na descontinuidade $\Gamma_d$ . .	57
4.3	Sistema de coordenadas locais da descontinuidade . . . . .	60
4.4	Resposta de uma chapa à condição de carregamento e descarrega- mento em tração, seguido de carregamento em compressão . . . . .	64
4.5	Função de peso gaussiana . . . . .	66
4.6	Processo de enriquecimento de nós . . . . .	67
4.7	Esquema de integração para o elemento triangular de 6 nós cortado por uma descontinuidade . . . . .	68
5.1	Geometria e condições de contorno da chapa quadrada . . . . .	72
5.2	Discretização da chapa em malha de 32 elementos . . . . .	73
5.3	Discretização da chapa em malha de 128 elementos . . . . .	73
5.4	Propagação da fissura com malha de 32 elementos . . . . .	74
5.5	Propagação da fissura com malha de 128 elementos . . . . .	74
5.6	Deformada da malha de 32 elementos . . . . .	75
5.7	Deformada da malha de 128 elementos . . . . .	75
5.8	Chapa Quadrada - Relação Fator de Carga $\times$ Deslocamento . . . . .	76
5.9	Chapa Quadrada - Área equivalente a $G_f$ . . . . .	77
5.10	Ensaio de compressão diametral proposto por Carneiro e Barcellos (1949) . . . . .	78
5.11	Geometria e condições de contorno - compressão diametral . . . . .	79
5.12	Discretização da seção do cilindro em malha de 358 elementos . . . . .	80
5.13	Compressão Diametral - Relação Fator de Carga $\times$ Deslocamento - Nó 112 . . . . .	81
5.14	Compressão Diametral - Relação Fator de Carga $\times$ Deslocamento - Nó 122 . . . . .	81
5.15	Compressão Diametral - propagação da fissura . . . . .	82
5.16	Compressão Diametral - deformada da malha . . . . .	82
5.17	Compressão Diametral - deslocamentos na direção $x$ . . . . .	83
5.18	Geometria e condições de contorno - flexão em 3 pontos . . . . .	86
5.19	Flexão em 3 pontos - Malha I - 150 elementos . . . . .	87
5.20	Flexão em 3 pontos - Malha II - 150 elementos . . . . .	87
5.21	Flexão em 3 pontos - Malha III - 184 elementos . . . . .	87



5.22	Flexão em 3 pontos - Malha IV - 622 elementos . . . . .	87
5.23	Flexão em 3 pontos - Malha I - propagação linear da fissura . . . . .	89
5.24	Flexão em 3 pontos - Malha II - propagação linear da fissura . . . . .	89
5.25	Flexão em 3 pontos - Malha III - propagação linear da fissura . . . . .	89
5.26	Flexão em 3 pontos - Malha I - nós enriquecidos - estágio 1 . . . . .	92
5.27	Flexão em 3 pontos - Malha I - nós enriquecidos - estágio 2 . . . . .	92
5.28	Flexão em 3 pontos - Malha I - nós enriquecidos - estágio 3 . . . . .	92
5.29	Flexão em 3 pontos - Malha II - nós enriquecidos - estágio 1 . . . . .	94
5.30	Flexão em 3 pontos - Malha II - nós enriquecidos - estágio 2 . . . . .	94
5.31	Flexão em 3 pontos - Malha II - nós enriquecidos - estágio 3 . . . . .	94
5.32	Flexão em 3 pontos - Malha III - nós enriquecidos - estágio 1 . . . . .	95
5.33	Flexão em 3 pontos - Malha III - nós enriquecidos - estágio 2 . . . . .	95
5.34	Flexão em 3 pontos - Malha III - Relação Fator de Carga $\times$ Desloca- mento . . . . .	98
5.35	Flexão em 3 pontos - Malha III - deformada da malha . . . . .	98
5.36	Flexão em 3 pontos - Malha III - deslocamentos na direção $x$ . . . . .	99
5.37	Flexão em 3 pontos - Malha I - propagação da fissura curva . . . . .	100
5.38	Flexão em 3 pontos - Malha II - propagação da fissura curva . . . . .	100
5.39	Flexão em 3 pontos - Malha III - propagação da fissura curva . . . . .	100
5.40	Flexão em 3 pontos - Malha IV - propagação da fissura curva . . . . .	101
5.41	Flexão em 3 pontos - Malha IV - Relação Fator de Carga $\times$ Desloca- mento $Dy$ . . . . .	102
5.42	Flexão em 3 pontos - Malha IV - Relação Fator de Carga $\times$ Desloca- mento $Dx$ . . . . .	102
5.43	Flexão em 3 pontos - Malha IV - deformada da malha . . . . .	103
5.44	Flexão em 3 pontos - Malha IV - deslocamentos na direção $x$ . . . . .	103
5.45	Geometria e condições de contorno - cisalhamento em 4 pontos . . . . .	104
5.46	Discretização da viga em malha de 1206 elementos . . . . .	106
5.47	Cisalhamento em 4 pontos - propagação da fissura . . . . .	107
5.48	Cisalhamento em 4 pontos - deformada da malha . . . . .	108
5.49	Cisalhamento em 4 pontos - Relação Fator de Carga $\times$ Deslocamento $Dy$ . . . . .	109
5.50	Cisalhamento em 4 pontos - deslocamentos na direção $x$ . . . . .	110
5.51	Cisalhamento em 4 pontos - deslocamentos na direção $y$ . . . . .	110

A.1	Organização do núcleo numérico do <b>INSANE</b> . . . . .	117
A.2	Diagrama de classe para <b>XFemAssembler</b> . . . . .	118
A.3	Diagrama de classe para <b>XFemModel</b> . . . . .	119
A.4	Diagrama de classe para <b>CohesiveCrackConstModel</b> . . . . .	120
A.5	Diagrama de classe para <b>XFEMPrescribedDegeneration</b> . . . . .	121
A.6	Diagrama de classe para <b>ConcreteCohesiveCrack</b> . . . . .	122
A.7	Diagrama de classe para <b>CohesiveCrackProblemDriver</b> . . . . .	122
A.8	Diagrama de classe para <b>XFEMElement</b> . . . . .	123
A.9	Diagrama de classe para <b>XFEMElementNode</b> . . . . .	124
A.10	Diagrama de classe para <b>PhenomenaDetector</b> . . . . .	126
A.11	Diagrama de classe para <b>CrackGrowthDirectionLaw</b> . . . . .	126
A.12	Diagrama de classe para <b>CrackGrowthIncrementLaw</b> . . . . .	127
A.13	Diagrama de classe para <b>EnrichmentItem</b> . . . . .	127
A.14	Diagrama de classe para <b>EnrichmentDetector</b> . . . . .	128
A.15	Diagrama de classe para <b>EnrichmentFunction</b> . . . . .	128
A.16	Diagrama de classe para <b>GeometryDescription</b> . . . . .	129
A.17	Diagrama de classe para <b>GeometryEntity</b> . . . . .	129
A.18	Diagrama de classe para <b>IntegrationRule</b> . . . . .	130

# Lista de Abreviaturas e Siglas

UFMG Universidade Federal de Minas Gerais

MEF Método dos Elementos Finitos

MEC Método dos Elementos de Contorno

XFEM Método dos Elementos Finitos Estendido (eXtended Finite Element Method)

GFEM Método dos Elementos Finitos Generalizado (Generalized Finite Element Method)

LEFM Mecânica da Fratura Elástica-Linear (Linear Elastic Fracture Mechanics)

# Resumo

O objetivo desta dissertação de mestrado é a implementação computacional de um modelo capaz de descrever o comportamento do concreto sujeito à fissuração. A região fissurada do concreto é representada por uma relação constitutiva baseada no Modelo de Fissura Coesiva, enquanto o restante do volume não fissurado é representado como linearmente elástico. Tais relações constitutivas são, então, combinadas com as hipóteses do Método dos Elementos Finitos Estendido, formando um modelo que introduz um salto no campo de deslocamentos de um elemento finito padrão. Assim, a propagação de uma fissura discreta é simulada devido à descontinuidade que é induzida nos campos de aproximação de um elemento-padrão. O critério de propagação é baseado no limite de resistência à tração do material e a geometria da fissura é definida por um conjunto de segmentos lineares. O modelo assim concebido permite que a fissura se propague livremente pela malha convencional, atravessando o domínio e a interface dos elementos finitos. O modelo foi implementado no núcleo numérico do sistema computacional **INSANE** (INteractive Structural ANalysis Environment), permitindo simular problemas de propagação de fissuras em peças de concreto submetidas a carregamentos nos modos I, II e modo misto. Os resultados obtidos encontram-se dentro da faixa de resposta esperada. A principal dificuldade encontrada relaciona-se com o critério de propagação escolhido, que não se mostra adequado para a predição da direção correta de propagação da fissura quando a análise alcança níveis elevados de tensão.

Palavras-Chave: Fissuras Coesivas, Concreto, XFEM, INSANE

# Abstract

This master's thesis is concerned about computational implementation of a model able to describe concrete behavior under cracking. The concrete cracked region is represented by a constitutive relation based on Cohesive Crack Model, while the undamaged bulk keeps a linear elastic response. These constitutive relations are integrated with eXtended Finite Element Method assumptions to form a model that introduces a jump in displacements field of a standard finite element. Thus, a discrete crack propagation is simulated due a discontinuity that is induced in standard finite element approximation fields. The propagation criterium is based on tensile strength material parameter and the crack geometry is defined by a set of linear segments. In this way, the conceived model allows freely crack propagation over the standard mesh, even at the element's interface. The model was implemented in numerical nucleus of computational system **INSANE** (*INteractive Structural ANalysis Environment*), enabling the simulation of crack propagation problems involving concrete specimens under modes I, II and mixed mode loadings. The results are found within expected response range. The main drawback found is related to the chosen propagation criterium that is not reliable in predicting the correct direction of crack when the analysis reaches high stresses levels.

Keywords: Cohesive Crack, Concrete, XFEM, INSANE

# Agradecimentos

A meus pais, pelo amor, incentivo e pelo exemplo, ensinando-me desde pequeno “no caminho em que devia andar”.

À minha esposa, pela compreensão, pelo apoio e companheirismo. Por continuar ao meu lado na saúde, na doença e nas muitas horas em que não pude lhe dar atenção, durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Roque, pela orientação neste trabalho, pela amizade, pela confiança depositada em mim e principalmente por seu comprometimento conosco, seus alunos.

Aos meus demais professores, por ampliarem meus horizontes de conhecimento.

À UFMG, pela sólida formação que me proporcionou na graduação.

À Escola de Engenharia, por me preparar para uma profissão.

Aos organizadores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, pelas condições proporcionadas para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Aos meus colegas “insanos”, pela ajuda em cada uma das “milhares” de dúvidas que apareceram em meio às classes, aos objetos e aos métodos.

Ao Samuel, pelo serviço desprendido de consultoria 24 horas, em qualquer dúvida, sobre qualquer assunto.

À Associação Mineira Central da IASD, à Serra Azul Engenharia, à Poente Engenharia, à Leme Engenharia, por me incentivarem a continuar os estudos e pela experiência que me deram no mercado de trabalho.

A Deus, por me conceder tudo que foi citado acima, por me emprestar capacidade intelectual, física, e por me dar a sabedoria necessária para entender que, sem Ele, “o muito estudar é enfado da carne”, mas, com Ele sendo o Guia no caminho do conhecimento, “a vereda dos justos é como a luz da aurora, que vai brilhando mais e mais até ser dia perfeito”.

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

A Mecânica dos Sólidos e a Elasticidade são teorias amplamente usadas em análise estrutural, uma vez que permitem uma descrição matemática consistente do comportamento mecânico das estruturas. Para isso, elas baseiam-se em algumas hipóteses simplificadoras, como as hipóteses do meio contínuo, material homogêneo e comportamento elástico-linear isotrópico no domínio estudado.

Tal abordagem, baseada nas hipóteses simplificadoras, é plenamente usada e aceita pelos analistas de estruturas, uma vez que os resultados teóricos e os ensaios práticos convergem dentro de uma margem de aproximação aceitável.

Os procedimentos de análise consideram que as cargas aplicadas à estrutura provocam um campo de deslocamentos, o qual está associado de maneira intrínseca a um campo de deformações, graças à capacidade da estrutura de “mudar de forma” sob a ação de forças. Como consequência do campo de deformações, é gerado um campo de tensões, devido às condições de contorno ou “vínculos externos” da estrutura. As tensões, por sua vez, estão diretamente relacionadas às deformações através das propriedades constitutivas do material, que, quando combinadas, estabelecem sua lei constitutiva.

Um corpo de material elástico é definido como sendo aquele no qual as tensões em um ponto do corpo em um instante de tempo são completamente determinadas pelo valor instantâneo das deformações e não são afetadas pelos valores anteriores das deformações nesse ponto (Mal e Singh, 1991).

Um material isotrópico, por definição, é aquele para o qual a resposta experimental das relações entre tensões e deformações, para um ponto no domínio, é sempre a mesma em qualquer direção (Mal e Singh, 1991).

Finalmente, um corpo constituído de material homogêneo é aquele no qual a lei constitutiva não varia de um ponto para outro no corpo.

As estruturas de concreto são dimensionadas para trabalhar, de um modo geral, dentro de um regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos. Assim, espera-se que tais estruturas apresentem comportamento elástico-linear, ou seja, a estrutura deve trabalhar em um regime de solicitações tal que retorne à sua configuração original, quando houver descarregamento (de modo que não haja deformações residuais), e que a relação entre tensões e deformações seja proporcional, ou linear.

Por outro lado, a hipótese de que o concreto é homogêneo leva à expectativa de que cada ponto de uma estrutura de concreto possua a mesma lei constitutiva, ou seja, que pontos diferentes da estrutura apresentem as mesmas relações entre tensões e deformações.

Porém, no caso do concreto, as hipóteses acima são válidas somente até que ocorram fissuras, causadas por deformações de tração nas regiões mais solicitadas da estrutura.

Assim, as regiões danificadas da estrutura deixam de ser elásticas, uma vez que, nessas regiões, as deformações subseqüentes se tornam dependentes das deformações anteriores. O material também deixa de ser isotrópico, pois, uma vez que a região da estrutura é danificada, a relação entre tensões e deformações, ou sua lei constitutiva, será uma na direção da fissura e outra completamente diferente na direção perpendicular à fissura. Adicionalmente, a estrutura passa a ser composta por regiões com leis constitutivas distintas, pois algumas regiões estarão danificadas e outras, não. Logo, o material deixa de ser homogêneo. Configura-se então, devido à fissuração em algumas regiões, uma estrutura formada por regiões de características diferentes entre si. Automaticamente, a adoção de um modelo constitutivo isotrópico que



represente toda a estrutura já não faz mais sentido.

Logo, conclui-se que as teorias da Elasticidade e da Mecânica dos Sólidos tornam-se insuficientes para a descrição completa do comportamento do concreto, uma vez que este, por natureza, é fisicamente não linear, apresentando não homogeneidades, falhas iniciais e fissuras.

Sob um enfoque macroscópico, o concreto pode ser redefinido como um material que apresenta regiões de comportamentos distintos: regiões não fissuradas e regiões com dano, ou fissuras. Assim, uma abordagem possível para a descrição do comportamento físico não linear do concreto é a de adoção de modelos constitutivos distintos: um para a região fissurada e outro para o restante do domínio não fissurado do material.

Nesse contexto, a Mecânica da Fratura Não Linear torna-se a teoria que melhor pode descrever o comportamento mecânico do concreto, pois apresenta o desenvolvimento de modelos físicos que levam em conta a presença de fissuras no material, principal responsável por sua não linearidade física.

A solução dos modelos físicos não lineares através de métodos analíticos é muito difícil, e, muitas vezes, impossível. Então, uma maneira eficiente de modelagem e solução dos problemas fisicamente não-lineares é dada pelo uso dos métodos numéricos e computacionais.

Entre os recursos numéricos e computacionais existentes, o Método dos Elementos Finitos (MEF) têm permitido a formulação de modelos fisicamente não lineares apropriados para o estudo do comportamento do concreto. Esses modelos combinam as relações constitutivas adequadas para o concreto fissurado e as hipóteses e técnicas numéricas características do MEF.

Neste trabalho, relações constitutivas baseadas na Mecânica da Fratura Não Linear, especificamente no Modelo de Fissura Coesiva, são adotadas para a descrição física do concreto sujeito à fissuração. Essas relações são combinadas com as hipóteses do Método dos Elementos Finitos Estendido (eXtended Finite Element Method

- XFEM), e formam um modelo que é capaz de descrever a propagação da fissura, através da introdução de um salto no campo de deslocamentos de um elemento finito padrão.

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivos Gerais

As possibilidades oferecidas pelos recursos tecnológicos para desenvolvimento de software constituem amplo campo de pesquisa na área de métodos numéricos e computacionais aplicados à engenharia.

O domínio desses recursos e a aplicação dos mesmos no aprimoramento progressivo dos modelos requerem um ambiente computacional segmentado, amigável a mudanças e escalável em complexidade, como proposto pelo programa **INSANE** (*INteractive Structural ANalysis Environment*), desenvolvido pelo Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais e disponível em <http://www.dees.ufmg.br/insane>.

O ambiente computacional do **INSANE** é constituído por três grandes aplicações: pré-processador, processador e pós-processador, todas implementadas em linguagem Java. O pré- e o pós-processador são aplicações gráficas interativas que disponibilizam, respectivamente, ferramentas de pré- e pós-processamento de diferentes modelos discretos. O processador é a aplicação que representa o núcleo numérico do sistema e é o responsável pela obtenção dos resultados de diferentes modelos discretos de análise estrutural.

Este trabalho, que está inserido no projeto de expansão do programa **INSANE**, objetiva a ampliação do núcleo numérico, aperfeiçoando o sistema sem recomeçar o processo de implementação.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

O objetivo específico dessa dissertação é a implementação computacional, no núcleo numérico do programa **INSANE**, de um modelo fisicamente não linear para fissuração do concreto. Para descrever a fissuração, adotam-se relações constitutivas de fissuras coesivas (*cohesive cracks*), usadas para materiais heterogêneos e parcialmente frágeis como o concreto, em um modelo baseado no Método dos Elementos Finitos Estendido.

Assim, implementa-se um modelo que introduz um salto no campo de deslocamentos do elemento finito triangular de 6 nós, já existente no **INSANE**, permitindo a simulação do processo de propagação de fissuras. Através do Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM), o salto no campo de deslocamentos é representado por graus de liberdade adicionais nos nós do elemento finito. A fissura, assim simulada, pode caminhar através da malha de elementos finitos de forma completamente independente da mesma.

## 1.2 Organização do Texto

No presente trabalho, adotam-se relações constitutivas, baseadas no Modelo de Fissura Coesiva ou Fictícia, para a descrição do concreto. Tais relações são provenientes da Mecânica da Fratura Não Linear e são descritas no capítulo 2.

No capítulo 3 são abordados os modelos numéricos baseados no Método dos Elementos Finitos mais usados para o concreto e sua classificação de acordo com a maneira com que cada um descreve a região de fissuração.

No capítulo 4 é descrito o modelo numérico adotado, o qual baseia-se na introdução de um salto no campo de deslocamentos de um elemento finito padrão. Esse salto de deslocamentos é conseguido através da adição de termos polinomiais adequados no campo de deslocamentos do elemento finito, tal como sugerido pelo método da partição da unidade (Melenk e Babuška, 1996). Basicamente, acrescentam-se graus

de liberdade aos nós pertencentes ao elemento finito padrão, quando o caminho da fissura passa por esse elemento. Esse modelo numérico é baseado no Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM) conforme proposto por Wells e Sluys em seu artigo “A new method for modelling cohesive cracks using finite elements” (Wells e Sluys, 2001).

No capítulo 5 são apresentadas as simulações numéricas escolhidas para avaliar o desempenho do modelo numérico implementado. Assim, os resultados dos ensaios de tração unidimensional, compressão diametral, flexão em 3 pontos e cisalhamento em 4 pontos são apresentados e discutidos nesse capítulo.

Finalmente, as conclusões sobre o modelo implementado e suas aplicações são expostas, e algumas propostas para trabalhos futuros são sugeridas nas considerações finais.

## Capítulo 2

# RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA A FISSURAÇÃO DO CONCRETO

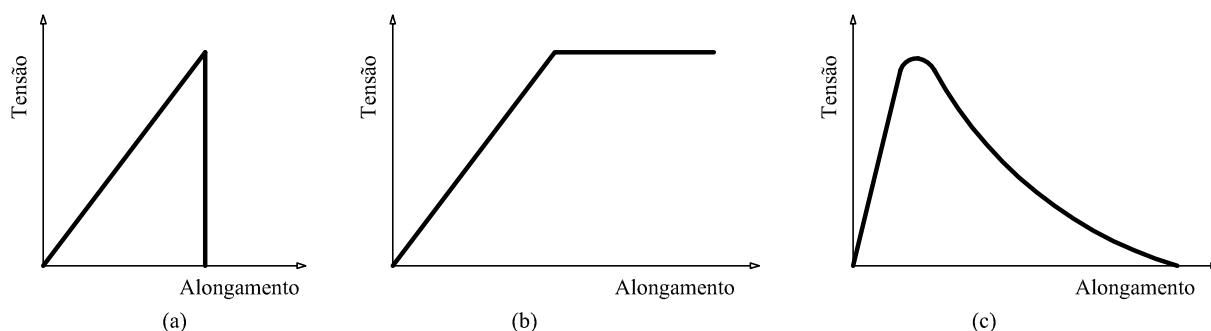
### 2.1 Introdução

A Mecânica da Fratura estuda o comportamento das estruturas levando em consideração a presença de falhas ou fissuras. Esse campo de estudos aplica-se ao equacionamento e à análise dos fenômenos físicos que envolvem o processo de fissuração, desde a sua formação até a sua propagação completa.

Simplificadamente, o objetivo da Mecânica da Fratura é a descrição qualitativa da relação entre três fatores fundamentais envolvidos no processo mecânico da fissuração: tensão, tenacidade do material à fratura e tamanho da fissura.

Antes da abordagem de cada um desses fatores, torna-se necessária a caracterização dos materiais usados na engenharia quanto ao seu comportamento mecânico. A resposta de cada estrutura está diretamente relacionada ao material que a compõem, assim, baseando-se no comportamento constitutivo dos materiais quando submetidos à esforços de tração, eles podem ser classificados como *frágeis*, *dúcteis* ou *parcialmente-frágeis*, como mostrado na Figura 2.1. Nesta figura, percebe-se a diferença na relação tensão-alongamento para cada tipo de material. Na Figura 2.1a, a tensão cai repentinamente para zero quando o material *frágil* chega à ruptura. Já

na Figura 2.1b, pode-se perceber que o material *dúctil* apresenta um patamar de escoamento na ruptura, onde a tensão permanece constante durante o incremento do alongamento. Finalmente, o material *parcialmente frágil* caracteriza-se pelo decréscimo gradual das tensões quando atinge a ruptura, apresentando um comportamento intermediário entre o dútil e o frágil, como indicado na Figura 2.1c.



**Figura 2.1:** Diferentes tipos de respostas da tensão uniaxial  $\times$  deformação dos materiais: (a) material elástico-frágil, (b) material elasto-plástico e (c) material elástico-parcialmente-frágil (Shah et al., 1995).

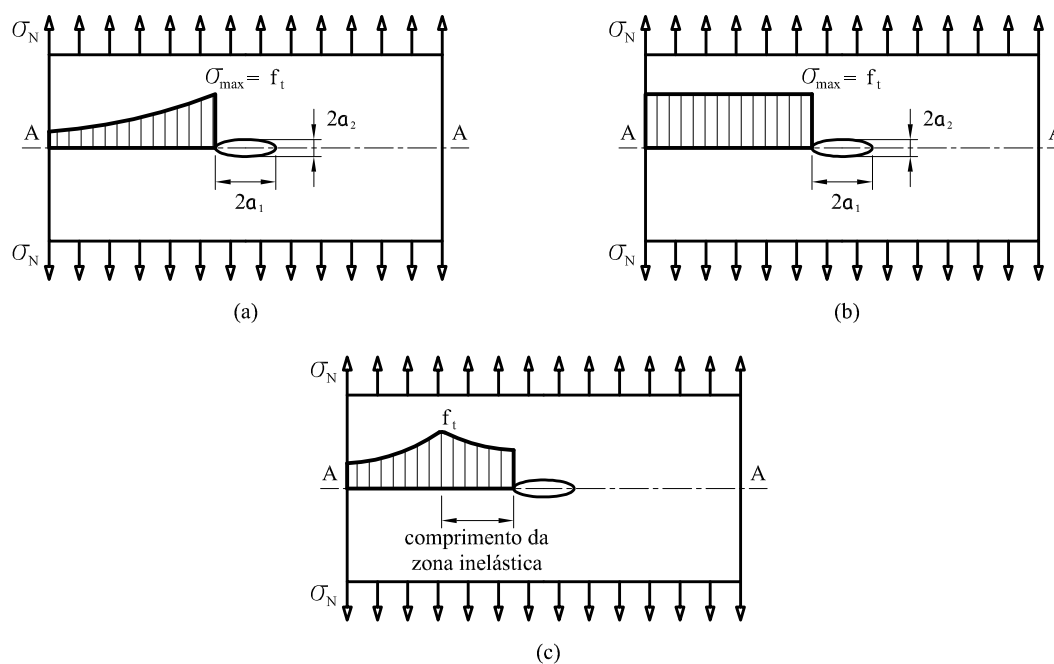
Uma forma mais detalhada para que se percebam as diferenças na resposta de cada material pode ser vista na Figura 2.2. Lá estão representadas três chapas de largura infinita com um furo elíptico no centro. A geometria do furo é um dos fatores que caracteriza a fissura e influencia na distribuição das tensões em sua proximidade. Além disso, quando submetem-se a tensões de tração as três chapas feitas de materiais diferentes, mas com furos de mesmo tamanho e geometria, percebe-se claramente que a distribuição de tensões apresenta diferenças junto às extremidades do furo elíptico.

Por um lado, a influência da geometria do furo pode ser percebida pelo valor da tensão  $\sigma_{max}$  que existirá na proximidade das bordas. Tal tensão atinge valor maior que o valor da tensão nominal aplicada  $\sigma_N$ . A relação entre  $\sigma_{max}$  e  $\sigma_N$  pode ser descrita como:

$$\sigma_{max} = \left(1 + \frac{2a_1}{a_2}\right) \sigma_N = K_t \sigma_N \quad , \quad (2.1)$$

em que  $a_1$  e  $a_2$  são o maior raio e o menor raio da elipse, respectivamente, e  $K_t$  é o *fator de concentração de tensões* (Shah et al., 1995).

Assim, quanto maior o valor de  $a_1$  e menor o valor de  $a_2$ , maiores são as tensões nas extremidades do furo. No limite, ao considerar-se uma elipse muito “fechada”, onde  $a_2$  tende a zero, matematicamente existirão tensões infinitas atuando nas extremidades.



**Figura 2.2:** Rupturas estruturais em diferentes materiais: (a) ruptura frágil, (b) ruptura plástica e (c) ruptura parcialmente frágil (Shah et al., 1995).

Contudo, além da influência da geometria do furo nos valores das tensões, o material também determina respostas distintas na distribuição dessas tensões na seção da chapa. Assim, se o material é frágil (Figura 2.2a), a chapa irá romper-se de forma catastrófica sempre que a tensão  $\sigma_{max}$  alcançar o valor da resistência à tração do material  $f_t$ . Já se a chapa for feita de um material dúctil (Figura 2.2b),

as tensões aplicadas pelo carregamento poderão aumentar até ultrapassar o valor de  $\sigma_{max} = f_t$ , pois as tensões nas extremidades serão redistribuídas ao longo da seção. Nesse caso, só ocorrerá a ruptura quando toda a seção A-A atingir valores de tensão iguais ao valor de resistência à tração do material  $f_t$ . Finalmente, se o material da chapa for parcialmente frágil, as tensões serão distribuídas conforme indicado na Figura 2.2c. Nota-se, nesse caso, o desenvolvimento de uma região inelástica nas proximidades do furo. Nessa região, as tensões atingem o valor máximo de  $f_t$  e diminuem gradualmente em direção à extremidade do furo. Essa região inelástica é chamada de *zona de processo de fratura* e é a responsável pelo declínio gradual das tensões na resposta tensão-deformação dos materiais parcialmente frágeis. Tal comportamento é conhecido como *amolecimento* e é chamado em inglês de *softening*.

Do exemplo das chapas de largura infinita, pode-se concluir que a caracterização da ruptura de uma estrutura está relacionada à geometria da peça estudada e ao material do qual ela é formada. No caso da chapa feita de um material frágil, a ruptura catastrófica ocorre sempre que o valor da tensão máxima atinge o limite de resistência à tração do material. Para que esse valor seja atingido, as tensões vão depender da geometria da peça e também da geometria da fissura. Assim, a ruptura dos materiais frágeis poderia ser caracterizada por meio de um critério de energia elástica dissipada no processo de formação da fissura, até que um ponto da seção atinja o valor da resistência à tração do material. Quando se trata da chapa feita de material dúctil, a ruptura completa ocorre quando toda a seção atinge o valor da resistência ao escoamento do material. Então, baseando-se nesse ensaio da chapa de largura infinita, a ruptura dos materiais dúcteis poderia ser caracterizada simplesmente pelo uso de um critério de resistência. Mas, no caso da chapa feita de material parcialmente frágil, a caracterização completa da ruptura depende da zona de processo de fratura, além de um critério de energia elástica. Assim, além desse critério de energia elástica dissipada na formação da fissura, deverá existir outro critério de energia dissipada durante a propagação da fissura na região inelástica.



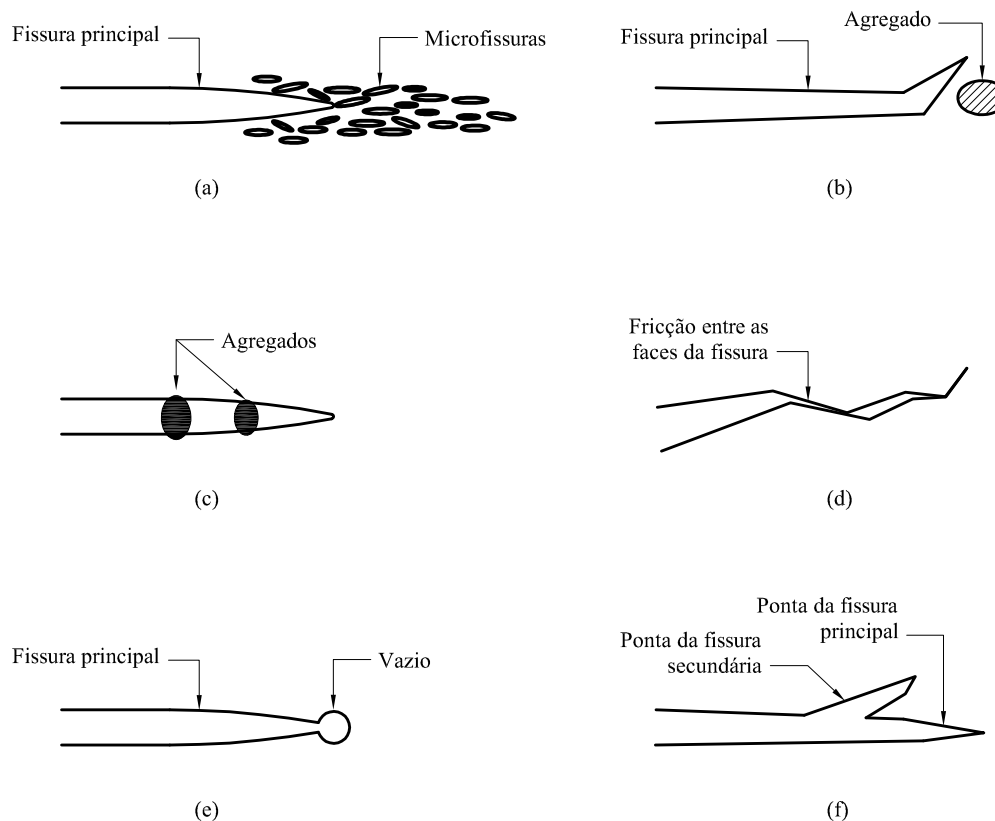
Sendo o concreto classificado como um material parcialmente frágil, torna-se necessário estabelecer os critérios de energia que caracterizam a sua ruptura. Esses critérios são estabelecidos usando-se os princípios da Mecânica da Fratura Não Linear.

## 2.2 Caracterização do Comportamento do Concreto Fissurado

Como já comentado anteriormente, o concreto é considerado um material parcialmente frágil e apresenta um mecanismo de ruptura caracterizado pela presença de uma zona inelástica na ponta da fissura. Se do ponto de vista matemático as tensões da Equação 2.1 podem ser infinitas em uma fissura muito “fechada”, do ponto de vista físico nenhum material real pode suportar tensões infinitas. Assim, quando as tensões aumentam, desenvolve-se uma região de dano, ou fissuração. No caso do concreto, nessa região inelástica, a zona de processo de fratura, desenvolvem-se mecanismos complexos que são responsáveis pela resposta característica de amolecimento ou *softening*, conforme visto na Figura 2.1c.

Esses mecanismos estão representados simplificadamente na Figura 2.3 e serão brevemente descritos a seguir.

O primeiro mecanismo, indicado na Figura 2.3a, é o da microfissuração e ocorre durante a propagação da fissura, logo adiante da mesma. Essas microfissuras surgem devido ao estado de tensões muito altas na região imediatamente à frente da zona de processo de fratura e aparecem como resultado dos vazios deixados pela água, durante o processo de cura ou devido à formação de pequenas bolhas de ar que surgem no lançamento do concreto. Outro mecanismo que ocorre na zona de processo de fratura é o desvio da fissura (Figura 2.3b). Esse desvio ocorre quando a fissura encontra uma partícula mais resistente em seu caminho.



**Figura 2.3:** Alguns mecanismos de tenacidade na zona de processo de fratura: (a) microfissuras, (b) desvio da fissura, (c) costura da fissura pelos agregados, (d) fechamento da fissura induzido pela rugosidade da superfície fissurada, (e) ponta de fissura arredondada por vazios e (f) ramificação da fissura (Shah et al., 1995).

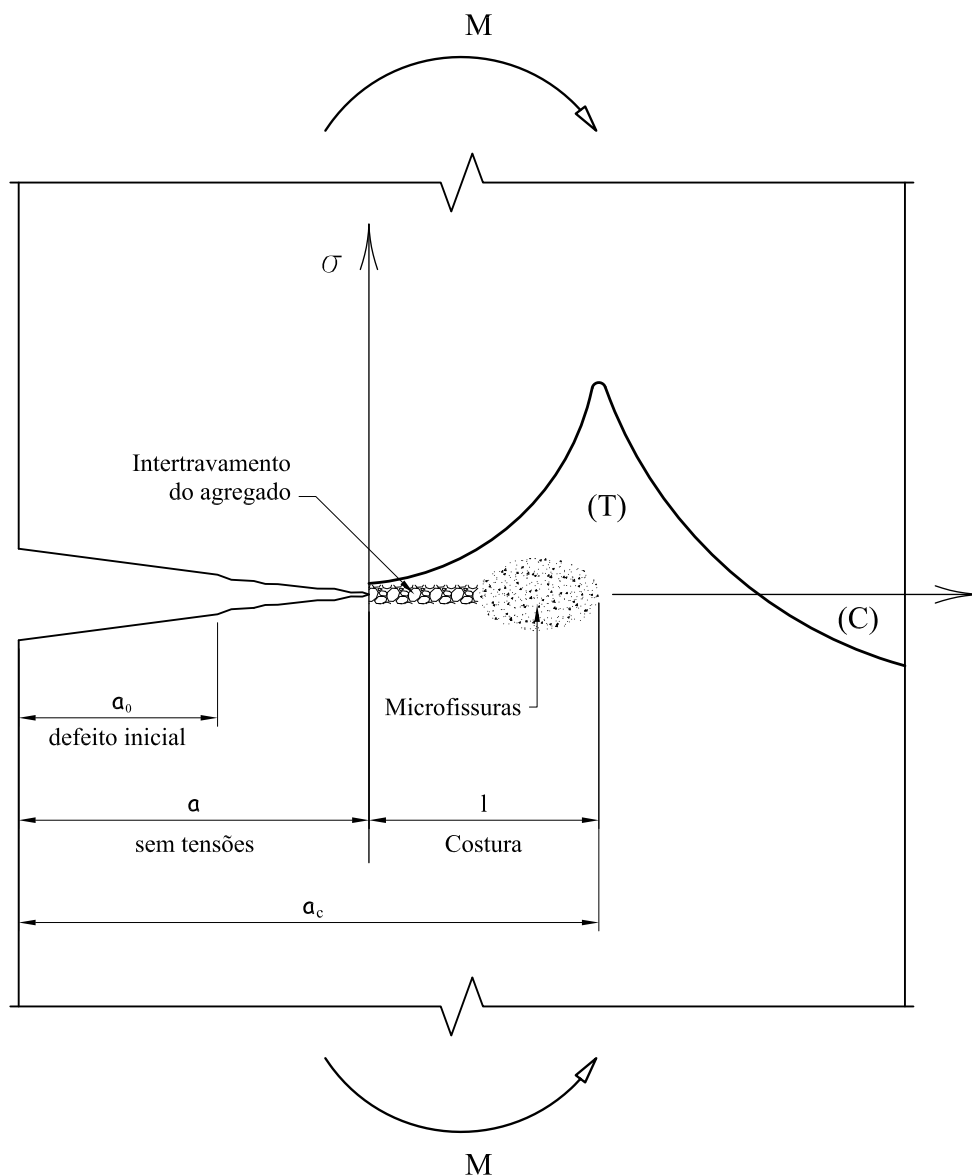
Na Figura 2.3c está indicado outro mecanismo importante: a costura dos agregados. Ocorre quando a fissura avança além de um agregado, mas ainda mantendo contato entre suas faces devido à coesão gerada pela “costura” do grão. Assim, as tensões continuam a ser transmitidas entre as faces da fissura até que o agregado se solte. Quando o agregado se solta, pode acontecer ainda outro mecanismo de dissipação de energia, devido, agora, à fricção que ocorre entre as faces da fissura e o agregado, por causa da rugosidade dessas interfaces (Figura 2.3d). Pode acontecer ainda de a fissura encontrar um vazio no seu caminho, conforme mostra a

Figura 2.3e. Finalmente, o mecanismo de ramificação da fissura (Figura 2.3f) completa o quadro dos processos que são responsáveis pela dissipação de energia na zona de processo de fratura. Todos esses mecanismos acabam dificultando a propagação da fissura nessa “zona de processos” e usam uma parcela da energia total gasta no processo de fissuração. Por isso, são chamados *mecanismos de tenacidade à fratura*.

Todos esses mecanismos ocorrem na zona de processo de fratura. Daí a importância de se entender como essa zona influencia a propagação da fissura e qual o seu tamanho.

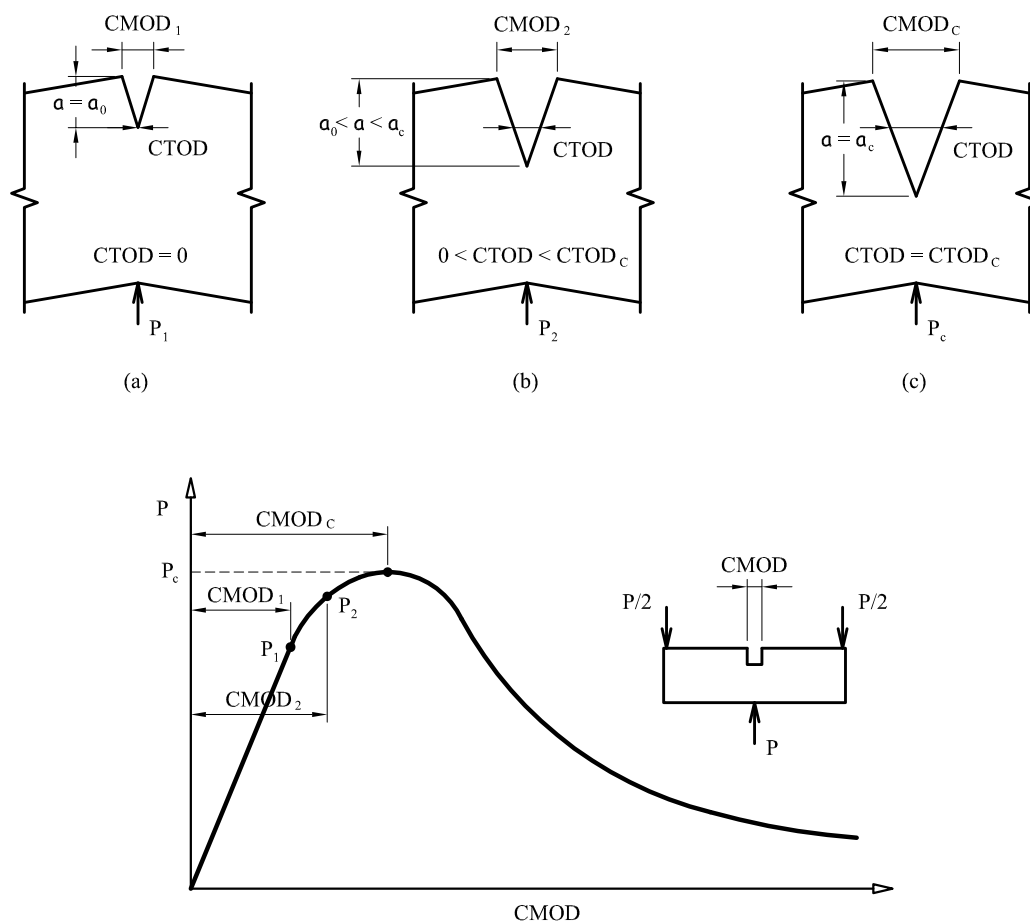
De fato, o tamanho da zona de processo de fratura do concreto e de outros materiais parcialmente frágeis não é pequeno e tem um papel determinante na resposta das estruturas de concreto de médio e pequeno porte. A exceção são as estruturas de concreto de grande porte, como as barragens, por exemplo, onde o tamanho da zona de processo de fratura em relação às dimensões das seções estudadas passa a ser desprezível e exerce pouca influência na resposta não linear da fratura. Isso significa que, para grandes estruturas de concreto, devem ser usados os conceitos da chamada Mecânica da Fratura Linear Elástica, a qual considera que a zona de processo de fratura tem pouca ou nenhuma influência. Porém, como a maioria das estruturas usuais de concreto são de médio e pequeno porte, torna-se necessário levar em consideração o tamanho e as características dessa zona.

Na Figura 2.4 pode ser observado um esquema ampliado da zona de processo de fratura de uma viga sujeita à flexão. Considerando-se que a fissura propaga-se a partir de um defeito inicial, pode-se observar que existe uma região sem tensões (trecho  $a$ ), uma região com tensões, onde encontra-se a zona de processo de fratura (trecho  $l$ ), e a região do material, onde ainda não atuam tensões de tração, ou atuam tensões de tração, mas os mecanismos de tenacidade à fratura ainda não se desenvolveram. Os mecanismos de tenacidade à fratura que regem o trecho  $l$  provocam o fenômeno conhecido como *localização de deformações*.



**Figura 2.4:** Propagação da fissura no modo I para o concreto e as rochas (Shah et al., 1995).

Em seguida, na Figura 2.5, é esboçada graficamente a relação entre a carga aplicada e a abertura da fissura. Essa abertura, chamada de CMOD (Crack Mouth Opening Displacement), é a distância relativa entre as faces da fissura, medida na direção normal a essas faces, a partir da abertura do defeito inicial. Outra abertura que pode também ser medida é a CTOD (Crack Tip Opening Displacement), que seria a distância entre as faces da fissura, medida a partir da ponta do defeito inicial.



**Figura 2.5:** Estágios de propagação da fissura no modo I: (a) início do crescimento estável da fissura, (b) zona de processo desenvolvida parcialmente e (c) começo da propagação instável da fissura no limite da carga (Shah et al., 1995).

No esquema da Figura 2.5, pode ser observado que, do trecho linear do gráfico, até a carga atingir o valor  $P_1$ ,  $CTOD$  é zero, e  $CMOD$  permanece inalterado. Em seguida, em um trecho intermediário entre  $P_1$  e  $P_2$ , os mecanismos de tenacidade à fratura começam a se desenvolver, e  $CTOD > 0$ . Nesse ponto, a resposta da relação entre a carga e a abertura da fissura já deixou de ser linear. A seguir, o limite da carga é atingido, e o valor de  $P$  começa a decrescer, enquanto  $CMOD$  continua a aumentar. A partir daí, a propagação da fissura torna-se instável, ou seja, a propagação continua de forma independente do valor da carga  $P$ . No caso de um ensaio experimental, a partir do ponto crítico de aplicação da carga, o valor

de  $P$  pode permanecer constante ou diminuir, mas a propagação vai continuar, a menos que seja controlada.

A resposta da viga de concreto sujeita a momento fletor, como mostrado nas Figuras 2.4 e 2.5, nos dá uma ideia do comportamento do concreto para essa condição específica de carregamento. Mas, e quando as condições de carregamento são diferentes daquela? O concreto é um material que resiste muito bem à esforços de compressão, mas sua resistência à tração é pequena, entre 8 e 15% da sua resistência à compressão. Quando uma estrutura de concreto é sujeita a esforços de tração, as fissuras se desenvolvem na direção perpendicular ao plano de atuação das tensões. No caso da aplicação de esforços de compressão, as fissuras tendem a se propagar na mesma direção das tensões de compressão.

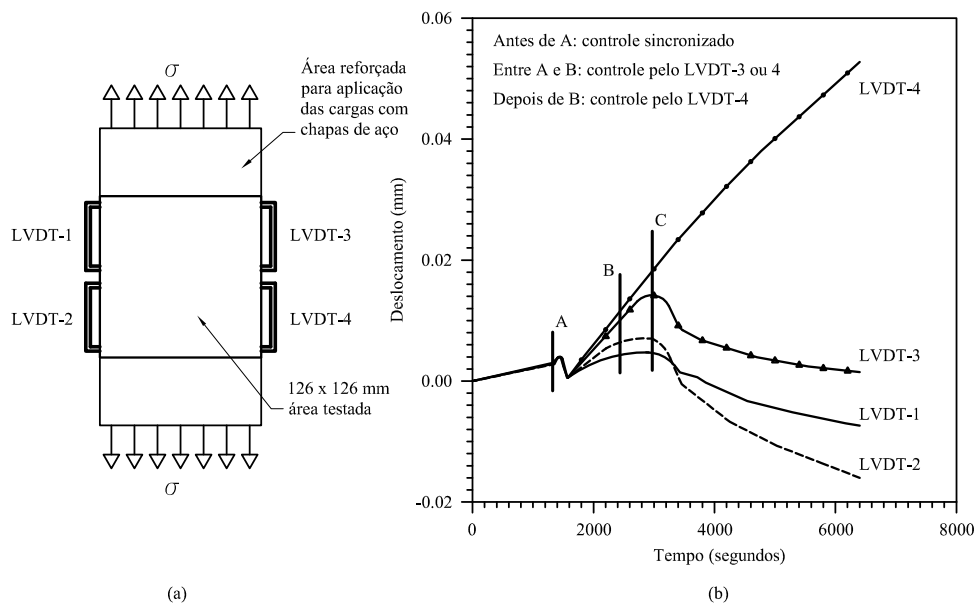
O ensaio que será mostrado a seguir foi extraído do livro *Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock, and other Quasi-Brittle Materials* (Shah et al., 1995), e vai completar as informações necessárias para a compreensão do processo de fissuração do concreto sujeito a diferentes condições de carregamento<sup>1</sup>.

Uma chapa de concreto com uma área de teste de 126×126 mm sujeita à tração uniaxial é mostrada na Figura 2.6a. Os deslocamentos da chapa sob tração foram medidos usando-se quatro LVDTs<sup>2</sup>. A chapa foi carregada em uma máquina de teste que permite a alternância do controle de sinais de resposta durante o teste. O início e a propagação das fissuras internas foram localizados usando um sistema de detecção de emissão acústica. Os deslocamentos medidos de diferentes LVDTs foram gravados em função do tempo decorrido de teste, como indicado na Figura 2.6b. As relações correspondentes de tensão-deslocamento medidas do LVDT-3 e LVDT-4 são mostradas na Figura 2.7. Microfissuras localizadas na área testada (ver Figura 2.6a) para diferentes estágios de carga detectadas pelo sistema de emissão acústica estão indicadas na Figura 2.8.

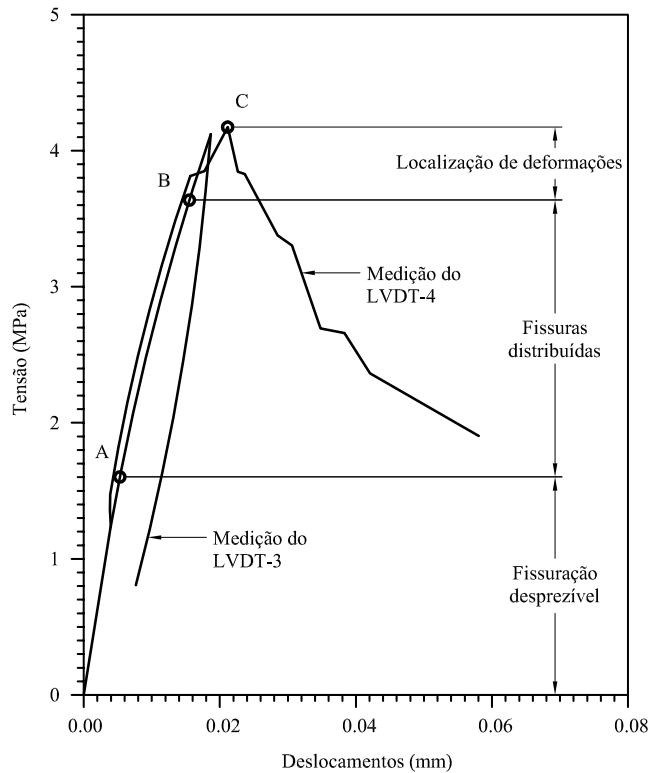
---

<sup>1</sup>Nota: o ensaio foi traduzido na íntegra, apenas adaptando-se a sequência de numeração das figuras.

<sup>2</sup>LVDT (*Linear Variable Differential Transformer*) é um sensor usado para medição de deslocamento linear.



**Figura 2.6:** Chapa de concreto sujeita à tração: (a) geometria da amostra e disposição dos LVDTs, (b) relações entre deslocamentos e tempo decorrido de teste (Shah et al., 1995).



**Figura 2.7:** Relações tensão × deslocamento e estágios diferentes da fissuração (Shah et al., 1995).

Pode ser visto que antes do ponto  $A$  a amostra comporta-se elasticamente e os deslocamentos medidos dos quatro LVDTs são basicamente os mesmos e aumentam linearmente com o carregamento (Figura 2.6b). A medição das emissões acústicas indica que a formação de fissuras internas antes do ponto  $A$  é desprezível. A formação de fissuras internas foi detectada no ponto  $A$ . Como um resultado da formação de fissuras internas, os deslocamentos dos diferentes LVDTs começam a exibir algumas diferenças, e as leituras do LVDT-3 e do LVDT-4 são maiores que aquelas do LVDT-1 e do LVDT-2, como indicado na Figura 2.6b.

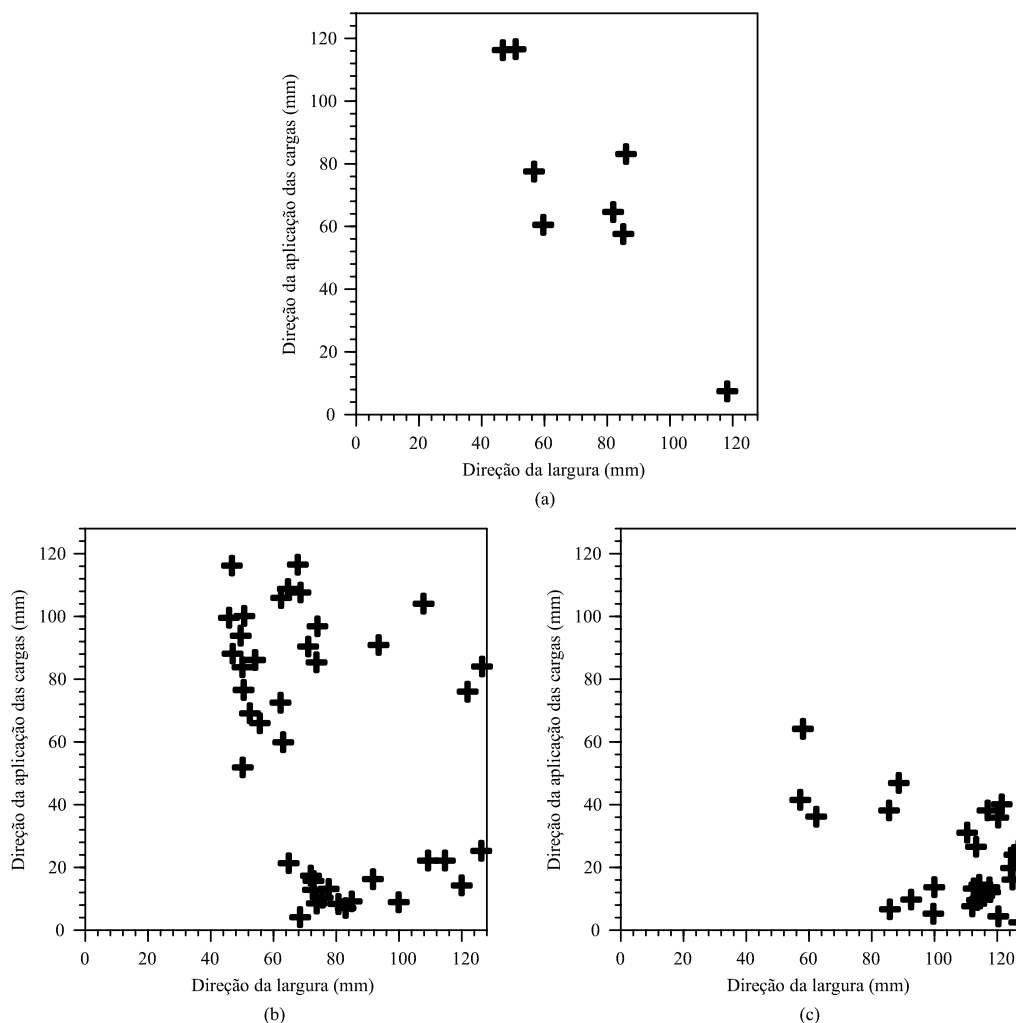
À medida que a carga aumenta, mais e mais fissuras internas são detectadas. Assim, as fissuras internas estão isoladas e mais ou menos uniformemente distribuídas até o ponto  $B$ , como mostrado na Figura 2.8a. Depois do ponto  $B$ , o deslocamento do LVDT-4 aumenta mais rapidamente que o deslocamento do LVDT-3 (Figura 2.6b). De forma correspondente, uma estreita banda de fissuras internas é detectada dentro da faixa de medida do LVDT-4 pelo sistema de emissão acústica (Figura 2.8b). O aparecimento dessa estreita banda de fissuras internas indica que o dano começa a se localizar, o qual equivale ao início da formação de uma fissura maior e contínua na região da banda de microfissuras.

O comprimento da banda de fissuras internas aumenta após o ponto  $B$ . Isso indica que uma fissura maior está se propagando. O limite do carregamento é atingido no ponto  $C$  (Figura 2.7). Após o ponto  $C$ , o deslocamento do LVDT-4 aumenta continuamente (Figura 2.6b). Por outro lado, os deslocamentos dos outros três LVDTs diminuem (Figura 2.6b), o que indica a ocorrência de descarregamento em regiões fora da banda de microfissuras (Figura 2.7). Assim, como o carregamento retrocede após o ponto  $C$ , uma curva tensão-deformação em *softening* é obtida.

As observações experimentais indicam que uma relação tensão  $\times$  deslocamento para um concreto sujeito à tração uniaxial pode ser dividida em quatro estágios, baseados na formação e propagação das fissuras internas, como mostrado na Figura 2.7.

O primeiro estágio ocorre antes do ponto  $A$ , perto de 30% do limite de carregamento. A formação de microfissuras é desprezível durante esse estágio. O segundo estágio se dá do ponto  $A$  ao ponto  $B$ , o qual ocorre a aproximadamente 80% do limite de carregamento. As fissuras internas iniciam-se e propagam-se durante esse estágio, porém, aparecem de forma isolada e distribuem-se aleatoriamente pelo volume da amostra. O terceiro estágio se encontra entre o ponto  $B$  e o ponto  $C$ . As fissuras internas começam a se localizar em uma fissura maior, que se propaga com o aumento da carga. Esse fenômeno é conhecido como *localização de dano* ou *localização de deformações*.





**Figura 2.8:** Localizações das fissuras internas, detectadas pela emissão acústica, para diferentes estágios de carga (os sinais em cruz indicam as fissuras internas localizadas na área testada): (a) estágio entre A e B, (b) estágio entre B e C e (c) estágio depois de C (Shah et al., 1995).

A propagação da fissura é estável até o limite de carregamento, onde o crescimento estável da fissura indica que a mesma se propaga somente quando a carga é incrementada. O comprimento da fissura no limite de carregamento é conhecido como *comprimento crítico da fissura*. O quarto estágio ocorre depois do limite de carregamento. A fissura maior se propaga continuamente mesmo que o carregamento seja decrementado. A deformação de tração do material dentro da banda de dano localizado aumenta, ao passo que em regiões fora da banda de dano pode ocorrer um descarregamento.

Um comportamento similar para o concreto sujeito à compressão uniaxial foi observado. Foi relatado que a distribuição das deformações de compressão ao longo da amostra é mais ou menos uniforme até aproximadamente 80% do limite de carregamento. Isso indica que a formação e propagação de fissuras

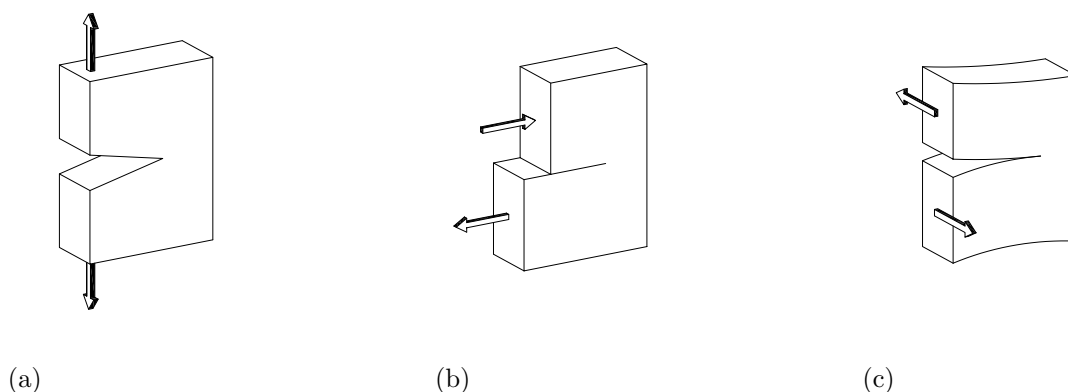
internas até 80% do limite de carga ocorre de maneira aproximadamente aleatória e uniforme. O exame da distribuição das fissuras internas em amostras testadas confirma que a localização de deformações ocorre após 80% do limite de carga.

A partir das observações feitas sobre os resultados do ensaio da chapa de concreto pode-se concluir que o fenômeno de localização de deformações e o comprimento crítico da fissura são fatores determinantes no comportamento de fissuração do concreto. Assim, a zona de processo de fratura é responsável pelo fenômeno de amolecimento ou *softening* da curva, que relaciona a carga aplicada com a abertura da fissura. Isso se deve à ação dos mecanismos de tenacidade à fratura que ocorrem nessa região. Uma parcela considerável da energia aplicada pelas cargas externas é absorvida na zona de processo de fratura, e por isso, uma fissura pode se propagar de maneira estável antes do limite do carregamento. Após o limite do carregamento, a ruptura imediata e catastrófica da estrutura é evitada, porque as superfícies da fissura ainda permanecem em contato, sendo capazes de transmitir tensões que vão decrescendo à medida que as superfícies vão perdendo o contato. O resultado na resposta da relação entre carga aplicada e deslocamento (ou abertura de fissura) é o decréscimo gradual do valor da carga após o limite do carregamento.

## 2.3 Classificação dos Modelos Constitutivos usados para o Concreto

Como já comentado nas seções anteriores, o concreto pode ser considerado um material parcialmente frágil, pois apresenta uma resposta de amolecimento ou *softening* devido à presença de uma região inelástica (zona de processo de fratura), localizada à frente da fissura, onde se desenvolvem os mecanismos de tenacidade à fratura, os quais são responsáveis pela dissipação parcial da energia fornecida pelo carregamento e explicam a resposta característica do concreto, conforme mostrado na Figura 2.1c.

Também foi descrito o comportamento de uma chapa sujeita à esforços de tração na Seção 2.2, na qual observou-se a resposta de cada região da peça. Desse ensaio, observou-se que da região que apresentou a maior localização de deformações surgiu uma fissura principal com resposta de amolecimento, enquanto nas demais regiões, não atingidas pela fissuração, a resposta pode ter permanecido elástica, e algumas podem até ter apresentado uma resposta de descarregamento. Um comportamento semelhante em relação à resposta à fissuração pode ser observado em outras estruturas usuais de concreto que possuem geometria e condições de contorno diferentes daquelas da chapa, uma vez que considera-se que a ruptura do concreto em relação ao carregamento aplicado se dá principalmente nos modos I, II e III. Tais modos de ruptura estão relacionados a carregamentos que provocam tração (Figura 2.9(a)), cisalhamento no plano ou cisalhamento fora do plano de ruptura (Figuras 2.9(b) e 2.9(c)).



**Figura 2.9:** Modos de ruptura: (a) Modo I, (b) Modo II e (c) Modo III (RILEM, 1989).

Assim, de modo geral, a resposta das estruturas de concreto na fissuração pode ser descrita de forma completa em um modelo físico que leve em consideração a resposta da região não fissurada, a resposta da região fissurada e as características da zona de processo de fratura.

Para fins classificatórios, os modelos físicos de comportamento do concreto podem ser definidos a partir de três aspectos fundamentais (RILEM, 1989):

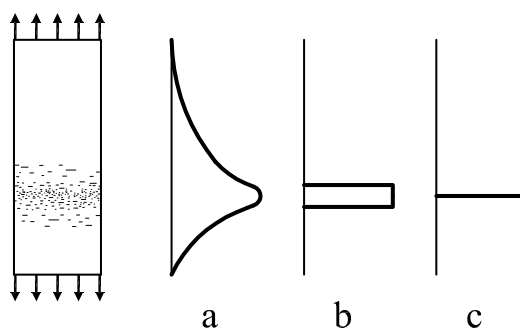
1. a definição do *comportamento da região não fissurada*;

2. a definição do *comportamento dentro da região fissurada*; e
3. a escolha de um *critério de localização*.

Normalmente, quando se trata da definição do comportamento da região não fissurada das estruturas usuais de concreto, costuma-se dividir os modelos entre aqueles onde ocorrerá dissipação de energia na região não fissurada e os que não apresentarão dissipação de energia no domínio não fissurado. Então, podem ser definidos os modelos de *degradação da rigidez* no domínio não fissurado ou os modelos de comportamento *elástico* no domínio não fissurado, respectivamente.

Quando se trata, no entanto, da definição do comportamento dentro da região fissurada, os modelos mais usados são os que consideram uma *degradação da rigidez* na região fissurada e aqueles que consideram que haverá uma *degradação de tensões* na região da fissuração.

Finalmente, quanto ao critério de localização, os modelos mais usados são aqueles que consideram que a localização de deformações ocorrerá em uma faixa, ou banda (Figura 2.10b) e os que consideram que a localização de deformações estará condensada em uma linha de fissuração (Figura 2.10c).



**Figura 2.10:** Modos da localização de deformações: (a) forma regular e arbitrária da localização de deformações, (b) localização dentro de uma banda e (c) localização em uma linha de fissuração (RILEM, 1989).

A partir deste ponto, pode-se distinguir os dois modelos físicos mais utilizados

para o concreto. São os modelos que carregam no nome justamente a característica principal que os diferencia um do outro — o critério de localização:

- o modelo de *Fissuras em Banda*, proposto por Bazant e Oh (1983); e
- o modelo de *Fissura Fictícia*, proposto por Hillerborg et al. (1976).

## 2.4 Modelo de Fissura Fictícia ou Coesiva

Neste trabalho adotar-se-á o Modelo de Fissura Fictícia, também conhecido como Modelo de Fissura Coesiva. Conforme os critérios de classificação descritos na seção 2.3, as características desse modelo serão descritas de acordo com o comportamento da região não fissurada, da região fissurada e do critério de localização.

O Modelo de Fissura Fictícia é um modelo muito simples, mas nem por isso deixa de ser um modelo adequado ao estudo do comportamento do concreto na fissuração. A base teórica desse modelo é definida para sólidos isotrópicos, para o modo I de abertura de fissura e para um carregamento monotônico (abertura de fissura aumentando de forma contínua). Além disso, simplifica-se a irregularidade e a tortuosidade naturais do caminho da fissura, e ignora-se a variação da zona de processo de fratura ao longo da espessura da peça estudada, fazendo-a constante nessa direção.

Nesse modelo, o comportamento do concreto no domínio não fissurado é considerado elástico, ou seja, considera-se que não há dissipação de energia na região não fissurada. É comum também considerar que o concreto apresenta uma resposta linear nesse domínio. Logo, o comportamento da região não fissurada fica completamente definido ao ser adotado um módulo de elasticidade  $E$  e um coeficiente de Poisson  $\nu$  válidos nesse domínio.

Para a definição do comportamento do concreto na região fissurada, o Modelo de Fissura Fictícia usa o artifício de simular o modo I de abertura de fissura em uma linha de fissuração, limitando, assim, a zona de processo de fratura a uma

superfície simples mas bem definida. Esse é o critério de localização desse modelo e, a partir desse critério, fica mais fácil definir o comportamento do concreto na região fissurada, que agora está delimitada a uma linha, ou a uma superfície de espessura constante.

Em seguida, devem ser estabelecidos os critérios de dissipação de energia que serão usados no domínio fissurado. Quando uma estrutura de concreto que possui uma fissura parcialmente frágil é submetida a um carregamento, a energia da carga aplicada resulta em uma taxa de energia  $G_q$ , em que o subscrito  $q$  indica materiais parcialmente frágeis. Essa taxa de energia é dissipada na zona de processo de fratura, na ponta da fissura. A taxa de energia dissipada na fissuração  $G_q$  pode ser dividida em duas parcelas:

- $G_{Ic}$ , que seria a parcela de energia necessária para formar duas superfícies separadas de fissura; e
- $G_\sigma$ , a parcela de energia necessária para separar as duas superfícies da fissura já formada.

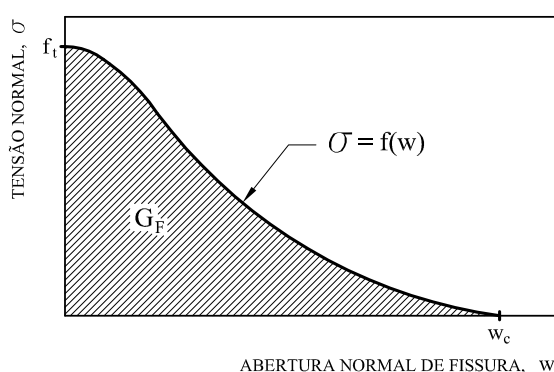
Logo, a taxa de energia dissipada no modo I de abertura de uma fissura parcialmente frágil,  $G_q$ , pode ser expressa como:

$$G_q = G_{Ic} + G_\sigma \quad . \quad (2.2)$$

Apesar de o mecanismo de dissipação de energia ser expresso de forma completa usando-se as duas parcelas de energia, pode-se adotar apenas um dos dois critérios, e, na prática, o Modelo de Fissura Fictícia usa apenas a parcela relativa à  $G_\sigma$ . Assim, esse modelo considera que a parcela de energia necessária para criar as duas superfícies de fissura é desprezível quando comparada à parcela de energia necessária para separá-las.

O subscrito  $\sigma$  refere-se às tensões coesivas, que são as tensões que agem na direção normal às superfícies da fissura, no modo I de ruptura, e decrescem gradualmente

em função da abertura de fissura  $w$ , que também é medida na direção normal às superfícies da fissura. Assim, através das fissuras coesivas, pode-se representar uma dissipação de energia gradual na zona de processo de fratura, de forma a representar matematicamente os processos físicos que se desenvolvem nessa região, através dos mecanismos de tenacidade à fratura. A Figura 2.11 mostra a curva das tensões coesivas  $\sigma$  em função da abertura de fissura  $w$ .



**Figura 2.11:** Curva de  $\sigma(w)$  (RILEM, 1989).

A parcela  $G_\sigma$  também pode ser entendida como o trabalho feito pela tensão coesiva sobre uma unidade de comprimento de uma fissura de espessura unitária. Assim, seu valor pode ser calculado da seguinte forma:

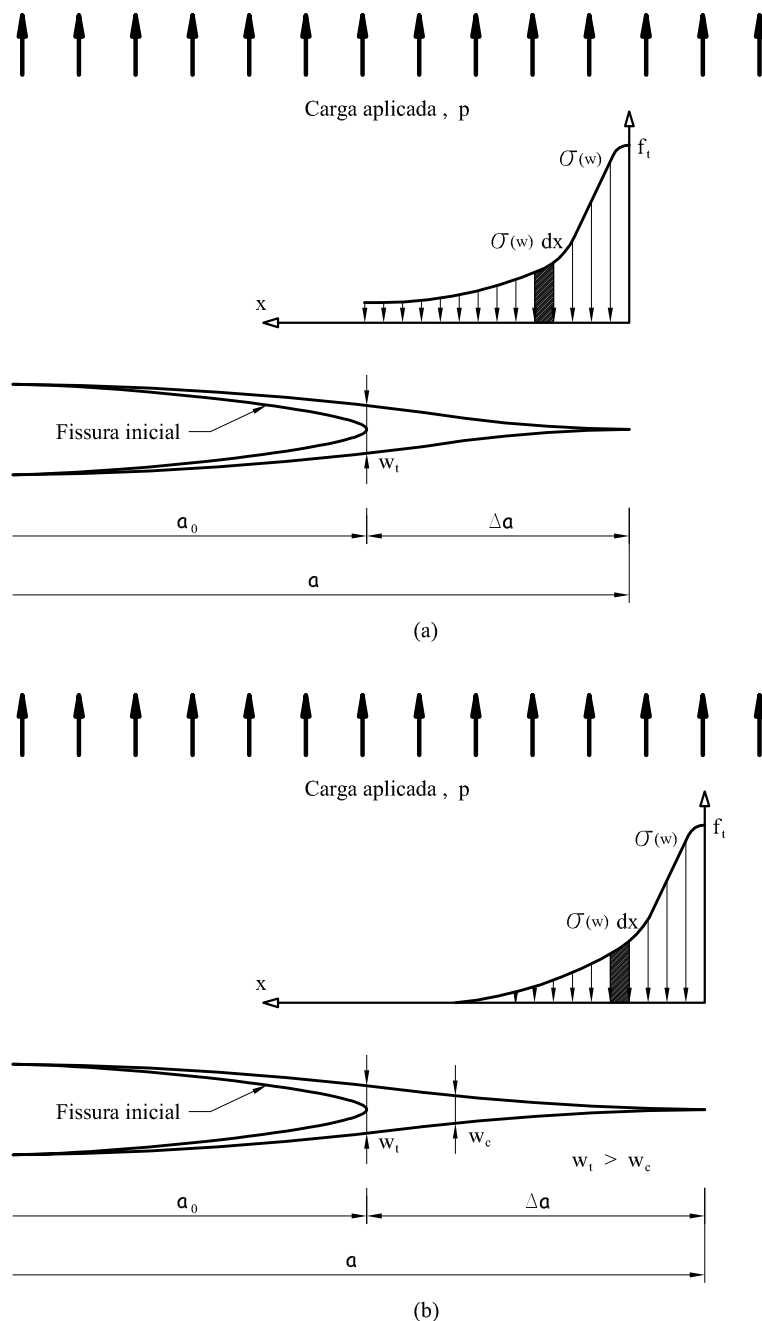
$$G_\sigma = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \int_0^w \sigma(w) dx dw = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} dx \int_0^w \sigma(w) dw = \int_0^{w_t} \sigma(w) dw \quad , \quad (2.3)$$

em que  $\sigma(w)$  é a tensão coesiva normal e  $w_t$  é o deslocamento da separação da fissura na ponta da fissura inicial (ver Figura 2.12a).

Por outro lado, a energia de dissipação da fissura coesiva também pode ser relacionada à área do gráfico mostrado na Figura 2.11. Então, costuma-se associar a área sob o gráfico de  $\sigma(w)$  à energia necessária para se separar uma fissura coesiva de área unitária  $G_F$ , também chamada de energia de fratura. Essa energia de fratura  $G_F$  é tomada como um parâmetro de fratura que depende apenas do material.

Logo, a Equação 2.2 pode ser reescrita da seguinte forma, considerando-se  $G_{Ic}$  nulo:

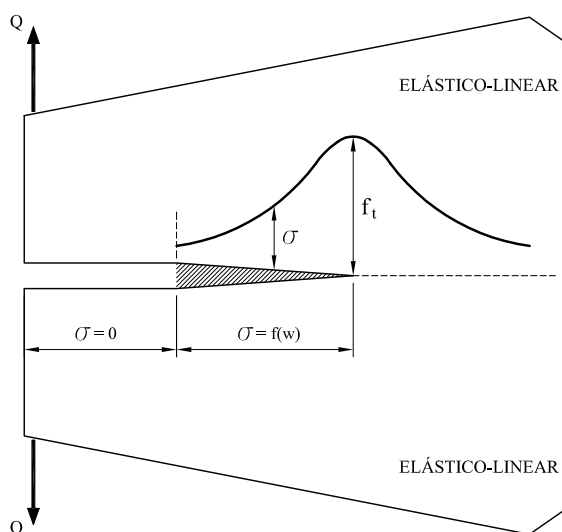
$$G_q = G_\sigma = G_F = \int_0^{w_t} \sigma(w) dw \quad . \quad (2.4)$$



**Figura 2.12:** Modelo de fissura parcialmente frágil: (a) uma fissura coesiva com as superfícies fissuradas em contato e (b) uma fissura coesiva com as superfícies fissuradas parcialmente separadas (Shah et al., 1995).



Para que o modelo fique completo, basta, então, que se defina o mecanismo de início e evolução da fissura coesiva. Para um material isotrópico, o comportamento de um ponto é normalmente assumido como sendo elástico, até o momento em que a tensão principal máxima alcança o valor da resistência à tração do material  $f_t$ . Neste momento, a fissura começa como uma abertura coesiva (com transferência de tensões) com direção normal à direção da tensão máxima de tração. Se tomarmos um ponto localizado exatamente na ponta da fissura inicial, teremos um valor de abertura de fissura  $w = w_t$  e um valor  $\sigma(w)$  maior que zero. À medida que a carga é incrementada, as tensões coesivas  $\sigma(w)$  vão diminuindo, e a abertura de fissura  $w$  vai aumentando. Nesse mesmo ponto, localizado na ponta da fissura inicial, quando  $w$  atinge um valor que corresponde à tensão coesiva zero, a fissura está completamente separada. Em seguida, em outro ponto mais à frente da fissura coesiva, a abertura de fissura  $w$  atinge o valor crítico correspondente a  $\sigma(w) = 0$  e passa a ser chamada de  $w_c$ , devendo ser colocada no lugar de  $w_t$ , nas Equações 2.3 e 2.4. No limite da aplicação da carga, o valor de  $w_t$  deve ser bem maior que o valor de  $w_c$ . A Figura 2.12 ilustra bem o mecanismo de evolução da fissura envolvendo a tensão coesiva  $\sigma(w)$  e a abertura de fissura  $w$ . O mesmo processo de evolução da fissura coesiva também pode ser visto na Figura 2.13.



**Figura 2.13:** Propagação da fissura no modo I (RILEM, 1989).

Como já colocado anteriormente, o Modelo de Fissura Fictícia considera que a energia de fratura  $G_F$  é uma propriedade que depende apenas do material, assim, não depende da geometria e do carregamento da estrutura. Logo, o comportamento da região não fissurada de uma estrutura de concreto fica completamente determinado se a curva das tensões coesivas  $\sigma(w)$  é completamente definida. Para isso, é suficiente que sejam definidos os seguintes parâmetros:

- a resistência à tração do material,  $f_t$ ;
- a energia de fratura do material,  $G_F$ ; e
- a forma da curva das tensões coesivas,  $\sigma(w)$ .

Na prática, são usadas várias formas diferentes de curvas de  $\sigma(w)$ . As mais usadas são as curvas com forma bilinear, trilinear, exponencial e função de potência. A forma da curva  $\sigma(w)$  influencia diretamente a resposta da estrutura na fissuração, e a sua correta determinação é muito importante. Isso deve ser feito mediante ensaios experimentais, e na prática, é uma tarefa difícil, uma vez que os resultados podem variar de acordo com o tamanho e a forma da amostra. Daí uma grande quantidade de pesquisadores da área não aceitarem que a forma da curva de  $\sigma(w)$  seja uma propriedade do material.

Uma vez definidos o módulo de elasticidade  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$  para um comportamento elástico-linear da região não fissurada e definidos os parâmetros  $f_t$ ,  $G_F$  e a forma da curva de  $\sigma(w)$  para a região fissurada, o modelo de fissura coesiva fica completamente definido.

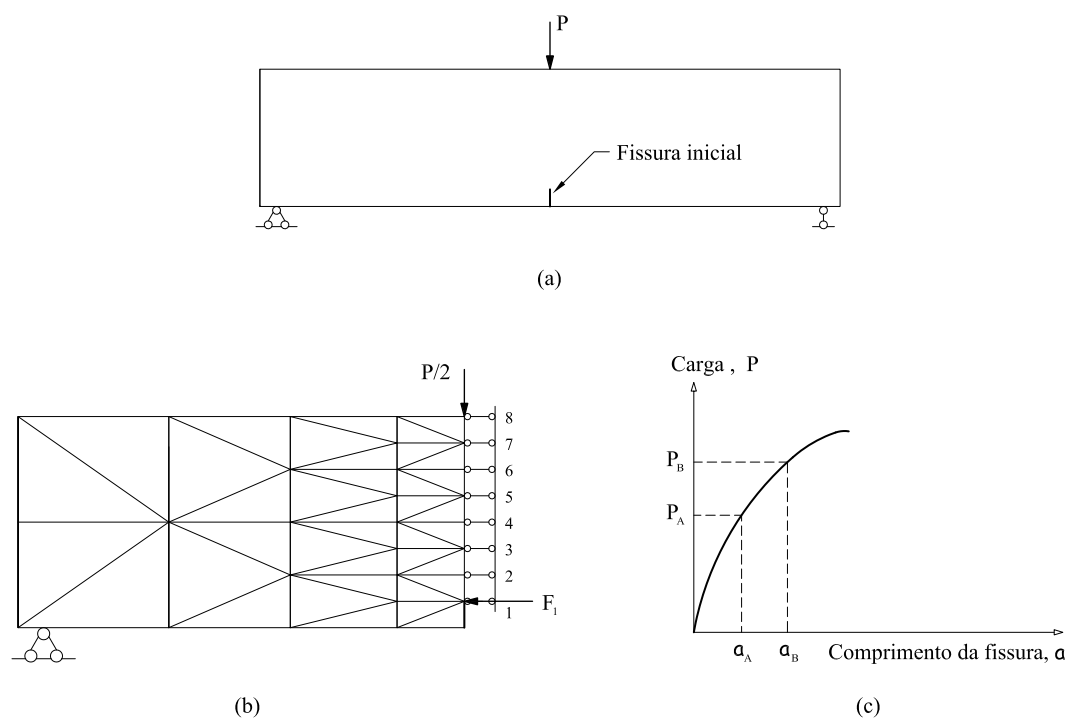
Para a região fissurada, se a forma da curva de  $\sigma(w)$  é dada, podem-se relacionar os outros dois parâmetros ( $f_t$  e  $G_F$ ) a um “comprimento característico” :

$$l_{ch} = \frac{EG_F}{f_t^2} \quad , \quad (2.5)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade do material. O comprimento característico do material  $l_{ch}$  é simplesmente uma propriedade do material e é proporcional ao

comprimento da zona de processo de fratura baseada no modelo de fissura fictícia. O valor de  $l_{ch}$  para o concreto varia de  $100\text{ mm}$  a  $400\text{ mm}$ . O comprimento da zona de processo de fratura na completa separação da ponta da fissura inicial ( $w_t = w_c$ ) do concreto é da ordem de  $0.3 l_{ch}$  a  $0.5 l_{ch}$ , de acordo com esse modelo (Shah et al., 1995).

Um exemplo de aplicação do modelo de fissura fictícia em uma modelagem numérica usando elementos finitos foi extraído de Shah et al. (1995) e será reproduzido a seguir, com o objetivo de fornecer um ponto de partida para a abordagem dos modelos numéricos apresentados no capítulo 3. É o ensaio de uma viga fletida em 3 pontos com uma fissura inicial, conforme indicado na Figura 2.14. Neste exemplo, somente a metade da viga é considerada, devido à simetria do problema.



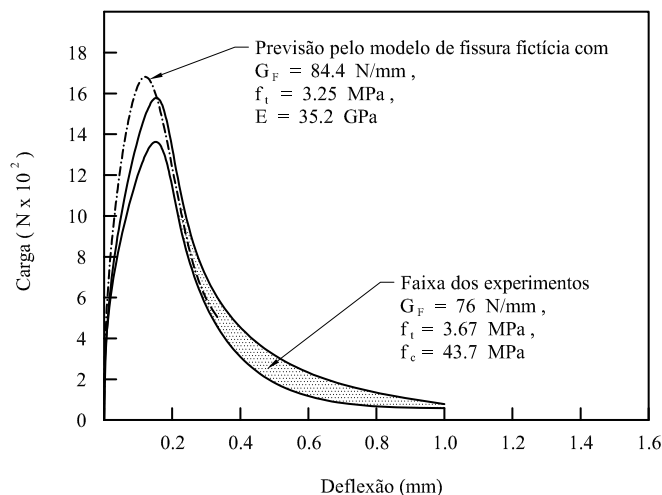
**Figura 2.14:** Ilustração do uso do modelo de fissura fictícia na análise de elementos finitos: (a) viga fletida por três pontos, (b) malha de elementos finitos da viga e (c) curva da carga  $\times$  comprimento da fissura (Shah et al., 1995).

Pode-se assumir que a carga  $P = P_A$  produz  $\sigma_{x1} = f_t$ , em que  $\sigma_{x1}$  é a tensão normal de tração no ponto 1, como mostrado na Figura 2.14b. Isso indica que a fissura inicial começa a se propagar no nível de carga igual a  $P_A$ . Como

resultado, a força coesiva  $F_1$  deve ser introduzida no ponto 1, onde o valor de  $F_1$  é determinado baseado na relação de  $\sigma(w)$  e tende a fechar a fissura. Então, uma nova análise pode ser realizada para a viga sujeita tanto a  $F_1$  quanto à carga incremental  $P$ .

Nota-se que, desde que a tensão coesiva  $\sigma(w)$  é uma função do deslocamento de abertura de fissura, o valor de  $F_1$  pode mudar com o incremento de  $P$  como resultado de mais deslocamento de abertura de fissura. Depois que a carga  $P_B$ , que conduz a  $\sigma_{x2} = f_t$  no ponto 2, é determinada, outra força coesiva,  $F_2$ , deve ser introduzida no ponto 2. Procedendo com cálculos similares ao mudar o valor da carga e a força coesiva, o comportamento de fissuração da viga pode ser previsto. Nota-se que a propagação da fissura é determinada se a tensão principal ultrapassa a resistência à tração do material, no lugar do uso de um critério de energia.

Uma comparação das curvas de carga-deslocamento previstas pelo Modelo de Fissura Fictícia e os valores experimentais para uma viga fletida em 3 pontos são mostrados na Figura 2.15. O vão, a altura e a espessura da viga são  $400\text{ mm}$ ,  $100\text{ mm}$  e  $100\text{ mm}$  respectivamente. Uma curva bilinear de tensão-separação recomendada pelo Código CEB-FIP (CEB-FIP, 1990) foi usada. O tamanho máximo do agregado usado foi de  $16\text{ mm}$ . Os valores de  $E = 35.2\text{ GPa}$ ,  $G_F = 84.4\text{ N/mm}$  e  $f_t = 3.25\text{ MPa}$  foram usados para a previsão teórica. Vê-se que, através da seleção apropriada de parâmetros de fratura, o modelo de fissura fictícia é capaz de prever o comportamento de fissuração de uma estrutura.



**Figura 2.15:** Comparação entre as curvas carga-deslocamento: curva prevista e curva medida, para viga fletida por 3 pontos (Shah et al., 1995).

## Capítulo 3

# MODELOS NUMÉRICOS PARA A FISSURAÇÃO DO CONCRETO

### 3.1 Introdução

No final da Seção 2.4, foi mostrado um exemplo de aplicação numérica do Modelo de Fissura Coesiva usando-se uma malha de elementos finitos para modelar o comportamento de uma viga fletida em 3 pontos. Nesse exemplo, para se chegar aos resultados, foram necessários vários processamentos da mesma malha. Assim, a cada processamento, foram obtidos os valores de abertura de fissura  $w$ , bem como os valores de força coesiva  $F$  a ser aplicado em cada um dos nós à medida que a fissura caminhava. A cada vez que, em um nó, o valor da tensão de tração atingia o valor de  $f_t$ , uma nova força coesiva  $F$  era aplicada nesse nó, enquanto novos valores da força coesiva  $F$ , atualizados em relação à abertura de fissura  $w$ , eram atribuídos aos nós anteriores. Assim, a mesma malha foi processada várias vezes, de maneira que cada novo processamento era carregado com os resultados do processamento anterior. Apesar de os resultados alcançados terem sido satisfatórios, uma vez que a resposta numérica da viga fletida em três pontos com uma fissura coesiva apresentou resultados muito próximos aos resultados do ensaio experimental, pode-se afirmar que o processo numérico de recarregar e reprocessar a mesma malha várias vezes

é muito penoso e certamente inviabilizaria a resolução numérica de outros ensaios mais complexos e com maior número de nós envolvidos.

Além disso, no caso da viga fletida em 3 pontos, o caminho da fissura iniciada na parte inferior da viga é conhecido, tem trajetória retilínea e pode ser facilmente simulado usando-se o método numérico citado na Seção 2.4. Porém, como estudar numericamente uma estrutura de concreto a partir de um determinado modelo físico quando não se conhece o caminho da fissura *a priori*? Ou quando a geometria da estrutura e as condições de contorno são complexas? Como transformar o modelo físico escolhido em um modelo matemático consistente, que possa ser usado de forma generalizada? A partir dessas questões, surgiram os primeiros modelos numéricos e, para resolver novas dificuldades que surgiram posteriormente, tais modelos foram sendo aperfeiçoados com o passar do tempo. E continuam sendo melhorados até hoje.

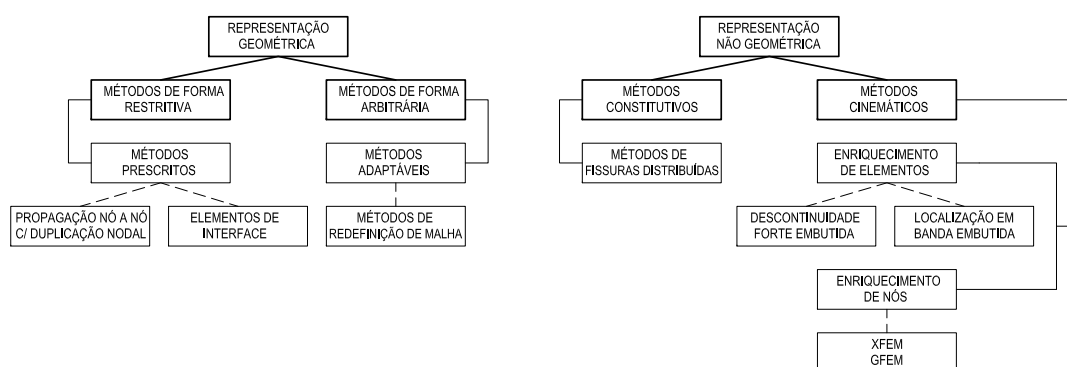
Nas próximas seções, serão abordados os principais modelos numéricos baseados no Método dos Elementos Finitos que foram e ainda são usados na simulação numérica dos modelos físicos de fratura. Apesar de existirem vários outros métodos capazes de tratar numericamente os modelos de fratura, como por exemplo o Método das Diferenças Finitas, os Métodos Sem Malha, ou as Técnicas de Elementos de Contorno, neste trabalho, serão abordados apenas os métodos numéricos baseados no MEF.

## 3.2 Classificação dos Modelos Numéricos

Ingraffea e Wawrzynek (2004) apresentam uma classificação muito interessante dos principais métodos numéricos usados em diversas aplicações da Mecânica da Fratura nas últimas décadas. Nessa classificação, os autores preocupam-se em dividir os diversos métodos numéricos em dois grupos principais, que se distinguem

pela maneira como representam a propagação da fissuração. O primeiro grupo representa a propagação da fissuração de forma *geométrica* e o segundo, de forma *não geométrica*. Assim, nos modelos numéricos do primeiro grupo, a fissura é uma entidade geométrica inserida na geometria do modelo, e tanto a geometria do modelo quanto a discretização do mesmo, se necessário, mudam conforme a propagação da fissuração. Já no segundo grupo, os modelos numéricos representam a propagação da fissuração dentro do modelo constitutivo do material ou através de um modelo cinemático, no qual a fissura é representada através de saltos ou discontinuidades no campo de deslocamentos e/ou deformações. Assim, nesse segundo grupo, nem a geometria do modelo nem sua discretização contêm a fissura ou precisam sofrer alterações durante a propagação da mesma.

A partir da classificação proposta por Ingraffea e Wawrzynek (2004), serão abordados aqui neste trabalho somente aqueles métodos numéricos baseados no MEF. Para uma visão mais completa de todos os métodos numéricos disponíveis para aplicações da Mecânica da Fratura, ver Ingraffea e Wawrzynek (2004). A Figura 3.1 apresenta de forma simplificada a classificação dos métodos numéricos (baseados no MEF), de acordo com a forma de representação da propagação da fissuração. Nas próximas seções, esses métodos serão abordados de forma geral e serão apontadas suas principais vantagens e desvantagens.



**Figura 3.1:** Classificação dos métodos numéricos baseados no MEF segundo a representação da propagação da fissuração (Ingraffea e Wawrzynek, 2004).

### 3.2.1 Métodos de Representação Geométrica

Os Métodos de Representação Geométrica podem ser divididos em dois grupos: aqueles que representam a fissuração de forma geométrica-restritiva e aqueles que representam a fissuração de forma geométrica-arbitrária. Do primeiro grupo, destaca-se aqui neste trabalho o subgrupo dos Métodos Prescritos. Nesses métodos, a fissura está limitada à face, ou contorno dos elementos e, apesar de não haver alteração na geometria dos elementos, a malha acaba sendo alterada, pois os nós são duplicados e separados à medida que a fissura se propaga entre os elementos. Provavelmente esses métodos tenham sido os primeiros a serem usados em estudos numéricos baseados no MEF para simular o processo de fissuração.

Nesses métodos, a geometria da fissura depende do tamanho dos elementos, e o caminho de propagação da mesma depende da topologia<sup>1</sup> da malha de elementos finitos, tornando necessário o conhecimento antecipado do caminho da fissura para que a discretização seja ajustada convenientemente. Assim, tais métodos prescrevem a propagação da fissuração limitando-a à discretização. Na época em que esses métodos começaram a ser usados, ainda haviam outros agravantes: a capacidade e a velocidade de processamento dos computadores eram bem limitadas e o aumento do tamanho das matrizes de rigidez provocado pela duplicação dos nós dificultava mais ainda o processamento desses modelos. Essas dificuldades e limitações motivaram, naquela mesma época, o surgimento dos modelos de fissuras distribuídas, que serão abordados posteriormente. Um exemplo de aplicação dos métodos numéricos de propagação nó a nó com duplicação nodal pode ser visto em Ngo e Scordelis (1967).

Apesar das limitações dos primeiros modelos de representação geométrica prescrita, o aumento da capacidade de memória e de processamento dos computadores, aliado ao desenvolvimento de rotinas para minimizar a largura de banda e à novas estratégias de soluções iterativas, tem permitido o uso desses modelos atualmente. Uma versão moderna derivada dos modelos numéricos de propagação nó a nó com

---

<sup>1</sup>Nas Engenharias, o conceito de *topologia* está associado à disposição lógica de elementos.



duplicação nodal são os modelos de elementos de interface. Tais modelos inserem os elementos de interface entre os elementos-padrão da malha. Os elementos de interface precisam se ajustar às faces dos elementos-padrão e podem ser usados em um modelo não linear de fissura coesiva, por exemplo, para separar gradualmente as faces dos elementos-padrão. Além disso, o caminho da fissura pode ser determinado a partir de uma análise de um número limitado de prováveis caminhos por onde a fissura possa passar, para que se escolha, entre estes, o que melhor se encaixa à solução. Um exemplo atual do uso de elementos de interface na simulação numérica do comportamento de materiais parcialmente frágeis, como o concreto, pode ser visto em López et al. (2008).

O segundo grande grupo de modelos de representação geométrica são aqueles que representam a fissuração de forma arbitrária (Figura 3.1) e, entre os modelos pertencentes a esse grupo, destaca-se aqui o subgrupo dos modelos que seguem métodos adaptáveis. Nesses modelos, baseados no MEF ou no MEC, a discretização precisa ser modificada para se adaptar à geometria da fissura à medida que esta se propaga. Os métodos de redefinição de malha pertencem a essa categoria e permitem que uma fissura seja modelada de forma completamente arbitrária dentro de uma malha de elementos, uma vez que a geometria e, se necessário, a topologia da malha são modificadas e atualizadas para se ajustarem à geometria da fissura durante a sua evolução.

Atualmente, os métodos de redefinição de malha usam as ferramentas mais modernas que estão disponíveis no MEF e no MEC para a resolução dos campos de deslocamentos, deformações e tensões, aliadas ao uso de avançadas tecnologias para geração automática de malhas e para o mapeamento das informações do estado da discretização antes e depois de cada redefinição da malha. Dois componentes fundamentais desses métodos são o banco de dados topológico e o banco de dados geométrico. O banco de dados topológico organiza e controla a troca de informações entre a geometria do sólido em estudo e cada configuração da malha que representa a

estrutura fissurada. Devido à complexidade desse tipo de análise, onde a geometria e, às vezes, a topologia da malha são alteradas, tornam-se necessários o armazenamento e a atualização das informações da geometria do corpo em estudo de forma independente da discretização numérica. Assim, é mantido um banco de dados geométricos que contém uma descrição explícita do modelo sólido e também da fissura. O exemplo de um algoritmo de redefinição de malha com possíveis aplicações em diversos problemas físicos pode ser visto em Anderson et al. (2005), e uma aplicação do mesmo algoritmo no estudo da interface de interação de fluidos pode ser vista em Zheng et al. (2005). Um exemplo de aplicação dos métodos de redefinição de malha para a simulação da corrosão do aço em estruturas de concreto armado pode ser visto em Dao et al. (2010).

### 3.2.2 Métodos de Representação Não Geométrica

Passando aos métodos de representação não geométrica, os modelos pertencentes a essa classe podem ser divididos em dois grupos principais: os modelos numéricos que representam a fissuração no modelo constitutivo e os modelos numéricos que representam a propagação da fissura através dos campos cinemáticos. No primeiro caso, a rigidez do material em estudo sofre uma degradação na região fissurada, de forma a simular a descontinuidade do campo de deslocamentos provocada pela fissuração. No segundo caso, o efeito da fissuração nos campos de deslocamentos e deformações é embutido dentro dos elementos, seja nas funções de aproximação dos elementos, de forma local, ou seja nos nós dos elementos, de forma global. O principal objetivo desses métodos é evitar o uso de redefinição de malha, e, nos dois grupos de modelos, tanto nos constitutivos quanto nos cinemáticos, a fissuração é simulada sem a necessidade de alterações na geometria e na topologia da malha.

Os Métodos Numéricos Constitutivos são aqui representados em um grupo muito popular, o dos Modelos de Fissuras Distribuídas. Nesses modelos, o material é idealizado como um meio contínuo, com dano devido ao processo de fissuração. De um

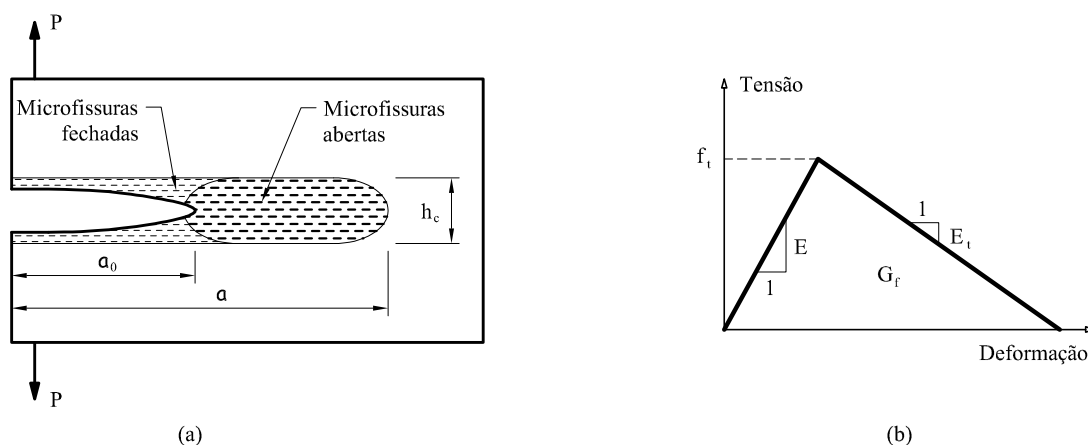
modo geral, os Modelos de Fissuras Distribuídas consideram que a região fissurada é formada por um conjunto de pequenas fissuras paralelas entre si. Assim, uma região fissurada seria representada por um conjunto de elementos finitos com comportamento ortotrópico. Ou seja, posicionando-se o sistema local do tensor constitutivo desses elementos nas direções perpendicular e paralela ao plano de fissuração, respectivamente, podem-se adotar valores diferentes para o módulo de elasticidade dessas direções, caracterizando-se, assim, um elemento finito ortotrópico (Pitangueira, 1998). Logo, usando-se um tensor constitutivo ortotrópico, a rigidez dos elementos da região fissurada representa uma deterioração gradual, e o efeito da fissuração é reproduzido numericamente sem a necessidade de modificações na malha.

Esses modelos têm a vantagem de permitir um estudo da estrutura de forma global e não local, além de eliminarem a necessidade de redefinições de malha. Por outro lado, os Modelos de Fissuras Distribuídas apresentam uma dificuldade que diz respeito ao parâmetro de fratura adicional relacionado à largura de banda da fissura. Esse parâmetro, introduzido pelo critério de energia que rege a propagação da fissura, acaba criando uma dependência entre o volume do material, representado em um ponto de Gauss, e a energia de fratura. Essa interdependência entre o modelo constitutivo e a malha cria uma complicação para a simulação da propagação da fissuração nos Modelos de Fissuras Distribuídas (Ingraffea e Wawrzynek, 2004). Além disso, outros aspectos negativos têm sido relatados sobre os modelos de fissuras distribuídas:

- tendência direcional: o caminho da fissuração depende da topologia da malha;
- modos cinemáticos inválidos: o amolecimento artificial dos elementos pode resultar em autovalores negativos, perda de estabilidade numérica;
- *stress locking*: os resultados apresentam rigidez muito grande, e a resistência residual é sempre muito alta.

### 3.2.2.1 Modelos de Fissuras em Banda

É ressaltada aqui a maior subclasse de modelos numéricos pertencentes aos Modelos de Fissuras Distribuídas: os modelos de fissuras em banda, em que a abertura de fissura é distribuída sobre uma banda de comprimento prescrito. É importante citar o modelo de fissuras em banda de Bazant e Oh (1983) para o concreto, que representou a zona de processo de fratura através de uma banda de microfissuras distribuídas, de forma contínua e uniforme, em uma largura fixa  $h_c$ , como mostrado na Figura 3.2a.



**Figura 3.2:** Modelo de fissuras em banda para a fissuração do concreto e rocha: (a) fratura em banda de microfissuras e (b) curva tensão-deformação para banda de microfissuras (Shah et al., 1995).

No modelo de Bazant e Oh (1983), a propagação da fissuração é então simulada por uma microfissuração progressiva dentro dessa banda  $h_c$ . O comportamento do concreto nessa região é descrito por uma relação simples de tensão-deformação, como mostra a Figura 3.2b. O deslocamento de abertura de fissura é igual ao produto da deformação de fratura e da largura da banda da fissura. Baseada na Equação (2.4), a energia consumida, devido ao avanço da fissura, por unidade de área da banda da fissura,  $G_f$ , é o produto da área sob a curva tensão-deformação dada pela Figura 3.2b

e da largura da banda da fissura  $h_c$ . Isso leva a:

$$G_f = h_c \left( 1 + \frac{E}{E_t} \right) \frac{f_t^2}{2E} \quad , \quad (3.1)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade,  $E_t$  é o módulo de deformação-*softening* e  $f_t$  é a resistência à tração do material. Os valores de  $E$  e  $E_t$  são definidos como positivos.

Pode ser visto que, adicionalmente ao valor de  $E$ , três parâmetros de fratura do material,  $h_c$ ,  $f_t$  e  $E_t$ , são necessários no modelo de fissura em banda. Uma função aproximada,  $h_c = n_a d_a$ , é proposta para calcular o valor de  $h_c$ , em que  $d_a$  é o tamanho máximo do agregado no concreto ou o tamanho máximo de grão na rocha e  $n_a$  é uma constante empírica. Sugere-se que o valor de  $n_a$  seja igual a 3 para o concreto e 5 para a rocha (Shah et al., 1995).

### 3.2.2.2 Métodos Cinemáticos

Finalmente, da classificação indicada na Figura 3.1, pode ser visto o segundo grupo de Métodos de Representação Não Geométrica. São os métodos que representam a fissuração através do comportamento cinemático<sup>2</sup> da região fissurada.

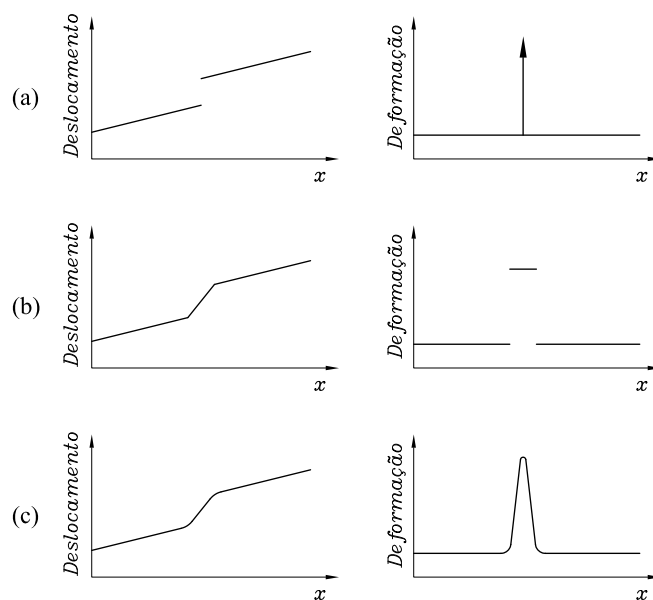
Segundo Jirásek (2001), o processo de fissuração pode ser representado tanto nos modelos físicos quanto nos modelos numéricos de forma direta, através de *descontinuidades no campo de deslocamentos*. Assim, o comportamento cinemático da região da fissuração pode ser descrito de três formas distintas, conforme indicado na Figura 3.3.

A primeira incorpora as *descontinuidades fortes*, isto é, saltos no campo de deslocamentos (uma curva descontínua — em duas dimensões; ou uma superfície descontínua — em três dimensões). O campo de deformações  $\varepsilon(x)$ , então, é formado por uma parte regular, obtida pela diferenciação padrão do campo de deslocamentos, e outra parte singular, possuindo o caráter de um múltiplo da distribuição delta de

---

<sup>2</sup>Cinemática é o ramo da Física que se ocupa da descrição dos movimentos dos corpos, sem se preocupar com a análise de suas causas.

Dirac. Essa descrição é representada para o caso unidimensional na Figura 3.3a. Em termos físicos, a *descontinuidade forte* corresponde a uma microfissura com as faces muito “fechadas”.



**Figura 3.3:** Descrição cinemática da zona de fissuração com (a) uma descontinuidade forte, (b) duas descontinuidades fracas e (c) um perfil contínuo sem nenhuma descontinuidade (Jirásek, 2001).

Outra possível descrição cinemática representa a região de localização de deformações por uma banda de tamanho pequeno, mas espessura finita, separada do restante do corpo por duas *descontinuidades fracas*, isto é, curvas ou superfícies do campo de deformações através das quais certos componentes de deformação têm um salto, sendo que o campo de deslocamentos permanece contínuo. Isto é ilustrado pela Figura 3.3b. Uma vez que o campo de deslocamentos é contínuo, as componentes de deformação do plano tangencial à superfície de descontinuidade precisam permanecer constantes. Logo, somente os componentes fora desse plano podem ter um salto. Em termos físicos, a banda entre as descontinuidades fracas corresponde a uma zona de processo de fratura com uma densidade de microfissuras quase constante.

Finalmente, a descrição mais regular usa um campo de deslocamentos contínuo

e um campo de deformações contínuo. A localização de deformações é manifestada através de uma alta concentração de deformações em uma banda estreita, com uma transição contínua a partir das deformações mais baixas na região adjacente à banda. Um perfil típico dessa descrição é dado na Figura 3.3c. Em termos físicos, essa representação corresponde a uma zona de processo de fratura com uma alta concentração de defeitos próximos ao seu centro.

Assim, a partir das descrições cinemáticas da zona de fissuração, os modelos numéricos cinemáticos, baseados no MEF, são capazes de representar o comportamento da fissuração através de “saltos” ou descontinuidades no campo de deslocamentos ou no campo de deformações, sem a necessidade de alterar a geometria e a topologia da malha. Isto é possível através do chamado “enriquecimento” dos elementos-padrão, que é realizado com a introdução de funções descontínuas (por exemplo, a função de Heaviside) nas equações de interpolação dos campos de deslocamento e deformação.

Na Figura 3.1, os métodos cinemáticos estão divididos em dois grupos principais: os métodos de enriquecimento de elementos e os métodos de enriquecimento de nós. Tomando-se inicialmente o grupo de métodos de enriquecimento de elementos, são destacados aqui os métodos de descontinuidade forte embutida e os de localização em banda embutida.

Os métodos de enriquecimento de elementos com descontinuidade forte embutida permitem a captura de um salto no campo de deslocamentos ao longo de um segmento que possui posição e orientação arbitrária em relação ao elemento finito básico utilizado. Tais formulações são baseadas no enriquecimento das funções de forma padrão através de funções descontínuas especiais (função de Heaviside e delta de Dirac).

No caso dos métodos de enriquecimento de elementos com localização em banda embutida, a ideia é similar à do grupo anterior, exceto pelo fato de que, nesse caso, o salto é no campo de deformações, caracterizando-se então uma descrição cinemática de descontinuidade fraca. Assim, os elementos com localização em banda embutida

permitem a modelagem das bandas de localização de deformações em uma direção arbitrária em relação à malha básica, permitindo também uma espessura arbitrária da banda.

Porém, todos os modelos que usam descontinuidade embutida (tanto os modelos de *elementos com descontinuidade forte embutida* quanto os modelos de *elementos com localização em banda embutida*), lidam com interpolações não conformes. Ou seja, a compatibilidade é satisfeita apenas parcialmente; assim, o campo de deformações de um elemento que possui a descontinuidade embutida não apresenta valores equivalentes de deformação entre um lado e outro da descontinuidade. Esse aspecto negativo, em contrapartida, possibilita que os graus de liberdade adicionais, que correspondem à parte descontínua enriquecida, sejam tratados como graus de liberdade internos. Assim, eles podem ser eliminados no nível dos elementos. A principal vantagem é que somente os graus de liberdade normais (deslocamentos nodais) são mantidos no nível global da estrutura, e o número das equações globais de equilíbrio, bem como a matriz de rigidez global, não mudam de tamanho quando a fissura se propaga e novos elementos são enriquecidos.

Entretanto, existe um preço a ser pago por essa conveniência. Uma análise detalhada do comportamento de um simples elemento que possui uma descontinuidade embutida revela que severas restrições precisam ser feitas quanto ao tamanho do elemento, bem como em relação à forma do elemento. Essas restrições tornam-se mais severas na presença de múltiplas descontinuidades em um único elemento e também no caso tridimensional. Outra inconveniência é que a matriz constitutiva tangente do elemento com a descontinuidade embutida é, em geral, assimétrica (Jirásek, 2001).

Durante a década de 1990, os pesquisadores deram atenção especial aos modelos numéricos que tratam das descontinuidades no campo de deslocamentos de forma flexível de maneira independente da malha de elementos finitos. Assim, devido às restrições encontradas nos modelos numéricos de descontinuidade embutida, surgiu, no final da década de 1990, um método numérico que prometia melhorar



substancialmente a robustez numérica e a versatilidade dos modelos que apresentam descontinuidades no campo de deslocamentos. Logo, desenvolveu-se um método que incorporou as descontinuidades dentro das interpolações enriquecidas dos elementos finitos, usando o conceito da partição da unidade (Melenk e Babuška, 1996). A ideia original do método da partição da unidade é de que a aproximação do espaço abrangido por uma base padrão (nesse caso, pelas funções de forma convencionais dos elementos finitos) pode ser facilmente enriquecida pelos produtos das funções da base padrão com funções especiais selecionadas pelo usuário e construídas, por exemplo, a partir da solução analítica do problema sob alguns pressupostos simplificados. Isso permite a incorporação de um conhecimento antecipado sobre o caráter do problema e suas soluções. A multiplicação pelas funções de forma convencionais assegura que as funções de enriquecimento possuam um suporte limitado e que os graus de liberdade correspondentes possam ser vinculados aos nós da malha convencional de elementos finitos. Essa ideia foi adaptada inicialmente para a Mecânica da Fratura Linear-Elástica, com o enriquecimento construído através do uso das soluções assintóticas da ponta da fissura, e a função de Heaviside. O método foi chamado mais tarde de **Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM)**. Esse método pode lidar eficientemente com fissuração em três dimensões e ainda com ramificações e interseções de fissuras.

Apesar da aparente semelhança na forma de enriquecimento entre o grupo de enriquecimento de elementos e o grupo de enriquecimento de nós, mostrados na Figura 3.1, esses grupos possuem uma diferença conceitual enorme relativa à forma com que as funções-padrão de interpolação dos elementos finitos são enriquecidas.

O grupo de *enriquecimento de elementos* aplica uma combinação linear da função de Heaviside com as funções de forma padrão do elemento enriquecido mais as funções de forma dos demais elementos da vizinhança que estejam associadas aos nós separados pela descontinuidade, de tal maneira que a função resultante anula-se em todos os nós. Esse tipo de enriquecimento cria a possibilidade da adição de graus

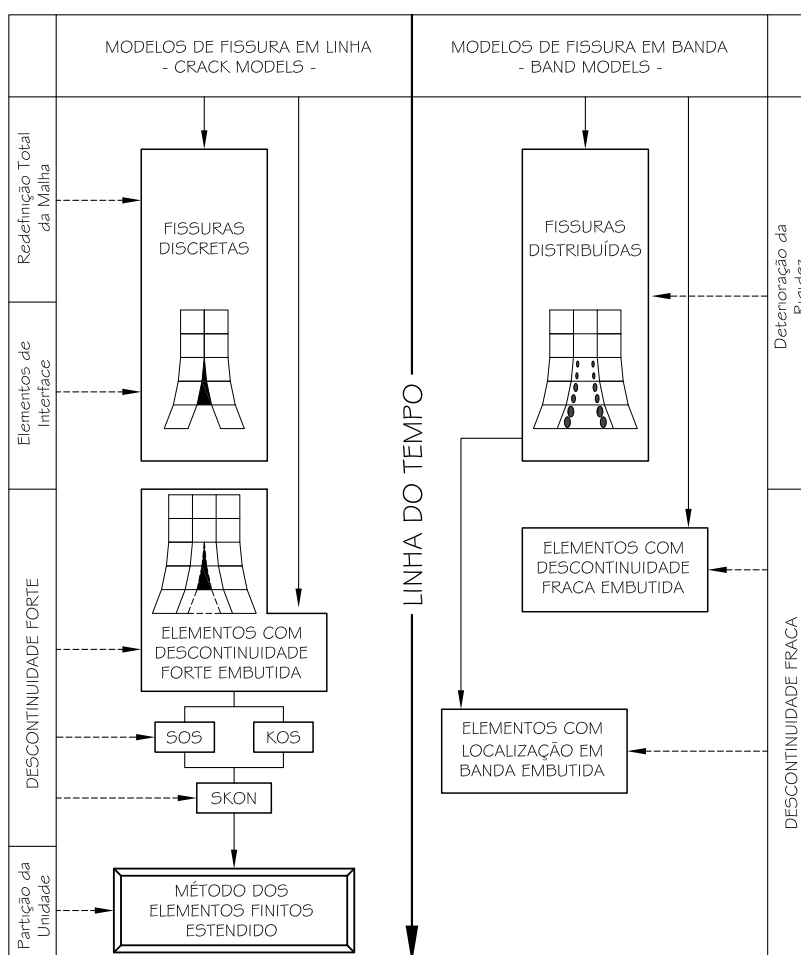
de liberdade em um contexto local, associados ao elemento enriquecido apenas. Daí pertencerem ao grupo de *enriquecimento de elementos*.

Já o grupo de *enriquecimento de nós* multiplica a função de Heaviside apenas pelas funções de forma padrão associadas aos nós do elemento enriquecido que são separados pela descontinuidade. Assim, o enriquecimento possui um caráter global, pois os graus de liberdade adicionais (que descrevem os deslocamentos entre as faces da descontinuidade) ficam associados aos nós enriquecidos. Por esse motivo, tais métodos são classificados como métodos cinemáticos de *enriquecimento de nós*.

Uma grande vantagem dessa técnica usada no XFEM é que a interpolação do campo de deslocamentos é conforme, sem apresentar incompatibilidades entre elementos, além do que as deformações em ambos os lados de uma fissura aberta são completamente equiparadas, o que não acontece com os elementos com descontinuidade embutida. Os graus de liberdade adicionais são globais, porém eles podem ser vinculados aos nós existentes na malha convencional de elementos finitos sem que haja a necessidade de mudança na topologia da mesma. Tais graus de liberdade são inseridos facilmente no conjunto de equações globais, e a matriz de rigidez resultante mantém seu caráter de banda. O método pode ser usado juntamente com os modelos de fissura coesiva, logo, devido à ausência de singularidade de tensões, não são necessários os enriquecimentos em torno da ponta da fissura; sendo que as funções de enriquecimento são construídas como produtos da função de Heaviside com as funções de forma convencionais daqueles elementos finitos que são cruzados pela fissura. Além disso, o modelo de fissura coesiva baseado no método da partição da unidade, além de superar as dificuldades associadas com a interpolação do campo de deslocamentos (existentes nos modelos de descontinuidades embutidas), pode também restaurar a simetria da matriz de rigidez (Jirásek, 2001).

### 3.3 Evolução dos Modelos Numéricos

Nesta seção, será apresentado um resumo simplificado da evolução dos principais modelos numéricos baseados no MEF que foram e ainda têm sido usados para representar o comportamento da região fissurada. O objetivo desse resumo é justificar a escolha do XFEM para a descrição numérica do modelo físico de fissura coesiva adotado neste trabalho. Assim, os modelos numéricos já abordados no capítulo 3 serão repassados de forma sequencial ao longo da linha do tempo (Figura 3.4), de acordo com o seu aparecimento e características principais.



**Figura 3.4:** Evolução dos principais modelos numéricos de elementos finitos usados para representar a zona de processo de fratura através da descontinuidade no campo de deslocamentos (lado esquerdo da linha do tempo) e através de deformações inelásticas (lado direito da linha do tempo).

No início da linha do tempo (Figura 3.4), os modelos numéricos baseados no Método dos Elementos Finitos, usados para o tratamento de fissuras coesivas, concentram-se em dois grandes grupos: os Modelos de Fissuras Discretas e os Modelos de Fissuras Distribuídas.

No primeiro grupo, o modelo de elementos finitos é reconstruído através da movimentação da malha a cada passo, fazendo com que os elementos de interface posicionados entre os elementos finitos coincidam com a descontinuidade. Os nós localizados nessas interfaces são duplicados e distribuídos para ambos os lados da descontinuidade, de tal maneira que a aproximação do campo de deslocamentos pode ser explicitamente descontínua ao longo da fissura.

Paralelamente, o segundo grupo, representado pelos modelos de fissuras distribuídas, possibilita uma representação implícita da descontinuidade na aproximação do campo de deformações. Assim, através da modificação da equação constitutiva, dada pela Lei *tensão coesiva*  $\times$  *abertura de fissura*, as tensões coesivas na fissura em banda são relacionadas a deformações inelásticas distribuídas pela largura da banda.

O uso dos modelos de fissuras distribuídas evita a redefinição da malha, aspecto presente nos modelos de fissuras discretas. Entretanto, os modelos de fissuras distribuídas produzem resultados com certa sensibilidade à malha: uma vez que a largura da banda de microfissuras é definida pelo tamanho do elemento finito padrão, o caminho da fissura fica limitado ao tamanho e ao arranjo dos elementos na malha, além do aspecto indesejável de variação dos resultados com o refinamento da malha.

Por esse motivo, os modelos numéricos posteriores aos modelos de fissuras discretas e distribuídas, na sequência da linha do tempo (Figura 3.4), propõem novas técnicas de aproximação, permitindo a resolução explícita de uma descontinuidade com trajetória arbitrária ao longo da malha de elementos finitos. Inicialmente, foi desenvolvida uma técnica de enriquecimento das aproximações dos elementos finitos por funções que permitissem a captura de uma descontinuidade fraca cruzando um elemento. Assim, capturou-se uma banda de *softening* entre duas linhas paralelas

de descontinuidade fraca (descontinuidade do campo de deformações) dentro de um simples elemento. Em seguida, tal ideia foi ampliada para a descontinuidade forte (descontinuidade do campo de deslocamentos). Esses modelos são conhecidos como Modelos de Descontinuidade Embutida.

Os modelos de descontinuidade embutida podem ser divididos em três grupos principais, conhecidos como *estaticamente otimizado e simétrico* (SOS), *cinematicamente otimizado e simétrico* (KOS) e *estatica e cinematicamente otimizado e não simétrico* (SKON). A formulação do SOS trabalha com uma condição natural de continuidade das tensões, porém não reproduz corretamente a cinemática de uma fissura completamente aberta. Por sua vez, a formulação do KOS descreve os aspectos cinemáticos de forma satisfatória, porém conduz a uma relação imprópria entre as tensões da parte não fissurada do elemento e as tensões coesivas ao longo da linha de descontinuidade. O desempenho ótimo é alcançado com a formulação não simétrica do SKON, que usa uma condição de continuidade de tensões bastante natural e representa a separação completa dos últimos estágios do processo de fissuração (Jirásek e Belytschko, 2002). Porém, apesar das vantagens da formulação do SKON, sua aplicação limita-se à modelagem de uma interface simples, com modos de descontinuidade uniformes no elemento (abertura normal e tangencial constantes). Dependendo da análise estrutural, um modo de descontinuidade não uniforme pode ser essencial para evitar distorções nos resultados numéricos (Manzoli e Shing, 2006). Um modelo de descontinuidade forte embutida que introduz um modo de descontinuidade não uniforme em um elemento finito padrão pode ser visto em Manzoli e Shing (2006).

Porém, apesar dos modelos de descontinuidade embutida apresentarem uma descrição cinemática do campo de deslocamentos descontínuo bem melhor que os modelos de fissuras distribuídas, eles também possuem algumas limitações. Assim, com a expectativa da superação de alguns aspectos negativos apresentados por esses modelos, desenvolveu-se o Método dos Elementos Finitos Estendido, o qual pode

ser considerado um caso particular do Método da Partição da Unidade (Melenk e Babuška, 1996). Apesar de não ser um método perfeito, o XFEM apresenta algumas características superiores em relação aos métodos anteriores, daí a escolha desse método para ser implementado neste trabalho. Particularmente, comparando-se a formulação dos elementos finitos estendidos com a formulação dos elementos com descontinuidade forte embutida, podem ser ressaltadas as diferenças indicadas na Figura 3.5 (Jirásek e Belytschko, 2002).

	Descontinuidade forte embutida	Elementos finitos estendidos
graus de liberdade adicionais associados com	elementos internos	nós globais
aproximação dos deslocamentos	não conforme	conforme
matriz de rigidez	sempre não simétrica	pode ser simétrica
deformações nas partes separadas	parcialmente vinculadas	independentes
esforço de implementação	pequeno	grande
robustez numérica	limitada	boa

**Figura 3.5:** Principais diferenças entre a formulação dos elementos finitos estendidos e a formulação dos elementos com descontinuidade forte embutida (Jirásek e Belytschko, 2002).

# Capítulo 4

## MODELO NUMÉRICO ADOTADO

### 4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é a descrição do modelo numérico adotado para a implementação do XFEM no núcleo numérico do **INSANE**. O XFEM é o método dos elementos finitos padrão acrescido de ferramentas complementares que permitem o tratamento numérico de diversos problemas aplicados da ciência dos materiais, principalmente na modelagem numérica de problemas com características de descontinuidades acentuadas que ocorrem em pequenas partes do domínio. Assim, o XFEM torna-se muito eficaz em aplicações que precisam descrever descontinuidades e singularidades no domínio, por isso tem sido usado nos campos da Mecânica da Fratura, Mecânica dos Sólidos Geral, Mecânica dos Flúidos e Biomecânica. Como exemplo de algumas aplicações específicas, podemos citar as aplicações da fratura de materiais, de defeitos cristalográficos e da interface entre fases (Belytschko et al., 2009). Esse método tem recebido recentemente muita atenção dos pesquisadores da área da Mecânica Computacional, por isso muitos avanços têm acontecido e muita discussão sobre o XFEM tem trazido cada vez mais luz sobre o método e suas aplicações.

Neste trabalho, o XFEM foi implementado no **INSANE**, com as ferramentas

necessárias à análise de propagação de fissuras coesivas, dentro do campo da Mecânica da Fratura Não Linear. Tal implementação baseou-se no modelo proposto por Wells e Sluys (2001), que foi escolhido por sua relação simples e direta com o modelo físico de fissura coesiva, usado por sua vez para a descrição da fissuração do concreto. Nessa implementação, uma macrofissura coesiva pode se propagar livremente pela malha de elementos finitos a partir de um ponto predeterminado. A fissura coesiva é inserida no contexto dos elementos finitos convencionais como uma entidade geométrica simples, um conjunto de segmentos de reta, capaz de transmitir tensões coesivas entre suas faces. O método foi implementado para o uso de elementos triangulares de seis nós em Estado Plano de Tensões.

Como o objetivo do **INSANE** é disponibilizar um ambiente de implementação amigável, escalável em complexidade e capaz de ser facilmente expandido para dar lugar a novas aplicações, foi usada a metodologia de implementação do XFEM sugerida por Bordas et al. (2006), na qual é descrita a estrutura geral de um código orientado a objeto para o uso em aplicações diversas do XFEM no campo da Mecânica da Fratura e Mecânica dos Sólidos. Dessa maneira, o XFEM foi implementado no **INSANE** dentro de uma estrutura modular, extensível e robusta. Logo, torna-se fácil o acréscimo de novas ferramentas que sejam necessárias ao XFEM para o tratamento de outros problemas que ainda não foram implementados no **INSANE**.

As próximas seções deste capítulo descrevem o modelo de Wells e Sluys (2001). Inicialmente, na seção 4.2, é descrita a cinemática do salto no campo de deslocamentos que é inserido na base de interpolação dos elementos cruzados pela fissura. Em seguida, na seção 4.3, é feita a generalização do campo de deslocamentos, baseando-se no Método de Partição da Unidade (Melenk e Babuška, 1996), para possibilitar a inclusão das funções descontínuas na formulação. Logo depois, na seção 4.4, a partir da inclusão das funções de interpolação enriquecidas na equação dos trabalhos virtuais, as matrizes de rigidez e os vetores de força são redefinidos para levar em conta a presença da descontinuidade no campo de deslocamentos. Na seção 4.5, o modelo



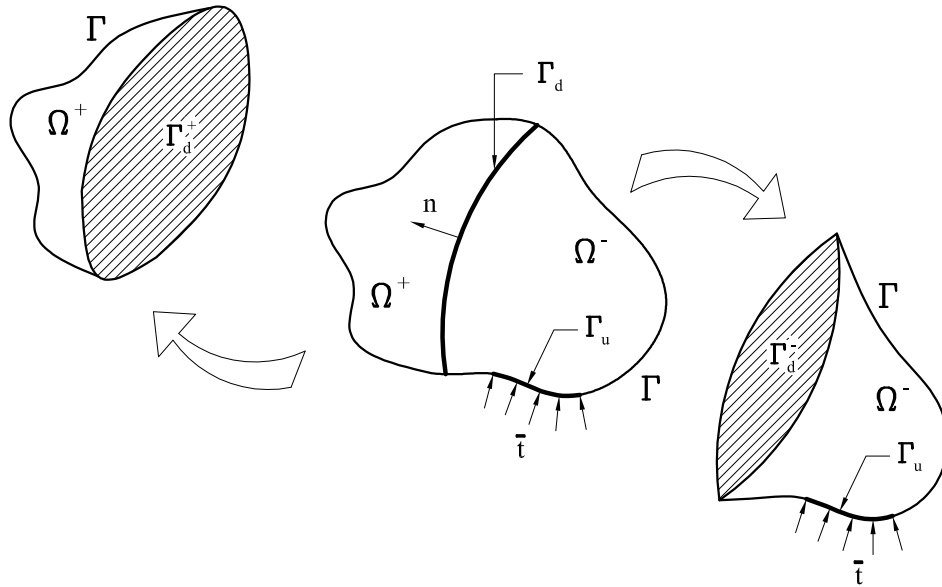
constitutivo é definido, e é deduzida a matriz tangente constitutiva não elástica, que contém a lei coesiva que rege o domínio fissurado. Finalmente, na seção 4.6, os principais aspectos da implementação do modelo numérico de fissuras coesivas baseado no XFEM são abordados.

## 4.2 Cinemática do Salto de Deslocamentos

Considerando-se o sólido  $\Omega (\Omega^+ \cup \Omega^-)$ , mostrado na Figura 4.1, o campo de deslocamentos  $u$  pode ser decomposto em duas partes, uma contínua e a outra descontínua:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\Gamma_d} [\llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rrbracket] \quad , \quad (4.1)$$

em que  $\hat{\mathbf{u}}$  e  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  são funções contínuas em  $\Omega$ , e  $\mathcal{H}_{\Gamma_d}$  é a função de Heaviside<sup>1</sup> centralizada na descontinuidade  $\Gamma_d$  ( $\mathcal{H}_{\Gamma_d} = 1$  se  $\mathbf{x} \in \Omega^+$ ,  $\mathcal{H}_{\Gamma_d} = 0$  se  $\mathbf{x} \in \Omega^-$ ). Os componentes do salto de deslocamentos na descontinuidade são dados por  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{\mathbf{x} \in \Gamma_d}$ .



**Figura 4.1:** Corpo  $\Omega$  cortado por uma descontinuidade  $\Gamma_d$  (Wells e Sluys, 2001).

<sup>1</sup>Oliver Heaviside (1850 – 1925), nascido na Inglaterra, foi um engenheiro eletricitista autodidata, matemático e físico. Em Matemática e Estatística, a função de Heaviside (função degrau) é a função descontínua de valor 0 para argumento negativo, e 1 para argumento positivo.

Para encontrar o campo de deformações do corpo  $\Omega$ , cruzado pela descontinuidade, basta que o gradiente da equação 4.1 seja calculado. Logo,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \nabla^s \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d}(\nabla^s [\mathbf{u}]) + (\nabla \mathcal{H}_{\Gamma_d} \otimes [\mathbf{u}])^s \\ &= \underbrace{\nabla^s \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d}(\nabla^s [\mathbf{u}])}_{\text{limitado}} + \underbrace{\delta_{\Gamma_d}([\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s}_{\text{não-limitado}} \quad ,\end{aligned}\quad (4.2)$$

em que  $\delta_{\Gamma_d}$  é a função delta de Dirac<sup>2</sup> centralizada na descontinuidade,  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário da superfície de descontinuidade (apontando para  $\Omega^+$ ) e o operador  $\otimes$  é o produto de Kronecker<sup>3</sup>. Como todas as deformações são consideradas infinitesimais, a simbologia  $()^s$  indica que somente a parte simétrica dos tensores está sendo considerada. A função delta de Dirac aparece no campo de deformações devido ao salto imposto no campo de deslocamentos. Uma vez que a função delta de Dirac não é limitada (tem valor infinito), torna-se impossível dar um sentido físico a ela; entretanto, ela se tornará muito útil posteriormente, quando for necessária a inserção do campo de deformações na equação dos trabalhos virtuais.

### 4.3 Um Caso Particular das Funções de Partição da Unidade

De forma simplificada, pode-se considerar que um conjunto de funções  $\varphi_i(\mathbf{x})$ , cada qual pertencendo a um nó, definidas ao longo de um corpo  $\Omega$  ( $\mathbf{x} \in \Omega$ ), formam uma partição da unidade se:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}) = 1 \quad ,\quad (4.3)$$

<sup>2</sup>O delta de Dirac é uma distribuição ou medida matemática introduzida pelo físico teórico Paul Dirac. Informalmente, é uma função generalizada  $\delta(x)$  que vale zero para qualquer  $x$ , exceto para  $x = 0$ , onde seu valor tende ao infinito, de tal maneira que o valor total de sua integral vale 1.

<sup>3</sup>Sejam as matrizes  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ . Então, o produto de Kronecker de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  é definido como a matriz

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq} \quad .$$

em que  $n$  é o número de pontos nodais. Demonstra-se que um campo qualquer pode ser interpolado em termos de valores nodais usando partições da unidade. Através do uso das funções  $\varphi_i$ , a interpolação de um campo de deslocamentos  $u(x)$  ao longo do corpo pode ser construída por

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i^k(\mathbf{x}) \left( a_i + \sum_{j=1}^m b_{ij} \gamma_j(\mathbf{x}) \right) \quad , \quad (4.4)$$

em que  $\varphi_i^k$  são funções de partição da unidade de ordem  $k$  (para funções de partição da unidade polinomiais,  $k$  indica a ordem do polinômio),  $a_i$  são os graus de liberdade regulares do nó,  $b_{ij}$  são os graus de liberdade adicionais e  $\gamma_j$  é a base adicional composta de  $m$  termos. Para que a dependência linear seja evitada, a ordem de qualquer um dos termos polinomiais da base adicional deve ser maior que  $k$ .

No caso de elementos finitos padrão, suas funções de forma também podem ser consideradas como casos particulares de partições da unidade, uma vez que

$$\sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) = 1 \quad , \quad (4.5)$$

em que  $N_i$  são as funções de forma de elementos finitos padrão. Assim, a interpolação do campo de deslocamentos de um elemento finito padrão pode ser vista como um caso particular da equação 4.4 se as funções de partição da unidade  $\varphi_i(\mathbf{x})$  forem substituídas pelas funções de forma; a ordem da função de partição da unidade for tomada igual à ordem polinomial das funções de forma e a base adicional for nula. Logo, não há razão para que a base adicional não possa ser usada com elementos finitos padrão. A equação 4.4 garante uma interpolação bem-sucedida adicionando-se ao termo da base convencional de elementos finitos (funções de forma) os termos relacionados à base adicional  $\gamma_j$ . Assim, usando-se a notação de elementos finitos e aproveitando-se a propriedade da partição da unidade, a interpolação do campo de deslocamentos pode ser escrita como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{a}}_{\text{termo convencional}} + \underbrace{\mathbf{N}(\mathbf{x})(\mathbf{N}_\gamma(\mathbf{x})\mathbf{b})}_{\text{termo adicional}} \quad , \quad (4.6)$$

em que  $\mathbf{N}$  é a matriz que contém as funções de forma (polinomiais) usuais de ordem  $k$ ,  $\mathbf{a}$  é o vetor que contém os graus de liberdade nodais convencionais,  $\mathbf{N}_\gamma$  é a matriz que contém os termos da base adicional e  $\mathbf{b}$  é o vetor que contém os graus de liberdade nodais adicionais. O número de graus de liberdade adicionais por nó é igual ao número de termos na base adicional multiplicado pela dimensão espacial. O vetor campo de deformações em função dos deslocamentos nodais pode então ser escrito como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{a} + \mathbf{B}_\gamma \mathbf{b} \quad , \quad (4.7)$$

em que  $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$  e  $\mathbf{B}_\gamma = \mathbf{L}(\mathbf{N}\mathbf{N}_\gamma)$ . A matriz  $\mathbf{L}$  contém os operadores diferenciais e é dada, para o caso tridimensional, por:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} . \quad (4.8)$$

Assim, a base adicional pode ser usada para melhorar a interpolação do campo de deslocamentos. O aspecto crítico da interpolação na equação 4.6 é o fato de que ela é construída em uma base “nó a nó”, isto é, cada nó precisa ser tratado individualmente. Apesar desse aspecto dificultar um pouco a implementação, é possível aplicar a base adicional aos nós de forma individual. Logo, a solução pode ser aperfeiçoada sem que a malha original de elementos finitos seja modificada.

A seguir, para que o campo de deslocamentos possa incluir uma descontinuidade, acrescenta-se uma função descontínua na base adicional. Examinando-se a decomposição do campo de deslocamentos dada pela equação 4.1, conclui-se que essa tem

forma similar à interpolação do campo de deslocamentos dado pela equação 4.6. A matriz  $\mathbf{N}$  e os graus de liberdade regulares dados pelo vetor  $\mathbf{a}$  representam a parcela contínua  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ , enquanto o produto matricial  $\mathbf{N}\mathbf{N}_\gamma$ , juntamente com os graus de liberdade adicionais dados pelo vetor  $\mathbf{b}$ , representam a parcela descontínua  $\mathcal{H}_{\Gamma_d} \llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rrbracket$ . Adicionalmente, para a parte descontínua, a função contínua  $\llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rrbracket$  é interpolada por  $\mathbf{N}$  e a função de Heaviside  $\mathcal{H}_{\Gamma_d}$  fica embutida dentro da matriz  $\mathbf{N}_\gamma$ . Inserindo-se a função de Heaviside na base adicional da equação 4.6, o *campo de deslocamentos* para um elemento finito ao qual se acrescentam os graus de liberdade adicionais pode ser escrito como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{a}}_{\hat{\mathbf{u}}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d} \underbrace{\mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{b}}_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} . \quad (4.9)$$

De forma análoga, o *campo de deformações* de um elemento finito, onde os graus de liberdade adicionais são ativados, pode ser expresso por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a} + \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{B}\mathbf{b} + (\delta_{\Gamma_d} \mathbf{n})\mathbf{N}\mathbf{b} , \quad (4.10)$$

em que  $\mathbf{n}$  é a matriz que contém os componentes do vetor normal à superfície de descontinuidade, dada por:

$$\mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} . \quad (4.11)$$

Efetivamente, os graus de liberdade regulares  $\mathbf{a}$  representam a parte contínua, enquanto os graus de liberdade adicionais  $\mathbf{b}$  representam o salto de deslocamentos ao longo da descontinuidade. O acréscimo da função de Heaviside  $\mathcal{H}$  à base adicional dos elementos finitos resulta em um salto de deslocamentos ao longo da descontinuidade. Esse salto dos deslocamentos é da mesma ordem polinomial que as funções de forma.

## 4.4 Formulação Variacional

A equação dos trabalhos virtuais, sem considerar-se as forças de corpo, é dada por:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\eta} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad , \quad (4.12)$$

em que  $\boldsymbol{\eta}$  são as *variações* admissíveis de deslocamentos,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o campo de tensões e  $\bar{\mathbf{t}}$  são as forças relacionadas às tensões externas aplicadas no contorno  $\Gamma_u$ . Inserindo-se o campo de deformações da equação 4.2 na equação dos trabalhos virtuais, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \hat{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{H}_{\Gamma_d} (\nabla^s \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta_{\Gamma_d} (\llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket \otimes \mathbf{n})^s : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma_u} \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma . \quad (4.13)$$

Uma condição imposta por razões práticas à parcela adicional do campo de deslocamentos  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ , é que ela seja nula onde as condições de contorno naturais e essenciais são prescritas (em  $\Gamma_u$ ). Esta condição simplifica o método e evita o aparecimento de  $\llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket$  no lado direito da igualdade na equação 4.13. Assim, integrando-se a função delta de Dirac na equação 4.13 ao longo do corpo  $\Omega$ , o termo não limitado desaparece (por definição, a integral da função delta de Dirac tem valor unitário), obtendo-se:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \hat{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{H}_{\Gamma_d} (\nabla^s \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_d} \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket_{\Gamma_d} \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad , \quad (4.14)$$

em que  $\mathbf{t} = (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})_{\Gamma_d}$  são as forças relativas às tensões coesivas agindo na descontinuidade (fissura).

Tomando-se apenas as variações  $\llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket$ , a função de Heaviside  $\mathcal{H}_{\Gamma_d}$  pode ser eliminada da equação 4.14 pela integração somente em  $\Omega^+$  ( $\mathcal{H}_{\Gamma_d} = 1$  se  $\mathbf{x} \in \Omega^+$ ).

Assim:

$$\int_{\Omega^+} (\nabla^s \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_d} \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket_{\Gamma_d} \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma = 0 \quad . \quad (4.15)$$

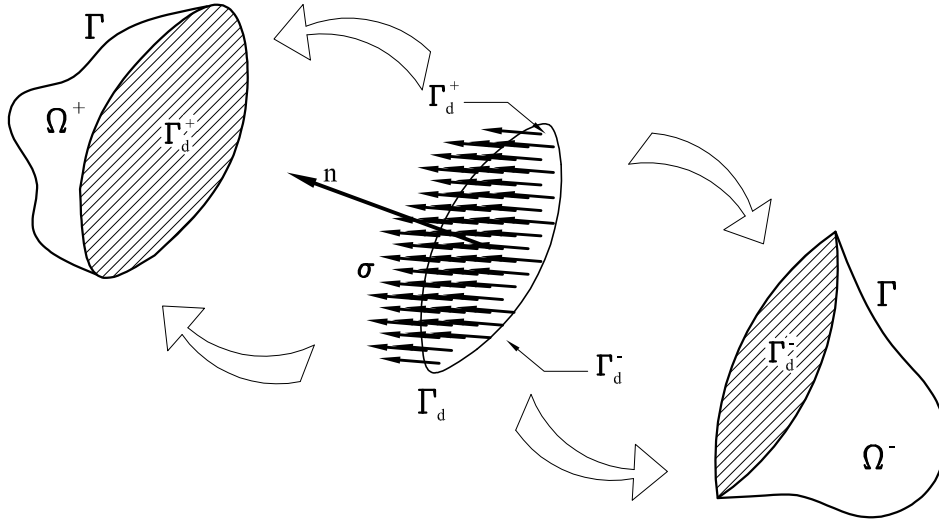
A equação 4.15 assegura que a continuidade das tensões coesivas seja satisfeita no nível variacional, ou no nível das deformações.

Em seguida, definindo-se  $\Gamma_d^+$  e  $\Gamma_d^-$  como as superfícies da descontinuidade  $\Gamma_d$  dos lados  $\Omega^+$  e  $\Omega^-$ , respectivamente (ver Figura 4.1), pode-se concluir, a partir da

decomposição dos deslocamentos na equação 4.1, que a contribuição de  $[[\boldsymbol{\eta}]]$  é sempre zero sobre a superfície  $\Gamma_d^-$  ( $\mathcal{H}_{\Gamma_d} = 0$  se  $\mathbf{x} \in \Omega^-$ ) e pode ser diferente de zero na superfície  $\Gamma_d^+$ . Assim:

$$\int_{\Omega^+} (\nabla^s [[\boldsymbol{\eta}]]) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_d^+} [[\boldsymbol{\eta}]]_{\Gamma_d} \cdot \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad . \quad (4.16)$$

Como consequência, pode-se concluir da equação 4.16 que as forças relativas às tensões coesivas agindo na descontinuidade  $\Gamma_d$  estão atuando em  $\Gamma_d^+$  (ver Figura 4.2) e sofrem resistência de uma força equivalente no volume contínuo  $\Omega^+$ .



**Figura 4.2:** Forças relativas às tensões coesivas agindo na descontinuidade  $\Gamma_d$ :  $\mathbf{t} = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})_{\Gamma_d}$  (Wells e Sluys, 2001).

A seguir, para que a **matriz de rigidez** e o **vetor de forças internas** sejam obtidos, as interpolações devem ser inseridas na equação dos trabalhos virtuais. Assim, da equação 4.9, as variações  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  e  $[[\boldsymbol{\eta}]]$ , em termos das variações dos deslocamentos nodais, podem ser escritas como:

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{N}\mathbf{a}' \quad (4.17a)$$

$$[[\boldsymbol{\eta}]] = \mathbf{N}\mathbf{b}' \quad , \quad (4.17b)$$

em que  $\mathbf{a}'$  e  $\mathbf{b}'$  são as *variações* dos graus de liberdade nodais  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , respectivamente. O gradiente das variações  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  e  $[[\boldsymbol{\eta}]]$  pode ser escrito na forma discreta como:

$$\nabla^s \hat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{LNa}' = \mathbf{Ba}' \quad (4.18a)$$

$$\nabla^s [[\boldsymbol{\eta}]] = \mathbf{LNb}' = \mathbf{Bb}' \quad . \quad (4.18b)$$

Inserindo-se a forma discreta das variações dos deslocamentos nodais na equação 4.14 e separando-se os termos relativos a  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  e  $[[\boldsymbol{\eta}]]$  na forma de um sistema de equações, têm-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (4.19a)$$

$$\int_{\Omega^*} \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma = \mathbf{0} \quad , \quad (4.19b)$$

em que o domínio de integração da primeira integral na equação (4.19b) é  $\Omega^*$ , o que indica que o domínio de integração considera as partes do corpo  $\Omega$ , no qual  $[[\boldsymbol{\eta}]]$  é diferente de zero.

A partir das equações (4.19), as forças nodais equivalentes correspondentes às variações dos graus de liberdade regulares  $\mathbf{a}$  e dos graus de liberdade adicionais  $\mathbf{b}$  são escritas como:

$$\mathbf{f}_a^{\text{int}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (4.20a)$$

$$\mathbf{f}_b^{\text{int}} = \int_{\Omega^*} \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad , \quad (4.20b)$$

em que os subscritos “a” e “b” denotam as variações das partes regulares e adicionais, respectivamente.

O vetor de forças internas  $\mathbf{f}_a^{\text{int}}$  na equação (4.20a) tem a mesma forma do vetor de forças internas usual dos elementos finitos, enquanto o vetor de forças internas  $\mathbf{f}_b^{\text{int}}$  na equação (4.20b) precisa ser zero (ver equação (4.15)), impondo-se a continuidade das tensões coesivas no nível variacional. Para desenvolver-se um procedimento incremental da solução de maneira eficiente, as relações constitutivas devem ser colocadas na forma de taxa ou razão. A taxa de tensões no domínio do contínuo



pode ser expressa, em termos das velocidades dos deslocamentos nodais regulares, como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{a}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d}\mathbf{B}\dot{\mathbf{b}}) \quad , \quad (4.21)$$

em que  $\mathbf{D}$  corresponde à relação instantânea entre as tensões e as deformações.

De forma similar, a taxa de tensões coesivas na descontinuidade pode ser expressa, em termos das velocidades dos deslocamentos nodais adicionais, como:

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{T}[[\dot{\mathbf{u}}]] = \mathbf{T}\mathbf{N}\dot{\mathbf{b}} \quad , \quad (4.22)$$

em que  $\mathbf{T}$  corresponde à relação instantânea entre as tensões coesivas e os deslocamentos na descontinuidade ou fissura.

A substituição da taxa de tensões e da taxa de tensões coesivas na equação discreta dos trabalhos virtuais, dada pela equação (4.19), conduz à obtenção da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  em função dos deslocamentos incrementais  $(d\mathbf{a}, d\mathbf{b})$ ,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega^*} \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \\ \int_{\Omega^*} \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega^*} \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \mathbf{T} \mathbf{N} d\Gamma \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} d\mathbf{a} \\ d\mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{\text{ext}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a^{\text{int}} \\ \mathbf{f}_b^{\text{int}} \end{Bmatrix} \quad , \quad (4.23)$$

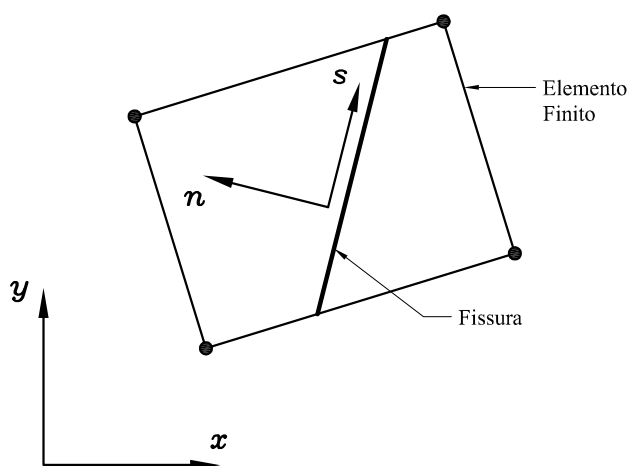
em que  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$  é a matriz das forças externas aplicadas no contorno externo  $\Gamma_u$  (ver o lado direito da igualdade na equação (4.19a)), dada por:

$$\mathbf{f}^{\text{ext}} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad . \quad (4.24)$$

## 4.5 Modelo Constitutivo Discretizado

O modelo constitutivo discretizado (relação entre as tensões e os deslocamentos no caminho da fissura) baseia-se no conceito de fissura coesiva ou fictícia, em particular no modelo de fissura fictícia de Hillerborg, no qual todas as deformações inelásticas (aquelas que ocorrem na zona de processo de fratura) são representadas

em uma linha através das forças coesivas que agem na fissura, ou em uma extensão fictícia da fissura. O modelo constitutivo é definido por um sistema de coordenadas local, ortogonal, no qual os vetores  $n$  e  $s$  representam as direções normal e paralela à fissura, respectivamente (Figura 4.3). No restante do domínio não fissurado da amostra, considera-se que o material possui comportamento elástico. Assim, a relação instantânea entre as tensões e as deformações  $\mathbf{D}$ , dada na equação (4.21), é a tangente constitutiva elástica.



**Figura 4.3:** Sistema de coordenadas locais da descontinuidade dentro de um elemento finito (Wells e Sluys, 2001).

A relação instantânea entre as tensões coesivas e os deslocamentos na região da fissura  $\mathbf{T}$ , em duas dimensões, é definida como uma rigidez tangente, podendo ser chamada de tangente constitutiva não elástica. Esta, por sua vez, considera que o dano na região da fissura envolve os modos I e II de abertura de fissura, ou tração e cisalhamento, respectivamente. Logo, para a definição da tangente constitutiva não elástica  $\mathbf{T}$ , consideram-se as tensões coesivas normais e tangenciais entre as superfícies da fissura como funções dependentes da separação normal entre as superfícies da fissura.

Inicialmente, define-se a função de carregamento  $f$ , dada por:

$$f(\llbracket u \rrbracket_n, \kappa) = \llbracket u \rrbracket_n - \kappa \quad , \quad (4.25)$$

em que  $\llbracket u \rrbracket_n$  é a separação normal entre as superfícies fissuradas (deslocamento positivo indica abertura da fissura) e  $\kappa$  é um parâmetro histórico, dado pelo maior valor de  $\llbracket u \rrbracket_n$  alcançado até o ponto atual da análise. Quando o carregamento é incrementado, ocorre o aumento da abertura da fissura, indicado por  $f \geq 0$ . Por outro lado, se houver descarregamento, com o respectivo “fechamento” da fissura, então  $f < 0$ . Uma fissura fechada é indicada por  $\llbracket u \rrbracket_n < 0$ . Em seguida, definem-se a tensão coesiva normal  $t_n$  e a tensão coesiva tangencial  $t_s$ .

A tensão coesiva normal  $t_n$ , transmitida ao longo da descontinuidade, é aproximada por uma função exponencial decrescente do parâmetro histórico  $\kappa$ :

$$t_n = f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \quad , \quad (4.26)$$

em que  $f_t$  é a resistência à tração do material e  $G_f$  é a energia de fratura, aqui considerada como uma propriedade constante do material.

Considera-se que a rigidez da fissura ao cisalhamento também seja uma função do parâmetro histórico. Assim, define-se a tensão coesiva tangencial  $t_s$ , que age nas superfícies da descontinuidade, como:

$$t_s = d_{\text{int}} \exp(h_s \kappa) \llbracket u \rrbracket_s \quad , \quad (4.27)$$

na qual  $d_{\text{int}}$  é a rigidez inicial da fissura ao cisalhamento (quando  $\kappa = 0$ ),  $\llbracket u \rrbracket_s$  é o deslocamento tangencial da fissura e  $h_s$  é dado por:

$$h_s = \ln(d_{\kappa=1.0}/d_{\text{int}}) \quad , \quad (4.28)$$

em que  $d_{\kappa=1.0}$  é a rigidez da fissura ao cisalhamento quando  $\kappa = 1.0$ . O comportamento de *softening* na interface é dirigido somente pela separação normal entre as superfícies fissuradas, sem considerar o fato de que, à medida que as superfícies da fissura se separam, a rigidez da fissura ao cisalhamento tende a zero.

Finalmente, para a obtenção da tangente constitutiva não elástica  $\mathbf{T}$ , tomam-se os diferenciais das equações anteriores (equação (4.26) e equação (4.27)) em relação ao tempo e forma-se a tangente constitutiva não elástica linearizada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} t_n &= \dot{t}_n = -\frac{f_t^2}{G_f} \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \frac{\partial}{\partial t} \overbrace{\llbracket u \rrbracket_n}^{\kappa} = -\frac{f_t^2}{G_f} \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \llbracket \dot{u} \rrbracket_n \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{t}_n = -\frac{f_t^2}{G_f} \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \llbracket \dot{u} \rrbracket_n \\ \\ \frac{\partial}{\partial t} t_s &= \dot{t}_s = h_s d_{\text{int}} \exp(h_s \kappa) \frac{\partial}{\partial t} \overbrace{\llbracket u \rrbracket_s}^{\kappa} + d_{\text{int}} \exp(h_s \kappa) \frac{\partial}{\partial t} \llbracket u \rrbracket_s = \\ &= h_s d_{\text{int}} \exp(h_s \kappa) \llbracket \dot{u} \rrbracket_n \llbracket u \rrbracket_s + d_{\text{int}} \exp(h_s \kappa) \llbracket \dot{u} \rrbracket_s \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{t}_s = h_s d_{\text{int}} \exp(h_s \kappa) \llbracket u \rrbracket_s \llbracket \dot{u} \rrbracket_n + d_{\text{int}} \exp(h_s \kappa) \llbracket \dot{u} \rrbracket_s \\ \\ \therefore \begin{Bmatrix} \dot{t}_n \\ \dot{t}_s \end{Bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{f_t^2}{G_f} \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) & 0 \\ h_s d_{\text{int}} \exp(h_s \kappa) \llbracket u \rrbracket_s & d_{\text{int}} \exp(h_s \kappa) \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{Bmatrix} \llbracket \dot{u} \rrbracket_n \\ \llbracket \dot{u} \rrbracket_s \end{Bmatrix} . \quad (4.29) \end{aligned}$$

Nota-se que a dependência da *rigidez da fissura ao cisalhamento* em relação à separação da fissura na direção normal  $n$  produz uma tangente constitutiva  $\mathbf{T}$  não simétrica. Assim, pode ser adotada uma simplificação do modelo acima exposto, com uma vantagem computacional significativa, fazendo-se a *rigidez da fissura ao cisalhamento* um valor constante. O benefício imediato é que a tangente constitutiva não linear  $\mathbf{T}$  torna-se simétrica; como consequência, a matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$  também será simétrica:

$$\begin{aligned} t_s &= \underbrace{d_{\text{int}} \exp(h_s \kappa)}_{\text{constante arbitrária}} \llbracket u \rrbracket_s \\ \dot{t}_s &= d_{\text{int}} \exp(h_s \kappa) \llbracket \dot{u} \rrbracket_s \\ \\ \therefore \begin{Bmatrix} \dot{t}_n \\ \dot{t}_s \end{Bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{f_t^2}{G_f} \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) & 0 \\ 0 & d_{\text{int}} \exp(h_s \kappa) \end{bmatrix}}^{\text{Rigidez da fissura ao cisalhamento} = \text{constante}} \begin{Bmatrix} \llbracket \dot{u} \rrbracket_n \\ \llbracket \dot{u} \rrbracket_s \end{Bmatrix} . \quad (4.30) \end{aligned}$$

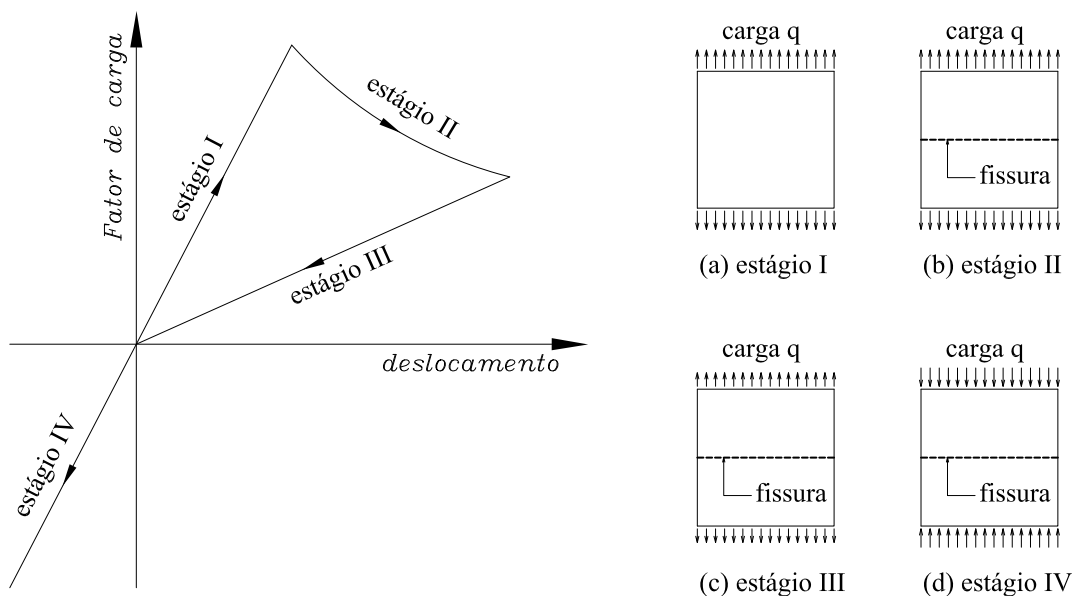
O risco que se corre ao se usar a *rigidez da fissura ao cisalhamento* constante é que, se essa é feita muito pequena, será prevista uma resposta global pós-limite excessivamente frágil. Por outro lado, se a rigidez da fissura ao cisalhamento é feita muito grande, será observado um fechamento excessivo da fissura (tensões coesivas oferecendo muita resistência à abertura da fissura).

O comportamento de *descarregamento* na descontinuidade é simulado através da rigidez secante  $\mathbf{S}$ . Esta última é calculada fazendo-se todos os termos fora da diagonal principal da matriz  $\mathbf{T}$  iguais a zero e trocando-se o termo  $(1, 1)$  da matriz  $\mathbf{T}$  por  $(f_t \exp((-f_t/G_f) \kappa)/\kappa)$ . Assim:

$$\begin{Bmatrix} t_n \\ t_s \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{f_t}{\kappa} \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) & 0 \\ 0 & d_{\text{int}} \exp(h_s \kappa) \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \begin{Bmatrix} \llbracket u \rrbracket_n \\ \llbracket u \rrbracket_s \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Quando uma fissura que anteriormente estava aberta volta a estar completamente fechada ( $\llbracket u \rrbracket_n < 0$  e  $f < 0$ ), assume-se que os termos de rigidez normal e tangencial retomam seu valor, recuperando a rigidez na região da descontinuidade e tornando-a elástica. Assim, para que um elemento que possui uma fissura fechada e, conseqüentemente, possui os termos adicionais de deslocamento referentes à descontinuidade possa voltar a possuir um comportamento elástico, usam-se valores muito altos para a rigidez da fissura nas direções  $n$  e  $s$ . Como consequência, os deslocamentos adicionais da fissura antes aberta e agora fechada tendem a zero, enquanto os deslocamentos normais continuam vinculados à tangente constitutiva elástica  $\mathbf{D}$ . O fato de  $\llbracket u \rrbracket_n$  ser negativo implica fisicamente que as duas superfícies da fissura estão empurrando-se simultaneamente uma em direção oposta à outra.

Para ilustrar o efeito das relações constitutivas aqui descritas, mostra-se na Figura 4.4 a resposta de de uma chapa sujeita a carregamento e descarregamento em tração e, logo em seguida, carregamento em compressão.



**Figura 4.4:** Resposta de uma chapa à condição de carregamento e descarregamento em tração, seguido de carregamento em compressão: (a) estágio I – carregamento em tração: incremento da carga  $q$  de tração – chapa sem fissura, (b) estágio II – carregamento em tração: incremento da carga  $q$  de tração – chapa com fissura, (c) estágio III – descarregamento em tração: decremento da carga  $q$  de tração – chapa com fissura e (d) estágio IV – carregamento em compressão: incremento da carga  $q$  de compressão – chapa com fissura.

## 4.6 Implementação Computacional

O procedimento numérico implementado neste trabalho usa apenas o triângulo de seis nós como o elemento finito base. Nada impede, porém, que posteriormente seja implementado para os demais elementos planos existentes no INSANE.

Durante o cálculo, as tensões principais de tração são verificadas em todos os pontos de integração do elemento logo adiante da ponta da descontinuidade, ao final de um incremento de carga. Se a tensão principal máxima de tração em qualquer dos pontos de integração do elemento adiante da ponta da fissura excede o valor da resistência à tração do material, introduz-se uma descontinuidade através de todo o elemento. Uma vez que o concreto possui baixa resistência à tração, alinha-se a

normal à descontinuidade (vetor  $n$ ) com a tensão principal máxima de tração. Assim, no final de um passo de carregamento, se em um ponto de integração qualquer o valor da tensão principal máxima de tração ultrapassar o valor da resistência à tração do material, uma descontinuidade é introduzida. A descontinuidade é introduzida apenas no final do incremento de carga, uma vez que torna-se indesejável a introdução de uma descontinuidade em um sistema não equilibrado.

As descontinuidades são introduzidas como linhas retas dentro dos elementos (o vetor  $n$  normal à descontinuidade é uma constante dentro de cada elemento). Uma vez que, no contexto teórico de fissura coesiva, a energia total de fratura é dissipada com a separação entre as superfícies fissuradas e não com a criação dessas superfícies (como é tratada na Mecânica da Fratura Linear-Elástica), o resultado numérico do método aqui descrito não é particularmente sensível a quando exatamente uma descontinuidade é estendida, ou mesmo a qual o valor do comprimento dessa extensão. É possível (e inevitável sob o refinamento da malha) que uma descontinuidade propague-se por mais de um elemento finito ao final de um incremento de carga. A introdução de uma descontinuidade através de um elemento inteiro pode conduzir a saltos de tensão na introdução da descontinuidade, porém, a experiência indica que isso não tem influência na robustez do algoritmo, além do que, sob o refinamento da malha, os saltos de tensão tendem a ser minimizados. Por outro lado, tais saltos de tensão podem trazer problemas no cálculo da direção correta de propagação da fissura, uma vez que esse cálculo depende dos valores das tensões que se desenvolvem nas proximidades da ponta da fissura. Esse problema é tratado posteriormente, no capítulo 5, na seção 5.4.2.

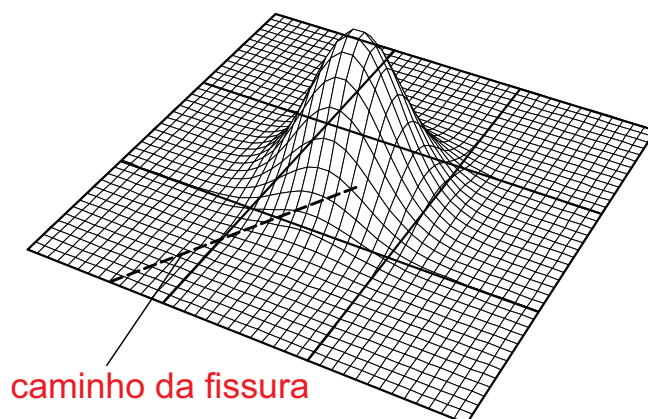
Diferente de outros modelos, nesse modelo, uma fissura precisa propagar-se a partir de um ponto discreto. Então, existem duas formas de uma fissura começar: a primeira é pela escolha de um ponto antes do início do cálculo e a segunda é executando um passo de carregamento elástico em toda a estrutura e verificando onde exatamente as tensões principais são maiores. Na implementação feita neste

trabalho, a fissura se propaga a partir de um ponto escolhido antecipadamente, que deve ser informado na entrada de dados do programa.

A consideração mais importante na propagação da descontinuidade é a escolha correta da direção da mesma. Uma vez que, normalmente, a ponta da descontinuidade não se localiza em um ponto onde as tensões são conhecidas com precisão (como nos pontos de Gauss), o campo de tensões local não é confiável para produzir com precisão o vetor normal à descontinuidade de forma correta. Para superar esse problema, tensões não locais são calculadas na ponta de uma descontinuidade para serem usadas na definição das direções principais. O tensor de tensões não local é calculado como uma média ponderada das tensões, usando uma função de peso Gaussiana:

$$w = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} l^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) \quad , \quad (4.32)$$

em que  $w$  é o peso,  $l$  determina quão rapidamente a função de peso diminui longe da ponta da descontinuidade e  $r$  é a distância de um ponto até a ponta da fissura (ver Figura 4.5).



**Figura 4.5:** Função de peso gaussiana (Dumstorff e Meschke, 2007).

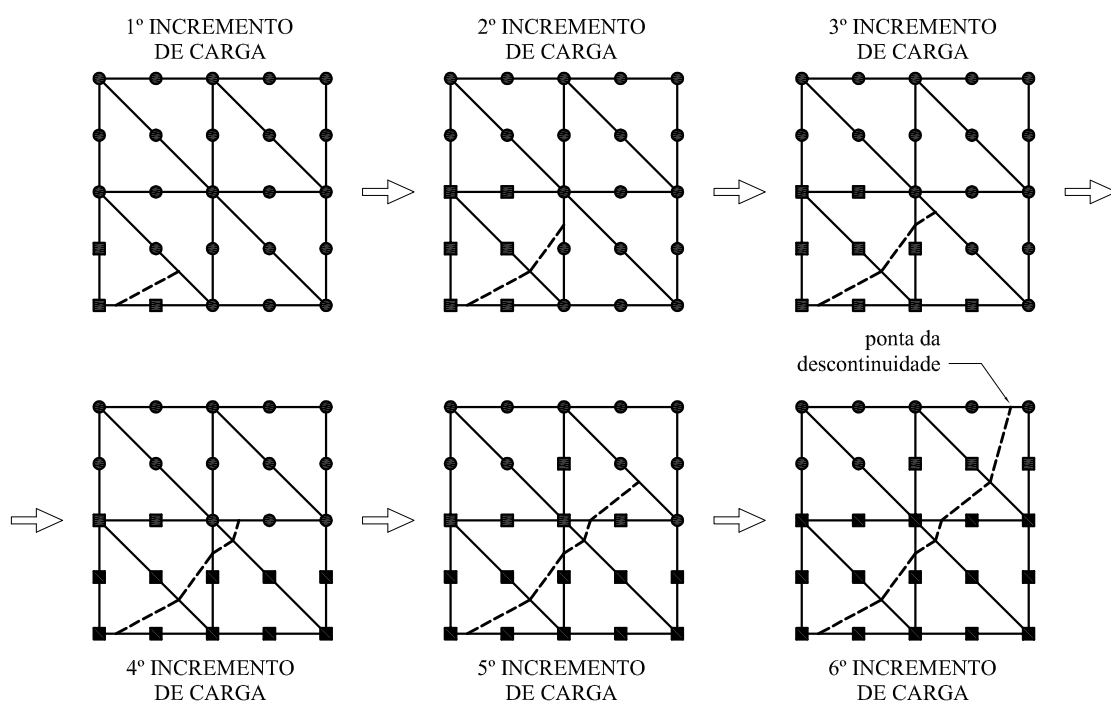
Ressalta-se que o uso da função de peso não implica em uma não localidade no modelo, mas é um método para regularizar as tensões locais, de modo a definir com maior precisão a direção das tensões principais. Considera-se que o parâmetro  $l$  tem valor igual a aproximadamente três vezes o tamanho típico do elemento. Alguns



pesquisadores comprovaram que o uso de uma medida não local para a determinação da direção de propagação da descontinuidade conduz a uma previsão mais confiável do caminho da fissura.

Até então, não foi feita nenhuma menção sobre quais nós devem ser enriquecidos (nó enriquecido = nó que possui os graus de liberdade adicionais além dos graus de liberdade convencionais) quando o elemento ao qual pertencem é cruzado por uma descontinuidade. Como as funções na base adicional  $\gamma$  são multiplicadas pelas funções de forma de um nó particular, a base adicional de um nó particular tem influência somente sobre o suporte desse nó (suporte do nó = o(s) elemento(s) ao(s) qual(ais) o nó pertence). Logo, a função de Heaviside é acrescentada somente na base adicional  $\gamma$  dos nós cujo *suporte* é cruzado por uma descontinuidade.

A Figura 4.6 ilustra o processo de enriquecimento dos nós passo a passo, para cada incremento completo de carga.



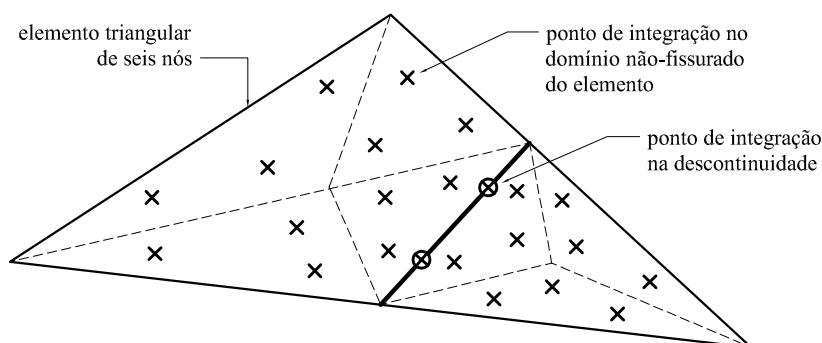
**Figura 4.6:** Processo de enriquecimento de nós. Os nós enriquecidos são indicados por quadrados, e os nós regulares são indicados por círculos.

Nesse processo, a condição que deve ser satisfeita é que o salto de deslocamentos

na ponta da fissura seja zero. Para garantir isso, os nós pertencentes a um elemento cujo contorno é apenas “tocado” por uma descontinuidade não são enriquecidos, nenhum deles, mesmo que sejam compartilhados por outros elementos cruzados pela descontinuidade. Somente quando a descontinuidade se propaga para o próximo elemento é que todos os nós localizados atrás da ponta da fissura são enriquecidos (ver Figura 4.6).

Trata-se agora da questão da integração numérica. Quando usam-se funções de forma diferentes das funções de forma padrão, surge a questão de como a integração numérica deve ser realizada. O requisito mais importante quando se usam funções descontínuas é que o campo de deformações seja integrado adequadamente em ambos os lados da descontinuidade. A falha de integração em ambos os lados da descontinuidade resulta na dependência linear do sistema de equações, uma vez que a função de Heaviside não pode ser distinguida de uma simples função constante. Por isso, quando uma descontinuidade cruza um elemento, normalmente o esquema inicial de integração de Gauss não é suficiente para garantir que as funções de forma permaneçam linearmente independentes.

Assim, um esquema especial de integração proposto por Wells e Sluys (2001) é ilustrado na Figura 4.7.



**Figura 4.7:** Esquema de integração para o elemento triangular de 6 nós cortado por uma descontinuidade (linha cheia). As cruzes representam pontos de integração para o meio contínuo e as cruzes dentro de um círculo indicam os pontos de integração para as tensões coesivas na descontinuidade (Wells e Sluys, 2001).

Os elementos que não são cruzados pela descontinuidade são integrados pela quadratura-padrão de Gauss; logo, no caso do elemento triangular de seis nós, são três pontos de integração. Porém, quando um elemento triangular de seis nós é cruzado por uma descontinuidade, os domínios  $\Omega_e^+$  e  $\Omega_e^-$  do elemento, em cada lado da descontinuidade, são divididos em subdomínios triangulares (ver Figura 4.7). Dentro de cada subdomínio triangular, aplica-se uma quadratura de Gauss de três pontos. Adicionalmente, além dos pontos de Gauss criados no domínio não fissurado  $\Omega_e^+$  e  $\Omega_e^-$  do elemento, acrescentam-se dois pontos de integração sobre a descontinuidade, para a integração das tensões coesivas.

O esquema de integração proposto requer 23 pontos de integração por elemento, o que pode parecer um excesso à primeira vista. Entretanto, uma vez que somente os elementos cruzados pela descontinuidade precisam do esquema de integração modificado, o esforço computacional é pequeno. No domínio não fissurado  $\Omega_e^+$  e  $\Omega_e^-$  do elemento, o esquema proposto integra o campo de tensões de forma redundante. Porém, adota-se o esquema de integração modificado para permitir a máxima flexibilização do modelo, uma vez que pode-se desejar o acréscimo de outras funções enriquecedoras além da função de salto de Heaviside (por exemplo, os campos próximos à ponta da fissura usados pela Mecânica da Fratura Linear-Elástica). Como é indesejável que o esquema de integração seja modificado para cada grupo diferente de funções de enriquecimento que se queira usar, o custo computacional da integração redundante em um pequeno número de elementos torna-se desprezível.

De forma complementar, para se ter uma visão geral da estrutura usada na implementação computacional do modelo proposto neste trabalho, o Apêndice A deve ser consultado. Nele, dentro de um contexto de Projeto Orientado a Objeto, são indicados, esquematicamente, cada um dos elementos numéricos necessários à montagem do modelo de fissuras coesivas baseado no XFEM, conforme cada um dos aspectos descritos aqui neste capítulo.

# Capítulo 5

## SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

### 5.1 Introdução

Neste capítulo, serão apresentados os resultados de alguns exemplos numéricos que foram processados no **INSANE**, usando-se elementos finitos planos de seis nós, no Estado Plano de Tensões, capazes de suportar uma fissura coesiva. Os exemplos foram extraídos de artigos publicados em periódicos internacionais que apresentam métodos numéricos de implementação de fissuras coesivas baseados no XFEM. Assim, foi possível comparar os resultados encontrados neste trabalho com os resultados apresentados por outros pesquisadores. No caso da compressão diametral, as referências tomadas foram a NBR-7222 (ABNT, 1994) e a NBR-6118 (ABNT, 2003). Os exemplos de aplicação numérica foram selecionados e apresentados em ordem crescente de complexidade.

Na seção 5.2, o ensaio de tração é repetido conforme proposto por Mergheim et al. (2005), e os resultados obtidos com o **INSANE** são aqui apresentados e comparados aos resultados da referência citada.

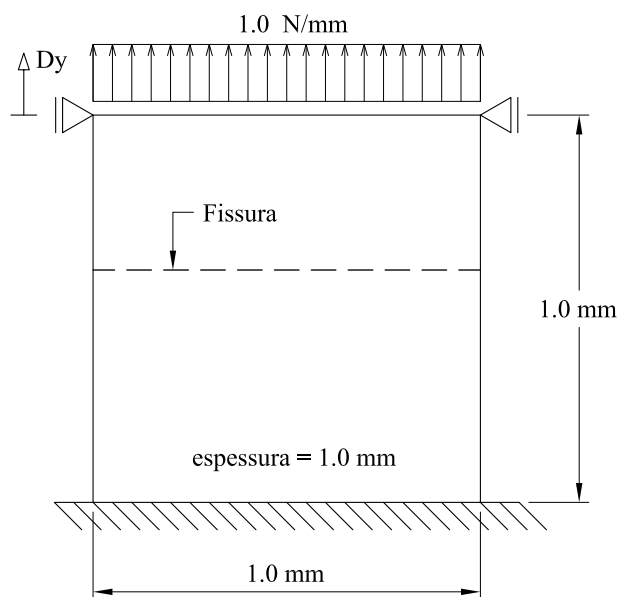
Em seguida, na seção 5.3, simula-se o ensaio de compressão diametral, conforme proposto por Carneiro e Barcellos (1949), para a verificação da validade da relação entre os esforços aplicados e a resistência à tração do material que foi proposta por ele a partir dos ensaios de compressão feitos em cilindros de concreto carregados em seu plano diametral.

Na seção 5.4, uma viga biapoiada sujeita a uma carga concentrada vertical, aplicada no meio do vão, é estudada, e uma limitação do modelo relativa ao critério de cálculo da direção da fissura é explorada. Para esse ensaio de flexão em 3 pontos, verifica-se a capacidade do modelo em descrever a propagação de uma fissura com trajetória linear (seção 5.4.2) e com trajetória curva (seção 5.4.3). Nessas seções, os resultados aqui obtidos são comparados aos resultados apresentados por Wells e Sluys (2001).

Finalmente, na seção 5.5, apresenta-se o ensaio de cisalhamento em quatro pontos, no qual a propagação da fissura está sujeita aos Modos I (Figura 2.9(a)) e II (Figura 2.9(b)) de abertura de fissura. Nessa seção, os resultados obtidos com o **INSANE** também são comparados com os resultados publicados por Wells e Sluys (2001).

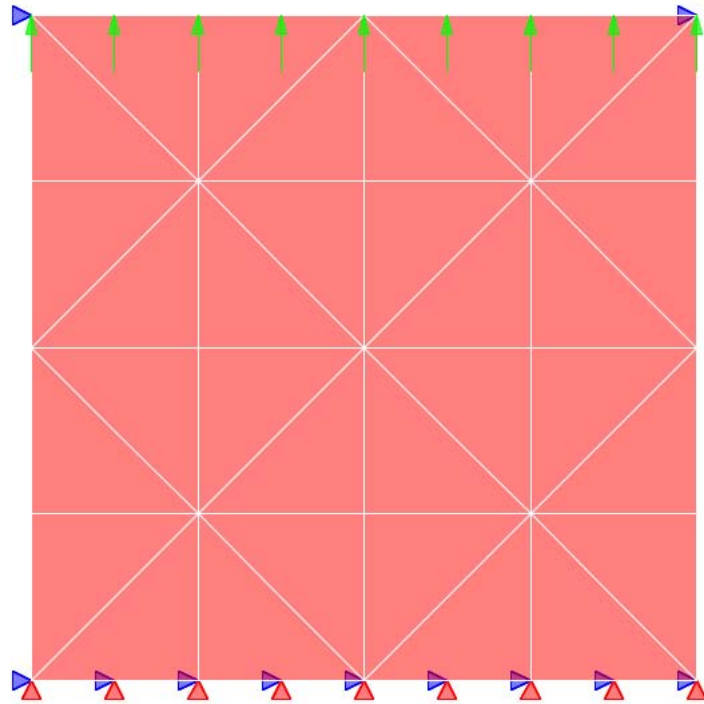
## 5.2 Tração - Modo I

Neste exemplo, o objetivo é avaliar a resposta de uma chapa quadrada de concreto, de espessura unitária, engastada na base e submetida a um carregamento uniforme distribuído na parte superior. As informações da geometria e das condições de contorno estão indicadas na Figura 5.1. O ensaio é controlado pelo deslocamento vertical  $Dy$ . Uma fissura coesiva é introduzida na parte esquerda da chapa, conforme indica a linha tracejada mostrada na Figura 5.1, propagando-se da esquerda para a direita quando as tensões na seção atingem o valor da resistência à tração  $f_t$ . Como as tensões de tração são uniformes ao longo da seção, a fissura propaga-se ao longo de toda a seção da chapa. Os valores usados para os parâmetros do material são:  $E = 100 \text{ N/mm}^2$ ;  $\nu = 0.0$ ;  $f_t = 1.0 \text{ N/mm}^2$  e  $G_f = 0.02 \text{ N/mm}$ .

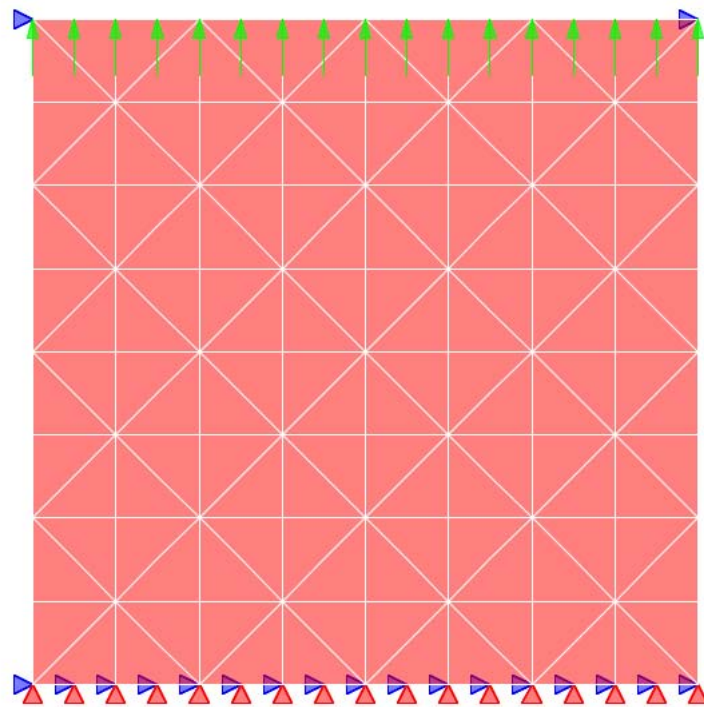


**Figura 5.1:** Geometria e condições de contorno da chapa quadrada.

Duas malhas distintas foram usadas para a discretização do problema: uma malha de 32 elementos (Figura 5.2) e outra de 128 elementos (Figura 5.3). O objetivo do uso de duas malhas, uma mais grosseira e outra mais refinada, foi averiguar se os resultados apresentavam alguma dependência da discretização.

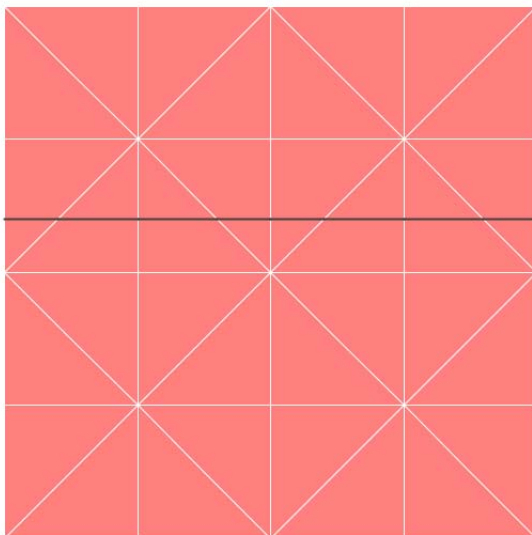


**Figura 5.2:** Discretização da chapa em malha de 32 elementos.

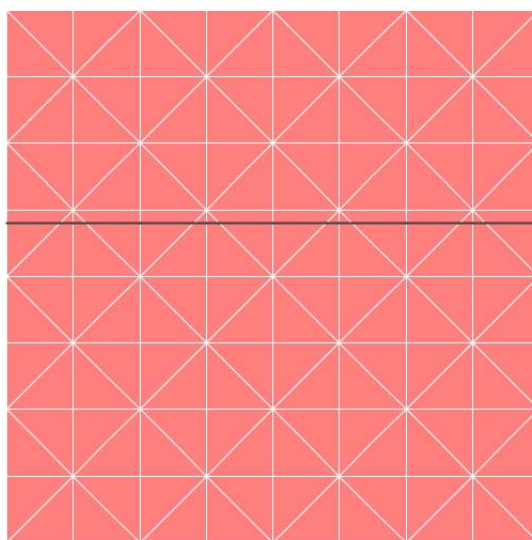


**Figura 5.3:** Discretização da chapa em malha de 128 elementos.

A propagação da fissura na malha de 32 elementos pode ser vista na Figura 5.4 e, na malha de 128 elementos, pode ser vista na Figura 5.5. Como já era esperado, a fissura se propaga em uma linha reta ao longo de toda a seção transversal das malhas.



**Figura 5.4:** Propagação da fissura com malha de 32 elementos.

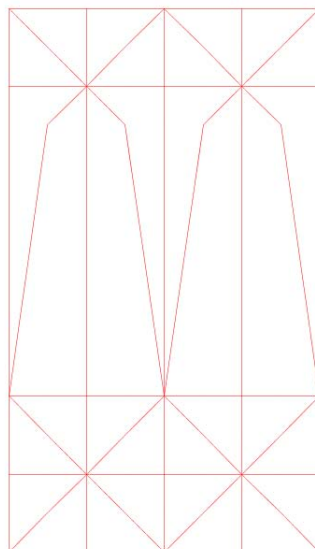


**Figura 5.5:** Propagação da fissura com malha de 128 elementos.

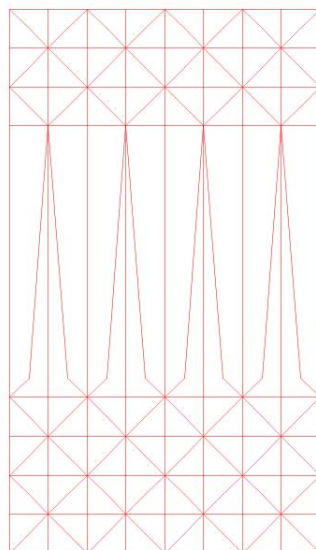
A deformada de cada malha é mostrada nas Figuras 5.6 e 5.7. Nessas figuras,



para fins de visualização, os valores dos deslocamentos foram multiplicados por um fator de escala igual a 10.



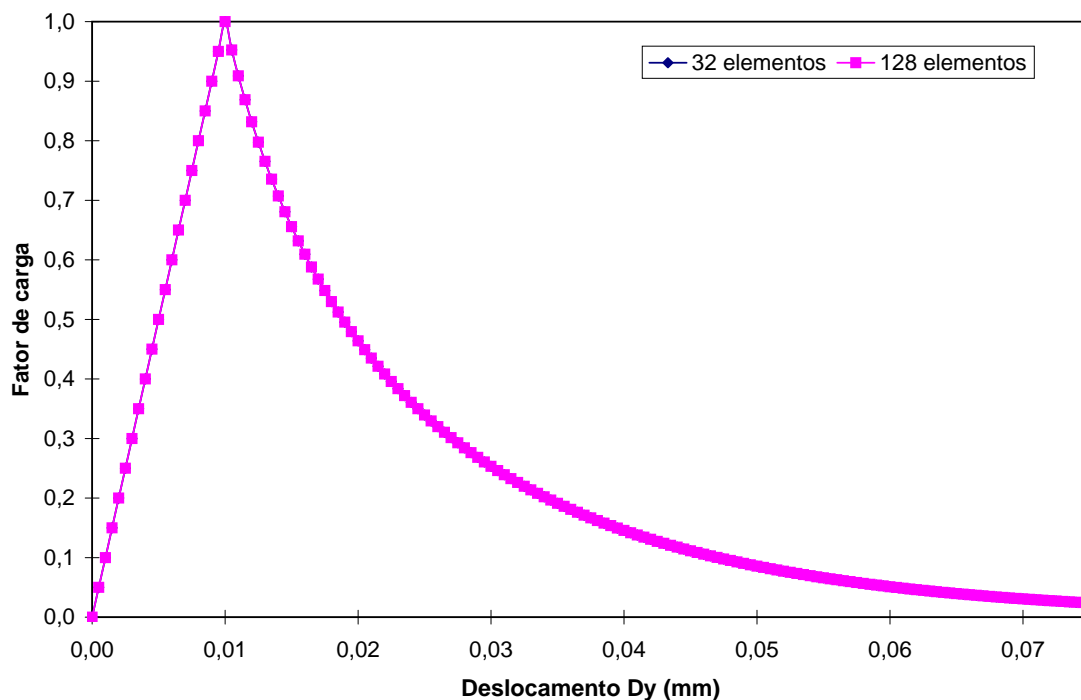
**Figura 5.6:** Deformada da malha de 32 elementos.



**Figura 5.7:** Deformada da malha de 128 elementos.

Os resultados do fator de carga total e deslocamento vertical  $Dy$  de cada malha foram plotados no gráfico da Figura 5.8. A partir da inspeção desse gráfico, pode ser constatado que os resultados não dependem da discretização. Os resultados obtidos

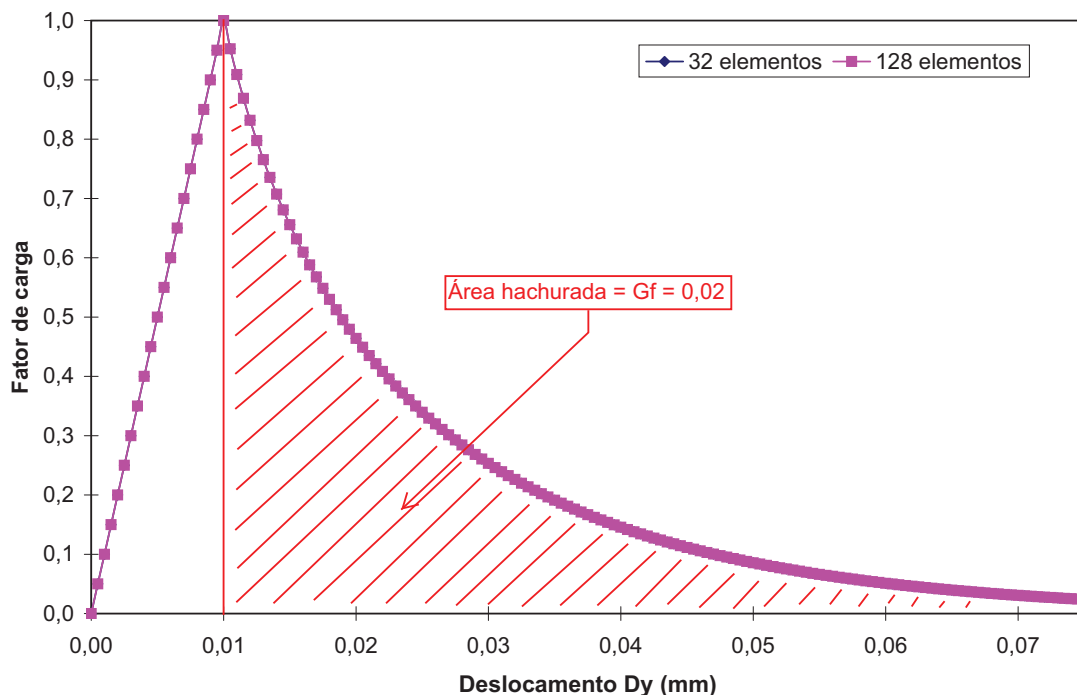
pelo **INSANE** coincidem com os resultados publicados por Mergheim et al. (2005). Além do teste de dependência de malha, no qual o modelo mostrou-se independente da discretização, é importante mostrar também, neste exemplo, outro resultado interessante relativo ao modelo constitutivo de fissura coesiva, usado na região da fissura.



**Figura 5.8:** Chapa Quadrada - Relação Fator de Carga  $\times$  Deslocamento.

Na Mecânica da Fratura, por definição, a energia de fratura  $G_f$  é considerada um parâmetro de fratura para o material e corresponde à energia necessária para separar completamente uma fissura de área unitária (no caso do modelo de fissura coesiva, que é aqui adotado). A energia de fratura  $G_f$  é igual à área sob o gráfico  $\sigma(w)$ , conforme mostrado na Figura 2.11. Assim, no exemplo da chapa quadrada de espessura unitária, sujeita unicamente a esforços de tração, tem-se uma reprodução exata do modo I de abertura de fissura, no qual a área da superfície da fissura que é separada possui valor unitário ( $1.0\text{ mm}$  de espessura da chapa  $\times$   $1.0\text{ mm}$  de comprimento da seção). Logo, a curva de amolecimento ou *softening* da Figura 5.8, dada pela parte decrescente do gráfico, reproduz exatamente a relação  $\sigma(w)$  da

Figura 2.11. Ou seja, a área sob a curva de amolecimento da Figura 5.8 tem que ser igual ao valor de  $G_f$  fornecido nos parâmetros do material, que, neste exemplo, vale  $G_f = 0.02 N/mm$  (ver Figura 5.9).



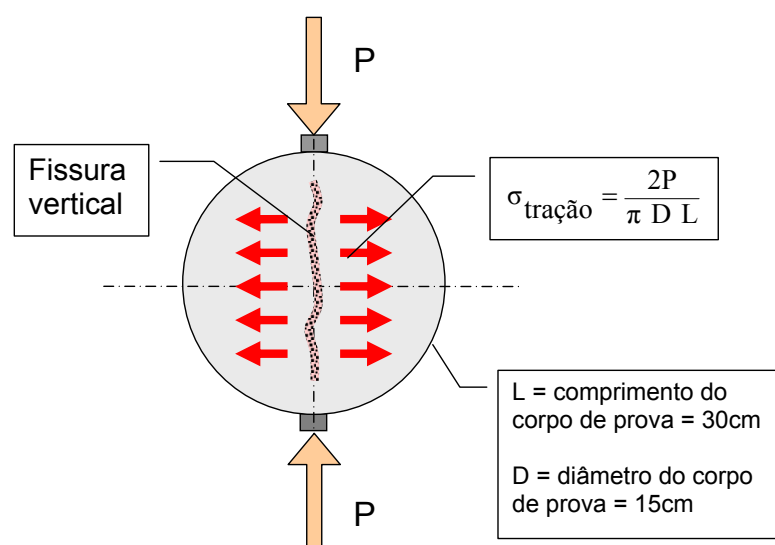
**Figura 5.9:** Chapa Quadrada - Área equivalente a  $G_f$ .

Nota-se que o valor de  $G_f$  usado por Mergheim et al. (2005) em sua publicação parece ser inconsistente com o gráfico de *softening* lá encontrado. Na verdade, o valor adotado para a espessura da chapa quadrada não foi mencionado naquela publicação. Assim, partindo-se do princípio de que o valor da espessura usado lá tenha sido unitário, o valor que deve ter sido usado para a energia de fratura é  $G_f = 0.02 N/mm$ , apesar de ter sido publicado um valor de  $G_f = 0.1 N/mm$ . Colocando-se de outra maneira: se a área sob a curva de amolecimento que foi publicada por Mergheim et al. (2005) for calculada, encontrar-se-á o valor de 0.02, diferente do valor lá indicado nos parâmetros do material de  $G_f = 0.1 N/mm$ .

### 5.3 Compressão Diametral

O ensaio de compressão diametral, registrado por Carneiro e Barcellos (1949), é um ensaio simples de verificação da resistência à tração de um corpo de prova cilíndrico de concreto que é deitado e submetido a esforços de compressão, rompendo-se em tração, devido à formação de uma fissura vertical em seu plano diametral. Apesar de também ser usado para rochas, o ensaio de compressão diametral, também conhecido como “ensaio brasileiro”, foi inicialmente usado para o concreto e está normatizado pela NBR-7222 (ABNT, 1994). Esse ensaio é usado para a determinação indireta da resistência à tração do concreto,  $f_{ct,sp}$ , e é aceito pela NBR-6118 (ABNT, 2003) como um dos métodos para se determinar o valor da resistência à tração direta do concreto,  $f_{ct}$ . Conforme o item 8.2.5 da NBR-6118, o valor de  $f_{ct}$  pode ser considerado igual à  $0,9 f_{ct,sp}$ .

Neste exemplo, o objetivo é simular numericamente o ensaio realizado por Carneiro e Barcellos (1949), para a verificação da validade da relação matemática, proposta por eles, entre a força aplicada  $P$  e a tensão  $\sigma_{\text{tração}}$  (ver Figura 5.10). Essa tensão está relacionada à resistência à tração do material e, conseqüentemente, à formação da fissura vertical no corpo de prova.



**Figura 5.10:** Ensaio de compressão diametral proposto por Carneiro e Barcellos (1949).

De acordo com a NBR-7222, a fórmula para o cálculo da resistência à tração por compressão diametral,  $f_{t,D}$ , é dada por:

$$f_{t,D} = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d \cdot L} \quad , \quad (5.1)$$

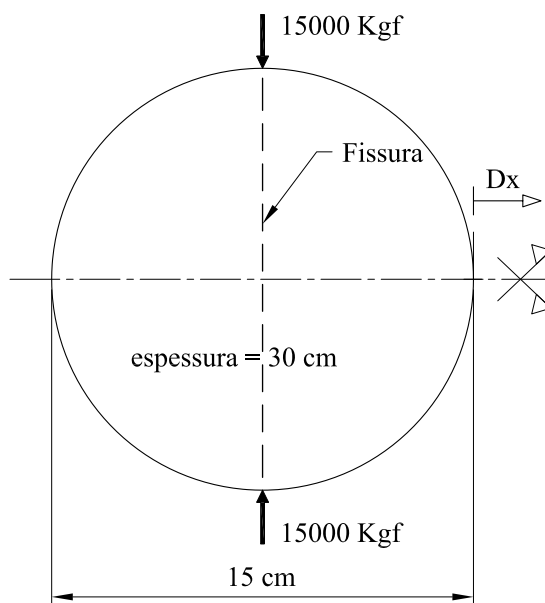
em que  $F$  é a carga máxima obtida no ensaio,  $d$  é o diâmetro do corpo de prova e  $L$  é a altura do corpo de prova.

Aqui, o exemplo consiste em verificar se, fornecidos os valores de  $d$ ,  $L$  e  $f_{t,D}$ , a carga máxima será equivalente a

$$F = \frac{f_{t,D} \cdot \pi \cdot d \cdot L}{2} \quad . \quad (5.2)$$

Adotam-se, então, os seguintes valores para os parâmetros indicados na Equação 5.2:  $d = 15 \text{ cm}$ ;  $L = 30 \text{ cm}$  e  $f_{t,D} = 21.22066 \text{ kgf/cm}^2$ .

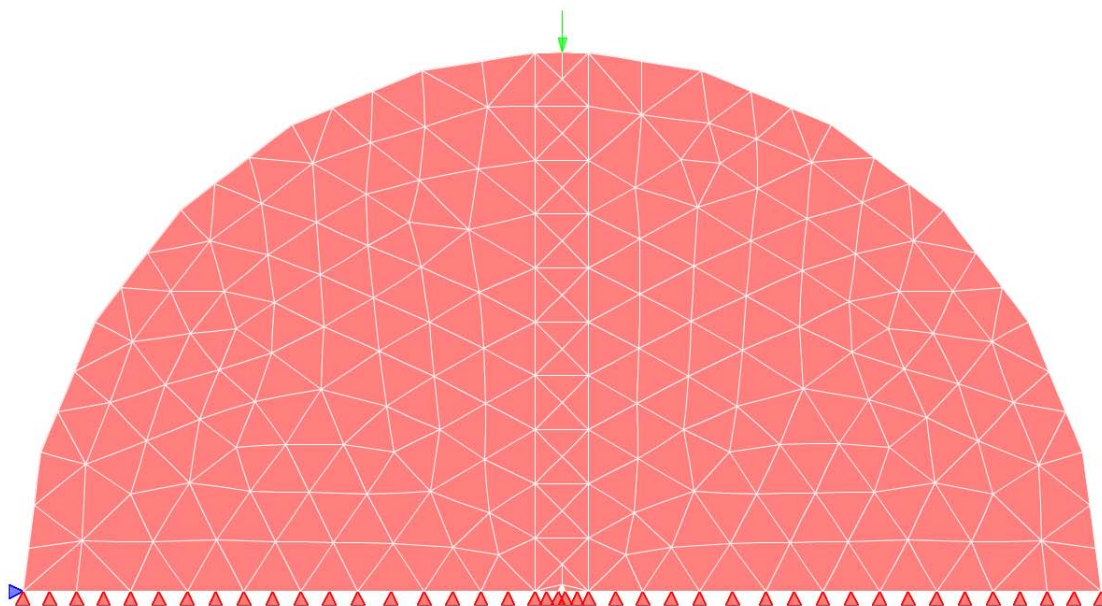
Substituindo-se os valores acima na Equação 5.2, obtém-se  $F = 15000 \text{ kgf}$ . Assim, o modelo numérico de compressão diametral é carregado no **INSANE** com os valores acima indicados (ver Figura 5.11) e com os seguintes parâmetros do material:  $E = 219273.6202 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $\nu = 0.2$ ;  $f_t = 21.22066 \text{ kgf/cm}^2$  e  $G_f = 0.05 \text{ kgf/cm}$ .



**Figura 5.11:** Geometria e condições de contorno do ensaio de compressão diametral.

A expectativa é de que o limite de carga seja atingido com um fator próximo ou igual à unidade, uma vez que se aplica uma carga  $F = 15000 \text{ kgf}$  ao cilindro. Aproveitando-se a simetria do problema, somente a parte superior do cilindro é discretizada. O controle do ensaio é feito pelo deslocamento  $Dx$ , indicado na Figura 5.11.

A malha de elementos finitos é composta por 358 elementos e é mostrada na Figura 5.12. Neste exemplo, a fissura se propaga a partir de uma pequena falha inicial colocada no centro do cilindro (no meio da borda inferior da malha) e segue seu caminho numa trajetória vertical retilínea até próximo ao ponto de aplicação da carga. No **INSANE**, a fissura é impedida de atravessar qualquer elemento que esteja posicionado nas fronteiras da malha. Isso evita que uma fissura separe completamente a malha em duas partes independentes, o que, se acontecesse, resultaria em uma singularidade no sistema de equações do problema, indicando que o movimento de corpo livre não foi evitado.

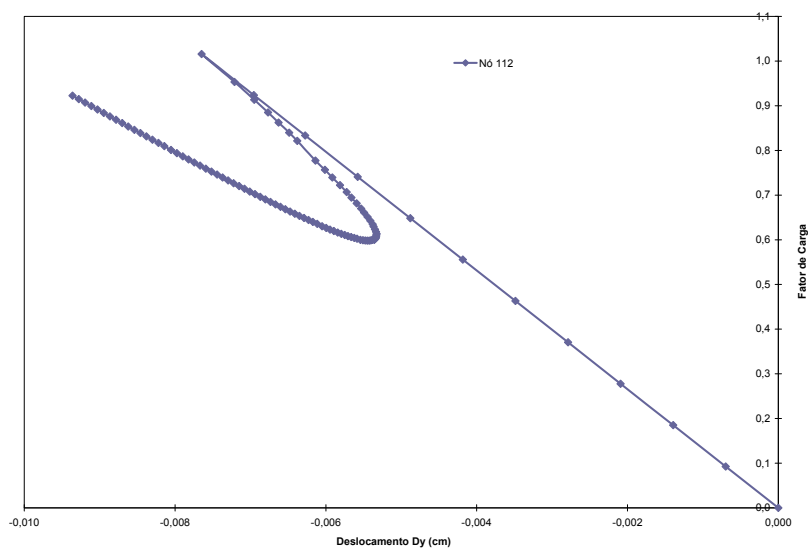


**Figura 5.12:** Discretização da seção do cilindro em malha de 358 elementos.

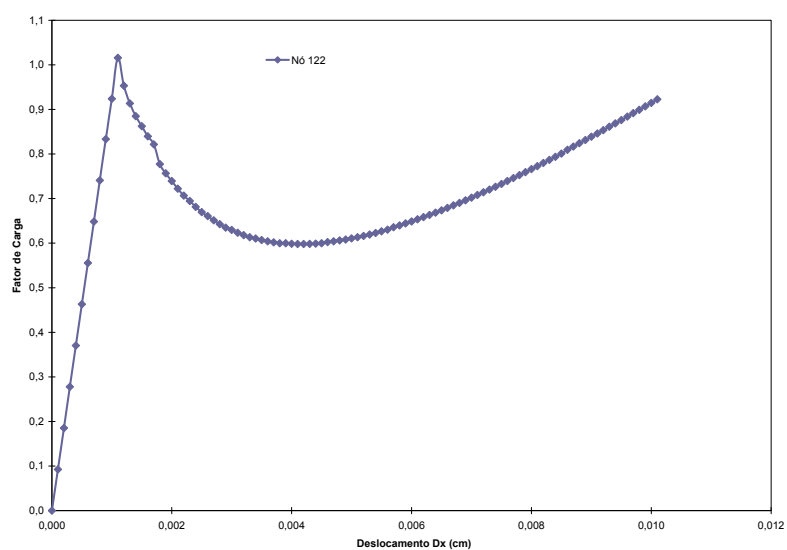
Os resultados da simulação numérica são mostrados nas Figuras 5.13 e 5.14. O nó 112 corresponde ao ponto de aplicação da carga, localizado na parte superior da

malha. A Figura 5.13 mostra a relação entre o fator de carga total e o deslocamento do nó 112 na direção  $y$ . Já o nó 122 está localizado na parte inferior da malha, à extrema direita da mesma, e corresponde ao nó que foi utilizado para controlar a obtenção da trajetória de equilíbrio do problema.

A Figura 5.14 mostra a relação entre o fator de carga total e o deslocamento do nó 122 na direção  $x$ .



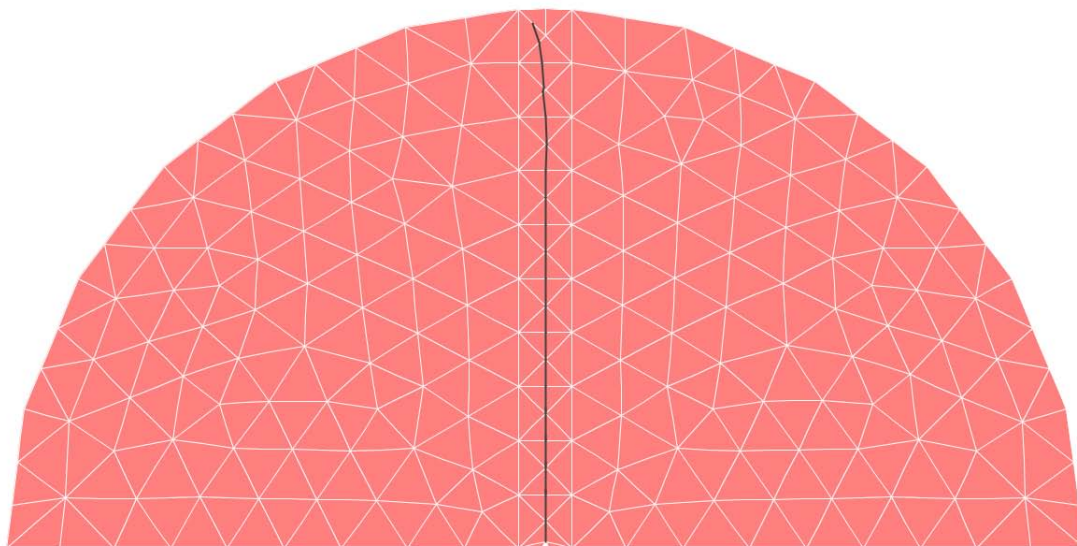
**Figura 5.13:** Compressão Diametral - Relação Fator de Carga  $\times$  Deslocamento - Nó 112.



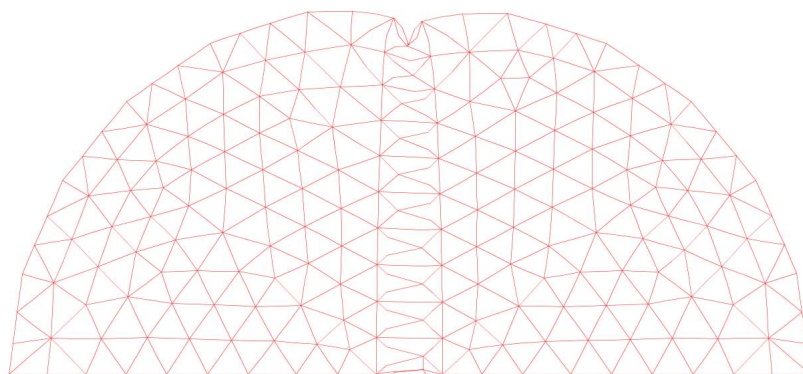
**Figura 5.14:** Compressão Diametral - Relação Fator de Carga  $\times$  Deslocamento - Nó 122.

Pode-se averiguar facilmente das Figuras 5.13 e 5.14 que o fator de carga total ficou muito próximo de 1,0. Isso confirma a validade da equação 5.1 e, ao mesmo tempo, indica que a simulação numérica feita no **INSANE** produz resultados compatíveis com os ensaios experimentais de compressão diametral.

Na Figura 5.15, mostra-se o caminho percorrido pela fissura, e, na Figura 5.16, a deformada da malha pode ser vista. Como era esperado, a fissura percorre um caminho retilíneo desde o seu ponto inicial, no meio da parte inferior da malha, até o penúltimo elemento da parte superior da malha, próximo ao ponto de aplicação da carga.



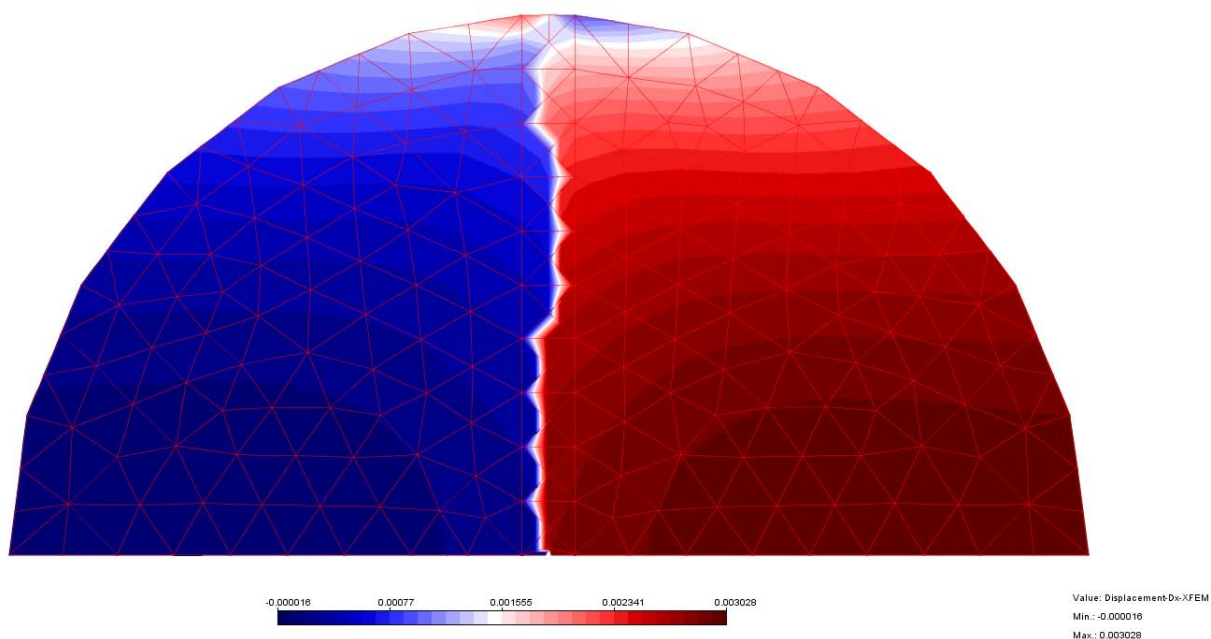
**Figura 5.15:** Compressão Diametral - propagação da fissura.



**Figura 5.16:** Compressão Diametral - deformada da malha.



É interessante ainda destacar o diagrama do campo de deslocamentos da malha na direção  $x$  gerado pelo **INSANE** e mostrado na Figura 5.17. Nesta figura, o “salto” no campo de deslocamentos induzido pela formulação do XFEM na simulação do processo de fissuração pode ser claramente percebido.



**Figura 5.17:** Compressão Diametral - deslocamentos na direção  $x$ .

## 5.4 Flexão em 3 Pontos

### 5.4.1 Introdução

Para que haja propagação de uma fissura coesiva dentro de um elemento, é necessário que existam tensões de tração atuando no mesmo e que essas tensões excedam o valor da resistência à tração do material. Assim, no processo de propagação da fissura dentro da malha, as tensões principais nos pontos de Gauss dos elementos que estão à frente da fissura são constantemente avaliadas, e a fissura vai se propagando elemento a elemento enquanto houver tensões de tração acima do valor de  $f_t$ . Quando são encontradas tensões de compressão ou tensões de tração inferiores ao limite de resistência à tração do material, a fissura é impedida de continuar até que tais valores ultrapassem o valor de  $f_t$ .

Nas seções 5.2 e 5.3 foram apresentados exemplos numéricos que possuem uma característica comum relativa às condições de propagação da fissura: um estado de tensões de tração uniforme na região da estrutura atravessada pela fissura ao longo de toda a seção. Assim, tanto no caso da chapa quadrada sujeita à tração quanto no caso do cilindro sujeito à compressão diametral, a fissura se propaga quase que instantaneamente, atravessando vários elementos de uma só vez. Isso permite que a fissura se propague praticamente por toda a seção, elemento a elemento, dentro de um único passo incremental de carga, no caso da chapa quadrada, e dentro de dois ou três passos incrementais, no caso do cilindro. Logo, no processo de propagação da fissuração dos casos citados, as tensões dentro de cada elemento a ser atravessado pela fissura não sofrem a influência de uma variação de tensões do elemento anterior. Consequentemente, a propagação da fissura dá-se sem nenhuma dificuldade.

No exemplo desta seção, será abordado um problema mais complexo do ponto de vista da propagação da fissura: a flexão em 3 pontos. Esse problema, por produzir um estado de tensões não uniforme ao longo da seção estudada, torna a propagação de uma fissura coesiva dentro de um elemento finito um processo dependente da

variação de tensões do elemento anterior. Nesse caso, a propagação da fissura de um elemento para outro depende da mudança no estado de tensões desses elementos. Assim, no caso da flexão em 3 pontos, a propagação pode encontrar elementos à sua frente que estão inteiramente comprimidos e precisam passar a um estado tracionado para que o processo de propagação continue. Essa transição natural no estado de tensões de um elemento que possui uma fissura coesiva pode trazer dificuldades na avaliação correta da direção de propagação da fissura. Assim, calcular corretamente a direção da fissura em cada etapa da propagação é fundamental para que os resultados da análise sejam confiáveis.

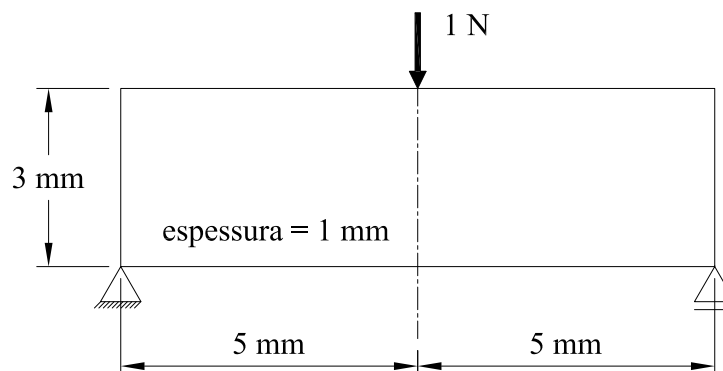
O método para o cálculo da direção de propagação da fissura implementado neste trabalho é muito simples e pode ser considerado um método local de avaliação da direção de propagação. A direção de propagação é tomada como a média ponderada das direções principais avaliadas nos pontos de Gauss pertencentes a um ou mais elementos à frente da fissura. Tal processo está descrito na seção 4.6.

Além desse método, que se baseia em um critério local de média ponderada de tensões, existem outros métodos, usados para o cálculo da direção de propagação da fissura, que se baseiam em premissas da LEFM ou em critérios globais, como o de energia (Meschke e Dumstorff, 2004). Uma comparação entre esses critérios, num contexto de propagação de fissuras no concreto usando-se o XFEM, pode ser vista em Meschke et al. (2006). Lá são mostrados os resultados da propagação de uma fissura em alguns exemplos numéricos diferentes, nos quais a abertura de fissura ocorre no Modo I e no Modo Misto (I + II). Assim, para cada exemplo, são comparados os resultados dos diferentes critérios de propagação. Nesse comparativo, dependendo do exemplo, os resultados do modelo baseado no critério local de média ponderada de tensões apresenta resultados diferentes e pouco confiáveis em relação aos demais.

A seguir, essa limitação relativa ao critério de propagação da fissura baseado na média de tensões, como implementado neste trabalho, é abordada no exemplo da

flexão em 3 pontos.

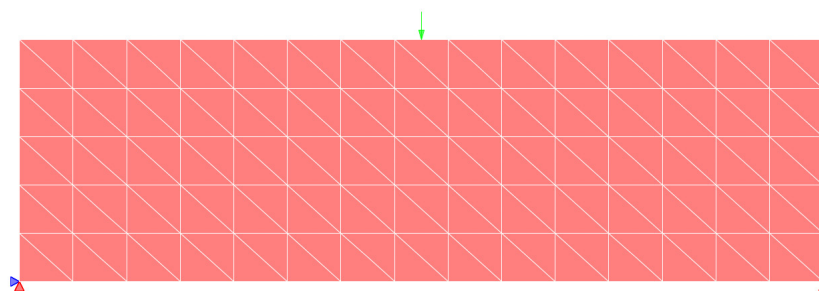
A Figura 5.18 mostra a geometria e as condições de contorno de uma viga biapoiada. Este exemplo é extraído do trabalho de Wells e Sluys (2001) e, de acordo com essa publicação, adotam-se aqui os seguintes valores para os parâmetros do material:  $E = 100 \text{ N/mm}^2$ ;  $\nu = 0.0$ ;  $f_t = 1.0 \text{ N/mm}^2$  e  $G_f = 0.1 \text{ N/mm}$ .



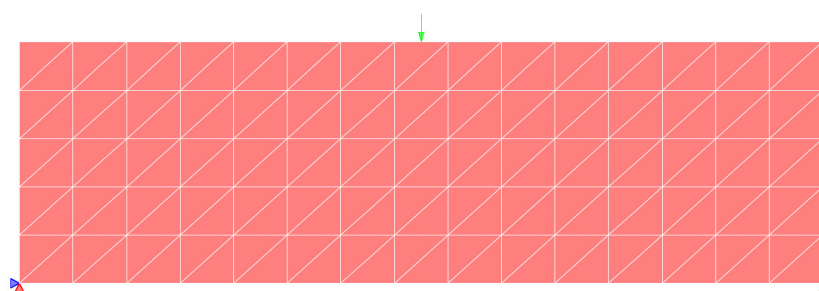
**Figura 5.18:** Geometria e condições de contorno do ensaio de flexão em 3 pontos.

Usando-se os dados acima, são adotadas quatro malhas distintas:

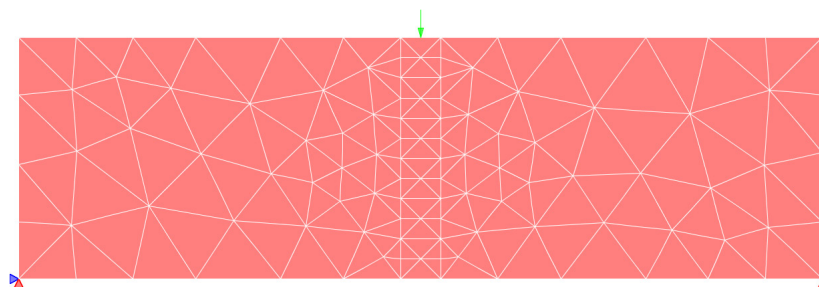
- Malha I — Malha estruturada formada por 150 elementos dispostos em faixas inclinadas a  $45^\circ$  à esquerda (Figura 5.19);
- Malha II — Malha estruturada formada por 150 elementos dispostos em faixas inclinadas a  $45^\circ$  à direita (Figura 5.20);
- Malha III — Malha não estruturada formada por 184 elementos com uma coluna central estruturada de elementos (Figura 5.21) e
- Malha IV — Malha não estruturada formada por 622 elementos (Figura 5.22).



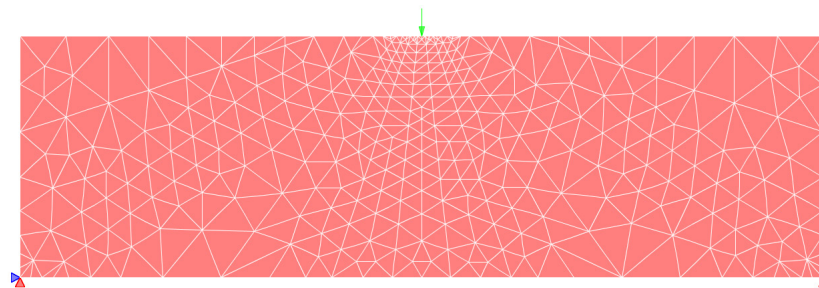
**Figura 5.19:** Flexão em 3 pontos - Malha I - 150 elementos.



**Figura 5.20:** Flexão em 3 pontos - Malha II - 150 elementos.



**Figura 5.21:** Flexão em 3 pontos - Malha III - 184 elementos.



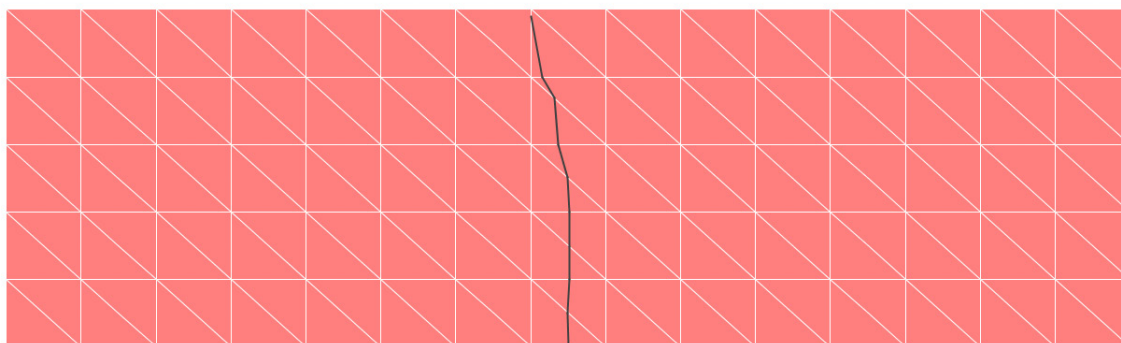
**Figura 5.22:** Flexão em 3 pontos - Malha IV - 622 elementos.

Inicialmente, uma fissura é inserida na região central da viga, na parte inferior, e sua propagação é estudada usando-se as Malhas I, II e III. Espera-se que a sua propagação aconteça de baixo para cima, em uma trajetória retilínea. As malhas usadas são grosseiras, mas suas topologias foram estrategicamente preparadas. Assim, percebe-se que as Malhas I e II são assimétricas em relação ao eixo vertical central da viga e são espelhadas uma em relação à outra, enquanto a Malha III possui simetria em relação ao eixo vertical na parte central. Essas três malhas são usadas para exemplificar a deficiência do critério usado para o cálculo da direção da fissura. Os resultados e observações são mostrados na seção 5.4.2.

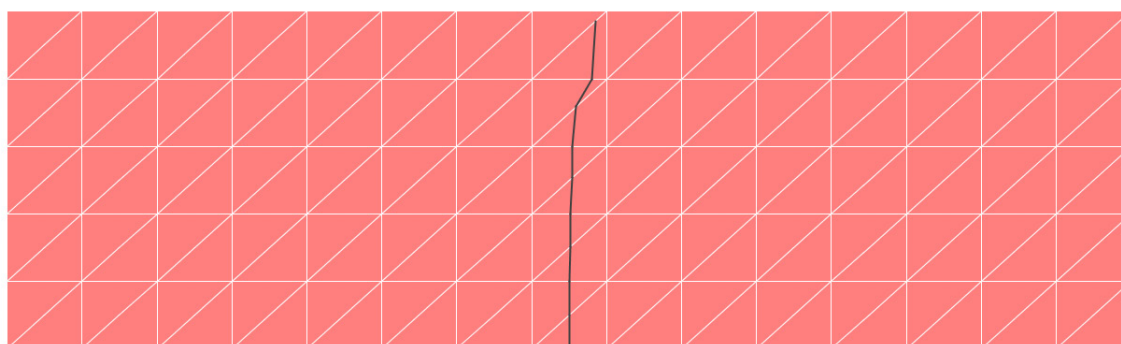
Em seguida, estuda-se o comportamento de uma fissura inicial deslocada  $0.7\text{ mm}$  à direita do eixo central vertical da viga. Sua propagação nas Malhas I, II e III é mostrada na seção 5.4.3. Nessa mesma seção, a Malha IV é usada com o mesmo objetivo e, por ser mais refinada, sua trajetória de fissuração é usada para comparação com os resultados apresentados por Wells e Sluys (2001).

### 5.4.2 Fissura de Trajetória Linear

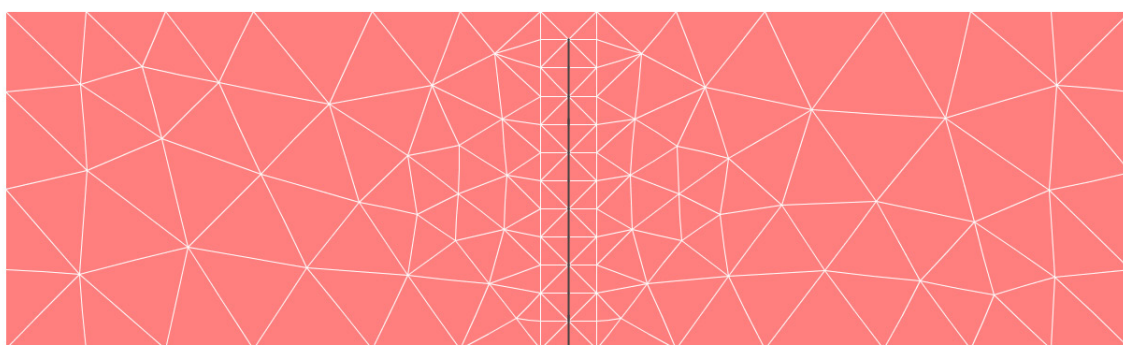
Na Malha I, observa-se que a fissura iniciada no centro da viga, na parte inferior, propaga-se na direção vertical, em uma trajetória linear, até a metade inferior da viga. A partir daí, sua propagação sofre um desvio para o lado esquerdo até a parte superior, no final da propagação (Figura 5.23). Um comportamento semelhante pode ser observado na propagação da fissura na Malha II, com a diferença de que a fissura sofre um desvio para o lado direito no trecho superior da viga (Figura 5.24). Somente na Malha III a propagação ocorre de forma correta: a fissura percorre uma trajetória retilínea desde a base até o topo da seção central (Figura 5.25).



**Figura 5.23:** Flexão em 3 pontos - Malha I - propagação linear da fissura.



**Figura 5.24:** Flexão em 3 pontos - Malha II - propagação linear da fissura.



**Figura 5.25:** Flexão em 3 pontos - Malha III - propagação linear da fissura.

O comportamento distinto apresentado pela propagação da fissura em cada uma das malhas pode ser entendido através de uma investigação do processo de enriquecimento dos nós da malha. O enriquecimento de um nó, no contexto do XFEM,

consiste simplesmente no acréscimo de graus de liberdade ao nó, além daqueles que ele já possui. Esses graus de liberdade adicionais levam em conta os deslocamentos da superfície da fissura, tornando os nós responsáveis por repassar para todos os demais elementos que o possuem o efeito do salto criado no campo de deslocamentos do elemento atravessado pela fissura.

Assim, quando os nós de um elemento fissurado são enriquecidos, o campo de deslocamentos desse elemento é modificado, tornando-se descontínuo, enquanto o campo de deslocamentos dos demais elementos que possuem os mesmos nós enriquecidos permanecem contínuos, mas recebem o efeito dos graus de liberdade adicionais. A partir de um campo de deslocamentos descontínuo, um elemento fissurado adquire a capacidade de se deslocar de forma completamente independente de um lado e de outro da fissura. De um ponto de vista cinemático, pode-se dizer que os nós de um lado da fissura estão desacoplados dos nós que estão do outro lado. Assim, um elemento fissurado, cujos nós foram enriquecidos, pode possuir valores de deslocamentos nodais completamente diferentes e independentes de um lado e do outro da fissura. Consequentemente, os campos de deformação e de tensão vão reproduzir o mesmo efeito a partir dos valores dos deslocamentos nodais.

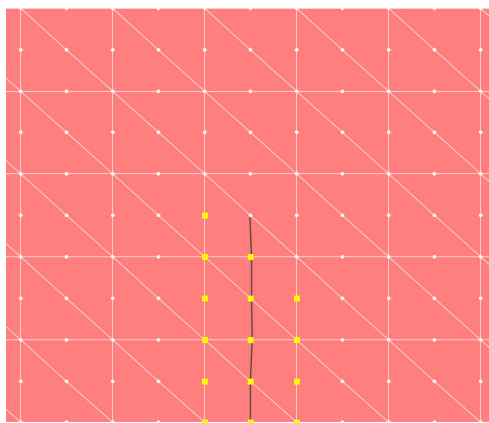
De acordo com o modelo adotado neste trabalho, a fissura propaga-se elemento a elemento, atravessando completamente um elemento de cada vez. A partir dessa definição, quando uma fissura atravessa um novo elemento, todos os nós desse elemento são enriquecidos, excluindo-se os nós que se encontram na face que contém a ponta da fissura recém-formada. Este procedimento é necessário para que se garanta que os valores de abertura de fissura permaneçam nulos na ponta da fissura e o critério de continuidade seja atendido na interface entre o elemento fissurado e o elemento seguinte, que ainda não está fissurado. Porém, quando a fissura atravessa para o elemento seguinte, então esses nós da interface anterior podem ser enriquecidos. Este processo está descrito na seção 4.6.

Logo, o processo de enriquecimento dos nós de um elemento atravessado por uma

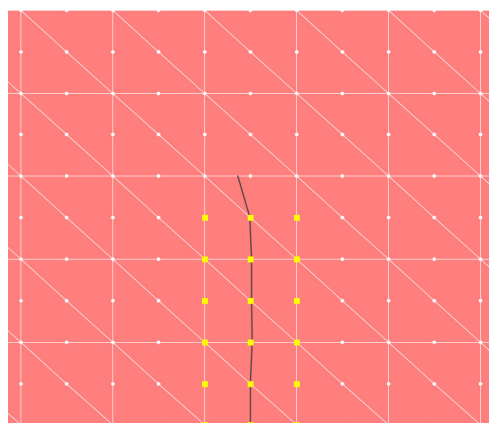


fissura se dá basicamente em duas etapas: inicialmente, somente alguns nós são enriquecidos quando a fissura atravessa o elemento e posteriormente os demais nós são enriquecidos quando a fissura atravessa o próximo elemento à frente da ponta da fissura. Nesse processo, uma etapa e outra podem estar separadas por um ou mais passos incrementais dentro da análise numérica. A depender do estágio da análise, podem ser necessários vários passos para que a fissura atravesse o próximo elemento. Assim, se o elemento à frente da ponta da fissura está sujeito a esforços de compressão, por exemplo, podem ser necessários vários passos incrementais para efetuar a transição do estado comprimido para o tracionado. Durante esses passos de transição, entre uma etapa e outra do enriquecimento dos nós, têm-se alguns nós enriquecidos dentro do elemento e outros não. O fato de que, devido ao enriquecimento dos nós, os deslocamentos de um lado e do outro da fissura estão desacoplados, somado ao fato de que alguns nós estão enriquecidos e outros não, pode produzir valores de deslocamentos, deformações e tensões muito diferentes entre si, de um e do outro lado da fissura, próximo à ponta da mesma, durante a transição das etapas de enriquecimento.

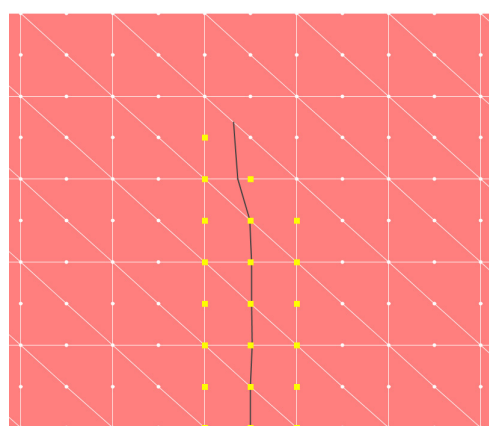
As Figuras 5.26, 5.27 e 5.28 mostram alguns estágios no processo de enriquecimento dos nós da Malha I. Os nós enriquecidos são destacados para que se perceba o processo de enriquecimento de um estágio para o outro. Nota-se uma assimetria no enriquecimento dos nós em relação à linha de fissuração, tanto no estágio 1 (Figura 5.26) quanto no estágio 3 (Figura 5.28). Foi observado que os valores das tensões nos pontos de Gauss localizados simetricamente de um lado e do outro da ponta da fissura, durante os passos incrementais de transição entre o estágio 1 e o estágio 2 de enriquecimento, apresentam valores muito diferentes entre si. Assim, enquanto as tensões  $\sigma_{xx}$  do lado direito apresentam valores positivos, as tensões  $\sigma_{xx}$  do lado esquerdo apresentam valores negativos. Esperava-se encontrar valores simétricos de tensões, no entanto, foram encontrados valores muito diferentes em módulo e sinal.



**Figura 5.26:** Flexão em 3 pontos - Malha I - nós enriquecidos - estágio 1.



**Figura 5.27:** Flexão em 3 pontos - Malha I - nós enriquecidos - estágio 2.

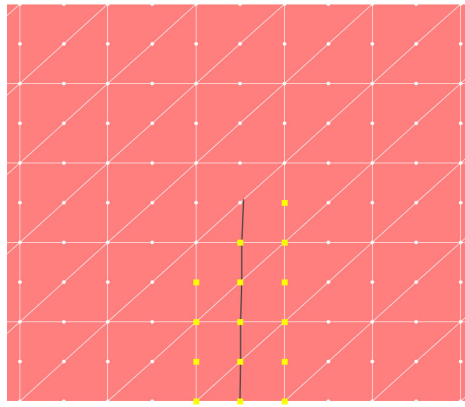


**Figura 5.28:** Flexão em 3 pontos - Malha I - nós enriquecidos - estágio 3.

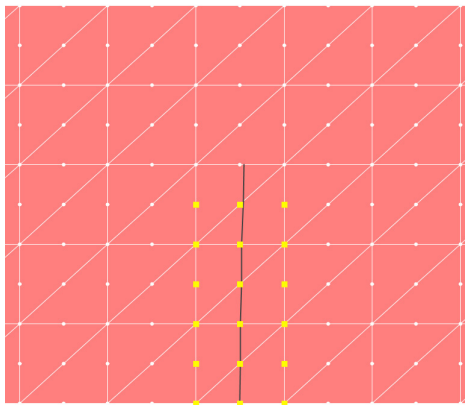
Percebe-se a influência dessas disparidades dos valores das tensões na direção do trecho da fissura que atravessa o elemento no estágio 2 (Figura 5.27), que inclina-se para a esquerda. Como no estágio 2 o enriquecimento dos nós torna-se simétrico, a disparidade entre as tensões de um lado e de outro da ponta da fissura, na transição do estágio 2 para o estágio 3, diminui. Assim, a inclinação do novo trecho da fissura que aparece no estágio 3 é amenizada. Porém, novamente aparece a assimetria no enriquecimento dos nós no estágio 3, e o próximo trecho da fissura sofrerá uma inclinação mais acentuada à esquerda. Uma vez que a direção de propagação de cada trecho da fissura é calculada por uma média ponderada das tensões próximas à ponta da mesma, os valores distorcidos de tensões nessa região provocam direções de propagação distorcidas.

A alteração da direção correta da propagação da fissura em cada trecho de enriquecimento assimétrico, aliada ao fato de que cada novo trecho da fissura começa no final do último trecho, produz um resultado de propagação impreciso na parte superior da Malha I, conforme pode ser visto da Figura 5.23.

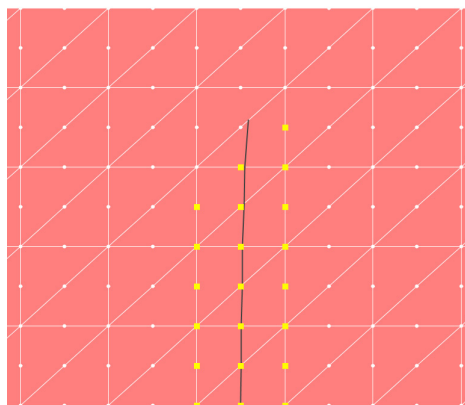
Um comportamento análogo pode ser observado na Malha II, onde a fissura se propaga seguindo uma direção inclinada para a direita na parte superior da viga (Figura 5.24). De maneira semelhante à Malha I, os estágios de enriquecimento de alguns nós são mostrados nas Figuras 5.29, 5.30 e 5.31. A mesma assimetria no processo de enriquecimento dos nós da Malha II pode ser observada. Analisando-se os valores das tensões em pontos de Gauss simetricamente posicionados em relação à linha da fissura e localizados à sua frente, foram encontradas as mesmas disparidades nos tensores de tensão. A diferença agora é que a fissura é desviada para o lado direito em relação à sua trajetória central.



**Figura 5.29:** Flexão em 3 pontos - Malha II - nós enriquecidos - estágio 1.

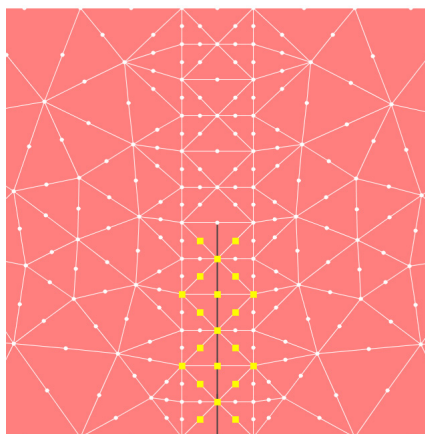


**Figura 5.30:** Flexão em 3 pontos - Malha II - nós enriquecidos - estágio 2.

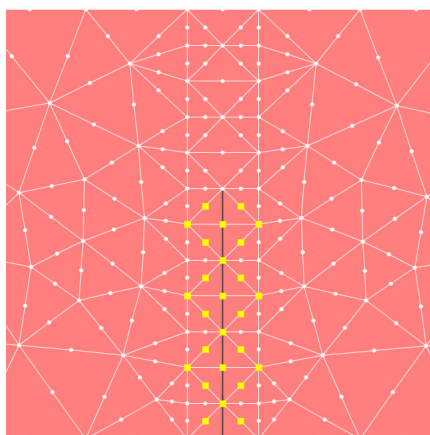


**Figura 5.31:** Flexão em 3 pontos - Malha II - nós enriquecidos - estágio 3.

Em seguida, observa-se a trajetória da fissura seguindo seu caminho corretamente na Malha III (Figura 5.25). Uma inspeção das Figuras 5.32 e 5.33 mostra que, nesse caso, o processo de enriquecimento dos nós da Malha III acontece de forma simétrica em relação à linha de fissuração. Assim, apesar de os nós dentro de um elemento fissurado continuarem a ser enriquecidos em dois estágios, a cada estágio, ao longo de todo o processo de propagação, o enriquecimento mantém-se simétrico. Como resultado, os tensores de tensão avaliados próximos à ponta de cada trecho da fissura também apresentam-se simétricos em relação à linha da fissura e, conseqüentemente, os valores calculados da direção da fissura em cada trecho são corretos.



**Figura 5.32:** Flexão em 3 pontos - Malha III - nós enriquecidos - estágio 1.



**Figura 5.33:** Flexão em 3 pontos - Malha III - nós enriquecidos - estágio 2.

É importante ressaltar que o processo de enriquecimento dos nós de um elemento em duas etapas distintas e as disparidades que podem existir entre os valores das tensões nas proximidades da ponta da fissura são características do modelo numérico escolhido e não são, em si mesmas, um defeito do modelo. Na verdade, é natural que dentro da análise numérica existam essas disparidades de tensões na região da ponta da fissura, uma vez que o processo é não linear e a solução vai sendo ajustada passo a passo. Assim, ao longo do processo de enriquecimento de um elemento para o outro, as disparidades vão sendo minimizadas à medida que os nós que ainda não tinham sido enriquecidos dentro do elemento passam a ser enriquecidos. Essas disparidades, que foram ressaltadas nesse exemplo, são localizadas em uma região definida, a ponta da fissura, e são automaticamente ajustadas durante o processo não linear. O problema aqui exposto está relacionado exclusivamente ao método usado para calcular a direção dos trechos da fissura, durante sua propagação, o qual lança mão justamente das tensões localizadas na ponta da fissura e busca tais tensões exatamente no momento em que elas podem apresentar disparidades.

É por esse motivo que os métodos citados em Meschke et al. (2006) buscam sanar esses problemas no cálculo da direção da fissura, seja evitando o uso do efeito dos enriquecimentos nodais na hora do cálculo da direção da fissura, como é o caso do critério baseado na LEFM; seja através do uso de uma abordagem global, considerando as tensões em toda a malha, e não apenas na ponta da fissura, como faz o critério do algoritmo de rastreamento global; ou ainda minimizando a energia total do corpo em estudo para determinar a direção da fissura, como faz o critério global de energia.

Por outro lado, observa-se ainda, na análise das Malhas I, II e III, que, apesar dos problemas encontrados na direção de propagação da fissura a partir da metade superior da viga, a direção da propagação na parte inferior praticamente não foi afetada pelas disparidades de tensão nesse trecho. Na verdade, no início da propagação, pelo fato de a região inferior da viga já possuir predominantemente tensões

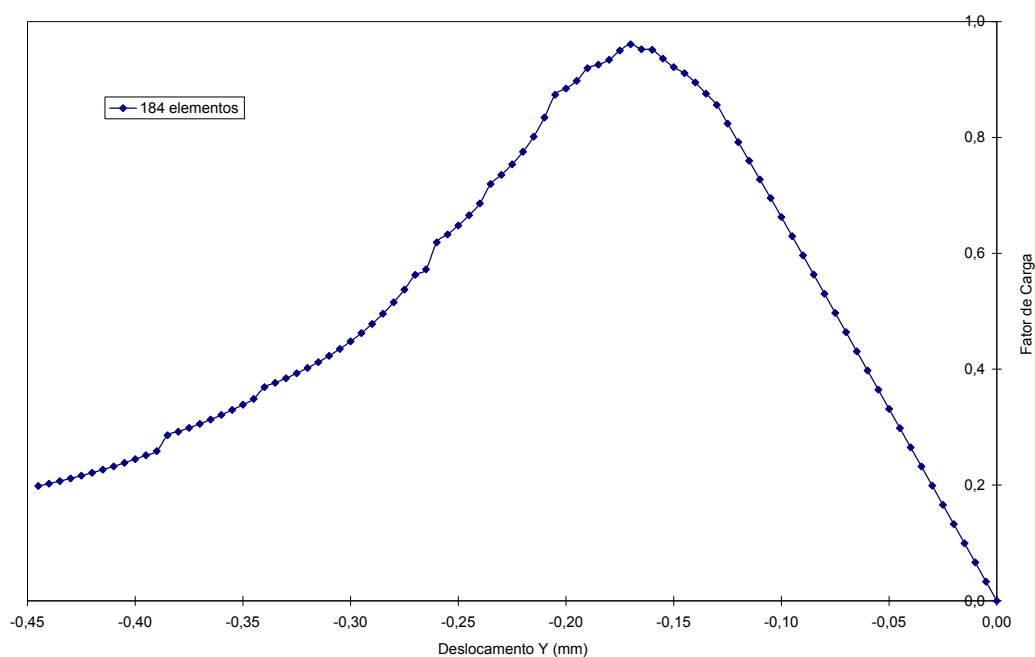
de tração, não há a necessidade de uma transição do estado de tensões dos elementos dessa região, logo, a propagação depende muito pouco da ação da fissura nessa região. Já a parte superior da viga está inicialmente toda comprimida e depende totalmente da ação da fissura para que, gradativamente, passe do estado predominante de compressão para o de tração, à medida que a fissura se propaga. Logo, os valores dos deslocamentos associados aos graus de liberdade adicionais dos nós enriquecidos de elementos que estão localizados nessa região são muito elevados e, consequentemente, as disparidades nos valores das tensões associadas são bem maiores durante o processo de enriquecimento dos nós.

Nota-se, porém, que o uso de uma malha mais refinada nessas regiões onde a transição do estado de tensões é acentuada minimiza o problema das disparidades nos valores das tensões nas proximidades da ponta da fissura, resultando em uma aproximação um pouco melhor dos valores corretos da direção da fissura. Porém, mesmo diante do refinamento da malha, o critério de cálculo da direção da fissura baseado na média ponderada de tensões é pouco confiável para descrever corretamente a propagação, uma vez que depende de uma simetria perfeita no processo de enriquecimento dos nós, conforme mostrado na Malha III. Tal simetria foi induzida nesse exemplo para que a limitação desse critério de cálculo da direção da fissura fosse claramente exposta. Na prática, o uso de malhas não estruturadas ou de condições de contorno assimétricas tornam praticamente impossível a ocorrência de um enriquecimento de nós simétrico. Consequentemente, a direção correta da fissura não pode ser garantida com o uso do critério aqui adotado, mesmo diante do refinamento da malha.

Focando-se a atenção na malha III, na qual foi possível descrever corretamente a propagação da fissura de trajetória retilínea, ressaltam-se, a seguir, os resultados obtidos por essa discretização.

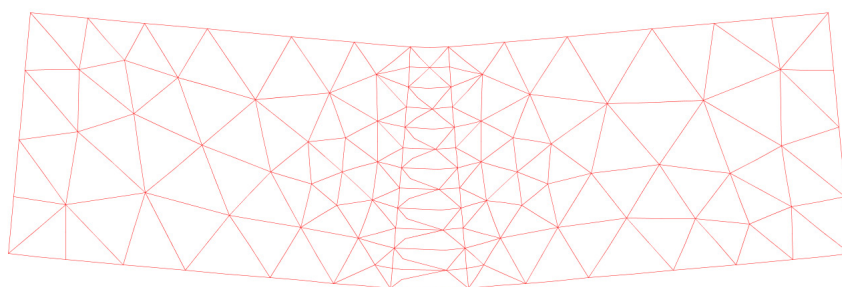
A Figura 5.34 mostra a relação entre o fator de carga global e o deslocamento na direção  $y$  do nó no qual foi aplicada a carga. Esse resultado pode ser comparado

ao resultado obtido por Wells e Sluys (2001). Percebe-se que no trabalho desses autores foi usada uma malha bem mais refinada que a Malha III para a descrição da fissura vertical na seção central da viga. Mesmo assim, os resultados mostrados pela curva de *softening* das duas malhas são praticamente os mesmos. Isso mostra a capacidade do modelo de reproduzir resultados confiáveis de forma independente da discretização.



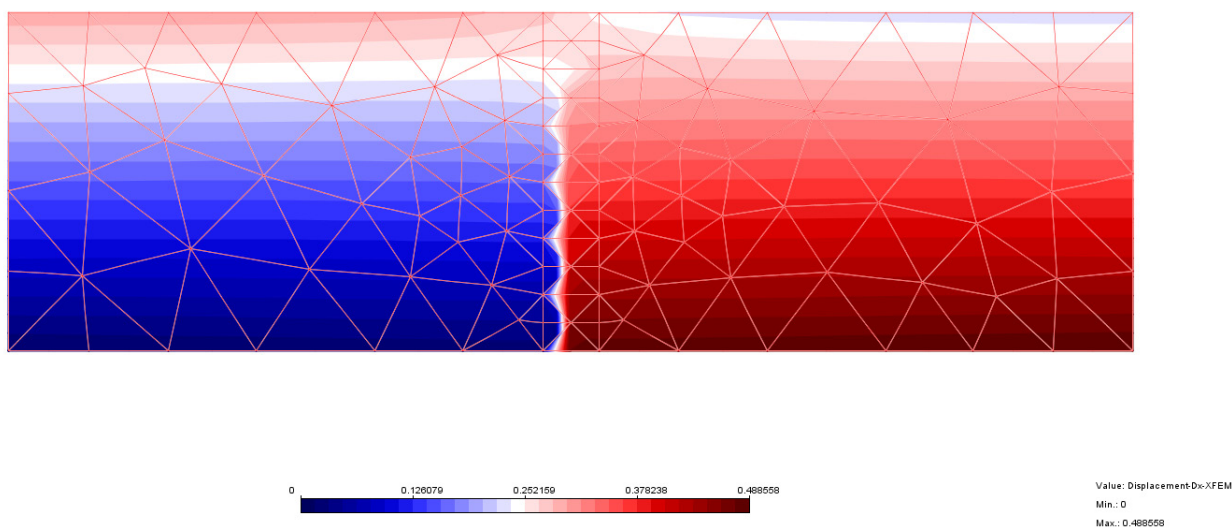
**Figura 5.34:** Flexão em 3 pontos - Malha III - Relação Fator de Carga  $\times$  Deslocamento.

Na Figura 5.35 mostra-se ainda a deformada da Malha III. Por último, ressalta-se o salto no campo de deslocamentos na direção  $x$ , provocado pela fissura da Malha III e mostrado na Figura 5.36.



**Figura 5.35:** Flexão em 3 pontos - Malha III - deformada da malha.





**Figura 5.36:** Flexão em 3 pontos - Malha III - deslocamentos na direção  $x$ .

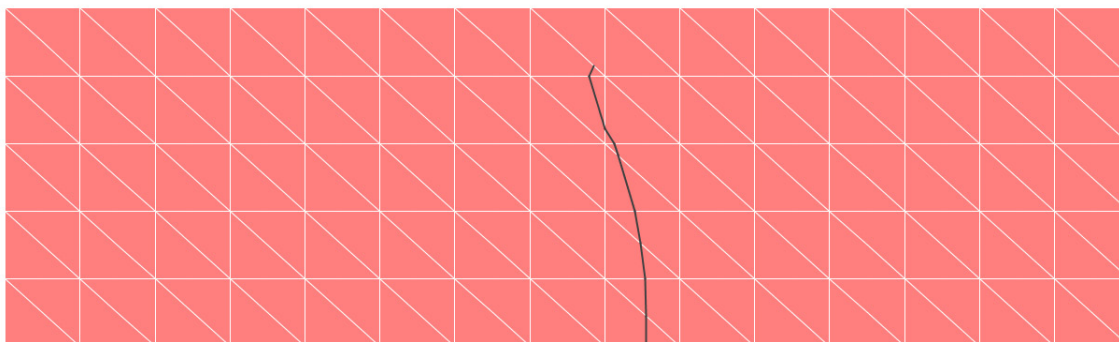
### 5.4.3 Fissura de Trajetória Curva

Nessa seção, o problema de flexão em 3 pontos continua em questão, mas agora é apresentada a resposta das Malhas I, II e III, quando sujeitas a uma fissura que se inicia na parte inferior da viga, em um ponto deslocado de  $0.7\text{ mm}$  para a direita a partir do eixo vertical no centro da mesma. Assim, o objetivo agora é mostrar que o modelo é capaz de descrever uma fissura curva que se propaga livremente, atravessando os elementos finitos de uma malha.

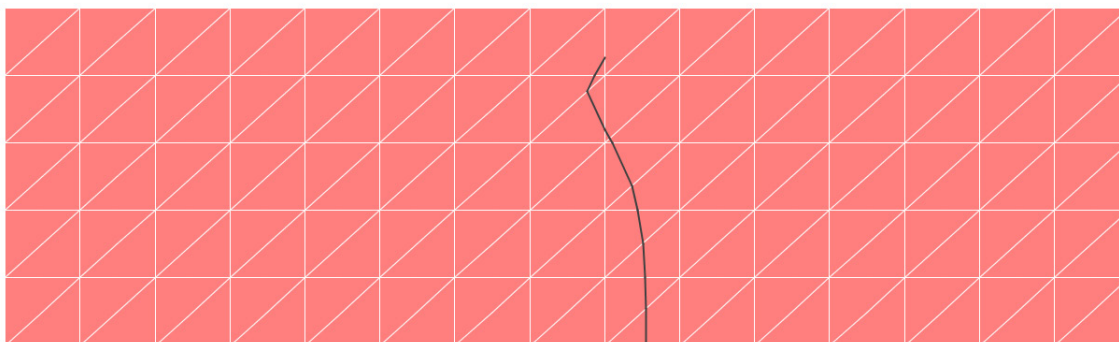
Usando-se as mesmas discretizações anteriores, as Malhas I, II, e III foram processadas com a fissura inicial na nova posição, e o resultado da trajetória da fissura em cada uma delas está indicado nas Figuras 5.37, 5.38 e 5.39. Da inspeção dessas figuras, percebe-se que, apesar das diferenças no traçado da fissura e dos desvios na direção da mesma na região superior da viga, todas as três malhas são capazes de descrever uma trajetória curva.

A causa das diferenças apresentadas em cada trajetória é a mesma já explicada na seção 5.4.2. Devido aos mesmos motivos já apresentados no caso da fissura de trajetória linear, a trajetória da fissura curva sofre desvios do seu traçado correto, principalmente na parte superior da malha, onde ocorre uma transição acentuada

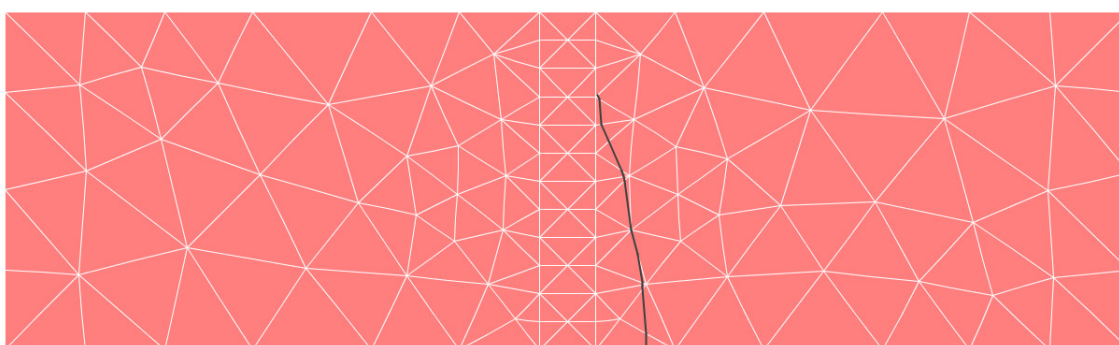
no estado de tensões dos elementos fissurados dessa região.



**Figura 5.37:** Flexão em 3 pontos - Malha I - propagação da fissura curva.



**Figura 5.38:** Flexão em 3 pontos - Malha II - propagação da fissura curva.

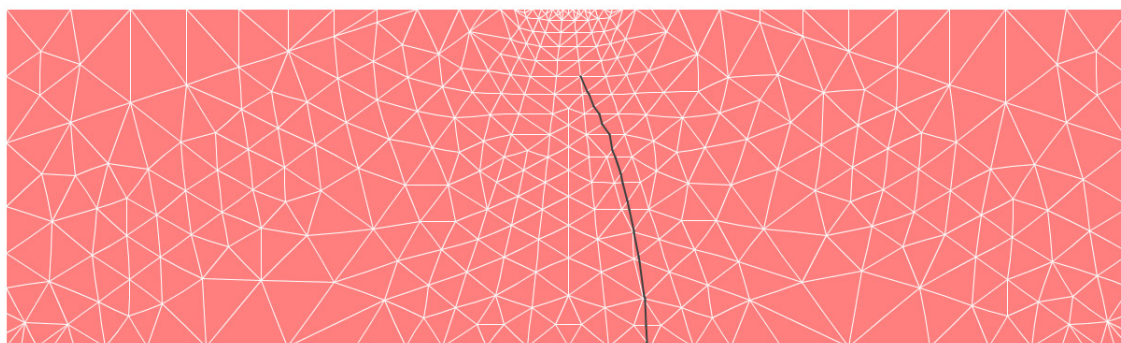


**Figura 5.39:** Flexão em 3 pontos - Malha III - propagação da fissura curva.

Resultados melhores de propagação são obtidos com o uso de uma malha mais refinada na região superior da malha, exatamente onde os valores dos deslocamento associados aos graus de liberdade dos nós enriquecidos são maiores e têm maior

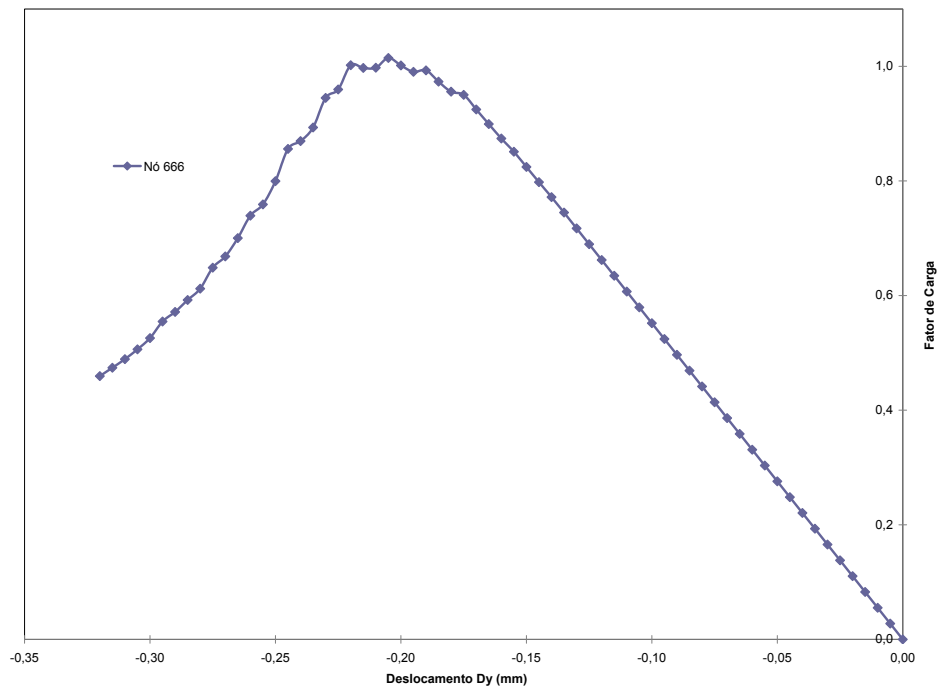
influência na transição do estado de tensões dos elementos. Assim, usando-se a mesma geometria, as mesmas condições de contorno e os mesmos parâmetros do material das demais malhas, foi usada a Malha IV (Figura 5.22) para a descrição da fissura de trajetória curva.

A propagação da fissura na Malha IV está indicada na Figura 5.40. Comparando-se a trajetória aqui mostrada com a trajetória da fissura encontrada por Wells e Sluys (2001), verifica-se que o caminho percorrido pela fissura na Malha IV é muito semelhante à trajetória da fissura lá indicada. Mais uma vez, constata-se a capacidade do modelo de descrever uma fissura de trajetória curva.

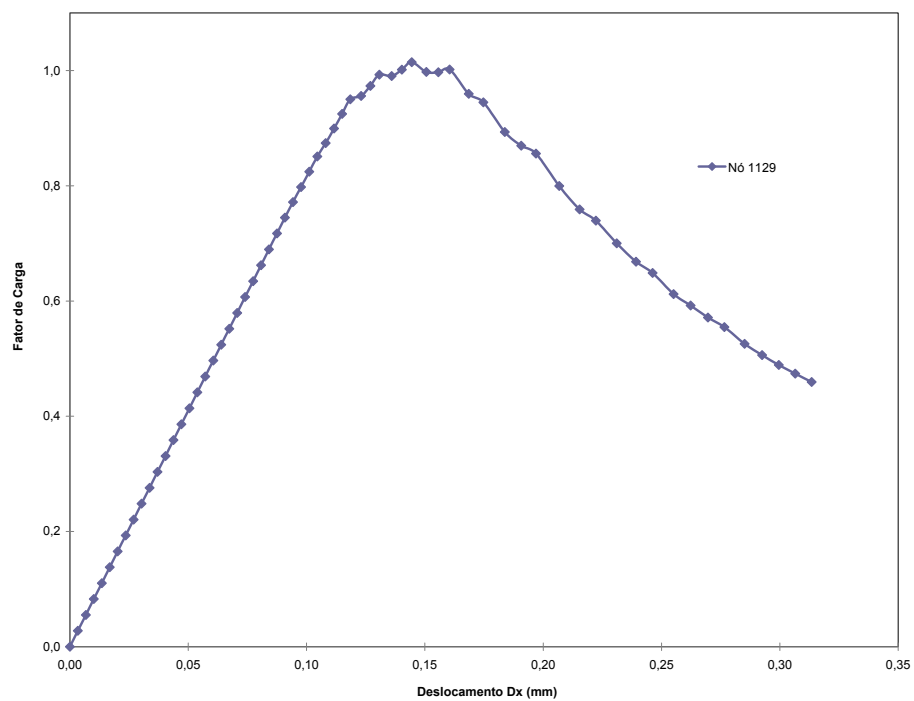


**Figura 5.40:** Flexão em 3 pontos - Malha IV - propagação da fissura curva.

Ainda são mostrados outros resultados relativos à Malha IV. Na Figura 5.41, é mostrada a relação entre o fator de carga global e o deslocamento do nó de aplicação da carga, na direção  $y$ . Já na Figura 5.42, é mostrada a relação entre o fator de carga global e o deslocamento, na direção  $x$ , do nó coincidente com o ponto de apoio da viga, localizado na extremidade direita da malha.

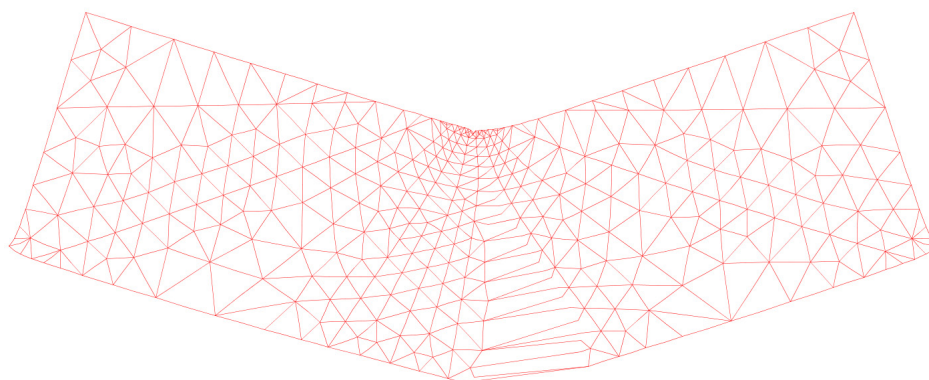


**Figura 5.41:** Flexão em 3 pontos - Malha IV - Relação Fator de Carga  $\times$  Deslocamento  $Dy$ .

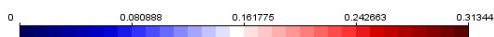
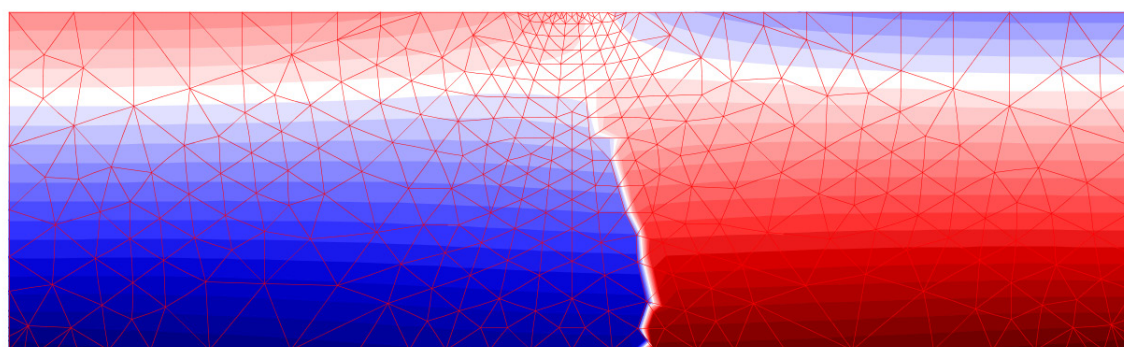


**Figura 5.42:** Flexão em 3 pontos - Malha IV - Relação Fator de Carga  $\times$  Deslocamento  $Dx$ .

Finalmente, a Figura 5.43 apresenta a deformada da Malha IV, e a Figura 5.44 mostra o salto no campo de deslocamentos  $x$ , na qual percebe-se claramente o efeito da presença da fissura de trajetória curva refletido na região descontínua do campo de deslocamentos.



**Figura 5.43:** Flexão em 3 pontos - Malha IV - deformada da malha.

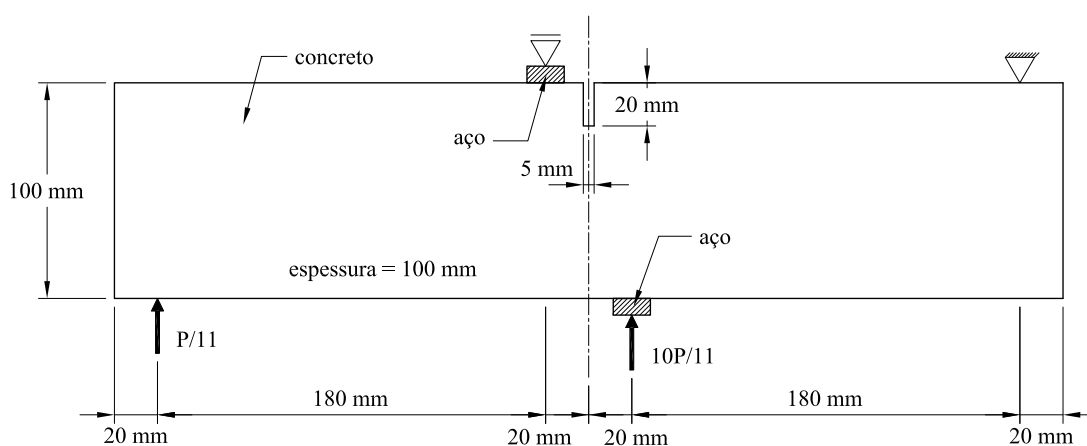


Value: Displacement-Dx-XFEM  
Min.: 0  
Max.: 0.31344

**Figura 5.44:** Flexão em 3 pontos - Malha IV - deslocamentos na direção  $x$ .

## 5.5 Cisalhamento em 4 Pontos

O trabalho de Schlangen (1993) é um estudo muito interessante sobre os mecanismos que se desenvolvem no processo de fissuração do concreto. Nesse trabalho, o autor realiza vários ensaios experimentais de propagação de fissuras em vigas de concreto de diferentes propriedades e apresenta, entre outros, o ensaio de cisalhamento em 4 pontos, usando vigas com um único entalhe. A Figura 5.45 mostra a geometria de um dos grupos de vigas usado por Schlangen (1993) em seu trabalho.



**Figura 5.45:** Geometria e condições de contorno do ensaio de cisalhamento em 4 pontos.

Uma das conclusões mais importantes do trabalho de Schlangen (1993), foi verificar que, mesmo usando um carregamento misto de tração e cisalhamento no ensaio de cisalhamento em 4 pontos, o mecanismo de propagação da fissura é regido unicamente pelo modo I de abertura de fissura. Assim, constata-se que a direção de propagação da fissura é perpendicular à tensão máxima de tração, como era esperado, mas não há deslocamentos relativos entre as faces da fissura na direção tangencial. A fissura abre-se perpendicularmente às superfícies fissuradas, unicamente no modo I de abertura de fissura. O efeito do carregamento de cisalhamento percebido nos experimentos parece se refletir apenas em uma rotação das tensões principais na viga, porém não há deslocamento cisalhante ao longo das faces da fissura.

Entre outras conclusões, Schlangen (1993) também verificou a influência das

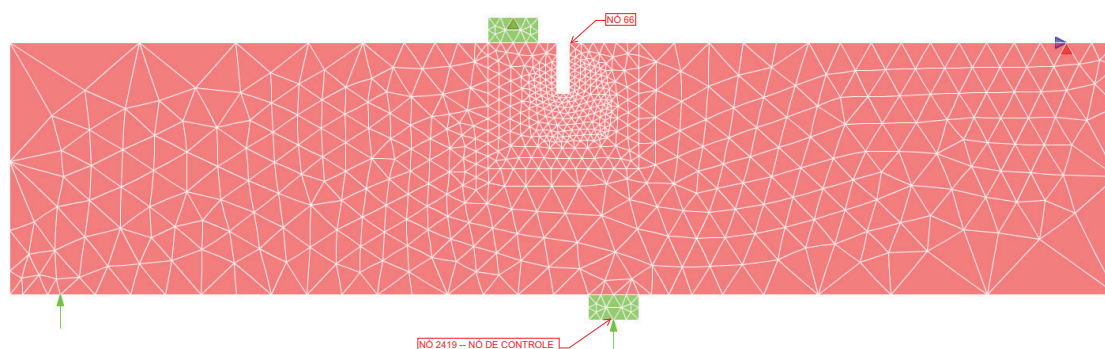
condições de contorno na resposta de propagação de fissuras nas vigas sujeitas ao cisalhamento em 4 pontos e constatou que as mudanças nas condições de contorno, mais precisamente nas vinculações, afetam diretamente o mecanismo de fissuração. Assim, ao mudar algumas condições de contorno das vigas, o autor verificou diferenças na propagação da fissura, na distribuição das cargas e na resposta de *softening*.

Wells e Sluys (2001) simularam numericamente o ensaio de Schlangen para testar se um modelo numérico de fissuras coesivas, baseado no XFEM, é capaz de descrever o processo de propagação da fissura que se desenvolve no ensaio de cisalhamento em 4 pontos. Schlangen (1993) também simulou numericamente o ensaio de cisalhamento em 4 pontos usando um modelo de fissuras distribuídas, porém o modelo não foi capaz de descrever corretamente o caminho percorrido pela fissura.

Como os resultados do ensaio numérico de Wells e Sluys (2001) reproduziram muito bem os resultados do ensaio experimental de Schlangen (1993), procura-se repetir aqui o mesmo ensaio de Wells e Sluys. Logo, o objetivo desta seção é apresentar os resultados numéricos do **INSANE** para o ensaio de cisalhamento em 4 pontos conforme proposto por Wells e Sluys (2001). Assim, de acordo com os parâmetros do material usados naquele trabalho, adotam-se aqui os seguintes valores para o concreto:  $E = 3.5 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ ;  $\nu = 0.2$ ;  $f_t = 3.0 \text{ N/mm}^2$ ;  $G_f = 0.1 \text{ N/mm}$ ;  $d_{init} = 1.0 \text{ N/mm} = \text{Rigidez ao cisalhamento} = \text{constante}$ . E os parâmetros do material usado para as placas de carga foram tomados iguais aos do aço:  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ ;  $\nu = 0.3$ .

Para a definição dos valores das cargas concentradas, indicadas na Figura 5.45, foi adotado  $P = 1.0 \text{ N}$ .

A Figura 5.46 mostra a discretização usada. A malha foi montada e carregada conforme a geometria e as condições de contorno indicadas na Figura 5.45.



**Figura 5.46:** Discretização da viga em malha de 1206 elementos.

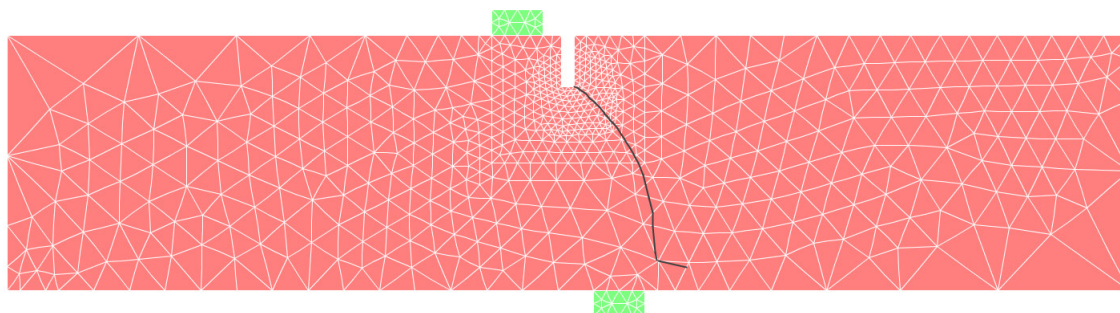
Usa-se uma malha composta de 1206 elementos e um maior refinamento na região próxima ao entalhe para que se possa reproduzir melhor a propagação da fissuração, minimizando-se o erro no cálculo da direção da fissura. No exemplo processado pelo **INSANE**, adota-se um valor não nulo e constante para a rigidez ao cisalhamento na região da fissura, conforme indicado nos parâmetros do concreto.

Neste ponto, é importante destacar o método de controle usado para a realização do ensaio numérico no **INSANE**. No ensaio feito por Wells e Sluys (2001), foi usado um método de controle de deslocamentos não disponível no **INSANE**. Segundo os autores, a diferença relativa entre os deslocamentos tangenciais da abertura inicial da fissura, CMSD (Crack Mouth Sliding Displacement), foi usada para controlar o incremento de carga, aliada a uma estratégia de iteração de comprimento de arco. No ensaio experimental de Schlangen (1993), o ensaio é controlado por incrementos de carga até um certo estágio e, em seguida, o circuito passa a ser controlado pelos deslocamentos relativos à superfície da viga.

No ensaio numérico aqui realizado, por não ser possível reproduzir as mesmas condições de controle de deslocamentos de Wells e Sluys (2001) e nem as condições de controle de carga/deslocamento de Schlangen (1993) no **INSANE**, usou-se simplesmente o controle de deslocamento vertical do nó 2419, localizado no ponto de aplicação da carga vertical de maior valor, na parte inferior e central da viga. Assim, os incrementos de carga no ensaio são feitos através da prescrição desses



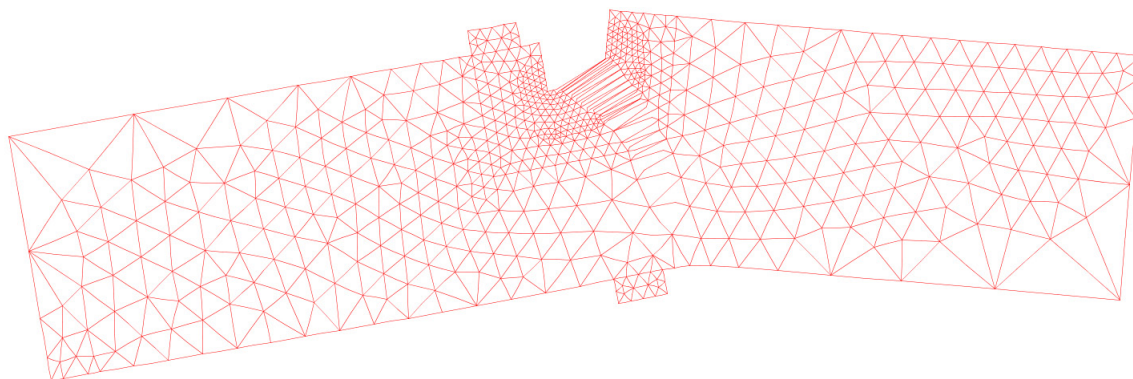
deslocamentos.



**Figura 5.47:** Cisalhamento em 4 pontos - propagação da fissura.

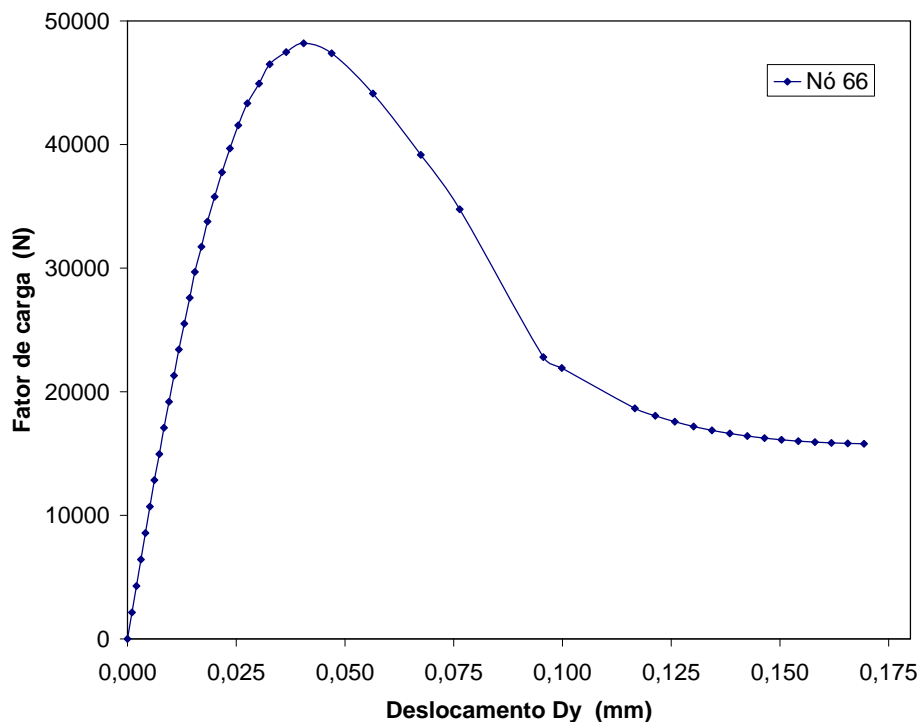
A Figura 5.47 mostra a propagação da fissura na malha usada. Percebe-se que a propagação segue uma trajetória curva, compatível com o trajeto da fissura principal que se propaga nas vigas ensaiadas por Schlangen (1993), começando no entalhe inicial e terminando próximo à placa de carga na parte inferior da viga. Nota-se que, no final da propagação, a fissura sofre um desvio brusco para a direita. Tal comportamento reflete a incapacidade do critério adotado de cálculo da direção da fissura em reproduzir a direção correta da propagação em regiões de altos gradientes de tensão, conforme já discutido na seção 5.4.2.

A deformada da malha é mostrada na Figura 5.48 e pode ser comparada à deformada da viga mostrada por Schlangen (1993), em seu ensaio experimental, e à deformada da viga de Wells e Sluys (2001), em seu ensaio numérico. A deformada indica que o ensaio no **INSANE** foi reproduzido de maneira semelhante aos ensaios de referência, apesar do uso do método de controle do ensaio no **INSANE** ter sido diferente em relação aos outros ensaios citados.



**Figura 5.48:** Cisalhamento em 4 pontos - deformada da malha.

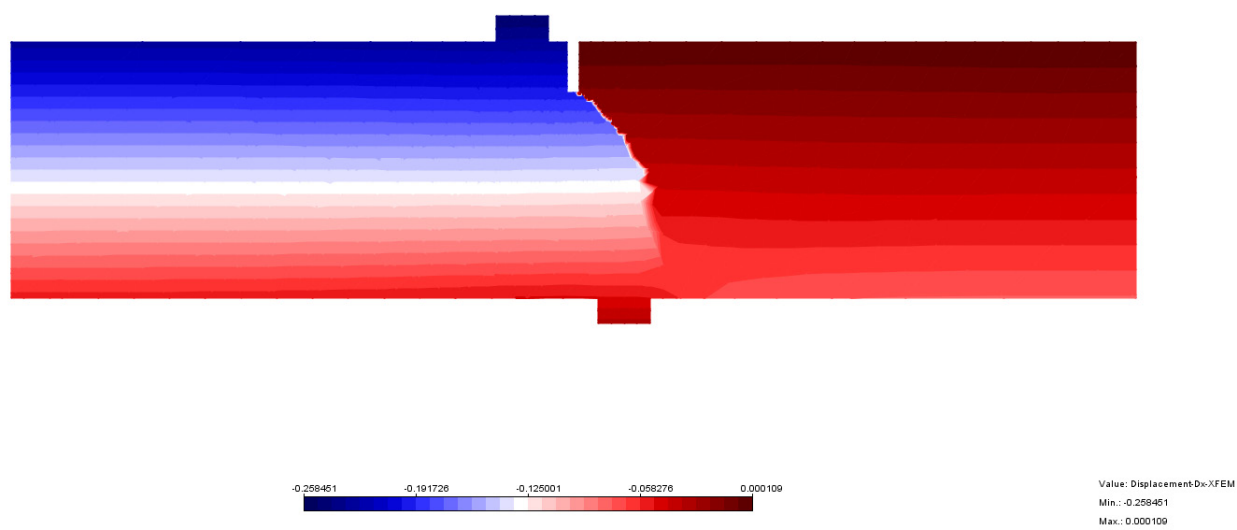
Na Figura 5.49, mostra-se a relação entre o fator de carga global e o deslocamento do nó 66, localizado na quina superior direita do entalhe. Comparando-se esse gráfico com os gráficos apresentados nas referências, percebem-se algumas diferenças. Inicialmente, nota-se que o limite de carga do gráfico aqui mostrado não é coincidente com os demais. Enquanto o limite de carga das referências ocorre por volta de  $40\text{ kN}$ , encontra-se aqui o valor de  $48\text{ kN}$ . Tal fato pode ser atribuído à uma diferença de condições de contorno na execução do ensaio feito no **INSANE** em relação aos outros, uma vez que o método de controle usado aqui foi diferente dos demais. Outra diferença clara é na faixa de valores de deslocamento, no eixo  $x$  do gráfico da Figura 5.49. Isso é facilmente explicado pelo fato de que, nos ensaios de referência, os valores de deslocamentos verticais plotados no eixo  $x$  são relativos, ou seja, são a diferença entre os valores dos deslocamentos verticais absolutos entre as quinas do entalhe inicial. Já em nosso gráfico, foram plotados os valores absolutos do deslocamento vertical da quina direita do entalhe, por isso são valores maiores em relação aos outros. Outra discrepância pode ser observada no final da curva de *softening*, mostrada na Figura 5.49, que torna-se menos acentuada. Tal comportamento é o reflexo da mudança brusca da direção da fissura no final da propagação, que acrescenta uma ductilidade artificial à curva de *softening* nesse trecho.



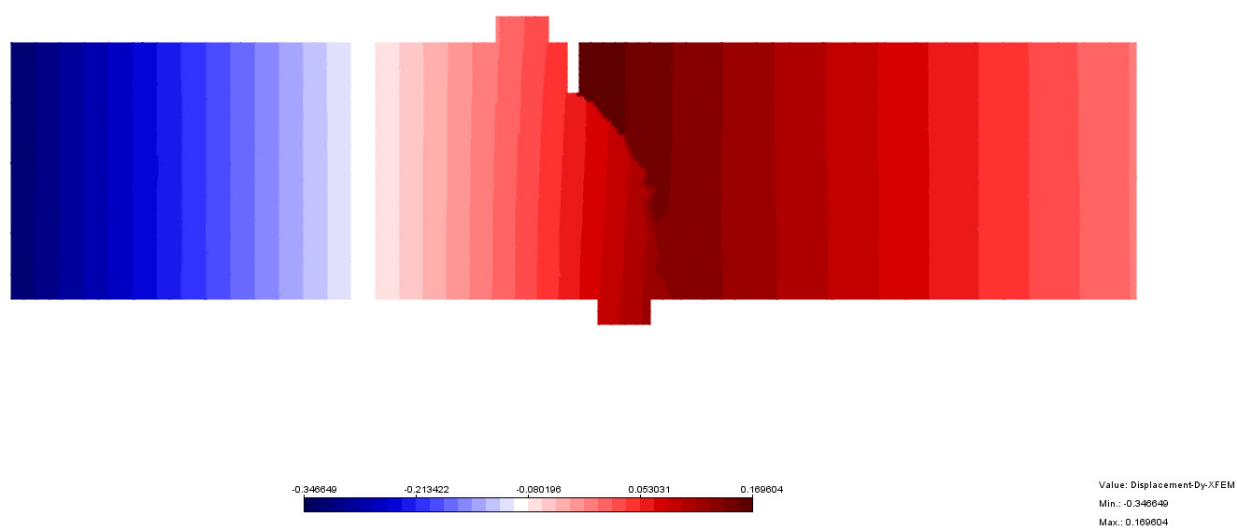
**Figura 5.49:** Cisalhamento em 4 pontos - Relação Fator de Carga  $\times$  Deslocamento  $Dy$ .

Apesar das diferenças entre os resultados aqui obtidos e os resultados mostrados nas referências, fica bastante evidente a capacidade do modelo numérico implementado no **INSANE** de representar, com uma precisão razoável, a propagação da fissura no ensaio numérico de cisalhamento em 4 pontos. Assim, acredita-se que, usando-se um critério de cálculo da direção da fissura mais confiável e um método de controle do ensaio compatível, os resultados encontrados pelo **INSANE** seriam precisamente equivalentes aos resultados referenciais.

Nas Figuras 5.50 e 5.51 são mostrados ainda os campos de deslocamentos da viga sujeita ao cisalhamento em 4 pontos nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Mais uma vez, nota-se a capacidade de descrição cinemática do modelo numérico implementado no **INSANE**, capaz de provocar uma descontinuidade nos campos de deslocamentos, devido à ação da fissuração.



**Figura 5.50:** Cisalhamento em 4 pontos - deslocamentos na direção  $x$ .



**Figura 5.51:** Cisalhamento em 4 pontos - deslocamentos na direção  $y$ .

# Capítulo 6

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 Contribuições deste Trabalho

Neste trabalho, um modelo para descrever a fissuração do concreto foi implementado no núcleo numérico do **INSANE**. O modelo físico baseou-se no conceito de fissura coesiva, e o modelo numérico conjuga este modelo físico com o Método dos Elementos Finitos Estendido, XFEM. O núcleo numérico do **INSANE** foi ajustado para permitir a inclusão de graus de liberdade adicionais aos nós de um elemento finito padrão. Assim, o **INSANE** passou a ter uma ferramenta adicional, que permitiu a aproximação numérica de problemas físicos caracterizados por acentuadas não regularidades em pequenas regiões, como é o caso das descontinuidades e singularidades inseridas em um meio contínuo.

O elemento finito triangular de 6 nós, já existente no código do **INSANE**, foi preparado para ser capaz de receber uma fissura coesiva. Assim, quando uma fissura atravessa um elemento finito padrão, seus nós são enriquecidos, recebendo graus de liberdade adicionais. Estes são usados para descrever os deslocamentos relativos das faces da fissura e, devido ao seu caráter nodal, permitem que uma descontinuidade seja inserida no campo de deslocamentos do elemento.

Os recursos implementados permitem uma aproximação com precisão razoável da resposta de fissuração do concreto, sendo capaz de modelar fissuras discretas que atravessam a malha de forma independente de sua geometria e topologia. A geometria da fissura, formada por segmentos lineares, permite a propagação de fissuras

curvas ou retilíneas. Além disso, resultados satisfatórios são alcançados mesmo com o uso de malhas grosseiras.

Os resultados numéricos permitem concluir que o modelo aqui implementado apresenta características superiores em relação aos modelos de elementos de interface e fissuras distribuídas na representação numérica da fissuração do concreto, uma vez que a propagação não se limita às interfaces dos elementos, e o método não apresenta dependência de malha. Seu uso é apropriado para a descrição de macrofissuras e, embora aqui tenha sido implementado de forma a permitir que apenas uma única fissura atravessasse um elemento, nada impede que seja usado para descrever múltiplas fissuras no material estudado (Budyn et al., 2004).

Uma ressalva deve ser feita, porém, com respeito ao critério usado neste trabalho para o cálculo da direção de propagação da fissura. Tal critério baseia-se na média ponderada das tensões de pontos localizados nas proximidades da ponta da fissura e mostrou-se pouco confiável na correta predição da propagação em regiões com altos gradientes de tensão.

## 6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

O Método dos Elementos Finitos Estendido tem sido alvo de muita pesquisa e desenvolvimento nos últimos anos. Vários avanços têm acontecido, e novas aplicações têm sido apresentadas com o uso do XFEM. Atualmente, o campo mais maduro de aplicação do XFEM é o de modelagem de fissuras estacionárias e sujeitas à propagação (Belytschko et al., 2009). Porém, devido ao aprimoramento da capacidade trazido ao Método dos Elementos Finitos pelo XFEM, a expectativa é de que ainda muitas aplicações do XFEM sejam feitas em problemas de interesse da Mecânica dos Materiais.

Algumas das aplicações que têm sido apresentadas com o uso do XFEM podem ser vistas na revisão feita por Yazid et al. (2009). Assim, o XFEM tem sido usado na análise de interface entre materiais, na descrição de fissuras coesivas, no estudo

de superfícies sujeitas a fricção e na propagação dinâmica de fissuras, só para citar algumas aplicações.

Além disso, o XFEM pode ser usado junto com o Método de Conjunto de Níveis ou Planos (Level Set Method), para a descrição da geometria de interfaces ou descontinuidades complexas (ver Sukumar et al. (2001) e Bordas e Moran (2006)). Essa é uma técnica numérica que evita a parametrização de entidades geométricas, como superfícies ou curvas, em uma malha cartesiana. Adicionalmente, ela permite a modelagem simplificada do movimento das superfícies de interface.

Portanto, de forma geral, muito há para se pesquisar, aperfeiçoar e aplicar no uso do XFEM para a aproximação de problemas físicos da Engenharia. Contudo, de forma mais específica, relacionadas à continuidade e aperfeiçoamento deste trabalho, algumas sugestões imediatas são enumeradas a seguir:

1. Implementar um critério de cálculo da direção da fissura que seja mais confiável do que o critério baseado na média das tensões ponderadas;
2. Ampliar a capacidade de suporte à fissuração coesiva para os demais elementos planos existentes no **INSANE**;
3. Estender a capacidade do método para a modelagem de propagação de fissuras múltiplas em elementos planos;
4. Adicionar o Método de Conjunto de Níveis (Level Set Method) ao código do **INSANE**, de modo a permitir a descrição geométrica de fissuras e descontinuidades complexas tridimensionais;
5. Aplicar o XFEM na descrição de fissuras coesivas em elementos sólidos tridimensionais;
6. A partir do uso do XFEM, implementar outros modelos capazes de descrever o comportamento físico não linear de outros materiais, como o aço em situação de fadiga, por exemplo.

Em resumo, o método aqui implementado para a descrição do processo de fissuração do concreto, apesar de já ter apresentado resultados satisfatórios, tem muito ainda para ser aperfeiçoado e ampliado. Além do mais, fora do escopo do estudo da propagação de fissuras no concreto, há um amplo conjunto de aplicações na Mecânica dos Materiais que está aberto pelo XFEM.



# Apêndice A

## O Modelo de Fissuras Coesivas, o XFEM e o Núcleo Numérico do INSANE

### A.1 Introdução

O **INSANE** é um conjunto de aplicativos implementados usando-se a metodologia de Classes e Objetos, de acordo com o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO). Dentre as linguagens de programação que suportam a POO, a linguagem Java foi escolhida para ser usada no **INSANE** por apresentar todas as vantagens das linguagens de POO somadas a outra vantagem: a sua característica de portabilidade, que pode ser traduzida como a sua independência de plataforma (Fonseca, 2008).

Os aplicativos que compõem o **INSANE** formam basicamente um programa pré-processador, um pós-processador e um processador. Os dois primeiros são responsáveis por oferecer recursos gráficos interativos para a geração de malhas e visualização de resultados, respectivamente. Já o processador é o aplicativo responsável pelo gerenciamento e execução de todo o cálculo numérico que envolve a solução de um modelo discreto. Assim, o processador pode ser considerado o núcleo numérico do **INSANE**.

Para a realização deste trabalho, foram necessários alguns ajustes localizados principalmente no núcleo numérico do programa. Esses ajustes compreendem a

implementação de classes adicionais que foram incorporadas ao código de forma a permitir que um modelo discretizado em elementos finitos triangulares de seis nós possa tratar a propagação de uma fissura coesiva. Como o método adotado para a modelagem numérica desse problema específico é o XFEM, tornou-se necessário que o núcleo numérico pudesse incorporar à suas ferramentas existentes a capacidade de processamento de malhas compostas por elementos sujeitos a uma variação do número de graus de liberdade de seus nós. Além disso, foi necessária a criação de classes capazes de representar a geometria da fissura, a propagação da mesma, o modelo constitutivo de fissura coesiva e o processo de integração numérica especial, entre outras. Também tornou-se necessária a adição de ferramentas à algumas classes já existentes no núcleo numérico, responsáveis por manipular os modelos discretos montados com essas novas características. Logo, novas classes, derivadas dessas classes já existentes, foram criadas para completar todas as ferramentas necessárias ao tratamento do problema específico de propagação de fissuras.

Cabe aqui ressaltar que o ambiente de programação do **INSANE** é adequado a esse tipo de ajuste, pois permite que novas características sejam incorporadas aos aplicativos sem a necessidade de modificação do código existente. Assim, no caso de classes que foram modificadas, o que acontece é a simples adição de novos métodos e parâmetros à essas classes através de mecanismos de herança, próprios do ambiente de programação adotado no **INSANE**. Devido a esse ambiente, o **INSANE** permite que todas as suas funcionalidades já existentes sejam aproveitadas e exige que sejam implementadas nos aplicativos apenas as novas características desejadas.

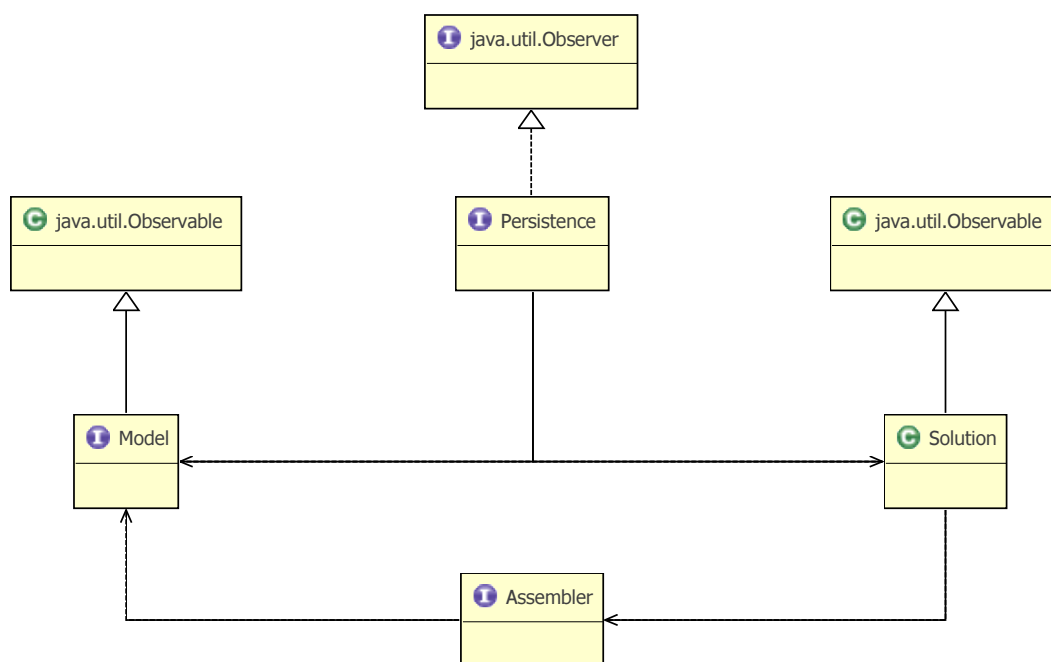
Com o objetivo de apresentar um panorama bem geral da implementação feita neste trabalho, procura-se descrever esquematicamente cada uma das principais classes que foram acrescentadas ao núcleo numérico do **INSANE**. Dentro de cada classe, são ressaltados apenas alguns métodos, considerados mais relevantes para a visualização do funcionamento do modelo aqui implementado.

A **Unified Modeling Language (UML)** é uma linguagem de modelagem usada

por desenvolvedores de software que permite a visualização do produto do trabalho do desenvolvedor em diagramas padronizados. Entre os vários diagramas que são usados para representar graficamente o conjunto de informações que constitui um modelo UML, existe o Diagrama de Classes. O Diagrama de Classes é uma representação da estrutura e relações das classes que compõem o código de um aplicativo.

A seguir, para a descrição esquemática da implementação realizada neste trabalho, são apresentados os Diagramas de Classe das principais classes que foram acrescentadas ao núcleo numérico do **INSANE** para possibilitar o uso do modelo numérico de fissuras coesivas no contexto do XFEM.

## A.2 Núcleo Numérico



**Figura A.1:** Organização do núcleo numérico do **INSANE**.

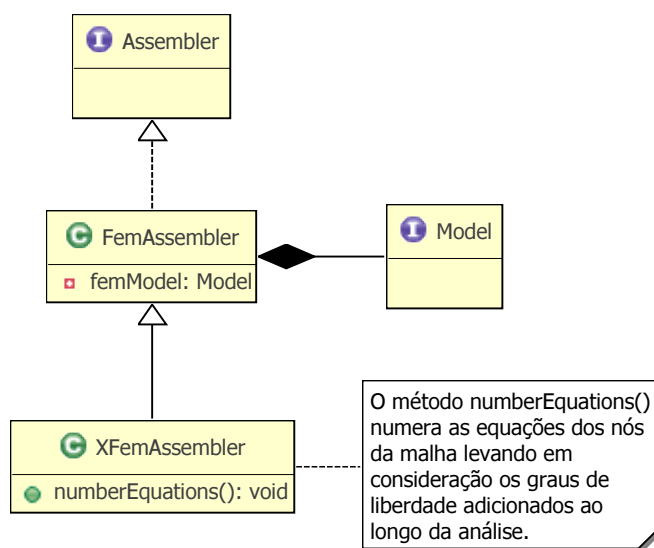
A Figura A.1 mostra a organização do núcleo numérico do **INSANE**. Para uma visão mais detalhada de cada uma das classes e principais métodos que formam o núcleo numérico, o trabalho de Fonseca (2008) pode ser consultado.

De acordo com a Figura A.1, o núcleo numérico é composto basicamente pelas

interfaces `Model` e `Assembler` e pela classe `Solution`. Dentre essas três, apenas `Model` e `Assembler` foram ajustadas para permitir a incorporação do modelo numérico de fissuras coesivas baseado no XFEM.

### A.3 Assembler

A Figura A.2 mostra o diagrama da classe `XFemAssembler`, que foi acrescentada à hierarquia de `Assembler`. Os métodos de `XFemAssembler` são responsáveis pela montagem do sistema de equações matricial do problema, levando em consideração a modificação do tamanho das matrizes envolvidas ao longo do processamento, uma vez que novos graus de liberdade podem ser acrescentados durante o processo de propagação da fissura.



**Figura A.2:** Diagrama de classe para `XFemAssembler`.

### A.4 Model

No caso da interface `Model`, as alterações foram mais amplas e a Figura A.3 mostra o diagrama de classe de `XFemModel`, que foi adicionada à hierarquia de `Model`.

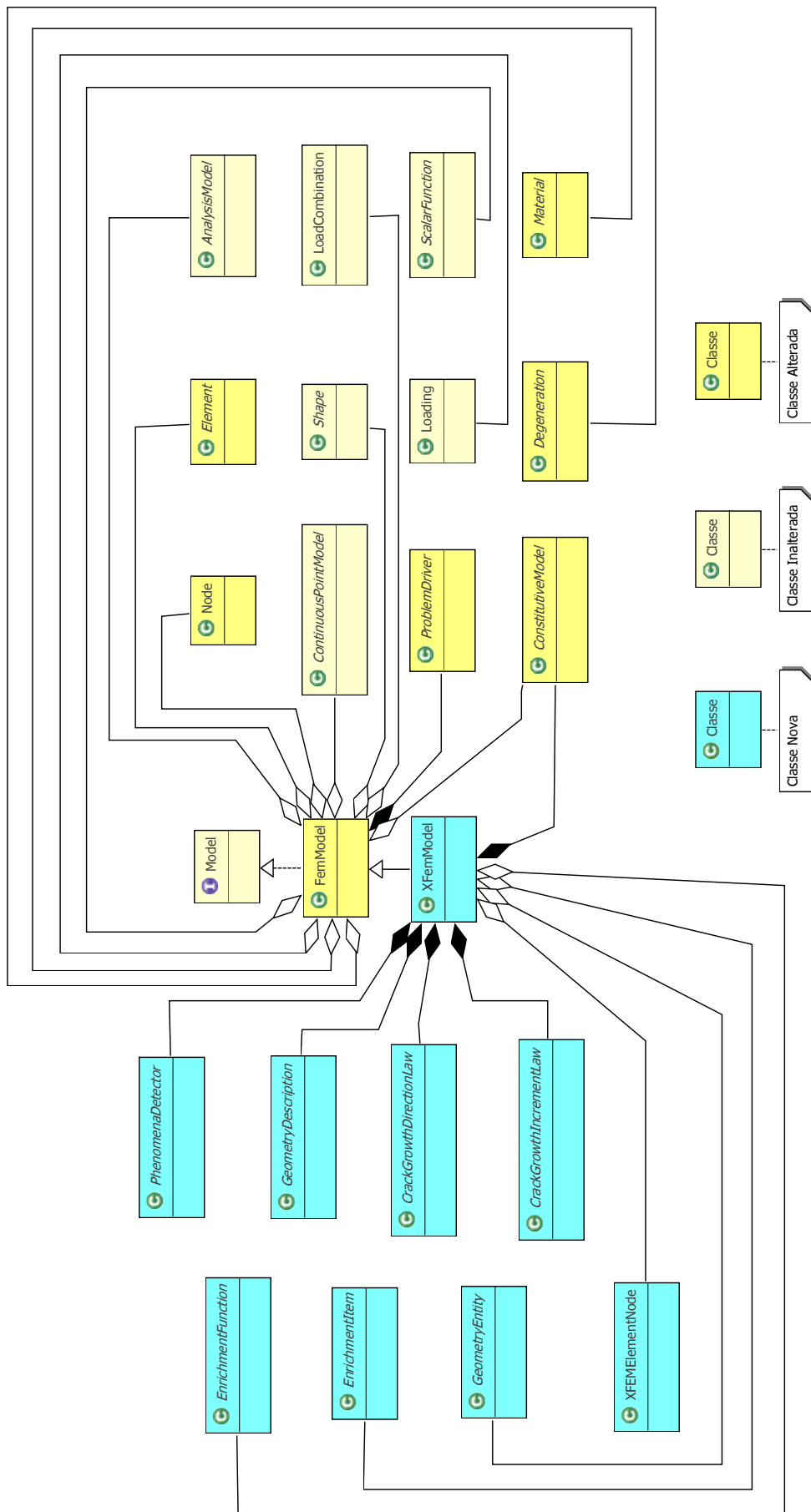
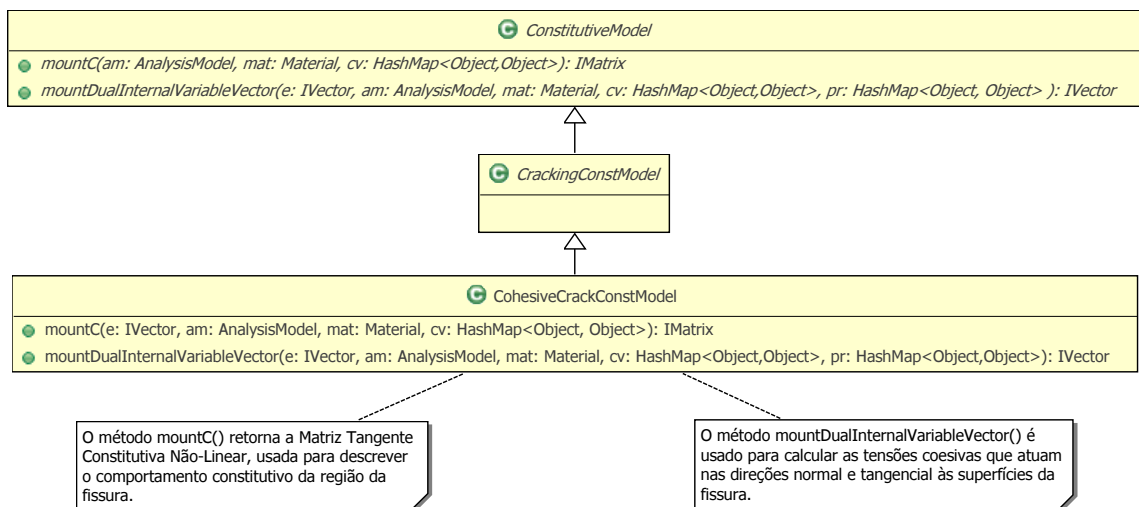


Figura A.3: Diagrama de classe para XFemModel.

Nessa figura, mostram-se além da hierarquia de `Model`, as demais dependências das classes `FemModel` e `XFemModel`.

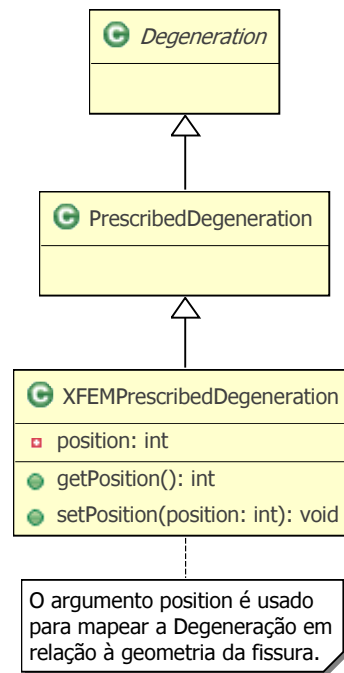
De acordo com o esquema de cores indicado na Figura A.3, as classes mostradas são classificadas como inalteradas, alteradas ou novas. Assim, as novas classes das quais depende a classe `XFemModel` são mostradas à esquerda do diagrama, enquanto as classes inalteradas e as alteradas, das quais dependem as classes `FemModel` e `XFemModel`, são mostradas à direita do diagrama.

Tomando-se inicialmente as classes indicadas como alteradas, conforme o esquema da Figura A.3, mostra-se na Figura A.4 a hierarquia parcial da classe `ConstitutiveModel`, onde acrescenta-se a classe `CohesiveCrackConstModel`. Essa classe é responsável pela caracterização do modelo constitutivo de fissura coesiva usado na região fissurada do domínio.



**Figura A.4:** Diagrama de classe para `CohesiveCrackConstModel`.

Em seguida, a Figura A.5 mostra a hierarquia parcial da classe `Degeneration`, onde aparece a classe `XFEMPrescribedDegeneration`, que foi acrescentada para que os Pontos de Integração do modelo discretizado possam ser mapeados em relação à linha de fissura na malha.



**Figura A.5:** Diagrama de classe para `XFEMPrescribedDegeneration`.

A Figura A.6 mostra o diagrama da classe `ConcreteCohesiveCrack`, que é adicionada à hierarquia da classe `Material` com o objetivo de caracterizar o concreto fissurado.

Ainda no caso das classes alteradas, a Figura A.7 indica o diagrama de classe de `CohesiveCrackProblemDriver`, que foi acrescentada à hierarquia de `ProblemDriver` com o objetivo de montar as matrizes de força e rigidez dos elementos de maneira adequada, sejam eles enriquecidos ou não.

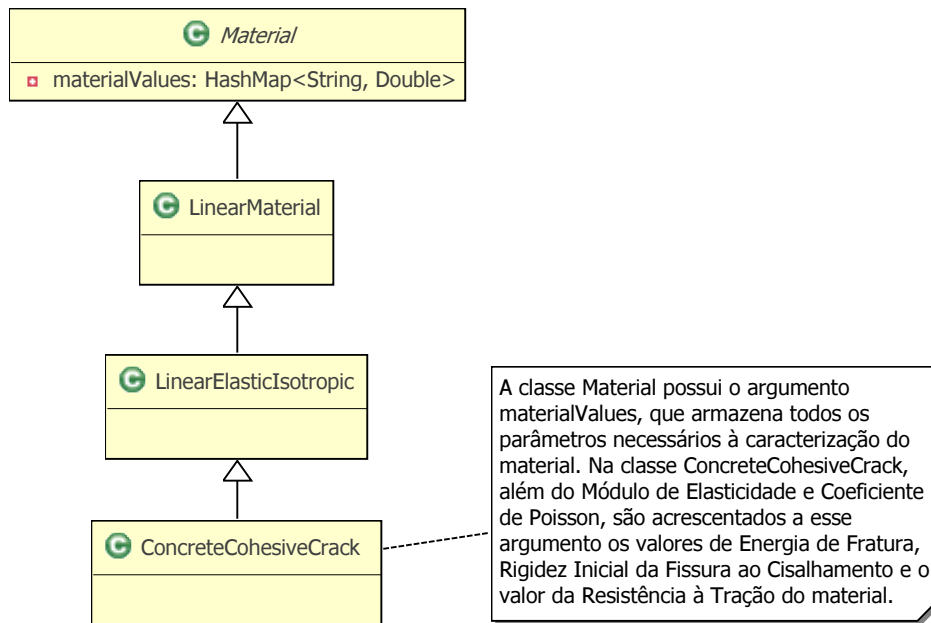


Figura A.6: Diagrama de classe para `ConcreteCohesiveCrack`.

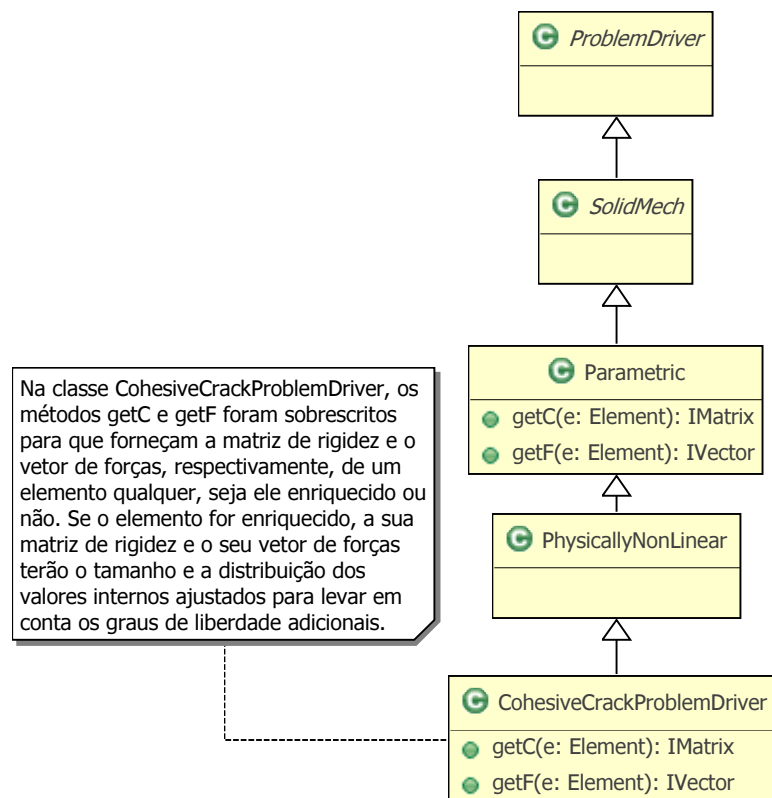
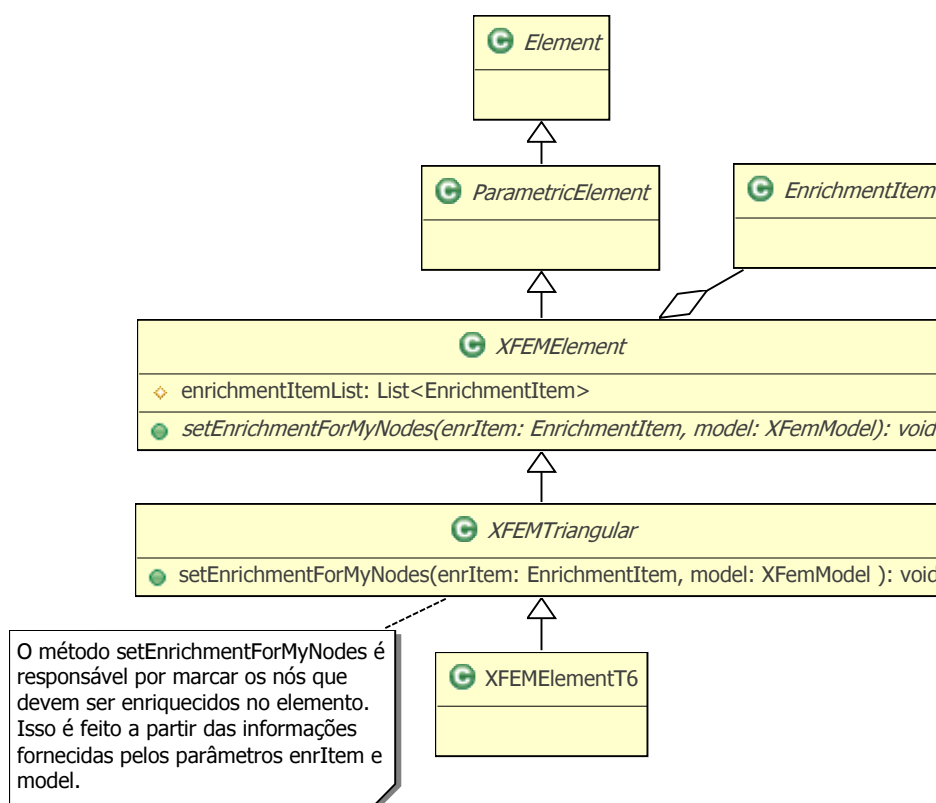


Figura A.7: Diagrama de classe para `CohesiveCrackProblemDriver`.



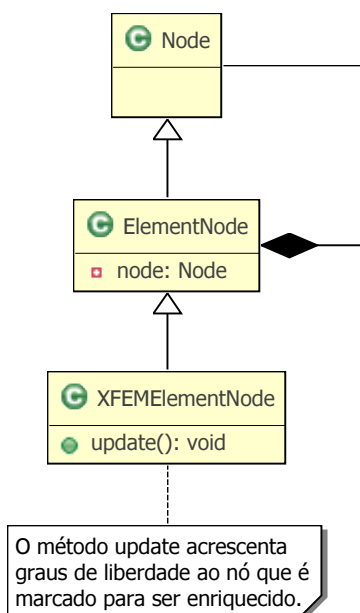
Na Figura A.8, é mostrado o diagrama de `XFEMElement`, classe que foi inserida na hierarquia de `Element` para que capacitasse os elementos triangulares de seis nós a interagir com uma fissura coesiva. Assim, uma instância de `XFEMElement` é capaz de reconhecer uma fissura coesiva e, a partir da geometria dessa fissura e das suas demais características, pode redefinir seus pontos de integração levando em conta a presença da fissura, extrair os valores das tensões coesivas que estão agindo na superfície de fissuração e marcar quais de seus nós devem ser enriquecidos ou não, só para citar algumas das funcionalidades implementadas.



**Figura A.8:** Diagrama de classe para `XFEMElement`.

A partir da hierarquia já existente para a classe `Node`, foi acrescentada a classe `XFEMElementNode`, como mostra a Figura A.9. No processo de enriquecimento de nós, as instâncias dessa classe são capazes de adicionar graus de liberdade aos já existentes, além de guardar todas as informações pertinentes ao enriquecimento para

que sejam repassadas aos demais elementos que compartilham de um mesmo nó enriquecido.



**Figura A.9:** Diagrama de classe para XFEMElementNode.

Até aqui, foram citadas as classes acrescentadas à hierarquia de superclasses já existentes dentro da estrutura do núcleo numérico do **INSANE**. Esses acréscimos, apesar de não significarem nenhuma alteração no código das classes já existentes, alteram as instâncias criadas a partir da nova hierarquia, uma vez que acrescentam funcionalidades que antes não existiam. Daí tais superclasses terem sido classificadas como alteradas no diagrama da Figura A.3.

A seguir, baseando-se ainda na classificação da Figura A.3, são mostradas as classes novas que foram adicionadas ao núcleo numérico do **INSANE**. Essas classes foram criadas para que novas entidades numéricas relacionadas ao modelo de fissura coesiva baseado no XFEM pudessem ser tratadas pelo processador. Conforme o esquema proposto por Bordas et al. (2006), essas novas entidades são descritas a seguir:

- **PhenomenaDetector** - uma estrutura numérica para identificar um fenômeno físico, no caso, a propagação de uma fissura coesiva (Figura A.10);
- **CrackGrowthDirectionLaw** - uma estrutura numérica para definir uma ou mais leis que regem o cálculo da direção de propagação de uma fissura discreta (Figura A.11);
- **CrackGrowthIncrementLaw** - uma estrutura numérica para definir uma ou mais leis que regem o cálculo do incremento de uma fissura discreta (Figura A.12);
- **EnrichmentItem** - uma estrutura numérica capaz de montar uma fissura discreta com todas as informações e funcionalidades necessárias à sua formação e propagação (Figura A.13);
- **EnrichmentDetector** - um mecanismo numérico para coordenar o enriquecimento dos nós de um modelo de fissuras discretas baseado no XFEM (Figura A.14);
- **EnrichmentFunction** - uma estrutura numérica para definir uma ou mais funções matemáticas de enriquecimento usadas no contexto do XFEM (Figura A.15);
- **GeometryDescription** - uma estrutura numérica para definir uma ou mais formas de descrição da geometria de uma descontinuidade qualquer (Figura A.16);
- **GeometryEntity** - uma estrutura numérica para definir os elementos geométricos que compõem uma descontinuidade qualquer (Figura A.17);
- **IntegrationRule** - um mecanismo para definir regras especiais de integração numérica, necessárias no tratamento de problemas que envolvem cálculos de integrais em domínios descontínuos. (Figura A.18).

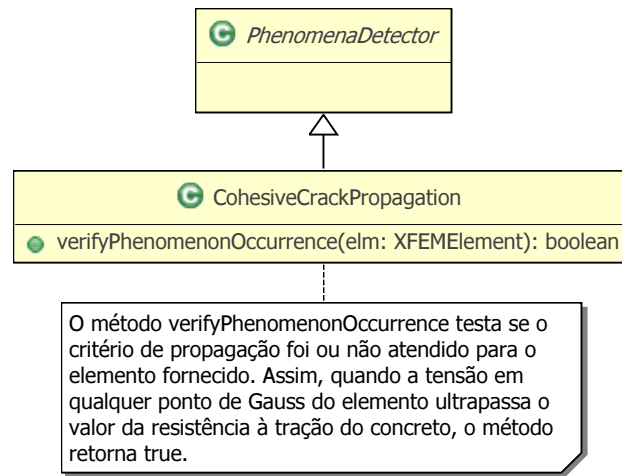


Figura A.10: Diagrama de classe para `PhenomenaDetector`.

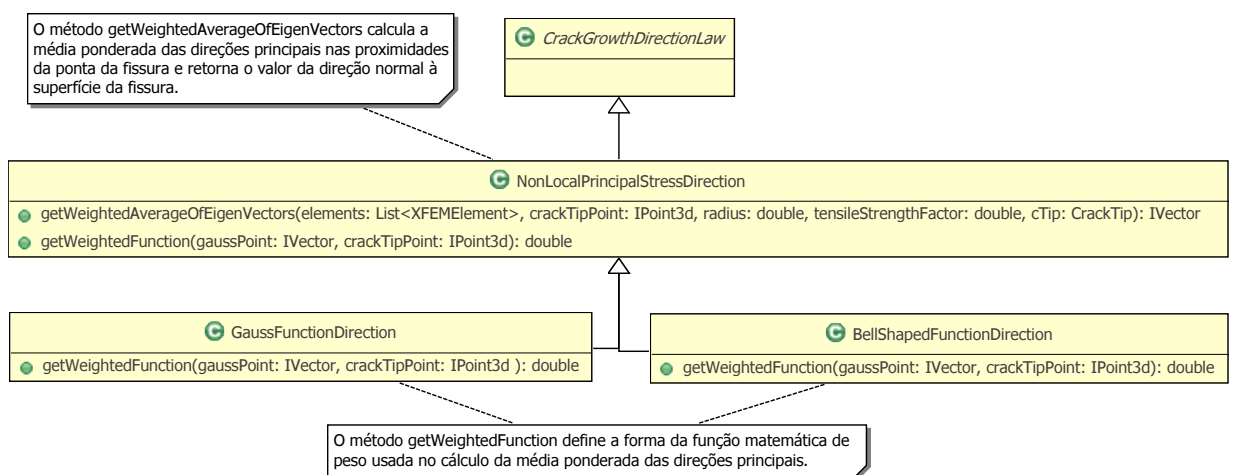


Figura A.11: Diagrama de classe para `CrackGrowthDirectionLaw`.

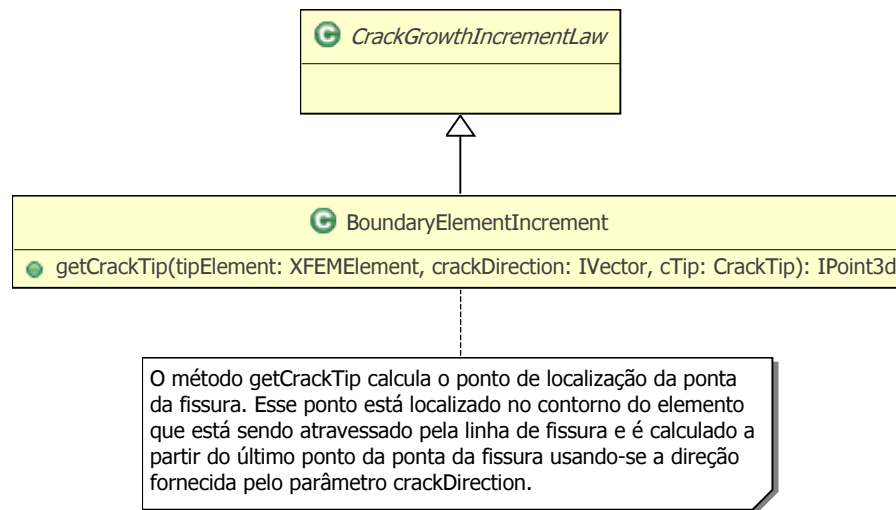


Figura A.12: Diagrama de classe para `CrackGrowthIncrementLaw`.

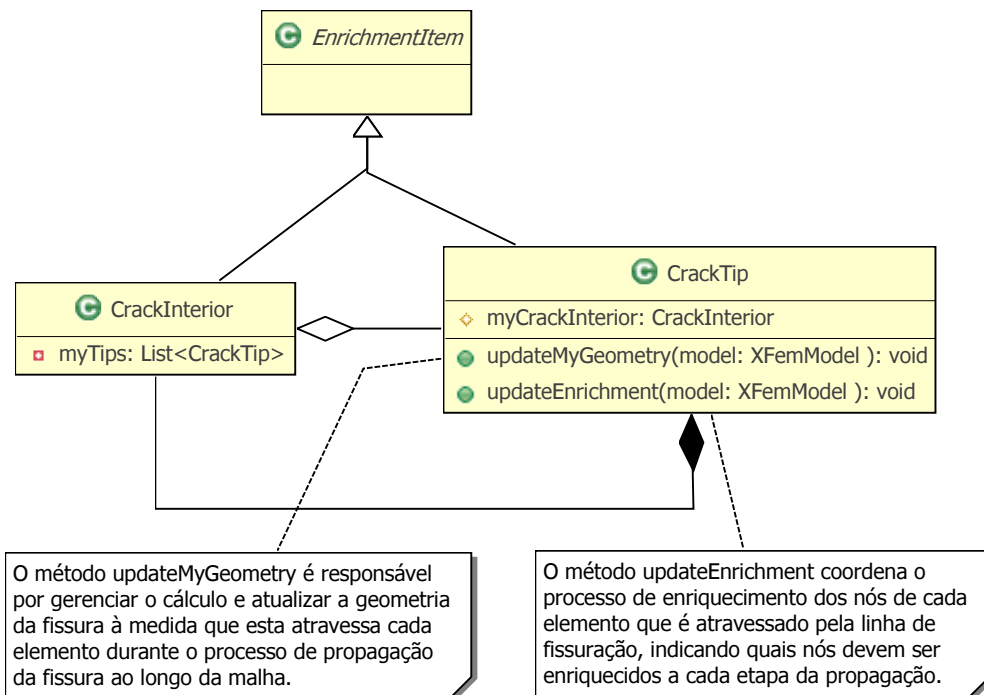


Figura A.13: Diagrama de classe para `EnrichmentItem`.

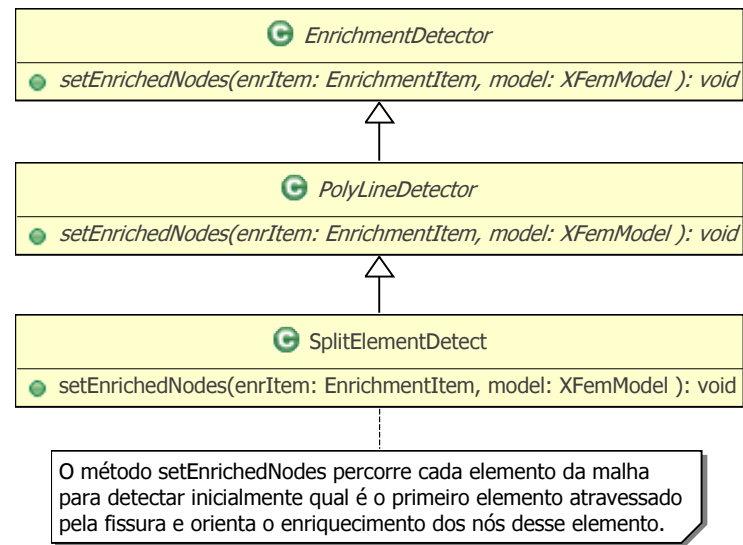


Figura A.14: Diagrama de classe para `EnrichmentDetector`.

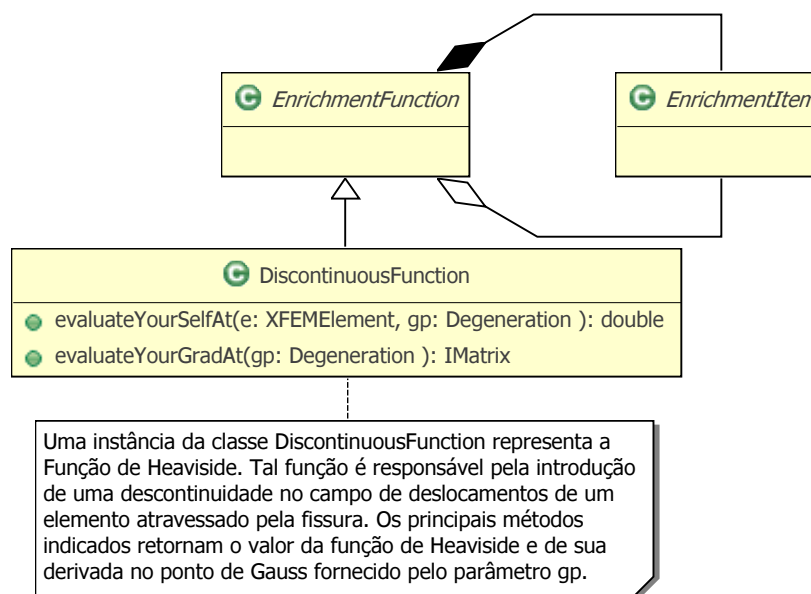


Figura A.15: Diagrama de classe para `EnrichmentFunction`.

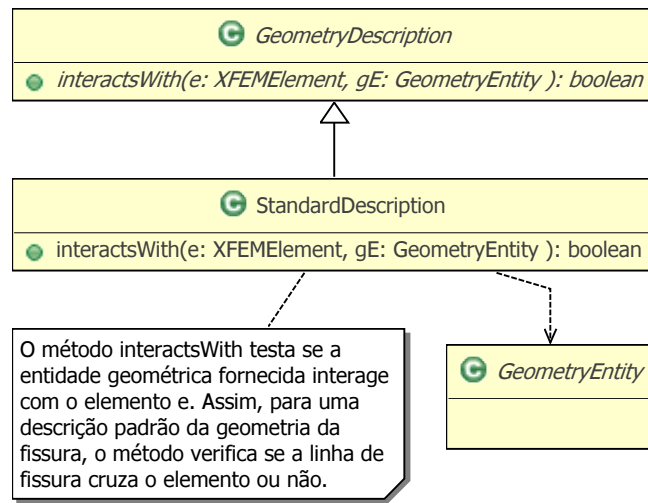


Figura A.16: Diagrama de classe para `GeometryDescription`.

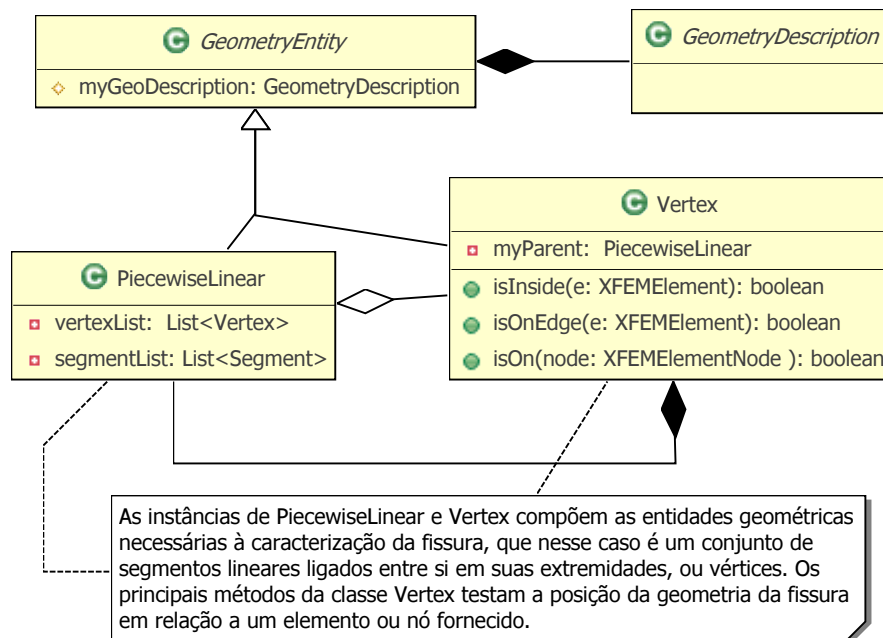
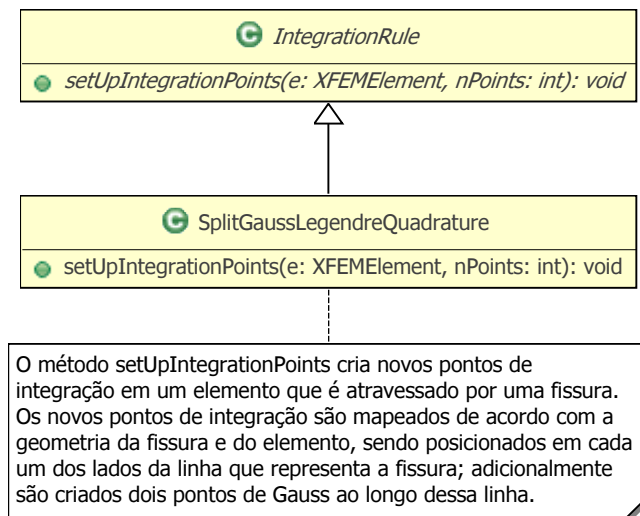


Figura A.17: Diagrama de classe para `GeometryEntity`.



**Figura A.18:** Diagrama de classe para `IntegrationRule`.



# Referências Bibliográficas

- ABNT, 1994, *NBR 7222 - Argamassa e concreto - Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos de prova cilíndricos*, ABNT/CB-18 Cimento, Concreto e Agregados.
- ABNT, 2003, *NBR 6118 - Projetos de estruturas de concreto - Procedimento*, ABNT/CB-02 Construção Civil.
- Anderson, A., Zheng, X. e Cristini, V., 2005. ‘Adaptive unstructured volume remeshing - i: The method’. *Journal of Computational Physics*, vol. 208, pp. 616–625.
- Bazant, Z. P. e Oh, B. H., 1983. ‘Crack band theory for fracture of concrete’. *Materials and Structures, RILEM*, vol. 16, pp. 155–177. (citado em Shah et al., 1995; RILEM, 1989).
- Belytschko, T., Gracie, R. e Ventura, G., 2009. ‘A review of extended/generalized finite element methods for material modeling’. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 17(4), pp. 24.
- Bordas, S. e Moran, B., 2006. ‘Enriched finite elements and level sets for damage tolerance assessment of complex structures’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 73, pp. 1176–1201.
- Bordas, S., Nguyen, P. V., Dunant, C., Nguyen-Dang, H. e Guidoum, A., 2006. ‘An extended finite element library’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 2, pp. 1–33.
- Budyn, E., Zi, G., Moës, N. e Belytschko, T., 2004. ‘A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, pp. 1741–1770.

- Carneiro, F. L. e Barcellos, A., (1949), Résistance a la traction des bétons, *in* 'RILEM Bull. 13', Int. Assoc. Test. Res. Lab. Mater. Struct., pp. 98–125.
- CEB-FIP, 1990, *CEB-FIP Model Code 1990, First Predraft 1988, Bulletin d'Information No. 190a, 190b*, Comité Euro-Internacional du Béton (CEB), Lausanne. (citado em Shah et al., 1995).
- Dao, L. T. N., Dao, V. T. N., Kim, S.-H. e Ann, K. Y., 2010. 'Modeling steel corrosion in concrete structures - part 2: A unified adaptive finite element model for simulation of steel corrosion'. *International Journal of Electrochemical Science*, vol. 5, pp. 314–326.
- Dumstorff, P. e Meschke, G., 2007. 'Crack propagation criteria in the framework of x-fem-based structural analyses'. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 31, pp. 239–259.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Hillerborg, A., Modeer, M. e Petersson, P. E., 1976. 'Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements'. *Cement and Concrete Research*, vol. 6(6), pp. 773–782. (citado em Shah et al., 1995; RILEM, 1989).
- Ingraffea, A. R. e Wawrzynek, P. A., (2004), Computacional fracture mechanics: A survey of the field, *in* P. Neittaanmäki, T. Rossi, S. Korotov, E. Oñate, J. Périaux e D. Knörzer, eds, 'European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004', Jyväskylä.
- Jirásek, M., (2001), Modeling of localized damage and fracture in quasibrittle materials, *in* P. A. V. et al., ed., 'Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive-Frictional Materials', Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, pp. 17–29.
- Jirásek, M. e Belytschko, T., (2002), Computacional resolution of strong discontinuities, *in* H. A. Mang, F. G. Rammerstorfer e J. Eberhardsteiner, eds, 'Fifth World Congress on Computational Mechanics, WCCM V', Vienna, Austria.

- López, C. M., Carol, I. e Aguado, A., 2008. ‘Meso-structural study of concrete fracture using interface elements. i: numerical model and tensile behavior’. *Materials and Structures*, vol. 41(3), pp. 583–599.
- Mal, A. K. e Singh, S. J., 1991. *Deformation of Elastic Solids*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Manzoli, O. L. e Shing, P. B., 2006. ‘A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements’. *Computers and Structures*, vol. 84, pp. 742–757.
- Melenk, J. M. e Babuška, I., 1996. ‘The partition of unity finite element method: Basic theory and applications’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139(1-4), pp. 289–314.
- Mergheim, J., Kuhl, E. e Steinmann, P., 2005. ‘A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 63, pp. 276–289.
- Meschke, G. e Dumstorff, P., (2004), Discontinuous representation of brittle failure, in P. Vemeer, W. Ehlers, H. Herrmann e E. Ramm, eds, ‘Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive-Frictional Materials’, Balkema, pp. 339–352.
- Meschke, G., Dumstorff, P., Fleming, W. e Jox, S., (2006), Computational failure analysis of concrete structures using the extended finite element method, in ‘Neue Bauweisen - Trends in Statik und Dynamik’, TU Dresden, pp. 395–408.
- Ngo, D. e Scordelis, A. C., 1967. ‘Finite element analysis of reinforced concrete beams’. *Journal of the American Concrete Institute*, vol. 64, pp. 152–163.
- Pitangueira, R. L. S., 1998. Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- RILEM, 1989. *Fracture mechanics of concrete structures*. Chapman and Hall, 29 West 35th Street, New York NY 10001.

- Schlangen, E., 1993. Experimental and Numerical Analysis of Fracture Processes in Concrete. Ph.d. thesis, Delft University of Technology.
- Shah, S. P., Swartz, S. E. e Ouyang, C., 1995. *Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and other Quasi-Brittle Materials*. John Wiley & Sons, Inc., 605 Third Avenue, New York, NY 10158-0012.
- Sukumar, N., Chopp, D. L., Moës, N. e Belytschko, T., 2001. ‘Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 190, pp. 6183–6200.
- Wells, G. N. e Sluys, L. J., 2001. ‘A new method for modelling cohesive cracks using finite elements’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50(12), pp. 2667–2682.
- Yazid, A., Abdelkader, N. e Abdelmadjid, H., 2009. ‘A state-of-the-art review of the x-fem for computational fracture mechanics’. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 33(12), pp. 4269–4282.
- Zheng, X., Lowengrub, J., Anderson, A. e Cristini, V., 2005. ‘Adaptive unstructured volume remeshing - ii: Application to two- and three-dimensional level-set simulations of multiphase flow’. *Journal of Computational Physics*, vol. 208, pp. 626–650.