

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**IMPACTO E DETECÇÃO
DA MÁ ESPECIFICAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO
DOS EFEITOS ALEATÓRIOS
EM MODELOS DE DEGRADAÇÃO LINEARES:
Um Estudo por Simulação**

Mestranda: Janaína Luciana Alvernaz Marques Ferreira
janaina.lam@gmail.com

Orientadora: Profa. Dr^a. Marta Afonso de Freitas
marta@dep.ufmg.br

**Belo Horizonte
Maio
2012**

Janaína Luciana Alvernaz Marques Ferreira

Impacto e detecção da má especificação da
distribuição dos efeitos aleatórios em modelos
de degradação lineares: um estudo por
simulação

Dissertação apresentada ao Departamento de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais, para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Produção, Concentração em Produção e Logística.

Orientadora: Marta Afonso Freitas

Belo Horizonte
Maio
2012

Janaína Luciana Alvernaz Marques Ferreira

Impacto e detecção da má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios em modelos de degradação lineares: um estudo por simulação.

74 páginas

Dissertação de Mestrado - Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais. Departamento de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

1. Distribuição dos Efeitos Aleatórios
2. Má Especificação
3. Ferramentas de Diagnóstico
4. Modelos de Degradação

I. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. Departamento de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

Comissão Julgadora:

Dr^a. Marta Afonso Freitas (DEP-UFMG)
(orientadora)

Dr. Anderson Laécio Galindo Trindade
(DEP-UFMG)

Dr. Enrico Antonio Colosimo
(EST-UFMG)

*Aos meus pais, Gessilda e Renato.
Aos meus irmãos, Cíntia, Renatinho
e Paulo Henrique: nosso exemplo de força e esperança, sempre!*

Epígrafe

"Mestre não é quem sempre ensina, mas quem de repente aprende."

João Guimarães Rosa.

Agradecimentos

Um dos meus maiores desafios enfrentados até aqui, não foi decidir quem incluir nos meus agradecimentos, mas sim quem não mencionar. Então, inicio com um agradecimento geral a todos que, de uma forma ou de outra, estiveram ao meu lado na concretização dessa importante etapa da minha vida.

Agradeço à Deus, sempre presente, pela vida e oportunidade de evolução oferecidas.

Aos meus pais, irmãos e minha avó Maria, pela força e amparo incondicionais dispensados.

Ao Julio, pelo seu amor, incentivo e companheirismo ao longo dessa caminhada, sempre juntos!

À minha orientadora, Dr^a. Marta Afonso Freitas, pela orientação e apoio ao desenvolvimento e conclusão desse trabalho.

Ao professor Dr. Enrico Antônio Colosimo, com sua ampla contribuição nas reuniões para desenvolvimento das pesquisas.

À equipe do LADEC (Laboratório de Confiabilidade e Apoio à Decisão), do Departamento de Engenharia de Produção da UFMG, em especial Maria Luíza Toledo, Rívert Braga e Clódio Almeida: não somente companheiros de Mestrado, mas também amigos.

À CAPES pelo financiamento concedido durante os anos do curso e, finalmente, à UFMG, eternamente grata pelo excelente ensino oferecido.

Resumo

Experimentos de degradação têm sido utilizados, cada vez mais, com o objetivo de obter informações sobre a confiabilidade dos produtos. Os modelos de degradação objetivam estabelecer uma relação entre a degradação e a falha de um componente, quantificando e determinando seus efeitos em seu envelhecimento. Para tanto, a eficiência dessa modelagem está diretamente relacionada ao cumprimento de algumas suposições, dentre elas a normalidade dos efeitos aleatórios. O propósito desse trabalho é analisar os resultados obtidos pelo método de diagnóstico da normalidade dos efeitos aleatórios proposto por Lange e Ryan (1989), aplicado no trabalho de Eberly e Thackeray (2005), além de verificar o impacto da má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios na estimação de algumas quantidades de interesse no estudo da confiabilidade. Através dos resultados das simulações pode-se comprovar que o impacto da má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios é significativo na estimação de quantidades de interesse, como por exemplo o tempo médio até a falha (*MTTF*). Os resultados encontrados nas simulações também confirmam o bom desempenho do método de diagnóstico proposto, em particular, o baixo – e adequado – percentual de rejeição da hipótese nula (normalidade dos efeitos aleatórios) quando os mesmos são normais e o alto percentual de rejeição quando as distribuições assumidas possuem curvas de distribuição muito diferentes da curva de distribuição normal. A aplicação do teste em dados reais (desgaste de rodas de trens) levou à conclusão de não normalidade dos efeitos aleatórios, confirmando um resultado já evidenciado em análises anteriores implementadas a esses mesmos dados. A conclusão deste trabalho é que o teste proposto por Lange e Ryan (1989) atende ao seu objetivo principal: a detecção da normalidade dos efeitos aleatórios, suposição que, se violada, gera impactos significativos nas estimativas de percentis e outras quantidades.

Palavras-chave: Distribuição dos Efeitos Aleatórios, Má Especificação, Ferramentas de Diagnóstico, Modelos de Degradação

Abstract

Degradation experimentes have been used increasingly, with the purpose of obtaining some information about reliability of products. Degradation models aim to establish a relationship between degradation and component failure, quantifying and determining its effects on aging. So, the efficiency of this modeling is directly related to fulfill some assumptions regarding its components, including the normality distribution of random effects. The purpose of this paper is analyze the results obtained by diagnosis' method of normality of random effects proposed by Lange and Ryan (1989), applied in Eberly and Thackeray (2005) and check impacts of this misspecification on estimation of some quantities in reliability studies. Simulations are used to illustrate the misspecification's impact and performance of proposed methodology, also applied to an actual database. Could be shown with simulations that misspecification of random effects distribution have significant impact on estimate of some statistics such as mean time to failure (*MTTF*). Simulations also confirmed the good performance of proposed diagnosis' method, in particular the low – and appropriate – percentage of rejection of null hypothesis (normality of random effects) when they are normal and high percentage of H_0 's rejection when no normal distributions are assumed. The test's application to real data (train wheel wear) leaded to the conclusion of non-normality of the random effects, confirming the result already been found in previous analysis implemented to such data. The conclusion of this work is that the proposed test by Lange and Ryan (1989) meets its main goal: the detection of normality of random effects assumption that, if it will be rejected, it generates a significant impact on estimate of percentiles and others quantities.

Keywords: Random Effects Distribution, Misspecification, Diagnostic Tools, Degradation Models

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Literatura	1
1.2	O Problema da má-especificação da distribuição dos efeitos aleatórios	3
1.3	Objetivos do Trabalho	4
1.4	Situação Prática Motivadora	5
1.5	Estrutura do Texto	6
2	Modelo Geral de Degradação	8
2.1	Estimação dos parâmetros do modelo via método de Máxima Verossimilhança	9
2.2	Avaliação de $F(t)$	11
3	Método proposto por Lange e Ryan (1989)	13
3.1	Lange & Ryan	13
3.2	Aplicação do teste proposto por Lange e Ryan (1989) no trabalho de Eberly e Thackeray (2005)	17
4	Simulação	19
4.1	Verificação do Impacto da má-especificação da distribuição dos efeitos aleatórios	19
4.1.1	Estrutura dos dados gerados	20
4.1.2	Passos seguidos na simulação	20
4.1.3	Resultados das Simulações	27
4.2	Desempenho da técnica proposta por Lange e Ryan (1989)	34
4.2.1	Técnica aplicada a efeitos aleatórios com distribuições Normal, Log-normal e Weibull - valores dos parâmetros considerados em Freitas et al. (2009b)	34
4.3	Técnica de Lange e Ryan aplicada aos parâmetros considerados em 4.1.2	36
4.4	Técnica de Lange e Ryan aplicada ao banco de dados das rodas de trens (Freitas et al. (2009b))	39
5	Conclusões	40
5.1	Sugestões para Pesquisas Futuras	41
	Referências Bibliográficas	42
A	Resultados da Simulação: Vício Relativo	46

B	Resultados da Simulação: Desvio-padrão	49
C	Resultados da Simulação: Percentual de Cobertura dos Intervalos de Confiança	52
D	Resultados da Simulação: Distribuição Normal dos Efeitos Aleatórios	59
	D.1 Vício Relativo	60
	D.2 Desvio-Padrão	61
	D.3 Percentual de Cobertura dos Intervalos de Confiança	62
E	Código utilizado para avaliar a técnica proposta por Lange e Ryan (1989)	66
F	Código utilizado para avaliar o impacto da má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios	68

Lista de Figuras

1.1	Identificação das rodas em um vagão máquina	6
1.2	Dados de degradação das rodas	7
4.1	Formas das funções densidades - Weibull	22
4.2	Formas das funções densidades - Lognormal	23
4.3	Vício relativo para os percentis $t_{1\%}$ (a), $t_{5\%}$ (b), $t_{50\%}$ (c) e $t_{80\%}$ (d). Distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios.	28
4.4	Vício relativo para os percentis $t_{1\%}$ (a), $t_{5\%}$ (b), $t_{50\%}$ (c) e $t_{80\%}$ (d). Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios.	29
4.5	Desvio-padrão dos percentis $t_{1\%}$ (a), $t_{5\%}$ (b), $t_{50\%}$ (c) e $t_{80\%}$ (d). Distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios.	30
4.6	Desvio-padrão dos percentis $t_{1\%}$ (a), $t_{5\%}$ (b), $t_{50\%}$ (c) e $t_{80\%}$ (d). Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios.	31
4.7	Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios. (<i>Bootstrap Paramétrico</i>)	32
4.8	Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios. (<i>Bootstrap Paramétrico</i>)	33
4.9	Percentual de testes rejeitados após 100.000 simulações	36
4.10	Curvas das distribuições Weibull e Lognormal	37
4.11	Aplicação da Técnica de Lange e Ryan (1989) para efeitos aleatórios com distribuição Lognormal.	38
4.12	Aplicação da Técnica de Lange e Ryan (1989) para efeitos aleatórios com distribuição Weibull.	38
A.1	Vício relativo para o percentil $t_{10\%}$ (a) e o $MTTF$ (b). Distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios.	48
A.2	Vício relativo para o percentil $t_{10\%}$ (a) e o $MTTF$ (b). Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios.	48
B.1	Desvio-padrão do percentil $t_{10\%}$ (a) e do $MTTF$ (b). Distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios.	51
B.2	Desvio-padrão do percentil $t_{10\%}$ (a) e do $MTTF$ (b). Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios.	51

C.1	Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Log-normal dos efeitos aleatórios. (<i>Bootstrap Paramétrico</i>)	53
C.2	Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Log-normal dos efeitos aleatórios. (<i>Bootstrap Não-Paramétrico</i>)	54
C.3	Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Log-normal dos efeitos aleatórios. (<i>Bootstrap Não-Paramétrico</i>)	55
C.4	Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios. (<i>Bootstrap Paramétrico</i>)	56
C.5	Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios. (<i>Bootstrap Não-Paramétrico</i>)	57
C.6	Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios. (<i>Bootstrap Não-Paramétrico</i>)	58
D.1	Vício Relativo dos percentis $t_{1\%}$ (a), $t_{5\%}$ (b), $t_{10\%}$ (c), $t_{50\%}$ (d), $t_{80\%}$ (e) e <i>MTTF</i> (f). Distribuição Normal dos efeitos aleatórios.	60
D.2	Desvio-Padrão dos percentis $t_{1\%}$ (a), $t_{5\%}$ (b), $t_{10\%}$ (c), $t_{50\%}$ (d), $t_{80\%}$ (e) e <i>MTTF</i> (f). Distribuição Normal dos efeitos aleatórios.	61
D.3	Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Normal dos efeitos aleatórios. (<i>Bootstrap Não-Paramétrico</i>)	62
D.4	Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Normal dos efeitos aleatórios. Não houve convergência para o cálculo do <i>MTTF</i> . (<i>Bootstrap Não-Paramétrico</i>)	63
D.5	Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Normal dos efeitos aleatórios. Não houve convergência para tamanho amostral (n) igual a 50. (<i>Bootstrap Paramétrico</i>)	64
D.6	Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Normal dos efeitos aleatórios. Não houve convergência para o cálculo do <i>MTTF</i> nem para tamanho amostral (n) igual a 50. (<i>Bootstrap Paramétrico</i>)	65

Lista de Tabelas

4.1	Estrutura das medidas de degradação geradas	20
4.2	Valores dos parâmetros da distribuição dos efeitos aleatórios (Weibull(α, δ))	21
4.3	Valores dos parâmetros da distribuição dos efeitos aleatórios (Lognormal(μ, σ))	21
4.4	Estrutura geral dos dados após a simulação	25
4.5	Estrutura dos Resultados	35
4.6	Valores dos parâmetros considerados para construção da Figura 4.10	37
A.1	Vício Relativo para distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios com $\mu =$ $-9,122650$	46
A.2	Vício Relativo para distribuição Weibull dos efeitos aleatórios com $\delta =$ $10.767,69$	47
B.1	Desvio-padrão para Lognormal com $\mu = -9,122650$	49
B.2	Desvio-padrão para Weibull com $\delta = 10.767,69$	50

Capítulo 1

Introdução

1.1 Literatura

O projeto de sistemas com alta confiabilidade, em geral, requer que os componentes individuais que fazem parte de sua arquitetura também tenham alto nível de confiabilidade após longos períodos de operação. Estamos utilizando aqui o conceito de confiabilidade que é “*a probabilidade de um item desempenhar satisfatoriamente a função requerida, sob condições de operação estabelecidas, por um período de tempo predeterminado*” – Freitas e Colosimo (1997).

A distribuição do tempo até a falha é comumente obtida através de modelagem estatística de dados oriundos de ensaios de vida, nos quais vários itens são monitorados até a ocorrência da falha. É comum a situação em que pouquíssimas ou até mesmo nenhuma falha seja observada durante o período de realização do teste e, conseqüentemente, a maior parte das observações seja censurada. Sendo assim, torna-se difícil a estimação da distribuição do tempo até a falha dos componentes sob teste, bem como a estimação de quantidades de interesse tais como: o tempo médio até a falha (*mean time to failure - MTTF*) e os quantis da distribuição. Em outras palavras, torna-se difícil acessar a confiabilidade através de dados oriundos de testes de vida tradicionais, que registram somente o tempo até a ocorrência da falha, pois apresentam uma quantidade de censuras muito alta.

Uma alternativa, na ocorrência dessas situações, é a utilização de testes de vida acelerados em que o tempo até a ocorrência da falha é abreviado através da condução de ensaios em níveis mais altos do que os das condições normais de operação (ex: altas temperaturas ou voltagem). O resultado obtido em condições mais estressantes é utilizado para obter informações nas condições de uso (ou projeto). O planejamento, modelagem e análise de dados oriundos deste tipo de ensaio requerem maiores cuidados e, mesmo assim, não há garantia de que um número suficiente de falhas seja observado durante esse período.

Entretanto, para alguns dispositivos, é possível obter dados de degradação de alguma característica que esteja relacionada ao modo de falha de interesse, ao longo do tempo, e estas medidas podem conter informação útil a respeito da confiabilidade. A relação entre

a falha do componente e essa medida de degradação torna possível o uso de modelos de degradação para fazer inferências a respeito do tempo de falha. Esse tipo de abordagem é denominado de Análise de Degradação, cujo objetivo, assim como dos ensaios de vida, é estimar a distribuição do tempo até a falha para o item em estudo e, a partir dela, obter outras características que sejam de interesse do pesquisador. Na literatura, o número de trabalhos que utilizam dados de degradação como uma alternativa aos dados oriundos de ensaios de vida tradicionais vem aumentando. Exemplos são os trabalhos de Lu e Meeker (1993), Tseng et al. (1995), Yacout et al. (1996), Meeker e Escobar (1998), Wu e Shao (1999), Wu e Tsai (2000), Crk (2000), Oliveira e Colosimo (2004), Hamada (2005) e Freitas et al. (2009a).

Na análise de degradação, alguma propriedade física do item, ou medida relacionada com sua confiabilidade, é observada ao longo do tempo e a falha é definida em função de um nível crítico de degradação. Por exemplo, uma medida pode ser o desgaste na banda de rodagem de um pneu ao longo do tempo (tempo medido em quilometragem) e o nível crítico (D_f), um valor máximo permitido para este desgaste ($D_f = x \text{ mm}$). Portanto, a falha terá ocorrido quando o desgaste da banda de rodagem atingir este nível crítico definido antes do início do ensaio. Outro exemplo é a perda de retenção em grampos utilizados para a fixação de próteses odontológicas móveis. É possível realizar um ensaio de fadiga que simule a utilização do grampo em uma prótese. Neste ensaio, o que se registra ao longo do tempo (medido em ciclos) é a perda de retenção do grampo. A falha, neste caso, é o tempo no qual a perda de retenção chega a 10%. Como pode ser observado, em nenhum dos dois casos a falha é do tipo catastrófica (que não permite reparação), o que ocorre é uma perda no desempenho do componente estudado. Esse tipo de análise se justifica pelo fato de que as falhas estão relacionadas a um mecanismo de degradação em atuação no sistema. Além disso, sua aplicação é satisfatória mesmo que em nenhum dos itens sob teste a medida de degradação ultrapasse o nível crítico especificado previamente.

A Análise de Degradação é feita em duas etapas: na primeira, o perfil de degradação é explicado por um modelo linear (ou não linear) misto, ou seja, que incorpora em sua forma funcional efeitos fixos e aleatórios. Trata-se, portanto, da modelagem de dados longitudinais através de modelos com efeitos mistos – Fitzmaurice et al. (2004). Nesta etapa, os parâmetros fixos e desconhecidos do modelo são estimados, quais sejam: (1) os que indexam a distribuição dos efeitos aleatórios, (2) aqueles que, além dos efeitos aleatórios, fazem parte da forma funcional do modelo e (3) a variância da distribuição dos erros aleatórios. Uma vez que se obtém a estimativa desses parâmetros, a segunda etapa consiste em obter a estimativa da distribuição do tempo até a falha $F_T(t)$. A obtenção desta distribuição pode ser feita de forma analítica (quando possível), através de integração direta numérica ou, como ocorre na maioria dos casos, por simulação de Monte Carlo.

A estimação dos parâmetros do modelo de degradação é feita através do Método da Máxima Verossimilhança (MV). Entretanto, a maximização da função de verossimilhança para modelos deste tipo não é um problema trivial. Uma suposição que é utilizada nesses modelos é que os efeitos aleatórios seguem uma distribuição Normal Multivariada com vetor de médias μ_β e matriz de variância-covariância Σ_β . Mesmo sob essas condições,

a maximização da verossimilhança continua a ser um problema complicado. Para fazer com que a otimização numérica da verossimilhança se tornasse um problema tratável, várias abordagens incluindo aproximações para a verossimilhança (todas sob a suposição de normalidade dos efeitos aleatórios) foram propostas. Lu e Meeker (1993) propuseram um método de estimação em dois estágios para o caso onde o vetor de efeitos aleatórios β ou uma reparametrização conhecida de β segue uma distribuição Normal Multivariada. No caso de métodos de aproximação, alguns deles consistem em expansões de primeira ordem de Taylor dos caminhos de degradação $-D(t_{ij}, \alpha, \beta_i)$, sejam em torno do valor esperado dos efeitos aleatórios (Sheiner e Beal (1980), Vonesh e Carter (1992)) ou em torno dos modos condicionais dos efeitos aleatórios (Lindstrom e Bates (1990)). Em particular, Pinheiro e Bates (1995) utilizaram o método de aproximação de Lindstrom e Bates (1990) para obter estimadores de máxima verossimilhança restrita (EMVR) (Patterson e Thompson (1971)) para modelos de efeitos aleatórios não-lineares (NLME). Estimadores de máxima verossimilhança dos componentes de variância tais como Σ_β e σ_ϵ^2 tendem a subestimar estes parâmetros. Portanto, muitos analistas preferem as estimativas EMVR para essas quantidades. Pinheiro e Bates (2000) implementaram o método proposto por Lindstrom e Bates (1990) na função NLME disponível no *software* S-PLUS (TIBCO Software Inc.). Esta função também está acessível no *software* R (GNU general public license; www.r-project.org). Uma outra opção é o procedimento PROCNLMIXED, disponível no SAS/STAT (SAS Institute Inc.).

1.2 O Problema da má-especificação da distribuição dos efeitos aleatórios

Embora as rotinas disponíveis para análise de dados de degradação utilizem a suposição de normalidade dos efeitos aleatórios, nem sempre essa premissa é válida, na prática. Em função disso, muitos trabalhos vêm sendo desenvolvidos com o propósito de verificar os impactos dessa violação tanto para Modelos Lineares e Não Lineares de Efeitos Mistos (LME e NLME) quanto para modelagens mais abrangentes como os Modelos Lineares Generalizados de Efeitos Mistos (GLMM).

É importante salientar também que é notória a evolução desses trabalhos visto que, inicialmente, pouco ou nenhum impacto na estimação dos efeitos fixos foi considerado, mesmo havendo má-especificação da distribuição dos efeitos aleatórios, como citado, por exemplo, em Butler e Louis (1992), Neuhaus et al. (1992), Verbeke e Lesaffre (1997) e Agresti et al. (2004). Atualmente, os resultados dos trabalhos desenvolvidos conduzem a uma percepção de que realmente há impacto dessa má-especificação e o mesmo é significativo. Heagerty e Kurland (2001) encontraram vício substancial nos coeficientes do modelo ajustado, quando a distribuição dos efeitos aleatórios depende das covariáveis medidas ou há efeitos aleatórios auto-regressivos. Waagepetersen (2006) propôs um teste baseado em simulação para avaliar a conveniência da escolha da distribuição dos efeitos aleatórios. Litière et al. (2007) viram que a taxa de erro tipo I e o poder relacionados a testes para a estrutura de parâmetros da média podem ser severamente afetados. Os mesmos autores,

num artigo de 2008, verificaram que as estimativas dos componentes de covariância estão sempre sujeitas a vício considerável quando a distribuição dos efeitos aleatórios não é bem especificada. Na análise de dados de desgaste de rodas de trem, Freitas et al. (2009b) constataram fortes indicações de que a suposição de normalidade dos efeitos aleatórios para a modelagem de dados em questão não era verdadeira. Além disso, os autores estudaram o efeito da má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios através de simulações de Monte Carlo. As simulações foram realizadas com base em um modelo de degradação linear simples (uma reta). Mesmo com esse tipo de modelo, foi possível verificar que a má especificação dos efeitos aleatórios tem um impacto muito grande no vício das estimativas das figuras de mérito de interesse (*MTTF*) e quantis da distribuição do tempo até a falha) obtidas via Método de Máxima Verossimilhança com suposição de normalidade (Método MV-Normal).

Para que se possa desenvolver uma análise com estimativas adequadas da análise de tempo de falhas, e conseqüentemente, das quantidades de interesse, uma das frentes de trabalho que vem sendo amplamente abordada atualmente é a criação de ferramentas de diagnóstico que verificam a adequação dessa suposição no modelo. Tchetgen e Coull (2006) introduziram um teste de diagnóstico para avaliar a distribuição assumida para os efeitos aleatórios comparando os estimadores de máxima verossimilhança (EMVs) marginais e condicionais de um subgrupo dos efeitos fixos do modelo. Eberly e Thackeray (2005) utilizaram a técnica proposta por Lange e Ryan (1989) para detectar a normalidade dos efeitos aleatórios. Litière et al. (2008) apresentaram uma família de testes de diagnóstico baseada nos autovalores da matriz de variância-covariância para as estimativas dos efeitos-fixos. Abad et al. (2010) apresentaram um trabalho similar ao de Litière et al. (2008), sugerindo outros dois testes que, além de apresentarem bons resultados em relação à detecção de má especificação dos efeitos aleatórios, apresentou erro tipo I aumentado quando o tamanho amostral foi pequeno. Huang (2010) revisitou o método proposto por Huang (2009), particionando as informações do mesmo indivíduo em *clusters* (grupos).

A importância do uso dessas ferramentas de diagnóstico é que as mesmas sejam aplicadas num momento inicial do estudo para que, caso se verifique a não adequação da suposição de normalidade dos efeitos aleatórios, sejam feitas possíveis correções na estimação dos parâmetros dessa análise de degradação para uma correta conclusão a respeito da confiabilidade do sistema. Há, inclusive, trabalhos na literatura cujo foco está no desenvolvimento de métodos computacionais que permitam a obtenção de estimadores de máxima verossimilhança para modelos de efeitos mistos com efeitos aleatórios não normais (Lee e Nelder (1996), Song et al. (2005), Nelson et al. (2006) e Almeida (2011)).

1.3 Objetivos do Trabalho

O presente trabalho tem dois objetivos principais: avaliar o impacto da má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios e testar uma ferramenta de diagnóstico dessa distribuição, aplicada por Eberly e Thackeray (2005), baseada no método de Lange e Ryan (1989), expressa através de gráficos que contabilizam o percentual de rejeição da

hipótese nula (normalidade dos efeitos aleatórios).

Primeiramente, a verificação do impacto da má especificação e a avaliação do teste proposto serão realizadas através de um estudo por simulação em situações nas quais a suposição de normalidade dos efeitos aleatórios é ou não violada para os perfis gerados. O passo seguinte consiste em aplicar essa ferramenta de diagnóstico aos dados de desgaste das rodas de trem, utilizados em Freitas et al. (2009b), situação motivadora dessa pesquisa, que será descrita na próxima seção.

Espera-se chegar a uma conclusão afirmativa de que o impacto da má especificação seja realmente significativo na estimação das medidas para o tempo de vida do componente/sistema. Também, que o desempenho do teste proposto seja satisfatório, além de que sua utilização possa ser recomendada na análise de dados de degradação. Tudo isso para evitar que a má especificação dos efeitos aleatórios prejudique a qualidade das medidas de confiabilidade.

1.4 Situação Prática Motivadora

Rodas de trens podem sofrer desgastes em decorrência de diversos fatores, tais como posição da roda, predominância de curvas nos trechos e carga de trabalho. Elas são um dos principais itens de controle em processos de manutenção nos sistemas ferroviários. Por esse motivo, é necessário certificar-se da confiabilidade dessas rodas, pois um desgaste excessivo pode acelerar a deterioração dos trilhos além de potencializarem diversos outros problemas.

Uma companhia de trens brasileira conduziu um estudo para avaliar esse desgaste e disponibilizou seus dados para análise. O objetivo era estimar a distribuição do tempo de vida das rodas a partir de suas medidas de degradação e, com isso, estimar outras quantidades, como o tempo médio até a falha (mensurado em *km*) e quantis da distribuição do tempo até a falha.

O banco de dados original possui informações sobre o diâmetro das rodas para 14 vagões máquina. Cada vagão máquina tem dois truques e cada truque tem dois eixos, com duas rodas cada (Figura 1.1). As rodas são rotuladas de acordo com suas posições no vagão, utilizando um vetor indicador tridimensional, representando, nessa ordem: posição (lado) no eixo (esquerdo=0, direito=1), posição do truque (dianteiro=0, traseiro=1) e posição do eixo dentro do truque (externo=0, interno=1). Nesse trabalho, utilizaremos os dados referentes aos diâmetros das rodas classificadas como $[0, 0, 0]$, medidos a cada 50.000 *km*. O acompanhamento foi feito por 600.000 *km* (um total de treze medições para cada roda).

O diâmetro de uma roda nova é de 966 mm e quando a mesma atinge 889 mm, ela é trocada por outra nova. Com isso, ficou definido que a “falha” da roda acontece quando o desgaste atinge o limiar de 77 mm.

Como pode ser notado na Figura 1.2, apenas três das quatorze rodas “falharam” no período considerado, ou seja, apresentaram desgaste igual ou superior a 77 mm.

Estes mesmos dados foram analisados por Freitas et al. (2009b) com o objetivo de ca-

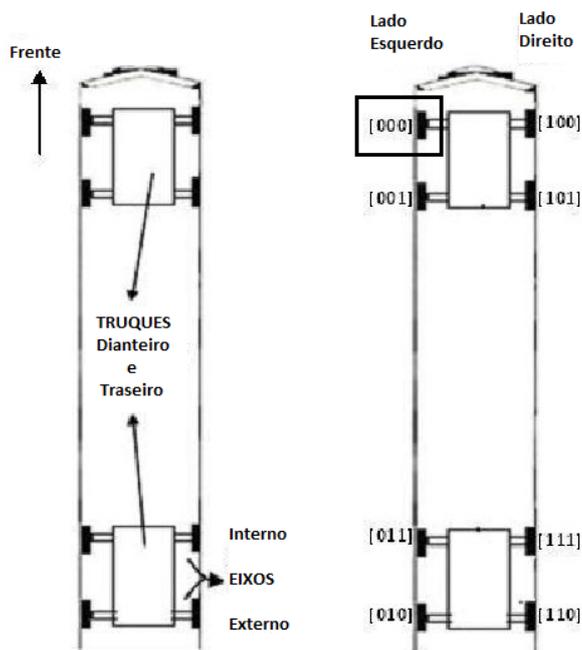


Figura 1.1: Identificação das rodas em um vagão máquina

racterizar a confiabilidade dessas rodas utilizando modelos de degradação. Nesse trabalho, ficou evidenciado que a violação da suposição de normalidade dos efeitos aleatórios prejudica muito as estimativas dos quantis obtidas pelo método MV-Normal (que pressupõe essa normalidade), aumentando, significativamente, a magnitude do vício das mesmas.

O que ocorre muitas vezes, na análise de dados de degradação e de dados longitudinais em geral, é a assunção da suposição de normalidade dos efeitos aleatórios por restrição prática, ou seja, pela inexistência de rotinas que acomodem outras distribuições. Por outro lado, conforme evidenciado no trabalho de Freitas et al. (2009b), a má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios pode prejudicar a qualidade das estimativas das quantidades de interesse. A questão da má especificação e das formas de diagnosticá-la será abordada na próxima seção. Ressalta-se que a estimação dos parâmetros do modelo pode ser feita também utilizando Inferência Bayesiana – Hamada (2005) e Freitas et al. (2009a) – mas este não é o foco do presente trabalho.

1.5 Estrutura do Texto

No capítulo 2 são apresentadas as características gerais dos modelos de efeitos mistos, utilizados em dados com perfis de degradação, bem como de um dos métodos de estimação dos parâmetros: Método MV-Normal (estimação dos parâmetros do modelo via método de Máxima Verossimilhança). No capítulo 3, o método proposto por Lange e Ryan (1989) é detalhado e os resultados revisitados. No Capítulo 4 são apresentados os estudos de

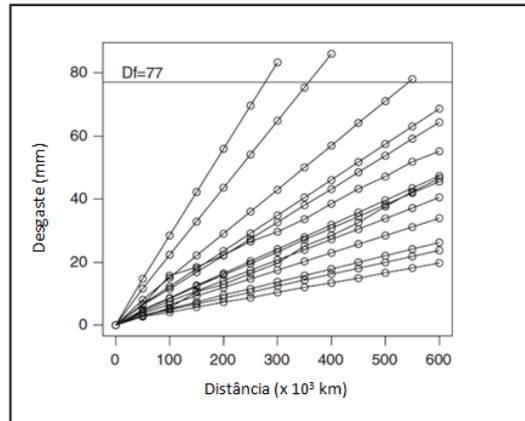


Figura 1.2: Dados de degradação das rodas

simulações que visam comprovar o impacto da má-especificação da distribuição dos efeitos aleatórios. Nesse capítulo, também, são apresentados os resultados que mostram o desempenho desse método proposto em situações onde os efeitos aleatórios são ou não distribuídos normalmente, além da sua aplicação em um banco de dados reais, o mesmo utilizado por Freitas et al. (2009b), referente ao desgaste das rodas de trens. No capítulo 5, encontram-se as conclusões desse trabalho. Nos anexos (A, B, C, D, E e F) pode-se verificar tabelas e gráficos com todos os resultados encontrados, inclusive uma simulação adicional que considera a normalidade¹ dos efeitos aleatórios e os códigos (implementados no *software R*) utilizados para estas simulações.

¹Os valores dos parâmetros considerados para a distribuição Normal (μ , σ) foram: $\mu = 9.130,704$ e $\sigma = 1.859,016$, que são os mesmos utilizados por Freitas et al. (2009b).

Capítulo 2

Modelo Geral de Degradação

Nos ensaios de degradação, considera-se que n unidades são colocadas sob teste e, ao longo do tempo, a característica relacionada ao mecanismo da falha (ou degradação) é medida para cada uma delas. Assume-se que essas medidas sejam tomadas em tempos pré-determinados t_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m_i$), onde m_i é o número de observações levantadas para a i -ésima unidade. Essa degradação é modelada utilizando uma mesma forma funcional e as diferenças entre as unidades são incorporadas ao modelo através dos efeitos aleatórios. Por esse motivo, são chamados de Modelos Mistos. Portanto, o modelo geral de degradação assume a forma:

$$Y_{ij} = D_{ij} + \varepsilon_{ij} = D(t_{ij}; \alpha; \beta_i) + \varepsilon_{ij} \quad (2.1)$$

onde Y_{ij} é uma variável aleatória que representa a degradação da i -ésima unidade no tempo especificado t_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m_i$), $D(t_{ij}; \alpha; \beta_i)$ é o perfil de degradação da unidade i no tempo j , $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)^t$ é um vetor $p \times 1$ de efeitos fixos (que descreve as características populacionais, constante para todas as unidades), $\beta_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ik})^t$ que é um vetor $k \times 1$ de efeitos aleatórios associado à i -ésima unidade (representando as características individuais). Além disso, ε_{ij} representa o erro aleatório associado à i -ésima unidade no j -ésimo tempo ($i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m_i$).

A forma determinística de $D(t_{ij}; \alpha; \beta_i)$ é, usualmente, uma função linear ou não linear em α e β_i , comumente baseada na análise empírica do processo de degradação em estudo. O tempo t_{ij} deve ser o tempo real ou alguma outra medida apropriada como distância ou número de ciclos, por exemplo.

Para esses modelos, assume-se que:

1. Os ε_{ij} 's sejam independentes e identicamente distribuídos (*iid*), segundo uma distribuição Normal com média $\mu = 0$ e variância fixa, mas desconhecida σ_ε^2 .
2. Os vetores β_i sejam independentes com distribuição $\Lambda(\beta|\theta)$, que depende de um vetor ($q \times 1$) de parâmetros fixos e desconhecidos $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)^t$, que precisa ser estimado a partir dos dados de degradação.

3. Os vetores de efeitos aleatórios β_i sejam independentes dos ε_{ij} .

2.1 Estimação dos parâmetros do modelo via método de Máxima Verossimilhança

A fim de obter a expressão da função de verossimilhança, utilizando o modelo (2.1), é necessário definir:

- $Y_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{im_i})^t$ um vetor $m_i \times 1$ que representa as medidas de degradação da i -ésima unidade e $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im_i})^t$ os seus valores observados.
- $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^t$ um vetor $N \times 1$ representando o conjunto completo das medidas de degradação ($N = \sum_{i=1}^n m_i$) e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ o conjunto completo dos valores de y observados.
- $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^t$ um vetor de ordem $nk \times 1$ combinando os n vetores de efeitos aleatórios.
- $f(y_i|\alpha, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2)$ e $f(\beta_i|\theta)$ denotam a função densidade de probabilidade de Y_i e β_i , respectivamente.

Portanto, dadas as suposições 1 a 3 do modelo geral, a função densidade de probabilidade de Y e B são dadas por:

$$f(y|\alpha, B, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = \prod_{i=1}^n f(y_i|\alpha, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2)$$

e

$$f(B|\theta) = \prod_{i=1}^n f(\beta_i|\theta)$$

Neste caso, a expressão geral da verossimilhança é:

$$\begin{aligned}
L(\alpha, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = f(y|\alpha, \theta, \sigma_\varepsilon^2) &= \int_{\Xi_B} f(y, B|\alpha, \theta, \sigma_\varepsilon^2) \, dB \\
&= \int_{\Xi_{\beta_1}} \dots \int_{\Xi_{\beta_n}} f(y, B|\alpha, \theta, \sigma_\varepsilon^2) \, d\beta_1 \dots \, d\beta_n \\
&= \int_{\Xi_{\beta_1}} \dots \int_{\Xi_{\beta_n}} \{f(y|\alpha, B, \theta, \sigma_\varepsilon^2) f(B|\theta)\} \, d\beta_1 \dots \, d\beta_n \\
&= \int_{\Xi_{\beta_1}} \dots \int_{\Xi_{\beta_n}} \left\{ \left[\prod_{i=1}^n f(y_i|\alpha, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2) \right] \left[\prod_{i=1}^n f(\beta_i|\theta) \right] \right\} \, d\beta_1 \dots \, d\beta_n \\
&= \int_{\Xi_{\beta_1}} \dots \int_{\Xi_{\beta_n}} \left\{ \prod_{i=1}^n f(y_i|\alpha, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2) f(\beta_i|\theta) \right\} \, d\beta_1 \dots \, d\beta_n \\
&= \prod_{i=1}^n \left\{ \int_{\Xi_{\beta_i}} f(y_i|\alpha, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2) f(\beta_i|\theta) \, d\beta_i \right\}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

onde Ξ_B e Ξ_{β_i} denotam os limites das integrais múltiplas em B e β_i , respectivamente.

Como os erros aleatórios ε_{ij} são *i.i.d* seguindo uma distribuição Normal com média 0 e variância σ_ε^2 ($\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$), condicionalmente a $\alpha, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2$, os vetores aleatórios $Y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ são independentes e normalmente distribuídos, segundo a notação:

$$Y_i|\alpha, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2 \sim N_{m_i}(\mu_{Y_i}, \Sigma_{Y_i})$$

onde $N_{m_i}(\mu_{Y_i}, \Sigma_{Y_i})$ é uma m_i -Normal Multivariada com vetores de média e matriz de variância-covariância dadas por:

$$\mu_{Y_i} = E(Y_i) = (D(t_{i1}, \alpha, \beta_i); \dots; D(t_{im_i}, \alpha, \beta_i))^t \text{ e } \Sigma_{Y_i} = \sigma_\varepsilon^2 I_{m_i}; \quad i = 1, \dots, n$$

onde I_{m_i} é uma matriz identidade $m_i \times m_i$.

Além disso, condicional a β_i , as variáveis aleatórias $Y_{ij} (j = 1, \dots, m_i)$ são independentes e normalmente distribuídas. Mais especificamente,

$$Y_{ij}|\alpha, \beta_i, \theta, \sigma_\varepsilon^2 \sim N[D(t_{ij}, \alpha, \beta_i); \sigma_\varepsilon^2]; j = 1, \dots, m_i.$$

Portanto, a função de verossimilhança 2.2 toma a forma:

$$\begin{aligned}
L(\alpha, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = f(y|\alpha, \theta, \sigma_\varepsilon^2) &= \prod_{i=1}^n \left\{ \int_{\Xi_{\beta_i}} \left[\prod_{j=1}^{m_i} N(D(t_{ij}, \alpha, \beta_i); \sigma_\varepsilon^2) \right] f(\beta_i|\theta) \, d\beta_i \right\} \\
&= \prod_{i=1}^n \left\{ \int_{\Xi_{\beta_i}} \left[\prod_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \phi_{NOR}(z_{ij}) \right] f(\beta_i|\theta) \, d\beta_i \right\}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $z_{ij} = \frac{[y_{ij} - D(t_{ij}, \alpha, \beta_i)]}{\sigma_\varepsilon}$ e ϕ_{NOR} é a função densidade de probabilidade Normal Padrão.

As estimativas de Máxima Verossimilhança (MV) do vetor de parâmetros dos perfis de degradação $(\alpha, \theta, \sigma_\varepsilon^2)^t$ é encontrado maximizando a função 2.3, que, em geral, requer aproximação numérica das n integrais de dimensão k .

As rotinas implementadas em *softwares* tais como SAS, R, MATLAB, SPLUS, utilizam a suposição de normalidade dos efeitos aleatórios (Lindstrom e Bates (1990), Pinheiro e Bates (2000)). Em outras palavras, $f(\beta_i|\theta)$ é a função densidade de uma normal k -multivariada, ou seja, $\beta_i \stackrel{iid}{\sim} N_k(\mu_\beta, \Sigma_\beta)$. Portanto, neste caso, $\theta = (\mu_\beta; \Sigma_\beta; \sigma_\varepsilon^2)$.

2.2 Avaliação de $F(t)$

Um modelo especificado para $D(t, \alpha, \beta)$ define uma distribuição do tempo de falha. Considera-se que a falha ocorre num tempo t , quando perfis de degradação superam um nível crítico pré-especificado D_f (limite de tolerância à utilização do item). Em geral, essa distribuição pode ser escrita como função dos parâmetros do modelo de degradação. Assim sendo, pode-se definir a distribuição do tempo até a falha T para o modelo 2.1 como:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P[D(t, \alpha, \beta) \geq D_f] \tag{2.4}$$

quando as medidas de degradação são crescentes no tempo, ou:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P[D(t, \alpha, \beta) \leq D_f] \tag{2.5}$$

quando as medidas de degradação são decrescentes no tempo. Observe que em 2.4 e 2.5, o índice i pode ser retirado, desde que os efeitos aleatórios β_i sejam *i.i.d* $\Lambda(\beta|\theta)$.

Sob este modelo de degradação, a distribuição do tempo até a falha $F_T(t)$ depende, além das estimativas de α (vetor de efeitos fixos), de $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)^t$, vetor de parâmetros da distribuição dos efeitos aleatórios β_i . Há basicamente três procedimentos que podem ser utilizados para avaliar $F(t)$:

1. Método Analítico: em casos simples é possível obter uma forma fechada para a expressão de $F(t)$. Exemplos desses cálculos utilizando um modelo de degradação com perfis lineares e diferentes distribuições dos efeitos aleatórios podem ser encontrados em Lu e Meeker (1993) e Freitas et al. (2009b).
2. Avaliação numérica de $F(t)$ por integração direta: para a maioria dos modelos de degradação, especialmente quando $D(t, \alpha, \beta)$ é não linear e β tem dimensão $k > 1$, é necessário desenvolver as integrais 2.4 ou 2.5, o que resulta em avaliar $F(t)$ por métodos numéricos. O tempo computacional necessário para avaliar essa integral multidimensional, aumentará exponencialmente com a dimensão da integral.
3. Usando Simulação Monte Carlo: supondo, por exemplo, $\beta_i \stackrel{iid}{\sim} N_k(\mu_\beta, \Sigma_\beta)$, $i = 1, \dots, n$, com $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)^t$ para o modelo geral (2.1). Para avaliar $F(t)$ por Monte Carlo precisamos primeiro utilizar as estimativas dos parâmetros do modelo $\hat{\alpha}$, $\hat{\mu}_\beta$ e $\hat{\Sigma}_\beta$ (obtidas dos n perfis observados e da maximização da verossimilhança 2.3) para gerar M realizações de α^* e β^* . Dos M valores de α^* e β^* , calcula-se M tempos de falha t_j^* , com $j = 1, \dots, M$. Isso pode ser realizado substituindo, primeiro, α^* e β^* em $D(t, \alpha, \beta)$ e então resolvendo para D_f . Para qualquer valor desejado de t , use a proporção de perfis que ultrapassa o limiar D_f como uma estimativa de $F(t)$. Em outras palavras, uma estimativa de $\hat{F}(t)$ é dada pela expressão:

$$\hat{F}(t) = \frac{\sum_{j=1}^M \mathbb{I}(t_j^* \leq t)}{M}, \quad t > 0 \quad (2.6)$$

onde \mathbb{I} é a função indicadora ($\mathbb{I}_A(x) = 1$ se $x \in A$ e 0(zero), caso contrário) e M deve ser um número grande o suficiente para reduzir o erro na simulação Monte Carlo (usualmente $M \geq 10^5$).

Capítulo 3

Método proposto por Lange e Ryan (1989)

Configurando o objetivo inicial de revisitar o método de diagnóstico da normalidade dos efeitos aleatórios proposto por Lange e Ryan (1989), essa técnica será brevemente apresentada no tópico 3.1. Sua aplicação em Eberly e Thackeray (2005), referência para desenvolvimento deste trabalho, será apresentada na seção 3.2 deste mesmo capítulo.

3.1 Lange & Ryan

A técnica de Lange e Ryan (1989), conhecida como “técnica gráfica de diagnóstico”, foi utilizada no trabalho desenvolvido por Eberly e Thackeray (2005) para diagnosticar a má especificação do modelo, em especial, a não normalidade dos efeitos aleatórios β_i . Embora modelos com efeitos aleatórios sejam amplamente utilizados, métodos para avaliar seu ajuste ainda estão, relativamente, em desenvolvimento. Além disso, a avaliação da qualidade do ajuste de um modelo de efeitos mistos é complexa, devido à estrutura dos erros que acomodam correlações entre as medidas repetidas do mesmo indivíduo ao longo do tempo - Lange e Ryan (1989).

Antes da apresentação da metodologia propriamente dita, será apresentada a notação que generaliza a forma do modelo apresentada no Capítulo 2, no caso em que a forma funcional do perfil de degradação é linear.

Utilizando a notação de vetores e matrizes, o modelo estudado por Lange e Ryan (1989) (modelo linear de efeitos mistos) possui a seguinte forma geral:

$$Y_i = X_i\alpha + Z_i\beta_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

$m_i \times 1$ $m_i \times p \times 1$ $m_i \times k \times 1$ $m_i \times 1$

onde, assim como na notação apresentada no Capítulo 2, α é um vetor $p \times 1$ de efeitos fixos, β_i é um vetor $k \times 1$ de efeitos aleatórios, Y_i é o vetor $m_i \times 1$ que representa as medidas da i -ésima unidade e ε_i é o vetor $m_i \times 1$ de erros associados às medidas da i -ésima

unidade. Nesta forma geral, X_i é uma matriz $m_i \times p$ de covariáveis para os efeitos fixos e Z_i é uma matriz $m_i \times k$ de covariáveis para os efeitos aleatórios, com $k \leq p$.

Conforme mencionado no Capítulo 2, quando Y_i representa medidas de degradação em uma escala contínua, uma suposição usual é que os ε_i 's são independentes e identicamente distribuídos segundo uma normal $N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_{m_i})$ e independentes de $\beta_i \sim N_k(0, \Sigma_\beta)$ (normal multivariada de ordem k). Neste caso:

$$\Sigma_{Y_i} = \text{Cov}(Y_i) = \sigma^2 I_{m_i} + Z_i \Sigma_\beta Z_i', \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.2)$$

Apenas como exemplificação e para auxiliar a conexão com o que foi apresentado no capítulo anterior (em particular, com a equação 2.1), considere o caso de um perfil de degradação linear D_{ij} com interceptos e inclinações variando aleatoriamente. Em outras palavras, para a i -ésima unidade no j -ésimo tempo de observação, assuma que:

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= D_{ij} + \varepsilon_{ij} \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 t_{ij} + \beta_{i1} + \beta_{i2} t_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m_i. \end{aligned}$$

Portanto, utilizando a notação 3.1, o modelo para o vetor aleatório representando as medidas do i -ésimo perfil de degradação (i -ésima unidade) pode ser reescrito como:

$$Y_i = \begin{pmatrix} Y_{i1} \\ \vdots \\ Y_{im_i} \end{pmatrix} = X_i \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + Z_i \begin{pmatrix} \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \end{pmatrix} + \varepsilon_i$$

onde $X_i = Z_i = \begin{pmatrix} 1 & t_{i1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_{im_i} \end{pmatrix}$.

Na maioria das aplicações, os procedimentos de inferência focam na estimação dos efeitos fixos (α), σ_ε^2 e os parâmetros da distribuição dos efeitos aleatórios (β). Em particular, os efeitos fixos α tem interpretação em termos de mudanças na resposta média ao longo do tempo e a relação destas mudanças com as covariáveis.

Entretanto, em algumas situações práticas, podemos estar interessados em prever respostas para um perfil específico. Por exemplo, no caso dos perfis das rodas dos trens, pode haver interesse em fazer predições sobre o comportamento da degradação para uma roda específica que ainda está em uso e cujas observações foram utilizadas na análise. Isto pode ser feito obtendo-se predições¹ do vetor de efeitos aleatórios $\beta_i (i = 1, \dots, n)$

¹Tecnicamente, como os β_i são variáveis aleatórias e não parâmetros fixos populacionais, é costume utilizar-se o termo “predições” dos efeitos aleatórios ao invés de “estimativas”

específicos de cada perfil. Vamos denotar essas predições por $\hat{\beta}_i$.

O procedimento desenvolvido por Lange e Ryan (1989) consiste basicamente em construir um *q-q plot* com base em uma estatística que é uma padronização dos preditores empíricos BLUP (*Best Linear Unbiased Predictor*) dos efeitos aleatórios β_i . Estes preditores também são chamados de “*empirical Bayes*” pois os $\hat{\beta}_i$'s podem ser derivados através de uma formulação totalmente Bayesiana (Fitzmaurice et al. (2004) - capítulo 8).

A seguir serão apresentadas a idéia da técnica proposta para um caso simplificado e um caso geral.

1. Um caso simplificado

Considerando, inicialmente, uma versão simplificada do modelo 3.1, que assume uma média e apenas um efeito aleatório para cada indivíduo:

$$Y_{ij} = \alpha + \beta_i + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m_i \quad (3.3)$$

onde α e β são os vetores de efeitos fixos e aleatórios, ε_{ij} possui distribuição normal com média zero e variância σ_ε^2 e $\beta_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \theta)$.

Se os efeitos aleatórios β_i fossem observados, um teste clássico poderia ser utilizado para verificar sua normalidade. Entretanto, conforme já mencionado, essas quantidades podem ser “preditas”, pelo estimador de *Bayes* empírico (ou BLUP empírico), isto é, a média *a posteriori* da distribuição de β_i dado a resposta avaliada $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{im_i})'$.

Os autores propõem padronizar os preditores $\hat{\beta}_i$ de maneira adequada, de forma a terem uma normal padrão sob o modelo (3.3). Cada $\hat{\beta}_i$ é padronizado pelo seu desvio-padrão marginal (DP). Para o modelo simplificado dado em 3.3, os autores mostram que:

$$w_i = \frac{\hat{\beta}_i}{DP(\hat{\beta}_i)} = \frac{\bar{Y}_i - \alpha}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2/m_i + \theta}} \quad (3.4)$$

em que $\bar{Y}_i = (1/m_i)\sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$ e assumindo a princípio que α , σ_ε^2 e θ são conhecidos. Portanto, para o modelo simplificado, a técnica se reduz a calcular uma média residual padronizada para cada indivíduo. Quando o modelo (3.3) é válido, os w_i 's são uma amostra de uma normal padrão. Seja $F_n(x)$ a função distribuição acumulada empírica ponderada (e.c.d.f) de w_i :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x - w_i)$$

em que $I(x - w_i) = 1$ se $x \geq w_i$ e 0 (zero), caso contrário. Seja $\Phi(x)$ a função distribuição acumulada da normal padrão. Para verificar a suposição de normalidade dos β_i , compara-se então $F_n(x)$ com $\Phi(x)$ – seu valor esperado sob o modelo (3.3), utilizando *q-q plots* ou gráficos de probabilidade, por exemplo.

Uma vez que as estimativas de cada efeito aleatório $\hat{\beta}_i$ possuem diferentes variâncias, cada uma com dois componentes σ_ε^2/m_i e θ , um bom procedimento de ajuste deveria avaliar a suposição de normalidade destacando as contribuições dos indivíduos cujos componentes θ são grandes em relação a σ_ε^2/m_i . Foi proposto, então, um gráfico normal ponderado (Dempster e Ryan (1985)) que compara a e.c.d.f $F_n^*(x)$ com $\phi(x)$ utilizando “pesos” que são funções dos componentes de covariância σ_ε e θ . Por esse motivo, a técnica foi nomeada como técnica gráfica por mostrar, como resultado, a comparação dessas curvas num gráfico de normalidade.

2. Uma extensão para casos mais complexos

Para o modelo geral (3.1), considerando que o preditor de *Bayes* empírico (ou BLUP empírico) de β_i é:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_i &= E[\beta_i|Y_i] \\ &= \hat{\Sigma}_\beta Z_i' \hat{\Sigma}_{Y_i}^{-1} (Y_i - X_i \hat{\alpha}),\end{aligned}\tag{3.5}$$

E a covariância de $\hat{\beta}_i$ estimada por:

$$\widehat{cov}(\hat{\beta}_i) = \hat{\Sigma}_\beta Z_i' \hat{\Sigma}_{Y_i}^{-1} Z_i \hat{\Sigma}_\beta\tag{3.6}$$

onde $\hat{\Sigma}_\beta$ e $\hat{\Sigma}_{Y_i}$ em 3.5 e 3.6 são as estimativas de Σ_β e Σ_{Y_i} com os componentes de variância substituídos por suas estimativas de Máxima Verossimilhança Restrita (REML) (Fitzmaurice et al. (2004) - capítulo 8).

Nesse artigo, os autores examinam um *q-q plot* da seguinte combinação linear padronizada:

$$w_i \equiv \frac{c' \hat{\beta}_i}{\sqrt{c' \widehat{Cov}[\hat{\beta}_i] c}}, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.\tag{3.7}$$

Os valores de c são escolhidos aleatoriamente para ponderar a combinação linear dos β_i e destacar os diferentes tipos de modelo, por exemplo, $c = (1; 0)$ e $c = (0; 1)$ consideram apenas modelos com o intercepto ou a inclinação aleatórios, respectivamente.

Lange e Ryan (1989) sugerem a escolha de diferentes valores para c , considerando assim, uma gama de combinações lineares $(1 - k, k)$, $k \in [0, 1]$, principalmente por levar em conta uma possível correlação entre os componentes de β_i (intercepto e inclinação). Uma vez determinados os valores de c e calculados os valores de w_i , esses últimos são plotados em um gráfico para verificar sua normalidade.

É importante salientar que para a realização deste trabalho, a normalidade dos w_i 's será verificada através do teste de aderência de *Anderson-Darling (AD)* diretamente. Aqui, o efeito aleatório considerado é um escalar (trataremos de um modelo sem intercepto e com um efeito aleatório, o mesmo adotado por Freitas et al. (2009b), situação motivadora dessa pesquisa). Serão, ao final, plotados gráficos que representam o percentual de rejeição da hipótese nula (normalidade dos efeitos aleatórios).

3.2 Aplicação do teste proposto por Lange e Ryan (1989) no trabalho de Eberly e Thackeray (2005)

Para se chegar a um modelo geral que refletisse de forma realista um estudo sobre a mortalidade por doença cardíaca coronariana, Eberly e Thackeray (2005) utilizaram dados do colesterol *HDL* retirados de uma pesquisa realizada entre os anos de 1972 e 1975, em homens com idade entre 35 e 57 anos, com informações sobre as visitas (variável indicadora) e o índice de massa corporal *BMI* (importante indicador do colesterol), medido em kg/m^2 – Després et al. (1990). Observe que o modelo ajustado (3.8) inclui a variável *BMI* nas formas simples e quadrática.

$$HDL_{ij} = \alpha_0 + \alpha_1 BMI_{i0} + \alpha_2 BMI_{i0}^2 + \alpha_3 Visita_j + \beta_{i0} + \beta_{i1} Visita_j + \varepsilon_{ij} \quad (3.8)$$

Em seguida, foram simulados 2000 novos resultados para *HDL* considerando $\hat{\alpha}$, $\hat{\Sigma}$ e $\hat{\sigma}^2$ estimados de (3.8) em dois diferentes modelos (1000 resultados para cada):

$$HDL_{ij} = 91,94 - 2,81 BMI_{i0} + 0,04 BMI_{i0}^2 - 0,06 Visita_j + \beta_{i0} + \beta_{i1} Visita_j + \varepsilon_{ij}$$

e

$$HDL_{ij} = 91,94 - 2,81 BMI_{i0} + 0,30 BMI_{i0}^2 - 0,06 Visita_j + \beta_{i0} + \beta_{i1} Visita_j + \varepsilon_{ij}$$

onde os ε_{ij} foram simulados de uma distribuição Normal com variância $\sigma^2 = 42,12$ e os efeitos aleatórios $(\beta_{i0} + \beta_{i1})$ simulados de cinco diferentes distribuições (Normal, *Skewed*, Bimodal Leve, Bimodal Moderada e Bimodal Extrema).

Para a avaliação do teste, além de pesos diferentes para a variável BMI^2 , foram consideradas, também, as estruturas correta (utilização da variável BMI^2) e incorreta (não utilização dessa variável) no modelo, a fim de verificar possíveis interferências com

relação à má especificação do modelo. Para o cálculo de w_i e o correspondente teste de normalidade, foram considerados diferentes valores para c : (1; 0), (0,75; 0,25), (0,5; 0,5), (0,25; 0,75), (0,1; 0,9) e (0; 1). O percentual dos testes que rejeitaram normalidade ao nível de significância $\alpha = 0,05$ foram utilizados para resumir e comparar os resultados das simulações.

As principais conclusões obtidas com a aplicação dessa metodologia foram:

1. Quando o modelo de degradação está estruturado corretamente (com o termo BMI^2 incluído), independente se o coeficiente da variável BMI^2 é alto ou baixo, nota-se que, para efeitos aleatórios distribuídos normalmente, a proporção de testes rejeitados ficou em torno dos 5% para todas as combinações de c utilizadas. Porém, quando a normalidade dos efeitos aleatórios foi substituída por outras distribuições, principalmente as Bimodais mais extremas, a proporção de rejeição aumentou significativamente. Esse resultado é positivo para o método, uma vez que a taxa de rejeição da normalidade quando a mesma ocorre é baixa (em torno de 5%) e alta, quando não ocorre.
2. Ao omitir o termo BMI^2 (com menor coeficiente) do modelo, os resultados foram idênticos aos citados no item 1 desse tópico. Porém, quando se omite um termo BMI^2 com alto peso (no caso, com coeficiente 0,30) a proporção de testes rejeitados aumenta, independente da distribuição do efeito aleatório. Portanto, além de detectar a normalidade dos efeitos aleatórios, o teste parece ser sensível a forte má especificação do modelo, mas não a fraca má especificação (BMI^2 com coeficiente baixo).

O mesmo teste também foi aplicado em um banco de dados de pressão sanguínea, modelada segundo alguns fatores de risco tais como idade, consumo de bebida alcoólica, dentre outros. Chegou-se à mesma conclusão que nas simulações: quando o modelo está incorretamente especificado, incorre-se à rejeição de normalidade em uma maior proporção.

Os autores enfatizaram que o trabalho foi conduzido em condições ótimas: sem dados ausentes e com grande tamanho amostral, mesmo assim eles consideram que o teste proposto por Lange e Ryan (1989) pode ser útil como uma ferramenta de diagnóstico “geral”, por ter se apresentado sensível a não normalidade dos efeitos aleatórios e má especificação do modelo.

Capítulo 4

Simulação

Diante dos levantamentos realizados através da literatura, no Capítulo 1, é possível notar que não há um consenso a respeito do impacto ou não da má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios na estimação de quantidades de interesse (parâmetros do modelo e, no caso da análise de degradação, nas estimativas das características de interesse da distribuição do tempo até a falha). Pode-se notar que os trabalhos mais antigos desconsideravam o impacto dessa má especificação. Os trabalhos subsequentes já consideraram certa interferência, e os atuais, não só consideram o impacto dessa má especificação significativos, como também sugerem ferramentas de diagnóstico para a verificação da suposição de normalidade dos efeitos aleatórios.

Por esse motivo, um trabalho extensivo de simulação foi realizado para verificar o possível impacto da má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios. Caso esse impacto seja significativo, como podemos, na prática, conhecer essa informação de antemão, evitando conclusões incertas sobre a confiabilidade dos sistemas investigados?

Para responder a essa última pergunta, o desenvolvimento das simulações utilizadas nesse trabalho também engloba, além da verificação do impacto da má especificação dos efeitos aleatórios em modelos mistos, a eficácia da aplicação de uma ferramenta de diagnóstico dessa distribuição, proposta por Lange e Ryan (1989).

4.1 Verificação do Impacto da má-especificação da distribuição dos efeitos aleatórios

Para a verificar se o impacto da violação da suposição de normalidade dos efeitos aleatórios nas estimativas das características de interesse realmente é significativo, um estudo de simulação foi implementado. O objetivo desse estudo é avaliar, dentre outras características, o percentual de cobertura dos intervalos de confiança construídos para as quantidades de interesse (percentis $t_{1\%}$, $t_{5\%}$, $t_{10\%}$, $t_{50\%}$ e $t_{80\%}$ e o $MTTF$), bem como o vício relativo e o desvio-padrão dessas mesmas estimativas.

4.1.1 Estrutura dos dados gerados

Foram gerados perfis de degradação com formas funcionais conhecidas e com efeitos aleatórios oriundos das distribuições Weibull e Lognormal (mais detalhes na seção 4.1.2). Cada simulação consistiu na geração de amostras com diferentes números de perfis (n): 25, 50, 75 e 100 e cada perfil com 20 medidas de degradação, em tempos igualmente espaçados. A estrutura geral dos dados é mostrada na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Estrutura das medidas de degradação geradas

Unidade	Instante de Medida			
	1	2	...	$s = 20$
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1s}
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2s}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	y_{n1}	y_{n2}	...	y_{ns}

Foi utilizado, para cada uma das duas distribuições consideradas para as simulações, um valor específico para o nível crítico D_f . Esse limiar de degradação representa a ocorrência de, no máximo, 20% de censura nos perfis simulados ou seja, 20% dos perfis gerados não alcançariam esse nível crítico (Freitas et al. (2009b)). Esses valores de D_f são 3,27 e 3,4 para as distribuições Weibull e Lognormal dos efeitos aleatórios, respectivamente.

4.1.2 Passos seguidos na simulação

As simulações foram implementadas com o *software* R (GNU general public license; www.r-project.org) versão 2.11.0. As principais informações são elencadas abaixo:

1. Definição da distribuição para o modelo de degradação

As tabelas 4.2 e 4.3 apresentam os valores dos parâmetros utilizados nas distribuições dos efeitos aleatórios (Weibull e Lognormal, respectivamente). As duas distribuições seguem as seguintes parametrizações:

- **Weibull** (α, δ)

$$f(x) = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right) x^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\delta}\right)^\alpha\right], \quad x \geq 0$$

- **Lognormal** (μ, σ)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma} \exp\left\{-\frac{[\log(x) - \mu]^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \geq 0$$

Tabela 4.2: Valores dos parâmetros da distribuição dos efeitos aleatórios (Weibull(α, δ))

Cenário	α	δ
1	6,2306	10767,69
2	0,5	10767,69
3	1,1	10767,69
4	2,0	10767,69
5	10,0	10767,69

Tabela 4.3: Valores dos parâmetros da distribuição dos efeitos aleatórios (Lognormal(μ, σ))

Cenário	μ	σ
1	-9,12265	0,235929
2	-9,12265	0,5
3	-9,12265	0,8
4	-9,12265	1,0

O Cenário 1 utilizado para essas duas distribuições, foi o mesmo considerado em Freitas et al. (2009a). As figuras 4.1 e 4.2 apresentam as formas das funções densidades referentes à cada cenário considerado para cada uma das distribuições consideradas para o efeito aleatório β .

2. Modelos adotados para a geração dos perfis

- $\beta \sim \text{Lognormal}$: a amostra de perfis foi gerada de acordo com o modelo

$$y_{ij} = \beta_i t_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (4.1)$$

- $\beta \sim \text{Weibull}$: a amostra de perfis foi gerada de acordo com o modelo

$$y_{ij} = \frac{1}{\beta_i} t_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (4.2)$$

onde em ambos os casos $\varepsilon_{ij} \sim \text{Normal}(0; \sigma_\varepsilon = 0,01)$, com $i = 1, \dots, n$ perfis e $j = 20$ medidas para cada perfil.

3. Obtenção da distribuição do tempo de falha

Para a realização dessas simulações, será feito o uso de um resultado apresentado em Freitas et al. (2009b) que diz respeito à associação entre a distribuição do tempo de falha T e a distribuição do efeito aleatório β . Pode-se mostrar que:

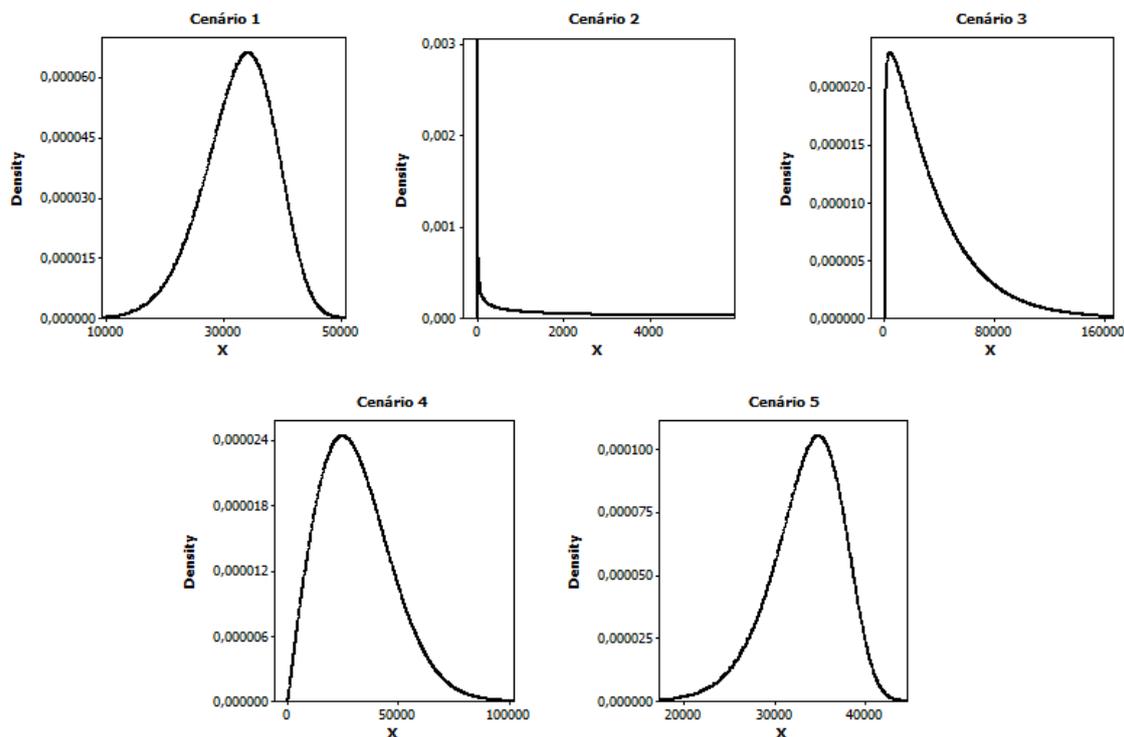


Figura 4.1: Formas das funções densidades - Weibull

- Se $\beta \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma)$ e a forma funcional dos perfis de degradação é dada pela equação 4.1, então $T \sim \text{Lognormal}(\log(D_f) - \mu, \sigma)$
- Se $\beta \sim \text{Weibull}(\alpha, \delta)$ e a forma funcional dos perfis de degradação é dada pela equação 4.2, então $T \sim \text{Weibull}(\alpha, D_f \delta)$

sendo D_f o limiar crítico de degradação. Ou seja, quando o efeito aleatório β é Weibull (ou Lognormal), o tempo de falha também possui distribuição Weibull (ou Lognormal). A partir da definição do tempo de falha, pode-se calcular o verdadeiro valor das estimativas (quantis e $MTTF$), sendo esses utilizados como referência para o cálculo do percentual de cobertura dos intervalos de confiança e do vício relativo.

4. Cálculo dos valores reais dos quantis da distribuição do tempo de falha e do $MTTF$

Os percentis $t_{1\%}$, $t_{5\%}$, $t_{10\%}$, $t_{50\%}$ e $t_{80\%}$ e o $MTTF$ foram calculados utilizando as seguintes expressões:

- para $\beta \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma) \Leftrightarrow T \sim \text{Lognormal}(\log(D_f) - \mu, \sigma)$

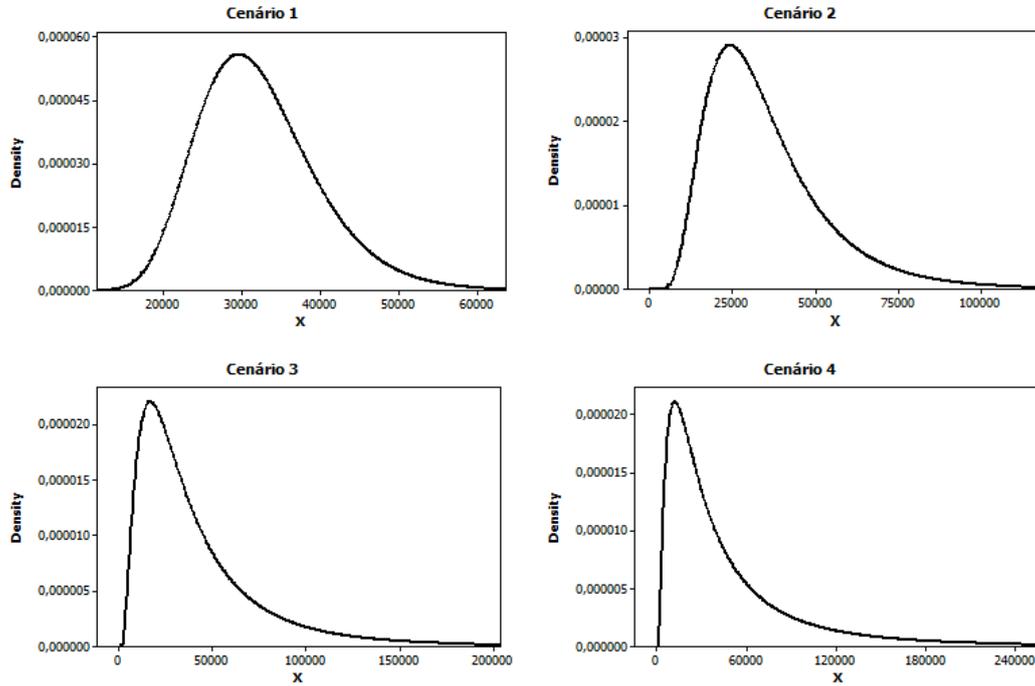


Figura 4.2: Formas das funções densidades - Lognormal

$$t_p = \exp[z_p\sigma + (\log(D_f) - \mu)] \quad (4.3)$$

$$MTTF = \exp\left((\log(D_f) - \mu) + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (4.4)$$

onde z_p é o p -ésimo quantil da distribuição Normal Padrão (média zero e variância igual a 1).

- para $\beta \sim \text{Weibull}(\alpha, \delta) \Leftrightarrow T \sim \text{Weibull}(\alpha, D_f\delta)$

$$t_p = D_f\delta[-\ln(1-p)]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4.5)$$

$$MTTF = (D_f\delta)\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (4.6)$$

5. Passos da simulação de Monte Carlo

(i) Para um dado tamanho de amostra n , n valores de β são gerados de uma distribuição Lognormal ou Weibull, de acordo com os diferentes cenários definidos nas

Tabelas 4.2 e 4.3. Para o caso de efeitos aleatórios com distribuição Lognormal, a amostra de n perfis é gerada utilizando-se a amostra de β (β_1, \dots, β_n) e o modelo de degradação $y_{ij} = \beta_i t_{ij} + \varepsilon_{ij}$ com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, 20$. Para o caso dos efeitos aleatórios com distribuição Weibull, a amostra de n perfis é gerada utilizando-se a amostra de β (β_1, \dots, β_n) e o modelo de degradação $y_{ij} = \frac{1}{\beta_i} t_{ij} + \varepsilon_{ij}$ com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, 20$. Em ambos os casos, os erros ε_{ij} são gerados de uma Normal ($0, \sigma = 0,01$).

(ii) Para a amostra de n perfis gerada em (i), segundo efeitos aleatórios \sim Lognormal (μ, σ), o modelo (4.1) foi ajustado. Para a amostra de n perfis gerada em (i), segundo efeitos aleatórios \sim Weibull (α, δ), o modelo (4.2) foi ajustado. Em ambos os casos foi ajustada a função *LME* do *software R*. Portanto, os modelos foram ajustados sob a suposição de efeitos aleatórios normais, ou seja, supondo $\beta \sim N(\theta, \tau^2)$. Consequentemente os parâmetros estimados nos dois casos são θ , τ^2 e σ_ε^2 . Sejam $\hat{\theta}_{LN}$, $\hat{\tau}_{LN}$ e $\hat{\sigma}_{\varepsilon_{LN}}^2$ as estimativas obtidas com a amostra gerada com efeitos aleatórios lognormais e $\hat{\theta}_W$, $\hat{\tau}_W$ e $\hat{\sigma}_{\varepsilon_W}^2$ para o caso Weibull.

(iii) Obtenção da distribuição dos tempos de falha F_t :

Neste caso, $\hat{F}(t)$ foi obtida também por simulação de Monte Carlo (Meeker e Escobar (1998)). Para isso:

- 20000 tempos de falha \hat{t}_i ($i = 1, \dots, 20000$) foram obtidos para o caso da Lognormal utilizando a expressão:

$$\left(\hat{t}_1 = \frac{D_f}{\beta_1^*}, \hat{t}_2 = \frac{D_f}{\beta_2^*}, \dots, \hat{t}_{20000} = \frac{D_f}{\beta_{20000}^*} \right)$$

- 20000 tempos de falha \hat{t}_i foram obtidos para o caso da Weibull utilizando a expressão:

$$(\hat{t}_1 = D_f \beta_1^{**}, \hat{t}_2 = D_f \beta_2^{**}, \dots, \hat{t}_{20000} = D_f \beta_{20000}^{**})$$

onde β_i^* ($i = 1, \dots, 20000$) foram gerados de uma distribuição $N(\hat{\theta}_{LN}, \hat{\tau}_{LN}^2)$ e β_i^{**} ($i = 1, \dots, 20000$) foram gerados de uma $N(\hat{\theta}_W, \hat{\tau}_W^2)$.

(iv) Os passos (i) a (iii) foram repetidos 100 vezes, gerando 100 estimativas de cada percentil e *MTTF* para cada uma das duas distribuições. A Tabela 4.4 apresenta a estrutura dos dados até este ponto da simulação (supondo um dado valor de n e um dos cenários apresentados nas tabelas 4.2 e 4.3).

(v) Cálculo das medidas de desempenho: vício relativo e desvio-padrão:

Tabela 4.4: Estrutura geral dos dados após a simulação

Distribuição	Quantidades de Interesse					
Lognormal	$\hat{t}_{p(1)}$	\dots	$\hat{t}_{p(100)}$	$\widehat{MTTF}_{(1)}$	\dots	$\widehat{MTTF}_{(100)}$
Weibull	$\hat{t}_{p(1)}$	\dots	$\hat{t}_{p(100)}$	$\widehat{MTTF}_{(1)}$	\dots	$\widehat{MTTF}_{(100)}$

Como citado anteriormente, foram calculadas várias medidas para “quantificar” o impacto da má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios. Dentre elas, o vício relativo e o desvio-padrão das quantidades de interesse. As expressões listadas abaixo foram utilizadas para esses cálculos:

- Valor estimado de x (baseado nas N amostras de perfis):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{x}_i}{N} \quad (4.7)$$

- Desvio-Padrão (DP):

$$DP = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\hat{x}_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \quad (4.8)$$

- Vício Relativo (VR):

$$VR = \frac{|\bar{x} - x|}{x} \quad (4.9)$$

onde N denota o número de amostras geradas (nesse caso, $N = 100$), x é o valor real da quantidade de interesse e \hat{x}_i o valor estimado de x para a i -ésima amostra gerada.

(vi) Cálculo das medidas de desempenho: percentual de cobertura dos intervalos de confiança:

Foram utilizados dois diferentes métodos de amostragem *Bootstrap* para criação dos perfis de degradação: o completamente paramétrico e o não paramétrico. Esses métodos são citados mais detalhadamente em Meeker e Escobar (1998), mas a idéia geral é que, no primeiro método, conhecido como *completamente paramétrico*, cada amostra (perfil) de tamanho n seja simulada a partir dos parâmetros de interesse, individualmente. Já no segundo método, *não paramétrico*, cada perfil de tamanho n é obtido de um processo de amostragem, com reposição, da primeira amostra gerada a partir dos parâmetros que indexam a distribuição avaliada.

Ainda em Meeker e Escobar (1998), são citadas duas propostas para a construção de intervalos de confiança. São eles os métodos *Percentílico* e *Percentílico Corrigido*

(Efron e Tibshirani (1993)).

No Método *Percentílico*, são utilizados quantis para a construção dos intervalos de confiança. Supondo $\hat{\gamma}^*$ o vetor ordenado da quantidade de interesse estimada, em ordem crescente. Então, um intervalo de confiança $100(1 - \alpha)\%$ para γ é: $[\hat{\gamma}_{[l]}^*, \hat{\gamma}_{[u]}^*]$. Onde $l = \text{número de amostras geradas} \times 0,025$ e $u = \text{número de amostras geradas} \times 0,975$, considerando um intervalo de 95% de confiança. Caso necessário, l e u devem ser arredondados para os menores e maiores inteiros mais próximos, respectivamente.

Já o método *Percentílico Corrigido*, consiste em “corrigir” os limites inferior e superior dos intervalos de confiança (utilizando os quantis - normais - da proporção de vezes que a função acumulada dos valores gerados via *Bootstrap* for menor que a função acumulada dos valores calculados inicialmente).

Portanto, os passos seguidos para a construção dos intervalos de confiança e, conseqüentemente, dos percentuais de cobertura, são:

Passos (i) e (ii): mesmo que os citados anteriormente no item 5: *Passos da Simulação de Monte Carlo*.

(iii) Para o método *Bootstrap Paramétrico*, n valores de β são gerados de uma distribuição Normal ($\hat{\theta}_{LN}, \hat{\tau}_{LN}$), no caso de efeitos aleatórios lognormais ou Normal ($\hat{\theta}_W, \hat{\tau}_W$) no caso weibull. Para o método *Bootstrap não paramétrico*, esses n valores de β (com distribuição Lognormal ou Weibull) são sorteados da respectiva amostra aleatória de 20000 β 's, com reposição.

Passo (iv): mesmo que o passo (iii) citado do item 5: *Passos da Simulação de Monte Carlo*.

(v) Estimação das quantidades de interesse (percentis $t_{1\%}, t_{5\%}, t_{10\%}, t_{50\%}$ e $t_{80\%}$ e o *MTTF*).

(vi) Os passos (iii) a (v) foram repetidos 4000 vezes, gerando 4000 estimativas de cada percentil e *MTTF* para cada uma das duas distribuições.

(vii) Cálculo dos intervalos de confiança: *Percentílico* e *Percentílico Corrigido*. Foram construídos 100 intervalos de confiança de cada método proposto e para cada estimativa avaliada.

(viii) Cálculo do percentual de cobertura dos dois intervalos de confiança construídos (*Percentílico* e *Percentílico Corrigido*). Esse percentual foi obtido contabilizando o número de intervalos de confiança (dentre os 100) que cobriam o verdadeiro valor da quantidade de interesse, dividido por 100.

4.1.3 Resultados das Simulações

Toda a discussão seguinte será levantada com o objetivo de avaliar os resultados encontrados para o vício relativo, desvio-padrão e percentual de cobertura dos intervalos de confiança construídos para os percentis $t_{1\%}$, $t_{5\%}$, $t_{10\%}$, $t_{50\%}$, $t_{80\%}$ e o *MTTF*, através de um levantamento de análise de dados e gráficos. Todos os gráficos construídos e tabelas com resultados encontram-se em anexo (vide Anexos A, B e C).

Vício Relativo

Para o vício relativo, representado pela diferença entre o valor médio estimado da quantidade de interesse (quantis e *MTTF*) e o seu valor real (em número absoluto), é desejado que o resultado calculado seja próximo de zero, o que indica uma boa estimativa para a quantidade de interesse, sem maiores perdas nas interpretações e conclusões a serem tomadas. Porém, como pode ser observado nas Figuras (4.3 e 4.4), essa expectativa não foi totalmente atendida, principalmente para efeitos aleatórios com distribuição Weibull.

Considerando distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios, a análise dos resultados do vício relativo apontou para aumento do seu valor quando se aumenta o valor do parâmetro σ considerado (Figura 4.3). Ou seja, como pode ser observado também através das formas das distribuições com os diferentes cenários utilizados (Figura 4.2), é possível concluir que o aumento no valor do vício relativo coincidiu com as distribuições com assimetrias à direita mais acentuadas. Apesar desses valores apresentarem uma tendência de aumento, o valor do vício é relativamente baixo (maior resultado para o *MTTF*: 2,265 - gráfico no Anexo A). Entretanto, os valores mais altos podem ser observados para os percentis $t_{1\%}$, $t_{50\%}$, $t_{80\%}$ e para o *MTTF*.

Para efeitos aleatórios com distribuição Weibull¹, houve uma diminuição do valor do vício relativo com o aumento do valor do parâmetro α considerado. Para valores de α mais baixos (0,5 e 1,1), o vício relativo foi mais alto, sobretudo para os percentis $t_{1\%}$ e $t_{5\%}$ (essas distribuições apresentaram assimetria à direita - Figura 4.1). Para valores de $\alpha \geq 2$, os resultados do vício relativo, em todos os casos, foi inferior a 1 (um). Os menores resultados estavam concentrados nos percentis $t_{80\%}$ e no *MTTF* (vide anexo A).

¹Foram utilizadas diferentes escalas para confecção dos gráficos da distribuição Weibull dos efeitos aleatórios.

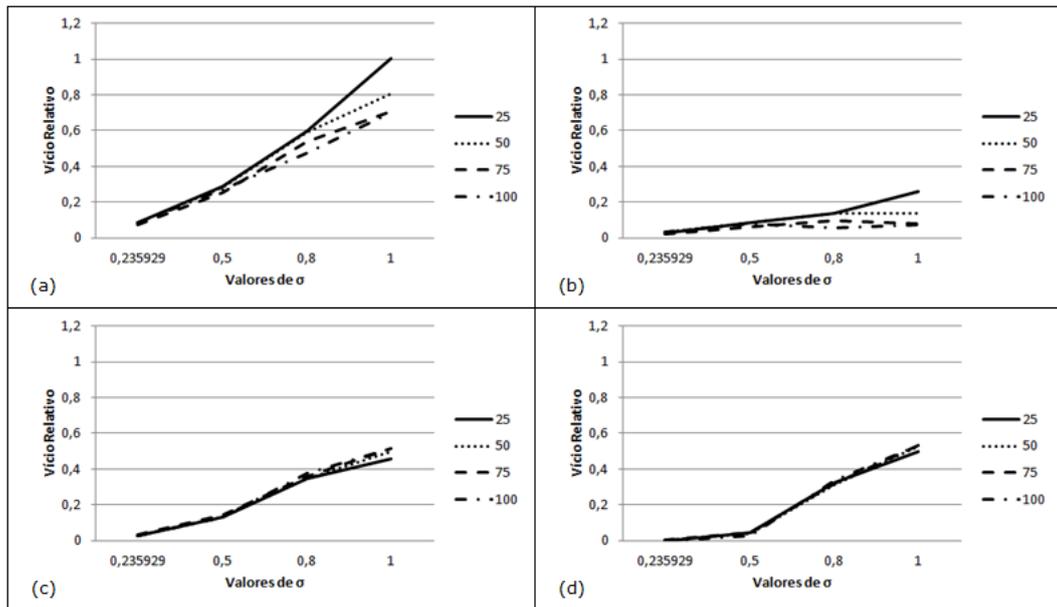


Figura 4.3: Vício relativo para os percentis $t_{1\%}$ (a), $t_{5\%}$ (b), $t_{50\%}$ (c) e $t_{80\%}$ (d). Distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios.

O aumento do número de perfis para as distribuições Lognormal e Weibull apresentou o mesmo comportamento para todos os quantis considerados em todos os cenários avaliados. Com exceção do resultado para o $MTTF$, em alguns casos.

Os resultados completos para o vício relativo (vide Tabelas A.1 e A.2 no Anexo A) mostram que desvios na suposição de normalidade dos efeitos aleatórios afetam diferentes quantidades (quantis e $MTTF$) quando se considera a distribuição Weibull ou Lognormal: ora percentis mais baixos ora os percentis mais extremos apresentam vício mais elevado. Portanto, o vício relativo sofre impacto com a má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios na estimação dessas quantidades.

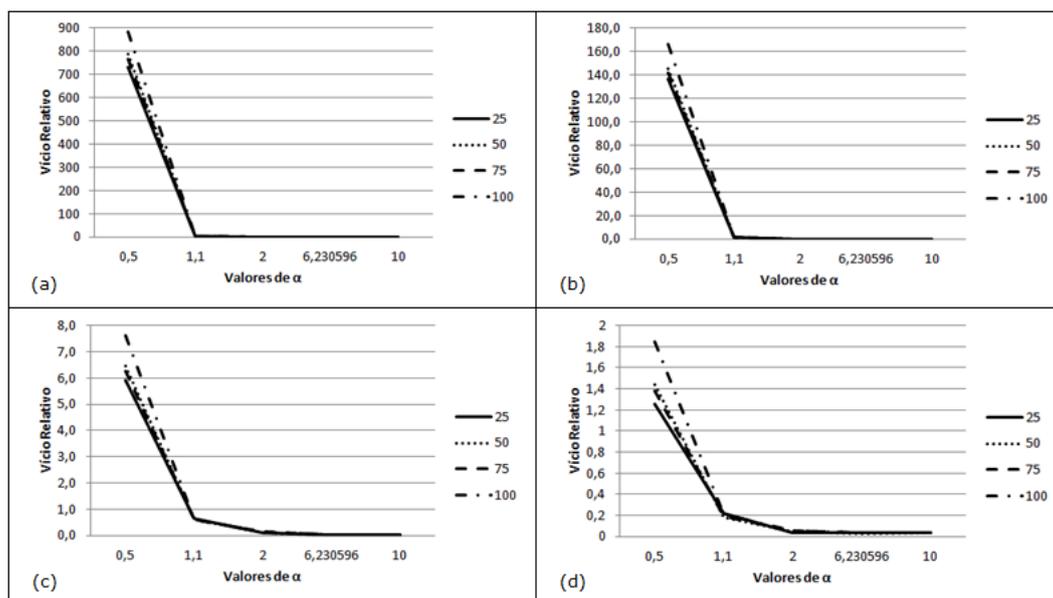


Figura 4.4: Vício relativo para os percentis $t_{1\%}$ (a), $t_{5\%}$ (b), $t_{50\%}$ (c) e $t_{80\%}$ (d). Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios.

Desvio-padrão

Os resultados completos para o desvio-padrão (vide Tabelas B.1 e B.2 no Anexo B), da mesma forma que na verificação do vício relativo, apresentam diferentes comportamentos quando se considera a distribuição Weibull ou Lognormal para os efeitos aleatórios.

1. Para efeitos aleatórios com distribuição Lognormal, observou-se que quando se aumenta o número de perfis, tende-se a ter também um resultado menor para o desvio-padrão, em todos os cenários avaliados (Figura 4.5). Porém, um comportamento diferenciado foi verificado para o $MTTF$ (Figura B.1 do Anexo B). O cenário 3 ($\mu = -9,122650$ e $\sigma = 0,8$), em todos os casos, apresentou o maior resultado de desvio-padrão dentre os demais.
2. Também para efeitos aleatórios gerados de uma distribuição Lognormal, o percentil $t_{80\%}$ apresentou resultados mais elevados.
3. No caso da Weibull², os percentis $t_{50\%}$, $t_{80\%}$ e o $MTTF$ apresentaram resultados mais altos de desvio-padrão para valores de $\alpha = 0,5$; $1,1$ e $2,0$ (curvas de distribuição assimétricas à direita).

²Foram utilizadas diferentes escalas para confecção dos gráficos da distribuição Weibull dos efeitos aleatórios.

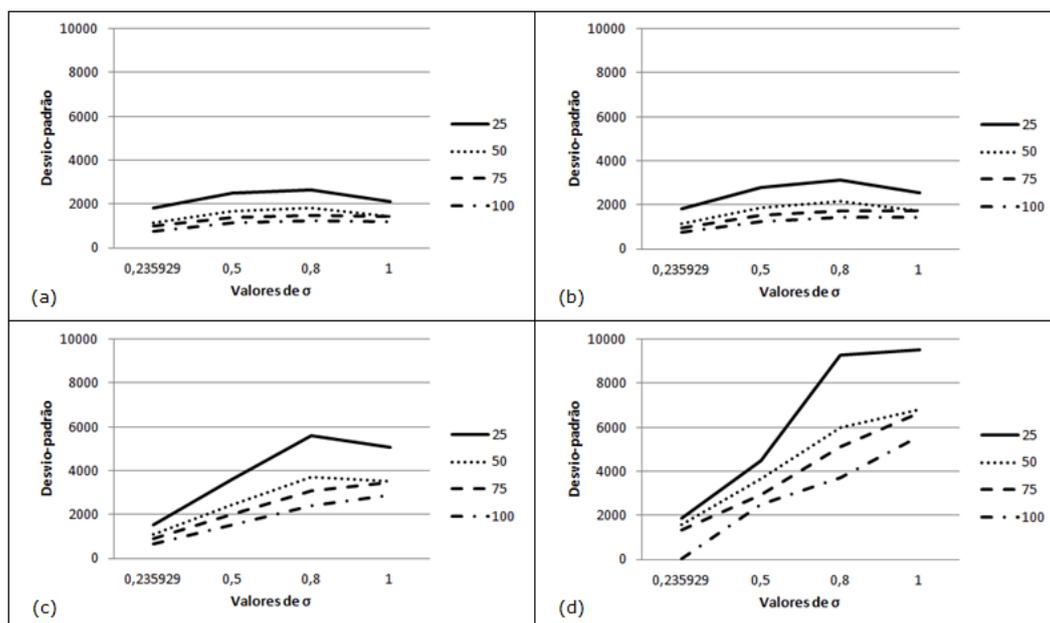


Figura 4.5: Desvio-padrão dos percentis $t_{1\%}$ (a), $t_{5\%}$ (b), $t_{50\%}$ (c) e $t_{80\%}$ (d). Distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios.

4. Já para valores de $\alpha = 6,230596$ e $10,0$, essas mesmas estimativas apresentaram valores de desvio-padrão mais baixos (curvas assimétricas à esquerda). Como pode ser observado, para o caso Weibull, os resultados dos desvios dos quantis parecem estar associados à simetria da distribuição.

Os valores elevados para o desvio-padrão encontrados corroboram que há influência da especificação da distribuição dos efeitos aleatórios na estimação dos quantis (e do *MTTF*). Esse resultado está de acordo com os resultados apresentados em Verbeke e Le-saffre (1997), que mostram que o maior impacto está na estimativa dos componentes de covariância.

Portanto, os resultados da avaliação do impacto da má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios, considerando portanto, o vício relativo e o desvio-padrão, comprovam que esse impacto realmente é significativo na estimação de quantidades que representam o tempo de vida de um sistema.

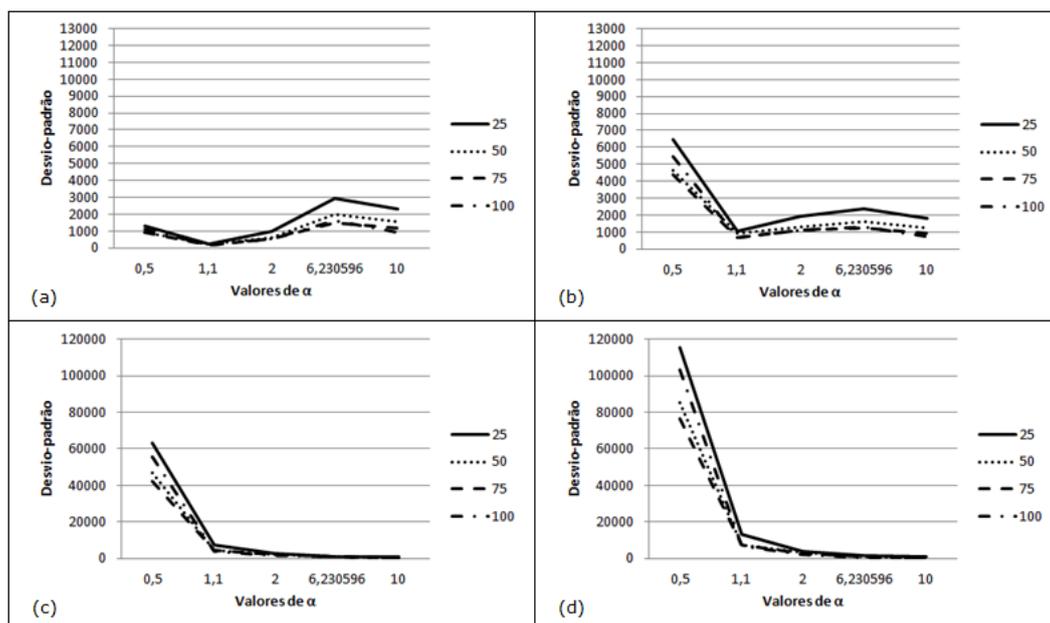


Figura 4.6: Desvio-padrão dos percentis $t_{1\%}$ (a), $t_{5\%}$ (b), $t_{50\%}$ (c) e $t_{80\%}$ (d). Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios.

Percentual de Cobertura dos Intervalos de Confiança

As Figuras 4.7 e 4.8 consideram a construção de percentuais de cobertura construídos para algumas estimativas, levando em conta o método *Bootstrap Paramétrico* para construção das amostras (perfis) de degradação, para as distribuições Weibull e Lognormal dos efeitos aleatórios. Para essa avaliação, foi considerado o percentual de vezes em que o verdadeiro valor da quantidade pertencia ao intervalo estimado.

De acordo com os resultados levantados, pode-se concluir que os intervalos de confiança (ICs) construídos para as quantidades estimadas não apresentam elevado percentual de cobertura, o que pode indicar uma má estimação da quantidade de interesse. Além disso, o método Percentílico corrigido apresentou-se um pouco mais robusto para futuras aplicações e não houve diferença significativa entre os métodos *Bootstrap paramétrico* e *não paramétrico*.

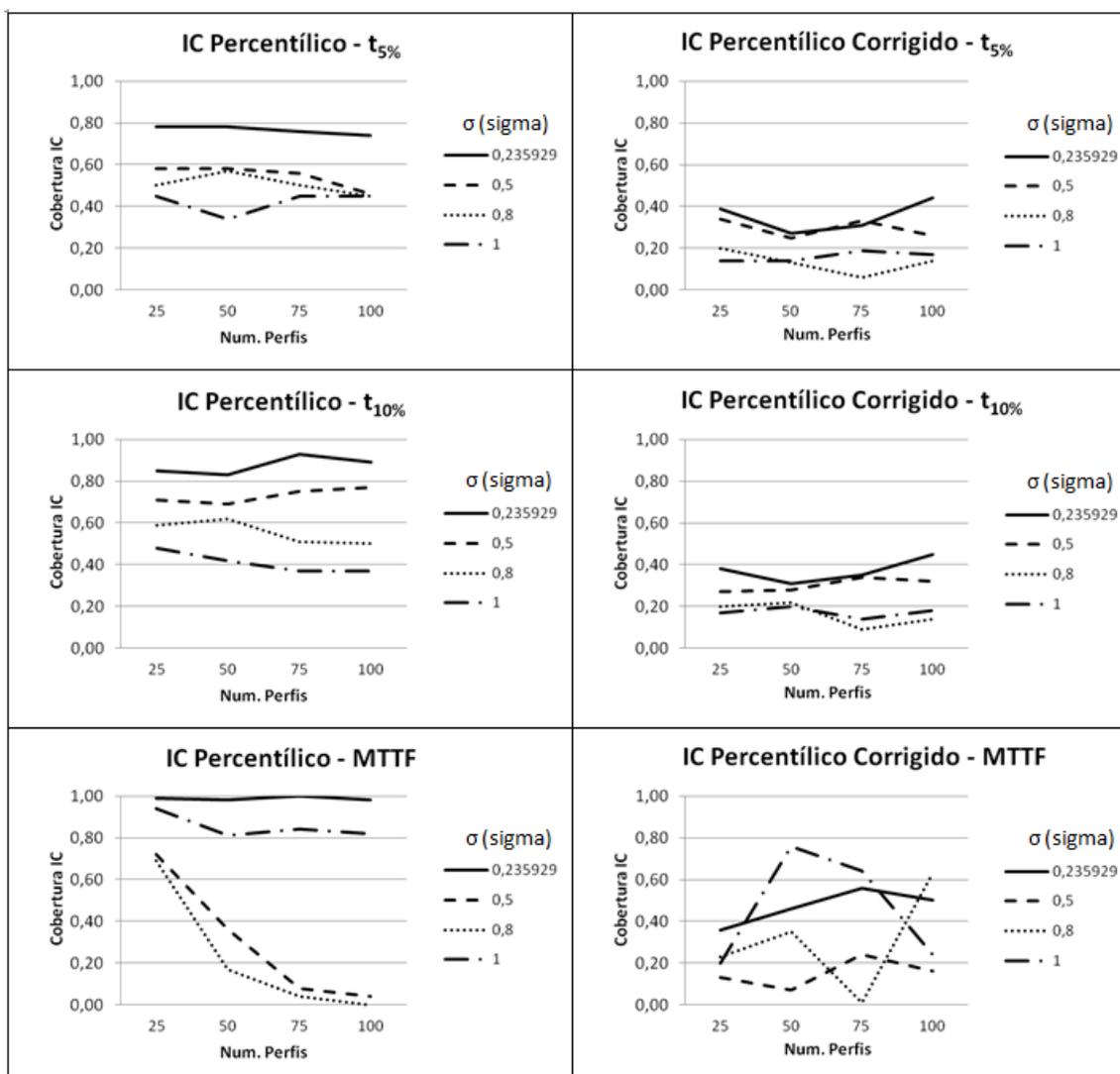


Figura 4.7: Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios. (*Bootstrap Paramétrico*)

Os principais aspectos levantados foram os seguintes:

1. De forma geral, o método Percentílico apresentou percentuais de cobertura mais elevados que o método Percentílico Corrigido de Efron e Tibshirani (1993), para cada parametrização utilizada nas duas distribuições (Weibull e Lognormal).
2. Com o aumento do número de perfis, o percentual de cobertura dos ICs tende a diminuir na maioria dos casos, com exceção ao comportamento da estimativa do *MTTF* e dos resultados referentes às primeiras parametrizações (representadas pela linha contínua).

3. As parametrizações iniciais da Weibull e da Lognormal também apresentaram os valores mais altos para o percentual de cobertura dos ICs.

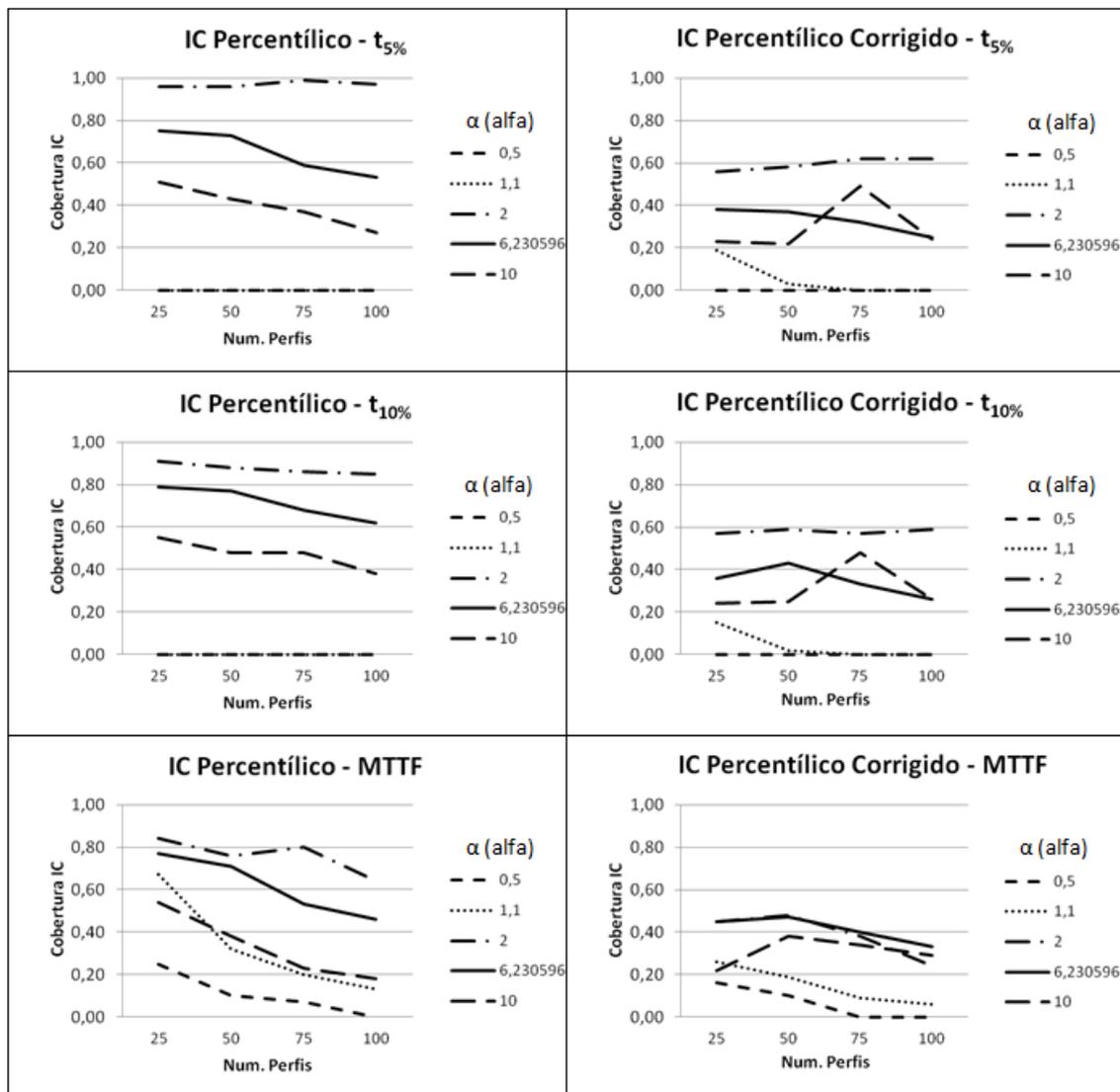


Figura 4.8: Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios. (*Bootstrap Paramétrico*)

4.2 Desempenho da técnica proposta por Lange e Ryan (1989)

A técnica de diagnóstico de normalidade dos efeitos aleatórios proposta por Lange e Ryan (1989) foi aplicada, via simulação, considerando-se a geração de efeitos aleatórios oriundos de três diferentes distribuições: Normal, Lognormal e Weibull. A intenção é verificar a eficácia desse teste quantificando o percentual de rejeição da hipótese nula (que atesta normalidade dos dados). Um acerto de aplicação do teste é definido como sendo não rejeitar a hipótese de normalidade dos efeitos aleatórios quando a mesma é verdadeira (se os efeitos aleatórios forem gerados de uma distribuição Normal) e rejeitar a hipótese de normalidade quando ela é falsa, ou seja, quando os efeitos aleatórios forem gerados de uma outra distribuição (nesse caso, Lognormal ou Weibull).

Primeiramente, essa técnica será aplicada na geração de efeitos aleatórios oriundos dessas três diferentes distribuições com os mesmos valores dos parâmetros que os considerados em Freitas et al. (2009b). Posteriormente, com valores dos parâmetros das distribuições Weibull e Lognormal considerados em 4.1.2. A justificativa para essa segunda simulação será apresentada nos próximos tópicos.

Além dessas simulações, essa ferramenta foi aplicada ao banco de dados das rodas de trens, utilizadas por Freitas et al. (2009b), e verificadas as conclusões obtidas acerca da normalidade dos efeitos aleatórios.

4.2.1 Técnica aplicada a efeitos aleatórios com distribuições Normal, Lognormal e Weibull - valores dos parâmetros considerados em Freitas et al. (2009b)

Nesse primeiro estudo simulado, os valores considerados para os parâmetros das distribuições Normal, Lognormal e Weibull foram os mesmos que Freitas et al. (2009b), que por sua vez, foram baseados em Oliveira e Colosimo (2004). Além disso, também foi mantida a mesma estrutura do experimento realizado pelos autores: cada uma das 100.000 amostras geradas com 50 perfis de degradação e cada perfil composto de 20 medidas igualmente espaçadas ao longo do tempo, de 2.000 em 2.000 km, no intervalo $t_0 = 0$ até $t_{20} = 38.000$ km.

Os passos seguidos para a realização dessas simulações foram:

1. Assumir três modelos de degradação simples, sem intercepto e com um efeito aleatório, a saber:

$$D_N(t) = \beta t \text{ com } \beta \sim \text{Normal}(\mu_N, \sigma_N), \text{ com } \mu_N = 9.130,704 \text{ e } \sigma_N = 1.859,016$$

$$D_{LN}(t) = \beta t \text{ com } \beta \sim \text{Lognormal}(\mu_{LN}, \sigma_{LN}), \text{ com } \mu_{LN} = -9,12265 \text{ e } \sigma_{LN} = 0,2356$$

$$D_W(t) = \beta t \text{ com } \beta \sim \text{Weibull}(\alpha_W, \delta_W), \text{ como } \alpha_W = 6,230596 \text{ e } \delta_W = 10.767,69$$

2. Gerar os valores para $\beta_i (i = 1, \dots, 50)$, que é o vetor de efeitos aleatórios, para cada uma das três distribuições, com os parâmetros definidos no item 1 desta seção.
3. Gerar a matriz de erros aleatórios a partir de uma distribuição Normal com média 0 e desvio padrão 0,01. Serão 1000 (50 x 20) valores para cada matriz de ε_{ij} para cada uma das três distribuições.
4. Calcular os 50 perfis da amostra para cada uma das três distribuições, utilizando o modelo geral $y_{ij} = \beta_i t_{ij} + \varepsilon_{ij}$.
5. Estimar os parâmetros μ_β , σ_β , α_β , δ_β e σ_ε , a partir dos perfis gerados no item 4, utilizando estimativas de máxima verossimilhança através da função LME implementada no *software R* (versão 2.11).
6. Calcular os valores da estatística proposta pelo método de Lange e Ryan, considerando $c = (0; 1)$, pelo fato de somente a inclinação aleatória estar presente no modelo proposto para a simulação.
7. Contabilizar o percentual de rejeição da hipótese nula (que atesta normalidade dos efeitos aleatórios transformados - z_i), a partir da estatística de *Anderson Darling*, assim como em Eberly e Thackeray (2005). Caso os efeitos aleatórios sejam distribuídos normalmente, a rejeição da hipótese nula não deve ocorrer ou ser a menor possível (o que configuraria um acerto do teste proposto). Para efeitos aleatórios com qualquer outra distribuição, espera-se que a rejeição da hipótese nula seja evidente e significativa.
8. Repetir 100.000 os passos de 1 a 7, para cada uma das três distribuições utilizadas. A tabela 4.5 ilustra como estarão dispostas as observações ao final dessas 100.000 simulações (onde P representa o percentual de rejeição encontrado).

Tabela 4.5: Estrutura dos Resultados

Dist. Efeito Aleatório	% Rejeição de H_0
Normal	P_N
Lognormal	P_{LN}
Weibull	P_W

9. Ilustrar esse resultado graficamente com os percentuais obtidos para cada uma das três distribuições analisadas. Os resultados encontrados, após as 100.000 simulações, estão dispostos na figura 4.9.

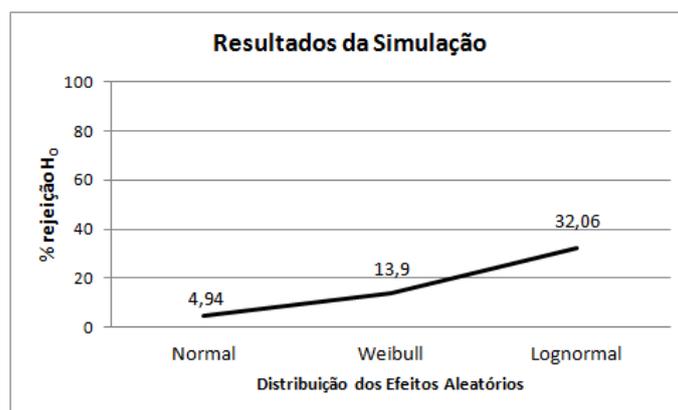


Figura 4.9: Percentual de testes rejeitados após 100.000 simulações

Pode-se observar claramente pela Figura 4.9 que os resultados confirmam a aplicação do teste feito por Eberly e Thackeray (2005), ressaltando que a rejeição do teste quando a verdadeira distribuição do efeito aleatório é normal é de aproximadamente 5%, praticamente o mesmo que o nível alfa (α) considerado. Em contrapartida, o resultado para o percentual de rejeição da hipótese nula, quando as distribuições verdadeiras para os efeitos aleatórios eram a Lognormal e a Weibull, foram de 32,06% e 13,9%, respectivamente.

No artigo de Eberly e Thackeray (2005), foram encontrados percentuais de rejeição mais altos quando a distribuição dos efeitos aleatórios não era Normal. Uma das razões para isso foi o fato de os autores terem trabalhado com distribuições muito extremas (bimodais e assimétricas), ou seja, consideradas muito “diferentes” da distribuição Normal. Por esse motivo, uma das conclusões tomadas foi que quanto mais diferente da Normal fosse a verdadeira distribuição dos efeitos aleatórios, melhor seria a detecção de não normalidade do teste, ou seja, maior seria o seu poder. Nessas simulações, como o percentual de rejeição do teste foi baixo, uma possível justificativa poderia estar relacionada ao fato de que as distribuições utilizadas foram muito flexíveis e, portanto, aproximaram mais da normalidade. Essa verificação será abordada na próxima seção.

4.3 Técnica de Lange e Ryan aplicada aos parâmetros considerados em 4.1.2

Os valores dos parâmetros utilizados nas distribuições Weibull e Lognormal foram investigados numa análise mais detalhada, em virtude da constatação de baixo percentual de rejeição da hipótese de normalidade dos efeitos aleatórios quando os mesmos não eram distribuídos normalmente. Nessa investigação, confirmou-se que esses valores forneciam curvas de distribuição de probabilidade muito próximas de uma curva de distribuição Normal, como pode ser verificado na Figura 4.10.

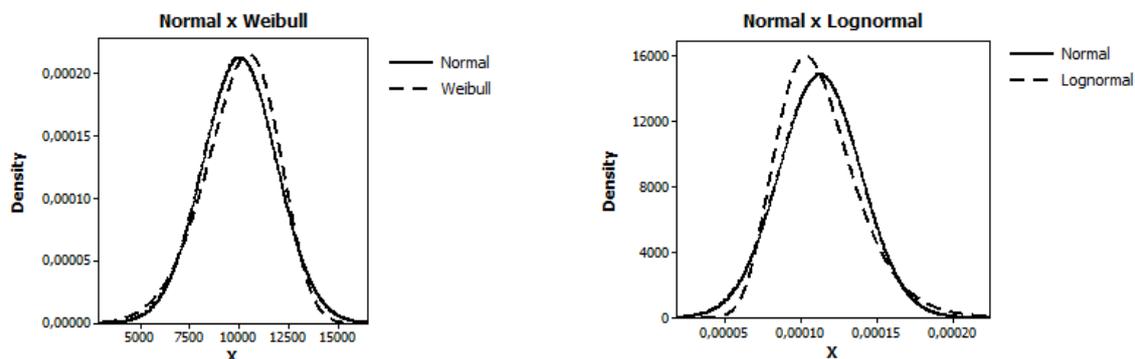


Figura 4.10: Curvas das distribuições Weibull e Lognormal

A Figura 4.10 foi obtida construindo um gráfico dessas curvas com os mesmos valores dos parâmetros utilizados em Freitas et al. (2009b) (linha tracejada). A linha contínua no gráfico mostra as curvas de distribuição Normal, obtidas considerando-se o cálculo referente às médias e desvios-padrão das distribuições Weibull e Lognormal, respectivamente. As informações referentes aos valores dos parâmetros originais e os transformados encontram-se na tabela 4.6.

Tabela 4.6: Valores dos parâmetros considerados para construção da Figura 4.10

Distribuição Original	Distribuição Normal
$Weibull(6,2306; 10.767,7)$	$N_W(10.010,1; 1873,39)$
$Lognormal(-9,12265; 0,23592)$	$N_{LN}(0,0001122; 0,0000269)$

Com os resultados dessas simulações, foi comprovada que a suspeita inicial de o teste ter apresentado percentuais de rejeição baixos para a hipótese de normalidade dos efeitos aleatórios, foi devido aos valores dos parâmetros utilizados. Por esse motivo, a aplicação da ferramenta proposta será conduzida considerando, também, outros valores de parâmetros para essas mesmas distribuições (tabelas 4.2 e 4.3 citadas na subseção 4.1.2).

A aplicação da técnica proposta por Lange e Ryan (1989) com esses novos valores de parâmetros, apresentou alguns resultados interessantes (vide Figuras 4.11 e 4.12):

- Para todos os parâmetros utilizados nas duas distribuições, o aumento no número de perfis aumentou a capacidade do teste na rejeição da hipótese nula;
- O pior desempenho da ferramenta proposta por Lange e Ryan (1989) – citada no trabalho de Eberly e Thackeray (2005) – como esperado, foi com a parametrização utilizada nos primeiros ensaios (e a que se comprovou ter curva de distribuição mais próxima da curva normal). Com essa parametrização, na primeira simulação (com 50 perfis), para a distribuição Lognormal obteve-se percentual de rejeição de H_0 de

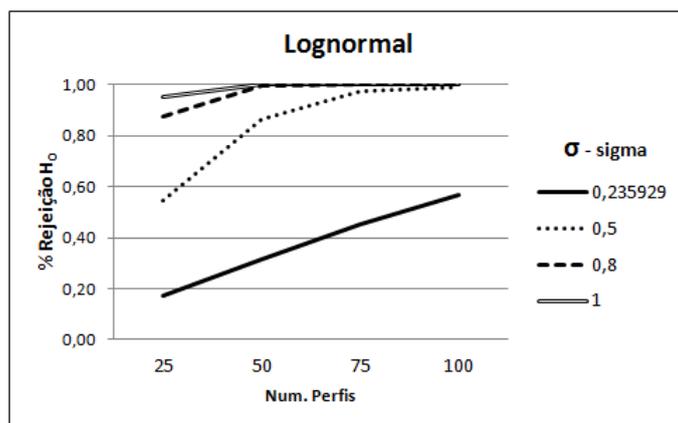


Figura 4.11: Aplicação da Técnica de Lange e Ryan (1989) para efeitos aleatórios com distribuição Lognormal.

32,06% contra 31,5% dessa segunda simulação (resultados equivalentes). Resultado parecido ocorreu com a distribuição Weibull que apresentou percentual de rejeição da hipótese nula de 13,9% e 12,95%, respectivamente, na primeira e na segunda simulação.

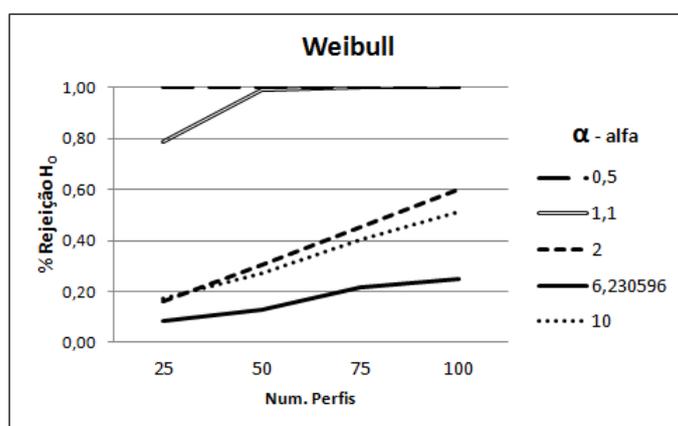


Figura 4.12: Aplicação da Técnica de Lange e Ryan (1989) para efeitos aleatórios com distribuição Weibull.

- Para esse mesmo número de perfis, nota-se um melhor desempenho da ferramenta para os outros parâmetros utilizados (com curvas mais diferentes da curva normal).

4.4 Técnica de Lange e Ryan aplicada ao banco de dados das rodas de trens (Freitas et al. (2009b))

A aplicação do teste de Lange e Ryan (1989) no banco de dados das rodas de trens, utilizados por Freitas et al. (2009b), apresentou como resultado um diagnóstico de que os efeitos aleatórios não eram distribuídos normalmente. O p-valor encontrado com a utilização da estatística de *Anderson Darling* com esse método (p-valor = 0,009), levou à rejeição da hipótese nula.

Nesse contexto, com a comprovação da não normalidade dos efeitos aleatórios, deve-se realizar um tratamento nesses dados, assunto esse que está sendo levantado por outra frente de pesquisa. Diante dessa situação, o foco está no desenvolvimento de métodos computacionais alternativos que permitam a obtenção de estimadores de máxima verossimilhança para modelos de efeitos mistos com efeitos aleatórios não normais.

Capítulo 5

Conclusões

Em experimentos de degradação, objetiva-se encontrar uma relação entre a degradação do componente e a falha, através da quantificação por um modelo. O propósito de ajustar esse modelo é conseguir fazer inferências a respeito desse tempo de falha, como por exemplo, a estimação do tempo médio em que ela ocorre. Essa informação é de suma importância para que se possa medir a confiabilidade de um item ou sistema.

Para uma modelagem adequada, é necessário que o ajuste desse modelo atenda a algumas suposições. Uma delas, que apresenta impacto na estimativa dessas quantidades de interesse, é a normalidade dos efeitos aleatórios. No capítulo 1 foi apresentada a situação prática motivadora do desenvolvimento desse projeto: mau desempenho do Método MV-Normal (por supor normalidade dos dados) na estimativa de quantidades oriundas de análise de tempo de falha, quando a distribuição dos dados considerados não era a Normal - Freitas et al. (2009b). Ainda neste capítulo, principalmente na seção 1.2, foram citados, além desse trabalho, vários outros que comprovaram impacto significativo da rejeição da normalidade dos efeitos aleatórios. A constatação da importância da correta especificação do modelo motivou o desenvolvimento do presente trabalho, que abordou com resultados de simulações, o impacto da má especificação dessa distribuição e uma ferramenta de diagnóstico que sugere a detecção do atendimento ou não dessa hipótese.

Nos Capítulos 2 e 3 são apresentadas breves introduções do Modelo Geral de Degradação e do Método de Lange e Ryan (1989), respectivamente. Além disso, um dos métodos comumente utilizados para inferência em dados de degradação, o Método MV-Normal, citado em Meeker e Escobar (1998), é revisitado na seção 2.1.

No Capítulo 4 é avaliada uma das inconsistências que podem estar presentes em modelos para dados de degradação, e que é um pré-requisito para que as conclusões extraídas dessa análise sejam confiáveis. A inconsistência diz respeito a considerar que a distribuição dos efeitos aleatórios é Normal (quando na verdade, pode não ser). Foi realizado um estudo de simulação onde os efeitos aleatórios foram gerados de diferentes distribuições, dentre elas, da própria distribuição Normal. Posteriormente, com o conhecimento do verdadeiro valor de algumas quantidades (chamadas figuras de mérito), e dessas mesmas quantidades geradas por esses modelos simulados, esses valores foram comparados através de algumas medidas, como por exemplo o vício relativo, desvio-padrão e a verificação do percentual

de cobertura do intervalo de confiança construídos para cada quantidade. Através desse estudo, pode-se comprovar que a má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios teve impacto significativo na estimação das figuras de mérito, que é o objetivo principal da análise de tempo de falha.

A ferramenta para detecção de normalidade dos efeitos aleatórios utilizada nesse trabalho foi desenvolvida por Lange e Ryan (1989) e citada no trabalho de Eberly e Thackeray (2005). Ainda no capítulo 4, ela foi avaliada nos dados simulados e em um banco de dados reais, relativos a desgaste em rodas de trens, também citados em Freitas et al. (2009b). Nas simulações, os resultados encontrados apontaram para um bom desempenho da ferramenta, ou seja, o percentual de rejeição da hipótese nula (que atesta normalidade) foi alto quando a distribuição considerada não era a distribuição normal, e equivalente ao valor de α (*alfa*) quando os efeitos aleatórios gerados eram normalmente distribuídos. Já nos dados reais, a ferramenta apontou para efeitos aleatórios não normais, o que foi comprovado em análises complementares de trabalhos anteriores. Portanto, a aplicação da ferramenta se mostrou útil, além de apresentar rotina de simulação facilmente aplicável.

Assim, a identificação da normalidade dos efeitos aleatórios, como hipótese de ajuste de modelo para dados de degradação, se mostra importante para que a estimação das quantidades de interesse (*MTTF*, percentis) seja confiável.

Nesse contexto, após a verificação da normalidade dos efeitos aleatórios, deve-se realizar algum tipo de tratamento buscando uma maior acurácia na estimação dessas quantidades. Esse trabalho já está sendo levantado por outra frente de pesquisa, cujo foco está no desenvolvimento de métodos computacionais alternativos que permitam a obtenção de estimadores de máxima verossimilhança para modelos de efeitos mistos com efeitos aleatórios não normais.

5.1 Sugestões para Pesquisas Futuras

Para estudos posteriores, visando medir o desempenho da ferramenta de diagnóstico da normalidade dos efeitos aleatórios, proposta por Lange e Ryan (1989), seria interessante considerar não somente modelos de degradação mais complexos, com interceptos e inclinações aleatórios, mas também outras distribuições de probabilidade para esses efeitos.

Há também a possibilidade de avaliar o desempenho de várias ferramentas de diagnóstico, uma vez que esse ramo de pesquisa tem se mostrado em crescente desenvolvimento.

Referências Bibliográficas

- Abad, A. A., Litière, S., e Molenberghs, G. (2010). Testing for misspecification in generalized linear mixed models. *Biostatistics*, 4:771–786.
- Agresti, A., Caffo, B., e Ohman-Strickland, P. (2004). Examples in which misspecification of random effects distribution reduces efficiency, and possible remedies. *Computational Statistics & Data Analysis*, 47:639–653.
- Almeida, C. P. (2011). Métodos numéricos de estimação para modelos de degradação com efeitos aleatórios não normais. Master's thesis, Departamento de Estatística - ICEX - UFMG.
- Butler, S. M. e Louis, T. A. (1992). Random effects models with non-parametric priors. *Statistics in Medicine*, 11:1981–2000.
- Crk, V. (2000). Reliability assessment from degradation data. *Proceedings of the Annual Reliability and Maintainability Symposium*, pages 155–161.
- Dempster, A. P. e Ryan, L. M. (1985). Weighted normal plots. *Journal of the American Statistical Association*, 80:845–850.
- Després, J., S., M., Lupien, P., Tremblay, A., Nadeau, A., e Bouchard, C. (1990). Regional distribution of body fat, plasma lipoproteins, and cardiovascular disease. *Arteriosclerosis*.
- Eberly, L. E. e Thackeray, L. M. (2005). On Lange and Ryan's plotting technique for diagnosing non-normality of random effects. *Statistics & Probability Letters*, 75:77–85.
- Efron, B. e Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall/CRC.
- Fitzmaurice, G. M., Laird, N. M., e Ware, J. H. (2004). *Applied Longitudinal Analysis*. John Wiley & Sons, Inc.
- Freitas, M. A. e Colosimo, E. A. (1997). *Confiabilidade: Análise de Tempo de Falha e Testes de Vida Acelerados*, volume 12. Fundação Christiano Ottoni, Escola de Engenharia da UFMG.

- Freitas, M. A., Colosimo, E. A., Santos, T. R., e Pires, M. C. (2009a). Reliability assessment using degradation models: Bayesian and classical approaches. *Pesquisa Operacional*, 30(1):195–219.
- Freitas, M. A., Toledo, M. L. G., Colosimo, E. A., e Pires, M. C. (2009b). Using degradation data to assess reliability: A case study on train wheel degradation. *Quality and Reliability Engineering International*, 25:607–629.
- Hamada, M. S. (2005). Using degradation data to assess reliability. *Quality Engineering*, 17:615–620.
- Heagerty, P. J. e Kurland, B. (2001). Misspecified maximum likelihood estimates and generalized linear mixed models. *Technometrics*, 88:973–985.
- Huang, X. (2009). Diagnosis of random-effect model misspecification in generalized linear mixed models for binary response. *Biometrics*, 65:361–368.
- Huang, X. (2010). Detecting random-effects model misspecification via coarsened data. *Computational Statistics & Data Analysis*, 55:703–714.
- Lange, N. e Ryan, L. (1989). Assessing normality in random effects models. *The Annals of Statistics*, 17(2):624–642.
- Lee, E. e Nelder, J. (1996). Hierarchical generalized linear models (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 58:619–678.
- Lindstrom, M. J. e Bates, D. M. (1990). Nonlinear mixed effects models for repeated measures data. *Biometrics*, (46):673–687.
- Litière, S., Alonso, A., e Molenberghs, G. (2007). Type I and Type II error under random-effects misspecification in generalized linear mixed models. *The International Biometric Society*, 63:1038–1044.
- Litière, S., Alonso, A., e Molenberghs, G. (2008). A family of tests to detect misspecifications in the random-effects structure of generalized linear mixed models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52:4474–4486.
- Lu, C. J. e Meeker, W. Q. (1993). Using degradation measurements to estimate a time-to-failure distribution. *Technometrics*, 35:161–174.
- Meeker, W. e Escobar, L. A. (1998). *Statistical Methods for Reliability Data*. Wiley Series in Probability and Statistics: New York, 1 edition.
- Nelson, K. P., Lipsitz, S. R., Fitzmaurice, G. M., Ibrahim, J., Parzen, M., e Strawderman, R. (2006). Use of the probability integral transformation to fit nonlinear mixed-effects models with nonnormal random effects. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 15(1):89–99.

- Neuhaus, J. M., Hauck, W. W., e Kalbfleisch, J. D. (1992). The effects of mixture distribution misspecification when fitting mixed-effects logistic models. *Biometrika*, 79:755–762.
- Oliveira, V. R. B. e Colosimo, E. A. (2004). Comparison of methods to estimate the time-to-failure distribution in degradation tests. *Quality and Reliability Engineering International*, 20:363–373.
- Patterson, H. e Thompson, R. (1971). Recovery of inter-block information when block sizes are unequal. *Biometrika*, (58):545–554.
- Pinheiro, J. C. e Bates, D. C. (1995). Approximations to the log-likelihood function in the nonlinear mixed-effects model. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 4:12–35.
- Pinheiro, J. C. e Bates, D. C. (2000). *Mixed Effects Models in S and S-Plus*. Springer - New York, 1 edition.
- Sheiner, L. e Beal, S. (1980). Evaluation of methods for estimating population pharmacokinetic parameters. i. michaelis-menten model: Routine clinical pharmacokinetic data. *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics*, 6(8):553–571.
- Song, P., Fan, Y., e Kalbfleisch, J. (2005). Maximization by parts in likelihood inference (with discussion). *Journal of the American Statistical Association*, 100:1145–1167.
- Tchetgen, E. J. e Coull, B. A. (2006). A diagnostic test for the mixing distribution in a generalized linear mixed model. *Biometrika*, 93:1003–1010.
- Tseng, S. T., Hamada, M., e Chiao, C. H. (1995). Using degradation data to improve fluorescent lamp reliability. *Journal of Quality Technology*, 27:363–369.
- Verbeke, G. e Lesaffre, E. (1997). The effect of misspecifying the random-effects distribution in linear mixed effects distribution in linear mixed models for longitudinal data. *Computational Statistics & Data Analysis*, 23:541–556.
- Vonesh, E. e Carter, R. (1992). Mixed-effects nonlinear regression for unbalanced repeated measures. *Biometrics*, (48):1–18.
- Waagepetersen, R. (2006). A simulation-based goodness-of-fit test for random effects in generalized linear mixed models. *Scandinavian Journal of Statistics*, 33:721–731.
- Wu, S. J. e Shao, J. (1999). Reliability analysis using the least squares method in nonlinear mixed-effects degradation models. *Statistica Sinica*, 9:855–877.
- Wu, S. J. e Tsai, T. R. (2000). Estimation of time-to-failure distribution derived from a degradation model using fuzzy clustering. *Quality and Reliability Engineering International*, 16:261–267.

Yacout, A. M., Salvatores, S., e Orechwa, Y. (1996). Degradation analysis estimates of the time-to-failure distribution of irradiated fuel elements. *Nuclear Technology*, 113:177–189.

Apêndice A

Resultados da Simulação: Vício Relativo

Tabela A.1: Vício Relativo para distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios com $\mu = -9,122650$

σ	Perfis	$t_{(1\%)}$	$t_{(5\%)}$	$t_{(10\%)}$	$t_{(50\%)}$	$t_{(80\%)}$	MTTF
0,235929	25	0,084	0,030	0,008	0,028	0,000	0,029
	50	0,087	0,033	0,010	0,027	0,002	0,019
	75	0,075	0,022	0,001	0,032	0,003	0,018
	100	0,085	0,032	0,010	0,026	0,000	0,021
0,5	25	0,290	0,088	0,007	0,134	0,043	1,019
	50	0,283	0,085	0,004	0,133	0,039	1,000
	75	0,254	0,061	0,016	0,145	0,043	1,046
	100	0,273	0,077	0,001	0,131	0,030	1,424
0,8	25	0,599	0,137	0,034	0,348	0,322	1,175
	50	0,594	0,135	0,034	0,344	0,312	1,282
	75	0,538	0,098	0,065	0,359	0,320	2,265
	100	0,474	0,054	0,100	0,378	0,333	1,324
1,0	25	1,003	0,257	0,001	0,455	0,495	1,407
	50	0,807	0,138	0,091	0,497	0,524	0,720
	75	0,707	0,080	0,136	0,515	0,532	0,556
	100	0,702	0,076	0,138	0,515	0,532	1,270

Tabela A.2: Vício Relativo para distribuição Weibull dos efeitos aleatórios com $\delta = 10.767,69$

α	Perfis	$t_{(1\%)}$	$t_{(5\%)}$	$t_{(10\%)}$	$t_{(50\%)}$	$t_{(80\%)}$	MTTF
0,5	25	729,970	136,360	62,722	5,903	1,256	0,860
	50	785,530	145,321	66,995	6,446	1,437	1,009
	75	764,203	142,008	65,318	6,260	1,377	0,959
	100	884,400	166,049	76,773	7,628	1,848	1,342
1,1	25	1,454	1,537	1,428	0,636	0,219	0,291
	50	1,426	1,527	1,414	0,601	0,184	0,259
	75	1,369	1,457	1,355	0,592	0,186	0,256
	100	1,355	1,477	1,386	0,619	0,207	0,277
2,0	25	0,294	0,052	0,134	0,110	0,036	0,060
	50	0,341	0,028	0,124	0,116	0,046	0,067
	75	0,322	0,053	0,149	0,128	0,053	0,077
	100	0,314	0,059	0,155	0,133	0,055	0,080
6,230596	25	0,172	0,095	0,066	0,027	0,033	0,041
	50	0,139	0,074	0,050	0,019	0,030	0,033
	75	0,157	0,087	0,062	0,028	0,037	0,043
	100	0,149	0,083	0,058	0,027	0,037	0,041
10	25	0,118	0,058	0,039	0,019	0,033	0,033
	50	0,130	0,069	0,049	0,027	0,039	0,041
	75	0,139	0,074	0,052	0,026	0,037	0,040
	100	0,131	0,070	0,049	0,027	0,039	0,041

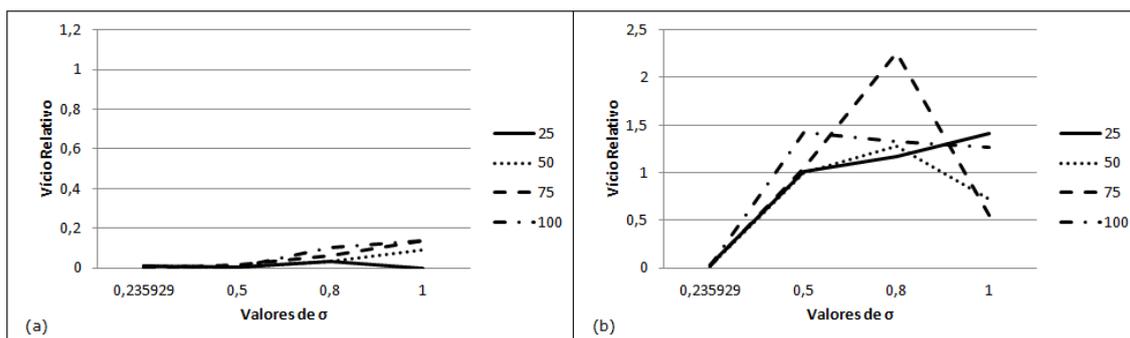


Figura A.1: Vício relativo para o percentil $t_{10\%}$ (a) e o $MTTF$ (b). Distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios.

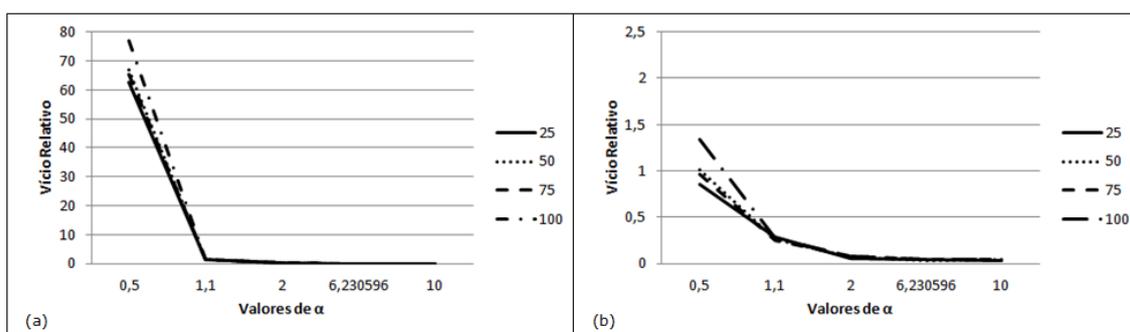


Figura A.2: Vício relativo para o percentil $t_{10\%}$ (a) e o $MTTF$ (b). Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios.

Apêndice B

Resultados da Simulação: Desvio-padrão

Tabela B.1: Desvio-padrão para Lognormal com $\mu = -9,122650$

σ	Perfis	t _(1%)	t _(5%)	t _(10%)	t _(50%)	t _(80%)	MTTF
0,235929	25	1.820,51	1.802,85	1.780,10	1.549,22	1.886,86	2.179,28
	50	1.154,31	1.156,37	1.140,10	1.077,41	1.574,51	1.361,97
	75	980,86	975,38	966,93	913,31	1.342,58	1.316,93
	100	774,65	757,95	745,20	686,64	52,23	980,90
0,5	25	2.523,47	2.797,99	2.970,99	3.594,42	4.478,49	27.207,91
	50	1.679,22	1.871,52	1.979,03	2.432,86	3.668,09	39.783,96
	75	1.392,45	1.552,56	1.652,63	2.026,32	2.920,77	48.566,85
	100	1.139,06	1.248,68	1.312,32	1.520,23	2.487,65	109.575,83
0,8	25	2.646,88	3.129,17	3.471,80	5.584,82	9.278,21	56.077,06
	50	1.845,16	2.172,68	2.399,84	3.735,15	5.988,33	53.050,36
	75	1.473,16	1.746,45	1.940,05	3.070,28	5.126,38	547.388,29
	100	1.234,60	1.443,24	1.584,72	2.409,45	3.734,23	93.474,60
1,0	25	2.119,42	2.563,75	2.878,90	5.052,19	9.529,01	318.066,32
	50	1.448,37	1.748,72	1.970,01	3.523,08	6.800,29	62.789,41
	75	1.424,19	1.737,96	1.958,99	3.465,47	6.657,80	34.145,97
	100	1.209,14	1.456,80	1.640,54	2.911,59	5.611,32	286.058,22

Tabela B.2: Desvio-padrão para Weibull com $\delta = 10.767,69$

α	Perfis	$t_{(1\%)}$	$t_{(5\%)}$	$t_{(10\%)}$	$t_{(50\%)}$	$t_{(80\%)}$	MTTF
0,5	25	1.280,38	6.468,32	12.733,31	63.399,32	115.363,06	72.592,84
	50	952,55	4.653,26	9.184,08	46.862,87	85.132,00	53.627,34
	75	906,06	4.357,62	8.391,45	42.219,02	76.671,95	48.213,65
	100	1.095,41	5.450,50	10.911,05	55.865,64	103.313,80	64.932,12
1,1	25	248,08	1.025,93	1.803,25	7.561,77	13.245,28	8.417,55
	50	242,43	905,72	1.500,63	4.719,28	7.660,23	5.037,32
	75	180,04	703,96	1.214,20	4.547,89	7.658,67	4.916,92
	100	178,97	675,40	1.194,73	4.154,05	6.769,17	4.432,29
2,0	25	963,77	1.945,87	2.163,50	2.784,35	4.011,65	2.806,35
	50	629,72	1.301,22	1.531,74	2.292,07	3.437,66	2.340,27
	75	528,78	1.085,90	1.323,69	2.048,45	2.834,12	2.044,89
	100	556,41	1.129,10	1.294,40	1.560,88	2.144,97	1.540,71
6,230596	25	2.967,33	2.359,69	2.058,54	1.281,58	1.293,14	1.282,31
	50	1.999,36	1.617,85	1.424,36	922,38	902,18	912,31
	75	1.505,01	1.213,88	1.062,28	748,15	820,74	747,12
	100	1.599,82	1.295,70	1.156,20	722,12	590,30	719,22
10,0	25	2.282,52	1.809,71	1.563,93	859,78	806,81	859,70
	50	1.540,20	1.243,42	1.085,11	622,87	529,66	619,36
	75	1.171,54	928,17	807,61	448,01	412,75	446,00
	100	952,16	748,12	654,00	385,01	386,34	385,73

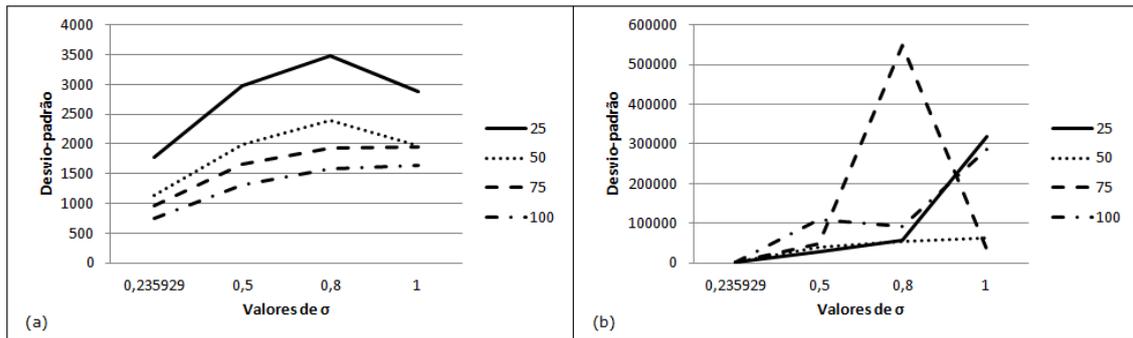


Figura B.1: Desvio-padrão do percentil $t_{10\%}$ (a) e do $MTTF$ (b). Distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios.

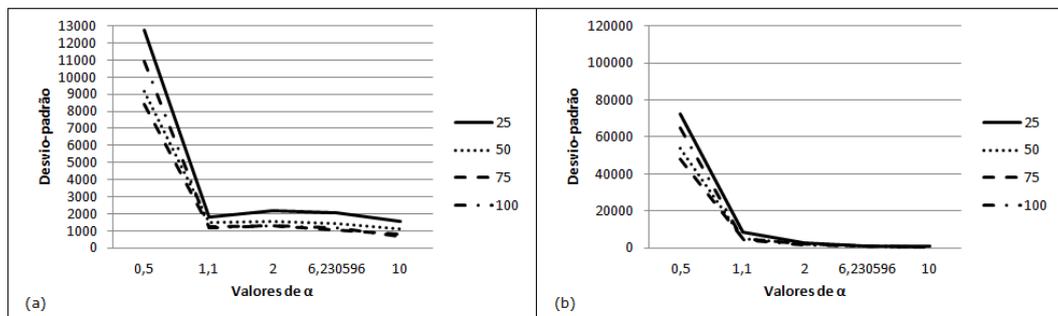


Figura B.2: Desvio-padrão do percentil $t_{10\%}$ (a) e do $MTTF$ (b). Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios.

Apêndice C

Resultados da Simulação: Percentual de Cobertura dos Intervalos de Confiança

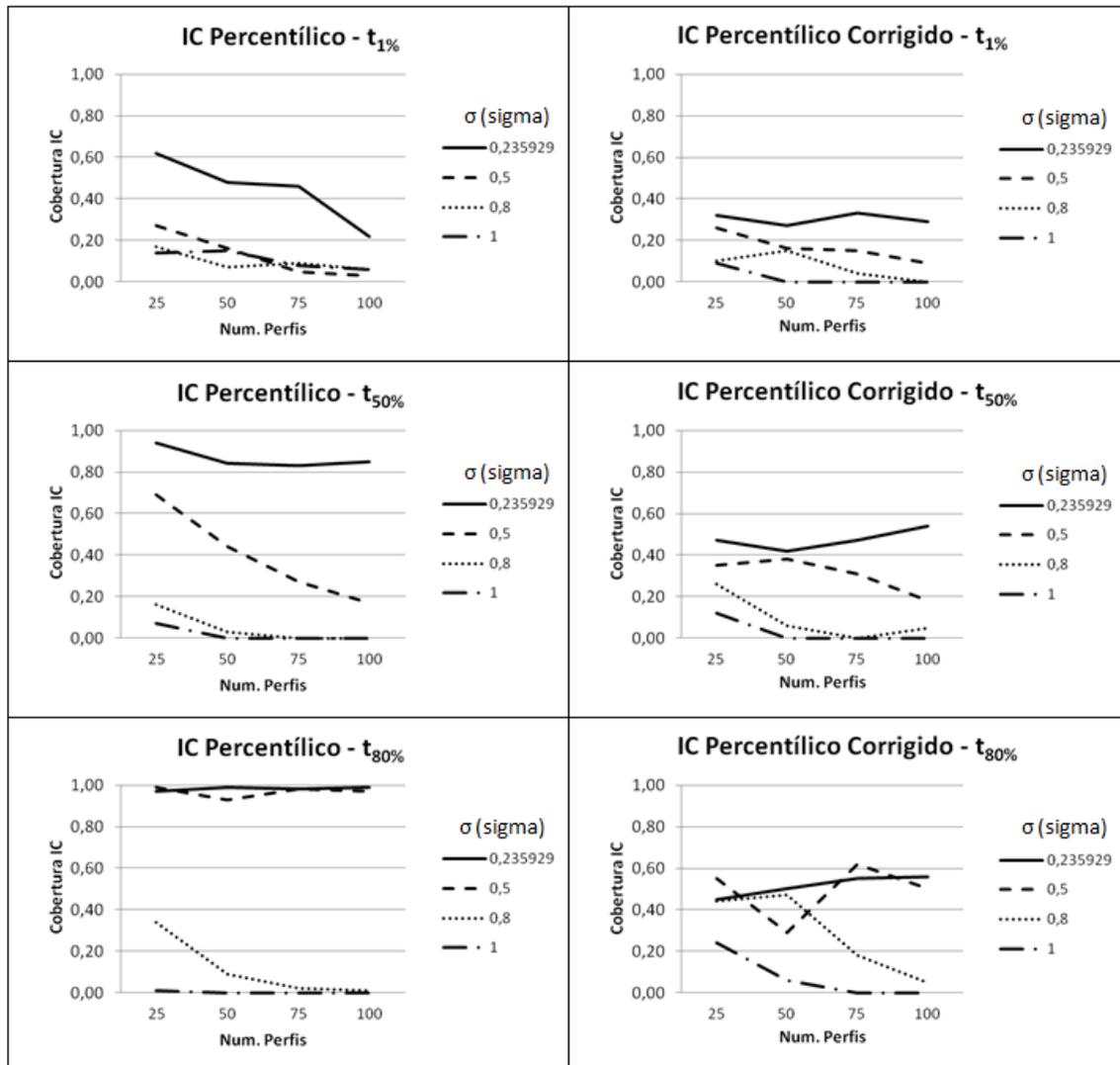


Figura C.1: Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios. (*Bootstrap Paramétrico*)

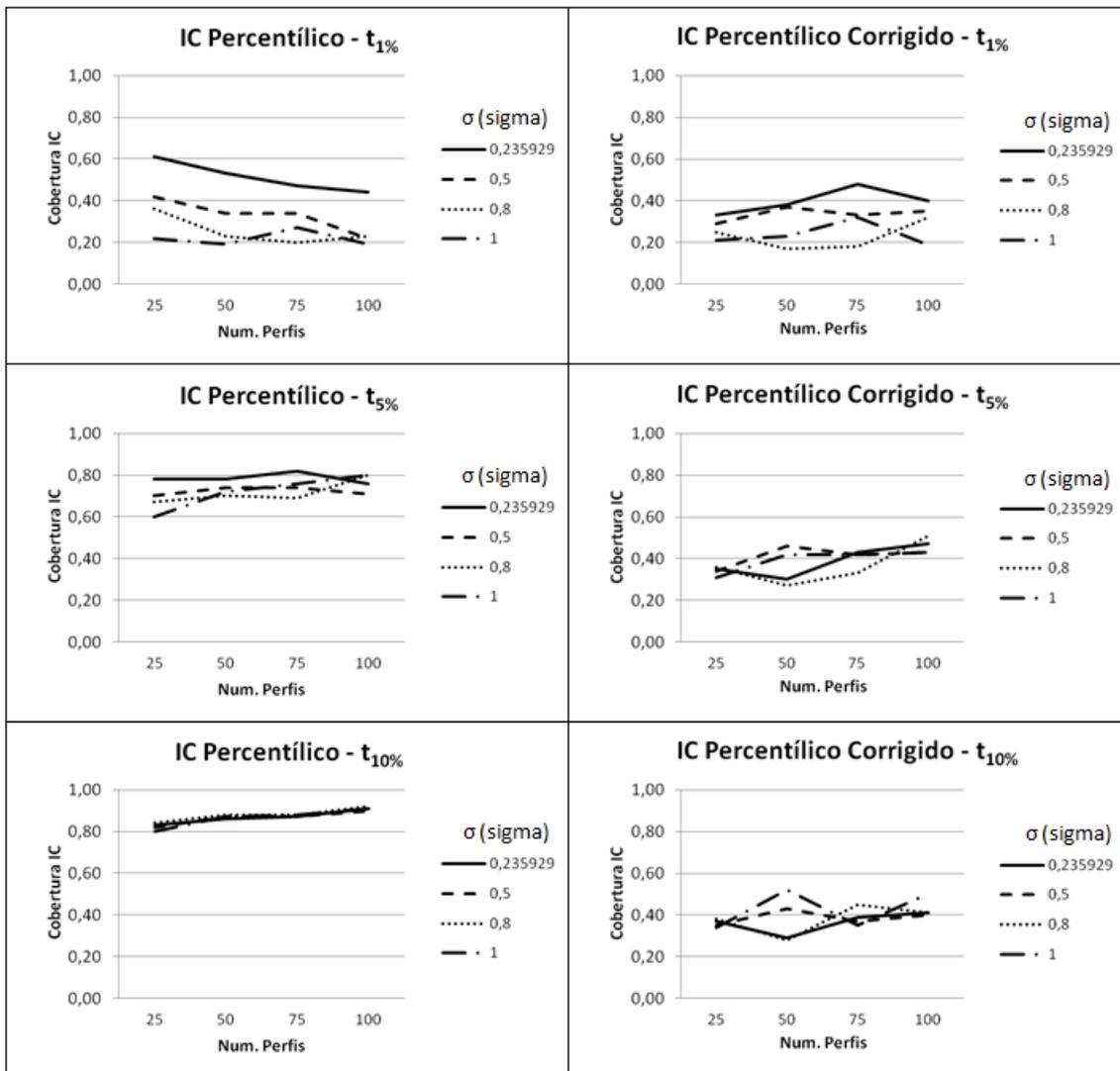


Figura C.2: Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios. (*Bootstrap Não-Paramétrico*)

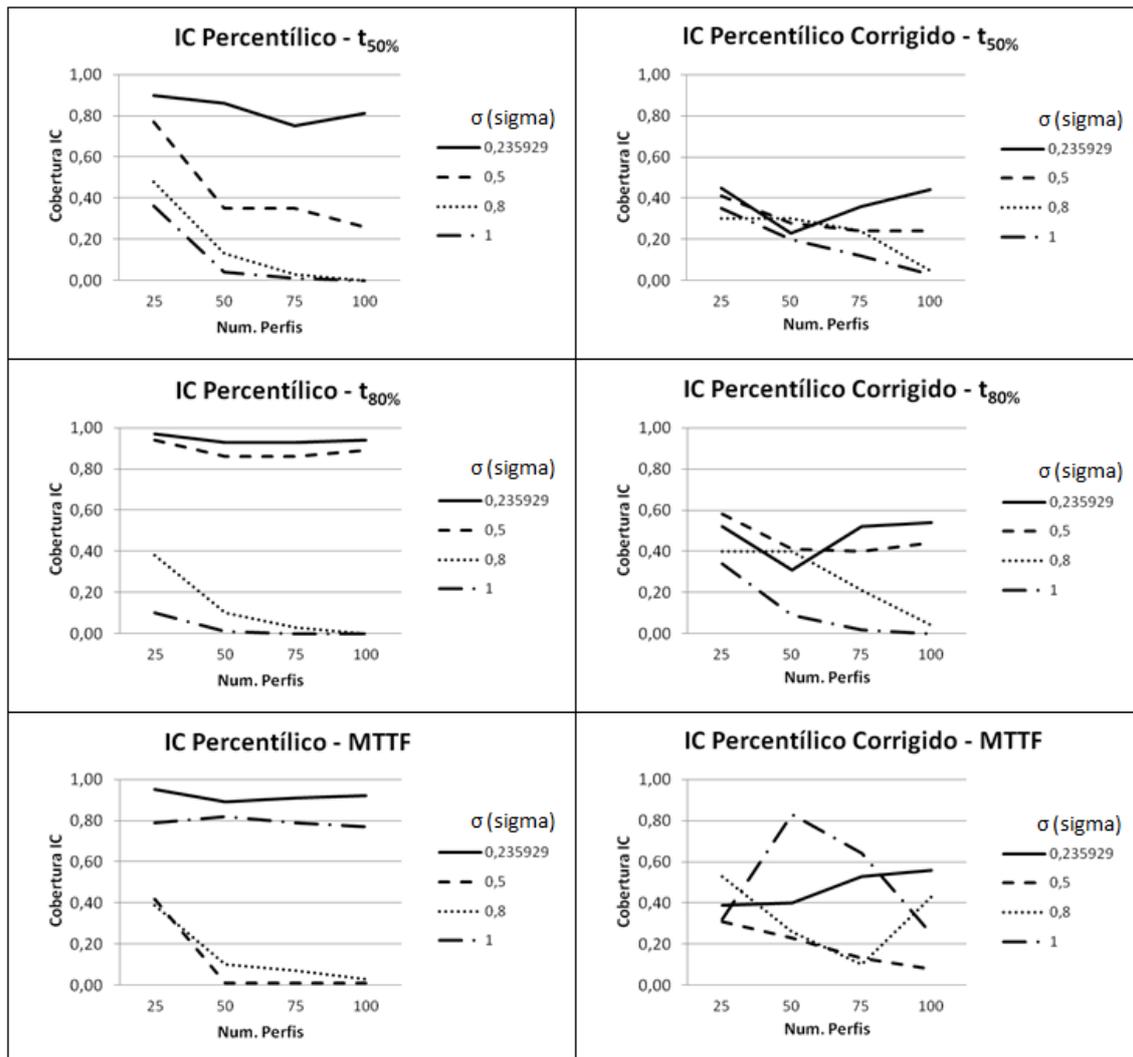


Figura C.3: Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Lognormal dos efeitos aleatórios. (*Bootstrap Não-Paramétrico*)

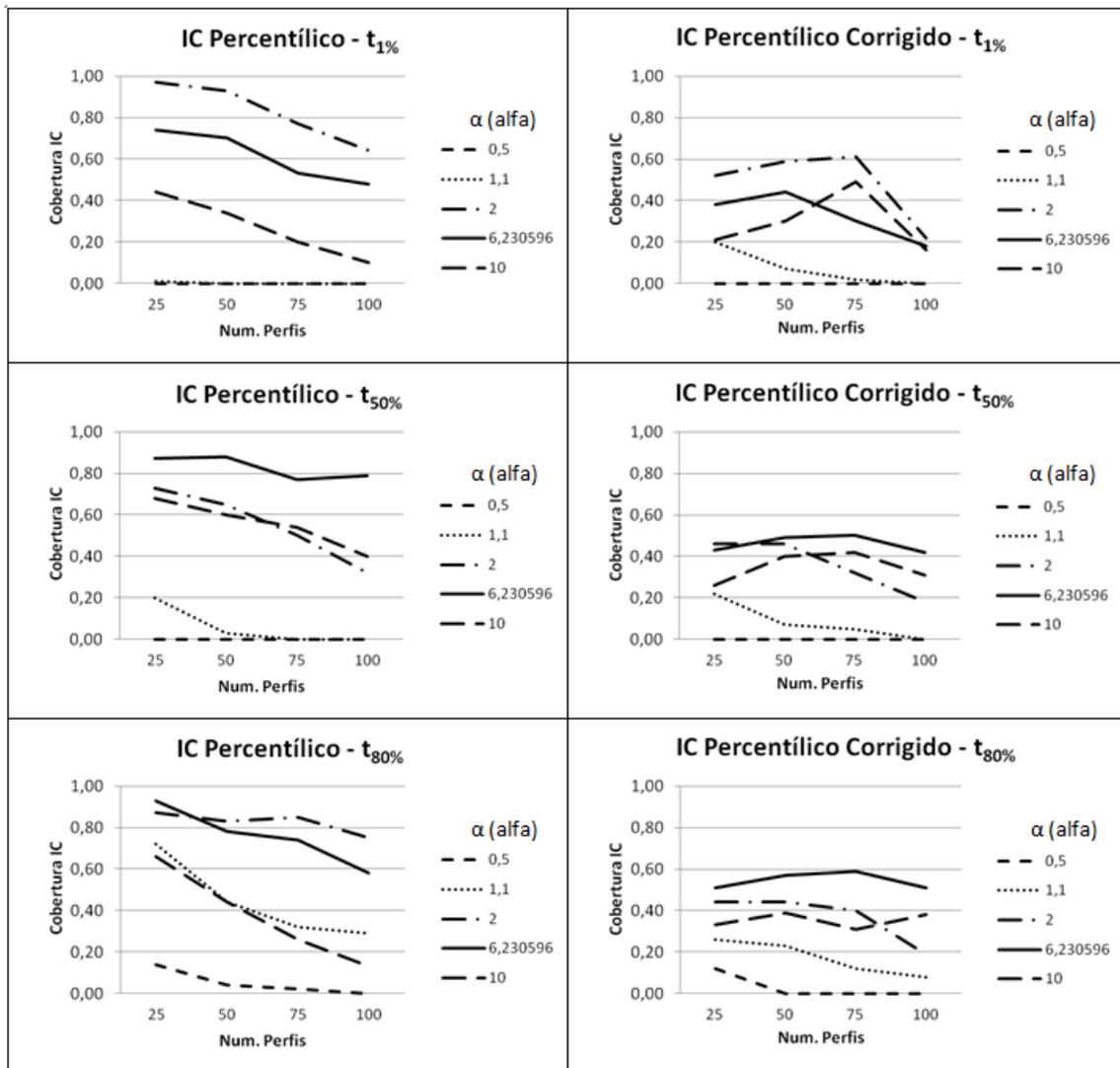


Figura C.4: Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios. (*Bootstrap Paramétrico*)

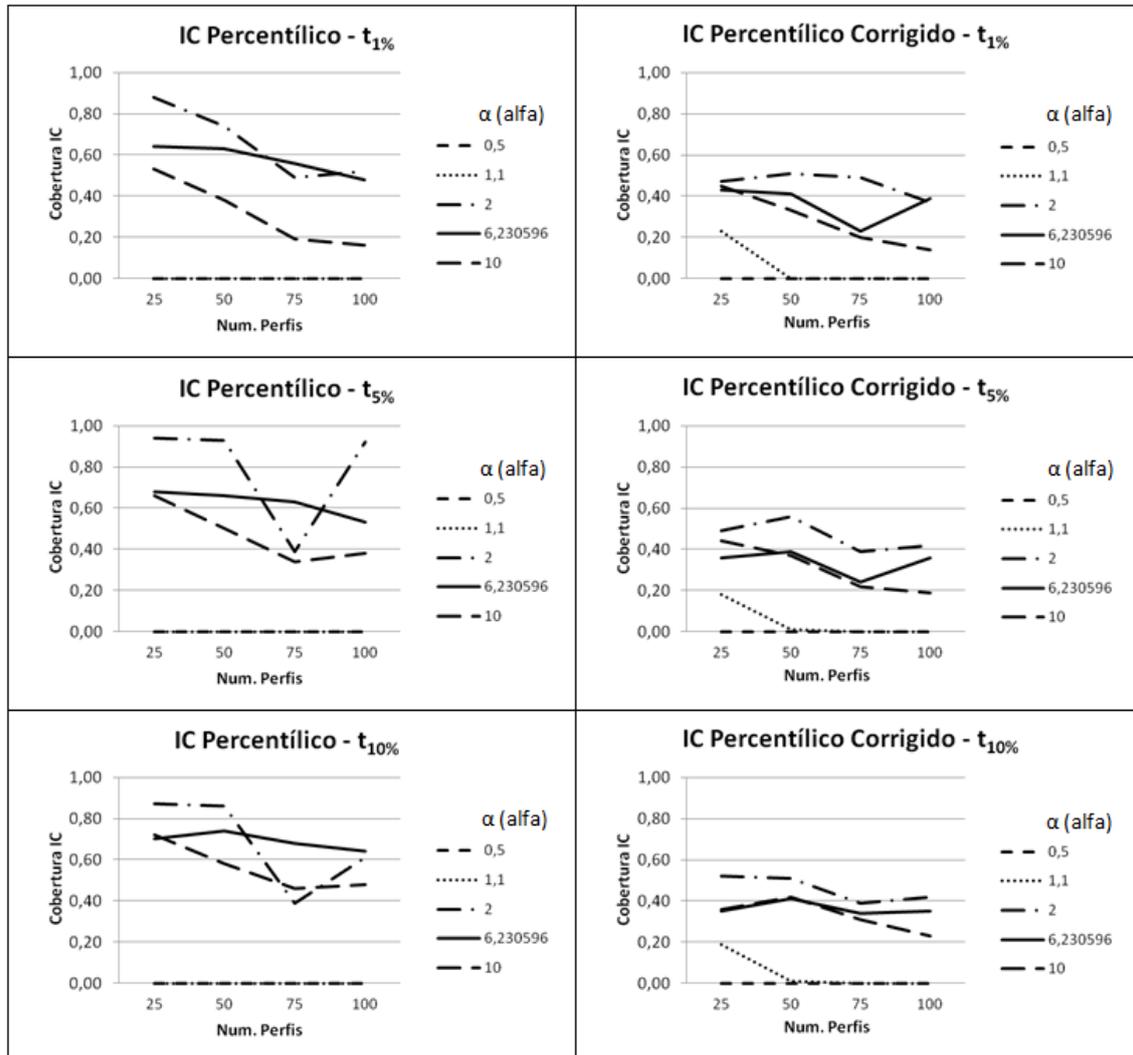


Figura C.5: Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios. (*Bootstrap Não-Paramétrico*)

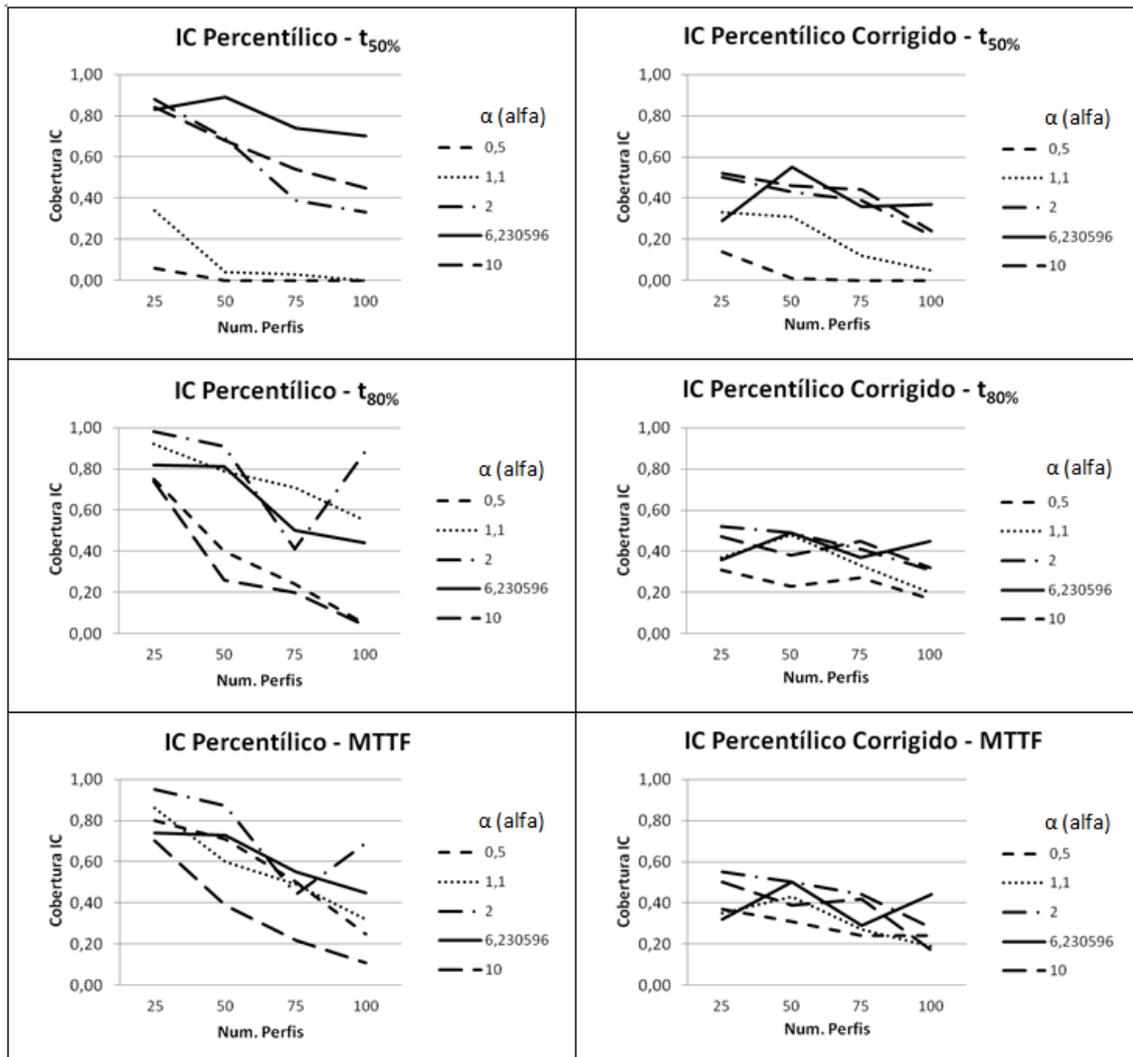


Figura C.6: Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Weibull dos efeitos aleatórios. (*Bootstrap Não-Paramétrico*)

Apêndice D

Resultados da Simulação: Distribuição Normal dos Efeitos Aleatórios

D.1 Vício Relativo

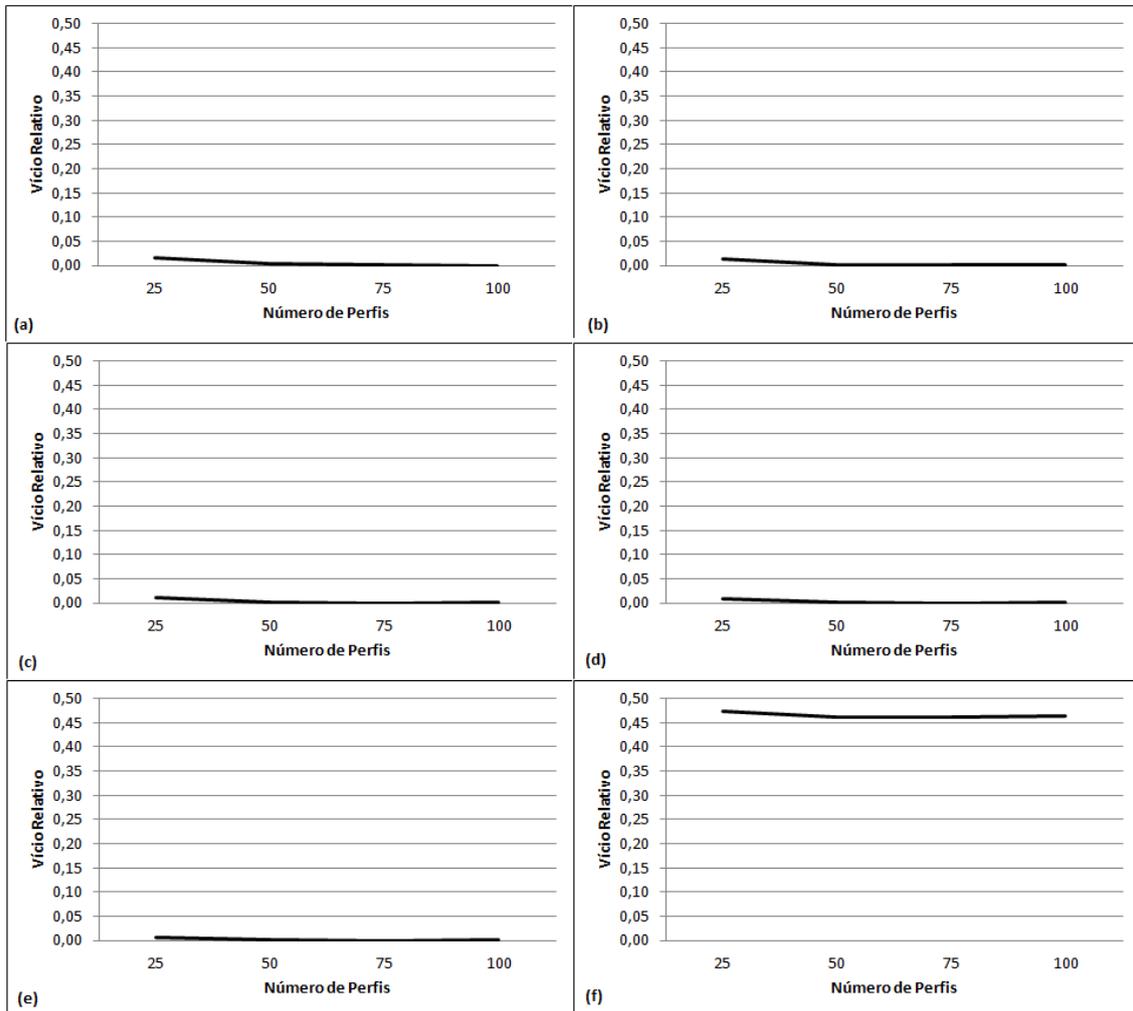


Figura D.1: Vício Relativo dos percentis $t_{1\%}$ (a), $t_{5\%}$ (b), $t_{10\%}$ (c), $t_{50\%}$ (d), $t_{80\%}$ (e) e $MTTF$ (f). Distribuição Normal dos efeitos aleatórios.

D.2 Desvio-Padrão

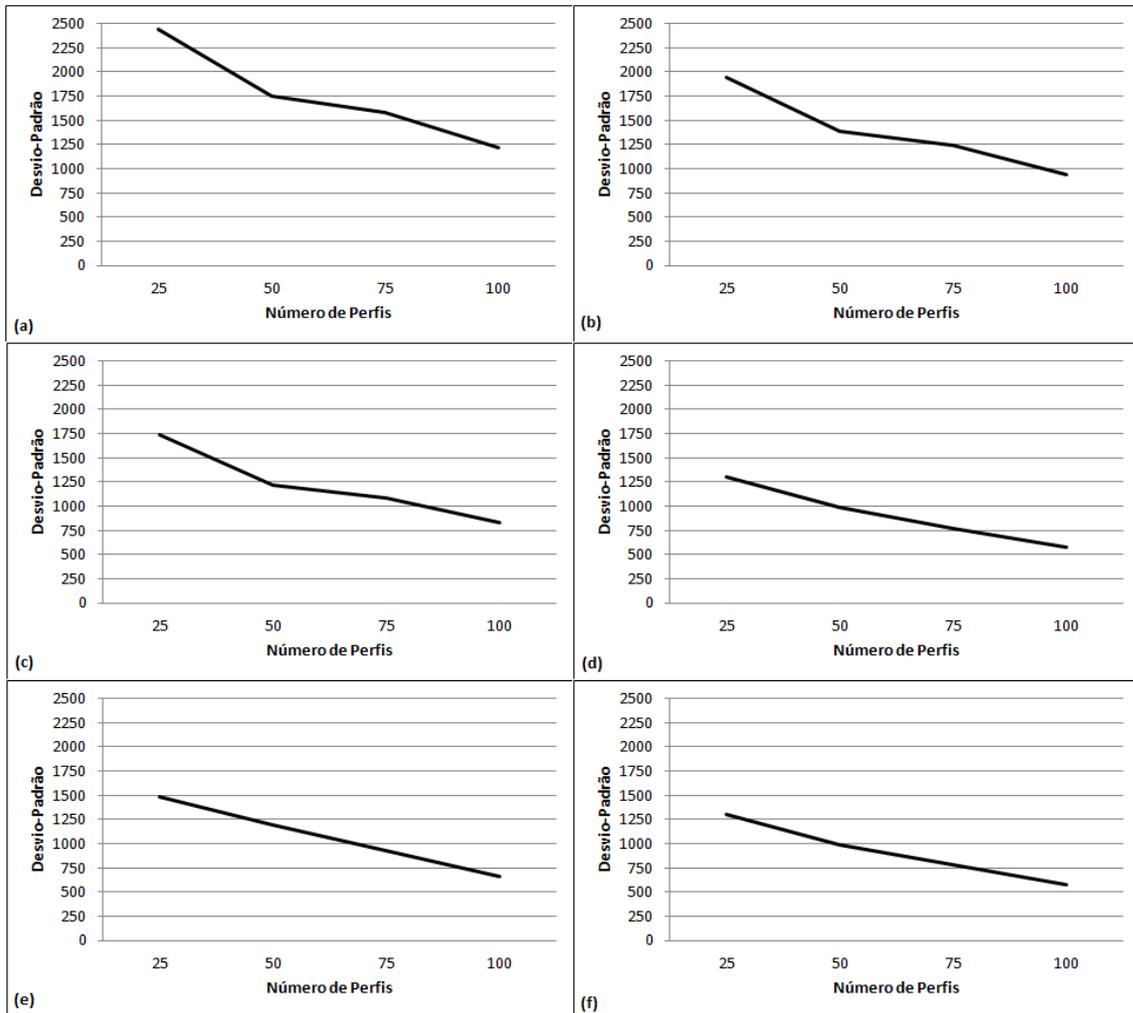


Figura D.2: Desvio-Padrão dos percentis $t_{1\%}$ (a), $t_{5\%}$ (b), $t_{10\%}$ (c), $t_{50\%}$ (d), $t_{80\%}$ (e) e $MTTF$ (f). Distribuição Normal dos efeitos aleatórios.

D.3 Percentual de Cobertura dos Intervalos de Confiança

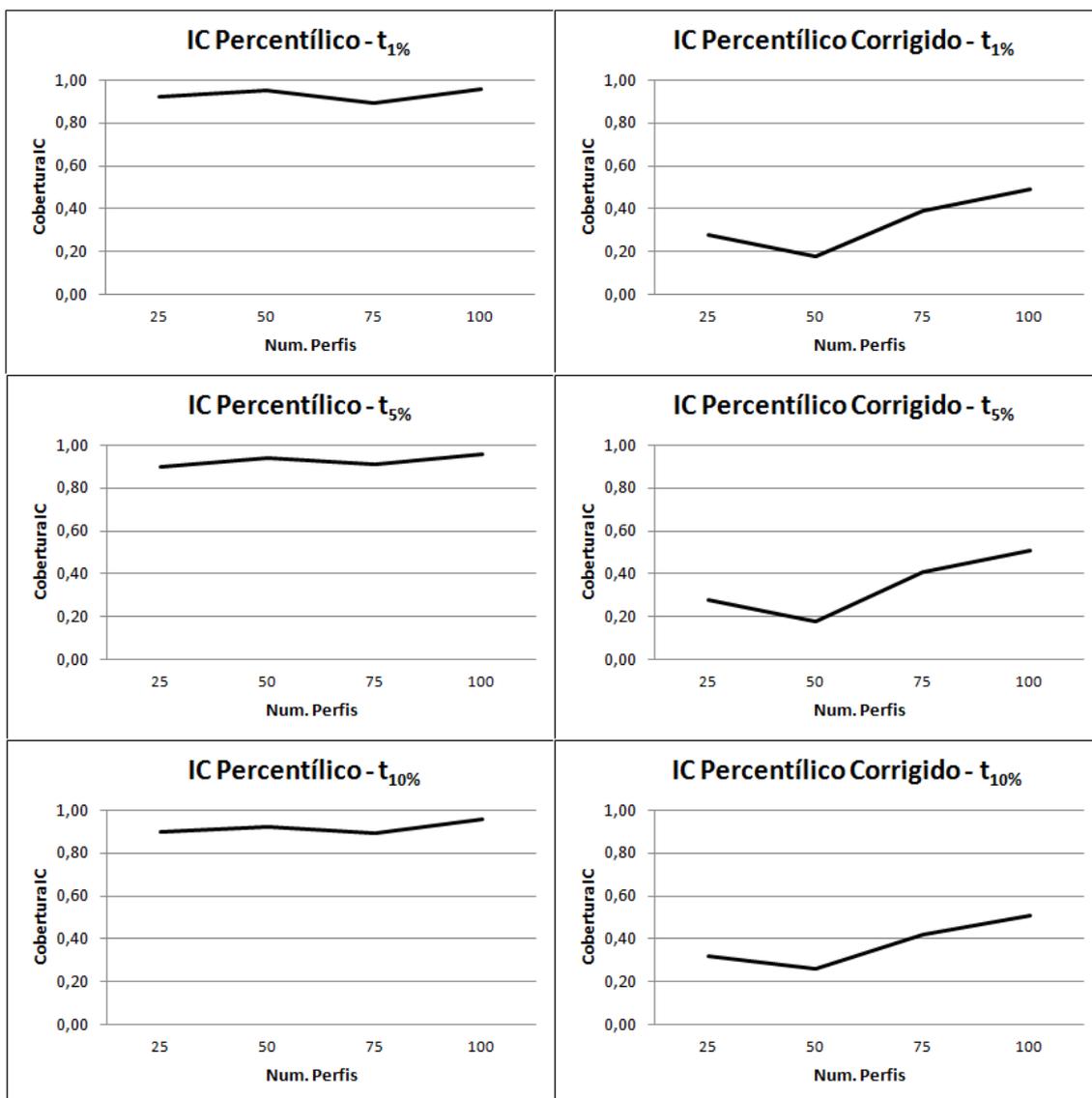


Figura D.3: Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Normal dos efeitos aleatórios. (*Bootstrap Não-Paramétrico*)

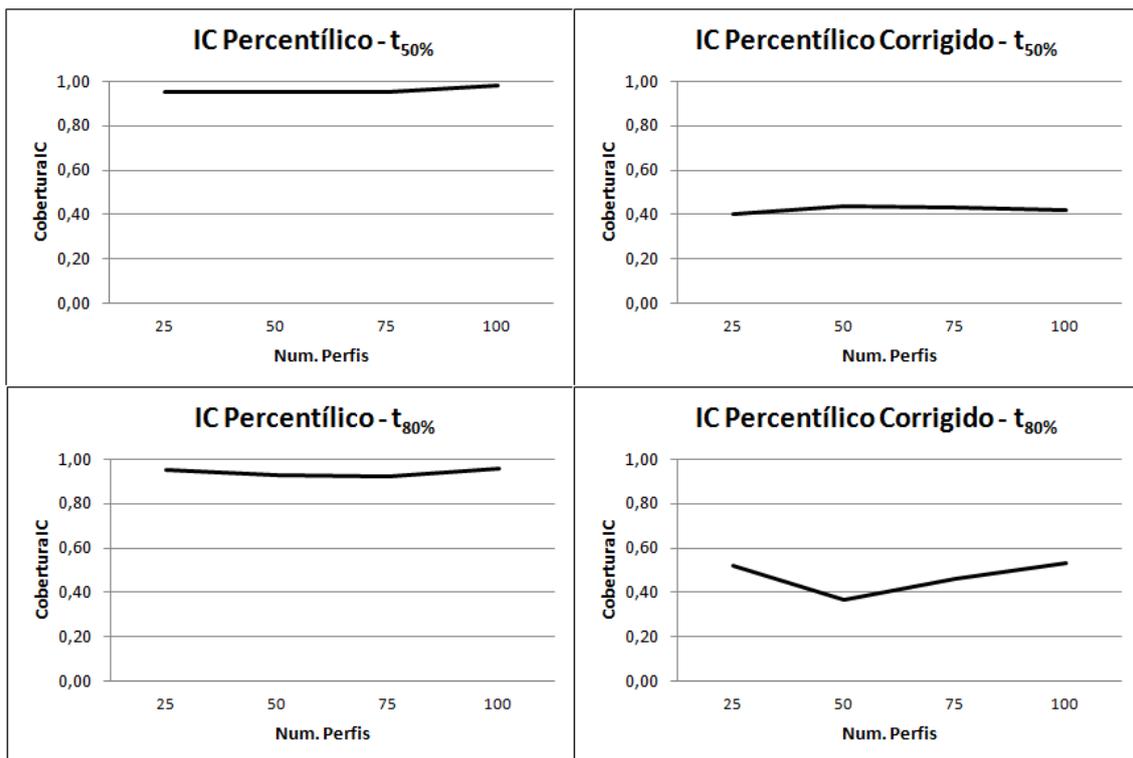


Figura D.4: Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Normal dos efeitos aleatórios. Não houve convergência para o cálculo do *MTTF*. (*Bootstrap Não-Paramétrico*)

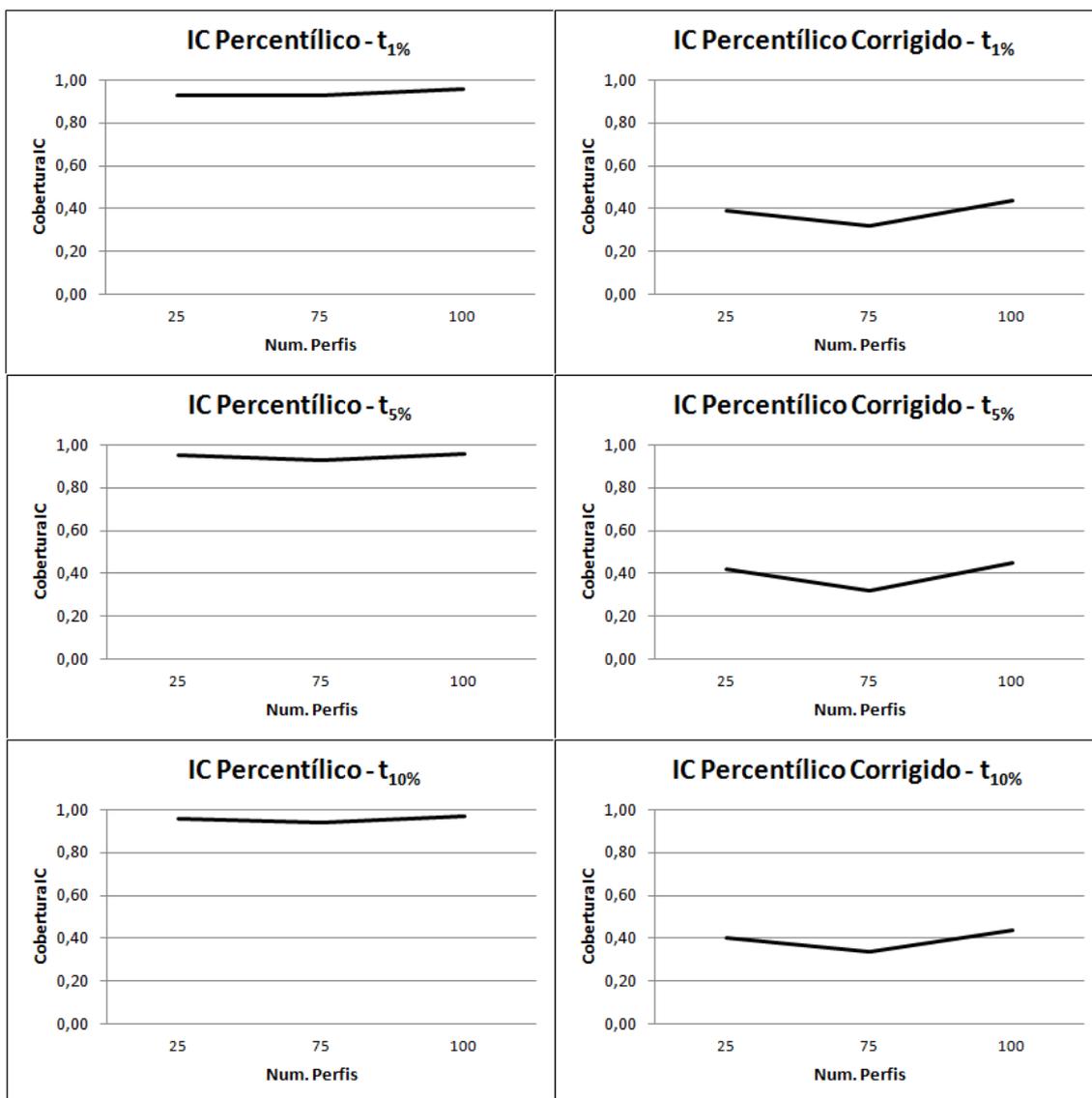


Figura D.5: Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Normal dos efeitos aleatórios. Não houve convergência para tamanho amostral (n) igual a 50. (*Bootstrap Paramétrico*)

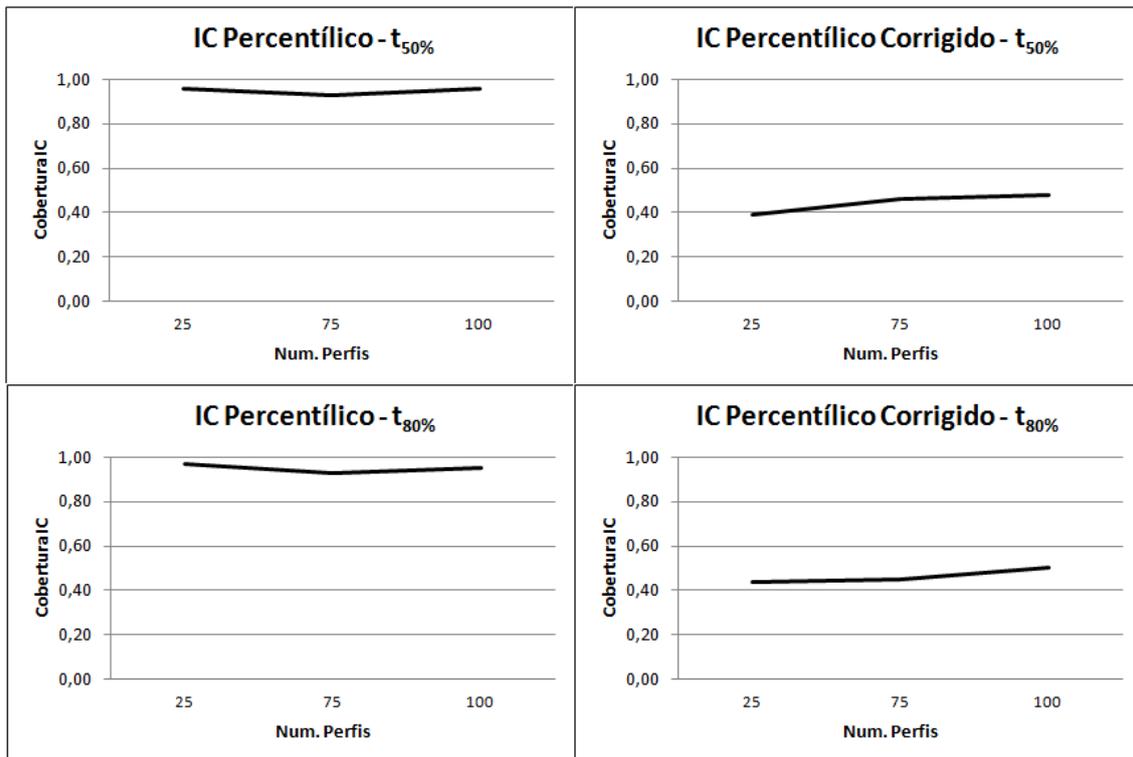


Figura D.6: Percentuais de cobertura dos IC's para as estimativas. Distribuição Normal dos efeitos aleatórios. Não houve convergência para o cálculo do *MTTF* nem para tamanho amostral (n) igual a 50. (*Bootstrap Paramétrico*)

Apêndice E

Código utilizado para avaliar a técnica proposta por Lange e Ryan (1989)

Distribuição Weibull¹

```
#####Declaração de bibliotecas:
require(nlme)
require(robCompositions)

data.inicial1<-date()
nsim<-100000
n<-25
k<-20
c1<-0
e1<-0
shape<-6.230596
scale<-10767.69

#####Definição dos vetores de interesse:
dados<-c(rep(0,4*n*k))
dim(dados)<-c(n*k,4)
colnames(dados)<-c("indice","tempo","betas","resposta")
dados<-as.data.frame(dados)
attach(dados)
dados$tempo<-rep(seq(0,38000,by=2000),n)
```

¹Esse mesmo código foi utilizado para todos os valores de parâmetros considerados para a distribuição Weibull (α , δ) e Lognormal (α , β) e para diferentes números de perfis ($n = 25, 50, 75$ e 100) – tabelas 4.2 e 4.3 citadas na seção 4.1.2. Para a distribuição Normal (μ , σ): $\mu = 9.130,704$ e $\sigma = 1.859,016$, mesmos valores utilizados por Freitas et al. (2009b).

```
ind<-seq(1,n,1)
dados$indice<-rep(ind,k,n*k,k)
beta<-c(ind,rep(0,n))
dim(beta)<-c(n,2)
wi=numeric(25)

for (h in 1:nsim){
  beta[,2]<-rweibull(n,shape,scale)
  dados$betas<-beta[,2][match(dados$indice,beta[,1])]
  dados$resposta<-dados$betas*dados$tempo+rnorm(n*k,0,0.01)
  modelo<- try(lme(resposta ~ tempo-1,data=dados,random=~tempo-1|indice,
                  method="ML"),silent=TRUE)

  if (class(modelo)!="try-error")
  {
    cov=cov(ranef(modelo))
    wi=beta[,2]/sqrt(cov)
    y<-matrix(adtest(wi))
    if (y[3,]<0.05)
      {
        c1=c1+1
      }
  }
  else {e1=e1+1}
}
c1/(nsim-e1)
c1
e1
data.final1<-date()
}
```

Apêndice F

Código utilizado para avaliar o impacto da má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios

Distribuição Weibull¹ utilizando o método *Bootstrap Paramétrico* para construção dos intervalos de confiança

```
#####Declaração de bibliotecas:
require(nlme)
library(lattice)

#####Definição das variáveis:
data.inicial<-date()
n<-25
k<-20
alfa_beta<-6.230596
delta_beta<-10767.690
delta_t<-35210.346
df<-3.27          #representa 20% de censura
cp<-0
pp<-0

#####Definição dos vetores de interesse:
dados<-c(rep(0,4*n*k))
dim(dados)<-c(n*k,4)
colnames(dados)<-c("indice", "tempo", "betas", "resposta")
```

¹Esse mesmo código foi utilizado para todos os valores de parâmetros considerados para a distribuição Weibull (α , δ) e Lognormal (α , β) e para diferentes números de perfis ($n = 25, 40, 75$ e 100) – tabelas 4.2 e 4.3 citadas na seção 4.1.2. Para a distribuição Normal (μ , σ) foram: $\mu = 9.130,704$ e $\sigma = 1.859,016$. Além de considerar, também, o método de amostragem *Bootstrap* não paramétrico.

```

dados<-as.data.frame(dados)
attach(dados)
dados$tempo<-rep(seq(0,38000,by=2000),n)
ind<-seq(1,n,1)
dados$indice<-rep(ind,k,n*k,k)
beta<-c(ind,rep(0,n))
dim(beta)<-c(n,2)

#####Definição de funções:
calcular.percentis <- function(vetor.tempos,vetor.percentis){
  vetor.distribuicao<-c(rep(0,length(vetor.percentis)))
  for (z in 1:length(vetor.distribuicao))
    vetor.distribuicao[z]<-quantile(vetor.tempos,vetor.percentis[z])
  return(vetor.distribuicao)
}

#####Definição dos números gerados (Monte Carlo e Bootstrap)
n.sim<-100
n.mc<-20000
n.bt<-4000

#####Criando matrizes de interesse para a simulação Monte Carlo:
#####Medidas de interesse reais:
percentis.interesse<-c(0.01,0.05,0.10,0.5,0.8)
qtde<-length(percentis.interesse)+1
qtde.interesse.real<-c(rep(0,qtde))
dim(qtde.interesse.real)<-c(qtde,1)
rownames(qtde.interesse.real)<-c("t(1%)", "t(5%)", "t(10%)", "t(50%)", "t(80%)",
"MTTF")
for(i in 1:(qtde-1))
  qtde.interesse.real[i]<-qweibull(percentis.interesse[i],alfa_beta,delta_t)
qtde.interesse.real[qtde]<-delta_t*gamma(1+(1/alfa_beta))

#####Medidas de interesse estimadas:
qtde.interesse.pt<-c(rep(0,n.sim*qtde))
dim(qtde.interesse.pt)<-c(qtde,n.sim)
rownames(qtde.interesse.pt)<-c("t(1%)", "t(5%)", "t(10%)", "t(50%)", "t(80%)",
"MTTF")
qtde.interesse.bt<-c(rep(0,n.bt*qtde))
dim(qtde.interesse.bt)<-c(qtde,n.bt)
rownames(qtde.interesse.bt)<-c("t(1%)", "t(5%)", "t(10%)", "t(50%)", "t(80%)",
"MTTF")
qtde.interesse.pt.media<-c(rep(0,qtde))

```

```

dim(qtde.interesse.pt.media)<-c(qtde,1)
rownames(qtde.interesse.pt.media)<-c("t(1%)", "t(5%)", "t(10%)", "t(50%)",
    "t(80%)", "MTTF")
vicio<-c(rep(0,qtde))
dim(vicio)<-c(qtde,1)
rownames(vicio)<-c("t(1%)", "t(5%)", "t(10%)", "t(50%)", "t(80%)", "MTTF")
vicio.relATIVO<-c(rep(0,qtde))
dim(vicio.relATIVO)<-c(qtde,1)
rownames(vicio.relATIVO)<-c("t(1%)", "t(5%)", "t(10%)", "t(50%)", "t(80%)",
    "MTTF")
dp.final<-c(rep(0,qtde))
dim(dp.final)<-c(qtde,1)
rownames(dp.final)<-c("t(1%)", "t(5%)", "t(10%)", "t(50%)", "t(80%)", "MTTF")
mse<-c(rep(0,qtde))
dim(mse)<-c(qtde,1)
rownames(mse)<-c("t(1%)", "t(5%)", "t(10%)", "t(50%)", "t(80%)", "MTTF")
cobertura.ic<-c(rep(0,qtde))
dim(cobertura.ic)<-c(qtde,1)
rownames(cobertura.ic)<-c("t(1%)", "t(5%)", "t(10%)", "t(50%)", "t(80%)", "MTTF")
cobertura.ic.perc<-c(rep(0,qtde))
dim(cobertura.ic.perc)<-c(qtde,1)
rownames(cobertura.ic.perc)<-c("t(1%)", "t(5%)", "t(10%)", "t(50%)", "t(80%)",
    "MTTF")

#####ICs das medidas de interesse estimadas:
ic.qtde.interesse<-c(rep(0,n.sim*qtde*2))
dim(ic.qtde.interesse)<-c(qtde,n.sim,2)
rownames(ic.qtde.interesse)<-c("t(1%)", "t(5%)", "t(10%)", "t(50%)", "t(80%)",
    "MTTF")
ic.qtde.interesse.perc<-c(rep(0,n.sim*qtde*2))
dim(ic.qtde.interesse.perc)<-c(qtde,n.sim,2)
rownames(ic.qtde.interesse.perc)<-c("t(1%)", "t(5%)", "t(10%)", "t(50%)", "t(80%)",
    "MTTF")

tempos.mc<-c(rep(0,n.mc))
tempos.bt<-c(rep(0,n.mc))

#####Início do 'for' para 'S' (Monte Carlo):
for(s in 1:n.sim)
{
    beta[,2]<-rweibull(n,alfa_beta,delta_beta)
    dados$betas<-beta[,2][match(dados$indice,beta[,1])]
    dados$resposta<-dados$betas*dados$tempo+rnorm(n*k,0,0.01)
}

```

```

#####Análise do modelo:
modelo<- try(lme(resposta ~ tempo-1, data = dados, random=~tempo-1|
               indice,method="ML"),silent=TRUE)

#####Gerando os tempos de falha Monte Carlo:
tempos.mc<-(df*(rnorm(n.mc,modelo$coefficients$fixed,sd(ranef(modelo))))))

#####Calculando as quantidades de interesse para os tempos de falha
##### Monte Carlo:
qtde.interesse.pt[,s][-6]<-calcular.percentis(tempos.mc[tempos.mc>=0],
                                             percentis.interesse)
qtde.interesse.pt[6,s]<-mean(tempos.mc[tempos.mc>=0])

#####Início da geração Bootstrap para cálculo dos ICs:
for(b in 1:n.bt)
{
  beta[,2]<-rnorm(n,modelo$coefficients$fixed,sd(ranef(modelo)))
  dados$betas<-beta[,2][match(dados$indice,beta[,1])]
  dados$resposta<-dados$betas*dados$tempo+rnorm(n*k,0,0.01)

  #####Análise do modelo:
  modelo2<- try(lme(resposta ~ tempo-1, data = dados, random=~tempo-1|
                    indice,method="ML"),silent=TRUE)

  #####Gerando os tempos de falha Bootstrap:
  tempos.bt<-
  (df*(rnorm(n.mc,modelo2$coefficients$fixed,sd(ranef(modelo2))))))

  #####Calculando as quantidades de interesse para os tempos de falha
  #####Bootstrap:
  qtde.interesse.bt[,b][-6]<-calcular.percentis(tempos.bt[tempos.bt>=0],
                                             percentis.interesse)
  qtde.interesse.bt[6,b]<-mean(tempos.bt[tempos.bt>=0])
}

#####Calculando o IC dos percentis - Método Percentílico Corrigido
for(j in 1:(qtde-1))
{
  ic.qtde.interesse[j,s,1]<-quantile(qtde.interesse.bt[j,],pnorm(2*qnorm
                        ((length(qtde.interesse.bt[j,][qtde.interesse.bt[j,]
                        >qtde.interesse.pt[j]]))/n.bt),0,1)+qnorm(.025,0,1),0,1))
  ic.qtde.interesse[j,s,2]<-quantile(qtde.interesse.bt[j,],pnorm(2*qnorm

```

```

        ((length(qtde.interesse.bt[j,][qtde.interesse.bt[j,]
>qtde.interesse.pt[j]])/n.bt),0,1)+qnorm(.975,0,1),0,1))
    }

#####Calculando o IC da media - Método Percentílico Corrigido
ic.qtde.interesse[6,s,1]<-quantile(qtde.interesse.bt[6,],pnorm(2*qnorm
    ((length(qtde.interesse.bt[6,][qtde.interesse.bt[6,]
    >qtde.interesse.pt[6]])/n.bt),0,1)+qnorm(.025,0,1),0,1))
ic.qtde.interesse[6,s,2]<-quantile(qtde.interesse.bt[6,],pnorm(2*qnorm
    ((length(qtde.interesse.bt[6,][qtde.interesse.bt[6,]
    >qtde.interesse.pt[6]])/n.bt),0,1)+qnorm(.975,0,1),0,1))

#####Calculando o IC dos percentis - Percentílico
for(j in 1:(qtde-1))
{
    ic.qtde.interesse.perc[j,s,1]<-quantile(qtde.interesse.bt[j,],0.025)
    ic.qtde.interesse.perc[j,s,2]<-quantile(qtde.interesse.bt[j,],0.975)
}
#####Calculando o IC da media - Percentílico
ic.qtde.interesse.perc[6,s,1]<-quantile(qtde.interesse.bt[6,],0.025)
ic.qtde.interesse.perc[6,s,2]<-quantile(qtde.interesse.bt[6,],0.975)
}
#####Fim do 'for' para 'S' (Monte Carlo)

#####Calculando as quantidades de interesse pontuais:
for (j in 1:qtde)
{
    qtde.interesse.pt.media[j]<-mean(qtde.interesse.pt[j,])
    vicio[j]<-qtde.interesse.pt.media[j]-qtde.interesse.real[j]
    vicio.relativo[j]<-abs(qtde.interesse.pt.media[j]-qtde.interesse.real[j])/
        qtde.interesse.real[j]
}

#####Calculando desvio-padrão:
for (j in 1:qtde)
{
    dp<-0
    for (d in 1:n.sim)
    {
        dp<-dp+((qtde.interesse.pt[j,d]-qtde.interesse.pt.media[j])^2)
    }
    dp.final[j,]<-sqrt(dp/(n.sim-1))
}

```

```

#####Erro Quadrático Médio (MSE)
for (j in 1:qtde)
{
  mse[j,]<-((dp.final[j,])^2)+((vicio[j,])^2)
}

#####Cobertura do IC (Percentílico Corrigido):
for(j in 1:qtde)
{
  for (s in 1:n.sim)
  {
    if ((qtde.interesse.real[j]>=ic.qtde.interesse[j,s,1]) &
        (qtde.interesse.real[j]<=ic.qtde.interesse[j,s,2]))
    {
      cp=cp+1
    }
  }
  cobertura.ic[j,]<-(cp/n.sim)
  cp<-0
}

#####Cobertura do IC (Percentílico):
for(j in 1:qtde)
{
  for (s in 1:n.sim)
  {
    if ((qtde.interesse.real[j]>=ic.qtde.interesse.perc[j,s,1]) &
        (qtde.interesse.real[j]<=ic.qtde.interesse.perc[j,s,2]))
    {
      pp=pp+1
    }
  }
  cobertura.ic.perc[j,]<-(pp/n.sim)
  pp<-0
}
data.final<-date()

```

data.inicial
data.final
qtde.interesse.real
qtde.interesse.pt
ic.qtde.interesse
ic.qtde.interesse.perc
qtde.interesse.pt.media
vicio
vicio.relATIVO
dp.final
mse
cobertura.ic
cobertura.ic.perc