

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade Federal de Minas Gerais

UMA FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO TIPO MÍNIMOS QUADRADOS PARA
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS APLICÁVEL AO TRATAMENTO
NUMÉRICO DE PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO

Telma Cristina Pimenta de Freitas

Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica
orientada pelo Dr. Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto.

UFMG

Belo Horizonte

Outubro de 1996

“Se o homem é formado pelas circunstâncias,
é necessário formar as circunstâncias humanamente”

K. Marx e F. Engels – A Sagrada Família

À minha mãe, em memória.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer:

Ao professor Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto, pela proposta do tema, pela orientação, pelo rigor do seu trabalho.

Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica, bem como aos colegas do curso de pós-graduação.

À CAPES, pelo apoio financeiro no desenvolvimento desta dissertação.

À minha família e, de modo especial, aos meus amigos.

RESUMO

Neste trabalho, demonstra-se que, sob algumas condições de regularidade, a solução de um problema de valor inicial descrito por equações diferenciais ordinárias coincide com as extremantes de um funcional do tipo mínimos quadráticos. A equivalência entre os dois problemas permite a formulação de um procedimento para o tratamento numérico de problemas de controle ótimo, com a previsão de descontinuidades no vetor de controle. O procedimento consiste na substituição dos vínculos diferenciais presentes no problema de controle ótimo por um problema variacional denominado “problema variacional acessório”. A construção do funcional de mínimos quadrados pode ser interpretada como uma técnica de penalização exata para os vínculos diferenciais, fornecendo um meio natural para a utilização do método de Ritz no tratamento das restrições diferenciais que fazem parte dos problemas de controle ótimo. Exemplos resolvidos ilustram a aplicação do procedimento.

ABSTRACT

The equivalence between an initial value problem described by ordinary differential equations and the extremum of a least square type functional is showed to happen under certain regularity condition hypothesis. This allows the formulation of a numerical procedure for optimal control problems with control discontinuities. This procedure is based on the substitution of differential constraints of the optimal control problems by a accessory variational problem. The construction of the least square functional can be interpreted as an exactly penalization technique for the differential constraints creating a natural means for the Ritz Method application on the differential equations that are present on the optimal control problems. The procedure is illustrated by mean of numerically solved examples.

SUMÁRIO

	Pág.
LISTA DE FIGURAS	x
LISTA DE TABELAS	x xi
LISTA DE SÍMBOLOS	
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	12
CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1 Introdução	15
2.2 Resolução numérica de problemas de controle ótimo	15
2.3 Aplicação de técnicas do tipo elementos finitos na solução numérica de problema de controle ótimo	17
2.4 O método de mínimos quadrados	18
CAPÍTULO 3 - FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	20
3.1 Introdução	20
3.2 Formulação do problema de controle ótimo	21
3.3 Hipóteses	22
3.4 Montagem do problema de valor inicial	22
3.5 Teoremas de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias.....	23
3.6 Comentários	26
CAPÍTULO 4 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL ALTERNATIVA PARA SISTEMAS DINÂMICOS DESCRITOS POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	28
4.1 Introdução	28
4.2 Uma formulação variacional para problemas de valor inicial	29
4.3 Equivalência entre o problema de valor inicial e o problema variacional associado	30
4.4 Prova do teorema 3 via teoria de controle ótimo	33
4.5 Comentários	39

CAPÍTULO 5 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL PARA PROBLEMAS DE VALOR INICIAL COM DESCONTINUIDADES NO TEMPO	40
5.1 Introdução	40
5.2 Formulação variacional para problemas de valor inicial com descontinuidades no tempo.....	40
5.3 Equivalência entre o problema de valor inicial e o problema variacional	41
5.4 Comentários	49
 CAPÍTULO 6 - APLICAÇÃO A PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO	 50
6.1 Introdução	50
6.2 Uma formulação alternativa para problemas de controle ótimo	51
6.3 Aplicação do método de Ritz dentro do contexto do método dos elementos finitos	53
6.4 Comentários	56
 CAPÍTULO 7- EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	 58
7.1 Introdução	58
7.2 Problema ordinário de controle ótimo com estado inicial e final fixos	58
7.3 Problema de trajetória ótima	61
7.4 Um problema com controle descontínuo	66
7.5 Comentários	69
 CAPÍTULO 8 - PROBLEMAS SUPLEMENTARES	 72
8.1 Introdução	72
8.2 Análise da determinação do movimento de um oscilador harmônico	72
8.2.1 Formulação do problema	72
8.2.2 Solução numérica via formulação Lagrangeana	75
8.2.3 Solução numérica via mínimos quadrados	79
8.3 Problema com descontinuidade no vetor de controle	80
8.4 Comentários	85
 CAPÍTULO 9 - CONCLUSÕES	 88
9.1 Comentários finais	88
9.2 Conclusões	89
9.3 Sugestões.....	90
9.4 Síntese	91

REFERÊNCIAS	92
APÊNDICE A - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA OS PROBLEMAS VARIACIONAIS	96
A.1 Introdução	96
A.2 Condições necessárias de primeira ordem para problemas variacionais	97
APÊNDICE B - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO	99
B.1 Introdução	99
B.2 Formulação do problema de controle ótimo com dinâmica fracionada.....	99
B.3 Hipóteses.....	100
B.4 Condições necessárias.....	101

LISTA DE FIGURAS

7.1	Resultados para o estado para o Problema (7.1)	61
7.2	Resultados para o controle para o Problema (7.6)	66
7.3	Resultados para o estado para o Problema (7.6)	66
7.4	Resultados para o estado para o Problema (7.15)	70
8.1	Soluções numéricas para o funcional Lagrangeano.....	78
8.2	Soluções numéricas para o funcional do tipo Mínimos Quadráticos.....	81
8.3	Resultados para o estado para o Problema (8.18)	86

LISTA DE TABELAS

7.1	Valores para $u(\cdot)$ - Problema (7.6)	65
7.2	Valores para $x(\cdot)$ - Problema (7.6)	65
Si.	Valores para $x(\cdot)$ - Formulação Lagrangeana	78
8.2	Valores para $x(\cdot)$ - Formulação Tipo Mínimos Quadrados.....	81
8.3	Valores numéricos para $u(\cdot)$ - Problema (8.18).....	85

LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS LATINAS

E^α	Espaço euclidiano de dimensão α
e	Índice representando os instantes das junções
f	Vetor de restrições diferenciais
f_i	i -ésima componente do vetor de restrições diferenciais
F	Vetor de restrições diferenciais com o controle explicitamente em função do tempo.
F_i	i -ésima componente do vetor de restrições diferenciais
F^e	Vetor de restrições diferenciais para o e -ésimo elemento
g	Termo de contorno do funcional objetivo na forma de Boiza
h	Vetor de restrições de contorno
h_i	Função de variáveis de contorno (onde $i = 0, \dots, n_h$)
h_j	j -ésima componente do vetor de restrições de contorno
H, H	Função Hamiltoniana
i, k, j	Índices
I	Funcional do problema acessório
J	Funcional objetivo
l	Função integrando
L	Função integrando
L^e	Função integrando para o e -ésimo elemento
n_α	Número de componentes do vetor α
N	Número de elementos
p	Vetor de parâmetros
P	Vetor de parâmetros incorporado o vetor estado inicial
R	Função resíduo associado ao vínculo diferencial
R^e	Vetor de resíduos para o e -ésimo elemento
R_j^e	j -ésima componente do vetor de resíduos para o e -ésimo elemento
r	Número de coeficientes associados à aproximação do vetor de estado
s	Número de coeficientes associados à aproximação do vetor de controle
t_0	Instante inicial
t_f	Instante final
t	Tempo-variável global

u	Vetor de controle
u_k	k-ésima componente do vetor de controle
u^e	Vetor de controle para o e-ésimo elemento
\hat{u}^e	Forma aproximada para o vetor de controle para o e-ésimo elemento
u^e, w^e	Variáveis de controle para o e-ésimo elemento
x	Vetor de estado
x_j	j-ésima componente do vetor de estado
x^e	Vetor de estado para o e-ésimo elemento
\hat{x}^e	Forma aproximada para o vetor de estado para o e-ésimo elemento
w	Vetor de controle
z	Variável de estado adicional

LETRAS GREGAS

$\alpha^{e,k}$	Coeficientes associados às funções de base X^k para o e-ésimo elemento
α	Vetor de coeficientes α_e
$\beta^{e,k}$	Coeficientes associados às função de base U_k para o e-ésimo elemento
β	Vetor de coeficientes β_k para o i-ésimo elemento
β_j^i	j-ésima componente do vetor de aproximação para o controle para o i-ésimo elemento
β_k	Coeficiente que determina a direção conjugada na k-ésima iteração
$\gamma^{e,k}$	Coeficientes associados às funções de base X^k para o e-ésimo elemento
ν	Vetor de multiplicadores de Lagrange
ν_j	j-ésima componente do vetor de multiplicadores de Lagrange
δ_i	Domínio de definição da variável t - conjunto aberto onde $i = 0, f$ representam t_0 e t_f respectivamente
Λ, λ	Vetor de funções vetoriais
Λ_j, λ_j	j-ésima componente do vetor de funções vetoriais
μ	Vetor de funções vetoriais
μ_j	j-ésima componente do vetor de funções vetoriais
ξ	Tempo totalmente normalizado - variável local
T	Tempo normalizado - variável global
T_e	Tempo normalizado na e-ésima junção
Φ_k, ψ_k	Soluções contínuas para o sistema de equações diferenciais ordinárias
$\hat{\Phi}_k, \hat{\psi}_k$	Prolongamentos das funções $F(\cdot)$

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A partir da formalização da teoria de controle ótimo com o Princípio de Máximo de Pontryagin no final dos anos 50 (PONTRYAGIN *et al.*, 1962), a otimização de sistemas dinâmicos tem sido modelada, em diversos campos do conhecimento, na forma de problemas de controle ótimo.

Considerando-se a complexidade das soluções analíticas, como regra geral, a resolução destes problemas exige a utilização de procedimentos numéricos. Para isso, uma das metodologias adotadas consiste na parametrização do problema de controle ótimo através da utilização do Método dos Elementos Finitos, o que leva a um problema de programação matemática (NAKAMICHI e WASHIZU, 1978a, 1978b, 1978c; SHEELA, 1981; FREITAS PINTO, 1982; HARGRAVES, 1986).

Por sua vez, a aplicação do Método dos Elementos Finitos na solução de problemas de controle ótimo apresenta algumas dificuldades. Uma delas, talvez a maior, está no tratamento numérico das restrições diferenciais, ou seja, do sistema de equações diferenciais ordinárias que representa a dinâmica do sistema e que compõe o problema de controle ótimo. O tratamento numérico destas restrições exige a aplicação de uma das versões do Método dos Resíduos Ponderados (FINLAYSON, 1972) a um sistema de equações diferenciais que apresenta redundância de variáveis dinâmicas, devido à presença das variáveis de controle, e com condições de contorno, como regra geral, complexas.

Neste trabalho, propõe-se a substituição das restrições diferenciais presentes nos problemas de controle ótimo por um problema variacional denominado “Problema Variacional Acessório”. Trata-se de um problema variacional com um funcional do tipo mínimos quadrados, cuja solução coincide com a trajetória de estado procurada, e cujo valor mínimo absoluto é conhecido a priori.

O procedimento pode ser usado também como uma forma alternativa de se obter uma formulação variacional de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais ordinárias, particularmente em substituição à formulação Lagrangeana de problemas físicos (SMITH, 1974).

Ao longo do trabalho, demonstra-se que, sob hipóteses bastante razoáveis para aplicações práticas, o problema variacional acessório possui uma extremante única, a qual satisfaz integralmente os vínculos diferenciais originais. Ou seja, o problema variacional acessório pode ser visto como uma técnica de penalização exata (Xing *et al.*, 1989) que não introduz soluções espúrias. Este resultado representa a principal contribuição teórica do presente trabalho. O fato de que a trajetória de estado minimiza o funcional do tipo mínimos quadrados é fácil de se confirmar. A inexistência de mínimos espúrios, ao contrário, exige raciocínio elaborado.

Por outro lado, quando da aplicação do Método dos Elementos Finitos para a solução numérica de problemas de controle ótimo, a utilização do problema variacional acessório estabelece um meio natural e matematicamente consistente para o tratamento das restrições diferenciais. Isto representa uma contribuição prática do trabalho.

No Capítulo 2, apresenta-se uma classificação dos métodos numéricos para a solução de problemas de controle ótimo, fazendo-se uma revisão bibliográfica sobre aqueles que utilizam o Método dos Elementos Finitos. Uma breve revisão sobre a solução do problema inverso do cálculo de variações também é apresentada.

O Capítulo 3, apresenta alguns fundamentos teóricos envolvendo problemas de controle ótimo e a solução de equações diferenciais ordinárias. Particularmente, um teorema sobre existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias que estende resultados anteriores é demonstrado.

No Capítulo 4, apresenta-se a equivalência entre um problema variacional do tipo mínimos quadrados e problemas de valor inicial. A prova é realizada tanto via cálculo variacional, utilizando resultados teóricos reproduzidos no Apêndice A, quanto via teoria de controle ótimo.

Os resultados apresentados no Capítulo 4 são generalizados no Capítulo 5 para os casos em que as funções envolvidas são contínuas por partes, hipótese válida para a maior parte dos problemas físicos. A equivalência entre o problema variacional e o problema de valor inicial é realizada utilizando resultados da teoria de controle ótimo reproduzidos no Apêndice B.

No Capítulo 6, a técnica é apresentada como um caminho alternativo na resolução numérica de problemas de controle ótimo através da aplicação do Método de Ritz ao problema variacional acessório, dentro do contexto do Método dos Elementos Finitos.

Alguns exemplos didáticos são apresentados no Capítulo 7. O Capítulo 8 complementa a exemplificação do procedimento com a solução de dois problemas um pouco mais elaborados, cada um explorando um aspecto em particular.

A conclusão do trabalho se estabelece no Capítulo 9, onde aparecem alguns comentários e conclusões complementares, além de sugestões para desenvolvimentos futuros.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se uma breve revisão dos procedimentos utilizados na resolução numérica de problemas de controle ótimo. Mais detalhadamente, apresenta-se aqueles que se baseiam no Método dos Elementos Finitos, abordando-se as várias versões do Método de Resíduos Ponderados.

A revisão trata também do problema inverso do cálculo de variações, ou seja, da obtenção de formulações variacionais para sistemas de equações diferenciais.

2.2 Resolução numérica de problemas de controle ótimo

Segundo a classificação realizada por Freitas Pinto (1982) (vide também PEREIRA, 1994), os métodos para a solução numérica de problemas de controle ótimo podem ser divididos em três categorias principais:

- a. métodos clássicos;
- b. métodos de parametrização;
- c. métodos híbridos¹.

Os métodos clássicos representam todos aqueles que são desenvolvidos diretamente em domínios de funções, embora possam, como recurso complementar, utilizar algum processo de discretização ou de parametrização (vide TAPLEY e LEWALLEN, 1967).

Os métodos de parametrização representam aqueles que, através da parametrização das variáveis dinâmicas envolvidas, transformam o problema de controle ótimo em um problema de programação matemática. Desta forma, o problema, originariamente de dimensão infinita, passa a ter dimensão finita e igual ao número de parâmetros a serem determinados. Estes métodos têm recebido também a denominação de “Métodos de Transcrição Direta” (MADEIRA, 1996).

¹ Em Freitas Pinto (1982) utiliza-se “subótimos” no lugar de “híbridos”.

Finalmente, os métodos híbridos são aqueles que envolvem uma parametrização parcial do problema, ou seja, parametrizam apenas algumas das variáveis dinâmicas. Esta categoria é representada, basicamente, pelos métodos subótimos, os quais, como regra geral, trabalham exclusivamente com a parametrização das variáveis de controle.

Quanto aos métodos de parametrização, de acordo com a maneira como esta parametrização ocorre, podem ser divididos em duas sub-classes: i) métodos do tipo diferenças finitas; ii) métodos do tipo elementos finitos.

Os *métodos do tipo diferenças finitas* recebem esta denominação porque aproximam as variáveis dinâmicas por funções discretas, as quais são representadas por um número finito de pontos. Desta maneira, tornam finita a dimensão do problema. A partir das funções discretizadas, utilizam “fórmulas de diferenças” em substituição às operações de derivação.

Já os *métodos do tipo elementos finitos* trabalham com a expansão das variáveis dinâmicas em espaços lineares de funções de dimensão finita. É desta forma que parametrizam o problema e, como regra geral para o tratamento das equações diferenciais que compõem o problema, recorrem a alguma versão do método de resíduos ponderados. Isto se torna necessário porque, com as aproximações adotadas para as variáveis dinâmicas, as equações diferenciais não podem mais ser rigorosamente satisfeitas.

O método de resíduos ponderados (GRANDALI, 1956) se baseia na exigência de que a integral de uma função resíduo $R(\cdot)$, ponderada por alguma função peso $w(\cdot)$, convenientemente escolhida, seja nula. Ou seja, impõe-se a relação

$$\int_a^b w(z)R(z)dz = 0,$$

sendo o intervalo $[a, b]$ e a função peso $w(\cdot)$ apropriadamente especificados.

Existem várias versões do método de resíduos ponderados, destacando-se os Métodos de Colocação, Sub-Domínios, Galerkin, Momentos e Mínimos Quadrados

(FIETCHER, 1984). Todos utilizam a mesma ideia central, diferindo, porém, na escolha da função peso.

2.3 Aplicação de técnicas do tipo elementos finitos na solução numérica de problemas de controle ótimo

Os primeiros trabalhos que envolveram a parametrização de problemas de controle ótimo, na maneira do método dos elementos finitos, visando a obtenção de soluções numéricas (ZARADNICK e PARKIN, 1969; LYNN *et al.*, 1970) não fizeram menção explícita do método dos elementos finitos. Dentro deste contexto podemos citar também alguns trabalhos mais recentemente publicados: Dontchev (1978), Sirisena e Chou (1979), Troltsch (1991). Em todos estes trabalhos, as variáveis dinâmicas são expandidas em uma determinada base de funções, embora o conceito de elementos finitos não tenha sido explicitamente mencionado pelos seus autores. Para efeito de classificação, pode-se interpretar estes trabalhos como casos especiais de aplicação da técnica de elementos finitos com a particularização para apenas um elemento.

A utilização explícita do método dos elementos finitos em problemas de controle ótimo foi apresentada, provavelmente pela primeira vez, por Nakamichi e Washizu (1978a, 1978b, 1978c), que aplicaram o Método de Ritz a um funcional aumentado em que os vínculos dinâmicos aparecem associados a multiplicadores de Lagrange².

Nestes trabalhos, a técnica de elementos finitos é utilizada explicitamente, com a divisão do domínio de definição do problema em elementos e a expansão das variáveis dinâmicas em espaços de funções, de dimensão finita, previamente escolhidos.

Dentro do contexto do método dos elementos finitos e utilizando o método de resíduos ponderados para o tratamento das restrições diferenciais, podemos citar: i) utilizando o Método de Galerkin, os trabalhos de Freitas Pinto (1982) e de Dinh (1987); ii) utilizando o

² O tratamento de Nakamichi e Washizu apresenta algumas inconsistências teóricas, conforme demonstra Freitas Pinto (1982), Apêndice A.

Método de Colocação, os trabalhos de Hargraves e Paris (1986) e de Stryk (1993); iii) utilizando o Método de Sub-Domínios, o trabalho de Pereira (1994).

Tratando da solução numérica de problemas de controle ótimo, porém de problemas com parâmetros distribuídos (envolvendo equações diferenciais parciais) temos ainda Chen e Mills (1981), Alliney (1982), Rao *et al.*, (1982a), Rao *et al.* (1982b), Lasiecka (1984), Gorchakov (1986), Mackenroth (1987), Chang (1988), Casas (1991).

2.4 O método dos mínimos quadrados

Embora existam vários exemplos de aplicação do método dos mínimos quadrados, dentro do contexto do método dos elementos finitos na solução de problemas físicos, (FLETCHER, 1979; CHATTOT *et al.*, 1981; MILTHORPE e STEVEN, 1978), nenhum dos trabalhos sobre solução numérica de problemas de controle ótimo, baseado no conceito de elementos finitos, utiliza o método dos mínimos quadrados.

Na verdade, o método dos mínimos quadrados, baseado na minimização de um funcional, não tem sua concepção inspirada na ideia de resíduos ponderados. Entretanto, de um ponto de vista formal (FLETCHER, 1984), ele pode ser enquadrado como um método de resíduo ponderado tendo como função peso, para cada coeficiente α_i a ser determinado

$$\omega_i(\cdot) = \frac{\partial R}{\partial \alpha_i}.$$

Neste trabalho apresenta-se o método dos mínimos quadrados como uma alternativa para o tratamento numérico das equações diferenciais presentes nos problemas de controle ótimo, sendo, de acordo com a pesquisa bibliográfica realizada, o único trabalho na área com esta abordagem.

A aplicação da técnica é baseada na equivalência entre a solução de um problema variacional com funcional do tipo mínimos quadrados e a solução de problemas de valor inicial. Assim, a construção do funcional de mínimos quadrados pode ser interpretada, dentro

do contexto de penalização (XING *et al.*, 1989), como uma formulação variacional alternativa ao problema inverso do cálculo de variações.

O problema inverso do cálculo de variações, o qual trata da obtenção de uma formulação variacional a partir das equações diferenciais que representam a dinâmica de um sistema tem sido extensivamente estudado (DOUGLAS, 1941; VAINBERG, 1964; TONTI, 1969, 1973; ATHERTON e HOMSY, 1975; SANTILLI, 1977; BAMBI e MORRO, 1982; PASWAL, 1984; STEPANKOVA, 1984; OLIVEIRA, 1986), sendo os trabalhos de Vainberg (1964) e de Tonti (1969), talvez os que trouxeram mais impacto. A obtenção da formulação variacional, neste caso, se vincula ao fato do operador ser auto-adjunto, sendo muitas vezes necessárias manipulações trabalhosas sobre as equações para adequá-las a esta condição (VAINBERG, 1964; BAMBI e MORRO, 1982).

A formulação de mínimos quadrados, diferentemente, é aplicável com facilidade a uma gama bastante extensa de sistemas de equações diferenciais. Tem, além disso, a garantia de ocorrência de mínimo absoluto sobre a solução do problema original. Porém, cria a possibilidade de existência de mínimos espúrios, o que não ocorre no caso do problema inverso.

No presente trabalho, através de argumentos teóricos, esta possibilidade é eliminada sob hipóteses bastante razoáveis para o tratamento de problemas práticos. Este fato, e o fato da metodologia ser perfeitamente aplicável a problemas de controle ótimo, constituem, aparentemente, os aspectos mais relevantes deste trabalho.

CAPÍTULO 3

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresenta-se uma classe de problemas de controle ótimo na forma de Bolza, que envolve restrições de contorno duplo e que, além do estado $x(\cdot)$ e do controle $v(\cdot)$, possui um vetor de parâmetros p a ser otimizado.

Mostra-se que as restrições diferenciais presentes nesta categoria de problemas, independentemente das restrições de contorno, podem ser reescritas como um problema de valor inicial, bastando, para isto, estender o vetor de parâmetros p de modo a incorporar o estado inicial.

Nos capítulos subsequentes apresenta-se uma formulação variacional alternativa para o problema de valor inicial, a qual permite o desenvolvimento de um procedimento para a solução numérica do problema.

Este procedimento, por sua vez, necessita de alguns resultados teóricos sobre a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, os quais são formulados neste capítulo através de dois teoremas.

O primeiro trata-se de uma transcrição de um teorema de existência e unicidade presente em Pontryagin (1962a), apresentado para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. O segundo é uma extensão do primeiro, em que as condições de regularidade das funções envolvidas são relaxadas para suportar descontinuidades no tempo.

A importância do segundo teorema está no fato de que, normalmente, as equações diferenciais presentes nos problemas de controle ótimo possuem descontinuidades no tempo introduzidas com as descontinuidades no vetor de controle.

3.2 Formulação do problema de controle ótimo

Para o contexto do presente trabalho, considere o seguinte problema de controle ótimo:

$$\text{Minimizar } J[x; u; p] = g[x(t_0); x(t_1); t_0, t_1, p] + \int_{t_0}^{t_1} \ell[x(\tau), u(\tau), \tau] d\tau; \quad (3.1a)$$

sujeito a

$$h_i[x(t_0); x(t_1); t_0, t_1, p] = 0, \quad i = 1, \dots, n_h; \quad (3.1b)$$

$$\dot{x}(\tau) = f[x(\tau), \tau], \quad \tau \in [t_0, t_1]; \quad (3.1c)$$

onde

$x(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [x_1(\cdot), \dots, x_{n_x}(\cdot)]'$ denota o vetor de variáveis de estado;

$u(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [u_1(\cdot), \dots, u_{n_u}(\cdot)]'$ denota o vetor de variáveis de controle;

$p \stackrel{\Delta}{=} [p_1, \dots, p_{n_p}]'$ denota um vetor de parâmetros a serem otimizados;

e $f(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [f_1(\cdot), \dots, f_{n_x}(\cdot)]'$.

A expressão (3.1a) caracteriza um funcional na forma de Bolza³. As expressões (3.1b) e (3.1c) representam, respectivamente, restrições de contorno e restrições diferenciais. A consideração do vetor de parâmetros (p), presente no funcional-objetivo e nas restrições de contorno, facilita o tratamento de problemas práticos.

As funções envolvidas no problema devem satisfazer certas condições de regularidade estabelecidas no conjunto de hipóteses a seguir.

³ Problemas cujo funcional-objetivo possui um termo de contorno e um termo integral ($J = h_0 + \int \mathbb{L} dt$) são ditos na forma de Bolza. O funcional é dito na forma de Mayer se apresenta apenas o termo de contorno ($J = h_0$), ou na forma de Lagrange se apresenta apenas o termo integral ($J = \int \mathbb{L} dt$).

3.3 Hipóteses

Com relação ao problema (3.1), devem ser consideradas as seguintes hipóteses:

$H1: x_j(\cdot) (j = 1, \dots, n_x)$ devem ser funções contínuas para $\tau \in [t_0, t_1]$;

$H2: u_k(\cdot) (k = 1, \dots, n_u)$ devem ser funções contínuas por partes e suaves por partes para $\tau \in [t_0, t_1]$;

$H3: As$ funções $f_i (i = 1, \dots, n_x), h_j (j = 0, 1, \dots, n_h)$ e suas derivadas parciais primeiras são contínuas em relação a todos os seus argumentos, nos domínios considerados.

Aqui, como funções contínuas por partes, estamos entendendo funções com um número finito de descontinuidades de primeira espécie (PONTRYAGIN, 1962b, p. 10 e 11).

Observe que, em decorrência das hipóteses $H2$ e $H3$, na verdade, as variáveis de estado serão suaves, não apenas contínuas como exigido pela hipótese $H1$.

3.4 Montagem do problema de valor inicial

Com um artifício simples, podemos reescrever o problema (3.1) na seguinte forma:

$$\text{Min } J[x; u; P] = g[x(t_1), P] + \int_{t_0}^{t_1} \ell[x(\tau), u(\tau), \tau] d\tau; \quad (3.2a)$$

sujeito a

$$h[x(t_1), P] = 0, \quad i = 1, \dots, n_h; \quad (3.2b)$$

$$\dot{x}(\tau) = f[x(\tau), u(\tau), \tau], \quad \tau \in [t_0, t_1]; \quad (3.2c)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (3.2d)$$

onde $x_0 = [x_{01}; \dots; x_{0n_x}]'$ denota um vetor adicional de parâmetros que representa o estado inicial, conforme demonstra (3.2d), e $P = [x_0'; p']'$ representa o vetor de parâmetros estendido para incorporar x_0 .

Com a inclusão do vetor de parâmetros x_0 e das restrições de contorno (3.2d), introduzimos em (3.1) um problema de valor inicial, caracterizado pelas restrições (3.2c) e (3.2d). De fato, escolhidos o vetor x_0 e o controle $u(\tau)$ (em conformidade com a hipótese H2), as restrições (3.2c) e (3.2d) podem ser reescritas como:

$$\dot{x}(\tau) = F[x(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_0, t_1]; \quad (3.3a)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (3.3b)$$

onde $F[x(\tau); \tau] \stackrel{\Delta}{=} f[x(\tau); u(\tau); \tau]$.

É importante observar que, associado às descontinuidades no controle, o lado direito da expressão (3.3a) possuirá descontinuidades no tempo. A existência e unicidade da solução do problema (3.3) é relevante para o estudo a ser feito nos próximos capítulos.

Esta é a motivação da apresentação dos teoremas enunciados a seguir.

3.5 Teoremas de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias

De acordo com Pontryagin (1962a), p.18 e 19, temos:

TEOREMA 1: *Seja o sistema normal de equações diferenciais ordinárias*

$$\dot{x}(\tau) = F[x(\tau); \tau] \quad \tau \in [t_0, t_f] \quad (3.4a)$$

$$x(t_0) = X_0. \quad (3.4b)$$

onde

$$x \stackrel{\Delta}{=} [x_1, \dots, x_{n_x}]'$$

$$F \stackrel{\Delta}{=} [F_1, \dots, F_{n_x}]'$$

Se $F_i(\cdot)$ e $\frac{\partial F_i}{\partial x}(\cdot)$ ($i=1, \dots, n_x$) são funções contínuas de todos os seus argumentos nos domínios considerados, então, para cada condição inicial (3.4b), uma solução contínua do Problema (1), a saber

$$x(\cdot) = \phi(\cdot), \quad \phi = [\phi_1, \dots, \phi_{n_x}]^T$$

existe e é única.

Assim, se existirem duas soluções de (3.2), a saber $x(\cdot) = \phi(\cdot)$, como definida acima, e

$$x(\cdot) = \psi(\cdot), \quad \psi = [\psi_1, \dots, \psi_{n_x}]^T$$

as quais satisfazem as mesmas condições iniciais $\psi(t_0) = \phi(t_0) = X_0$, cada uma válida sobre um respectivo intervalo de valores de τ contendo t_0 , então estas soluções coincidirão nos intervalos onde ambas valerem simultaneamente.

Considere agora uma extensão do Teorema 1, onde as funções $F_i(\cdot)$ ($i=1, \dots, n_x$) e suas derivadas parciais primeiras são apenas contínuas por partes, ou seja, admitem um número finito de descontinuidades de primeira espécie.

TEOREMA 2: *Seja o sistema normal de equações diferenciais:*

$$\dot{x}(\tau) = F[x(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_0, t_f] \quad (3.5a)$$

$$x(t_i) = x^i, \quad t_i \in [t_0, t_f] \quad (3.5b)$$

Sejam $F_i(\cdot)$ ($i=1, \dots, n_x$) e as derivadas parciais $\frac{\partial F_i}{\partial x}(\cdot)$ ($i=1, \dots, n_x$) funções contínuas para todo $t_i \in [t_0, t_f]$, exceto para um número finito de valores de τ , a saber, $\tau \in [t_1, \dots, t_m]$ sobre os quais elas possuem descontinuidades de primeira espécie.

Se para $\tau \in [t_1, \dots, t_m]$ as funções $F_i(\cdot)$ ($i=1, \dots, n_x$):

- a. são contínuas à direita com $x(t_0) = x^0$ especificado; ou
 b. são contínuas à esquerda com $x(t_f) = x^f$, especificado;

então se (3.5) apresenta solução contínua, a solução é única.

Ou seja, se existirem duas soluções de (3.5), a saber, $x(\cdot) = \phi(\cdot)$ e $x(\cdot) = \psi(\cdot)$ onde

$$\phi = [\phi_1, \dots, \phi_{n_x}]^\Delta$$

$$\psi = [\psi_1, \dots, \psi_{n_x}]^\Delta$$

Então $\phi(\cdot) = \psi(\cdot)$ onde ambas valerem simultaneamente.

PROVA: A prova do Teorema 2, que é uma versão estendida do Teorema 1, se processa, para a possibilidade (i), a partir da divisão do intervalo $[t_0, t_f]$ nos sub-intervalos

$$\tau \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad \tau \in [t_m, t_f]$$

onde t_k ($k = 1, \dots, m$), representam os pontos de descontinuidade de $F_i(\cdot)$ ($i = 1, \dots, n_x$) ou de suas derivadas parciais primeiras.

Assim, as equações (3.5) são reescritas na seguinte forma:

$$\dot{x}(\tau) = F[x(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.6a)$$

$$\dot{x}(\tau) = F[x(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_m, t_m + 1] \quad (3.6b)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_k) = x^-(t_k) \quad k = 1, \dots, m, \quad (3.6c)$$

$$\text{onde } x^-(t_k) = \lim_{\Delta} \int_{t_{k-1}}^{\tau} F[x(\tau), \tau] d\tau.$$

Note que as expressões (3.6c) visam preservar a continuidade de $x(\cdot)$, e que as funções $F_i(\cdot)$ ($i = 1, \dots, n_x$) e suas derivadas parciais primeiras são contínuas sobre qualquer dos sub-intervalos $\tau \in [t_k, t_{k+1})$ $k = 0, 1, \dots, m$.

Com as expressões (3.6), a prova do teorema é realizada através de um raciocínio de indução, apoiado no Teorema 1.

Para isso, considere inicialmente apenas o sub-intervalo $[t_0, t_1)$. Como $f(\cdot)$ e $\frac{\partial F}{\partial x}(\cdot)$ são funções contínuas para todo $\tau \in [t_0, t_1)$, de acordo com o Teorema 1, duas possíveis soluções contínuas de (3.6), $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$, a princípio distintas, na verdade coincidirão sobre este intervalo. Isto estabelece o primeiro passo para a prova por indução.

Suponhamos, agora, que as soluções $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ coincidam para $\tau \in [t_0, t_k)$, $k \leq m$ arbitrário.

Em virtude de (3.6c), ou seja, considerando a continuidade de $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$, temos $\phi(t_k) = \phi^-(t_k) = \psi^-(t_k) = \psi(t_k)$.

Isto significa que as duas soluções coincidem para $\tau \in [t_0, t_k]$, com $\phi(t_k) = \psi(t_k) = x_k$, e, além disso, ambas devem resolver:

$$\dot{x}(\tau) = F[x(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_k, t_{k+1}), \quad x(t_k) = x_k.$$

Ora, mas para $\tau \in [t_k, t_{k+1})$, vale o Teorema 1, ou seja, sobre este intervalo existe uma, e somente uma, solução contínua. Então $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ coincidem também para $\tau \in [t_k, t_{k+1})$. Ou seja, a coincidência de $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ para $\tau \in [t_0, t_k)$ implica na coincidência para $\tau \in [t_0, t_{k+1})$.

Deste modo, por indução, podemos concluir que $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$, na verdade, devem ser coincidentes sobre todo o intervalo semiaberto $[t_0, t_f)$. Mas, considerando a continuidade de ambas, devemos ter $\phi(t_k) = \phi(t_f) = \phi^-(t_f) = \psi(t_f)$, o que completa a coincidência de $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ para todo o intervalo fechado $[t_0, t_f]$, conforme queríamos demonstrar.

Para a possibilidade (ii), a prova decorre de raciocínio análogo. A diferença reside apenas no fato de que o processo de indução deve ser feito de $t_f = t_{m+1}$ para t_0 , caminho inverso do adotado para a possibilidade (i).

3.6 Comentários

- i. Sob a hipótese de continuidade do controle $u(\cdot)$, e considerando serem $F_i(\cdot)$ ($i = 1, \dots, n_x$) de classe C^1 , as funções $F_i(\cdot)$ ($i = 1, \dots, n_x$) serão contínuas com derivadas parciais também contínuas para todo $\tau \in [t_o, t_1]$. Assim, para cada controle $u(\cdot)$ especificado, as restrições (3.2c) e (3.2d) estabelecem um problema de valor inicial cuja existência e unicidade de solução pode ser garantida pelo Teorema 1. Ocorre que, para grande parte dos problemas práticos de engenharia, a hipótese de continuidade do controle é bastante restritiva, o que torna a aplicação do Teorema 1 muito limitada. Por sua vez, a hipótese de variáveis de controle contínuas por partes, geralmente satisfatória para os problema reais, acarreta a presença de descontinuidades de primeira espécie, tanto em $F(\cdot)$ como em $\frac{\partial F}{\partial x}(\cdot)$. Este tipo de descontinuidade está coberto pelo Teorema 2.

- ii. Observe que as condições de regularidade impostas a $F(\cdot)$ pelo Teorema 1 incluem a continuidade das derivadas parciais primeiras, exceto a derivada em relação à variável independente (τ). Na literatura, a continuidade das derivadas parciais primeiras é muitas vezes substituída por uma condição mais fraca conhecida como “condição de Lipschitz” (INCE, 1990; WALTMAN, 1986; MILLER, 1982). Esta condição relaxa a continuidade de $\frac{\partial F}{\partial x}(\cdot)$ em relação a todos os seus argumentos (SIMMONS, 1991), diferentemente do Teorema 2, que relaxa apenas a continuidade na derivada em relação à variável independente. A condição de Lipschitz, no entanto, não substitui o Teorema 2 uma vez que não prevê descontinuidades na função $F(\cdot)$. Assim, segundo nossa revisão bibliográfica, a existência e a unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias para funções $F(\cdot)$ contínuas por partes é apresentada, pela primeira vez na literatura, através do Teorema 2.

- iii. Na literatura, enquanto a continuidade das funções é relevante tanto para a prova da unicidade quanto da existência de soluções, a continuidade da derivada é importante apenas para a questão da unicidade (SIMMONS, 1991; CRONIN, 1986). Assim, é possível trabalhar a questão da existência abandonando completamente a regularidade

das derivadas, como mostra Miller (1982). A prova para este caso, entretanto, se faz sob argumentos bastante sofisticados.

CAPÍTULO 4

FORMULAÇÃO VARIACIONAL ALTERNATIVA PARA SISTEMAS DINÂMICOS DESCRITOS POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

4.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se uma formulação variacional alternativa para sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais ordinárias, considerando-se funções de classe C^1 .

A ideia consiste em substituir um problema de valor inicial por um problema variacional do tipo mínimos quadrados cuja solução coincide com o problema original. Isto viabiliza o tratamento numérico das restrições diferenciais presentes em problemas de controle ótimo através de técnicas do tipo elementos finitos. A equivalência dos dois problemas é comprovada através de um teorema.

Duas formas distintas de demonstração são apresentadas. A primeira é realizada via cálculo de variações, utilizando-se condições necessárias na forma integral (SAGAN, 1969). A segunda se processa via teoria de controle ótimo, utilizando-se um conjunto de condições necessárias para a solução de um problema na forma de Mayer, obtido após

manipulação do problema variacional. Ambas as provas utilizam o Teorema 1 apresentado no capítulo anterior.

Embora a prova obtida, via cálculo variacional, seja o caminho mais natural para a demonstração do Teorema, dada a natureza variacional do problema, a prova utilizando teoria de controle ótimo mostrou-se necessária para generalizações posteriores.

Nos capítulos subsequentes a formulação será estendida para funções contínuas por partes e aplicada à resolução numérica de problemas de controle ótimo.

4.2 Uma formulação variacional para problemas de valor inicial

Considere o problema de valor inicial:

$$\dot{x}(\tau) = F[x(\tau); \tau] \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.1a)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (4.1b)$$

onde

$$x(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [x_1(\cdot); \dots; x_{n_x}(\cdot)];$$

$$F(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [F_1(\cdot); \dots; F_{n_x}(\cdot)];$$

sendo $f(\cdot)$ e $\frac{\partial F}{\partial x}(\cdot)$ funções contínuas de $f(\cdot)$ e de τ .

As equações (4.1a) representam o modelo de um sistema dinâmico com parâmetros concentrados, descritos segundo uma formulação de espaço de estados.

De acordo com o Teorema 1 apresentado no Capítulo 3, as equações (4.1a) apresentam uma única solução satisfazendo as condições iniciais (4.1b). Ou seja, o problema de valor inicial (4.1) possui uma, e somente uma, solução única.

Relacionado com o problema (4.1), considere o seguinte problema variacional:

$$\text{Min } I[x] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} R' R d\tau \quad (4.2a)$$

$$\text{com } x(t_0) = x_0. \quad (4.2b)$$

onde

$$R = \dot{x}(\tau) - F[x(\tau); \tau], \quad (4.2c)$$

sendo $x(\cdot)$ e $F(\cdot)$ conforme (4.1).

O problema variacional (4.2) é construído com base no resíduo das equações diferenciais (4.1a), conforme indica a expressão (4.2c), e pode ser interpretado como um funcional de penalização.

Note que (4.2a) é estritamente não-negativa, assumindo o valor nulo se, e somente se, $R(\cdot)$ for identicamente nula. Isto significa que a solução do Problema (4.1) fornece o mínimo absoluto para (4.2a). Entretanto, a adoção do problema (4.2) em substituição ao problema (4.1) pode apresentar, a princípio, soluções espúrias (mínimos locais do problema (4.2) com resíduo não identicamente nulo). Esta suspeita é reforçada se considerarmos que, conforme veremos adiante, a utilização das condições necessárias para (4.2) diferem de (4.1). Ou seja, as equações de Euler-Lagrange para o Problema (4.2) não coincidem com as equações diferenciais do problema de valor inicial, como ocorre no caso do problema inverso do cálculo de variações. Não obstante, conforme será demonstrado pelo Teorema 3, a solução de (4.1) é a única extremante para (4.2). Dessa forma, o problema (4.2) pode ser visto como uma penalização exata para (4.1), ou seja, a extremante de (4.2a) é única e coincide exatamente com a solução do problema (4.1).

4.3 Equivalência entre o problema de valor inicial e o problema variacional associado

Para estabelecer a equivalência entre os Problemas (4.1) e (4.2), considere o seguinte teorema:

TEOREMA 3: *Sejam $F[x(\tau); \tau]$ e suas derivadas parciais primeiras em relação a $x(\tau)$ e a τ contínuas para todo $\tau \in [t_0, t_1]$. Então, a extremante de (4.2) é única e coincide com a solução do Problema (4.1).*

PROVA:

A prova se estabelece via cálculo variacional utilizando-se condições necessárias na forma integral (ver Apêndice A) e o Teorema 1.

Para isto, seja

$$L[\dot{x}(\tau); x(\tau); \tau] \stackrel{\Delta}{=} R' R. \quad (4.3)$$

Considerando as condições de regularidade supostas para $F(\cdot)$, pode-se concluir que $L(\cdot)$ é uma função contínua com primeiras derivadas parciais contínuas em relação a todos os seus argumentos (quais sejam, $x(\cdot)$, $\dot{x}(\cdot)$, e τ) para $\tau \in [t_0, t_1]$.

Isto permite afirmar que as extremantes de (4.2) (Apêndice A) devem satisfazer, além da condição inicial (4.2b), as seguintes condições necessárias:

$$\frac{\partial L[\dot{x}(\tau); x(\tau); \tau]}{\partial \dot{x}} = \int_{t_0}^{\tau} \frac{\partial L[\dot{x}(\tau); x(\tau); \tau]}{\partial \dot{x}} d\tau + C, \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial L[\dot{x}(\tau); x(\tau); \tau]}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_1} = 0 \quad (4.4b)$$

A equação (4.4a) representa as equações de Euler-Lagrange, na forma integral (SAGAN, 1969), e a equação (4.4b) as condições de transversalidade particularizadas para o problema. Substituindo (4.3) em (4.4a) e (4.4b), e efetuando as operações indicadas, obtemos:

$$R = - \int_{t_0}^{\tau} \left[\frac{\partial F[x(\tau); \tau]}{\partial x} \right]^T R d\tau + C, \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.5a)$$

$$R|_{t_1} = 0 \quad (4.5b)$$

Observamos que $R(\cdot)$, que representa o lado esquerdo de (4.5a), é de classe C^1 , pois o lado direito de (4.5a) é, por construção, uma função contínua e diferenciável em relação a τ .

Visando a manipulação de (4.5a) e (4.5b), considere a seguinte definição:

$$g(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial F[x(\tau); \tau]}{\partial x}, \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.6)$$

Considerando a regularidade de $R(\cdot)$ e (4.6), podemos diferenciar a equação (4.5a) em relação a τ , obtendo, em termos de $R(\cdot)$ e $g(\cdot)$:

$$\frac{d}{dt}[R(\tau)] - R(\tau)g(\tau) = 0 \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.7a)$$

Como as soluções de (4.7) são as extremantes de (4.2), para provar o teorema, devemos demonstrar que a solução de (4.1), e somente a solução de (4.1), resolve (4.7). Que a solução de (4.1), a ser denotada por $x(\cdot)$, resolve (4.7), é evidente. De fato, $R(\tau) = 0$, $\tau \in [t_0, t_1]$, satisfaz (4.7a) e (4.7b). Resta-nos então provar a unicidade de $x(\cdot)$.

Para isto, suponha a existência de $\hat{x}(\cdot)$, uma outra extremante, não necessariamente coincidente com $x(\cdot)$, e seja:

$$\hat{R}(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \hat{x}(\tau) - F[\hat{x}(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.8a)$$

$$h(\tau) \stackrel{\Delta}{=} -\frac{\partial F[\hat{x}(\tau); \tau]}{\partial \hat{x}}, \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.8b)$$

sendo $\hat{R}(\cdot)$ o valor do resíduo correspondente a $\hat{x}(\tau)$.

Considerando (4.8), as equações (4.5) podem ser escritas, em termos de $\hat{R}(\cdot)$, como o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{d}{dt}[\hat{R}(\tau)] - \hat{R}(\tau)h(\tau) = 0 \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.9a)$$

$$\hat{R}(t_1) = 0 \quad (4.9b)$$

que, por sua vez, define um problema de valor inicial, do tipo

$$\frac{d}{dt}[\hat{R}(\tau)] = H[\hat{R}(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.10a)$$

$$\hat{R}(t_1) = 0 \quad (4.10b)$$

onde $H[\hat{R}(\tau); \tau] \stackrel{\Delta}{=} h(\tau)\hat{R}(\tau)$.

De acordo com as hipóteses de regularidade de $F(\cdot)$, e considerando a continuidade de $\hat{x}(\cdot)$, observa-se que $H[\hat{R}(\tau), \tau]$ é uma função contínua de $\hat{R}(\tau)$ e de τ , enquanto

$$\frac{\partial H[\hat{R}(\tau); \tau]}{\partial \hat{R}} = h(\tau)$$

é uma função contínua de τ . Assim, de acordo com o Teorema 1 do Capítulo 3, o problema de valor inicial (4.9) apresenta solução única. Ora,

$$\hat{R}(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.10)$$

resolve as equações (4.9). Portanto, (4.10) é a única solução de (4.9). Disso resulta que $\hat{x}(\cdot)$ satisfaz a:

$$\dot{\hat{x}}(\tau) = F[\hat{x}(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.11a)$$

$$\hat{x}(t_0) = x_0; \quad (4.11b)$$

onde a equação (4.11b) decorre da condição (4.2b).

Comparando as expressões (4.1) e (4.11) vemos que, na verdade, $\hat{x}(\cdot)$ e $x(\cdot)$ coincidem. Ou seja, o Problema (4.2) admite $x(\cdot)$, a solução de (4.1), como única extremante, o que completa a prova do teorema.

4.4 Prova do Teorema 3 via teoria de controle ótimo

Conforme mencionado anteriormente, embora o cálculo variacional seja o caminho natural para a prova do Teorema 3, ele não se mostrou capaz de suportar as generalizações a serem incluídas nos próximos capítulos. Em contrapartida, a prova via teoria de controle ótimo, embora não tão natural, se mostrou bem adaptada para as generalizações. Com este objetivo, considere o raciocínio a seguir, que utiliza o conjunto de condições necessárias apresentado por Freitas Pinto (1991), para problemas de controle ótimo com

restrições de contorno duplo, prevendo-se o controle contínuo por partes. O conjunto de condições necessárias se encontra padronizado para problemas na forma de Mayer (FREITAS PINTO, 1991), exigindo que o Problema (4.2) sofra de início algumas manipulações.

PROVA:

Primeiramente reescrevemos o Problema (4.2) segundo a seguinte formulação de controle ótimo:

$$\text{Min } \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} R^T R d\tau \quad (4.12a)$$

sujeito a

$$x(t_0) = x_0 \quad (4.12b)$$

$$\dot{x}(\tau) = \omega(\tau) \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.12c)$$

onde

$$R \stackrel{\Delta}{=} [\omega(\tau) - F[x(\tau); \tau]] \quad (4.12d)$$

$$x \stackrel{\Delta}{=} [x_1, \dots, x_{n_x}]$$

$$F \stackrel{\Delta}{=} [F_1, \dots, F_{n_x}]$$

$$\omega \stackrel{\Delta}{=} [\omega_1, \dots, \omega_{n_x}]$$

A expressão (4.12a) representa o funcional objetivo, na forma de Lagrange, o qual deve ser minimizado sujeito às restrições de contorno (4.12b) e às restrições diferenciais (4.12c).

Para reescrevermos (4.12) na forma de Mayer, considere a variável de estado adicional $z(\cdot)$, definida como:

$$\dot{z} = \frac{1}{2} R^T R \quad (4.13a)$$

onde

$$z(t_0) = 0 \quad (4.13b)$$

Isto permite reescrever o problema (4.12) como:

$$\text{Min } h_0 = z(t_1) \quad (4.14a)$$

sujeito a

$$h_j = x_j(t_0 - x_{0j} = 0) \quad j = 1, \dots, n_x; \quad (4.14b)$$

$$h_{n_x+1} = z(t_0) = 0; \quad (4.14c)$$

$$h_{n_x+2} = t_0 - \bar{t}_0 = 0 \quad (4.14d)$$

$$h_{n_x+3} = t_1 - \bar{t}_1 = 0 \quad (4.14e)$$

$$\dot{x}_j(\tau) = F_j[x(\tau); \omega(\tau); \tau] = \omega(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad j = 1, \dots, n_x; \quad (4.14f)$$

$$\dot{z}(\tau) = \frac{1}{2} L[x(\tau); \omega(\tau); \tau] = \frac{1}{2} R' R, \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.14g)$$

onde $n_h = n_x + 3$ ^Δ denota o número total de restrições de contorno, expressadas de (4.14b) a (4.14e).

Para utilizarmos os resultados presentes em Freitas Pinto (1991), o problema (4.14) deve satisfazer as seguintes hipóteses:

- i) $x_j(\cdot)$ ($j = 1, \dots, n_x$) e $z(\cdot)$ devem ser funções contínuas para $\tau \in [t_0, t_1]$;
- ii) $\omega_k(\cdot)$ ($k = 1, \dots, n_x$) devem ser funções contínuas por partes para $\tau \in [t_0, t_1]$;
- iii) as funções F_i ($i = 1, \dots, n_x$), H_j ($j = 0, 1, \dots, n_x$) e $L(\cdot)$, e suas derivadas parciais primeiras são contínuas em relação a todos os seus argumentos, nos domínios considerados.

De acordo com o enunciado do Teorema 3, as hipóteses acima são válidas para o Problema (4.14). Assim, segundo Freitas Pinto (1991, p.111-114 e 132) (ver apêndice B), para que $(x(\cdot); z(\cdot); \omega(\cdot))$ forneça um mínimo para o Problema (4.14), devem existir multiplicadores:

$$v_0, \quad v = [v_1; \dots; v_{n_h}]^{\Delta},$$

e funções vetoriais

$$\lambda(\cdot) = [\lambda_1(\cdot); \dots; \lambda_{n_x}(\cdot)] \text{ e } \eta(\cdot)$$

tais que:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0 \quad \nu_0 \in \{0,1\}; \quad (4.15a)$$

II: $\lambda_j(\cdot)$ ($j = 1, \dots, n_x$) e $\eta(\cdot)$ são funções contínuas para todo $\tau \in [t_0, t_1]$ com

$$\dot{\lambda}(\tau) = - \left[\frac{\partial L}{\partial x} \right] \eta(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.15b)$$

$$\dot{\eta}(\tau) = 0 \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.15c)$$

$$\lambda_j(t_0) = \nu_j; \quad j = 1, \dots, n_x; \quad (4.15d)$$

$$\eta(t_0) = \nu_{n_x+1} \quad (4.15e)$$

$$\lambda_j(t_1) = 0; \quad j = 1, \dots, n_x; \quad (4.15f)$$

$$\eta(t_1) = \nu_0; \quad (4.15g)$$

III:

$$\lambda(\tau) = - \left[\frac{\partial L}{\partial \omega} \right] \eta(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.15h)$$

IV: A função

$$H = \sum_{j=0}^{\Delta} \lambda_j(t) \dot{x}_j(t) + \eta(\cdot) \dot{z}(\cdot)$$

é contínua para todo $\tau \in [t_0, t_1]$;

$$\sum_{j=0}^{n_x} \lambda_j(t_0) \dot{x}_j(t_0) + \eta(t_0) \dot{z}(t_0) = \nu_{n_x+2} \quad (4.15i)$$

$$\sum_{j=0}^{n_x} \lambda_j(t_1) \dot{x}_j(t_1) + \eta(t_1) \dot{z}(t_1) = \nu_{n_x+3} \quad (4.15i)$$

A expressão (4.15a) identifica a existência de soluções normais ($\nu_0=1$) ou anormais ($\nu_0=0$)⁴. As equações (4.15b) e (4.15c) são as equações adjuntas, acompanhadas das equações (4.15d) - (4.15g) que representam as condições de transversalidade para $x(t_0)$ e $x(t_1)$. A expressão (4.15h) representa a otimalidade do controle, enquanto as condições de quina de Weistrass-Erdmann (GELFAND e FOMIN, 1963, p.62) estão embutidas na continuidade de

⁴ O estudo da normalidade das soluções constitui um dos ramos da teoria de controle ótimo. A principal característica das chamadas “soluções anormais” é que a influência do funcional objetivo fica descaracterizada, em consequência do aumento de ν_0 (vide HESTENES, 1966, p. 270-283).

$\lambda_j (j = 1, \dots, n_x)$, $\eta(\cdot)$ e H . Por fim, as equações (4.15i) e (4.15j) representam as condições de transversalidade para t_0 e t_1 , respectivamente.

Tendo em vista (4.15c), obtemos:

$$\eta(\tau) = K = \text{const.} \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.16)$$

Por outro lado, de (4.15d) e (4.15g) concluímos que:

$$\eta(\tau) = \nu_0 = \nu_{n_x+1} \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.17)$$

Analisemos a possibilidade de soluções anormais, ou seja, $\nu_0 = 0$. Neste caso, teríamos

$$\eta(\tau) = \nu_{n_x+1} = 0$$

o que, levado em (4.15g) forneceria

$$\lambda(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]$$

Este resultado, levado às expressões (4.15d), (4.15e), (4.15i) e (4.15f), produziria

$$\nu_i = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n_x + 3;$$

violando a condição (4.15a). Isto significa que o Problema (4.14) não admite soluções irregulares. Logo, devemos ter

$$\nu_0 = 1 \quad (4.18)$$

Agora, a partir das definições de $R(\cdot)$ e $L(\cdot)$, obtemos:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \omega} \right] = R \quad (4.19a)$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial x} \right] = R \left[\frac{\partial R}{\partial x} \right] \quad (4.19b)$$

o que, considerando (4.17) permite reescrever (4.15b) e (4.15h) como:

$$\frac{d}{dt} \lambda(\tau) = - \left[\frac{\partial R}{\partial x} \right]' R', \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.20a)$$

$$\lambda(\tau) = -R' \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.20b)$$

Manipulando (4.20a) e (4.20b) obtemos:

$$\frac{d}{dt}R = R \left[\frac{\partial R}{\partial x} \right] \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.21a)$$

Por outro lado, a expressão (4.20b) juntamente com (4.15f) permite escrever:

$$R(t_1) = 0 \quad (4.21b)$$

As expressões (4.21a) e (4.21b) formam o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{d}{dt}R = G[R(\tau); \tau] \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.22a)$$

$$R(t_1) = 0 \quad (4.22b)$$

onde

$$G(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} R\phi(\tau)$$

sendo

$$\phi(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \left[\frac{\partial R}{\partial x} \right].$$

Considerando a continuidade de $\lambda(\cdot)$, estabelecida pelas condições necessárias, e (4.20b), podemos concluir que $R(\cdot)$ é contínua sobre todo o intervalo $\tau \in [t_0, t_1]$.

Além disso, como $G(\cdot)$ é função contínua de $R(\tau)$ e de τ e $\left[\frac{\partial G}{\partial R} \right]$ é também uma função contínua, segundo o Teorema 1, o problema de valor inicial (4.22) possui uma, e somente uma, solução.

Como

$$R(\tau) = 0 \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.23)$$

resolve as equações (4.22), resulta que esta é a solução procurada.

Por sua vez, a substituição de (4.23) em (4.12c) e (4.12d) permite concluir imediatamente que

$$\dot{x}(\tau) = F[x(\tau); \tau] \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.24)$$

A validade de (4.24) e da condição inicial (4.12b) completa a equivalência dos Problemas (4.1) e (4.2), conforme desejávamos demonstrar.

4.5 Comentários

- i) Na demonstração do Teorema 3, a utilização de condições necessárias na forma integral para o problema (4.2) permitiu a hipótese de ser a função integrando $L(\cdot)$ de classe C^1 . Entretanto, o usual na literatura de cálculo variacional é apresentar as condições necessárias na forma diferencial (GELFAN e FOMIN, 1963), exigindo-se que as funções envolvidas sejam de classe C^2 . A adoção da forma diferencial, portanto, tornaria inviável a prova do Teorema 3 via cálculo variacional.
- ii) Um aspecto positivo importante relacionado com o funcional (4.2a), em relação a um funcional obtido via solução do problema inverso do cálculo de variações, está na garantia de que a extremante, no caso única, fornece um mínimo absoluto para (4.2). A garantia de mínimo ocorre sem a necessidade de verificação da variação segunda. Isto raramente acontece na formulação variacional obtida via problema inverso do cálculo de variações, e torna-se ainda mais relevante se considerarmos a dificuldade de análise de condições de suficiência, no caso do problema inverso (GELFAND e FOMIN, 1963). Este aspecto será considerado em detalhes no exemplo apresentado no Capítulo 8.

- iii) Note que para efeitos de demonstração, estamos admitindo o pré-conhecimento de $x(\cdot)$ na definição de (4.6). Isto, entretanto, não representa uma fixação a priori da solução. De fato, em (4.8b), a definição de $h(\cdot)$ se aplica à $\hat{x}(\cdot)$, uma solução arbitrária pressupostamente diferente de $x(\cdot)$.
- iv) Note que a utilização da continuidade do resíduo $R(\cdot)$ nas demonstrações do Teorema 3 tanto via cálculo variacional como via controle ótimo não foi uma imposição, mas sim uma consequência das condições necessárias.

CAPÍTULO 5

FORMULAÇÃO VARIACIONAL PARA PROBLEMAS DE VALOR INICIAL COM DESCONTINUIDADES NO TEMPO

5.1 Introdução

Neste capítulo, os resultados do capítulo anterior são generalizados para suportar descontinuidades de primeira espécie no tempo. Para isto, propõe-se a substituição de problemas de valor inicial por problemas variacionais nos mesmos moldes anteriores, mas considerando que as funções envolvidas sejam apenas contínuas por partes.

A equivalência entre os dois problemas é demonstrada recorrendo-se à teoria de controle ótimo. A demonstração se apóia na extensão do teorema de existência e unicidade equações diferenciais ordinárias, apresentada no Capítulo 3 (Teorema 2), e em condições necessárias para problemas de controle ótimo com dinâmica fracionada.

Esta extensão se mostrará especialmente relevante no próximo capítulo, com aplicação da técnica à solução numérica de problemas de controle ótimo em geral, pois permitirá a incorporação de descontinuidades no controle.

5.2 Formulação variacional para problemas de valor inicial com descontinuidades no tempo

Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\dot{x}(\tau) = F[x(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_0, t_1] \quad (5.1a)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (5.1b)$$

onde

$$x(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [x_1(\cdot); \dots; x_{n_x}(\cdot)]'$$

$$F(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [F_1(\cdot); \dots; F_{n_x}(\cdot)]'$$

sendo $F(\cdot)$ e $\frac{\partial F}{\partial x}(\cdot)$ funções contínuas em $x(\cdot)$ e contínuas por partes em τ , ou seja, podendo sofrer um número finito de descontinuidades de primeira espécie no tempo.

Relacionado com o Problema (5.1), podemos criar o seguinte problema variacional:

$$\text{Min } I[x] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} R' R d\tau \quad (5.2a)$$

$$\text{com } x(t_0) = x_0 \text{ dado,} \quad (5.2b)$$

onde

$$R \stackrel{\Delta}{=} [\dot{x}(\tau) - F[x(\tau); \tau]]'$$

sendo $x(\cdot)$ e $F(\cdot)$ conforme (5.1).

5.3 Equivalência entre o problema de valor inicial e o problema variacional

Através do Teorema 4 adiante, será demonstrada a coincidência das soluções dos Problema (5.1) e (5.2).

A prova do teorema seguirá o raciocínio do item 4.4, com argumentos da teoria de controle ótimo. Apenas, em virtude das descontinuidades envolvidas, será necessária a utilização de resultados teóricos mais fortes, desenvolvidos para problemas ditos com dinâmica fracionada, que são compostos por uma sequência de sub-problemas. Para cada sub-problema, correspondendo a um sub-intervalo de tempo, temos um vetor de estado e um vetor de controle próprios, estando os sub-problemas relacionados apenas através das restrições de contorno. Condições necessárias para problemas dessa natureza foram desenvolvidas em Freitas Pinto (1991), e estão apresentadas no Apêndice B.

TEOREMA 4: *Se $F[x(\tau); \tau]$ e suas derivadas parciais primeiras são funções contínuas em $x(\cdot)$ e contínuas por partes (contínuas à direita) em τ para $\tau \in [t_0, t_1]$, então, a extremante de (5.2) é única e coincide com a solução do problema (5.1).*

PROVA. O primeiro passo para a prova do teorema consiste em reescrever o problema (5.2) na forma do seguinte problema de controle ótimo:

$$\text{Min } \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} R'R d\tau \quad (5.3a)$$

sujeito a

$$x(t_0) = x_0; \quad (5.3b)$$

$$\dot{x}(\tau) = \omega(\tau) \quad (5.3c)$$

onde

$$R \stackrel{\Delta}{=} [\omega(\tau) - F[x(\tau); \tau]] \quad (5.3d)$$

$$x(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [x_1(\cdot); \dots; x_n(\cdot)]'$$

$$F(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [F_1(\cdot); \dots; F_n(\cdot)]'$$

$$\omega(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [\omega_1(\cdot); \dots; \omega_n(\cdot)]'$$

A expressão (5.3a) representa o funcional objetivo, aqui na forma de Lagrange, o qual deve ser minimizado sujeito às restrições de contorno (5.3b) e às restrições diferenciais (5.3c).

Visando utilizarmos os resultados teóricos contidos em Freitas Pinto (1991), devemos reescrever o Problema (5.3) na forma de Mayer, com dinâmica fracionada.

Para este fim, para cada intervalo $[t_{e-1}, t_e]$, definimos um vetor de estado e um vetor de controle na forma

$$x^e(\tau) \stackrel{\Delta}{=} x(\tau), \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \dots, m+1; \quad (5.4a)$$

$$\omega^e(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \omega(\tau), \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \dots, m+1; \quad (5.4b)$$

$$\omega^e(t_e) \stackrel{\Delta}{=} \omega^-(t_e), \quad e = 1, \dots, m; \quad \omega^{m+1}(t_{m+1}) \stackrel{\Delta}{=} \omega(t_{m+1}) \quad (5.4c)$$

Além disso, relacionado ao funcional objetivo, definimos as $m+1$ variáveis de estado adicionais:

$$\dot{z}^e = L^e, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \dots, m+1; \quad (5.4d)$$

$$z^e(t_0) = 0; \quad (5.4e)$$

$$z^{e+1}(t_e) = z^e(t_e) \quad e = 1, \dots, m; \quad (5.4f)$$

onde

$$L^e \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2} [R^e] [R^e], \quad e = 1, \dots, m; \quad (5.4g)$$

$$R^e \stackrel{\Delta}{=} \omega^e(\tau) - F^e[x^e(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \dots, m+1; \quad (5.4h)$$

e

$$F^e[x^e(\tau); \tau] \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} \phi^e(\tau), & \tau < t_{e-1} \\ F[x^e(\tau); \tau], & \tau \in [t_{e-1}, t_e] \\ \varphi^e(\tau), & \tau \geq t_e \end{cases} \quad e = 1, \dots, m+1; \quad (5.4i)$$

sendo que as funções $\phi^e(\cdot)$ e $\varphi^e(\cdot)$ representam prolongamentos das funções $F^e(\cdot)$, no espírito de Freitas Pinto (1991). As funções $\phi^e(\cdot)$ e $\varphi^e(\cdot)$ para cumprirem adequadamente o papel de

prolongamentos, são funções de x^e e de τ construídas de modo a satisfazer, para $e = 1, \dots, m+1$; as seguintes propriedades:

$$\text{i) } \phi^e [x^e(t_{e-1}^-); t_{e-1}^-] = F [x^e(t_{e-1}); t_{e-1}]$$

$$\phi^e [x^e(t_e); t_e] = F [x^e(t_e^-); t_e^-]$$

$$\text{ii) } \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} [x^e(t_{e-1}^-); t_{e-1}^-] = \frac{\partial F}{\partial \tau} [x^e(t_{e-1}); t_{e-1}]$$

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} [x^e(t_e); t_{e-1}] = \frac{\partial F}{\partial \tau} [x^e(t_e^-); t_e^-]$$

$$\text{iii) } \frac{\partial \phi^e}{\partial x^e} [x^e(t_{e-1}^-); t_{e-1}^-] = \frac{\partial F}{\partial x^e} [x^e(t_e^-); t_e^-]$$

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial x^e} [x^e(t_e); t_{e-1}] = \frac{\partial F}{\partial x^e} [x^e(t_e^-); t_e^-]$$

iv) $\phi^e(\cdot)$ é de classe C^1 sobre um pequeno intervalo finito à esquerda de t_{e-1} , $t_{e-1} - \tau > \delta$;

$\phi^e(\cdot)$ é de classe C^1 sobre um pequeno intervalo finito à direita de t_e , $\tau - t_e \geq \delta$;

Com estas definições temos:

$$\frac{1}{2} \int_{t_{e-1}}^{t_e} [R^e]' [R^e] = z^e(t_e), \quad e = 1, \dots, m+1;$$

e podemos reescrever o problema (5.3) como:

$$\text{Min } h_0 = z^{m+1}(t_{m+1}) \quad (5.5a)$$

sujeito a

$$h_j = x_j^1(t_0) - x_{0j} = 0, \quad j = 1, \dots, n_x; \quad (5.5b)$$

$$h_{n_x+1} = z^1(t_0) = 0; \quad (5.5c)$$

$$h_k = x_j^{e+1}(t_e) - x_j^e(t_e) = 0 \quad e = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n_x;$$

$$k = \eta_x + 1 + (\eta_x + 1)(e-1) + j; \quad (5.5d)$$

$$h_k = z^{e+1}(t_e) - z^e(t_e) = 0 \quad e = 1, \dots, m;$$

$$k = \eta_x + 1 + (\eta_x + 1)e; \quad (5.5e)$$

$$h_k = t_e - \bar{t}_e = 0 \quad e = 0, \dots, m+1;$$

$$k = (\eta_x + 1)(m_x + 1) + e + 1; \quad (5.5f)$$

$$\dot{x}_j^e(\tau) = f_j^e[x^e(\tau); \omega^e(\tau); \tau] = \omega_j^e(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e],$$

$$j = 1, \dots, n_x; \quad e = 1, \dots, m + 1; \quad (5.5g)$$

$$\dot{z}^e(\tau) = g^e[x^e(\tau); \omega^e(\tau); \tau] = \frac{1}{2} [R^e]' [R^e], \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e],$$

$$e = 1, \dots, m + 1; \quad (5.5h)$$

onde $n_h = (n_x + 1)(m + 1) + m + 2$ denota o número total de restrições de contorno, expressadas de (5.5b) a (5.5f).

Condições necessárias para a solução de (5.5) são apresentadas em Freitas Pinto (1991) sob as seguintes hipóteses:

i) Os instantes $t_e (e = 0, 1, \dots, m + 1)$ satisfazem as desigualdades

$$t_{e-1} < t_e \quad e = 1, \dots, m + 1;$$

ii) $x_j^e(\cdot) (j = 1, \dots, n_x; e = 1, \dots, m + 1)$ e $z^e(\cdot) (e = 1, \dots, m + 1;)$ devem ser funções contínuas para todo

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e] \quad e = 1, \dots, m + 1;$$

iii) $w_j^e(\cdot) (j = 1, \dots, n_x + 1; e = 1, \dots, m + 1)$ devem ser funções contínuas por partes para todo

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e] \quad e = 1, \dots, m + 1;$$

iv) As funções $h_j (j = 0, 1, \dots, n_h)$, $f_j^e(\cdot) (j = 1, \dots, n_x + 1; e = 1, \dots, m + 1)$, $g^e(\cdot) (e = 1, \dots, m + 1)$ e suas derivadas parciais primeira estão definidas e são todas contínuas em relação a todos os seus argumentos, nos domínios considerados.

Note que todas estas hipóteses são válidas no caso em questão. Assim, segundo Freitas Pinto (1991), para que

$$x^e(\cdot) (e = 1, \dots, m + 1); z^e(\cdot) (e = 1, \dots, m + 1); u^e(\cdot) (e = 1, \dots, m + 1);$$

forneçam um mínimo para o Problema (5.5), devem existir multiplicadores:

$$v_0, \quad v = [v_1; \dots; v_{n_h}]',$$

e para $e = 1, \dots, m+1$, funções $\lambda_e(\cdot) = [\lambda_1^e, \dots, \lambda_{n_x}^e]$ e $\eta^e(\cdot)$, tais que se verifiquem:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \nu_0 \in \{0, 1\}; \quad (5.6a)$$

II: $\lambda_j^e(\cdot) (j = 1, \dots, n_x; e = 1, \dots, m+1)$ e $\eta^e(\cdot) (e = 1, \dots, m+1)$ são funções contínuas para todo

$$\tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, m+1.$$

com

$$\dot{\lambda}^e(\tau) = - \left[\frac{\partial L^e}{\partial x^e} \right] \eta^e(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, m+1; \quad (5.6b)$$

$$\dot{\eta}^e(\tau) = 0, \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e] \quad (5.6c)$$

$$\lambda_j^1(\tau_0) = \nu_j, \quad j = 1, \dots, n_x; \quad (5.6d)$$

$$\lambda^{e+1}(t_e)_j = \nu_k, \quad j = 1, \dots, n_x; \quad e = 1, \dots, m;$$

$$k = n_x + 1 + (n_x + 1)(e - 1) + j; \quad (5.6e)$$

$$\lambda^e(t_e)_j = \nu_k, \quad j = 1, \dots, n_x; \quad e = 1, \dots, m;$$

$$k = n_x + 1 + (n_x + 1)(e - 1) + j; \quad (5.6f)$$

$$\lambda_j^{m+1}(t_{m+1}) = 0, \quad j = 1, \dots, n_x; \quad (5.6g)$$

$$\eta^1(t_0) = \nu_{n_x+1}; \quad (5.6h)$$

$$\eta^{e+1}(t_e) = \nu_k, \quad e = 1, \dots, m; \quad k = n_x + 1 + (n_x + 1)e; \quad (5.6i)$$

$$\eta^e(t_e) = \nu_k, \quad e = 1, \dots, m; \quad k = n_x + 1 + (n_x + 1)e; \quad (5.6j)$$

$$\eta^{m+1}(t_{m+1}) = \nu_0; \quad (5.6k)$$

III:

$$\dot{\lambda}^e(\tau) = - \left[\frac{\partial L^e}{\partial \omega^e} \right] \eta^e(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, m+1; \quad (5.6l)$$

IV: As funções

$$H^e = \sum_{j=1}^{n_x} \lambda_j^e(\tau) \dot{x}_j^e(\tau) + \eta^e \dot{z}^e(\tau) \quad e = 1, \dots, m+1$$

São contínuas para todo $\tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e]$:

$$\sum_{j=0}^{n_x} \lambda_j^1(t_0) \dot{x}_j^1(t_0) + \eta^1(t_0) \dot{z}^1(t_0) = \nu_{(n_x+1)(m+1)+1} \quad (5.6m)$$

$$\begin{aligned} & \left[\lambda^{e+1}(t_e) \right] \dot{x}^{e+1}(t_e) - \left[\lambda^e(t_e) \right] \dot{x}^e(t_e) + \eta^{e+1}(t_e) \dot{z}^{e+1}(t_e) - \\ & - \eta^e(t_e) \dot{z}^e(t_e) + \nu_{nh-m-1+e} = 0, \quad e = 1, \dots, m; \end{aligned} \quad (5.6n)$$

$$\sum_{j=0}^{n_h} \lambda_j^{m+1}(t_{m+1}) \dot{x}_j^{m+1}(t_{m+1}) + \eta^{m+1}(t_{m+1}) \dot{z}^{m+1}(t_{m+1}) = \nu_{nh} \quad (5.6o)$$

Das equações (5.6e), (5.6f), (5.6i) e (5.6j), obtemos

$$\lambda^{e+1}(t_e) = \lambda^e(t_e), \quad e = 1, \dots, m; \quad (5.7a)$$

$$\eta^{e+1}(t_e) = \eta^e(t_e), \quad e = 1, \dots, m. \quad (5.7b)$$

Por outro lado, das equações (5.6c) concluímos que

$$\eta^e(\tau) = K^e = \text{const.}, \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, m+1;$$

o que, por sua vez, considerando (5.7b) nos permite concluir que $\eta^e(\tau) = K = \text{const.}$, para $e = 1, \dots, m+1$.

Além disso, a consideração de (5.6h) e (5.6k) permite concluir que

$$K = \nu_{nx+1} = \nu_0 \quad (5.8)$$

ou seja,

$$\eta^e(\tau) = \nu_{nx+1} = \nu_0, \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, m+1. \quad (5.9)$$

Para o caso de uma solução irregular, ou seja, com $\nu_0 = 0$, teríamos

$$\eta^e(\tau) = 0, \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, m+1;$$

o que levado em (5.6l), forneceria

$$\lambda_j^e(\tau) = 0, \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, m+1; \quad j = 1, \dots, n_x.$$

As relações anteriores, levadas nas expressões (5.6d) - (5.6k) e (5.6m) - (5.6o), implicaria em

$$\nu_j = 0, \quad j = 1, \dots, n_h;$$

o que levaria à violação da condição (5.6a), demonstrando a impossibilidade de se ter $\nu_0 = 0$.

Portanto o não admite solução irregular e devemos ter

$$\nu_0 = 1. \quad (5.10)$$

Agora considerando $\nu_0 = 1$ em (5.9), e que

$$\left[\frac{\partial L^e}{\partial w^e} \right] = R^e, \quad (5.11a)$$

$$\left[\frac{\partial L^e}{\partial x^e} \right] = R^e \left[\frac{\partial R^e}{\partial x^e} \right], \quad (5.11b)$$

podemos reescrever (5.6b) e (5.6l) na forma

$$\frac{d}{dt} \lambda^e(\tau) = - \left[\frac{\partial R^e}{\partial x^e} \right] R^e, \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, m+1; \quad (5.12a)$$

$$\lambda^e(\tau) = -R^e, \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, m+1. \quad (5.12b)$$

Por sua vez, a substituição de (5.12b) em (5.12a) leva a

$$\frac{d}{dt} \lambda^e(\tau) = \left[\frac{\partial R^e}{\partial x^e} \right]' \lambda^e, \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, m+1. \quad (5.13)$$

Sejam as funções $\lambda(\cdot)$ e $G(\cdot)$ definidas como:

$$\lambda(\tau) = \lambda^e(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, m+1; \quad (5.14a)$$

$$G(\tau) = \left[\frac{\partial R^e}{\partial x^e} \right]', \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, m+1 \quad (5.14b)$$

$$G(t_e) = \left[\frac{\partial R^e}{\partial x^e} \right]' \Big|_{t_e^+}, \quad e = 0, 1, \dots, m. \quad (5.14c)$$

$$G(t_{m+1}) = \left[\frac{\partial R^e}{\partial x^e} \right]' \Big|_{t_{m+1}}. \quad (5.14d)$$

Considerando as relações (5.7) vemos que $\lambda(\cdot)$ é uma função vetorial contínua que resolve o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{d}{dt} \lambda(\tau) = G(\tau) \lambda(\tau), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f] \quad (5.15a)$$

$$\lambda(t_f) = 0, \quad (5.15b)$$

onde (5.15b) foi recuperada a partir de (5.6g).

Podemos verificar que as hipóteses de regularidade impostas pelo Teorema 2 do Cap. 3, possibilidade (ii), são respeitadas, o que nos permite concluir que (5.15) possui uma, e somente uma, solução contínua.

Mas,

$$\lambda(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_f] \quad (5.16)$$

resolve o problema (5.15), donde concluímos que esta é a solução procurada.

Por outro lado, considerando (5.14a), (5.15b) e (5.12b), concluímos que a solução (5.16) implica em

$$R^e = 0, \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, m+1. \quad (5.17)$$

Retornando (5.17) na expressão (5.4h), e considerando as definições (5.4i), (5.4b) e (5.4a), concluímos que o resíduo (5.3d) é identicamente nulo. Mas, se considerarmos (5.3c), verificamos que a solução ótima do Problema (5.3) ou, equivalentemente, do Problema (5.2), resolve (5.1). Ora, sabemos que a solução de (5.2) é única, conforme estabelece o Teorema 2. Logo, concluímos que os Problemas (5.1) e (5.2) possuem a mesma e única solução, conforme desejávamos demonstrar.

5.4 Comentários

- i) À semelhança do caso contínuo, um aspecto atrativo na montagem do problema variacional (5.2) é o fato de se saber a priori que o funcional do tipo mínimos quadrados se anula sobre a solução ótima. Além disso, este valor será atingido se, e somente se, $x(\cdot)$ resolver o problema de valor inicial, não havendo possibilidade de ocorrência de mínimos locais. Isto é muito útil na análise de convergência durante resoluções numéricas do problema.
- ii) A adoção dos prolongamentos $\phi^e(\cdot)$ e $\psi^e(\cdot)$ na demonstração do Teorema 3 são importantes para a consistência teórica dos resultados e representam uma abertura

interessante para o tratamento de descontinuidades em problemas de controle ótimo em geral (FREITAS PINTO, 1991).

- iii) Conforme comentado anteriormente, não foram encontrados resultados teóricos do cálculo de variações que viabilizassem a demonstração do Teorema 4. De fato, as descontinuidades em relação a τ , tanto para $F(\cdot)$ como para $\frac{\partial F}{\partial x}(\cdot)$, inviabilizam a utilização dos resultados teóricos presentes na literatura consultada (GELFAN e FOMIN, 1963; SAGAN, 1969).

CAPÍTULO 6

APLICAÇÃO A PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO

6.1 Introdução

Para a resolução numérica de problemas de controle ótimo, uma das metodologias usualmente adotadas consiste na parametrização do problema via Método dos Elementos Finitos, através da qual, o problema, numa forma aproximada, torna-se um problema de programação matemática.

Uma das principais dificuldades para a colocação do problema de controle ótimo, na forma da programação matemática, está no tratamento das restrições diferenciais, as quais, normalmente, exigem a aplicação do Método dos Resíduos Ponderados (FREITAS PINTO, 1982; NAKAMICHI e WASHIZU, 1978a, 1978b, 1978c).

Neste capítulo, baseado no Teorema 4, apresenta-se uma formulação alternativa para uma classe de problemas de controle ótimo, na qual os vínculos diferenciais são escritos como um problema variacional do tipo mínimos quadrados, dito “problema variacional acessório”.

Conforme será mostrado, no caso de um tratamento numérico via Método dos Elementos Finitos, o problema variacional acessório, que substitui, de forma exata, as restrições originais, leva diretamente a uma aplicação do Método de Ritz, o que é muito atrativo numericamente

6.2 Uma formulação alternativa para problemas de controle ótimo

O problema de controle ótimo (3.1), pode ser reformulado levando-se em consideração o Teorema 4. Para isto, primeiramente estendemos o vetor de parâmetros ρ do Problema (3.1) para incorporar o estado inicial $x(t_0)$ e, juntamente com uma reformulação das restrições de contorno, reescrevermos aquele problema na seguinte forma (análoga ao Problema (3.2)):

$$\text{Min } J[x; u; P] = g[x(t_f), P] + \int_{t_0}^{t_f} \ell[x(\tau), u(\tau), \tau] d\tau; \quad (6.1a)$$

sujeito a

$$h_i[x(t_f), P] = 0, \quad i = 1, \dots, n_h; \quad (6.1a)$$

$$\dot{x}(\tau) = f[x(\tau), u(\tau), \tau], \quad [t_0, t_f] \quad (6.1b)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (6.1c)$$

onde

$$P \stackrel{\Delta}{=} [x'_o; p']$$

$$x_0 \stackrel{\Delta}{=} [x_{01}; \dots; x_{0n_x}]'$$

Note que x_0 denota um vetor adicional de parâmetros que, como demonstra (6.1d), representa o estado inicial. Além disso, x_0 aparece incorporado ao vetor de parâmetros p como argumento de $g(\cdot)$ e $h_i(\cdot)$ ($i = 1, \dots, n_h$), em substituição a $x(t_0)$. Desta maneira, o problema de controle ótimo passou a ter, como parte de suas restrições, um problema de valor inicial, composto pelas expressões (6.1c) e (6.1d). De fato, para cada escolha de x_0 e do controle $u(\cdot)$, podemos reescrever os vínculos (6.1c) e (6.1d) na forma do seguinte problema de valor inicial:

$$\dot{x}(\tau) = F[x(\tau); \tau], \quad [t_0, t_f] \quad (6.2a)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (6.2b)$$

onde

$$F(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [F_1(\cdot); \dots; F_{n_x}(\cdot)]'$$

$$F_i[x(\tau); \tau] \stackrel{\Delta}{=} f_i[x(\tau); u(\tau); \tau], \quad i = 1, \dots, n_x.$$

As funções $F_i(\cdot)$ ($i = 1, \dots, n_x$) apresentarão descontinuidades nos pontos de descontinuidade de $u(\cdot)$. Já as descontinuidades em $\frac{\partial F_i}{\partial \tau}(\cdot)$ ($i = 1, \dots, n_x$) e $\frac{\partial F_i}{\partial x}(\cdot)$ ($i = 1, \dots, n_x$) estarão associadas, ou a descontinuidades de $u(\cdot)$, ou de sua derivada.

Sob estas condições de regularidade, as hipóteses do Teorema 4 são satisfeitas pelo problema de valor inicial (6.2), de modo a podermos reescrever o Problema (6.1) na seguinte forma alternativa:

$$\text{Min } J[u, P] = g[x(t_f); P] + \int_{t_0}^{t_f} \ell[x(\tau), u(\tau), \tau] d\tau \quad (6.3a)$$

sujeito a

$$h_i[x(t_f), P] = 0, \quad i = 1, \dots, n_h; \quad (6.3b)$$

onde, para cada $u(\cdot)$ e P , o estado $x(\cdot)$ deve ser obtido como a solução do problema variacional acessório:

$$\text{Min } I[x] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} R'R d\tau, \quad (6.3c)$$

com

$$x(t_0) = x_0, \quad (6.3d)$$

sendo $R = \dot{x}(\tau) - F[x(\tau); \tau]$

O Problema (6.3), equivalente ao Problema (6.1) e, portanto, também equivalente ao Problema (3.1), possui uma estrutura interessante para o caso de um tratamento numérico via Método dos Elementos Finitos. Isto será explorado a seguir.

6.3 Aplicação do Método de Ritz dentro do contexto do método dos elementos finitos

A forma das restrições (6.3c) e (6.3d) fornece um meio natural para a utilização do Método de Ritz, no caso de uma resolução numérica via Método dos Elementos Finitos.

Para isso, considere a obtenção de uma solução subótima para o problema (6.3). Aqui, a ideia é adotar para as variáveis de controle aproximações do tipo elementos finitos. Para isto, o domínio $[t_0, t_f]$ é dividido em N elementos, adotando-se sobre cada elemento aproximações na forma:

$$\bar{u}_j^e(\tau) = \sum_{k=1}^s \beta_j^{(e,k)} U_k^j(\tau), \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad j = 1, \dots, n_u; \quad (6.4)$$

onde

$$t_e \stackrel{\Delta}{=} \frac{e}{N}(t_f - t_0) + t_0, \quad e = 1, \dots, N.$$

No contexto subótimo, $t_e (e = 1, \dots, N-1)$ representa os instantes onde são permitidas descontinuidades de $\bar{u}(\cdot)$ ou $\dot{\bar{u}}(\cdot)$. As funções $U_j^k(\cdot) (k = 1, \dots, s)$ definem uma base em determinado espaço de funções, e $\beta_j^{e,k}$ representam coeficientes a serem otimizados.

A forma (6.4) representa uma combinação linear de funções que constituem uma base para um sub-espaço contido no domínio do Problema (6.2), ou seja, de funções que obedecem a hipótese H2. O fato da lei de controle estar restrita à forma (6.4) não inviabiliza a satisfação de todas as restrições do Problema (6.3), de onde deriva a denominação “subótimo”. Em outras palavras, uma solução subótima, particularmente de acordo com (6.4), compromete apenas o funcional objetivo, preservando as restrições do problema.

Em termos da solução subótima, ou seja, em termos dos coeficientes $\beta_j^{e,k}$, o problema (6.3) pode ser formulado como:

$$\text{Min } J[\beta, P] = g[\bar{x}^N(t_N); P] + \sum_{e=1}^N \int_{t_{e-1}}^{t_e} \bar{\ell}^e[\bar{x}^e(\tau), \beta^e, \tau] d\tau \quad (6.5a)$$

sujeito a

$$h_i[\bar{x}^N(t_N); P] = 0, \quad i = 1, \dots, n_h; \quad (6.5b)$$

onde, para cada $\beta^e (e = 1, \dots, N)$ e P , as funções $\bar{x}^e(\cdot)$ (*indeln*) devem ser tomadas como a solução do problema variacional acessório:

$$\text{Min } I[\bar{x}^e] = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{t_{e-1}}^{t_e} [\bar{R}^e][\bar{R}^e] d\tau \quad (6.5c)$$

com

$$\bar{x}^e(t_0) = x_0, \quad (6.5d)$$

sendo, para $e = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned}\bar{\ell}[\bar{x}^e(\tau); \beta^e; \tau] &= \ell[\bar{x}^e(\tau); \bar{u}^e(\tau); \tau] \\ \bar{R}^e &= \dot{\bar{x}}^e(\tau) - \bar{F}^e[\bar{x}^e(\tau); \tau] \\ \bar{F}^e[\bar{x}^e(\tau); \tau] &= \dot{\bar{x}}^e(\tau) - \bar{f}^e[\bar{x}^e(\tau); \beta^e; \tau]\end{aligned}$$

e

$$\bar{f}^e[\bar{x}^e(\tau); \beta^e; \tau] = f^e[\bar{x}^e(\tau); \bar{u}^e(\tau); \tau]$$

onde β^e denota um vetor que agrupa todos os coeficientes $\beta_j^{e,k}$, começando de $\beta_1^{e,1}$ e indo até $\beta_{n_u}^{e,s}$, segundo a sequência:

$$\beta_i^e = \beta_j^{e,k}, \quad i = (j-1)s + k, \quad k = 1, \dots, s.$$

O Problema (6.5) está, em termos do controle, parametrizado, sem que isto comprometa a satisfação dos vínculos dinâmicos, ou seja, do problema variacional acessório.

É possível, também, parametrizar o estado, visando uma solução numérica do problema acessório. Neste caso, as restrições dinâmicas deixam de ser rigorosamente obedecidas.

Considere aproximações para o estado com a divisão do intervalo $[t_0, t_f]$ em elementos, analogamente ao que foi feito para o controle:

$$\hat{x}_i^e(\tau) = \sum_{k=1}^r \alpha_i^{(e,k)} X_i^k(\tau), \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad i = 1, \dots, n_x; \quad (6.6)$$

com t_e definido conforme (6.4).

Enquanto $\hat{x}_i^e(\cdot)$ denota a aproximação para $\bar{x}_i^e(\cdot)$ sobre o e -ésimo elemento, $X_i^k(\cdot)$ ($k = 1, \dots, r$), definem uma base no espaço de funções adotado para $\hat{x}_i^e(\cdot)$.

A substituição das aproximações acima no Problema (6.3), leva à seguinte reformulação do problema acessório:

$$\text{Min } I[\alpha] = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{t_{e-1}}^{t_e} [\hat{R}^e] [\hat{R}^e] d\tau, \quad (6.7a)$$

sujeito a

$$\hat{x}^1(t_0) = x_0, \quad (6.7b)$$

$$\hat{x}^{e+1}(t_e) = \hat{x}^e(t_e), \quad e = 1, \dots, N-1; \quad (6.7c)$$

onde

$$\hat{R}^e[\alpha^e; \beta^e; \tau] = \hat{x}^e(\tau) - \bar{f}[\hat{x}^e(\tau); \beta^e; \tau]$$

e α^e denota um vetor que agrupa todos os coeficientes $\alpha_i^{(e,k)}$, começando de $\alpha_1^{(e,1)}$ e indo até $\alpha_{n_x}^{(e,r)}$, segundo a sequência:

$$\alpha_j^e = \alpha_i^{(e,k)}, \quad j = (i-1)r + k, \quad i = 1, \dots, r.$$

Note que no Problema (6.7) foram embutidas as restrições (6.7c) para garantir a continuidade do estado em t_e ($e = 1, \dots, N-1$).

Em resumo, a ideia consiste em resolver o problema acessório (6.5c), (6.5d) através da forma (6.7), que está conforme o Método de Ritz.

Em outras palavras, devemos obter $\alpha \triangleq [\alpha^1, \dots, \alpha^N]'$ como função de $\beta \triangleq [\beta^1, \dots, \beta^N]'$

e P , seja numa forma implícita

$$\phi[\alpha; \beta; P] = 0 \quad (6.9a)$$

ou, se possível, explicitamente

$$\alpha = \alpha[\beta; P] \quad (6.9b)$$

A solução (6.9), levada em (6.7), fornece, implícita ou explicitamente, o seguinte problema de programação matemática:

$$\text{Min } H_0[\beta; P] \quad (6.10a)$$

sujeito a

$$H_1[\beta; P] = 0, \quad i = 1, \dots, n_h; \quad (6.10b)$$

onde

$$H_0[\beta; P] \triangleq g[\hat{x}^e(t_N); P] + \sum_{e=1}^N \int_{t_{e-1}}^{t_e} \hat{L}^e[\hat{x}^e(\tau), \beta^e, \tau] d\tau \quad (6.10c)$$

$$H_1[\beta; P] \triangleq h_i[\hat{x}^N(t_N); P], \quad i = 1, \dots, n_h. \quad (6.10d)$$

6.4 Comentários

- i) A condição de serem ambos, $u(\cdot)$ e $\dot{u}(\cdot)$, contínuos por partes, conforme estabelece a hipótese H2 do Problema (3.1) é mais restritiva do que a hipótese de apenas $u(\cdot)$ ser contínua por partes, como é comum na teoria de controle ótimo. Na prática, entretanto, isto restringe pouco a aplicabilidade da presente metodologia. De fato, a hipótese H2, admitindo $\dot{u}(\cdot)$ contínua por partes está eliminando, em relação ao tratamento usual, apenas a ocorrência de descontinuidades de segunda espécie em $\dot{u}(\cdot)$.
- ii) A utilização das condições necessárias de Freitas Pinto (1991) exige que as funções presentes no problema de controle ótimo sejam de classe C^1 . Por sua vez, para que as funções presentes no Problema (6.3) sejam de classe C^1 , é necessário que $u(\cdot)$ e $\dot{u}(\cdot)$ sejam contínuas por partes. Esta foi a motivação para a adoção da hipótese H2.
- iii) Para o caso específico de problemas de controle ótimo em que o controle é contínuo e suave, a formulação (6.3) pode ser validada com a aplicação direta do Teorema 3, sem a necessidade de recorrer ao Teorema 4.
- iv) Uma determinação explícita das funções $H_i(\cdot)$ ($i = 0, 1, \dots, n_h$), embora desejável, não é indispensável para a aplicação do método. De fato, existem maneiras de se trabalhar um problema de programação matemática implicitamente definido (sem o conhecimento explícito da função objetivo e das restrições).
- v) A divisão em elementos para as variáveis de controle (aproximações (6.4)) não tem que ser, obrigatoriamente, a mesma que para as variáveis de estado (aproximações (6.6)). O importante é que as descontinuidades das funções de controle ocorram sobre as junções dos elementos.

CAPÍTULO 7

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

7.1 Introdução

Com o objetivo de ilustrar a aplicação da técnica apresentada no capítulo anterior, neste capítulo são resolvidos alguns exemplos propositadamente simples, cada um, segundo sua particularidade, abordando um aspecto específico.

O primeiro exemplo, que representa um problema de controle ótimo com controle contínuo e suave, explora o conceito de “solução subótima”. O segundo trata-se de um problema de obtenção de trajetória ótima com tempo final fixo cuja natureza permite uma

interpretação física dos resultados. Um aspecto importante deste exemplo é que a estrutura da solução subótima adotada é, na verdade, a mesma da solução ótima. O terceiro e último exemplo, ilustra a aplicação da técnica a um problema com controle descontínuo.

Nos três casos é possível a obtenção das soluções analíticas, seja através da teoria de controle ótimo, seja através do cálculo de variações, as quais são utilizadas para analisar as soluções numéricas.

7.2 Problema ordinário de controle ótimo com estado inicial e final fixos

Considere o problema de minimizar:

$$\text{Min } J[x; u] = \frac{1}{2} \int_0^2 [u(\tau) - \tau^2]^2 d\tau, \quad (7.1a)$$

sujeito a

$$\dot{x}(\tau) = u(\tau) + 1, \quad \tau \in [0, 2]; \quad (7.1b)$$

$$x(0) = 0; \quad (7.1c)$$

$$x(2) = 2. \quad (7.1d)$$

Utilizando conceitos da Teoria de Controle Ótimo ou do Cálculo de Variações (GELFAN e FOMIN, 1963; BRYSON, 1975) é possível obter como solução ótima para o Problema (7.1):

$$u(\tau) = \tau^2 - \frac{4}{3}, \quad \tau \in [0, 2];$$

$$x(\tau) = \frac{1}{3} [\tau^3 - \tau], \quad \tau \in [0, 2];$$

Procuremos agora uma solução subótima linear, ou seja, uma solução do tipo:

$$u(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \tau, \quad \tau \in [0, 2]; \quad (7.2)$$

válida para todo o intervalo de definição do problema.

Também, através de argumentos teóricos, é possível obter como solução subótima:

$$u(\tau) = 2[\tau - 1], \quad \tau \in [0, 2];$$

$$x(\tau) = \tau^2 - \tau, \quad \tau \in [0,2]$$

Utilizando a metodologia apresentada no capítulo anterior, pode-se obter soluções subótimas aproximadas para o Problema (7.1). Para isto, dividi-se o domínio $[0,2]$ em N elementos iguais, aproximando-se $x(\cdot)$, sobre cada elemento, pelas relações:

$$\hat{x}^e(\tau) = \alpha_{e-1} N_1(\tau) + \alpha_e N_2(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e]; \quad (7.3)$$

onde, para $e = 1, \dots, N$:

$$N_1 \stackrel{\Delta}{=} \frac{\tau_e - \tau}{\tau_e - \tau_{e-1}}, \quad N_2 \stackrel{\Delta}{=} \frac{\tau - \tau_{e-1}}{\tau_e - \tau_{e-1}}, \quad \tau_2 \stackrel{\Delta}{=} 2 \frac{e}{N}.$$

Note que, com a aproximação (7.3), a continuidade de $x(\cdot)$ está preservada sobre todo o intervalo $[0,2]$, ou seja:

$$\hat{x}^{e+1}(\tau_e) = \hat{x}^e(\tau_e) = \alpha_e, \quad e = 1, \dots, N-1.$$

Considerando (7.2) e (7.3), e tendo em vista o item 6.3 do capítulo anterior, podemos reescrever o Problema (7.1) na forma:

$$\text{Minimizar } J[\beta] = \frac{1}{2} \int_0^2 [\beta_0 + \beta_1 \tau - \tau^2]^2 d\tau, \quad (7.4a)$$

$$\text{sujeito a } \alpha_N = 2; \quad (7.4b)$$

sendo o estado $\hat{x}^e(\cdot)$ ($e = 1, \dots, N$) a solução do problema variacional acessório:

$$\text{Minimizar } I[\alpha] = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e} [\dot{\hat{x}}^e(\tau) - \beta_0 - \beta_1 \tau - 1]^2 d\tau, \quad (7.4c)$$

com

$$\alpha_0 = 0, \quad (7.4d)$$

sendo $\alpha \stackrel{\Delta}{=} [\alpha_1; \dots; \alpha_n]'$.

As condições (7.4b) e (7.4d) foram obtidas de (7.1d) e (7.1c), respectivamente. Observe que a divisão em elementos foi realizada apenas sobre o problema acessório, não tendo sido necessária para o funcional objetivo.

Primeiramente, resolve-se o problema acessório (7.4c) - (7.4d) para obter α em função de (β_0, β_1) , ou seja, encontra-se o estado em função do controle subótimo. Obtemos, neste caso, como condições necessárias:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_e} = N(2\alpha_e - \alpha_{e+1} - \alpha_{e-1}) + \beta_1(\tau_{e+1} - \tau_{e-1}) = 0; \quad e = 1, \dots, N-1 \quad (7.5a)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_N} = N(\alpha_N - \alpha_{N-1} - 2\beta_0 - \beta_1)(\tau_N + \tau_{N-1}) + \frac{2}{N} = 0 \quad (7.5b)$$

Por manipulação algébrica de (7.5), é possível obter explicitamente, para N arbitrário:

$$\alpha_e \frac{2_e}{N} \left[\beta_0 + \beta_1 \frac{e}{N} + 1 \right], \quad e = 1, \dots, N. \quad (7.5c)$$

A expressão (7.5c), para $e = N$, substituída em (7.4b), leva a:

$$\beta_1 = -\beta_0. \quad (7.5d)$$

A minimização de (7.4a) sujeito a (7.5d) fornece:

$$\beta_1 = -\beta_0 = 2.$$

Finalmente, a substituição dos valores ótimos encontrados para β_0, β_1 em (7.5c) fornece os seguintes valores ótimos para α_e ($e = 1, \dots, N$):

$$\alpha_e \frac{2_e}{N} \left[\frac{2_e}{N} - 1 \right], \quad e = 1, \dots, N.$$

Para todos os valores de N , a solução (β_0, β_1) do Problema (7.4) leva a um controle subótimo coincidente com a solução subótima analítica:

$$u(\tau) = 2[\tau - 1], \quad \tau \in [0, 2]$$

Para o estado $x(\cdot)$, tem-se, para $N = 1$, $N = 2$, e $N = 4$, respectivamente, as seguintes soluções subótimas aproximadas:

$$\begin{aligned}
 (N=1) \quad x &= \tau \quad 0 \leq \tau \leq 2 \\
 (N=2) \quad x &= \begin{cases} 0 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 2(\tau-1) & 1 < \tau \leq 2 \end{cases} \\
 (N=4) \quad x &= \begin{cases} -0,5\tau, & 0 \leq \tau \leq 0,5 \\ 0,5\tau - 0,5 & 0,5 \leq \tau \leq 1,0 \\ 1,5\tau - 1,5 & 1,0 \leq \tau \leq 1,5 \\ 2,5\tau - 3 & 1,5 \leq \tau \leq 2,0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

A Figura 7.1 mostra a evolução das soluções numéricas para a solução subótima.

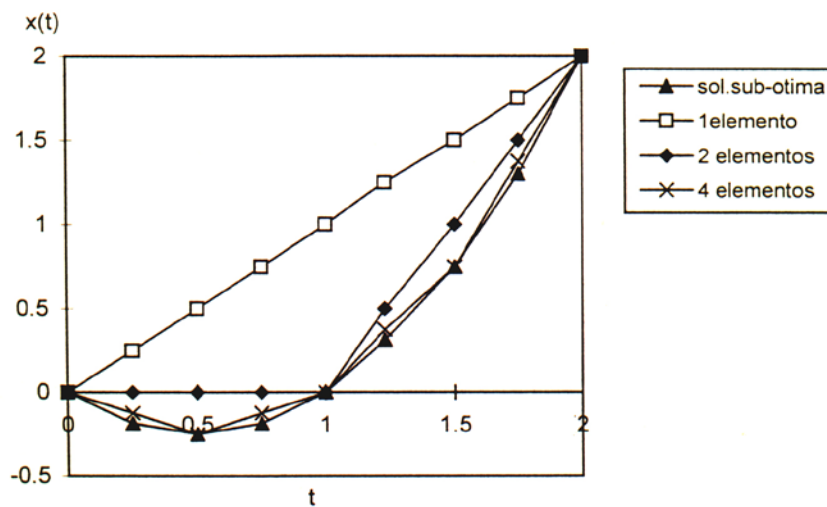


Fig. 7.1: Curvas para o estado de $x(\cdot)$.

7.3 Problema de trajetória ótima

Considere o seguinte problema de controle ótimo:

$$\text{Min } J[x;u] = -x(4) + \frac{1}{2} \int_0^4 [u(\tau)]^2 d\tau, \quad (7.6a)$$

$$\text{sujeito a } \ddot{x}(\tau) = u(\tau), \quad \tau \in [0,4]; \quad (7.6b)$$

$$x(0) = 0; \quad (7.6c)$$

$$\dot{x}(0) = 0. \quad (7.6d)$$

O modelo acima (LUENBERGUER, 1979) representa o problema de acelerar um veículo de modo a minimizar um funcional que considera, simultaneamente, a distância total percorrida em um dado tempo ($x(4)$) e o esforço gasto (termo integral no funcional).

Utilizando conceitos da Teoria de Controle Ótimo é possível obter como solução ótima para o Problema (7.6):

$$\begin{aligned} u(\tau) &= 4 - \tau, \quad \tau \in [0,4]; \\ x(\tau) &= 2\tau^2 - \frac{\tau^3}{6}, \quad \tau \in [0,4]; \end{aligned}$$

É interessante observar, através da solução analítica, que a aceleração ótima aplicada decresce linearmente com o tempo, chegando a zero no tempo final.

A fim de obter soluções numéricas, primeiramente coloca-se o Problema (7.6) na forma de estado, introduzindo-se as variáveis dinâmicas

$$x_1(\tau) \stackrel{\Delta}{=} x(\tau) \quad \text{e} \quad x_2(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \dot{x}(\tau),$$

o que permite reescrever (7.6) como:

$$\text{Min} \quad J[x;u] = -x_1(4) + \frac{1}{2} \int_0^4 [u(\tau)]^2 d\tau, \quad (7.7a)$$

sujeito a

$$\dot{x}_1(\tau) = x_2(\tau), \quad \tau \in [0,4]; \quad (7.7b)$$

$$\dot{x}_2(\tau) = u(\tau), \quad \tau \in [0,4]; \quad (7.7c)$$

$$x_1(0) = 0; \quad (7.7d)$$

$$x_2(0) = 0. \quad (7.7e)$$

Dentro do contexto do procedimento proposto, substitui-se as restrições (7.7b) - (7.7e) pelo seguinte problema variacional acessório:

$$\text{Min} \quad I[x] = \frac{1}{2} \int_0^4 [\dot{x}_1(\tau) - x_2(\tau)]^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^4 [\dot{x}_2(\tau) - u(\tau)]^2 d\tau \quad (7.8a)$$

$$x_1(0) = 0; \quad (7.8b)$$

$$x_2(0) = 0. \quad (7.8c)$$

Seja, para o controle, uma aproximação linear, na forma

$$\hat{u}(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \tau \quad (7.9)$$

que, neste problema em particular, reproduz diretamente a estrutura da solução ótima.

Além disso, dentro do contexto do Método dos Elementos Finitos, considere a divisão do domínio $[0,4]$ em N elementos, com as seguintes aproximações para as variáveis de estado $x_1(\cdot)$ e $x_2(\cdot)$:

$$\hat{x}_1^e(\tau) = \alpha_{e-1}N_1(\tau) + \alpha_e N_2(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e]; \quad (7.10a)$$

$$\hat{x}_2^e(\tau) = \gamma_{e-1}N_1(\tau) + \gamma_e N_2(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e]; \quad (7.10b)$$

onde N_1 e N_2 são definidos como em (7.3) e

$$\tau_e = \frac{4e}{N}, \quad e = 0, 1, \dots, N. \quad (7.10c)$$

As expressões (7.9) e (7.10) levadas em (7.8), resultam:

$$\begin{aligned} \text{Min } I[\alpha] = & \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \left\{ \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e} \left[\frac{N}{4} (\alpha_e - \alpha_{e-1}) - (\alpha_{e-1}N_1(\tau) + \alpha_e N_2(\tau)) \right]^2 d\tau + \right. \\ & \left. + \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e} \left[\frac{N}{4} (\gamma_e - \gamma_{e-1}) - \beta_0 - \beta_1 \tau \right]^2 d\tau \right\} \end{aligned} \quad (7.11a)$$

$$\alpha_0 = 0; \quad (7.11b)$$

$$\gamma_0 = 0. \quad (7.11c)$$

As condições necessárias para (7.11):

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_e} = 0 \quad e = 1, \dots, N \quad (7.12a)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma_e} = 0 \quad e = 1, \dots, N \quad (7.12b)$$

Após algumas manipulações das expressões (7.12), é possível obter

$$\begin{aligned} \gamma_e = \frac{N}{12N^2 + 64} \left[(3N^2 + 4)\alpha_{e+1} + \alpha_{e-1}(3N^2 - 20) - (6N^2 - 16)\alpha_e - \frac{96}{N}\beta_1 \right], \\ e = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (7.13)$$

A substituição de (7.13) em (7.12) e em (7.7a) leva ao seguinte problema de programação matemática, em termos de α e β :

$$\text{Min } J[\alpha; \beta] = -\alpha_N + 2\beta_0^2 + 8\beta_0\beta_1 + \frac{32}{3}\beta_1^2 \quad (7.14a)$$

sujeito a:

$$(15N^3 + 44N)\alpha_1 + (-16N - 12N^3)\alpha_2 + (4N + 3N^3)\alpha_3 - 96\beta_1 = 0 \quad (7.14b)$$

$$\begin{aligned} &(-3N^2 + 20)\alpha_{e-2} - (6N^2 - 18)\alpha_{e-1} - 20\alpha_e + (-6N^2 + 14)\alpha_{e+1} + \\ &+ (4 + 3N^2)\alpha_{e+2} = 0 \quad 2 \leq e \leq (N-2) \end{aligned} \quad (7.14c)$$

$$\begin{aligned} &(64N^3 + 16N)\alpha_{N-3} + (6N^3 + 24N + 2)\alpha_{N-2} + (16N^3 + 6N^2 + 32)\alpha_{N-1} + \\ &+ (3N^2 - 6N)\alpha_N + 24N\beta_0 + \left(31N + \frac{72}{N}\right)\beta_1 = 0 \end{aligned} \quad (7.14d)$$

$$\begin{aligned} &(-3N^3 - 3N^2 + 20N + 20)\alpha_{N-2} + (6N^2 - 24N - 16)\alpha_{N-1} + \\ &+ (3N^3 - 28N + 32)\alpha_{N+1} - 24N\beta_0 + \left(86N + \frac{48}{N}\right)\beta_1 = 0 \end{aligned} \quad (7.14e)$$

Foram obtidas soluções para $N = 1, 2, 4$ e 8 , sucessivamente. As Tabelas 7.2 e 7.3 apresentam os resultados para $u(\cdot)$ e $x(\cdot)$, respectivamente. Estes resultados estão ilustrados graficamente nas Figs. 7.2 e 7.3.

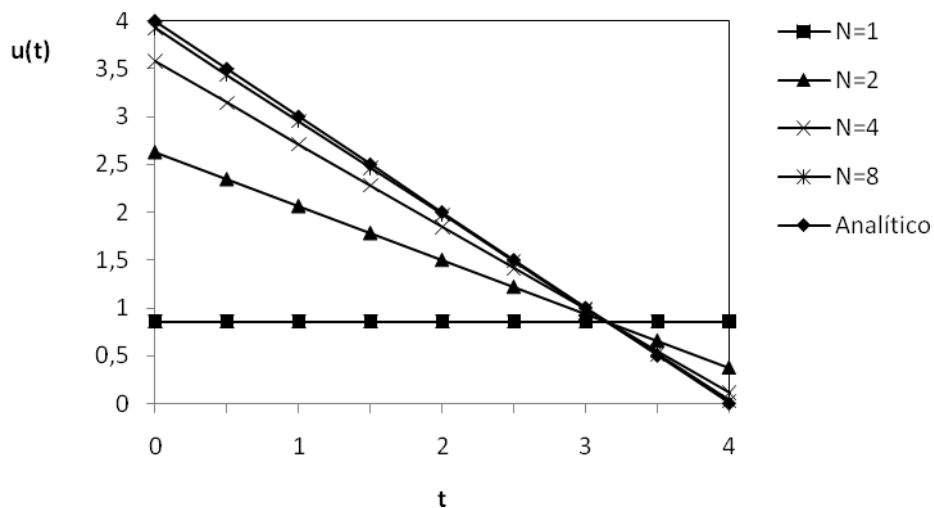
Tabela 7.1: Valores para $u(\cdot)$

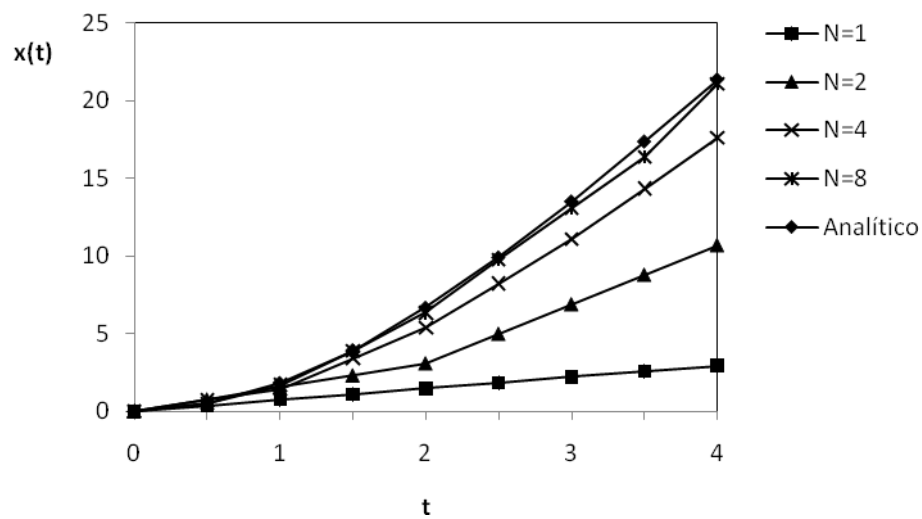
τ	$N=1$	$N=2$	$N=4$	$N=8$	Analítico
0.0000	0.8571	2.6250	3.5769	3.9248	4.0000
0.5000	0.8571	2.3438	3.1442	3.4376	3.5000
1.0000	0.8571	2.0625	2.7115	2.9504	3.0000
1.5000	0.8571	1.7813	2.2788	2.4632	2.5000
2.0000	0.8571	1.5000	1.8461	1.9760	2.0000
2.5000	0.8571	1.2188	1.4134	1.4888	1.5000
3.0000	0.8571	0.9375	0.9807	0.9925	1.0000
3.5000	0.8571	0.6563	0.5480	0.5144	0.5000
4.0000	0.8571	0.3750	0.1153	0.0271	0.0000

Tabela 7.2: Valores para $x(\cdot)$

τ	$N=1$	$N=2$	$N=4$	$N=8$	Analítico
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.5000	0.3674	0.7735	0.7256	0.5246	0.4792
1.0000	0.7347	1.5469	1.4551	1.6897	1.8333
1.5000	1.1021	2.3204	3.4283	3.8742	3.9375
2.0000	1.4694	3.0938	5.4053	6.3473	6.6667
2.5000	1.8368	4.9923	8.2344	9.7642	9.8958
3.0000	2.2041	6.8907	11.064	13.110	13.500
3.5000	2.5715	8.7892	14.345	16.357	17.354
4.0000	2.9388	10.688	17.627	21.092	21.333

Vale a pena notar que, neste exemplo, diferentemente do exemplo anterior, uma solução fechada do problema acessório foi apenas parcialmente conseguida. De fato, conforme mostra (7.13), foi encontrada $\gamma = \gamma(\alpha)$ e não γ e α como funções de β , levando ao problema de programação matemática (7.14) em termos de α e β .

Fig. 7.2: Soluções para o $u(\cdot)$

Fig. 7.3: Soluções para o $x(\cdot)$

7.4 Um problema com controle descontínuo

Seja o problema de minimizar

$$J[x;u] = \int_{-1}^1 x(\tau)^2 [1 - u(\tau)]^2 d\tau, \quad (7.15a)$$

sujeito a

$$\dot{x}(\tau) = u(\tau), \quad \tau \in [-1,1]; \quad (7.15b)$$

$$x(-1) = 0; \quad (7.15c)$$

$$x(1) = \frac{1}{2}. \quad (7.15d)$$

Trata-se de uma adaptação de um problema variacional (GELFAN e FOMIN, 1963, p. 61) com descontinuidade na derivada da função $x(\cdot)$.

A solução analítica do Problema (7.15) pode ser obtida, ou via teoria de controle ótimo, ou via cálculo variacional, como:

$$x(\tau) = \begin{cases} 0 & -1 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ \tau - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} < \tau \leq 1 \end{cases} \quad u(\tau) = \begin{cases} 0 & -1 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < \tau \leq 1 \end{cases}$$

Note que o controle ótimo $u(\cdot)$ possui uma descontinuidade em $\tau = \frac{1}{2}$, que coincide com uma descontinuidade na derivada primeira de $x(\cdot)$.

Como nos exemplos anteriores, soluções numéricas são obtidas através do problema acessório, ou seja, minimizando-se o seguinte funcional, associado ao vínculo diferencial (7.15b):

$$\text{Min } I[x] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\dot{x}(\tau) - u(\tau)]^2 d\tau, \quad (7.16a)$$

$$x(-1) = 0. \quad (7.16b)$$

Note que neste caso o problema difere um pouco dos exemplos anteriores, quando as funções de controle eram admitidas contínuas.

Agora, para suportar descontinuidades no controle, a divisão em N elementos é aplicada, não apenas ao problema variacional acessório (7.16), mas também ao funcional objetivo (7.15a). Assim, sejam para o estado e para o controle as aproximações:

$$\hat{x}^e(\tau) = \alpha_{e-1} N_1(\tau) + \alpha_e N_2(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, N; \quad (7.17a)$$

onde $N_1(\cdot)$, $N_2(\cdot)$ e τ_e são conforme (7.3), e

$$\hat{u}_e(\tau) = \beta_e, \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, N. \quad (7.17b)$$

que representa uma aproximação constante por elemento para o controle.

Considerando as aproximações (7.17), pode-se reescrever, como aproximação para (7.15):

$$\text{Min } J[\beta] = \sum_{e=1}^N \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e} \{[\alpha_{e-1} N_1(\tau) + \alpha_e N_2(\tau)] (1 - \beta_e)\}^2 d\tau, \quad (7.18a)$$

$$\text{sujeito a } \alpha_N = \frac{1}{2}, \quad (7.18b)$$

onde $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]$ é a solução do problema variacional acessório:

$$\text{Min } I[\alpha] = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e} \left[(\alpha_e - \alpha_{e-1}) \frac{N}{2} - \beta_e \right]^2 d\tau, \quad (7.19)$$

com $\alpha_0 = 0$.

Com a solução da integrais em (7.19), obtêm-se:

$$\text{Min } I[\alpha] = \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N \left[\frac{N^2}{4} (\alpha_e - \alpha_{e-1})^2 - N(\alpha_e - \alpha_{e-1})\beta_e + \beta_e^2 \right] \quad (7.20)$$

onde $\alpha_0 = 0$.

O Problema (7.20) está, segundo a programação matemática, possuindo como condições necessárias:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_e} = 0, \quad e = 1, \dots, N \quad (7.21)$$

Após algumas manipulações, obtém-se como solução das equações (7.21):

$$\alpha_e = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^e \beta_i; \quad e = 1, \dots, N. \quad (7.22)$$

Por outro lado, a solução das integrais em (7.18), fornece:

$$\text{Min } J[\beta] = \frac{2}{N} \sum_{e=1}^N \left[\frac{1}{3} (\alpha_{e-1}^2 + \alpha_{e-1}\alpha_e + \alpha_e^2) (1 - \beta_e)^2 \right] \quad (7.23a)$$

$$\text{sujeito a } \alpha_N = \frac{1}{2}. \quad (7.23b)$$

onde $\alpha_e = \alpha_e(\beta)$.

Com a substituição de (7.22) em (7.23), obtém-se:

$$\text{Min } J[\beta] = \frac{2}{N} \sum_{e=1}^N \left[\frac{1}{3} \left[\sum_{i=1}^{e-1} \beta_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{e-1} \beta_i \sum_{i=1}^e \beta_i \right] + \left[\sum_{i=1}^e \beta_i \right]^2 \right] (1 - \beta_e)^2 \quad (7.24a)$$

$$\text{sujeito a } \frac{N}{2} \sum_{i=1}^N \beta_i = \frac{1}{2}; \quad (7.24b)$$

que representa um problema de programação matemática com uma restrição de igualdade.

Resolvendo-se o Problema (7.24) obtém-se como solução:

$$(N = 1) \quad u = \begin{cases} 0.25 & -1 \leq \tau \leq 1 \end{cases}$$

$$(N = 2) \quad u = \begin{cases} -0.0893 & -1 \leq \tau \leq 0 \\ 0.5893 & 0 < \tau \leq 1 \end{cases}$$

$$(N \geq 4) \quad u = \begin{cases} 0 & -1 \leq \tau \leq 1/2 \\ 1 & 1/2 < \tau \leq 1 \end{cases}$$

$$(N = 1) \quad x = \begin{cases} 0.25\tau + 0.25 & -1 \leq \tau \leq 1 \end{cases}$$

$$(N = 2) \quad x = \begin{cases} -0.0893\tau - 0.0893 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 0.5893\tau - 0.0893 & 1 < \tau \leq 2 \end{cases}$$

$$(N \geq 4) \quad x = \begin{cases} 0 & -1 \leq \tau \leq 0.5 \\ \tau - 0.5 & 0.5 < \tau \leq 1 \end{cases}$$

Note que, para $(N \geq 4)$, as soluções numéricas coincidem com a solução analítica.

A Fig. 7.4 ilustra a convergência para a variável de estado $x(\cdot)$.

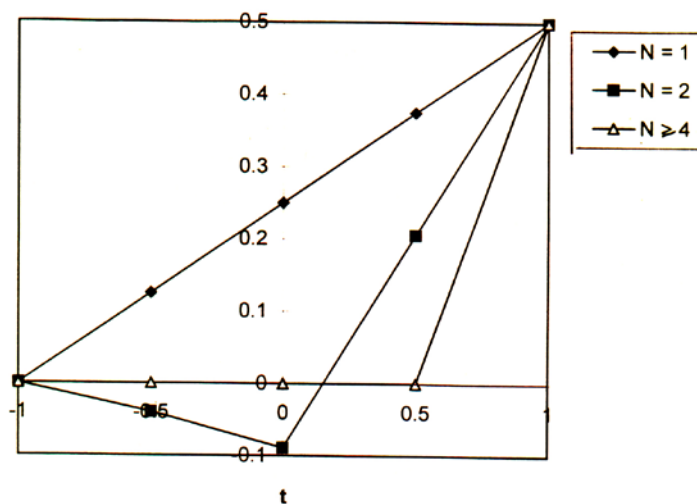


Fig. 7.4: Resultados para $x(\cdot)$.

7.5 Comentários

i) Nos três problemas resolvidos fica evidente a convergência das soluções numéricas para as soluções analíticas na medida em que se aumenta o número de elementos. No caso em que a aproximação adotada permitiu a obtenção da solução exata, isto se manifesta com a coincidência das soluções numéricas a partir de um valor particular de N ($N = 4$ no terceiro exemplo).

ii) Observe que, exceto no terceiro exemplo, onde existe a presença de descontinuidade no vetor de controle, adotou-se, para a variável de controle, uma única aproximação sobre todo o domínio da solução, sem a divisão em elementos. Isto é típico na busca de soluções subótimas.

iii) Note que, considerando (7.19) no terceiro exemplo, tem-se:

$$\hat{x}_e(\tau) = \frac{N}{2}(\alpha_e - \alpha_{e-1}) = \beta_e = \dot{u}_e(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, N.$$

iv) Portanto, o problema acessório leva, neste caso, de forma independente do funcional objetivo, a uma satisfação exata do vínculo diferencial

v) Deve-se observar que a aplicação do procedimento é facilitada quando é possível obter uma solução explícita do problema acessório ($\alpha = \alpha(\beta)$), conforme ocorreu no primeiro e terceiro exemplos.

CAPÍTULO 8

PROBLEMAS COMPLEMENTARES

8.1 Introdução

Para ilustrar outros aspectos relacionados ao funcional do tipo mínimos quadrados, neste capítulo são resolvidos dois problemas complementares.

No primeiro utiliza-se a formulação variacional do tipo mínimos quadrados na determinação numérica da trajetória de um oscilador harmônico com um grau de liberdade, cujo movimento não fornece um mínimo para o funcional obtido via formulação Lagrangeana, embora a trajetória física seja uma solução estacionária do mesmo. Este problema exemplifica a utilização do procedimento como uma formulação variacional alternativa para problemas descritos por equações diferenciais ordinárias.

O movimento do sistema massa-mola é obtido utilizando as duas formulações - via Lagrangeana e via mínimos quadrados - recorrendo-se em ambos os casos ao método de Ritz.

O segundo exemplo trata-se de um problema de controle ótimo onde estão presentes descontinuidades no controle e que possui, dentro do contexto do cálculo de variações, mínimos fracos, os quais geram mínimos locais no problema parametrizado.

8.2 Análise da determinação do movimento de um oscilador harmônico

8.2.1 Formulação do problema

Considere um oscilador harmônico com um grau de liberdade consistindo de uma mola de constante k em cuja extremidade está conectada uma massa m . De acordo com a Segunda Lei de Newton, o movimento da massa será descrito pela equação diferencial:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (8.1)$$

onde $x(\cdot)$ denota a trajetória da massa.

Por integração da equação (8.1) é fácil obter para o deslocamento da massa:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (8.1b)$$

onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ representa a velocidade angular de oscilação e A e B constantes que dependem das condições iniciais.

Uma forma alternativa de descrição do movimento é através da formulação Lagrangeana da Mecânica Analítica, onde o movimento da massa corresponde à solução estacionária do seguinte funcional:

$$J[x] = \int_{t_0}^T \left[\frac{m}{2} \dot{x}(\tau)^2 - \frac{k}{2} x(\tau)^2 \right] d\tau. \quad (8.2)$$

sendo o integrando em (8.2) a função Lagrangeana do sistema, ou seja, a diferença entre a energia cinética e a energia potencial. De fato, é muito fácil confirmar que (8.1b) representa a solução estacionária de (8.2).

O fato da solução estacionária de (8.2) coincidir com a trajetória do sistema físico é conhecido na literatura como Princípio de Hamilton. Alguns autores (MEIROVITCH, 1967;

GOLDSTEIN, 1950) interpretam e utilizam o Princípio de Hamilton como um princípio de mínimo significando que (8.1b) minimiza (8.2). Neste caso, o Princípio de Hamilton é referido como “Princípio de Hamilton de Ação Mínima”. Esta ideia representa a base para todos os procedimentos que se baseiam na aplicação do Método de Ritz a problemas físicos formulados segundo a função Lagrangeana.

Acontece que o Princípio de Hamilton não é sempre um princípio de mínimo, ou seja, nem sempre a solução estacionária da formulação Lagrangeana, ou sua formulação Hamiltoniana correspondente (KEITH, 1982), fornece um mínimo para o funcional. De fato, este aspecto é explorado por Smith (1974) que, usando o Problema (8.1) como contra-exemplo, mostra que (8.1b) com as condições iniciais $x_0 = 0$ e $\dot{x}_0 = v_0$, ou seja

$$\bar{x}(\tau) = \frac{v_0}{w} \sin(w\tau)$$

fornece um mínimo para (8.2) se, e somente se, for respeitada a relação:

$$(T - t_0)^2 < \frac{10}{w^2} \quad (8.3)$$

Assim, como mostra Smith (1974), o Princípio de Hamilton não é, necessariamente, um princípio de mínimo.

Isto pode ser confirmado a partir da seguinte solução alternativa, apresentada em Smith (1974):

$$\bar{x}(\tau) = \frac{v_0}{w} \sin(w\tau) + \frac{C}{T^2} (t^2 - tT) \quad (8.4)$$

onde C denota uma constante real positiva arbitrária.

De fato, como pode ser facilmente verificado, no caso de não valer (8.3), a substituição de (8.4) em (8.2a), fornece um valor para $J[x]$ menor que o fornecido pela solução estacionária correspondente:

$$x(\tau) = \frac{v_0}{w} \sin(w\tau)$$

Isto representa um aspecto muito relevante na aplicação do Método de Ritz ao tratamento de problemas físicos. Primeiro, pela inconsistência teórica presente nos problemas em que a solução estacionária não minimiza a Lagrangeana. Segundo, porque nestes casos poderá ocorrer ou divergência ou falsa convergência da solução numérica.

Para explorar um pouco mais este aspecto, no próximo item o movimento do oscilador harmônico é obtido numericamente utilizando dois procedimentos diferentes: i) aplicando o Método de Ritz ao funcional (8.2); ii) aplicando o Método de Ritz ao funcional de mínimos quadrados obtido a partir da equação diferencial do movimento.

8.2.2 Solução numérica via formulação Lagrangeana

Para aplicar o Método de Ritz ao funcional (8.2), dentro do contexto do Método de Elementos Finitos, é interessante escrever o seguinte problema:

$$\text{Min } I = \frac{T}{2N} \int_0^N \left[\frac{mN^2}{T^2} \dot{x}(\tau)^2 - kx^2 \right] d\tau, \quad (8.5a)$$

sujeito a

$$x(t_0) = 0, \quad (8.5b)$$

$$x(T) = \frac{V_0}{w} \sin(wT), \quad (8.5c)$$

onde

$$\tau \stackrel{\Delta}{=} N \frac{t}{T}$$

representa um tempo normalizado e

$$\dot{x}(\tau) = \frac{dx(\tau)}{d\tau} = \frac{dx(t)}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{T}{N} \dot{x}(t).$$

O Problema (8.5) foi montado segundo a forma “Problema Mais Simples do Cálculo de Variações” (GELFAND e FOMIN, 1963) e a condição terminal (8.5c) foi escolhida de modo a termos $\dot{x}_0 = v_0$.

Para a variável $x(\cdot)$, considere a seguinte aproximação:

$$\hat{x}^e(\xi) = \alpha_{e-1}(1-\xi) + \alpha_{e\xi} \quad e = 1, \dots, N \quad (8.6)$$

onde, para cada valor de e , temos:

$$\xi = \tau - (e-1), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, N. \quad (8.7)$$

$$\tau_e \stackrel{\Delta}{=} e, \quad e = 0, 1, \dots, N. \quad (8.8)$$

Note que ξ representa uma variável temporal local normalizada, ou seja, enquanto τ , sobre o e -ésimo elemento, varia de $e-1$ até e , ξ varia de 0 a 1.

Com a divisão em elementos e a aproximação (8.6), o Problema (8.5) pode ser reescrito como:

$$\text{Min } I = \frac{T}{2N} \sum_{e=1}^N \int_0^1 \left[\frac{mN^2}{T^2} [\alpha_e - \alpha_{e-1}]^2 - k [\alpha_{e-1}(1-\xi) + \alpha_{e\xi}]^2 \right] d\xi, \quad (8.9a)$$

sujeito a

$$\alpha_0 = 0 \quad (8.9b)$$

$$\alpha_N = \frac{V_0}{w} \sin(wT) \quad (8.9c)$$

Procedendo as integrais presentes em (8.9a) e incorporando (8.9b) e (8.9c), obtemos:

$$\begin{aligned} I = & \frac{T}{2N} \left[\left(\frac{mN^2}{T^2} - \frac{k}{3} \right) \alpha_N^2 - \left(\frac{2mN^2}{T^2} + \frac{k}{3} \right) (\alpha_N \alpha_{N-1}) \right. \\ & \left. + \sum_{e=1}^{N-1} 2 \left(\frac{mN^2}{T^2} - \frac{k}{3} \right) \alpha_e^2 - \left(\frac{2mN^2}{T^2} + \frac{k}{3} \right) \sum_{e=2}^{N-1} \alpha_{e-1} \alpha_e \right]. \end{aligned} \quad (8.10)$$

A forma mais natural de minimizar a função (8.9) é através de busca direta utilizando algum algoritmo de programação matemática. Outra alternativa seria através da solução das condições necessárias para minimizar (8.9), ou seja, resolvendo as equações:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_e} = 0, \quad e = 1, \dots, N-1,$$

que, após desenvolvimento algébrico, leva ao sistema de equações lineares:

$$\alpha_1 + K\alpha_2 = 0 \quad (8.11a)$$

$$K\alpha_{e-1} + \alpha_e + K\alpha_{e+1} = 0 \quad e = 2, \dots, N-1 \quad (8.11b)$$

$$K\alpha_{N-2} + \alpha_{N-1} = -2K \sin(4) \quad (8.11c)$$

onde

$$K = \frac{-\left(\frac{2mN^2}{T^2} + \frac{k}{3}\right)}{4\left(\frac{mN^2}{T^2} - \frac{k}{3}\right)}.$$

No caso da desigualdade (8.3) ser respeitada, qualquer uma das alternativas (técnica direta ou técnica indireta) pode ser aplicada. Se, porém, (8.3) é violada, somente a técnica indireta pode ser utilizada. Além disso, se (8.9) não possui mínimo, a aplicação do Método de Ritz perde o significado, ainda que a solução numérica convirja para a solução estacionária de (8.2).

Como ilustração, considere:

$$m = 8, \quad k = 2, \quad t_0 = 0, \quad T = 8, \quad v_0 = 1$$

o que, levado em (8.10), fornece

$$\text{Min } J = \left[\frac{(6N^2 - 32)}{3N} (\sin 4)^2 - \frac{6N^2 + 16}{3N} (\sin 4) \alpha_{N-1} + \sum_{e=1}^{N-1} \frac{(3N^2 - 16)}{3N} \alpha_e^2 - \sum_{e=2}^{N-1} \frac{(8 + 3N^2)}{3N} \alpha_{e-1} \alpha_e \right] \quad (8.12)$$

Para os valores acima a condição (8.3) é violada, de forma que a extremante para (8.2) não representa o mínimo para o funcional e a minimização de (8.12) não levará a uma aproximação para o movimento do oscilador. De fato, através da derivada segunda, é possível obter para J a seguinte matriz Hessiana:

$$H = \frac{\Delta}{\partial \alpha^2} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & 0 & \dots \\ K_2 & K_1 & K_2 & 0 & \dots \\ 0 & K_2 & K_1 & K_2 & 0 & \dots \\ & & \dots & & & \\ \dots & 0 & K_2 & K_1 & K_2 & \\ & \dots & 0 & K_2 & K_1 & \end{bmatrix}$$

sendo $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}]$ $K_1 = \frac{3N^2 - 16}{3N}$ $K_2 = \frac{3N^2 - 40}{3N}$.

É possível confirmar que a Hessiana acima é indefinida, o que significa que a função (8.12) não é limitada nem inferiormente, nem superiormente. Isto significa que apenas métodos indiretos podem ser utilizados.

Dentro da filosofia do método indireto, as equações (8.11) foram resolvidas para $N = 2, 4, 8, 16$ e 32 elementos. Os valores encontrados para $x(\cdot)$ estão mostrados na Tabela 8.1.

Tabela 8.1: Valores para o deslocamento $x(\cdot)$

t	N=2	N=4	N=8	N=16	N=32	Analítico
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.5000	0.4730	0.4772	0.4926	0.4980	0.4957	0.4948
1.0000	0.9460	0.9544	0.9852	0.9653	0.9502	0.9586
1.5000	1.4190	1.4316	1.3597	1.3728	1.3654	1.3633
2.0000	1.8920	1.9087	1.7340	1.6954	1.6911	1.6829
2.5000	2.3650	1.9768	1.9849	1.9131	1.9023	1.8980
3.0000	2.8380	2.0449	2.0667	2.0125	1.9998	1.9950
3.5000	3.3110	2.5901	1.9849	1.9874	1.9712	1.9680
4.0000	3.7840	2.1814	1.9032	1.8394	1.8201	1.8186
4.5000	3.1218	1.7822	1.5927	1.5776	1.5503	1.5561
5.0000	2.4596	1.3829	1.2831	1.2182	1.2013	1.1969
5.5000	1.7974	0.9837	0.8191	0.7835	0.7704	0.7633
6.0000	1.1352	0.5843	0.3550	0.3003	0.2931	0.2822
6.5000	0.4730	0.0595	-0.152	-0.202	0.2140	0.2160
7.0000	-0.189	-0.465	-0.658	-0.691	-0.698	-0.702
7.5000	-0.851	-0.989	-1.086	-1.137	-1.140	-1.143
8.0000	-1.514	-1.514	-1.514	-1.514	-1.514	-1.514

Não obstante a solução estacionária não fornecer um mínimo, as soluções numéricas convergem para a trajetória do oscilador, conforme ilustra a Fig. 8.1.

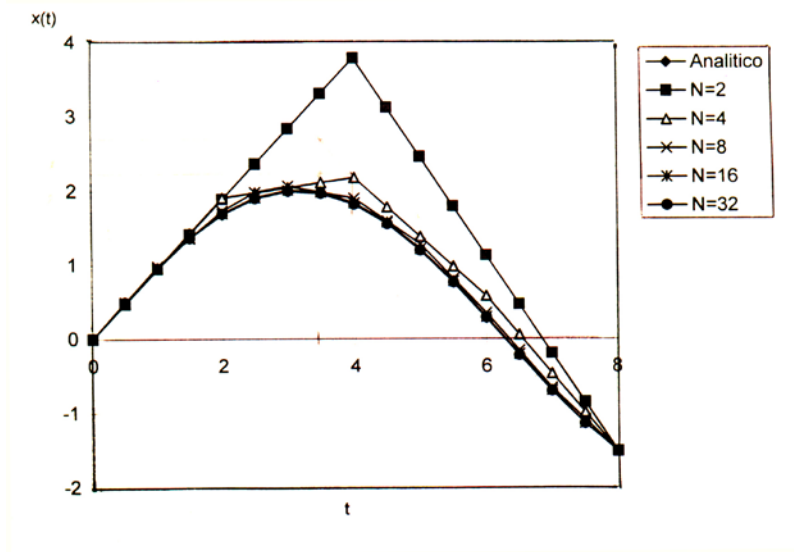


Fig. 8.1: Convergência das soluções numéricas

8.2.3 Solução numérica via funcional do tipo mínimos quadrados

Definindo as variáveis $x_1 \stackrel{\Delta}{=} x(\cdot)$ e $x_2 \stackrel{\Delta}{=} \dot{x}(\cdot)$, pode-se reescrever o Problema (8.1) na seguinte forma de estado:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (8.13a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 \quad (8.13b)$$

$$x_1(t_0) = 0 \quad (8.13c)$$

$$x_2(t_0) = v_0 \quad (8.13d)$$

De acordo com o Teorema 3, o Problema (8.13) pode ser substituído pelo seguinte problema variacional:

$$\text{Min } I = \frac{1}{2} \int_0^T [\dot{x}_1 - x_2]^2 + \left[\dot{x}_2 + \frac{k}{m} x_1 \right]^2 dt \quad (8.14a)$$

$$x_1(t_0) = 0; \quad (8.14b)$$

$$x_2(t_0) = v_0. \quad (8.14c)$$

Já que, de acordo com o Teorema 3, a formulação (8.14) preserva a existência de um mínimo absoluto, a sua resolução numérica pode ser efetuada via Método de Ritz, obtendo-se um problema de programação matemática que pode ser resolvido tanto por métodos diretos quanto indiretos.

Semelhantemente ao que foi realizado para a formulação Lagrangeana, obtém-se, após a normalização total do tempo e a divisão em N elementos:

$$\text{Min } I = \frac{T}{2N} \sum_{e=1}^N \int_0^1 \left[\frac{N}{T} \dot{x}_1(\xi) - x_2(\xi) \right]^2 + \left[\frac{N}{T} \dot{x}_2(\xi) + \frac{k}{m} x_1(\xi) \right]^2 d\xi. \quad (8.15)$$

Adotando-se para as variáveis dinâmicas, aproximações lineares na forma:

$$\hat{x}_1^e(\xi) = \alpha_{e-1}(1 - \xi) + \alpha_e \xi \quad e = 1, \dots, N \quad (8.16a)$$

$$\hat{x}_2^e(\xi) = \gamma_{e-1}(1 - \xi) + \gamma_e \xi \quad e = 1, \dots, N \quad (8.16b)$$

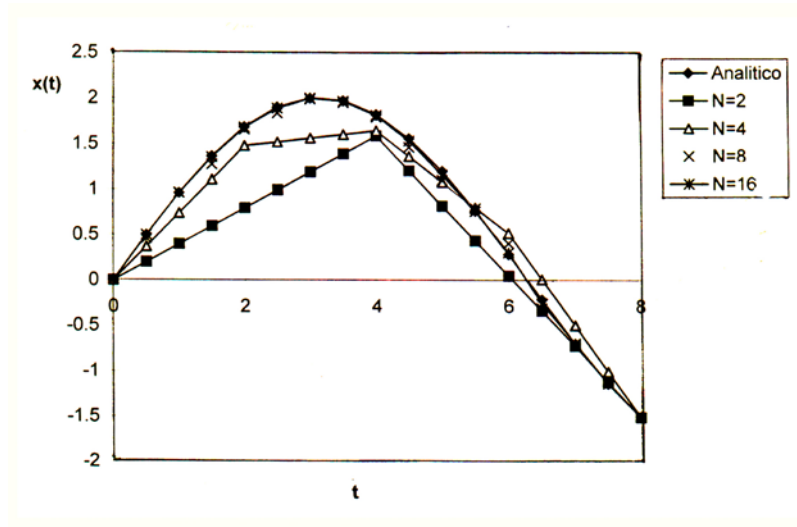
obtem-se, após algumas manipulações, no lugar de (8.15):

$$\begin{aligned} \text{Min } I = & \sum_{e=1}^N \left[\left(\frac{N}{2T} + \frac{k^2 T}{6N} \right) (\alpha_e^2 + \alpha_{e-1}^2) + \left(-\frac{N}{T} + \frac{k^2 T}{6N} \right) \alpha_e \alpha_{e-1} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{T}{6N} + \frac{m^2 N}{2T} \right) (\gamma_e^2 + \gamma_{e-1}^2) - \frac{1}{2} (\gamma_e \gamma_{e-1}) (\alpha_e \alpha_{e-1}) + \frac{mk}{2} (\gamma_e \gamma_{e-1}) (\alpha_e + \alpha_{e-1}) \right] \end{aligned} \quad (8.17)$$

Considerando que α_0 e γ_0 são fixos, conforme determinam (8.14b) e (8.14c), as condições necessárias para a solução de (8.17) fornecem:

$$\begin{aligned} 4K_1\alpha_1 + K_4\alpha_2 + K_6\gamma_2 - K_6 &= 0 \\ K_4\alpha_e + 4K_1\alpha_{e+1} - K_6\gamma_2 + K_6\gamma_{e+2} + K_3\alpha_{e+2} &= 0, \quad e = 1, \dots, N-3; \\ K_3\alpha_{N-2} + 4K_1\alpha_{N-1} - K_6\gamma_{N-2} + K_3\alpha_N + K_6\gamma_N &= 0 \\ 4K_2\gamma_1 + K_4\gamma_2 - K_6\alpha_2 + K_4 &= 0 \\ K_6\alpha_2 - K_6\alpha_{e+2} + K_4\gamma_2 + 4K_2\gamma_{e+1} + K_4\gamma_{e+2} &= 0, \quad e = 1, \dots, N-3; \\ K_6\alpha_{N-2} + K_4\gamma_{N-2} + 4K_2\gamma_{N-1} - K_4\gamma_N + K_6\alpha_N &= 0 \end{aligned}$$

onde

Fig. 8.2: Evolução de $x(\cdot)$

8.3 Problema com descontinuidade no vetor de controle

Considere o seguinte problema de otimização:

$$\text{Min } J[u] = \frac{1}{2} \int_0^2 [6u(\tau)^4 - 14u(\tau)^3 + 9u(\tau)^2] d\tau, \quad (8.18a)$$

sujeito a

$$\dot{x}(\tau) = u(\tau), \quad \tau \in [0, 2]; \quad (8.18b)$$

$$x(0) = 0, \quad (8.18.c)$$

$$x(2) = 1. \quad (8.18.d)$$

Trata-se da formulação de controle ótimo de um problema variacional estudado por Oliveira (1983), que o adotou como um contra-exemplo na utilização das condições de quina de Weirstrass-Erdmann.

A solução ótima para o Problema (8.18) pode ser obtida como sendo:

$$u(\tau) = \begin{cases} 0.0629 & 0 \leq \tau \leq 1.1601 \\ 1.1037 & 1.1601 \leq \tau \leq 2 \end{cases}$$

$$x(\tau) = \begin{cases} 0.0629\tau & 0 \leq \tau \leq 1.1601 \\ 1.1037\tau - 1.2075 & 1.1601 < \tau \leq 2 \end{cases}$$

Note que a lei de controle ótimo possui uma descontinuidade para $\tau = 1.1601$, provocando uma quina no estado.

Um aspecto peculiar deste problema é o fato dele possuir soluções de mínimo fraco, na forma:

$$u(\tau) = \begin{cases} a & 0 \leq \tau \leq t_1 \\ b & t_1 < \tau \leq 2 \end{cases} \quad (8.19)$$

onde, para cada escolha de t_1 , a e b são obtidos a partir das equações:

$$\begin{aligned} 12a^3 - 21a^2 + 9a + \nu &= 0, \\ 12b^3 - 21b^2 + 9b + \nu &= 0, \\ t_1 a + (2 - t_1)b &= 1. \end{aligned}$$

A melhor das soluções de mínimo fraco ocorre para $t_1 = 1.1601$, que corresponde à solução de mínimo forte (8.19).

Soluções numéricas para o Problema (8.18) foram encontradas através da metodologia apresentada no Cap. 6, adotando-se para o estado aproximações lineares do tipo:

$$\hat{x}^e(\tau) = \alpha_{e-1} N_1(\tau) + \alpha_e N_2(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \dots, N$$

e, para o controle, aproximações constantes por elemento na forma:

$$\hat{u}_e(\tau) = \beta_e \quad e = 1, \dots, N \quad (8.20b)$$

onde

$$N_1(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\tau_e - \tau}{\tau_e - \tau_{e-1}}, \quad N_2(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\tau - \tau_{e-1}}{\tau_e - \tau_{e-1}}, \quad \tau_e \stackrel{\Delta}{=} 2 \frac{e}{N}.$$

Com as aproximações adotadas pode-se reescrever o Problema (8.18) como:

$$\text{Min} \quad J[\beta_e] = \frac{2}{N} \sum_{e=1}^N [6\beta_e^4 - 14\beta_e^3 + 9\beta_e^2] \quad (8.21a)$$

sujeito a

$$\alpha_N(\beta) = 1, \quad (8.21b)$$

sendo que os vínculos (8.18b) e (8.18c) são substituídos pelo problema acessório:

$$\text{Min } I[\alpha] = \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N \left[\frac{N^2}{4} (\alpha_e - \alpha_{e-1})^2 - N(\alpha_e - \alpha_{e-1})u_e + u_e^2 \right], \quad (8.21c)$$

sujeito a

$$\alpha_0 = 0. \quad (8.21d)$$

O problema (8.21c) - (8.21d) é equivalente ao Problema (7.19) do Cap. 7, cuja solução já foi obtida como:

$$\alpha_e = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^e \beta_i \quad e = 1, \dots, N; \quad (8.22)$$

que resolve de forma exata o vínculo diferencial (8.18b).

Por outro lado, a substituição de (8.22) em (8.21b) fornece:

$$\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \beta_i = 1.$$

Com isto tem-se que resolver o problema de programação matemática:

$$\text{Min } J[\beta_e] = \frac{2}{N} \sum_{e=1}^N [6\beta_e^4 - 14\beta_e^3 + 9\beta_e^2] \quad (8.23a)$$

sujeito a

$$\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \beta_i = 1; \quad (8.23b)$$

cujas condições necessárias fornecem:

$$12(\beta_e)^3 - 21(\beta_e)^2 + 9(\beta_e) + \nu = 0, \quad e = 1, \dots, N;$$

onde ν representa o multiplicador de Lagrange associado ao vínculo (8.23b).

É possível demonstrar que as variáveis β_e ($e = 1, \dots, N$) podem assumir no máximo três valores, dependentes de ν , os quais, por sua vez, são reduzidos a dois, por se tratar um deles de um máximo local. Assim, podemos adotar na solução numérica, para cada N , sem perda de generalidade, dois valores possíveis para β_e , o primeiro para $e = 1, \dots, q$ e o segundo para $e = q + 1, \dots, N$. Em outras palavras, o controle ótimo será do tipo:

$$\beta_e = \begin{cases} a, & e = 1, \dots, q; \\ b, & e = q + 1, \dots, N. \end{cases}$$

onde a e b são obtidos das equações

$$12(a)^3 - 21(a)^2 + 9(a) + \nu = 0$$

$$12(b)^3 - 21(b)^2 + 9(b) + \nu = 0$$

$$\frac{2q}{N}a + \left(2 - \frac{2q}{N}\right)b = 1$$

sendo que os valores de a , b , ν e q dependem de N , e

$$t_1 = \frac{2q}{N}.$$

Os valores ótimos para a , b e q foram obtidos para $N = 1, 2, 4, 8, \dots, 64$ (conforme Tabela 8.3), levando aos resultados abaixo:

$$(N = 1) \quad u = \{1/2 \quad x = \begin{cases} \tau & 0 \leq \tau \leq 2 \\ 2 & \end{cases}$$

$$(N = 2, 4, 8) \quad u = \begin{cases} 0 & \\ 1 & \end{cases} \quad x = \begin{cases} 0 & 0 \leq \tau \leq 1 \\ \tau - 1 & 1 < \tau \leq 2 \end{cases}$$

$$(N = 16) \quad u = \begin{cases} 0 & \\ 1.1429 & \end{cases} \quad x = \begin{cases} 0 & 0 \leq \tau \leq 1.125 \\ 1.1429\tau - 1.2857 & 1.125 < \tau \leq 2.0 \end{cases}$$

$$(N = 32) \quad u = \begin{cases} 0.0665 & \\ 1.1336 & \end{cases} \quad x = \begin{cases} 0.0665\tau & 0 \leq \tau \leq 1.1875 \\ 1.1336\tau - 1.2672 & 1.1875 < \tau \leq 2 \end{cases}$$

$$(N = 64) \quad u = \begin{cases} 0.0609 & \\ 1.1017 & \end{cases} \quad x = \begin{cases} 0.0609\tau & 0 \leq \tau \leq 1.15625 \\ 1.1017\tau - 1.2034 & 1.15625 < \tau \leq 2 \end{cases}$$

N	a	b	q
1	0.0000	0.0000	-
2, 4, 8	0.0000	1.0000	1, 2, 4
16	0.0000	1.1429	9
32	0.0665	1.1336	19
64	0.0609	1.1017	37

Tabela 8.3: Valores numéricos ótimos para o controle

Exceto para $N = 1$, que, na verdade, representa uma situação degenerada, incluída aqui apenas por questões didáticas, todas as soluções numéricas obtidas correspondem a uma solução de mínimo fraco do Problema (8.18). Isto pode ser confirmado comparando-se os resultados com as expressões (8.19).

Note que a solução numérica ótima é a mesma para $N = 2, 4$ e 8 (vide Fig. 8.3), assumindo, porém, valores diferentes para $N > 8$. Esta característica particular do Problema (8.18) ilustra um aspecto delicado na obtenção de soluções numéricas, já que, no caso, poderia indicar falsamente uma solução limite. Na verdade, a solução para $N = 2$ representa um mínimo absoluto para $N = 2, 4$ e 8 , porém, representa apenas um mínimo local para valores subsequentes de N .

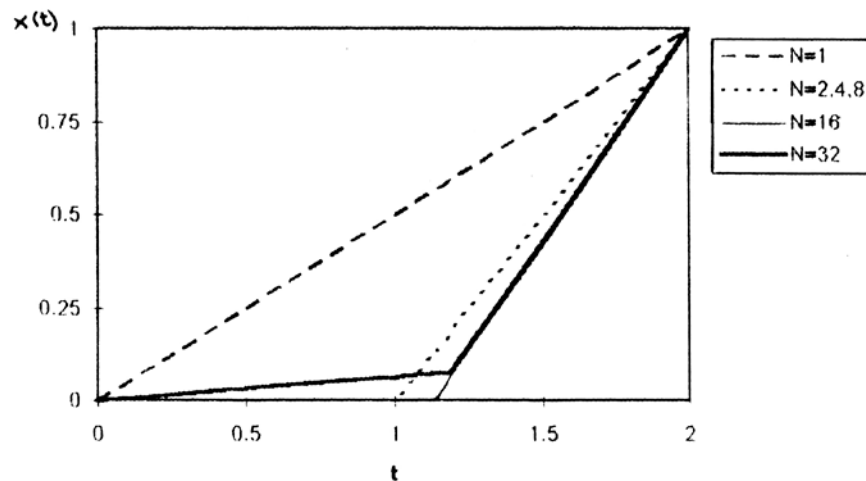


Fig. 8.3: Soluções numéricas para $x(\cdot)$

8.4 Comentários

- i) As equações de Euler-Lagrange para o funcional do tipo mínimos quadrados (8.14a) fornecem

$$\ddot{x}_1 - \frac{k^2}{m^2} x_1 - \left(1 + \frac{k}{m}\right) \dot{x}_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 - x_2 - \left(1 + \frac{k}{m}\right) \dot{x}_1 = 0.$$

- ii) Note que estas equações não coincidem com as equações (8.13a) e (8.13b), embora ambas possuam a mesma solução. Esta característica, já mencionada anteriormente, é que dá ao funcional de mínimos quadrados o *status* de penalização exata.
- iii) De um modo diferente, o funcional obtido via função Lagrangeana fornece como condição necessária exatamente a equação (8.1). Entretanto, a extremante não fornece um mínimo para o funcional. Assim, não obstante a solução estacionária do problema parametrizado convirja para a solução estacionária analítica, a aplicação do Método de Ritz, o qual foi desenvolvido baseado na minimização sobre espaços lineares de dimensão finita (GELFAND e FOMIN, 1963, Cap. 8), fica descaracterizada. Isto inclusive explica a divergência no caso de resolução do Problema (8.9) via métodos diretos.
- iv) A convergência da solução numérica para o caso do funcional obtido via função Lagrangeana pode ser entendida do ponto de vista dos “Métodos de Resíduos Ponderados”. De fato, é fácil verificar que a adoção de um método indireto, no caso da função Lagrangeana, na verdade, trata-se de uma aplicação do Método de Galerkin (vide FLETCHER, 1984, Cap. 1).
- v) Como já mencionado no início do capítulo, o segundo problema ilustra um aspecto muito interessante na obtenção de soluções numéricas. Trata-se da existência de mínimos locais no problema parametrizado, os quais, por sua vez, estão relacionados com a existência de mínimos fracos no problema original (GELFAND e FOMIN, 1963). Deve ser observado, contudo, que estes mínimos locais aparecem no funcional objetivo, e não no problema acessório.

CAPÍTULO 9

CONCLUSÕES

9.1 Comentários finais

- i) Conforme comentado no Cap.3, o Teorema 2 apresenta um caráter original em relação aos resultados sobre existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias disponíveis na literatura. Em alguns livros texto (WALTMAN, 1986; SIMMONS, 1991) relaxa-se a continuidade de $\frac{\partial F}{\partial x}(\cdot)$ em relação a todos os seus argumentos, porém preserva-se a continuidade da função $F(\cdot)$. Diferentemente, no Teorema 2, se de um lado relaxa-se apenas a continuidade de $\frac{\partial F}{\partial x}(\cdot)$ em relação à variável independente, de outro, relaxa-se a continuidade de $F(\cdot)$ em relação à variável independente.
- ii) Conforme já comentado anteriormente, para a prova do Teorema 4 foi necessária a utilização de resultados da Teoria de Controle Ótimo (Apêndice B). Resultados teóricos do Cálculo Variacional, correspondentes a uma apresentação das equações de Euler-Lagrange na forma integral (Apêndice A), só foram efetivos para a demonstração do Teorema 3, mais restritivo que o Teorema 4.
- iii) Vale a pena lembrar que o problema variacional acessório, embora construído em substituição a um problema de valor inicial, pode ser utilizado independentemente das

restrições de contorno, as quais, sob este enfoque, podem representar qualquer forma de acoplamento.

- iv) Embora a ênfase deste trabalho seja o tratamento de problemas de controle ótimo, a formulação de mínimos quadrados proposta pode ser utilizada também no tratamento numérico de sistemas físicos descritos por equações diferenciais ordinárias. Isto pode ser interessante para os casos onde não é possível, ou é muito trabalhosa, a obtenção da formulação variacional via problema inverso do cálculo de variações.
- v) Se, por um lado, a solução do problema inverso do cálculo de variações apresenta dificuldades quando o operador em questão não for auto-adjunto, por outro, o funcional do tipo mínimos quadrados, mesmo nesta situação, pode ser obtido facilmente. Além disso, o funcional de mínimos quadrados possui valor mínimo absoluto nulo, atingível somente pela solução do problema original e não possui mínimos espúrios no caso de funções de classe C^1 .
- vi) Na metodologia apresentada no Capítulo 6, as discontinuidades do controle só são permitidas nas junções dos elementos, o que representa uma limitação em relação à solução ótima, a qual pode sofrer discontinuidade em qualquer instante t . Entretanto, é de se esperar que esta limitação fique menos restritiva quanto maior for o número de elementos. Além disso, nos trechos em que é contínuo, o controle deve ter sua derivada contínua. Isto também não deve representar uma limitação importante se considerarmos que o procedimento não impede que ocorram discontinuidades nas derivadas do controle nas junções, ainda que o controle propriamente dito permaneça contínuo nestas junções.
- vii) Conforme ilustrou a presença de mínimos locais relacionados com mínimos fracos no Problema 8.18, a análise de convergência de procedimentos numéricos para a solução de problemas de controle ótimo (ou de problemas variacionais) pode apresentar sérias dificuldades.

9.2 Conclusões

- i) O Método dos Mínimos Quadrados, dentro do contexto do Método dos Elementos Finitos, pode ser utilizado como uma alternativa para a solução numérica de problemas de controle ótimo. Neste caso, o funcional de mínimos quadrados pode ser utilizado como uma formulação variacional alternativa para as restrições diferenciais, na forma de um problema variacional acessório, independentemente das restrições de contorno do problema.
- ii) Para o caso de funções de classe C^1 , o funcional de mínimos quadrados não possui mínimos espúrios, ou seja, seu valor mínimo absoluto, a saber, zero, é atingido sobre, e somente sobre, a solução do problema original.
- iii) A equivalência entre as soluções do problema variacional acessório e o problema de valor inicial (Teorema 4) foi demonstrada a partir de um teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias (Teorema 2) que, em alguns aspectos, amplia os resultados encontrados na literatura de equações diferenciais.
- iv) Pelo menos no caso de equações diferenciais ordinárias, que é o escopo do presente trabalho, as condições necessárias da teoria de controle ótimo se mostraram mais efetivas do que aquelas do cálculo variacional.
- v) A técnica de Mínimos Quadrados, como uma alternativa para a solução numérica de problemas de controle ótimo, possui o aspecto positivo da garantia da existência de um valor mínimo absoluto para o funcional. Por outro lado, pode exigir um algebrismo mais acentuado e pode levar a problemas de programação matemática de grande porte (um aspecto comum nas técnicas do tipo elementos finitos).
- vi) Visto como uma alternativa para o problema inverso do cálculo de variações, a técnica de mínimos quadrados pode ser utilizada no tratamento numérico de sistemas físicos, com as vantagens da facilidade de construção (inclusive para operadores não auto-adjuntos), garantia de existência de mínimo e o conhecimento a priori do valor mínimo para o funcional.

- vii) Em comparação com a formulação Lagrangeana, a técnica de mínimos quadrados tem a desvantagem de necessitar do prévio conhecimento das equações governantes do sistema. Entretanto, na formulação Lagrangeana, nem sempre o funcional atinge valor mínimo sobre a trajetória física.

9.3 Sugestões

Como sugestões para desenvolvimentos futuros, pode-se mencionar:

- i) A utilização da presente metodologia na resolução de problemas reais. É de se esperar que, nestes casos, se possa avaliar melhor a aplicabilidade do procedimento e, em particular, a questão do algebrismo envolvido e do porte do problema parametrizado.
- ii) A generalização da classe de problemas de controle ótimo tratada pelo procedimento, prevendo-se, por exemplo, a presença de restrições não-diferenciais ou restrições de contorno múltiplo.
- iii) A extensão do procedimento para o caso de problemas envolvendo mais de uma variável independente, ou seja, problemas com a dinâmica descrita por equações diferenciais parciais (na terminologia de controle chamados de “problemas com parâmetros distribuídos”).

9.4 Síntese

Apresentou-se uma formulação variacional alternativa para sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais ordinárias. Esta formulação, por sua vez, permitiu o desenvolvimento de uma metodologia para a resolução numérica de problemas de controle ótimo que consiste na substituição dos vínculos diferenciais presentes nestes problemas por um problema variacional denominado “problema variacional acessório”. O problema variacional acessório é construído a partir do resíduo das equações diferenciais com um funcional do tipo mínimos quadrados. Respeitadas hipóteses bastante razoáveis para problemas reais, a formulação variacional não introduz mínimos espúrios, e sabe-se que, sobre a solução ótima, o funcional deve se anular. Com a parametrização do problema via Método dos Elementos Finitos, as equações diferenciais são naturalmente tratáveis pelo

Método de Ritz, levando a um problema de programação matemática. A metodologia pode ser aplicada também para a determinação numérica de trajetórias de sistemas físicos.

REFERÊNCIAS

- Alliney, Stefano. *On the numerical solution of constrained variational problems by boundary an finite elements. Appl. Math. Modelling* 6(6): 424-430, 1982.
- Bampi, F., Morro, A. *The Inverse Problem of the Calculus of Variations Applied to Continuum Physics. J. of Mathematical Physic*, 23(12): 2312-2321, 1982.
- Bryson Jr., A.E.; Yu-Chi Ho; Dreyfus, S.E. *Applied Optimal Control*. New York, John Wiley & Sons, 1975.
- Casas, Eduardo. *Finite element approximations for some state-constrained optimal control problems. Mathematics of the analysis and design of process control*, 293-301, 1991.
- Chang, Sung Kag; *Galerkin approximations of Riccati operators arising in the boundary controls for hiberbolic systems. Buli. Korean Math. Soc.*, 25(2): 185-194, 1988.
- Chen, Goong; Mills, Wenderll H., Jr. *Finite elements and terminal penalization for quadratic cost optimal control problems governed by ordinary differential equations. SIAM J. Control Optim.* 19(6): 744- 764, 1981.
- Crandall, S.H. *Engineering Analysis*. New York, McGraw-Hill, 1956.
- Cronin, J. *Differential Equations Introduction and Qualitative Theory*. New York, 1981.
- Dinh Nho Hao. *Approximating an optimal control problem of quantum processes by the finite element method. Acta Math. Vietnam* 12(2): 135-146, 1987.
- Dontchev, Asen L. *A dual Ritz method for solving optimal control problems with equality state constraints. EE Arch. Automat. Telemeck.* 23(1,2): 37- 44, 1978.

Douglas, J. *Trans. Am. Math. Soc.* (50)71, 1941.

Fletcher, C.A.J. *Computational Galerkin Methods* University of Sidney - Austrália, 1984.

Finlayson, B.A. *The Method of Weighted Residual and Variational Principles, with application in fluid mechanics, heat and mass transfer.* New York, Academic Press, 1972.

Freitas Pinto, R.L.U. de. *Estudo da Solução de Problemas de Controle Ótimo na Forma de Bolza pelo método dos elementos finitos.* (Tese de Mestrado) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 1982.

Freitas Pinto, R.L.U. de. *Dedução das condições necessárias para a solução de problemas de controle ótimo com dinâmica fracionada e restrições não-diferenciais.* (Tese de Doutorado) - INPE, São José dos Campos, 1991.

Gelfand, I.M.; Fomin, S.V. *Calculus of variations traduzido por R.A. Silverman.* Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1963.

Goldstein, H., *Classical Mechanics* Addison-Wesley, 1950.

Gorchakov, V. N.; Sineglazovm V. M. *On the strictness of the application of the Galerkin method in control problems.* *Kibernetika (Kiev)*, (6): 103- 105, 1986.

Hargraves, C.R.; Paris, S.W. *Direct Trajectory Optimization Using Nonlinear Programming and Collocation.*, In: *Astrodynamics Conference, Williamsburg V.A.*, August 18-20, 1986. (AIAA Paper A86-47901).

Hestenes, M.R. *Calculus of variations and optimal control theory.* New York, John-Wiley Sons., 1966.

Ince, E. L. *Ordinary Differential Equations* New York, Dover, 1956.

Keith, R. Symon, *Mecânica.* Editora Campus Ltda, Rio de Janeiro, 1982.

Lasiecka, Irena. *Ritz-Galerkin approximation of the time optimal boundary control problem for parabolic system with Dirichlet boundary conditions.* *SIAM J. Control Optim.*, (22): 477-500, 1984.

Luenberger, D.G. *Introduction to Dynamic Systems. Theory, Models and Applications.* John Willey & Sons, New York, 1979.

Lynn, L. L.; Parkin, E. S.; Zaradnick, R. L. *Near-optimal control by trajectory approximation.* *SBA: Ind. Eng. Chem. Fund.*, (9): 58-62, 1970.

Mackenroth, U. *Numerical solution of some parabolic boundary control problems by finite elements.* *Control problems for systems described by partial differential equations and applications*, 263-273, 1986.

Madeira, Fernando. *Guiagem e controle não linear subótimo de veículos lançadores de satélites em malha fechada e em tempo quase real.* (Tese de Doutorado), ITA, São José dos Campos, 1996.

- Meirovitch, L. *Analytical Methods in Vibrations*. Macmillan, London, 1967.
- Miller, R.K.; Michel, A.N. *Ordinary Differential Equations*. Academic Press, 1992.
- Nakamichi, J.; Washizu, K. *Application of the finite element method to an optimal control problem*. *International J. for Numerical Meth. Engineering*, (12):1559-1579, 1978a.
- Nakamichi, J.; Washizu, K. *A direct approach using finite element method for the solution of the linear optimal control problem with a quadratic criterion*. *J. of the Franklin Institute*, 306(4): 309-319, 1978b.
- Nakamichi, J.; Washizu, K. *An application of the finite element method to an optimal trajectory problem*. *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.*, (12): 118-127, 1978c.
- Oliveira, A.M. *The adjoint of a nonlinear operator and the inverse problem of the calculus of variations*. *Mat. Apl. Comput.*, 5(3): 293-300, 1986.
- Oliveira, M.C. *Condições necessárias e condições suficiente de mínimo fraco para soluções com pontos angulosos* (Tese de livre docência), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1983.
- Pascual-Sánchez, J.F. *General solution of inverse problem of the calculus of variations: the theorem of Tonti* *Rev. Canaria Cieri.*, (3)1: 45-64, 1991.
- Pereira, A.K.A.; *Solução Numérica de Problemas de Controle Ótimo com Restrições de Contorno Duplo e Restrições Não-Diferenciais pelo Método dos Sub-Domínios*. (Dissertação de Mestrado), UFMG, Belo Horizonte, 1994.
- Pontryagin, L.S. *Ordinary differential equations*. (traduzido por L. Kacinskas e W. B. Counts). Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1962a.
- Pontryagin, L.S.; Boltyanskii, V.G.; Gamkrelidze, R.V.; Mishchenko, E.F. *The Mathematical Theory of Optimum Process*. (traduzido por K. N. Trirogoff, ed. por L. W. Neustadt). New York, Interscience Publishers, 1962b.
- Rao, K.C.; Prabhu, S.S.; Mehta, S.C. *Optimal Control of Linear Distributed Parameter Systems by Finite-Element Galerkin's Technique*. *Optimal Control Appl. Methods* 3, (1): 67-77, 1982A.
- Rao, K.C.; Prabhu, S.S.; Mehta, S.C. *Optimal Control of Nonlinear Distributed Parameter Systems by a Finite-Element Collocation Technique*. *Optimal Control Appl. Methods* 3, (1): 79-90, 1982b.
- Sagan, H. *Introduction to the Calculus of Variations*. McGraw - Hill Book Company, New York, 1969.
- Santilli, R.M. *Annals Physical*, New York, (103): 354, 1977.
- Sheela, B.V. *Optimal control via programming*, *J. Guidance Control*, (4)4: 443-444, 1981.
- Smith, D. R. *When is Hamilton's Principle an Extremum Principle?* *AIAA Journal*, (12): 1573-1576, 1974.

- Simmons, George. *Differential equations with applications and historical notes*. McGraw-Hill, New York, 1991.
- Sirisena, H. R.; Chou, F. S. *Convergence of the control parameterization Ritz method for nonlinear optimal control problems*. *J. Optim. Theory Appl.*, 29(3): 369-382, 1979.
- Stepankova, O. *The local inverse problem of the calculus of variations in higher order Hamiltonian mechanics*. *Proceedings of the conference on differential geometry and its applications* (2): 275-287, 1984.
- Stryk, Oscar von; *Numerical solution of optimal control problems by direct collocation Optimal control*, 129-143, 1991.
- Tabak, D.; Kuo, B.C. *Optimal Control by Mathematical Programming*. Prentice-Hall, N. J., 1971.
- Tapley, B.B.; Lewallen, I.M. *Comparison of numerical optimization methods*. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1(1): 1-32, 1967.
- Tonti, Enzo. *Inverse problem: its general solution Differential geometry, calculus of variations, and their applications*, 497-510, 1985.
- Troitzsch, Fredi. *Semidiscrete Ritz-Galerkin approximation of nonlinear parabolic boundary control problems*. *Control Optimal*, 57-68, 1991.
- Vainberg, M.M. *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*, Holden-Day, San Francisco, 1964.
- Waltman, P. *A Second Course in Elementary Differential Equations*. Academic Press, Emory University, Atlanta, 1986.
- Zaradnick, R. L.; Parkin, E. S. *Computing Methods in Optimization Problems*. Academic Press, New York, 1967.
- Xing, A.Q.; Chen, Z.H.; Wang, C.L.; Yao, Y.Y. *Exact Penalty Function Approach to Constrained optimal control problems*. *Optimal Control Applications & Methods*, (10): 173-180.

APÊNDICE A

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS NA FORMA INTEGRAL PARA PROBLEMAS VARIACIONAIS

A.1 Introdução

A fim de viabilizar a prova do Teorema 3 via cálculo variacional, conforme realizada no item 4.3, neste apêndice transcreve-se as condições necessárias apresentadas por Sagan (1969), as quais aparecem na forma integral supondo-se funções de classe C^1 .

Embora a forma mais comumente adotada na literatura do cálculo de variações para as condições necessárias seja a forma diferencial (GELFAND e FOMIN, 1963), estas são obtidas supondo-se funções de classe C^2 , o que as torna inapropriadas para o desenvolvimento realizado no item 4.3.

Os resultados aparecem na forma de dois teoremas e um corolário. O primeiro teorema apresenta as equações de Euler-Lagrange na forma integral. O segundo trata das condições de transversalidade para problemas com contorno móvel. O corolário recupera a forma diferencial para as equações de Euler-Lagrange a partir da forma integral.

Para facilitar a compreensão, a notação foi compatibilizada àquela dos capítulos precedentes.

A.2 Condições necessárias de primeira ordem para problemas variacionais

TEOREMA A.1 (Conforme SAGAN, 1969, p. 51):

Considere o seguinte problema variacional:

Minimizar

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_f} f[t, x(t), \dot{x}(t)] dt \quad t \in [t_0, t_f] \quad (\text{A.1a})$$

sujeito a

$$x(t_0) = x_0 \quad (\text{A.1b})$$

$$x(t_f) = x_f \quad (\text{A.1c})$$

onde $f(\cdot) \in C^1$.

Para que $\hat{x}(\cdot) \in C_{sp}^1$ seja um mínimo relativo¹ para o Problema (A.1), é necessário que exista uma constante C tal que a equação íntegro-diferencial

$$\frac{\partial f[t, x(t), \dot{x}(t)]}{\partial \dot{x}} = \int \left[\frac{\partial f[y, x(y), \dot{x}(y)]}{\partial x} \right] dy + C \quad (\text{A.2})$$

seja satisfeita para $x(\cdot) = \hat{x}(\cdot)$ para todo $t \in [t_0, t_f]$, exceto sobre os pontos onde $\hat{x}(\cdot)$ possui descontinuidades.

A equação (A.2) representa a equação de Euler-Lagrange para o funcional (A.1) na forma integral.

TEOREMA A.2 (Conforme SAGAN, 1969, p. 72 e 73):

Se a função $x(\cdot) = \hat{x}(\cdot) \in C_{sp}^1$, é um mínimo relativo para

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_f} f[t, x(t), \dot{x}(t)] dt \quad t \in [t_0, t_f]$$

¹ Por funções de classe entende-se funções contínuas com derivadas de primeira ordem contínuas por partes.

onde $f \in C^1$. Iniciando-se em $t = t_0$ sobre a curva, $\varphi(\cdot)$, com $x(t_0) = \varphi(t_0)$ e terminando em $t = t_f$ sobre a curva $\phi(\cdot)$ com $x(t_f) = \phi(t_f)$, onde $\varphi(\cdot)$ e $\phi(\cdot)$ são funções contínuas e diferenciáveis, então é necessário que $x(\cdot) = \hat{x}(\cdot)$ satisfaça a equação de Euler-Lagrange na forma integral (A.2) no intervalo $[t_0, t_f]$, e que, além disso, nos pontos terminais, sejam satisfeitas as seguintes condições de transversalidade:

$$\left. \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} \right|_{t_0} [\varphi'(t_0) - \hat{x}'(t_0)] + f(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{x}'(t_0)) = 0 \quad (\text{A.3a})$$

$$\left. \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} \right|_{t_f} [\phi'(t_f) - \hat{x}'(t_f)] + f(t_f, \hat{x}(t_f), \hat{x}'(t_f)) = 0 \quad (\text{A.3b})$$

Nos casos onde um dos pontos terminais é fixo, deve ser utilizada apenas a condição de transversalidade para o outro ponto.

COROLÁRIO (Conforme SAGAN, 1969, p. 52):

Se $\hat{x}(\cdot) \in C^1$ minimiza o funcional (A.1a) sobre as condições apresentadas no Teorema A.1, então é necessário que $\hat{x}(\cdot)$ satisfaça a equação diferencial:

$$\frac{\partial f[t, x(t), \dot{x}(t)]}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f[t, x(t), \dot{x}(t)]}{\partial \dot{x}} = 0, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (\text{A.4})$$

de modo que a forma diferencial para (A.2) pode ser obtida diretamente sem nenhuma consideração adicional.

APÊNDICE B

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO

B.1 Introdução

Este apêndice apresenta o conjunto de condições necessárias para problemas de controle ótimo com dinâmica fracionada, conforme Freitas Pinto (1991).

B.2 Formulação do problema de controle ótimo com dinâmica fracionada

Considere o problema de controle ótimo de encontrar valores ótimos para

$$(y^e(\cdot)(e = 1, \dots, N + 1); v^e(\cdot)(e = 1, \dots, N + 1); \tau_0; \tau_1; \dots; \tau_{N+1}; q),$$

a saber,

$$(x^e(\cdot)(e = 1, \dots, N + 1); v^e(\cdot)(e = 1, \dots, N + 1); t_0; t_1; \dots; t_{N+1}; p),$$

tais que

$$h_0[x^1(t_0); x^1(t_1); \dots; x^{N+1}(t_N); x^{N+1}(t_{N+1}); t_0; t_1; \dots; t_{N+1}; p] \quad (B.1a)$$

corresponda a um mínimo, com:

$$h_i[x^1(t_0); x^1(t_1); \dots; x^{N+1}(t_N); x^{N+1}(t_{N+1}); t_0; t_1; \dots; t_{N+1}; p] = 0, \quad i = 1, \dots, n_h \quad (B.1b)$$

e

$$\dot{x}^e(\tau) = f^e[x^e(\tau); u^e(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \dots, N + 1; \quad (B.1c)$$

onde:

$$t_e \in \delta_e \subset E^1, \quad e = 0, 1, \dots, N + 1;$$

$$p \in Q \subset E^{n_p};$$

$$x^e(\tau) \in Y^e \subset E^{n_x}, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \dots, N + 1;$$

$$u^e(\tau) \in V^e \subset E^{n_u}, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \dots, N + 1;$$

$$h_i : E^{2n_x+1} \times \dots \times E^{2n_x+N+1} \times E^{N+2} \times E^{n_p} \mapsto E^1, \quad i = 0, 1, \dots, n_h;$$

$$f^e = [f_1; \dots; f_{n_x}] : E^{n_x} \times E^{n_u} \times E^1 \mapsto E^{n_x}, \quad e = 1, \dots, N + 1;$$

sendo $\delta_e (e = 0, 1, \dots, N + 1)$, $Y^e (e = 1, \dots, N + 1)$, $V^e (e = 1, \dots, N + 1)$, e Q , conjuntos abertos.

É conveniente observar que aqui está sendo considerada uma sequência de $N + 1$ intervalos de tempo, de maneira que os instantes $t_e (e = 0, 1, \dots, N + 1)$ estão em ordem crescente. Para cada intervalo $[t_{e-1}, t_e]$ há um vetor de estado

$$x^e(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [x_1^e(\cdot); \dots; x_{n_{x_e}}^e(\cdot)],$$

e um vetor de controle

$$u^e(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [u_1^e(\cdot); \dots; u_{n_u}^e(\cdot)],$$

sendo que os vetores de estado, ou os vetores de controle, de intervalos distintos, têm suas dimensões próprias, não necessariamente iguais.

Condições de regularidade para os vetores de estado $x^e(\cdot) (e = 1, \dots, N + 1)$, para os vetores de controle $u^e(\cdot) (e = 1, \dots, N + 1)$, e para as funções $h_i (i = 0, 1, \dots, n_h)$ e $f_j^e (j = 1, \dots, n_{x_e}; e = 1, \dots, N + 1)$, ficarão estabelecidas através das hipóteses que serão explicitadas adiante.

B.3 Hipóteses

Com relação ao problema (B.1), adota-se:

i) Os instantes $t_e (e = 0, 1, \dots, N + 1)$ satisfazem as desigualdades:

$$t_{e-1} < t_e, \quad e = 1, \dots, N + 1;$$

ii) $x_i^e(\cdot) (i = 1, \dots, n_{x_e}; e = 1, \dots, N + 1)$ devem ser funções contínuas para todo

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \dots, N + 1;$$

iii) $u_j^e(\cdot) (j = 1, \dots, n_{u_e}; e = 1, \dots, N + 1)$ devem ser funções contínuas por partes, para todo

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \dots, N + 1;$$

- iv) As funções $h_i (i = 0, 1, \dots, n_h)$, $f_j^e (j = 1, \dots, n_{x^e}; e = 1, \dots, N + 1)$ e suas derivadas parciais primeiras, estão definidas e são todas contínuas em relação a todos os seus argumentos, nos domínios considerados.

B.4 Condições necessárias

TEOREMA B.1 (Conforme FREITAS PINTO, 1991, p. 112, 113 e 114):

Respeitadas as Hipóteses (i) (iv), para que

$$(x^e(\cdot) (e = 1, \dots, N + 1); u^e(\cdot) (e = 1, \dots, N + 1); t_0; t_1; \dots; t_{N+1}; p)$$

forneçam um mínimo local (conforme Definição 6.1 em FREITAS PINTO, 1991, p. 111) para o problema (B.1), devem existir multiplicadores

$$v_0, \quad v = [v_1; \dots; v_{n_h}],$$

e funções vetoriais

$$\lambda^e(\cdot) = [\lambda_1^e(\cdot); \dots; \lambda_{n_{x^e}}^e(\cdot)], \quad e = 1, \dots, N + 1;$$

tais que se verifiquem:

I:

$$v_0 + |v| \neq 0, \quad v_0 \in \{0, 1\}; \quad (B.2a)$$

II: $\lambda_1^e(\cdot) (i = 1, \dots, n_{x^e}; e = 1, \dots, N + 1)$ são funções contínuas para todo

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \dots, N + 1;$$

com:

$$\lambda^e(\tau) = - \left[\frac{\partial F^e}{\partial x^e} \right]' \lambda^e(\tau), \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \dots, N + 1; \quad (B.2b)$$

$$\lambda^e(t_{e-1}) = \sum_{i=0}^{n_h} v_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^e(t_{e-1})} \right]', \quad e = 1, \dots, N + 1; \quad (B.2c)$$

$$\lambda^e(t_e) = - \sum_{i=0}^{n_h} v_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^e(t_e)} \right]', \quad e = 1, \dots, N + 1; \quad (B.2d)$$

III:

$$\left[\frac{\partial f^e}{\partial u^e} \right]' \lambda^e(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \dots, N+1; \quad (B.2e)$$

IV:

$$\sum_{i=0}^{n_h} v_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial p} \right]' = 0; \quad (B.3f)$$

V: As funções

$$H^e(\tau) = \sum_{i=1}^{\Delta n_x^e} \lambda_i^e(\tau) \dot{x}_i^e(\tau), \quad e = 1, \dots, N+1; \quad (B.2g)$$

são contínuas para todo

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e];$$

$$\sum_{i=0}^{n_h} v_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^1(t_0)} \right] \dot{x}^1(t_0) + \frac{\partial h_i}{\partial t_0} \right\} = 0; \quad (B.2h)$$

$$\sum_{i=0}^{n_h} v_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^e(t_e)} \right] \dot{x}^e(t_e) + \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^{e+1}(t_e)} \right] \dot{x}^{e+1}(t_e) + \frac{\partial h_i}{\partial t_e} \right\} = 0; \quad e = 1, \dots, N; \quad (B.2i)$$

$$\sum_{i=0}^{n_h} v_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^{N+1}(t_{N+1})} \right] \dot{x}^{N+1}(t_{N+1}) + \frac{\partial h_i}{\partial t_{N+1}} \right\} = 0. \quad (B.2j)$$

Conforme Freitas Pinto (1991, p. 131), considerando as expressões (B.2b) e (B.2c), as equações (B.2h), (B.2i) e (B.2j) podem ser manipuladas e reescritas na seguinte forma alternativa:

$$\left[\lambda^1(t_0) \right]' \dot{x}^1(t_0) + \sum_{j=0}^{n_h} v_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial t_0} \right] = 0;$$

$$\left[\lambda^{e+1}(t_e) \right]' \dot{x}^{e+1}(t_e) - \left[\lambda^e(t_e) \right]' \dot{x}^e(t_e) + \sum_{j=0}^{n_h} v_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial t_e} \right] = 0;$$

$$-\left[\lambda^{N+1} \right]' \dot{x}^{N+1} + \sum_{j=0}^{n_h} v_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_{N+1})} \right] = 0;$$