

Laboratório de Controle de Processos Industriais (LCPI)  
Departamento de Engenharia Eletrônica, Universidade Federal de Minas Gerais  
Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901 Belo Horizonte, MG Brasil  
Fone: +55 3409-4866 - Fax: +55 3409-4850

---

# **Avaliação de Desempenho Baseada em Variância Mínima de Controladores para Malha de pH**

---

**Guilherme Ferreira Trezza Knop**

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

**Orientador:** Prof. Fábio Gonçalves Jota, PhD

Belo Horizonte, 04 de março de 2011

Dedico à minha querida mãe, Dona Vandinha, por todo seu amor aos filhos,  
incentivo incondicional à nossa educação e confiança total em nossas escolhas

---

# Agradecimentos

---

Toda grande conquista é fruto de uma boa história. Toda boa história é formada por pessoas importantes às quais devemos nossos sinceros agradecimentos. Agradeço primeiramente à Deus, que me direcionou neste caminho e foi a base para superar todos os obstáculos. Aos professores Henor, Marccone e Ricardo Duarte, que foram fundamentais na minha formação e, além disso, contribuíram muito para o meu ingresso na pós-graduação. Ao grande amigo Wylliam, pelas informações iniciais sobre o mestrado, pelas longas conversas e pelo companheirismo. Ao amigos Tarcísio e Fred, pela recepção em Belo Horizonte e por tornarem a convivência mais humana na “cidade grande”. À Luciana, minha amiga de todas as horas, pelas conversas, desabafos e boas risadas. À todos amigos da UFMG, pelos conselhos, companheirismo e compartilhamento de experiências, em especial a: Danilo, Alípio, Alexandre, Welbert, Álvaro, Colatina, Baiano, Marlon, Scola, Thamara e Fabrício. Um agradecimento especial ao meu orientador Fábio Gonçalves Jota, por todos ensinamentos durante esses dois anos, pela paciência com as minhas limitações e perguntas recorrentes, pela dedicação e idéias para este trabalho e pelas lições de vida transmitidas em cada encontro. À todos os alunos do LCPI por toda ajuda e atenção. Sou grato também ao Johnathas, pelo trabalho realizado na planta de pH e pelo o auxílio fundamental na realização deste trabalho. Ao amigo Júlio Cesar, por me ajudar na compra e preparação dos reagentes. Às secretárias da pós-graduação, pelo pronto atendimento às minhas solicitações. À CAPES pelo financiamento deste trabalho. Ao professor Oriane pelas boas conversas, sempre muito produtivas. Aos amigos de Ouro Preto e São João Nepomuceno. À Flaviane, pela compreensão, carinho e por enriquecer de forma especial a parte final desta caminhada. Ao meu irmão Marcelo, por toda assistência e por servir de estímulo

para essa conquista. Ao meu pai Milton, pelos ensinamentos mais simples da vida. À minha mãe Vanda, essa sim, responsável maior por toda a minha educação, por acreditar, financiar, incentivar, estimular todos os meus passos desde os tempos do “pé de feijão”, ainda na educação básica. Sem mais, dedico à ela mais essa conquista.

"A adversidade desperta em nós capacidades que,  
em circunstâncias favoráveis, teriam ficado adormecidas."

(Quinto Horácio Flaco)

---

# Sumário

---

<b>Resumo</b>	<b>viii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Abreviações</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	3
1.3 Avaliação de Desempenho . . . . .	3
1.3.1 Métodos de Avaliação de Desempenho . . . . .	5
1.3.2 Avaliação de Desempenho de Malhas de Controle Não-Lineares .	12
1.4 Conclusão . . . . .	17
1.5 Estrutura da Dissertação . . . . .	17
<b>2 Descrição da Planta de pH</b>	<b>18</b>
2.1 Introdução . . . . .	18
2.2 Características gerais . . . . .	18
2.2.1 Comportamento não-linear do processo de pH . . . . .	19
2.3 Descrição da Planta-Piloto . . . . .	21

2.3.1	Bomba Peristáltica . . . . .	23
2.4	Modelagem do Processo de pH . . . . .	24
2.4.1	Equação a diferenças do processo . . . . .	27
2.4.2	Estimação de parâmetros e do tempo morto . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Avaliação de Desempenho de Malhas de Controle Não-Lineares</b>	<b>41</b>
3.1	Introdução . . . . .	41
3.2	Estimação da Variância Mínima . . . . .	41
3.2.1	Estimação da Variância Mínima pelo Método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) . . . . .	44
3.2.2	Estimação da Variância Mínima pelo Erro de Predição Ótimo . . . . .	48
3.2.3	Estimação da Variância Mínima pelo Resíduo do Modelo . . . . .	56
3.3	Efeitos na Estimação da Variância Mínima . . . . .	65
3.3.1	Relativo à alteração do modelo . . . . .	65
3.3.2	Relativo às configurações do estimador . . . . .	69
3.3.3	Relativo às perturbações no sistema . . . . .	71
3.4	Conclusão . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Análise dos Resultados Experimentais</b>	<b>75</b>
4.1	Introdução . . . . .	75
4.2	Controladores Utilizados . . . . .	75
4.2.1	GPC - ( <i>Generalized Predictive Control</i> ) . . . . .	75
4.2.2	Controlador PI . . . . .	76
4.3	Resultados Experimentais . . . . .	77
4.3.1	Controlador GPC . . . . .	77
4.3.2	Controlador PI . . . . .	85
4.4	Conclusão . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Conclusões e Considerações Finais</b>	<b>90</b>
5.1	Considerações Gerais . . . . .	90
5.2	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	92
	<b>Bibliografia</b>	<b>101</b>

<b>A Teoria da Predição Ótima</b>	<b>102</b>
<b>B Mínimos Quadrados Multi-Modelos</b>	<b>106</b>
<b>C Estimação da Variância Mínima por (Desborough e Harris, 1992)</b>	<b>110</b>
<b>D Estimação da Variância Mínima para um Sistema Linear</b>	<b>113</b>

---

# Resumo

---

Este trabalho tem por finalidade avaliar o desempenho de um sistema de controle não-linear. São descritos os detalhes operacionais e dinâmicos de uma planta de controle de pH. O ganho desse sistema varia não-linearmente com o ponto de operação, além de ser bem sensível a outros parâmetros como a concentração dos reagentes. Para o diagnóstico dessa malha de controle, utiliza-se um índice que relaciona a variância mínima teórica de um processo com sua variância atual. Denomina-se esse método como Índice de Variância Mínima. A variância mínima de um processo real não é facilmente determinável. Basicamente, é função do tempo morto, que, no sistema de controle de pH, não é constante e depende de algumas condições operacionais. Mesmo assim, define-se um valor único para tempo morto para o malha de pH, analisando criticamente essa escolha. Em seguida, estima-se a variância mínima por três métodos distintos. O primeiro método é definido por (Desborough e Harris, 1992); o segundo baseia-se no erro cometido pela predição; e o terceiro é proposto neste trabalho e refere-se à determinação de uma representação do ruído e estimação do sistema. Os métodos são comparados e submetidos a algumas análises diante das alterações do modelo escolhido, características do estimador e ocorrência de perturbações. Os resultados para cada uma das situações são utilizados para verificar as influências da não-linearidade em cada uma das estimativas. Em seguida, esses valores são empregados para calcular o Índice de Variância Mínima. Compara-se o desempenho de um controlador adaptativo com um controlador de parâmetros fixos em um mesmo ponto de operação. O índice é analisado e enumeram-se algumas considerações a respeito das conclusões obtidas.

**Palavra-chave:** avaliação de desempenho; sistema não-linear; controle pH; variância mínima.

---

# Abstract

---

This work aims to assess the performance of a nonlinear control system. The operational and dynamic details of a pH control plant are described. The system gain changes nonlinearly on operational conditions, besides that it exhibits sensibility about other parameters like reagent concentration. The control system performance assessment is provided by a ratio of a minimum variance performance lower bound with the actual variance. This method is named as Minimum Variance Index. The minimum variance performance lower bound are hardly described. Basically, depends upon time delay, that is not constant over the operation conditions of the pH system. Nevertheless, having the notion of limitatins, a unique value of time delay is chosen for all operation setpoints of pH control. Before that, the minimum variance is estimated by three different methods. The first one is described by (Desborough e Harris, 1992); the second is based on the prediction error defined by difference between system outuput and its predictor. The last one is based on noise determination and on parameters estimation. The methods are compared by experiments changes at configurations like model structure, estimator parameters and disturbance on the system. Results are analized to investigate the influence of nonlinearty at each estimation. Then, this estimation are implement to calculate the Minimum Variance Index. The performance of an adaptive controller and PI controller are compared by the analysis of the index, and finally, the conclusions are discussed.

**Keywords:** control performance assessment; nonlinear system; pH control; minimum variance.

---

# Lista de Figuras

---

1.1	Componentes característicos da avaliação de desempenho, . . . . .	4
2.1	Gráfico de titulação de um processo de pH para base forte/ácido forte. . .	20
2.2	Ilustração do processo de controle de pH. . . . .	22
2.3	Diagrama P&I da malha de controle de pH . . . . .	23
2.4	Dados para estimação dos parâmetros e do tempo morto em torno do pH 8,5. . . . .	33
2.5	Gráfico da função custo $J$ em função das ordens $n$ do modelo da estrutura (2.17) do MMLS para dados do pH 8,5. . . . .	34
2.6	Dados para estimação dos parâmetros e do tempo morto em torno do pH 6. . . . .	36
2.7	Gráfico da função custo $J$ em função das ordens $n$ do modelo da estrutura (2.17) do MMLS para dados do pH 6. . . . .	37
2.8	Dados para estimação dos parâmetros e do tempo morto em torno do pH 7. . . . .	38
2.9	Gráfico da função custo $J$ em função das ordens $n$ do modelo da estrutura (2.17) do MMLS para dados do pH 7. . . . .	39
3.1	Resposta do controlador GPC para a malha de controle em torno do pH 9.	45
3.2	Variação do Índice de Variância Mínima ( $\eta$ ), Equação 1.7, em função da ordem do modelo AR para o pH 9 para o método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) não-recursivo. . . . .	46
3.3	Resposta do controlador GPC para a malha de controle em torno do pH 4.	47

3.4	Variação do Índice de Variância Mínima ( $\eta$ ), Equação 1.7, em função da ordem do modelo AR para o pH 4 para o método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) não-recursivo. . . . .	47
3.5	Predição de $pH(k)$ com o preditor (3.6) para pH 7. . . . .	50
3.6	Parâmetros do modelo (2.16) para pH 7 e JTA=200 amostras. . . . .	51
3.7	Predição de $pH(k)$ com o preditor (3.6) para pH 9. . . . .	52
3.8	Predição de $pH(k)$ com o preditor (3.6) para pH 4. . . . .	52
3.9	Predição de $pH(k)$ com o preditor (3.8) para pH 7. . . . .	53
3.10	Parâmetros do modelo (3.7) para pH 7 e JTA=200 amostras. . . . .	54
3.11	Predição de $pH(k)$ com o preditor (3.8) para pH 9. . . . .	55
3.12	Predição de $pH(k)$ com o preditor (3.8) para pH 4. . . . .	55
3.13	Generalização de um processo em malha aberta. . . . .	57
3.14	Desenho esquemático da planta de pH em malha aberta. . . . .	58
3.15	Simulação de $pH'(k)$ com os parâmetros estimados em cada amostragem para pH 7 para o modelo (3.7). . . . .	59
3.16	Distúrbio adicionado ao sistema considerando modelo (3.11) para pH 7. . . . .	60
3.17	Representação do 'ruído branco' $\xi_{(k)}$ do sistema para pH 7. . . . .	60
3.18	Função de autocorrelação normalizada de $\xi_k$ . . . . .	61
3.19	Comportamento dos coeficientes de $E(z^{-1})$ durante a estimação. . . . .	63
3.20	Comparação do perfil dos coeficientes de $E(z^{-1})$ estimados em cada amostragem (—) com o perfil referente à uma simples heurística (—). . . . .	64
3.21	Variação do Índice de Variância Mínima ( $\eta$ ), Equação 1.7, em função da ordem do modelo AR para o pH 7 para o método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) não-recursivo. . . . .	66
3.22	Comparação das estimações da VM para o modelo (2.16) e da $\hat{\sigma}_{pH}^2$ com JTA=200 amostras. . . . .	67
3.23	Comparação das estimações da VM para o modelo (3.7) e da $\hat{\sigma}_{pH}^2$ com JTA=200 amostras. . . . .	68
3.24	Simulação de $pH'(k)$ com os parâmetros estimados em cada amostragem para pH 7 para o modelo (2.16). . . . .	69

3.25	Comparação das estimações da VM para o modelo (2.16) e da $\hat{\sigma}_{pH}^2$ com JTA=100 amostras. . . . .	70
3.26	Comparação das estimações da VM para o modelo (3.7) e da $\hat{\sigma}_{pH}^2$ com JTA=100 amostras. . . . .	71
3.27	Comparação das estimações da VM para o modelo (2.16) e da $\hat{\sigma}_{pH}^2$ com JTA=400 amostras. . . . .	72
3.28	Comparação das estimações da VM para o modelo (3.7) e da $\hat{\sigma}_{pH}^2$ com JTA=400 amostras. . . . .	72
3.29	Erro de predição para pH 7 e preditor (3.8). . . . .	73
4.1	Saída do controlador GPC para o ponto de operação em torno do pH 7. .	78
4.2	Comparação das estimações da VM para o modelo (3.7) e da $\hat{\sigma}_{pH}^2$ com JTA=200 amostras em torno do pH 7, considerando a inicialização das estimativas. . . . .	78
4.3	Cálculo do Índice de Variância Mínima para as estimativas da Variância Mínima de (4.2). . . . .	79
4.4	Saída para o controlador GPC para o ponto de operação em torno do pH 9.	80
4.5	Comparação das estimações da VM para o modelo (3.7) e da $\hat{\sigma}_{pH}^2$ para JTA=200 amostras em torno do pH 9, considerando a inicialização das estimativas. . . . .	81
4.6	Cálculo do Índice de Variância Mínima para as estimativas de Variância Mínima de (4.5). . . . .	81
4.7	Ganho $B/A$ do modelo de sistema de pH. . . . .	82
4.8	Soma dos coeficientes ao quadrado do polinômio $E(z^{-1})$ . . . . .	83
4.9	Saída do controlador GPC para o ponto de operação em torno do pH 7, sem alterar as condições do processo. . . . .	84
4.10	Comparação das estimações da VM para o modelo (3.7) e da $\hat{\sigma}_{pH}^2$ para JTA=200 amostras em torno do pH 7, sem alterar as condições do processo.	84
4.11	Cálculo do Índice de Variância Mínima para as estimativas de Variância Mínima de (4.10). . . . .	85
4.12	Saída para o controlador PI em torno do pH 9. . . . .	86

4.13	Função de autocorrelação normalizada de $\xi_k$ . . . . .	87
4.14	Comparação das estimações da Variância Mínima para o modelo (3.7) e da $\hat{\sigma}_{pH}^2$ , JTA=200, amostras em torno do pH 9 e controlador PI. . . . .	87
4.15	Cálculo do Índice de Variância Mínima para as estimativas de Variância Mínima de (4.14). . . . .	88
D.1	Varição do Índice de Variância Mínima com a estrutura do modelo AR. . . . .	114
D.2	Comparação entre a saída 'medida' e a saída do modelo estimado. . . . .	115
D.3	Saída do sistema controlado. . . . .	116
D.4	Comparação da $\sigma_{mv}$ teórica com a $\hat{\sigma}_{mv}$ e $\hat{\sigma}_y$ estimadas recursivamente. . . . .	116
D.5	Comparação do Índice de Variância Mínima calculados com a estimativa da VM (—) e com a VM teórica (—). . . . .	118
D.6	Função de autocorrelação normalizada de $\xi_k$ para o caso linear. . . . .	119
D.7	Comparação da $\sigma_{mv}$ teórica com as estimações da VM para o Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) (—), Erro de Predição Ótimo (—) e Resíduo do Modelo (—). . . . .	120

---

# Lista de Tabelas

---

2.1	Tabela dos parâmetros do modelo da rajada da bomba de pH . . . . .	24
B.1	Métodos de decomposição Mínimos Quadrados . . . . .	107
B.2	Algoritmo da Fatoração UD Recursiva . . . . .	109

---

## Lista de Símbolos

---

$\sigma_{mv}^2$	Variância Mínima
$\sigma_{\xi}^2$	Variância do ruído
$\hat{\sigma}_{mv}^2$	Estimação da Variância Mínima
$\sigma_y^2$	Variância da saída
$\hat{\sigma}_{pH}^2$	Estimação da variância do pH
$\sigma_{bic^2}$	Desvio padrão da bicoerência ao quadrado
$p\tilde{H}_{(k+r/k)}$	Erro de Predição
$p\hat{H}_{(k+r/k)}$	Preditor ótimo do pH $r$ passos a frente
$pH'$	pH simulado com parâmetros amostrados
$\beta$	Fator de esquecimento
$\kappa$	Relação entre a variância mínima e a variância da saída
$\eta$	Índice de Variância Mínima
$\eta(k)$	Distúrbio adicionado a saída do sistema
$\xi(k)$	Ruído do sistema
$\bar{\xi}$	Média de $\xi(k)$
$r$	Tempo morto
$r_{uu}(\tau)$	Função de autocorrelação
$B(f_1, f_2)$	Biespectro nas frequências $f_1$ e $f_2$
$X(f)$	Transformada de Fourier de $x(k)$
$X^*(.)$	Complexo conjugado de $X(.)$
$bic^2(f_1, f_2)$	Bicoerência ao quadrado
$\overline{bic^2}$	Média da bicoerência ao quadrado
$\overline{bic^2}_{crit}$	Bicoerência crítica

$\lambda$	Ponderação da variação do sinal de controle
$n$	Ordem do modelo
$X$	Matriz de dados Mínimos Quadrados
$\theta$	Vetor de parâmetros
$\varphi(k)$	Vetor de dados aumentado
$\Phi(k)$	Matriz de dados aumentada
$J$	Custo da ordem do modelo
$T$	Período de amostragem
$k$	Instante de amostragem
$K_w$	Produto iônico da água
$V$	Volume no tanque de mistura
$Y$	Diferença de concentração dos íons $[H^+]$ e $[OH^-]$
$F_a$	Vazão de entrada do ácido no tanque de mistura
$F_b$	Vazão de entrada da base no tanque de mistura
$C_a$	Concentração do ácido no tanque do ácido
$C_b$	Concentração da base no tanque do ácido
$F$	Vazão de saída do tanque de mistura
$y(k)$	Diferença de concentração no tempo discreto
$y_a(k)$	Concentração de íons $[H^+]$ no tempo discreto
$y_b(k)$	Concentração de íons $[OH^-]$ no tempo discreto
$Y(z^{-1})$	Pressão da água no tubulação superior da caldeira
$U(z^{-1})$	Comando das Bombas de água do tubulão superior da caldeira
$K_p$	Ganho Proporcional
$T_i$	Tempo Integral
$z^{-1}$	Operador de atraso

---

# Lista de Abreviações

---

AIC	<i>Akaike Information Criterion</i>
AR	<i>Autoregressive</i>
ARMAX	<i>Autoregressive Moving Average Exogenous</i>
AUDI	<i>Augmented UD Identification</i>
CLP	Controlador Lógico Programável
CPA	<i>Control Performance Assessment</i>
CVM	Controlador de Variância Mínima
FAC	Função de Autocorrelação
GMV	<i>Generalized Minimum Variance</i>
GPC	<i>Generalized Predictive Control</i>
HCL	Ácido Clorídrico
HOSA	<i>Higher Order Statistics Analysis</i>
IAE	<i>Integral of Absolut Error</i>
ISE	<i>Integral Square Error</i>
ITAE	<i>Integral Time of Absolut Error</i>
IVM	Índice de Variância Mínima
JTA	Janela Temporal Assintótica
LCPI	Laboratório de Controle de Processos Industriais
LU	Decomposição LU
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
MMLS	<i>Multiple Models Least Square</i>
MQ	Mínimos Quadrados
MQR	Mínimos Quadrados Recursivo

NaOH	Hidróxido de Sódio
NGI	Índice de Não-Gaussianidade
NLI	Índice de Não-linearidade
PAR	<i>Polynomial Autoregressive</i>
PARX	<i>Polynomial Autoregressive Exogenous</i>
PC	<i>Personal Computer</i>
PI	Controlador Proporcional-Integral
PID	Controlador Proporcional-Integral-Derivativo
pH	Potencial Hidrogeniônico
UD	Fatoração UD
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
VM	Variância Mínima

# Introdução

---

## 1.1 Introdução

O controle automático de processos é utilizado com o objetivo de garantir a segurança de um parque industrial, trazer vantagens econômicas para a unidade fabril, e atender aquela que é a nova perspectiva mundial: a preocupação com os requisitos ambientais. Como justificativa econômica, Seborg et al. (1989) apontam como vantagens da aplicação do controle nos processos, o aumento dos índices de produção, a redução dos custos com a diminuição do consumo de insumos e a melhoria da qualidade final dos produtos, obtendo assim, uma maior rentabilidade do sistema.

Para atingir todos esses objetivos e garantir o correto funcionamento dos processos, as malhas de controle devem apresentar uma instrumentação adequada para a faixa de operação da variável controlada, elementos finais dimensionados com a sensibilidade necessária para atuação no processo e uma escolha correta da estrutura de controle (Harris et al., 1996b).

Uma planta industrial possui centenas ou milhares de malhas de controle (Häggglund, 1995), porém, o número de profissionais presentes nas equipes de manutenção é restrita, o que torna muito difícil a tarefa de verificação e avaliação da estrutura e sintonia de todos os controladores existentes. Além disso, na maioria dos casos, os controladores são sintonizados apenas no momento do comissionamento da planta industrial, e, posteriormente, sofrem degradação que, segundo Stanfelj et al. (1993) e Jelali (2006), pode ser atribuído a:

- alterações nas características dos materiais produzidos;
- mudança no ponto de operação do sistema;
- ausência de um estudo adequado para uma sintonia otimizada do controlador,

que muitas vezes possui comportamento extremamente conservador, de maneira a garantir estabilidade em mudanças de condições de operação do processo;

- limitação da faixa de operação do controlador;
- incorreta determinação do intervalo de amostragem;
- falhas e alterações nos sensores e atuadores;
- mudanças na dinâmica da planta devido ao próprio desgaste da mesma;
- erro na determinação do tempo morto;
- ausência de operadores mais bem preparados para diagnosticar as causas de um comportamento insatisfatório do sistema;
- escolha inadequada da estrutura de controle.

Sendo assim, estima-se que 60% de todos os controladores industriais possuem problemas de desempenho (Bialkowski, 1993; Ender, 1993; Desborough e Miller, 2002), ou seja, poderiam garantir melhores resultados em segurança, manutenção e rendimentos. Neste contexto, desenvolveram-se pesquisas e estudos relacionados à avaliação de desempenho em diversas malhas de controle: Desborough e Harris (1992) avaliaram o desempenho de um controlador em cascata em uma malha de nível. [Stanfelj et al. (1993); Tyler e Morari (1996); Huang (1999)] analisaram o comportamento de controladores em uma coluna de destilação. A aplicação em um trocador de calor é detalhada por (Hägglund, 1999). A análise de estratégia de controle multimalha e multivariável pode ser encontrada em (Polito, 1995), (Harris et al., 1996a) e (Huang e Shah, 1998). Jelali (2007) analisa o comportamento de estruturas de controle como o Controle Antecipatório e Modelo Interno para Controle na laminação a frio de chapas de aço. A avaliação do Controle Antecipatório é verificada nos trabalhos de (Pettersson et al., 2003) e (Desborough e Harris, 1993). Outros estudos de casos podem ser encontrados em (Jelali, 2006) e (Hoo et al., 2003). Todos esses exemplos tem o importante objetivo de tentar manter a eficiência dos processos industriais.

## 1.2 Objetivos

Esta dissertação tem por objetivo estudar os métodos de avaliação de desempenho de sistemas de controle não-lineares. Em seguida, deve-se tratar o problema de avaliação de desempenho de uma planta de controle de pH, presente no Laboratório de Controle de Processos Industriais (LCPI) do Departamento de Engenharia Eletrônica da Universidade Federal de Minas Gerais. Posteriormente, sempre utilizando-se de resultados experimentais, deve-se questionar detalhes práticos da aplicação do Índice de Variância Mínima, apresentando condições de sucesso do avaliador, como também, apontar todas as dificuldades encontradas na avaliação de desempenho de malhas de controle de dinâmica não-linear por meio desse índice de desempenho.

## 1.3 Avaliação de Desempenho

O procedimento de avaliação de desempenho de uma planta industrial deve, como propósito fundamental, analisar se o controlador de determinada malha está trabalhando satisfatoriamente, ou seja, se está exercendo sua função como planejado no estabelecimento daquela unidade de produção. Como listado anteriormente, diversos fatores alteram o comportamento ou, até mesmo, impossibilitam o correto funcionamento do sistema de controle de uma planta, que tem sua margem de ganhos financeiros diminuída com a deterioração do desempenho. Sendo assim, é vantajoso para qualquer atividade industrial, ter o conhecimento de quão 'saudável' é a operação dos componentes de seus sistemas de controle automático.

O conceito de avaliação de desempenho, traduzido do termo em inglês *Control Performance Assessment* (CPA), muitas vezes, é utilizado na literatura como um conceito muito mais abrangente do que o descrito acima. Harris et al. (1999) estabeleceram as propriedades que o CPA deve abranger: (i) operação automática, incluindo coleta periódica de dados da malha de controle e verificação da integridade destes; (ii) procedimentos de avaliação automáticos e não-invasivos; (iii) suporte a decisão, no que diz respeito ao tratamento de exceções; (iv) suporte técnico e (v) interface amigável ao usuário. Além disso, o CPA tem como objetivo a detecção de mudanças no de-

sempenho, a determinação de limites de performance para a estrutura de controle implementada, o diagnóstico preliminar das possíveis causas de mal funcionamento e a definição de limites aceitáveis para falsos alarmes. Todos esses conceitos são resumidos na Figura 1.1. De acordo com (Jelali, 2006), o termo *Control Performance Assessment* deve ainda incluir em suas características básicas uma etapa de ações corretivas, que tentam restaurar a 'saúde' do sistema automático, utilizando-se de resintonia de parâmetros do controlador, escolha de outra estrutura de controle, ou até mesmo, reprojetoando a unidade industrial.

Nota-se que, ao longo dos anos, inúmeras funcionalidades e conceitos foram sendo adicionados ao termo CPA (*Control Performance Assessment*), tais como a verificação e validação dos dados analisados, diagnóstico da origem de comportamentos inadequados do sistema, e principalmente, procedimentos de resintonia e reestruturação do controle automático (Horch e Dumont, 2003). No entanto, estas funcionalidades agregam outras atividades que fogem ao escopo da etapa de avaliação do desempenho de controladores. Sendo assim, esta dissertação restringe-se a considerar a pesquisa, análise e discussão a respeito apenas dos índices de desempenho de malhas de controle.

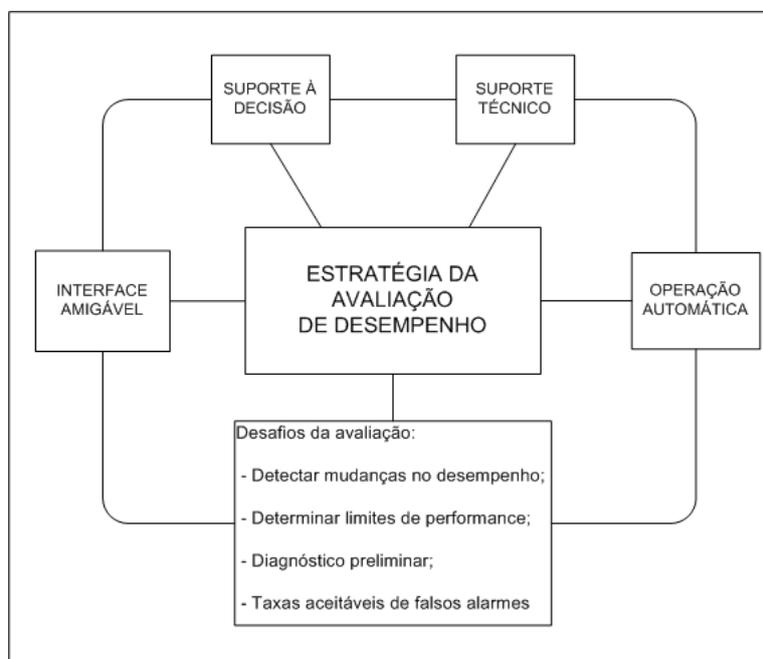


Figura 1.1: Componentes característicos da avaliação de desempenho, segundo (Harris et al., 1999).

### 1.3.1 Métodos de Avaliação de Desempenho

O desempenho de um sistema de controle está relacionado com sua habilidade de lidar com as divergências entre as variáveis controladas e as referências (valores desejados). Esses desvios podem ser quantificados por um número, uma métrica, que é conhecido como índice de desempenho (Jelali, 2006). Segundo Jacobs (1993), a implementação de um índice de desempenho requer que algumas propriedades numéricas sejam atendidas: (i) devem ser monotônicos com respeito à qualidade do desempenho; devem aumentar (ou diminuir) quando o desempenho deteriora (ou melhora); (ii) devem ser finitos, ou seja, têm que convergir com tempo.

Segundo Horch e Dumont (2003), os primeiros procedimentos para a avaliação de desempenho ocorriam no período de desenvolvimento dos sistemas de controle, no qual se realizavam ensaios de mudança de *setpoint*, nos quais se comparava a resposta temporal dos controladores. Sendo assim, por meio da análise da resposta transitória e em estado estacionário do sistema, examinavam-se as especificações de desempenho (tempo de subida, máxima ultrapassagem percentual, tempo de acomodação) e indicava-se o melhor controlador para aquela malha de controle específica.

Com o desenvolvimento das pesquisas sobre esse tema, concebeu-se a ideia de comparar o comportamento atual do controlador com a melhor resposta possível para aquele sistema de controle. Sendo assim, percebeu-se que a saída referente ao Controlador de Variância Mínima (CVM) proposto por (Aström, 1970) poderia representar um bom parâmetro de comparação. Dessa forma, considerando um sistema com tempo morto igual a  $r$ , entrada  $\mu_k$ , saída  $y_k$  e perturbado por uma sequência de variáveis aleatórias  $\xi_k$ , representa-se o modelo de um processo regulatório por:

$$y_k = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \mu_{k-r} + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi_k \quad (1.1)$$

em que  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$  são polinômios em função do operador de atraso  $z^{-1}$ .

Dada a Equação Diofantina (Jota, 2004):

$$\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} = E(z^{-1}) + z^{-r} \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (1.2)$$

Substituindo a Equação (1.2) no modelo do sistema dado pela Equação (1.1), tem-se

que o preditor da saída  $y_{k+r}$ , para uma entrada  $\mu_k = 0$ , é igual a:

$$y_{k+r} = E(z^{-1})\xi_{k+r} + \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})}\xi_k \quad (1.3)$$

A formulação matemática da teoria da predição ótima (Aström, 1970) é descrita, com maiores detalhes, no Apêndice A. O segundo termo do lado direito da igualdade (1.3) corresponde à predição ótima da saída do sistema  $r$  passos à frente, dado que o primeiro termo de (1.3) apresenta apenas valores de ruídos futuros (1.4), que são independentes dos dados obtidos até o tempo  $k$ .

$$E(z^{-1})\xi_{k+r} = \xi_{k+r} + e_1\xi_{k+r-1} + \dots + e_{r-1}\xi_{k+1} \quad (1.4)$$

O polinômio  $E(z^{-1})$  é independente do tipo de controlador implementado, estando apenas relacionado ao tempo morto  $r$  e ao modelo de ruído (Harris, 1989). Portanto, os termos representados por (1.4) são denominados parte invariante de um controle realimentado, pois são componentes dinâmicos de uma malha fechada que não são afetados pela realimentação. Sendo assim, a mínima variância possível de um sistema realimentado é determinada pela soma dos coeficientes ao quadrado de  $E(z^{-1})$  multiplicado pela variância da perturbação  $\sigma_\xi^2$  presente no processo (Aström, 1970), como mostrado a seguir:

$$\mathbf{E}\{y_k^2\} = (1^2 + e_1^2 + \dots + e_{r-1}^2)\sigma_\xi^2 = \sigma_{mv}^2 \quad (1.5)$$

Segundo (Harris, 1989), a relação entre as variâncias de saída do CVM e do controlador PID foi investigada por (Palmor e Shinnar, 1979) e (Harris e MacGregor, 1981). Já a relação entre o Controlador de Variância Mínima e métodos de controle estatístico de processos foi discutida por (Box et al., 1974). (DeVries e Wu, 1978) empregaram uma estimativa da variância mínima  $\hat{\sigma}_a^2$  para o tempo morto  $r = 1$  como medida de performance. Como pode ser examinado pela Equação (1.5), desde que  $E(z^{-1})$  seja mônico, o termo  $\hat{\sigma}_a^2$  é exatamente igual à variância do ruído adicionado ao sistema.

Durante a revisão bibliográfica deste trabalho, percebeu-se que a escolha da mínima variância teórica como parâmetro de referência para a avaliação de desempenho de controladores precede o artigo "*Assessment of Control Loop Performance*" de (Harris,

1989), amplamente referenciado na literatura como o trabalho responsável pelo estabelecimento desta métrica. O trabalho de (Harris, 1989), em nenhum momento, define o índice de desempenho. Esse apenas constata ser possível estimar a  $\sigma_{mv}^2$  por meio da adequação de um modelo aos dados de malha fechada. O mesmo autor, em um artigo de revisão (Harris et al., 1999), indica que a definição do Índice de Variância Mínima foi introduzido por outros trabalhos (DeVries e Wu, 1978; Desborough e Harris, 1992; Stanfelj et al., 1993; Kozub, 1997). Sendo assim, nesta dissertação, não se aplicará o termo Índice de Harris para a divisão entre a variância mínima teórica e a variância da saída do processo (1.6), por considerar que essa nomenclatura é incorreta, pois essa métrica já era discutida anteriormente (Box et al., 1974; DeVries e Wu, 1978; Palmor e Shinnar, 1979; Harris e MacGregor, 1981).

$$\kappa = \frac{\sigma_{mv}^2}{\sigma_y^2} \quad (1.6)$$

Como  $\sigma_y^2$  é sempre maior ou igual ao valor mínimo teórico  $\sigma_{mv}^2$ , o índice apresentado em (1.6) poderá assumir o valor da unidade, quando a variância da saída for igual a variância mínima, e próximos a zero, quando a saída apresentar uma variância muito maior que o mínimo teórico. Uma outra forma de implementação do índice é dada por:

$$\eta = 1 - \frac{\sigma_{mv}^2}{\sigma_y^2} \quad (1.7)$$

definida neste trabalho como o Índice de Variância Mínima. Possui lógica complementar em relação a métrica da Equação (1.6): assumirá o valor zero quando a variância da saída for igual a variância mínima e apresentará valores próximos da unidade quando a variância da saída for muito maior que o mínimo teórico.

O Índice de Variância Mínima possui como grande vantagem necessitar apenas de dados normais de operação das malhas de controle, não sendo exigida a realização de testes invasivos nas plantas. Além disso, esta métrica possibilita contabilizar quanto maior é a variância de saída de um processo em relação a um valor ótimo. Porém, apresenta algumas desvantagens como a dificuldade de determinação do tempo morto do processo e a estimação da variância mínima (Qin, 1998). Apesar de a literatura apresentar diversos métodos para a definição do tempo morto (Björklund, 2003), obter

ao valor correto ainda é um grande desafio, ainda mais quando se trata de um processo com dinâmica não-linear, em que o tempo morto também sofre alterações (Harris e Yu, 2007).

Já a estimação da variância mínima pode ser determinada como na idéia inicial proposta por Harris (1989), que é a estimação dos polinômios  $A(z^{-1})$  e  $C(z^{-1})$  por meio de um método de análise de séries temporais. Desborough e Harris (1992) propuseram um metodologia que utiliza uma regressão linear, que na sua forma recursiva, emprega o estimador de Mínimos Quadrados. Huang et al. (1997) desenvolveram um método de estimação que vale-se de filtragem e da correlação cruzada entre os dados de saída e a perturbação. Mesmo com os métodos descritos, existem dificuldades de se determinar o valor mínimo teórico para a saída de um processo, como será detalhado mais adiante.

Além disso, a comparação do CVM com um controlador mais simples pode ser injusta. O CVM apresenta uma lei de controle de alto ganho, ampla largura de banda, variações em alta frequência no sinal de controle e ordem elevada (Harris e Billings, 1985; Grimble, 2002; Thornhill et al., 2003a; Farenzena, 2008). Desta forma, esse poderoso controlador, em algumas circunstâncias, não pode ser implementado na prática, devido à limitações da instrumentação ou dos sistemas digitais de automação e a ocorrência de zeros de fase não-mínima (Jota, 2004).

Desta forma, baseado no desenvolvimento do Controlador de Variância Mínima Generalizado (Harris e Billings, 1985), Grimble (2002) estendeu a idéia do Índice de Variância Mínima, por meio da função custo  $J$  de uma variável auxiliar  $\Phi_k$ , representados por:

$$J = E \{ \Phi_k \} \quad (1.8a)$$

$$\Phi_k = P_c e(k) + F_c u(k) \quad (1.8b)$$

em que  $P_c$  e  $F_c$  são filtros aplicados para o erro  $e(k)$  e o sinal de controle  $u(k)$ , respectivamente. Segundo Grimble (2002), essa é uma abordagem mais flexível e implica em uma avaliação de desempenho mais justa para o sistema de controle.

Mesmo com as dificuldades listadas acima, o Índice de Variância Mínima é ampla-

mente estudado e referenciado em diversos artigos, considerando as mais diferentes estruturas de controle: [(Desborough e Harris, 1993; Stanfelj et al., 1993; Huang et al., 2000)] aplicaram a avaliação com os conceitos de variância mínima na combinação de controles realimentados e antecipatório; o conceito do índice de Variância Mínima foi estendido para sistemas MIMO (*Multiple Input Multiple Output*) (Huang et al., 1997; Huang e Shah, 1999; McNabb e Qin, 2003); Huang (2002) mostrou ser possível estimar a componente invariante do controle realimentado, mesmo considerando sistemas variantes no tempo.

Considerando outras métricas, descrevem-se os índices de desempenho clássicos, tais como IAE (*Integral of Absolut Error*), ISE (*Integral Square Error*), ITAE (*Integral Time Absolut Error*), que podem ser facilmente entendidos pela sua própria nomenclatura. O IAE indica a soma do valor absoluto do erro durante um determinado período de tempo, não possibilitando assim, uma boa ponderação da magnitude do erro. Em contrapartida, o ISE representa a integral do erro ao quadrado e soluciona essa questão ao elevar à segunda potência o valor do erro. O ITAE é a integral do erro absoluto ponderado pelo tempo e atribui valores menores a erros iniciais e fatores maiores a erros permanentes no sistema.

Os índices clássicos são de fácil compreensão, porém, muitas vezes, para determinar o desempenho de um controlador, requerem intervenções nem sempre disponíveis nas plantas industriais, como a alteração na referência. Além disso, seus valores não são finitos, pois tendem sempre a aumentar ao longo do tempo  $T$ . Sendo assim, tanto na literatura quanto em aplicações práticas, são raramente utilizados em sua forma pura. No entanto, muitos autores aplicam seus conceitos para determinar novas maneiras de avaliar o desempenho. Häggglund (1995) propôs um método para detectar oscilações em malhas de controle baseado no IAE, que é calculado entre duas interseções da abscissa zero no erro do controlador. Assim, alterando os limites de integração de (??), tem-se:

$$IAE = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |e(t)| dt \quad (1.9)$$

sendo que  $t_i$  e  $t_{i-1}$  são dois instantes de tempo sucessivos, nos quais o erro do controlador cruza o zero. O valor de IAE é zerado a cada vez que o erro intercepta a

abscissa. Segundo Hägglund (1995), durante um controle considerado adequado, o valor de IAE se torna pequeno, pois o tempo entre as interseções é curto. Caso um distúrbio de carga seja aplicado na malha, o valor de IAE se torna grande e a diferença  $t_i - t_{i-1}$  também aumenta. Quando a integral ultrapassa um limite estabelecido previamente,  $IAE_{lim}$ , o método considera a ocorrência de um distúrbio. Observando a taxa com a qual esses distúrbios são detectados, pode-se concluir que a malha apresenta problemas de oscilação, causados por exemplo, por agarramento e/ou mal dimensionamento de válvulas de controle. A implementação dessa técnica requer que alguns parâmetros sejam estabelecidos, sendo que Hägglund (1995) sugere alguns métodos para determinar mais adequadamente estes valores.

(Braga e Jota, 1994) empregam os métodos clássicos para a definição de uma metodologia para a avaliação de desempenho. Os índices são normalizados de forma a serem acondicionados em uma faixa restrita de valores. Além disso, agrega-se a característica de uma avaliação *on line*, ao se determinar uma janela temporal assintótica na qual os últimos dados se tornam mais relevantes. A técnica baseia-se em três pontos de vista diferentes: do gerente, do engenheiro de controle e do usuário. Esses três grupos possuem interesses e objetivos particulares ao se considerar uma planta presente em um unidade industrial.

Os principais propósitos de um gerente estão relacionados com o custo inicial de implementação do sistema de controle, no consumo de energia, no custo de manutenção. Assim, ponderam-se mais os termos relacionados ao desgaste de equipamentos e à amplitude e frequência da variação do sinal de controle. Já a análise feita pelo usuário possui características mais subjetivas, pois este não possui tanto conhecimento técnico a respeito do sistema. Sendo assim, atribui-se a ele conceitos como conforto e simplicidade, facilidade de operação e manutenção da malha de controle. Por fim, considera-se a figura do engenheiro de controle, que baseia-se em traços mais objetivos do sistema de controle, como fundamentos na capacidade do controlador para rejeitar perturbações e/ou seguir referência, tempo de resposta, valores de sobre-elevação e confiabilidade do sistema.

Tendo como base os interesses de cada personagem, são utilizados para quantificar os julgamentos relevantes para cada figura do sistema de controle índices de desem-

penho clássicos, aos quais são atribuídos pesos distintos. Desta forma, um índice único é obtido, estabelecendo uma base de comparação simples e unificada entre os diversos controladores. A listagem das métricas escolhidas, bem como uma relação dos pesos para cada um dos índices de acordo com o grupo são encontradas em (Braga e Jota, 1994).

Relacionando outros métodos de avaliação de desempenho, pode-se considerar a aplicação de algumas técnicas estatísticas, que oferecem boas características para a identificação e detecção de períodos de oscilação e diagnóstico de agarramentos de válvulas (Kempf, 2003; Passos et al., 2005; Passos, 2009). A função de autocorrelação (FAC) indica a influência (ou correlação) que uma amostra no tempo ( $t$ ) de uma série temporal possui com amostras anteriores ( $t - 1, t - 2, \dots$ ). Para a aplicação na avaliação de controladores, o atraso  $\tau$  deve ser maior que o tempo morto do processo. Para um controlador bem ajustado, a função de autocorrelação deve cair a zero tão logo o atraso seja maior que o tempo morto, pois a adequada ação do controlador elimina a dependência da série temporal com seus valores passados (Huang e Shah, 1999). Assumindo um sistema ergódico e supondo a estacionariedade do sinal para eliminar a dependência com o tempo, a FAC para o caso discreto pode ser estimada como em (1.11).

$$r_{uu}(\tau, t) = E[u(t) u(t + \tau)] \quad (1.10)$$

$$r_{uu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) u(t + \tau) dt \quad (1.11)$$

Tendo como base a FAC, Thornhill et al. (2003b) desenvolveram um método para detecção de oscilação, que são reveladas pelo padrão de cruzamento por zero da função de autocorrelação. A grande vantagem da escolha desse método ao se comparar com um tendência temporal, é a redução da influência do ruído, de maneira a ficarem mais evidentes as interseções com o zero.

### 1.3.2 Avaliação de Desempenho de Malhas de Controle Não-Lineares

As pesquisas sobre a avaliação de desempenho de malhas de controle não-lineares configuram-se como uma área bem recente no âmbito do CPA (*Control Performance Assessment*). O artigo de revisão (Jelali, 2006) qualifica a análise e avaliação dessa classe de sistemas entre os novos desafios para a pesquisa e desenvolvimento. Por meio de uma extensa revisão bibliográfica a respeito do tema, notou-se que os estudos relacionados ao assunto classificam-se em duas áreas bem distintas. A primeira refere-se à investigação da avaliação de desempenho em sistemas que apresentam não-linearidades relacionadas à instrumentação, como o provocado pelo agarramento de válvulas [(Horch, 1999), (Choudhury et al., 2004), (Thornhill, 2005) (Choudhury et al., 2006), (Choudhury et al., 2008), (Yu et al., 2010b)]. Já a segunda está direcionada para a determinação da variância mínima do sistema para classes restritas de dinâmicas não-lineares, baseada na estimação da componente invariante, que não é afetada pela realimentação de um sistema de controle (Harris e Yu, 2007). Esse trabalho utiliza o Índice de Variância Mínima como métrica de avaliação e expande a estimação proposta por (Desborough e Harris, 1992) para sistemas não-lineares que podem ser representados por um conjunto específico de modelos. O artigo (Yu et al., 2010a) corrobora essa classificação dos métodos de avaliação de desempenho em plantas não-lineares.

#### Avaliação de desempenho na presença de agarramento em válvulas

Choudhury et al. (2004) definem um método de investigação de ocorrência de agarramentos em válvulas de controle do processo por meio da análise das séries temporais de entrada e saída de um sistema de controle. Aplicam técnicas de estatística de alta ordem (HOSA - *Higher Order Statistics Analysis*) para distinguir comportamentos oscilatórios de controladores configurados com ação de controle excessiva e agarramentos na instrumentação da malha.

A função de autocorrelação e o espectro de potência são ferramentas conhecidas na análise de dados de sistemas. Porém, sua utilização se restringe ao estudo de sistemas lineares. Desta forma, torna-se necessário aplicar técnicas de processamento de sinais capazes de obter informações de sistemas não-lineares, como cumulantes de

mais alta ordem e poliespectros. Choudhury et al. (2004) aplicam a estatística de alta ordem, que, de acordo com (Nikias e Petropulu, 1993), reúne técnicas capazes de extrair informações devido a não-Gaussianidade, estimar a fase de sinais paramétricos não-Gaussianos, detectar e quantificar relações não-lineares contidas em sinais via relações de fase das componentes harmônicas.

Da mesma forma que a potência espectral é definida como a Transformada de Fourier do cumulante de segunda-ordem (função de autocorrelação) e representa a decomposição da energia do sinal em todas as frequências, o biespectro é a representação, no domínio da frequência, do cumulante de terceira-ordem, sendo assim definido:

$$B(f_1, f_2) = \mathbf{E} [ X(f_1)X(f_2)X^*(f_1 + f_2) ] \quad (1.12)$$

em que:

- $B(f_1, f_2)$  é o biespectro nas frequências  $f_1$  e  $f_2$ ;
- $X(f)$  é a Transformada discreta de Fourier da série discreta  $x(k)$ ;
- $X^*(.)$  representa o complexo conjugado de  $X(.)$ .

Na prática, o biespectro no ponto  $(B(f_1, f_2), f_1, f_2)$  quantifica a interação entre as frequências  $f_1$  e  $f_2$ , medida que está relacionada com as não-linearidades presentes no sinal (Fackrell, 1996) *apud* (Choudhury et al., 2004). Essa é a característica de interesse no biespectro para o diagnóstico de não-linearidades. Hinich (1982) define uma normalização do biespectro, gerando assim, uma nova medida chamada de bicoerência ao quadrado que é definida por (1.13), podendo variar entre 0 e 1.

$$bic^2(f_1, f_2) = \frac{|B(f_1, f_2)|^2}{\mathbf{E} [ |X(f_1)X(f_2)|^2 ] \mathbf{E} [ |X(f_1 + f_2)|^2 ]} \quad (1.13)$$

Os índices de Não-Gaussianidade (NGI) e Não-Linearidade (NLI) propostos por (Choudhury et al., 2004) são baseados nos testes de (Hinich, 1982), que afirmam:

1. se um sinal  $x_k$  é Gaussiano, seus cumulantes de terceira ordem são nulos, portanto, o seu biespectro é nulo;

2. se  $x_k$  é linear e não-Gaussiano, então sua bicoerência é uma constante não nula.

Assim, o índice de Não-Gaussianidade  $NGI = \overline{bic^2} - \overline{bic^2}_{crit}$ , sendo que  $\overline{bic^2}_{crit}$  é um valor crítico da bicoerência em um teste de hipótese para verificação da Gaussianidade do sinal. De acordo com (Choudhury et al., 2004), esse valor é função do número de bifreqüências dentro do domínio principal do biespectro, do número de segmentos usados na estimação da bicoerência e do intervalo de confiança para uma distribuição qui-quadrado. Caso  $NGI \leq 0$ , o sinal é Gaussiano; do contrário, considera-se o sinal Não-Gaussiano. Caso o sinal seja considerado Gaussiano, ele também será linear. No caso de um sinal não-Gaussiano, deve ser realizado um teste para verificar a sua linearidade, através do índice de Não-linearidade  $NLI$ . Como proposto por (Hinich, 1982), um sinal é considerado linear e não-Gaussiano se o valor de sua bicoerência ao quadrado é uma constante não-nula em todas as bifreqüências. Para que essa situação ocorra, a variância da bicoerência ao quadrado deve ser zero. Portanto, para verificar a condição de linearidade de um sinal, o máximo valor da bicoerência ao quadrado deve ser comparado com duas vezes o desvio padrão da estimada da bicoerência ao quadrado.

$$NLI = \left| bic^2_{max} - (\overline{bic^2} + 2\sigma_{bic^2}) \right| \quad (1.14)$$

Assim:

- se  $NLI = 0$ , o processo que gerou aquele sinal é considerado linear;
- se  $NLI > 0$ , o processo que gerou aquele sinal é considerado não-linear.

Para implementações práticas, Choudhury et al. (2004) definem alguns parâmetros, devido à dificuldade de se encontrar valores exatos iguais a zero. Para o  $NGI \leq 0.001$ , o sinal é considerado Gaussiano e para  $NLI \leq 0.01$ , o processo é considerado linear.

Os trabalhos de (Choudhury et al., 2006) e (Choudhury et al., 2008), além de detectarem não-linearidades originadas pelas válvulas de controle, apresentam uma solução para modelagem e quantificação do agarramento. A avaliação de desempenho com o Índice de Variância Mínima em sistemas lineares na presença de agarramento

em válvulas resulta em falsas conclusões, reproduzindo índices, normalmente, sobre-estimados (Yu et al., 2010b).

### **Estimação da Variância Mínima em Sistemas Não-lineares**

Baseado no trabalho de (Desborough e Harris, 1992) que promoveram uma estimativa da mínima variância para sistemas lineares invariantes no tempo, Harris e Yu (2007) fazem uma análise sobre os diversos comportamentos de um sistema não-linear, selecionando estruturas de modelos para os quais verifica-se a presença de uma componente invariante do controle realimentado. Harris e Yu (2007) enumeram diversos desafios em relação à avaliação de desempenho de sistemas de controle com dinâmica não-linear:

1. A complexidade de sistemas não-lineares, que apresentam seis tipos de comportamentos (Pearson (1999); Doyle III et al. (2002) *apud* Harris e Yu (2007)):
  - geração de harmônicas;
  - geração sub-harmônicas;
  - comportamento caótico;
  - estabilidade dependente das entradas;
  - respostas assimétricas para entradas simétricas;
  - multiplicidade de entrada (uma saída corresponde a mais de uma entrada, em regime permanente).
2. Os sistemas lineares podem ser caracterizados por uma resposta impulsiva ou por um modelo autoregressivo. Essa característica não se aplica a todos os casos não-lineares;
3. O princípio da superposição é válido apenas para sistemas lineares, em que a representação de um distúrbio pode ser adicionada em qualquer ponto. A modelagem do ruído é um grande desafio para processos não-lineares, principalmente, ao se considerar a determinação da variância mínima.

4. A estimação de parâmetros de sistemas não-lineares compreende a escolha de inúmeras classes de modelos que contêm um conjunto numeroso de parâmetros.

Dado que um sistema não-linear pode ser representado pelo seguinte modelo geral:

$$y_t = f(y_{t-1}, u_{t-r}) \quad (1.15)$$

em que  $y_t$  é a saída do processo,  $u_t$  entrada e  $r$  o tempo morto. A função  $f(\cdot)$  indica uma generalização para o modelo que descreve o sistema não-linear considerado. É adicionado à representação (1.15), um modelo de ruído qualquer  $D_t$ .

$$y_t = f(y_{t-1}, u_{t-r}) + D_t \quad (1.16)$$

Mesmo para a ocorrência de representações não-lineares para a função  $f(\cdot)$ , normalmente, é atribuído um modelo linear para  $D_t$ . Essa escolha se justifica devido a razões pragmáticas (Grimble, 2005): (i): é complexa e dispendiosa a obtenção de um modelo mais sofisticado para a ruído e (ii): os controladores, normalmente, se adaptam bem a esse tipo de aproximação. Harris e Yu (2007) demonstram que caso o modelo de ruído seja linear, é possível, para qualquer modelo não-linear do processo, determinar a componente invariante do controle realimentado. Desta forma, estende-se a um grupo restrito de sistemas não-lineares, a possibilidade de estimação da variância mínima através dos dados rotineiros de operação e do conhecimento prévio do tempo morto  $r$ .

Harris e Yu (2007) realizaram diversas simulações computacionais para demonstrar a aplicabilidade de seus estudos. Simulando processos não-lineares com modelos de ruído lineares, aplicando controladores do tipo P e PI, compararam a estimação de parâmetros com diversos tipos de estruturas de modelo. Promovendo inúmeras realizações do método, estimaram a variância mínima para cada modelo e compararam estatisticamente o resultado de  $\widehat{\sigma}_{mv}$ , que foi considerado satisfatório para o caso em que se tinha um conhecimento prévio do tempo morto e estruturas não-lineares do tipo PAR e PARX.

## 1.4 Conclusão

Neste capítulo foram analisados alguns dos métodos de avaliação de desempenho presentes na literatura. Para o caso específico de sistemas não-lineares, notou-se que as estratégias são recentes e podem ser classificadas em dois conjuntos bem distintos: a avaliação de desempenho não-lineares relacionada à instrumentação e a relacionada a dinâmica do processo. O intuito deste trabalho é de encontrar meios de avaliar o desempenho de uma planta de controle de pH presente no Laboratório de Controle de Processos Industriais (LCPI). Esta, por sua vez, apresenta uma dinâmica não-linear intrínseca aos processos de pH. Portanto, baseando-se no que foi descrito na Seção 1.3.2, escolhe-se o Índice de Variância Mínima como métrica de desempenho. Ao contrário do trabalho de (Harris e Yu, 2007), que estimou a variância mínima de sistemas não-lineares apenas por meio de simulações computacionais, este trabalho deseja analisar, em dados amostrados de uma planta real, os conceitos estudados neste capítulo.

## 1.5 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação é dividida em 5 capítulos. O primeiro deles apresenta as motivações que abastecem a área de avaliação de desempenho de malhas de controle industriais. Além disso, descrevem-se, resumidamente, alguns métodos encontrados na literatura, dando especial atenção para o caso de sistemas não-lineares. Em seguida, no capítulo 2, detalha-se a planta de controle de pH presente no LCPI, destacando seus componentes e discutindo, passo a passo, a sua modelagem. No capítulo 3 são avaliados os métodos de estimação da variância mínima estudados, bem como vantagens e desvantagens de cada um deles. No quarto capítulo são mostrados e discutidos os resultados para os controladores projetados para diversos pontos de operação da malha de controle de pH. Por fim, no quinto capítulo, trata-se das conclusões obtidas com esta dissertação, e a possibilidade de trabalhos futuros.

---

# Descrição da Planta de pH

---

## 2.1 Introdução

Este capítulo tem por finalidade apresentar as características físicas e dinâmicas da planta-piloto de controle de pH, localizada no Laboratório de Controle de Processos Industriais, LCPI, do Departamento de Engenharia Eletrônica. Descreve-se seu princípio de funcionamento, atuadores e a interface de aquisição de dados, enfatizado o comportamento não-linear da dinâmica nos diversos pontos de operação. Em seguida, detalha-se o procedimento utilizado para a modelagem do processo de pH.

## 2.2 Características gerais

A solução de água pura é formada pela reação de íons de hidrogênio  $[H^+]$  e íons de hidroxila  $[OH^-]$  em equilíbrio químico, Equação (2.1) (Atkins e Jones, 2006). O pH é a medida da concentração de íons  $[H^+]$  presentes em uma solução aquosa, dado pela relação logarítmica (2.2), podendo variar em uma faixa de valores de 0 a 14.



$$pH = -\log[H^+] \quad (2.2)$$

$$K_w = [H^+][OH^-] = 1,0 \cdot 10^{-14} \quad (2.3)$$

A água pura à 25°C apresenta a mesma concentração de íons hidroxila  $[OH^-]$  e íons de hidrogênio  $[H^+]$ . O produto da concentração destes dois íons é um valor constante

definido como produto iônico da água ( $K_w$ ), cujo valor é apresentado na Equação (2.3) O pH igual a 7 representa a neutralidade da solução aquosa. Já valores menores que 7 indicam o excesso de íons de hidrogênio [ $H^+$ ], sendo consideradas soluções ácidas, enquanto uma indicação de pH maior que 7 retrata uma solução básica, com maior concentração de íons hidroxila [ $OH^-$ ] (Atkins e Jones, 2006).

O potencial hidrogeniônico (pH) de uma solução é um parâmetro muito importante e, muitas vezes, crucial em diversas reações químicas. Sendo assim, o controle adequado desta variável é apreciado em inúmeras atividades. O estabelecimento de valores constantes do pH em reações de neutralização é requerido nas indústrias de aço, química e farmacêutica, em estações de tratamento de água, em plantas de galvanização, na produção de cosméticos e em procedimentos e técnicas de análise biológica (Kohlmann, 2003).

Apesar de parecer uma variável comum de um sistema controle, o pH de uma solução possui algumas particularidades que dificultam consideravelmente o controle adequado. A escala padrão de pH varia de 0 a 14, e, por meio da Equação (2.2), chega-se à conclusão que esse intervalo de valores corresponde a uma variação de concentração de íons [ $H^+$ ] de 1 mol/l a  $1,0 \cdot 10^{-14}$  (0,00000000000001) mol/l. Segundo (McMillan, 1994), não há outro processo de medição que possua uma escala de valores tão grande. Além disso, um eletrodo pode responder a variações de pH tão pequenas quanto 0,001, que representa uma mudança de 0,000000005 mol/l na concentração de íons de hidrogênio. Esses fatores inerentes ao processo criam a necessidade de uma válvula de controle com valores impraticáveis de largura de faixa, que, de acordo com (McMillan, 1994) deve ser maior que 10.000.000:1. Uma maneira de mitigar esse problema, seria a adoção de estágios com *setpoints* sucessivos, nos quais poderiam ser utilizadas válvulas de controle com precisão mais adequada para cada faixa de operação (McMillan, 1994).

### 2.2.1 Comportamento não-linear do processo de pH

Considerando um sistema de controle de pH, evidencia-se uma grande variação no ganho do processo, que se torna ainda mais perceptível na neutralização de uma base forte a partir de um ácido forte (McMillan, 1994). A curva de titulação deste tipo de processo é mostrada pela Figura 2.1. O eixo das abscissas do gráfico é o excesso

de concentração de íons  $[OH^-]$  e a ordenada é o valor de pH da solução. Dado que o ganho do processo para um certo valor pH equivale a derivada da curva de titulação dividida pelo fluxo de ácido e, pela análise do gráfico de titulação base forte e ácido forte, pode-se perceber que o ganho do processo na região de pH igual a 7 é muito maior do que aquele para valores de pH maiores do que 11 e menores do que 3. Sendo assim, o ganho varia não linearmente em toda faixa de operação de pH de 0 a 14.

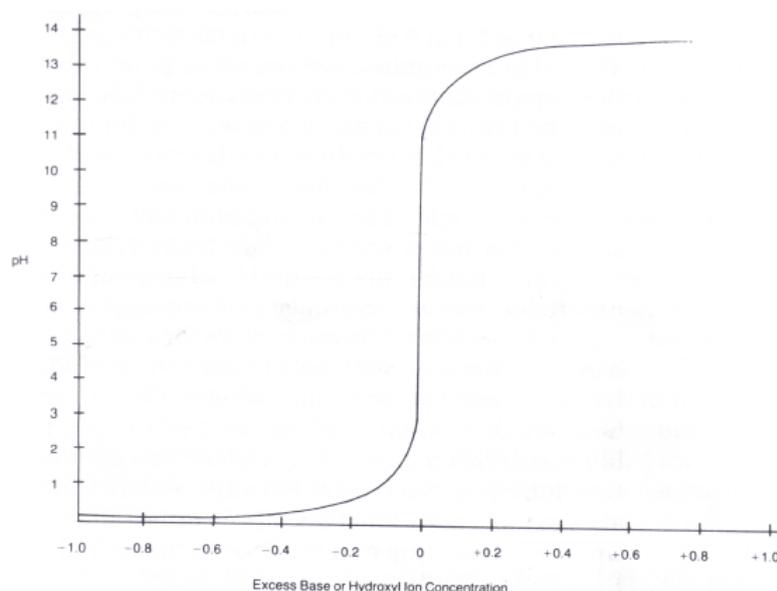


Figura 2.1: Gráfico de titulação de um processo de pH para base forte/ácido forte.

FONTE: (McMillan, 1994)

Outra característica de não-linearidade do processo de pH advém das inconstâncias das concentrações dos íons  $[H^+]$  e  $[OH^-]$  dos reagentes. Esse parâmetro varia com a temperatura e com o tempo de contato com o ar ambiente e altera as condições da planta como o ganho e a constante de tempo do processo. Além disso, deve-se considerar também a operação da bomba peristáltica, que funciona pelo regime de emissão de rajadas, e que, devido às condições de escoamento na mangueira, ao volume do reagente no tanque de ácido e ao próprio mecanismo da bomba, não injeta uma quantidade de ácido constante em cada rajada emitida.

Todas essas condições descritas acima dão ao processo de controle de pH características bem peculiares para um sistema de controle, que possi variações de uma dinâmica

não-linear e, portanto, é um bom objeto de estudo para a avaliação de desempenho retratada neste trabalho.

## 2.3 Descrição da Planta-Piloto

A planta piloto de pH utilizada nesta dissertação foi inicialmente desenvolvida no trabalho de Rocha (2006), e posteriormente, foram feitas algumas modificações por (Carvalho, 2010). Com o objetivo de analisar a dinâmica do processo, estudar e comparar diversas estratégias de controle foram realizados os trabalhos de (Júnior, 2007) e (Carvalho, 2010).

Este protótipo de pequena escala representa um processo de controle de pH, no qual um fluxo de concentrado básico deve ser neutralizado por uma vazão de concentrado ácido, controlada por uma estratégia de controle qualquer. O produto desta mistura deve manter-se dentro de uma faixa de valores de pH de forma que o rejeito que fora tratado possa ser utilizado em outra parte do complexo industrial ou então atenda aos critérios de proteção ambiental antes de ser lançado na natureza.

Uma ilustração da planta é mostrada na Figura 2.2, na qual apresentam-se 3 tanques, dos quais um é utilizado para realizar a mistura e os demais para armazenar os reagentes. Os tanques contendo os reagentes são idênticos, possuem capacidade máxima de 20 litros e visualização externa de nível. Já o tanque de mistura tem capacidade de 5 litros, suporta temperaturas até 135°C e é indicado para resistir às condições operacionais do processo. A mistura é homogeneizada através de um agitador eletromagnético, que possui uma escala de agitação.

Os tanques contendo os reagentes são conectados ao tanque de mistura através de mangueiras. A vazão de saída do tanque que contém solução alcalina é controlada manualmente por meio da abertura de uma válvula manual. No mecanismo de controle da vazão de entrada do concentrado ácido e vazão de saída da mistura, utilizam-se duas bombas peristálticas idênticas da marca *Omega*, modelo PHP-53. As bombas podem operar em modo manual local ou remoto, sendo este realizado através de um sinal elétrico de 4 a 20 mA. Maiores detalhes das bombas peristálticas serão apresentadas na subseção 2.3.1.

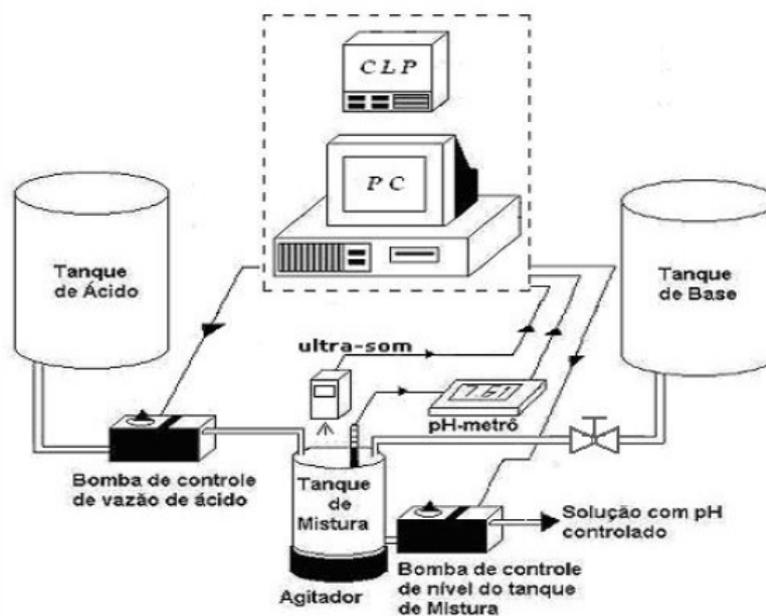


Figura 2.2: Ilustração do processo de controle de pH.

FONTE: (Rocha, 2006)

Na planta-piloto é utilizado um sensor de pH da marca *Omega*, modelo PHB-72. Sua faixa de operação é de 0 a 14, com resolução de 0,001 no pH e acurácia de 0,005. O eletrodo que compõe o sensor é constituído de uma solução de cloreto de potássio colocada dentro de uma estrutura de vidro. A posição do peagâmetro é uma questão crítica nesse de tipo processo, pois deve-se escolher um ponto na qual a solução apresenta-se mais homogênea possível.

A medição do volume do tanque de mistura é inferida através da tomada de pressão em algum ponto do tanque de mistura. O sensor mensura a diferença de pressão do ponto que indica o volume de 3000 ml com a pressão atmosférica e, desta forma, determina o volume do recipiente. Carvalho (2010) definiu esse ponto, por se tratar de um local onde há pouca variação da pressão devido ao funcionamento das bombas e do agitador eletromagnético. Sendo assim, o nível do tanque de mistura pode ser controlado entre os valores de 3000 ml a 4500 ml.

A planta piloto possui um CLP da marca *Keyence*, modelo KV-300, utilizado apenas no intertravamento do processo e na interface dos sinais de entrada e saída. Os controladores de nível e de pH e o software de controle estão implementados em um

computador pessoal (PC). Uma descrição mais detalhada de todos os equipamentos pode ser encontrada nos trabalhos de (Rocha, 2006), (Júnior, 2007) e (Carvalho, 2010). A Figura 2.3 apresenta o diagrama P&I do processo.

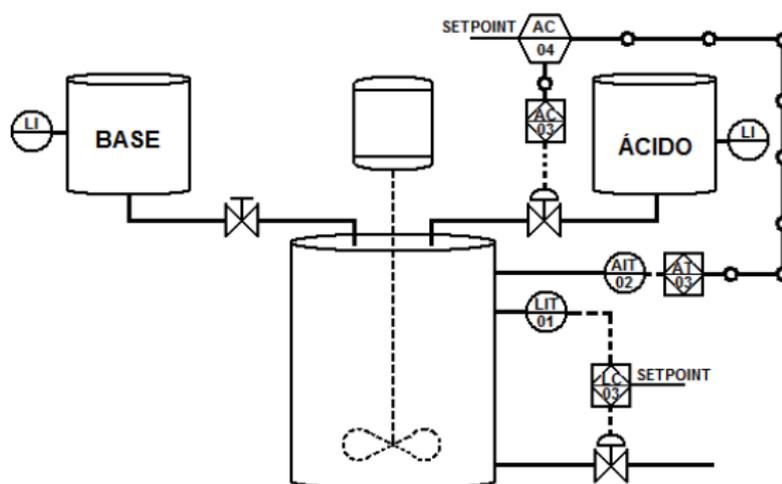


Figura 2.3: Diagrama P&I da malha de controle de pH

FONTE: (Carvalho, 2010)

### 2.3.1 Bomba Peristáltica

As válvulas de controle presentes na planta-piloto são bombas peristálticas. Esse tipo de bomba apresenta um comportamento bastante característico de operação intermitente, no qual o fluido é bombeado por meio de rajadas de volume fixo, porém com frequência de emissão variável.

É imprescindível, para o controle de pH, caracterizar o funcionamento das bombas peristálticas. Desta forma, nos primeiros trabalhos desenvolvidos nessa planta-piloto de pH, Júnior (2007) e Rocha (2006) buscaram modelar a vazão média da bomba para cada sinal de atuação. Porém, foi constatado por (Carvalho, 2010) que, para uma titulação ácido forte e base forte, é muito mais importante modelar a rajada da bomba de pH, pois uma simples rajada afeta muito o pH da solução, devido à alta concentração do ácido injetado no tanque de mistura.

Sendo assim, a modelagem da bomba peristáltica realizada por (Carvalho, 2010) e utilizada neste trabalho considera a rajada como um pulso. Essa premissa é bastante

aceitável, dado o funcionamento intermitente da bomba peristáltica. O procedimento desenvolvido por (Carvalho, 2010) pode ser resumido da seguinte forma: considera-se que, ao acionar a bomba de pH com sinal em 100%, a emissão de rajadas é praticamente contínua, não ocorrendo intervalos de tempo entre duas rajadas consecutivas. Logo, determina-se o intervalo de duração da rajada dividindo-se o intervalo de tempo considerado na modelagem (60 segundos) pelo número de rajadas. Assumindo que a integral da vazão instantânea da bomba, que apresenta o mesmo valor durante a rajada devido a sua característica de pulso, é igual ao volume da rajada, obtém-se então o valor da vazão instantânea da bomba durante a rajada. Maiores detalhes da modelagem podem ser encontrados em (Carvalho, 2010).

Portanto, os parâmetros que definem o modelo da rajada da bomba de pH da planta-piloto presente no LCPI e foram determinados por (Carvalho, 2010) são resumidos na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Tabela dos parâmetros do modelo da rajada da bomba de pH

Fonte: (Carvalho, 2010)

Vazão Instantânea da rajada	12,86 ml/s
Duração da rajada	310,9 ms

## 2.4 Modelagem do Processo de pH

No caso em que são empregados reagentes como base forte e ácido forte, segundo (Narayanan et al., 1998), a modelagem de um processo de pH em termos da diferença de concentração dos íons  $[H^+]$  e  $[OH^-]$  proporciona um modelo mais linear do que a modelagem em função da variável pH. Os trabalhos de (Rocha, 2006; Júnior, 2007) comprovam essa afirmativa por meio de testes na planta de pH presente no Laboratório de Controle de Processos Industriais. Desta forma, é definida a variável  $Y$  como a diferença de concentração dos íons de hidrogênio e dos íons hidroxila (Equação (2.4)).

$$Y = [H^+] - [OH^-] \quad (2.4)$$

Conforme demonstrado por Rocha (2006), o modelo do processo é resultado do balanço de massa do sistema em função da diferença de concentração (variável  $Y$ ), dado pela Equação (2.5). As equações que relacionam a diferença de concentração e o pH podem ser encontradas em (Rocha, 2006; Júnior, 2007; Carvalho, 2010).

$$V \frac{dY(t)}{dt} = F_a(t)C_a(t) - F_b(t)C_b(t) - F(t)Y(t) \quad (2.5)$$

em que:

- $V$  = volume no tanque da mistura (l);
- $Y$  = diferença de concentração dos íons  $[H^+]$  e  $[OH^-]$  (mol/l);
- $F_a$  = vazão de entrada do ácido no tanque de mistura (l/s);
- $F_b$  = vazão de entrada da base no tanque de mistura (l/s);
- $C_a$  = concentração do ácido no tanque do ácido (mol/l);
- $C_b$  = concentração da base no tanque da base (mol/l);
- $F$  = vazão de saída do tanque de mistura (l/s).

Realizando a linearização da Equação (2.5) e escolhendo um ponto de operação para as variáveis dependentes, obtém-se as funções de transferência que relacionam a diferença de concentração  $Y$  com a vazão de ácido  $F_a$  na Equação (2.6) e com a vazão de base  $F_b$  na Equação (2.7). As variáveis assinaladas com um sinal de sobreescritura do tipo ( $'$ ) representam o ponto de operação da planta.

$$G_{pHa}(s) = \frac{Y(s)}{F_a(s)} = \frac{C_a/(F'_a + F'_b)}{\tau s + 1} \quad (2.6)$$

$$G_{pHb}(s) = \frac{Y(s)}{F_b(s)} = -\frac{C_a/(F'_a + F'_b)}{\tau s + 1} \quad (2.7)$$

A constante de tempo  $\tau$  é igual a:

$$\tau = \frac{V'}{F'_a + F'_b} \quad (2.8)$$

As funções de transferência resultantes apresentadas acima são de um modelo de primeira ordem sem tempo morto. Esta última característica é determinada pela reação muito rápida de neutralização de uma base forte e de um ácido forte, podendo assim, desconsiderar o atraso de resposta do processo a uma entrada qualquer. Analisando a Equação (2.8), a constante de tempo do processo, é função do volume do tanque de mistura ( $V$ ) e das vazões de ácida ( $F_a$ ) e base ( $F_b$ ), ambas determinadas em cada ponto de operação. Sendo assim, em todos os experimentos realizados neste trabalho, o volume do tanque de mistura ( $V$ ) deve ser mantido constante, por meio do controlador de nível projetado na planta de pH, no intuito de diminuir as modificações no modelo do processo.

Discretizando as funções de transferências apresentadas em (2.6) com a devida associação de um controlador de ordem zero, chega-se ao seguinte modelo discreto para a relação  $Y(z^{-1})/F_a(z^{-1})$ :

$$G_{pHa}(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{F_a(z^{-1})} = \frac{K_{da}z^{-1}}{1 - \beta z^{-1}} \quad (2.9a)$$

$$K_{da} = \frac{C_a}{F'_a + F'_b}(1 - \beta) \quad (2.9b)$$

Para o caso da Equação (2.7), tem-se:

$$G_{pHb}(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{F_b(z^{-1})} = \frac{K_{db}z^{-1}}{1 - \beta z^{-1}} \quad (2.10a)$$

$$K_{db} = \frac{C_b}{F'_a + F'_b}(1 - \beta) \quad (2.10b)$$

em que  $\beta = e^{-T/\tau}$ . Sendo  $T$  o período de amostragem definido na discretização. A escolha deste parâmetro é um dos pontos críticos na implementação de sistemas digitais, que sendo o sistema de aquisição dos sinais deve satisfazer o Teorema da Amostragem (Phillips e Nagle, 1995). Caso o Teorema da Amostragem não seja satisfeito, surge o fenômeno conhecido com falseamento dos dados, do inglês *aliasing*, que se caracteriza pelo aparecimento de baixas frequências falsas no sinal amostrado, que trazem problemas ao sistema de controle.

Seborg et al. (1989) relatam uma série de regras para a escolha do período de amostragem  $T$ , algumas baseadas na variável física do processo, outras no modelo matemático. Em um destes critérios,  $T \leq 0,1\tau$ , em que  $\tau$  é a constante de tempo dominante; já em outro procedimento,  $0,2 \leq T/\theta \leq 0,1$ , em que  $\theta$  é o tempo morto do processo. Mais especificamente para a planta de controle de pH, Rocha (2006) indica o período de amostragem na seguinte faixa de valores:

$$\frac{\tau}{15} < T < \frac{\tau}{10} \quad (2.11)$$

Este trabalho segue a escolha defendida por (Carvalho, 2010), que será descrita mais adiante.

### 2.4.1 Equação a diferenças do processo

Posteriormente a determinação dos modelos discretos da planta de pH (Equações (2.9) e (2.10)), torna-se necessário definir uma estrutura que possibilite a implementação desta modelagem em um sistema digital de controle. Para tanto, Júnior (2007) apresenta um procedimento para se chegar a uma equação a diferenças do processo, que permite ajustar o comportamento do sistema interativamente, através do emprego recursivo de valores iniciais e variáveis exógenas. Sendo assim, tem-se que a diferença de concentração de íons  $[H^+]$  e  $[OH^-]$  no tempo discreto é dada por:

$$y(k) = y_a(k) - y_b(k) \quad (2.12)$$

em que:

- $y(k)$  = diferença de concentração no tempo discreto;
- $y_a(k)$  = concentração de íons  $[H^+]$  no tempo discreto;
- $y_b(k)$  = concentração de íons  $[OH^-]$  no tempo discreto;
- $k$  = instante de amostragem.

Por meio das Equações (2.9) e (2.10), obtém-se as equações a diferenças em (2.13) e (2.14). Substituindo essas duas últimas na Equação (2.12), e sabendo-se que os parâmet-

tos  $a_{1a}$  e  $a_{1b}$  possuem o mesmo valor pois são procedentes da constante de tempo  $\tau$ , encontra-se a Equação (2.15).

$$y_a(k) = -a_{1a} \cdot y_a(k-1) + b_{0a} \cdot F_a(k-1) \quad (2.13)$$

$$y_b(k) = -a_{1b} \cdot y_b(k-1) + b_{0b} \cdot F_b(k-1) \quad (2.14)$$

$$y(k) = -a_{1a} \cdot y(k-1) + b_{0a} \cdot F_a(k-1) - b_{0b} \cdot F_b(k-1) \quad (2.15)$$

Porém, ao contrário do que é defendido por (Narayanan et al., 1998) e verificado por (Júnior, 2007), os experimentos realizados por (Carvalho, 2010) demonstraram que o modelo que utiliza a diferença de concentração de íons não proporciona bons resultados de modelagem do processo, principalmente no que tange à questão de estimação de parâmetros. Carvalho (2010) afirma que, devido aos valores de concentração serem muito pequenos, da ordem de  $10^{-6}$ , persistia um erro de *offset* na estimação de parâmetros devido à sensibilidade dos mesmos em relação à variação da diferença de concentração. Sendo assim, pequenos erros de medição do pH influenciavam bastante no procedimento de estimação.

Desta forma, modelando o processo diretamente com a variável de pH, Carvalho (2010) obteve melhores resultados na estimação do parâmetros, provendo uma menor sensibilidade a erros de medição e ausência de *offset*. Baseando-se nessas conclusões, este trabalho também utiliza o modelo com a variável pH, que é descrito abaixo:

$$pH(k) = -a_1 \cdot pH(k-1) + b_r \cdot F_a(k-r) + d \quad (2.16)$$

A Equação (2.16) caracteriza-se por conter uma parte autoregressiva da variável medida  $pH(k-1)$ , uma porção exógena representada pela vazão de ácido  $F_a(k-r)$  e uma perturbação  $d$ , que se deve a vazão da entrada da base. Esta última não é uma variável medida no sistema presente na planta do laboratório, porém influencia no valor do  $pH$  final, e portanto, deve ser também considerada na modelagem. Em relação ao regressor relacionado com a vazão de ácido  $F_a(k-r)$ , considera-se  $r$ , o atraso

de transporte, ou tempo morto, que para o caso discreto, representa o número de amostras a partir do qual um sistema manifesta uma reação a um estímulo em sua entrada. No caso da planta de pH, apesar de a mistura ácido forte e base forte ser uma reação de neutralização muito rápida, Carvalho (2010) verificou que tempo morto no sistema de pH é decorrente do atraso de acionamento da bomba peristáltica, do tempo de transporte na tubulação entre o tanque de ácido e o tanque de mistura, da mistura e neutralização dos reagentes.

O tempo morto é um parâmetro importante no desenvolvimento de um sistema de controle, pois influencia diretamente a ação do controlador, podendo degradar o comportamento e/ou até instabilizar o processo. Esse fator introduz um deslocamento de fase na resposta em frequência, diminuindo a estabilidade relativa do sistema (Dorf, 2009).

Na literatura estão presentes diversas técnicas para estimar o tempo morto. Björklund (2003) descreve, compara e faz considerações a respeito dos métodos de estimação do atraso de transporte para sistemas lineares no âmbito do controle automático. Uma das estratégias visa estimar os parâmetros do modelo e o tempo morto do sistema simultaneamente, e (Björklund, 2003) a define como método explícito em um passo, tradução literal de "*One-step explicit method*". Swanda (1999); Isaksson et al. (2000) sugerem determinar um modelo discreto, por exemplo, do tipo ARX e, posteriormente, estimar os parâmetros com diferentes valores para o tempo morto, escolhendo, ao final, os valores que melhor se ajustam aos dados disponíveis. Na seguinte seção é descrita uma implementação desta estratégia baseada no Mínimos Quadrados Multi-Modelos (Niu e Ljung, 1994).

### 2.4.2 Estimação de parâmetros e do tempo morto

O Mínimos Quadrados Multi-Modelos é uma técnica de estimação baseada nos princípios do estimador Mínimos Quadrados, que é o método mais aplicado em regressões lineares e na estimação de parâmetros, devido a sua simplicidade conceitual e fácil implementação (Niu e Ljung, 1994). Sua denominação, que tem origem da sigla MMLS, do inglês *Multi-Models Least Square*, indica a sua principal característica, que é a de realizar a estimação de parâmetros empregando um conjunto de diferentes es-

truturas, selecionadas de forma a diversificar os tipos de regressores que compõe o modelo.

Além disso, o MMLS agrega duas propriedades importantes. A primeira relaciona-se com o fato de esse algoritmo de estimação paramétrica implementar um método de fatoração de matrizes, como a decomposição Cholesky, a fatoração UD, LU, a decomposição em valores singulares, entre outros (Niu e Ljung, 1994). Essas são ótimas soluções que visam a suprimir o mal condicionamento das matrizes de covariância e a degeneração numérica da matriz ganho de Kalman, no caso de estimadores recursivos (Jota, 2004). A segunda propriedade refere-se à manipulação de um vetor de dados aumentado  $\varphi(t)$ , que disponibiliza informações extras sobre o conjunto de dados, relacionando cada ordem do modelo  $n$  com uma função de custo  $J$ , que indica a representatividade de cada modelo ao dados analisados (Niu e Ljung, 1994).

Neste trabalho, utiliza-se o MMLS para determinar o tempo morto do processo. Para tanto, define-se um modelo linear com ordem  $n$ , Equação (2.17), para o qual se atribui alguns valores de  $n$ , sendo que o algoritmo de estimação determina, para cada estrutura de modelo analisada, um valor de custo  $J$ .

$$\begin{aligned}
 pH(k) = & -a_n \cdot pH(k - n) - a_{n-1} \cdot pH(k - (n - 1)) + b_{n+r} \cdot F_a(k - (n + r)) + b_{n+r-1} \cdot F_a(k - (n + r - 1)) \\
 & + \dots - a_1 \cdot pH(k - 1) + b_r \cdot F_a(k - r) + d
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Aplicando os regressores da Equação (2.17) e considerando o tempo morto  $r$  do processo para a entrada  $F_a(k)$ , determina-se o vetor de dados aumentado  $\varphi(k)$  (2.18) e a matriz de dados aumenta  $\Phi(k)$  (2.19), definidos pelo método de estimação MMLS:

$$\varphi(k) = [-pH(k - n) \ F_a(k - (n + r)) \ 1 \ \dots \ -pH(k - 1) \ F_a(k - r) \ 1 \ -pH(k)] \tag{2.18}$$

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \vdots \\ \varphi(k) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

A estrutura  $\varphi(k)$  é uma linha da matriz de regressores  $\Phi(k)$ , que estima modelos de ordem máxima igual a  $n$ . Em comparação com o vetor de regressores do mínimos quadrados convencional, os elementos de (2.18) estão intercalados e rearranjados em pares entrada/saída, além de incluir a saída atual do sistema  $pH(k)$ . Ainda em relação ao vetor  $\varphi(k)$ , evidencia-se a presença de valores unitários no vetor de regressores (2.18). Estes estão correlacionados com o modelo de  $pH$  da Equação (2.16), representado abaixo como a multiplicação da matriz de regressores  $X$  (2.20) com o vetor de parâmetros  $\theta$  (2.21), como definido no método dos Mínimos Quadrados.

$$X = [-pH(k-1) \ F_a(k-r) \ 1] \quad (2.20)$$

$$\theta = [a_1 \ b_r \ d]' \quad (2.21)$$

Como descrito na Seção 2.4.1, o parâmetro  $d$  em (2.21) refere-se à vazão de base  $F_b(k)$ , que, apesar de não ser determinada por um sistema de medição, influencia o valor final do pH. Desta forma, são colocados, na matriz de regressores (2.20), valores unitários na última coluna da mesma, na tentativa de se estimar o parâmetro  $d$ . Apesar de essa alternativa piorar as características numéricas da matriz de covariância do estimador (Jota, 2004), essa solução mostrou-se ser importante para uma boa estimação no sistema de pH. Foram realizadas diversas simulações computacionais como forma de tentar encontrar a melhor estrutura de regressores. Chegou-se à conclusão que a manutenção do parâmetro  $d$  é crucial para uma estimação estável dos parâmetros na planta de pH, utilizando a variável  $pH(k)$  como base do modelo. Retirando os valores unitários da matriz de regressores (2.20), a estimação resultava em valores, para o parâmetro  $a_1$ , que indicavam um sistema instável. Mesmo aumentando o intervalo de amostragem, na tentativa de impedir o fenômeno da superamostragem, os valores estimados de

$a_1$ , em módulo, eram superiores à unidade, o que enuncia a instabilidade para um sistema discreto. Com essa justificativa, definiu-se o vetor de dados aumentado  $\varphi$  como mostrado em (2.18).

Para o caso do modelo de pH apresentado em (2.17), os parâmetros estimados pelo MMLS para os  $n$ -ésimos modelos estão agrupados em uma matriz  $\hat{\theta}_n$  (2.22), na qual, para cada modelo de ordem  $n$ , os parâmetros estimados estão dispostos nas colunas  $(3n + 1)$  da matriz  $\hat{\theta}_n$ . Os sobrescritos  $(i)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) representam a ordem de cada modelo. Uma descrição mais completa do MMLS como do procedimento de determinação da função custo  $J$  para cada modelo (Niu e Ljung, 1994) são encontradas no Apêndice B.

$$\hat{\theta}_n(k) = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\alpha}_1^{(1)} & \hat{\alpha}_1^{(1)} & -\hat{a}_1^{(1)} & \cdots & \hat{\alpha}_1^{(n)} & \hat{\alpha}_1^{(n)} & -\hat{a}_n^{(n)} \\ & 1 & \hat{\alpha}_2^{(1)} & \hat{b}_r^{(1)} & \cdots & \hat{\alpha}_2^{(n)} & \hat{\alpha}_2^{(n)} & \hat{b}_{n+r}^{(n)} \\ & & 1 & \hat{d}_1^{(1)} & \cdots & \hat{\alpha}_3^{(n)} & \hat{\alpha}_3^{(n)} & \hat{d}_n^{(n)} \\ & & & 1 & \cdots & \hat{\alpha}_4^{(n)} & \hat{\alpha}_4^{(n)} & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots & \hat{\alpha}_5^{(n)} & -\hat{a}_1^{(n)} \\ & & & & & & 1 & \vdots \\ & & & & & & & \hat{b}_r^{(n)} \\ & & \vdots & & & & & 1 \\ & & & & & & & \hat{d}_1^{(n)} \\ & 0 & \cdots & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Considerando outros detalhes do procedimento de estimação de parâmetros, este trabalho implementa o que fora experimentalmente determinado por (Carvalho, 2010), que definiu o período de amostragem para o estimador igual a 1.6 segundos. Além disso, Carvalho (2010) verificou que cada rajada, apesar de ser instantânea, provoca uma variação no pH durante 16 segundos. Sabe-se que, em um sistema linear, a variável de saída responde à uma excitação da entrada conforme a dinâmica do processo e durante o mesmo período de tempo que essa permanecer constante. Desta forma, a fim de obter uma boa aproximação de um sistema linear para o processo de pH, deve-se considerar que o volume de ácido injetado por uma rajada preenche uma janela de 10 amostras, e portanto, a vazão de uma rajada é assumida constante e igual a 0,25 ml/s por 16 segundos. Maiores detalhes sobre esse desenvolvimento são encontrados em (Carvalho, 2010).

Sendo assim, estima-se o tempo morto do processo de pH para diversos pontos de operação da planta. Durante os experimentos, o foi mantido em malha aberta, com a ação da bomba peristáltica controlada manualmente, de modo a evitar tendências na série temporal. O reagente ácido utilizado é o HCl com concentração de 0,079 mol/l ou pH 1,1. O reagente básico é uma solução de NaOH, concentração de 0,001 mol/l ou pH 10,99. O volume do tanque de mistura é mantido constante no valor de 3,5 l com a vazão de base aproximadamente igual a 9,13 ml/s, como determinado por (Carvalho, 2010).

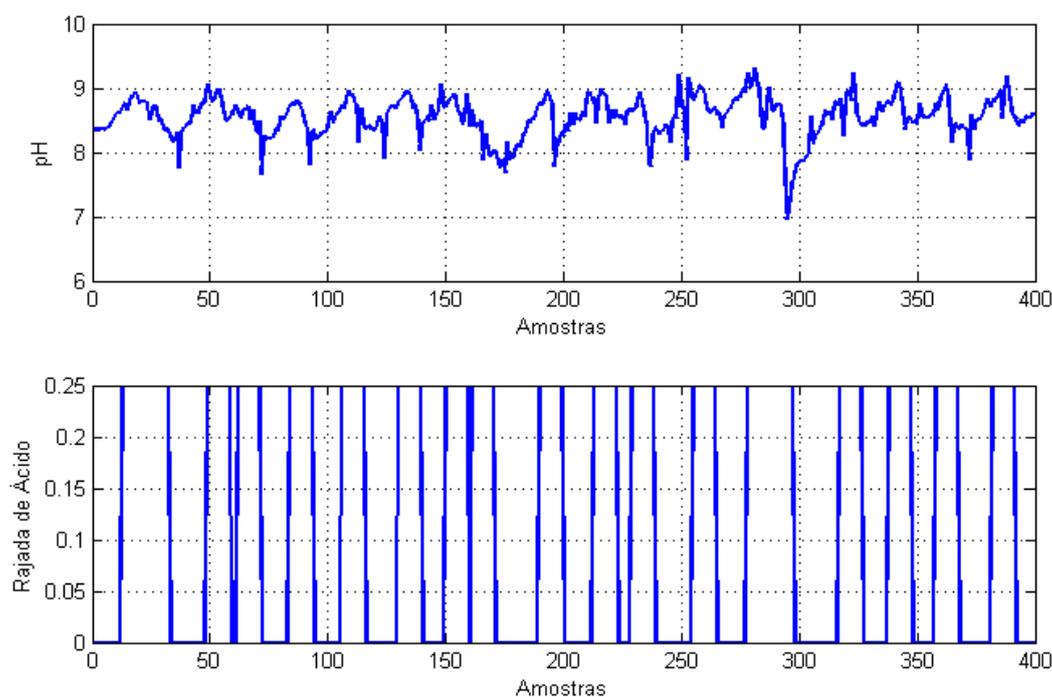


Figura 2.4: Dados para estimação dos parâmetros e do tempo morto em torno do pH 8,5.

O algoritmo de estimação MMLS atribui a cada ordem de modelo  $n$  um custo  $J$ , que indica a representatividade do modelo aos dados disponíveis (Niu e Ljung, 1994). À medida que a ordem do modelo aumenta, este valor diminui, evidenciando um melhor ajuste ao comportamento do dados. Porém, a partir de determinada ordem  $n$ , não se identificam melhoras significativas no custo  $J$ , indicando que uma boa relação entre os regressores e a saída foi obtida. Com isso, nota-se que os regressores adicionados são,

de certa forma, desnecessários para a definição de um bom modelo. Dessa maneira, constatando-se que, a partir de uma ordem  $n$  em que a adição de regressores não é relevante para o custo  $J$ , definido pelo MMLS (Niu e Ljung, 1994), determina-se o modelo do sistema contendo regressores até a ordem  $n$ . Um outro método quantitativo para a escolha da ordem de modelo é o Critério de Akaike (AIC - *Akaike Information Criterion*) (Jota, 2004) e (Niu e Ljung, 1994). Para os dados da Figura 2.4, para uma análise com ordem máxima de modelo igual a 30, tem-se, na Figura 2.5, o gráfico da função custo  $J$  em função da ordem  $n$  dos modelos.

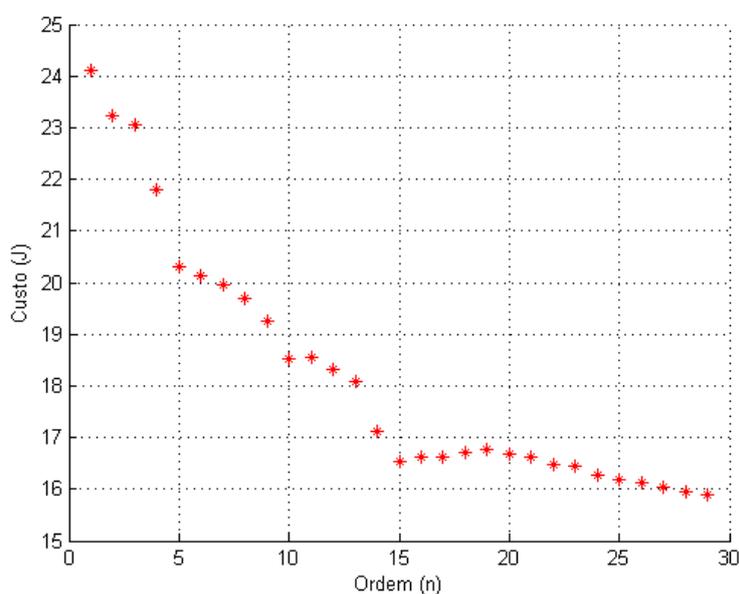


Figura 2.5: Gráfico da função custo  $J$  em função das ordens  $n$  do modelo da estrutura (2.17) do MMLS para dados do pH 8,5.

Analisando a Figura 2.5, nota-se que em  $n = 5$  o custo  $J$  possui um valor discrepante em relação ao custo  $J$  dos modelos de menor ordem. Mesmo com os valores de  $J$  caindo com o aumento de  $n$ , percebe-se graficamente que, em fatores múltiplos de 5, como  $n = 10$  e  $n = 15$ , ocorre uma diminuição perceptível do valor atribuído a representatividade do modelo, determinada pelo custo  $J$ . Esse fato indica que existe uma forte correlação entre os regressores  $pH(k)$  e  $F_a(k - 5)$ . Além disso, os valores de  $J$  estão caindo pois, dependendo das características particulares do ruído, parâmetros adicionais desnecessários começam a se ajustar ao mesmo. Desta forma, essa falsa

melhoria na função custo não contribui para um modelo superior (Jota, 2004). Sendo assim, escolhe-se  $n = 5$  a ordem do modelo que terá os coeficientes analisados. Sabendo que a função de transferência discreta do modelo de pH é definida pela relação:

$$\frac{pH(z^{-1})}{F_a(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (2.23)$$

Os coeficientes do polinômio em atraso  $B(z^{-1})$  representam os parâmetros dos regressores relacionados à vazão de ácido  $F_a(k)$ . O primeiro elemento do polinômio estimado  $\hat{B}(z^{-1})$  em (2.24) representa uma estimativa do parâmetro relacionado ao regressor  $F_a(k - 1)$ ; o segundo elemento representa uma estimativa do parâmetro relacionado ao regressor  $F_a(k - 2)$ , e assim por diante. Por meio do algoritmo de estimação Multi-Modelos, destacando os parâmetros associados à  $F_a(k)$  da coluna  $(3n + 1)$  da matriz de parâmetros estimados (2.22), utilizando a fatoração UD recursiva com janela temporal assintótica igual a 500 amostras, definida por tentativa e erro, e escolhido a ordem do modelo igual  $n = 5$ , como descrito no parágrafo anterior, tem-se que os coeficientes estimados de  $\hat{B}(z^{-1})$  são:

$$\hat{B}(z^{-1}) = [-0.3111 \quad 0.0804 \quad 0.1420 \quad -0.0380 \quad -0.7511] \quad (2.24)$$

Jota (1987) observou que, na prática, os valores dos coeficientes não significativos do polinômio  $\hat{B}(z^{-1})$  nunca convergem para zero, quando  $\hat{B}(z^{-1})$  está sobreparametrizado. Além disso, esses coeficientes, geralmente, tendem a assumir valores iguais (Jota, 1987), ou, quando somados, resultam em valores muito pequenos, comparando-se ao coeficiente de um regressor representativo do modelo. Dado os coeficientes presentes em (2.24), a soma desses é igual a -0.8777, termo comparável, em valor, ao parâmetro estimado referente ao regressor  $F_a(k - 5)$ . Verifica-se que esse fato ocorre, pois, nessa primeira estimativa, a soma dos parâmetros estimados relacionados a  $F_a(k - 2)$ ,  $F_a(k - 3)$  e  $F_a(k - 4)$  tendem a se anular com o parâmetro relacionado a  $F_a(k - 1)$ , o que indica que todos esses regressores são, de certa forma, irrelevantes para a modelagem de  $pH(k)$  para a ordem  $n$  escolhida.

Desta forma, conclui-se que os dados apresentados na Figura 2.4 possuem forte correlação entre  $pH(k)$  e  $F_a(k - 5)$ , ou seja, assume-se o tempo morto do processo para

esse ponto de operação é  $r = 5$ . Apesar da estratégia de aplicar o MMLS para estimar os parâmetros do modelo e, conjuntamente, determinar um valor para o tempo morto, os parâmetros estimados pelo MMLS não devem ser considerados boas estimações. A sobreparametrização falseia a estimação exata dos parâmetros, pois como afirmado por (Jota, 1987), dificilmente, valores de coeficientes não significativos irão convergir para zero.

Aplica-se o MMLS, com JTA igual a 500 amostras e ordem máxima igual a 30, para outros pontos de operação, como forma de verificar variações no tempo morto do processo. A Figura 2.6 apresenta uma série temporal em torno do pH 6 e a Figura 2.7 relaciona o custo  $J$  em função da ordem dos modelos.

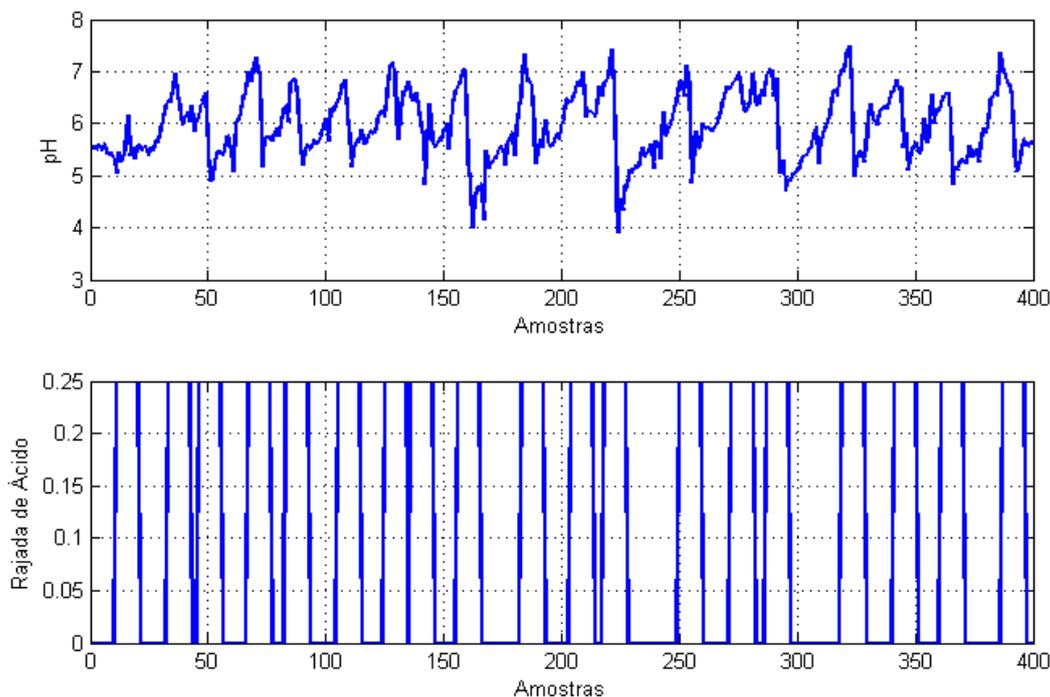


Figura 2.6: Dados para estimação dos parâmetros e do tempo morto em torno do pH 6.

Da mesma forma como no caso anterior, ponderando o gráfico da função custo  $J(n)$ , pressupõe-se que o modelo  $n = 5$  resulta em uma boa modelagem para os dados em torno do pH 6. Por meio do algoritmo de estimação Multi-Modelos, destacando os parâmetros associados à  $F_a(k)$  da coluna  $(3n + 1)$  da matriz de parâmetros estimados

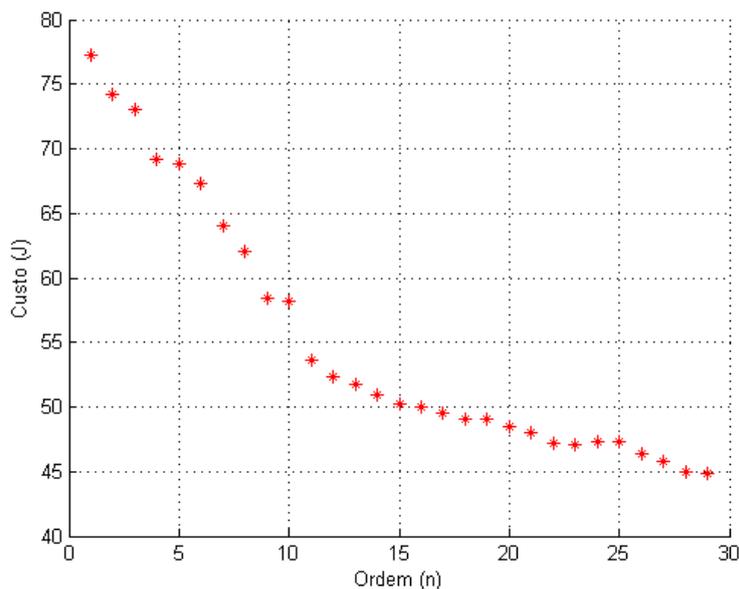


Figura 2.7: Gráfico da função custo  $J$  em função das ordens  $n$  do modelo da estrutura (2.17) do MMLS para dados do pH 6.

(2.22), utilizando a fatoração UD recursiva com janela temporal assintótica igual a 500 amostras, definida por tentativa e erro, tem-se que os coeficientes estimados de  $\hat{B}(z^{-1})$  são:

$$\hat{B}(z^{-1}) = [0.1763 \quad -0.3920 \quad 0.3080 \quad -1.1247 \quad -0.1569] \quad (2.25)$$

Aplicando o mesmo procedimento de análise dos coeficientes estimados do polinômio  $\hat{B}(z^{-1})$  para os dados no ponto de pH 8,5, verifica-se que: os parâmetros estimados dos regressores  $F_a(k-1)$  e  $F_a(k-5)$  praticamente se anulam. Esse cancelamento também pode ser considerado ao se comparar os valores dos parâmetros estimados para os regressores  $F_a(k-2)$  e  $F_a(k-3)$ . Além disso, a soma dos parâmetros do polinômio estimado  $\hat{B}(z^{-1})$  em torno do pH 6 é igual a -1.1894, um valor muito semelhante ao encontrado para o parâmetro estimado de  $F_a(k-4)$ . Sendo assim, pode-se atribuir ao modelo, nesse ponto de operação, um tempo morto  $r = 4$ .

Buscando determinar um valor único para o tempo morto do processo, com o intuito de utilizá-lo para o procedimento de estimação da variância mínima do processo de pH, faz-se mais um teste na planta, dessa vez em torno do pH 7. Os dados de entrada e saída

são exibidos na Figura 2.8. O gráfico do custo  $J$  em função da ordem de parâmetros  $n$  é apresentado na Figura 2.9, e novamente, evidencia-se a forte correlação entre os dados dos regressores  $pH(k)$  e  $F_a(k - 5)$ . Sendo assim, analisa-se o polinômio estimado  $\hat{B}(z^{-1})$ , que fora obtido pelo algoritmo de estimação Multi-Modelos, destacando os parâmetros associados à  $F_a(k)$  da coluna  $(3n + 1)$  da matriz de parâmetros estimados (2.22), utilizando a fatoração UD recursiva com janela temporal assintótica igual a 500 amostras.

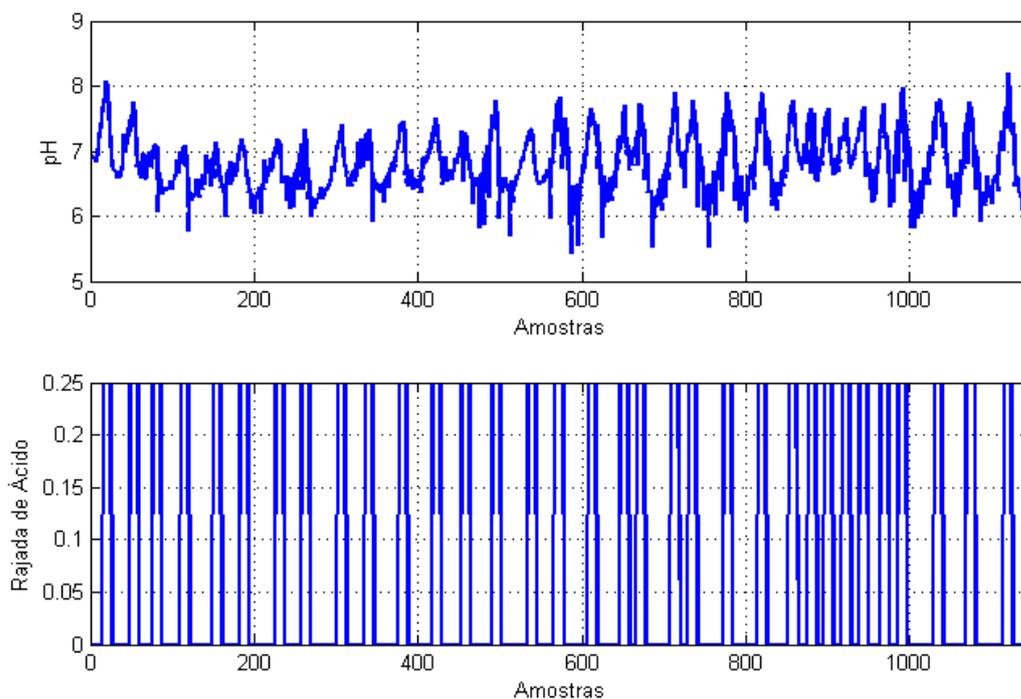


Figura 2.8: Dados para estimação dos parâmetros e do tempo morto em torno do pH 7.

$$\hat{B}(z^{-1}) = [0.0468 \quad -0.2341 \quad 0.3268 \quad -0.1335 \quad -0.8249] \quad (2.26)$$

O somatório dos coeficientes de  $\hat{B}(z^{-1})$  é igual a  $-0.8188$ , valor muito próximo ao parâmetro estimado do regressor  $F_a(k - 5)$ . Portanto, nesse terceiro conjunto de dados, pode-se considerar o tempo morto do processo  $r = 5$ . Diante dos três experimentos realizados e suas respectivas análises, define-se o tempo morto  $r$  da Equação (2.16) em 5 amostras. Além de dois dos experimentos terem indicado esse valor, em todos os

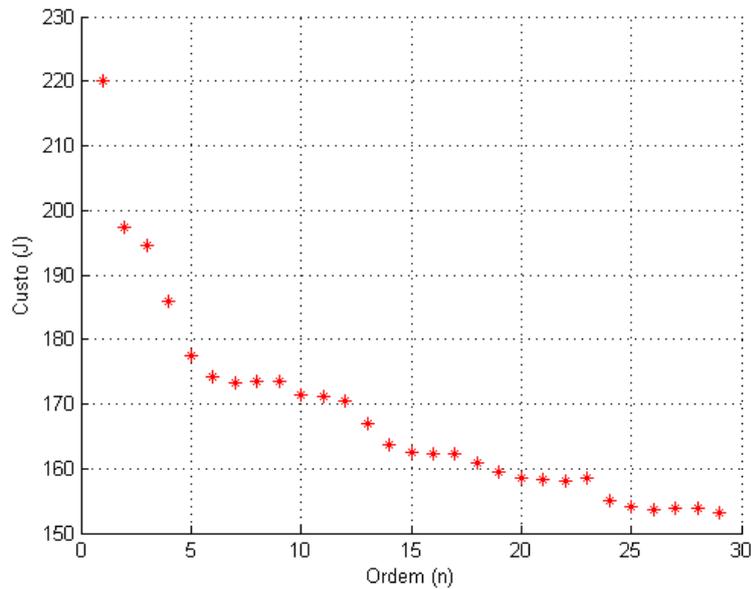


Figura 2.9: Gráfico da função custo  $J$  em função das ordens  $n$  do modelo da estrutura (2.17) do MMLS para dados do pH 7.

dados, através dos gráficos que relacionam a ordem do modelo  $n$  com uma função custo  $J$ , apurou-se uma correlação entre os regressores  $pH(k)$  e  $F_a(k-5)$  bem consistente. Sendo assim, apesar de o segundo ensaio e do trabalho de (Carvalho, 2010) acusarem um valor diferente ( $r = 4$ ), mantêm-se a posição escolhida, julgando que os valores são bem próximos e que essa discrepância ocorreu devido às não-linearidades inerentes ao processo.

Neste capítulo, foi descrita a planta-piloto de controle de pH presente no LCPI. Um enfoque maior foi dado à modelagem do processo, que, para este trabalho, é baseada na variável de  $pH(k)$ , como definido por (Carvalho, 2010). Com o intuito de aplicar o Índice de Variância Mínima como métrica de avaliação de desempenho do sistema de pH, aplicou-se um procedimento de estimação do tempo morto do processo, parâmetro essencial para a determinação da variância mínima. Utilizou-se o algoritmo de estimação de parâmetros MMLS, que estima, ao mesmo tempo, inúmeras estruturas de modelos e os classifica, em função da sua representatividade, de acordo com um parâmetro custo  $J(n)$ . Com essa informação disponível, estimou-se o tempo morto da planta de controle de pH, em malha aberta, para alguns pontos de operação,

---

como forma de analisar as possíveis discrepâncias resultante das não-linearidades do processo. Analisando os valores estimados, foi definido um valor único,  $r = 5$ , que será aplicado no Capítulo 3 para todos os procedimentos de estimação da variância mínima que serão analisados.

---

# Avaliação de Desempenho de Malhas de Controle Não-Lineares

---

## 3.1 Introdução

Este capítulo trata do tema central desta dissertação que é o diagnóstico de uma planta de dinâmica não-linear. Detalha-se o método escolhido para a avaliação de desempenho de malhas de controle não-lineares, o Índice de Variância Mínima. Sugere-se uma forma alternativa para a estimação da mínima variância de um processo, comparando-a com métodos utilizados na literatura tais como (Desborough e Harris, 1992; Harris e Yu, 2007). Por fim, discutem-se alterações nos resultados provenientes de mudanças de alguns parâmetros do método.

## 3.2 Estimação da Variância Mínima

Pela teoria da predição ótima, definida por (Aström, 1970), a variância mínima é igual a soma dos coeficientes ao quadrado do polinômio  $E(z^{-1})$  (Equação (1.2)), multiplicado pela variância do ruído ( $\sigma_{ruído}$ ) adicionado a um sistema linear, cuja representação pode ser descrita por (1.1). Essa definição é apresentada na Equação (1.5). Diversos autores como (Box et al., 1974; DeVries e Wu, 1978; Palmor e Shinnar, 1979; Harris e MacGregor, 1981; Desborough e Harris, 1992; Stanfelj et al., 1993; Kozub, 1997) aplicaram a variância mínima como um limite inferior de comparação com a variância de saída de um sistema no qual atua um controlador qualquer. A relação entre a variância mínima e variância atual do sistema defini um índice de desempenho, que, neste trabalho, é denominado como Índice de Variância Mínima, representado pelas Equações (1.6) e (1.7).

Todavia, a variância mínima teórica de um processo real não está facilmente disponível, visto que é difícil obter um modelo preciso para todos os pontos de operação do sistema. Ademais, o tempo morto é desconhecido ou variante no tempo e o ruído presente é fruto de fontes difíceis de serem quantificadas como, por exemplo, provenientes da instrumentação de uma malha de controle. Desta forma, analisam-se formas de estimar este valor mínimo teórico. Huang et al. (1997) desenvolveram um método de estimação que aplica filtragem e correlação cruzada entre a saída e a perturbação. Esse método foi utilizado por (Kempf, 2003) para inúmeras plantas lineares, obtendo resultados satisfatórios. Porém, essa alternativa não é realizada recursivamente e, como o objetivo deste trabalho é avaliar possíveis variações do comportamento do controle durante todo o ensaio, o método de (Huang et al., 1997) não será aplicado.

Portanto, em um primeiro momento, escolheu-se analisar os resultados obtidos por meio da estimação proposta por (Desborough e Harris, 1992). Este trabalho sugere que a variância mínima é obtida a partir de dados normais do processo e requer o conhecimento do tempo morto da malha. O desenvolvimento completo do método é apresentado no Apêndice B, sendo que, para a versão recursiva deste procedimento, aplica-se o estimador Mínimos Quadrados Recursivo, para um processo cujo o comportamento pode ser representado por um modelo estimado do tipo:

$$y = X \hat{\theta} + e \quad (3.1)$$

Desborough e Harris (1992) sugerem que uma estimativa da variância mínima de um processo pode ser obtida por meio de  $e$ , da Equação (3.1), que representa o erro de um modelo proveniente de um procedimento de estimação de parâmetros ao tentar descrever o comportamento da variável de saída  $y$ . (Desborough e Harris, 1992) e (Ljung, 1987) designam o termo, em inglês, *prediction error* para definir  $e$ . Em uma tradução direta, *prediction error* resulta em 'erro de predição', que é uma expressão utilizada por (Aström, 1970) para definir o termo referente a  $E(z^{-1})\xi_{k+r}$  retirado do preditor  $y_{k+r}$ , Equação (1.3), que se refere aos componentes dinâmicos de uma malha fechada que não são afetados pela realimentação. Ao ser aplicado o operador esperança matemática ao quadrado desse termo,  $E\{(E(z^{-1})\xi_{k+r})^2\}$ , obtém-se a variância mínima teórica  $\sigma_{mv}^2$ .

Sendo assim, deve-se fazer a distinção entre esses dois conceitos. O primeiro é o erro proveniente de um método de estimação de parâmetros na tarefa de explicar o comportamento do processo por meio de um modelo. Nesta dissertação será tratado com o símbolo  $e$  sendo designado como **Erro de Predição** (Ljung, 1987). Já ao segundo termo será atribuído o termo **Erro de Predição Ótimo**, pois representa o erro referente ao preditor ótimo  $\hat{y}_{k+r}$  (Aström, 1970) ao tentar explicar as saídas futuras do processo  $r$  passos à frente.

Delineando-se a estimação da variância mínima para planta de controle de pH, deve-se determinar o tempo morto do processo. Como visto no Capítulo 2, definiu-se o tempo morto  $r = 5$  como o valor mais freqüente para os ensaios realizados na planta. Porém, como ocorreu para um dos experimentos, o tempo morto deste processo pode variar devido ao ponto de operação, à dinâmica não-linear, às concentrações dos reagentes ácido e básico, ao posicionamento do sensor de pH e ao sistema de aquisição de dados. Esse é um obstáculo para avaliação de desempenho de sistemas não-lineares ou processos com tempo morto variável, aplicando-se o Índice de Variância Mínima. Escolher um valor fixo para o tempo de morto de um processo é fundamental para se determinar a mínima variância de um modelo. Porém, em alguns casos, como em um sistema de dinâmica não-linear, como não é possível caracterizar um único valor para  $r$ , deve-se especificar as características, como por exemplo, o ponto de operação e a concentração dos reagentes, para as quais um determinado valor para o tempo morto é válido. Tendo essa visão crítica das limitações na generalização do tempo morto do sistema de pH, reitera-se a escolha do Índice de Variância Mínima como método para a avaliação de desempenho neste trabalho.

Para o estudo dos métodos de estimação da variância mínima e conseqüente cálculo do Índice de Variância Mínima para o sistema de controle de pH descrito no Capítulo 2, são utilizados dados de experimentos realizados por (Carvalho, 2010), nos quais é aplicado o Controlador Preditivo Generalizado (GPC - *Generalized Predictive Controller*). Desborough e Harris (1992) afirmam que a estimação da variância mínima independe do tipo de controlador implementado, sendo função do tempo morto e do modelo de ruído. Para a planta de pH, Carvalho (2010) adaptou uma heurística simplificada para o GPC, baseada no custo relacionado a emitir uma rajada: *se o custo de não emitir uma*

*rajada de ácido no instante de amostragem atual for menor do que o custo de emití-la, então a rajada não deve ser emitida* (Carvalho, 2010). Além disso, utilizou-se um horizonte de predição de 24 amostras, que engloba 4 amostras relativas ao tempo morto, 10 amostras para a dinâmica de redução no pH relativa a vazão de ácido e mais 10 relativas ao efeito da vazão constante de base.

### **3.2.1 Estimação da Variância Mínima pelo Método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992)**

Como descrito no Apêndice C e aplicado para o caso de uma planta linear simples no Apêndice D, esta metodologia de estimação recursiva da variância mínima requer, primeiramente, que se encontre a ordem de um modelo para o qual não haja alterações significativas do Índice de Variância Mínima com a introdução de novos regressores. Desborough e Harris (1992) indicam a aplicação de um modelo do tipo auto regressivo. Nota-se que, para o caso linear, consegue-se definir uma ordem mínima de 10 regressores, a partir dos quais não se verificaram variações acentuadas para o cálculo do índice de desempenho, como mostrado pela Figura D.1.

É necessário, para a planta de controle de pH que possui uma dinâmica não-linear, definir a ordem do modelo que seja comum aos diversos pontos de operação, para que com isso, possa-se fazer uma estimação confiável da variância mínima em qualquer circunstância. Para tanto, são utilizados dados da aplicação do controlador GPC para experimentos realizados em torno do pH 9 e pH 4. Para todos os testes, o pH do reagente ácido é de 1,06 e o do reagente básico era igual a 11, o que resulta em concentrações de íons  $[H^+]$  de 0.087 mol/l e de íons  $[OH^-]$  de 0.001 mol/l. O volume do tanque de mistura é mantido constante em 3,5 l. Em todos os casos, aplica-se uma perturbação no sistema, com o aumento da vazão de base em 67%. O tempo de amostragem é igual a 1.6 segundos.

A resposta do controlador GPC em torno do pH 9 é mostrado na Figura 3.1. Para esse experimento, a perturbação, caracterizada pelo aumento da vazão do reagente base, é introduzida na amostra 620, a partir da qual, se percebe visualmente pelo gráfico da Figura 3.1, uma variação mais freqüente do pH e um menor espaçamento entre as

rajadas da bomba peristáltica.

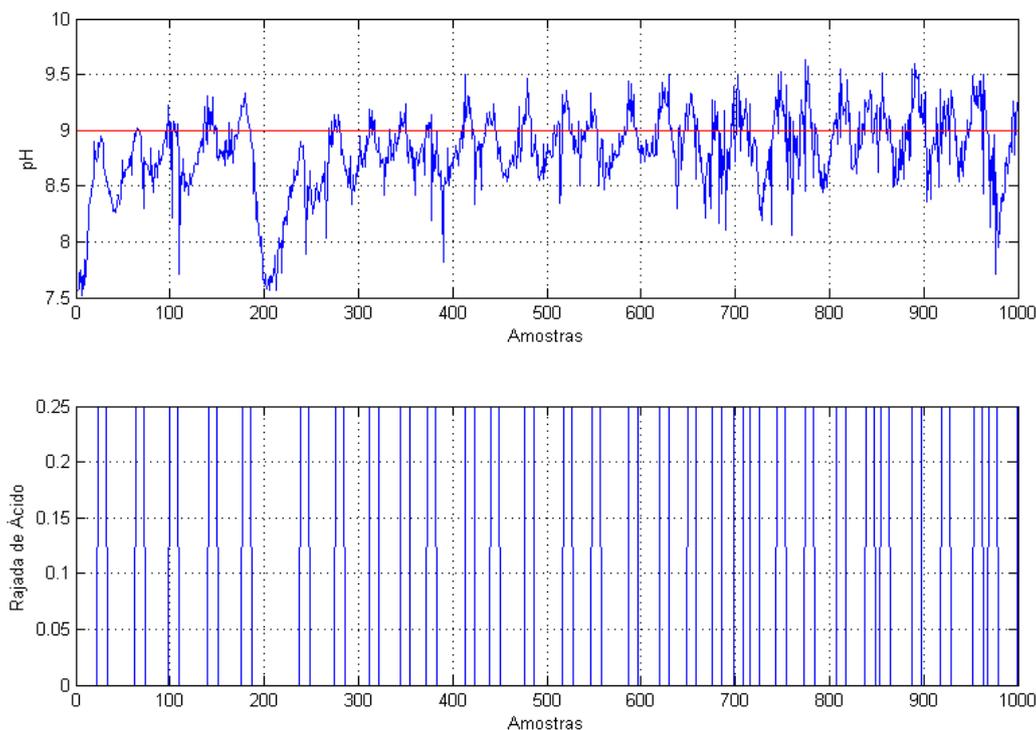


Figura 3.1: Resposta do controlador GPC para a malha de controle em torno do pH 9.

Como descrito no Apêndice C, a estimativa de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) requer o conhecimento do tempo morto do processo. De acordo com o que já foi discutido anteriormente, escolhe-se o valor definido na Seção 2.4. Sendo assim, para cada experimento realizado, calcula-se o Índice de Variância Mínima dado pela Equação (1.7) para modelos do tipo AR (auto-regressivo) do tipo:

$$pH(k) = -\alpha_n \cdot pH(k-n) - \alpha_{n-1} \cdot pH(k-(n-1)) - \alpha_{n-2} \cdot pH(k-(n-2)) + \dots - \alpha_2 \cdot pH(k-2) \quad (3.2)$$

variando a ordem do modelo de  $n = 2$  até  $n = 50$ . Para a série temporal da Figura 3.1, o procedimento de cálculo do Índice de Variância Mínima proposto por (Desborough e Harris, 1992) resulta no gráfico da Figura 3.2. De acordo com (Desborough e Harris, 1992) e baseado em uma análise do gráfico da Figura 3.2, a menor ordem do modelo AR

que melhor representa os dados da Figura 3.1 é  $n = 17$ . Ou seja, a partir do regressor  $pH(k - 17)$ , não se observam alterações no cálculo do Índice de Variância Mínima.

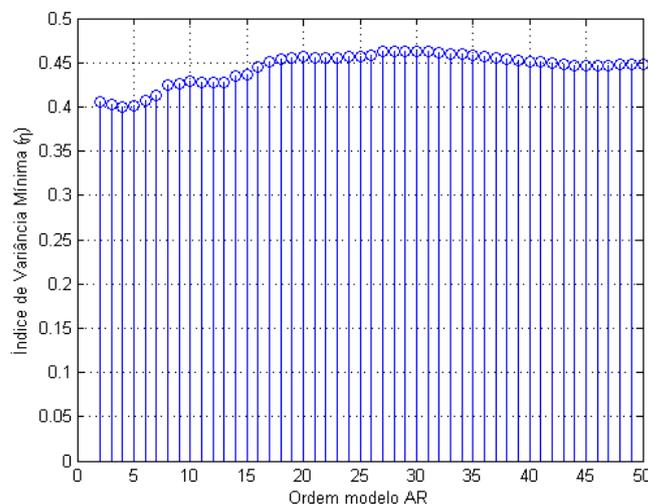


Figura 3.2: Variação do Índice de Variância Mínima ( $\eta$ ), Equação 1.7, em função da ordem do modelo AR para o pH 9 para o método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) não-recursivo.

O grande questionamento para índices de desempenho que dependem de um bom modelo para o sistema são os erros e avaliações equivocadas cometidos devido às alterações na planta. Ou seja, um modelo, que é válido para um ponto de operação específico, pode não corresponder aos dados de processo em uma outra situação. Esse fato se agrava ainda mais na análise de um sistema de controle de dinâmica não-linear, (vide planta de pH), na qual ocorrem variações do ganho do processo e mudança no tempo morto ao longo de toda a faixa de operação.

Para analisar a dificuldade de definir um modelo AR comum para toda a faixa de trabalho da planta de pH, faz-se a estimação da variância mínima para ordens distintas de um modelo AR com os dados de um experimento realizado com o mesmo controlador GPC, agora em torno do pH 4. A resposta do processo ao Controlador Preditivo Generalizado é mostrada na Figura 3.3, na qual ocorre a aplicação da perturbação de base no instante igual a 290 amostras.

O Índice de Variância Mínima ( $\eta$ ) da Equação (1.7), para cada ordem do modelo AR, é apresentada na Figura 3.4. Por meio dessa percebe-se a dificuldade de convergência

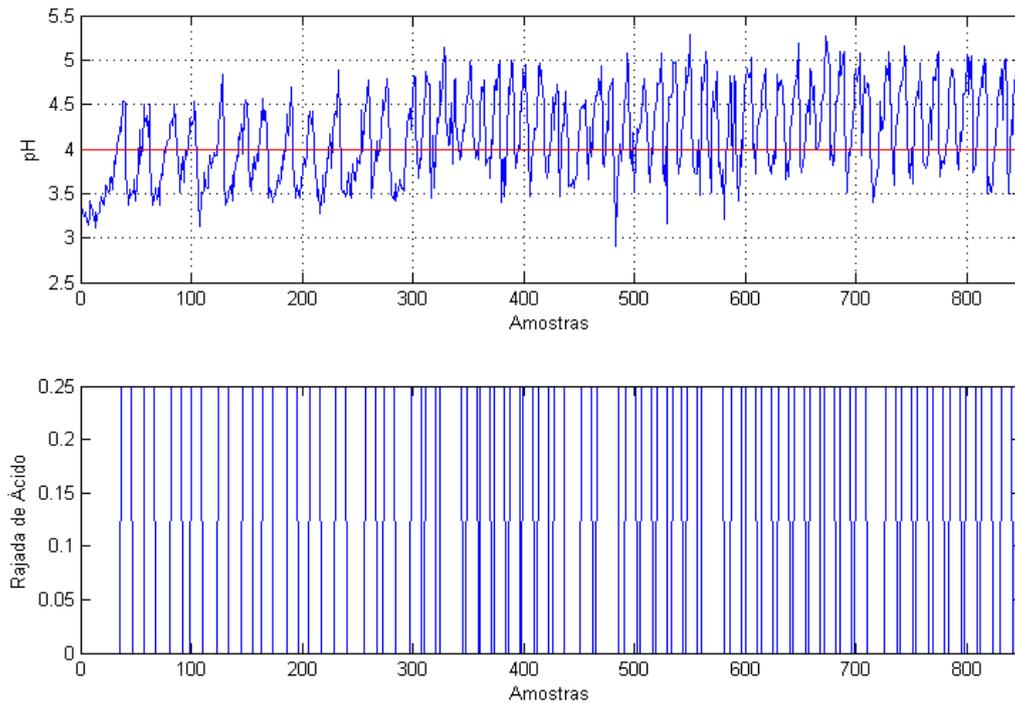


Figura 3.3: Resposta do controlador GPC para a malha de controle em torno do pH 4.

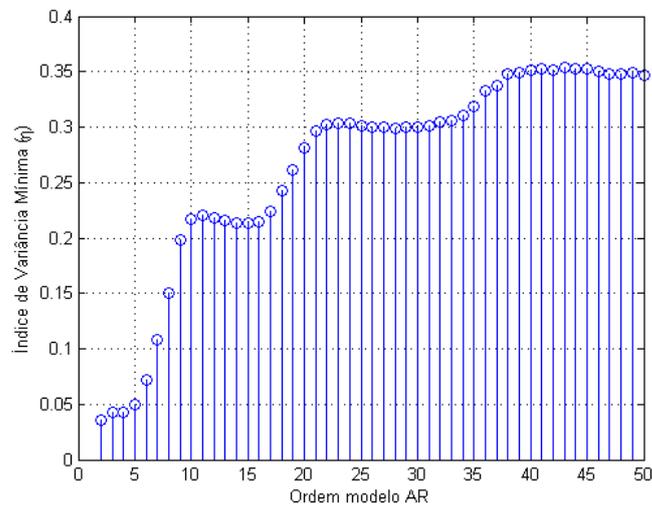


Figura 3.4: Variação do Índice de Variância Mínima ( $\eta$ ), Equação 1.7, em função da ordem do modelo AR para o pH 4 para o método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) não-recursivo.

do índice de desempenho para um valor estável. Ao passo em que são adicionados regressores ao modelo, o índice  $\eta$  manifesta variações consideráveis, que não podem ser desprezadas, o que indica a necessidade de um modelo com mais regressores. Além disso, a equivalência com o modelo escolhido para o pH 9, em que foram necessários 17 regressores para o cálculo do Índice de Variância Mínima, ficou longe de ser alcançada. Para o pH 4, de acordo (Desborough e Harris, 1992) e analisando a Figura 3.4, a matriz de regressores  $X$  do Mínimos Quadrados deve incluir dados até  $pH(k - 38)$ .

Mesmo que, porventura, o número de regressores para ambos os casos fosse idêntico, percebe-se que, normalmente, para o método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992), os modelos necessários para garantir a convergência do Índice de Variância Mínima requerem um conjunto numeroso de regressores (Kempf, 2003). Esse fato é observado não somente para o caso da planta não-linear, como também para o sistema simples do Apêndice C, no qual foi conveniente a modelagem até  $y(k - 10)$ . A ordem elevada para o modelo, para a estimação de parâmetro por meio do Mínimos Quadrados, implica em uma matriz de regressores  $X$  grande, o que aumenta a complexidade do processo de estimação. Considerando o caso recursivo, um número excessivo de parâmetros é prejudicial à convergência dos mesmos. Além disso, aumentando a complexidade do modelo, tem-se um aumento na variância dos parâmetros estimados, e conseqüentemente, uma redução na confiabilidade do modelo (Jota, 2004).

Fica claro que o procedimento apresentado de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) apresenta inúmeras dificuldades para uma boa estimação da variância mínima, ainda mais se for considerado o caso de uma dinâmica não-linear. Desta forma, experimenta-se outro método de estimação da variância mínima, baseada na determinação de um preditor  $r$  passos a frente para a série temporal de pH.

### 3.2.2 Estimação da Variância Mínima pelo Erro de Predição Ótimo

Baseado na Teoria de Predição Ótima definida por (Aström, 1970), propõe-se estimar a mínima variância teórica de um modelo por meio do erro da previsão da série temporal correspondente a saída do sistema. Rearrajando o preditor apresentado no Capítulo 1 para o sistema da Equação (1.1), com a entrada  $\mu = 0$ , tem-se que:

$$y_{k+r} = E(z^{-1})\xi_{k+r} + \frac{F(z^{-1})}{C(z^{-1})}y_k \quad (3.3)$$

Apenas o segundo termo da Equação (3.3) é conhecido no instante de tempo  $k$ . O primeiro fator possui componentes futuros desconhecidos do ruído aleatório  $\xi_{k+r}$ , que não podem ser determinadas pelos dados disponíveis no instante de tempo  $k$ . Desta forma, sabe-se que o preditor ótimo é dado por:

$$\hat{y}_{k+r/k} = \frac{F(z^{-1})}{C(z^{-1})}y_k \quad (3.4)$$

Sendo que  $F(z^{-1})$  é um polinômio calculado pela Equação Diofantina, dada pela Equação 1.2 e  $C(z^{-1})$  é o modelo de ruído do processo. As parcelas de (3.3), que não podem ser preditas no tempo  $k$ , são definidas como os componentes dinâmicos de uma malha fechada que não são afetados pela realimentação, e como mostrado em (1.5), determinam a variância mínima teórica do processo. Desta forma, estabelecendo uma boa predição dos dados futuros, ao implementar o preditor ótimo (3.4), tem-se disponível para a estimação, a parte invariante do controle realimentado, ou seja, a variância mínima.

A modelagem proposta em (2.16), com o atraso  $r = 5$ , possui o termo  $d$ , referente a estimação da vazão do reagente base adicionado ao tanque de mistura no sistema de controle de pH. Essa perturbação não é medida diretamente, porém é estimada junto com os parâmetros do processo. Conforme relatado no Capítulo 2, sua presença nos regressores é de fundamental importância para uma estimação de parâmetros que representam um sistema estável. Com isso, o preditor ótimo  $p\hat{H}_{k+r/k}$  deve implementar o modelo adequado para considerar as perturbações, usando a predição ótima para a técnica da compensação direta (Jota, 2004), descrita em detalhes no Apêndice A. A Equação (3.5) apresenta o preditor ótimo para a compensação direta.

$$C(z^{-1})\hat{y}_{k+r/k} = F(z^{-1})y_k + G(z^{-1})\mu_k + F'(z^{-1})v_k \quad (3.5)$$

em que  $v(k)$  é a perturbação representa pela adição da base no tanque de mistura e  $F'(z^{-1})$  é um polinômio determinado pela segunda Equação Diofantina (Jota, 2004). Para o modelo (2.16), com tempo morto  $r = 5$ , e considerando o modelo de ruído

$C(z^{-1}) = 1$ , tem-se o preditor ótimo para o processo de pH, Equação (3.6).

$$\begin{aligned} \hat{pH}_{k+5/k} = & f_0 pH(k) + g_0 F_a(k) + g_1 F_a(k-1) + g_2 F_a(k-2) + g_3 F_a(k-3) + g_4 F_a(k-4) \\ & + f'_0 d(k) + f'_1 d(k-1) + f'_2 d(k-2) + f'_3 d(k-3) + f'_4 d(k-4) \end{aligned} \quad (3.6)$$

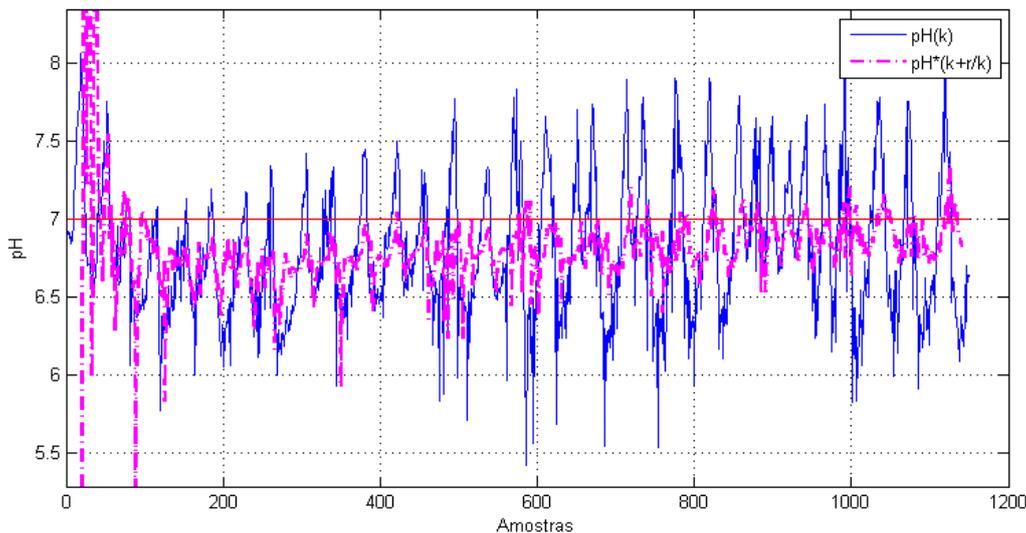


Figura 3.5: Predição de  $pH(k)$  com o preditor (3.6) para pH 7.

A Figura 3.5 apresenta a predição  $\hat{pH}_{k+5/k}$  para o ponto de operação em torno do pH 7. O tempo de amostragem é de 1.6 segundos e os parâmetros do preditor foram estimados recursivamente por meio do Mínimos Quadrados Recursivo, com janela temporal assintótica igual a 200 amostras, definida por tentativa e erro. Analisando a Figura 3.5 que compara a predição  $\hat{pH}_{k+5/k}$  com a série temporal  $pH(k)$  para o pH 7, nota-se que até a amostra 100, aproximadamente, os parâmetros ainda não tinham convergido. Em seguida, a predição  $\hat{pH}_{k+5/k}$  pode até ser considerada de certa qualidade, ou seja, os valores preditos estão mais próximos dos valores medidos. Porém, posteriormente a variação da perturbação de base no instante de amostra 575, a predição ficou bastante prejudicada, pois a estimação do parâmetro  $d$  não conseguiu acompanhar o aumento da vazão da base.

Analisando o comportamento dos parâmetros durante a estimação, Figura ??, nota-

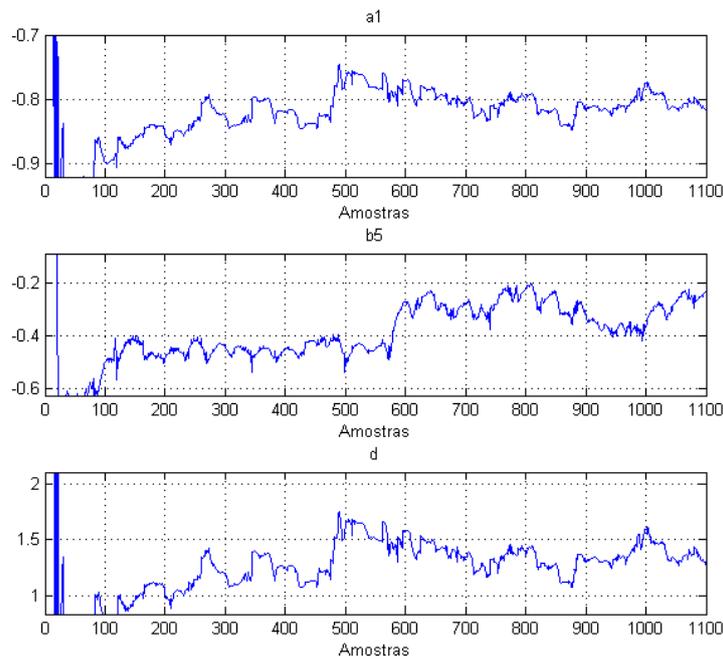


Figura 3.6: Parâmetros do modelo (2.16) para pH 7 e JTA=200 amostras.

se que o parâmetro  $d$  não acompanhou o aumento da vazão de base  $F_b(k)$  ocorrida no instante de amostragem 575. Porém, o parâmetro estimado  $\hat{b}_5$ , que indica o ganho do sistema descrito pelo modelo 2.16, teve seu valor reduzido, evidenciando um ganho menor, que na prática, descreve a necessidade de maior frequência de rajadas para manter o valor do  $pH$  no patamar requerido.

Realizaram-se outras predições em torno do pH 9 e do pH 4, que são mostradas, respectivamente, nas figuras 3.7 e 3.8. Em ambos os testes, o preditor (3.6) também não apresentou bons resultados para a predição do  $p\hat{H}_{k+5/k}$ , caso ainda mais crítico, considerando o pH 4. Principalmente após o aumento da vazão de base, a predição ficou muito prejudicada pois a estimação  $\hat{d}$  não foi sensível ao aumento da perturbação da vazão de base.

Na tentativa de melhorar a predição e obter uma boa estimação da componente invariante da realimentação, altera-se o modelo (2.16), aumentando o número de coeficientes para o modelo, porém com o mesmo tempo morto  $r = 5$ . A nova estrutura do modelo foi escolhida por tentativa e erro, buscando melhorias na predição  $p\hat{H}_{k+5/k}$ .

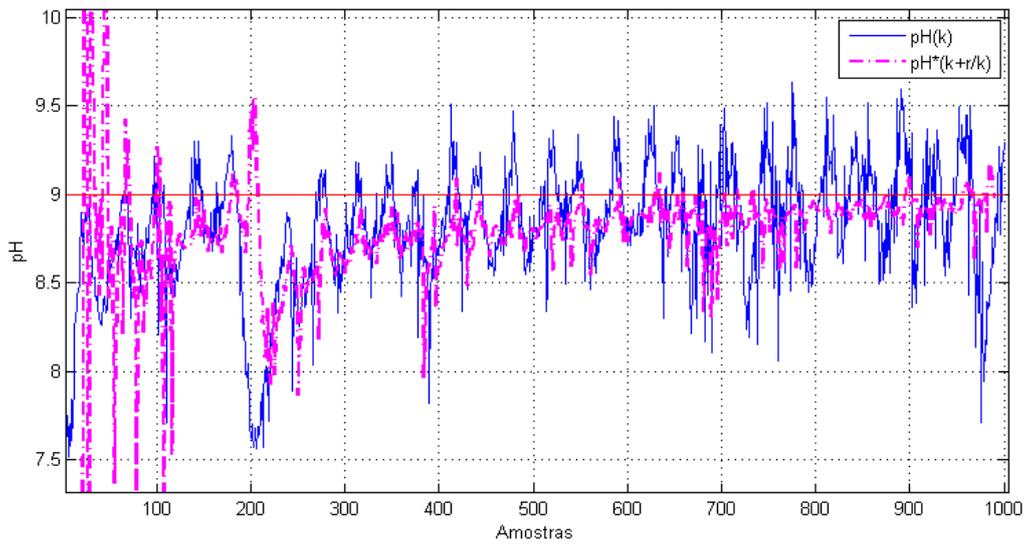


Figura 3.7: Predição de  $pH(k)$  com o preditor (3.6) para pH 9.

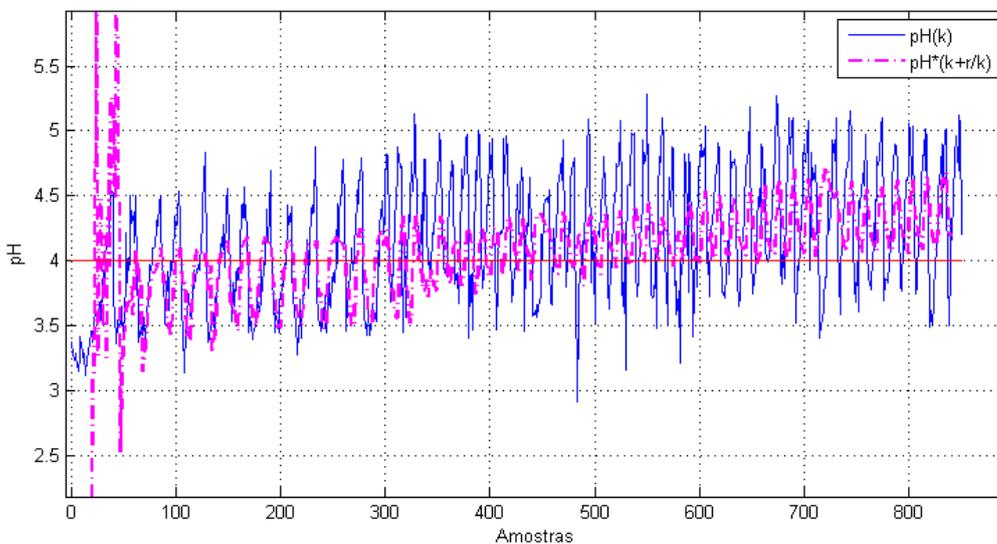


Figura 3.8: Predição de  $pH(k)$  com o preditor (3.6) para pH 4.

Sendo assim, o novo modelo é dado por:

$$\begin{aligned}
 pH(k) = & -a_1pH(k-1) - a_2pH(k-2) - a_3pH(k-3) - a_4pH(k-4) - a_5pH(k-5) \\
 & -a_6pH(k-6) + b_5F_a(k-5) + b_6F_a(k-6) + d
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Aplicando a Equação (3.5) para o modelo (3.7), gera-se o seguinte predictor:

$$\begin{aligned} \hat{pH}_{k+5/k} = & f_0pH(k) + f_1pH(k-1) + f_2pH(k-2) + f_3pH(k-3) + f_4pH(k-4) + f_5pH(k-5) \\ & + g_0F_a(k) + g_1F_a(k-1) + g_2F_a(k-2) + g_3F_a(k-3) + g_4F_a(k-4) + g_5F_a(k-5) \\ & + f'_0d(k) + f'_1d(k-1) + f'_2d(k-2) + f'_3d(k-3) + f'_4d(k-4) \end{aligned} \quad (3.8)$$

O predictor (3.8) apresentou um resultado bem melhor do que o anterior (3.6), com valores preditos  $\hat{pH}_{k+5/k}$  bem próximos dos valores medidos para o pH. Mesmo com o aumento da vazão de base  $F_b(k)$ , o predictor conseguiu acompanhar a variação do processo, pois a estimação do parâmetro da perturbação  $d$  alterou-se bruscamente, após o incremento da perturbação,, contribuindo para a melhoria da predição.

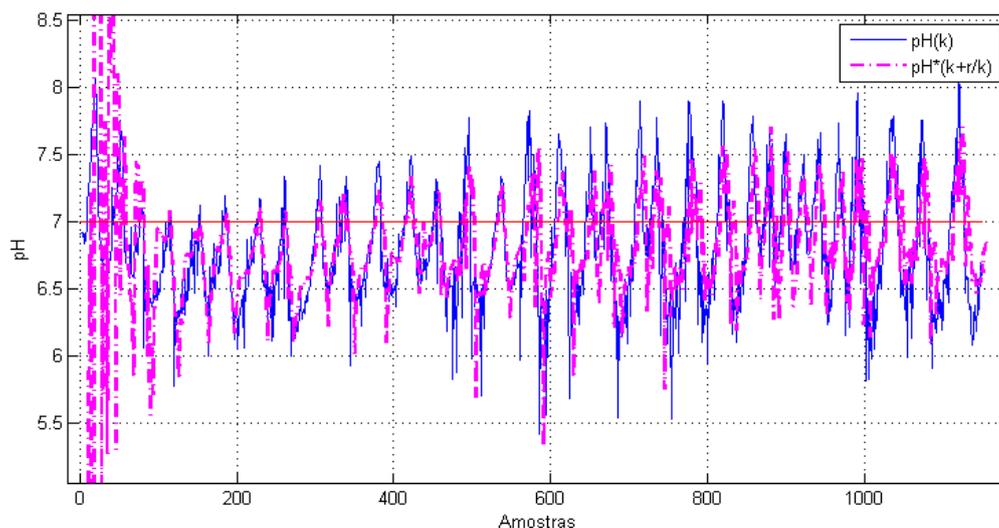


Figura 3.9: Predição de  $pH(k)$  com o predictor (3.8) para pH 7.

As figuras 3.9, 3.11 e 3.12 ilustram a predição em torno dos diversos pontos de operação. Para o pH 7 e pH 9, a predição conseguiu se adequar corretamente aos dados da série temporal, obtendo bons resultados. Já para o pH 4, o predictor (3.8) demonstrou resultados aproximados em relação ao primeiro. Essa discrepância da predição entre os pontos de operação está relacionada com a capacidade que o modelo proposto

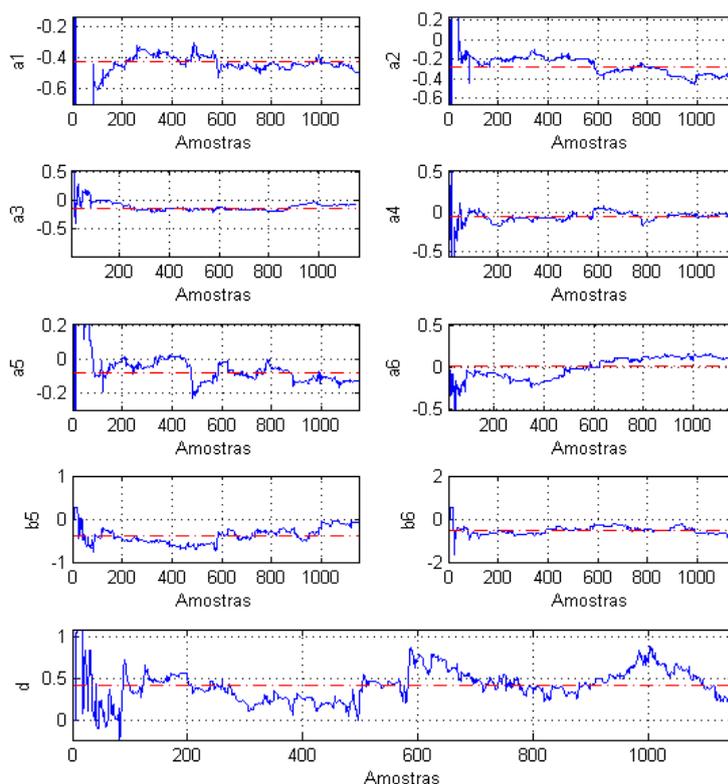


Figura 3.10: Parâmetros do modelo (3.7) para pH 7 e JTA=200 amostras.

tem de explicar a variável pH por toda a faixa de pH. Como descrito no 2, a planta de pH possui uma forte característica não-linear. Em alguns pontos de operação, não se conseguirá generalizar o comportamento do sistema por meio de um único modelo linear simples. Assim, mesmo com um sistema adaptativo, quando o modelo não se adequa aos dados, o preditor deste também não resultará em boas estimativas futuras da saída do processo.

A predição apresentada na Figura 3.12 é uma ratificação da dificuldade de ser adequar um modelo simples para a região do pH 4. Na Figura 3.4, para estimação do Índice de Variância Mínima por um modelo AR com atraso  $r = 5$ , foram necessários mais de 38 regressores para alcançar um valor estável do Índice de Variância Mínima. Sendo assim, é notório que o modelo (3.7) com tempo morto  $r = 5$  não é o mais adequado para a região em torno do pH 4. Porém, como atende aos outros pontos de operação satisfatoriamente, permitindo uma boa predição para os pontos de operação pH 7 e pH 9, esse modelo será utilizado para estimar a variância mínima por meio do Erro de

Predição Ótimo, levando em conta as ressalvas de sua aplicação, como a dificuldade de descrição de alguns pontos de operação..

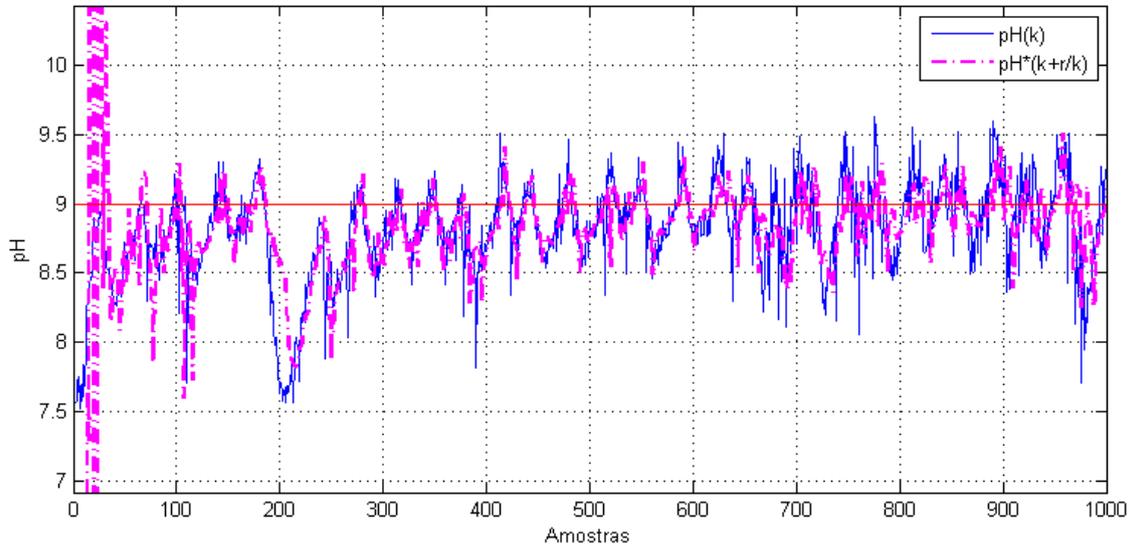


Figura 3.11: Predição de  $pH(k)$  com o preditor (3.8) para pH 9.

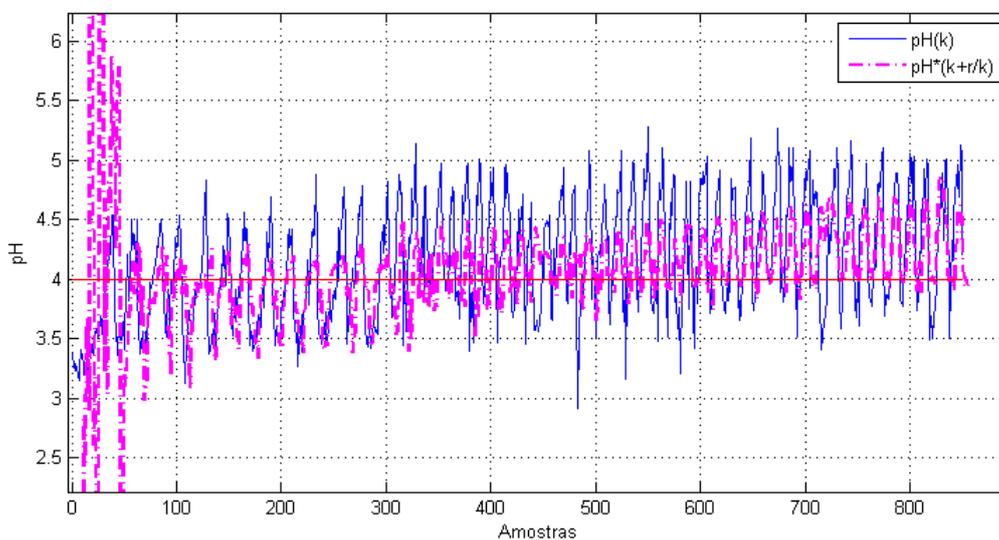


Figura 3.12: Predição de  $pH(k)$  com o preditor (3.8) para pH 4.

O Erro de Predição Ótimo  $p\tilde{H}_{k+r/k}$  é definido, em cada instante de amostragem, como a diferença entre a saída do modelo  $pH(k+5)$  e do preditor  $p\hat{H}_{k+5/k}$ . Estima-se a variância

mínima por meio do Erro de Predição Ótimo da mesma forma que fora realizado para o método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992), aplicando o filtro de média móvel para o quadrado de  $p\tilde{H}_{k+r/k}$ , como mostrado em (3.9).

$$p\tilde{H}_{k+5/k} = pH_{k+5} - p\hat{H}_{k+5/k} \quad (3.9a)$$

$$\hat{\sigma}_{mv}(t) = \beta \cdot \hat{\sigma}_{mv}(t-1) + (1-\beta) \cdot p\tilde{H}^2 \quad (3.9b)$$

Os resultados para a estimação da variância mínima por meio do Erro de Predição Ótimo  $p\tilde{H}_{k+r/k}$  como para todas as demais estratégias, serão comparados no final do Capítulo 3. Porém, em relação ao método que utiliza o Erro de Predição  $e$ , obteve-se um importante avanço para a avaliação da malha de controle através do Índice de Variância Mínima, no sentido de um procedimento para a estimação da variância mínima. Como descrito na Seção 3.2.1, não foi possível definir uma estrutura de modelo única para todos os pontos de operação da planta, pois verificou-se uma discrepância considerável no número de regressões do modelo autoregressivo proposto por Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992), para cada ponto de operação. Já para a estimação descrita nesta seção, mesmo com as dificuldades de se desenvolver uma boa predição para todas as faixas de trabalho, foi possível definir um preditor único, que mesmo não sendo ideal, possibilita a estimação da variância mínima e avaliação do desempenho da planta de pH.

### 3.2.3 Estimação da Variância Mínima pelo Resíduo do Modelo

Buscando uma forma alternativa para determinar a variância mínima, na qual fosse possível fixar uma estrutura única de modelo para toda a faixa de operação da planta de pH, e ainda, desvincular a estimação da variância mínima do filtro de média móvel do sinal de Erro de Predição  $e$  ou do Erro de Predição Ótimo  $p\tilde{H}_{k+r/k}$ , propõe-se um novo método de estimação para a variância mínima.

Mesmo que a grande maioria dos processos seja não-linear, uma boa regulação pode ser generalizada usando modelos de funções de transferências linearizadas em torno de certos pontos de operação (Harris e Billings, 1985), que pode ser definida segundo

a estrutura:

$$y_k = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}\mu_{k-r} + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}\xi_k \quad (3.10)$$

em que  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$  são polinômios no operador de atraso  $z^{-1}$ , cuja função de transferência  $B(z^{-1})/A(z^{-1})$  relaciona a saída  $y'_k$  com a entrada  $\mu_k$ . O fator  $z^{-r}$  representa o tempo morto, que para um sistema discreto, é definido como o número de amostras  $r$  que o sistema leva para manifestar uma reação a um estímulo proveniente de sua entrada. O fator  $C(z^{-1})/A(z^{-1})$  representa o distúrbio  $\eta_k$  adicionado à  $y'_k$ , em que  $\xi_k$  é um ruído branco,  $C(z^{-1})$  é o modelo do ruído e  $A(z^{-1})$  é o mesmo polinômio que define os pólos do sistema. A Figura 3.13 apresenta um desenho esquemático da generalização de um sistema em malha aberta da Equação (3.10).

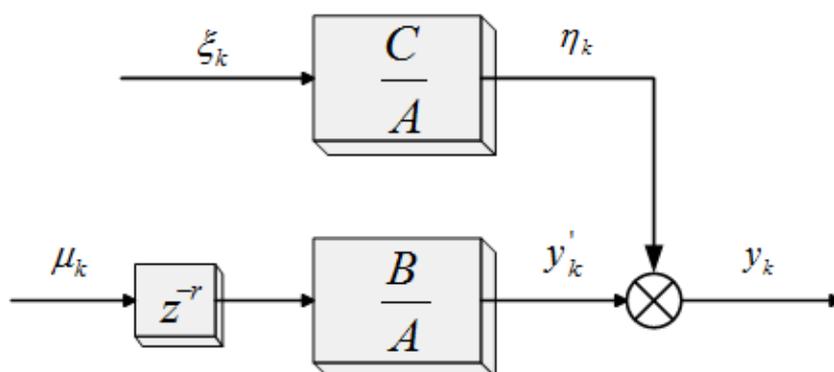


Figura 3.13: Generalização de um processo em malha aberta.

Adaptado de (Harris e Billings, 1985).

Para adaptar o diagrama generalizado da Figura 3.13 para o caso da planta de controle de pH, deve-se considerar a perturbação  $d$  relacionada com a vazão de base  $F_b$ . Assim, ilustra-se o diagrama em malha aberta do pH na Figura 3.14.

O propósito da contribuição deste trabalho é destacar, primeiramente, uma estimativa do distúrbio  $\eta_k$  adicionado à saída do sistema. Para tanto, devem-se fixar modelos para os polinômios  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$  e estimar os parâmetros destes. Em seguida, simula-se, em cada amostragem, a saída  $pH'(k)$  do processo com os parâmetros estimados, com forma a modelar o comportamento exclusivo do bloco  $\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ , sem a adição do distúrbio  $\eta_k$ , considerado **Resíduo do Modelo**, ou seja, o que a modelagem não foi capaz de

explicar. Como descrito na Seção 3.2.2, o modelo com maior número de coeficientes, Equação (3.7), apresentou uma melhor predição  $p\hat{H}_{k+5/k}$ , pois sua estrutura se ajustou melhor aos dados, principalmente nos pontos de operação pH 7 e pH 9. Desta forma, escolhe-se esse mesmo modelo para a simulação da saída  $pH'(k)$ , que, para uma Janela Temporal Assintótica de 200 amostras em torno do pH 7, exibe o resultado na Figura 3.15.

$$pH'(k) = -\hat{a}_1 pH'(k-1) - \hat{a}_2 pH'(k-2) - \hat{a}_3 pH'(k-3) - \hat{a}_4 pH'(k-4) - \hat{a}_5 pH'(k-5) - \hat{a}_6 pH'(k-6) + \hat{b}_5 F_a(k-5) + \hat{b}_6 F_a(k-6) + \hat{d} \quad (3.11)$$

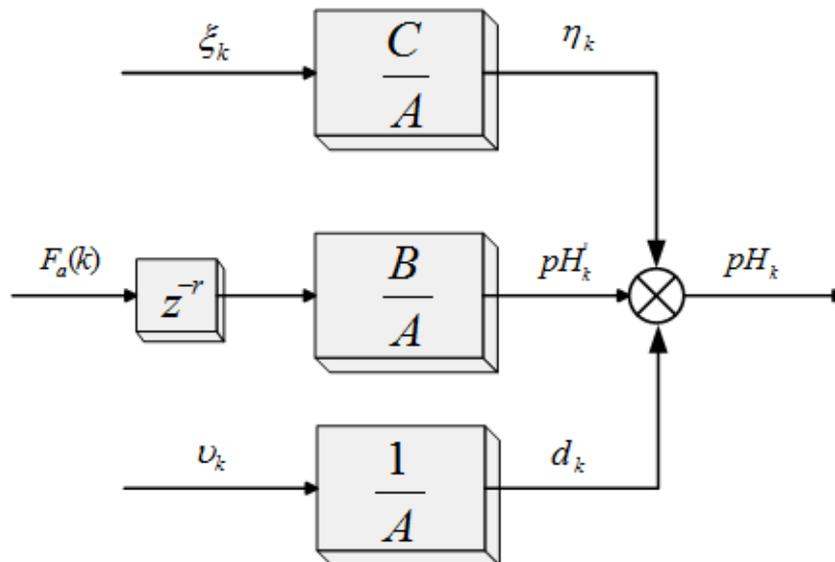


Figura 3.14: Desenho esquemático da planta de pH em malha aberta.

Até aproximadamente a amostra 300, os parâmetros do modelo não tinham convergido. Após a convergência e antes da alteração da vazão de base  $F_b(k)$  (que para o pH 7 ocorre na amostra 575), os valores do modelo simulado aproximaram-se dos valores medidos para a região em torno do pH 7. Porém, posteriormente a esse período, os erros da simulação aumentaram, como verificado graficamente pela Figura 3.15

Para se obter uma estimativa do ruído branco  $\xi_k$ , determina-se, primeiramente, o distúrbio  $\eta_k$ , pela diferença entre o pH medido  $pH(k)$  e o pH simulado  $pH'(k)$ . A parcela

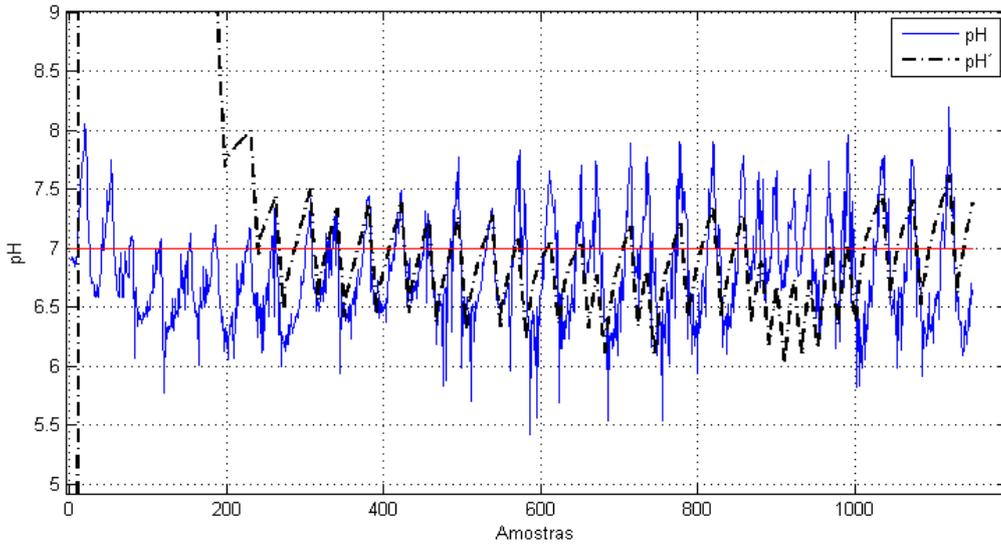


Figura 3.15: Simulação de  $pH'(k)$  com os parâmetros estimados em cada amostragem para pH 7 para o modelo (3.7).

referente à perturbação  $d$  foi também descontada na diferença entre o pH medido e o pH simulado, pois já constava na estimação dos parâmetros e no modelo simulado (3.11). Sendo assim, uma estimativa do que pode ser o distúrbio  $\eta_k$  adicionado ao sistema de pH em torno do ponto de operação pH 7 é mostrado na Figura 3.16, e é definido como Resíduo do Modelo.

$$\eta(k) = pH(k) - pH'(k) \quad (3.12)$$

Destacando-se  $\eta(k)$ , determina-se uma estimativa do ruído  $\xi_k$  pela inversão da relação imprópria  $C(z^{-1})/A(z^{-1})$ . Para todos os experimentos foi utilizado o modelo de ruído  $C(z^{-1}) = 1$ . Desta maneira,  $\xi_k$  é dado pela Equação (3.13):

$$\xi(k) = A(z^{-1}) \cdot \eta(k) \quad (3.13)$$

Assim, a relação entre  $\eta(k)$  e  $\xi(k)$  para o modelo de pH simulado (3.11) é igual a:

$$\xi(k) = \eta(k) + \hat{a}_1\eta(k-1) + \hat{a}_2\eta(k-2) + \hat{a}_3\eta(k-3) + \hat{a}_4\eta(k-4) + \hat{a}_5\eta(k-5) + \hat{a}_6\eta(k-6) \quad (3.14)$$

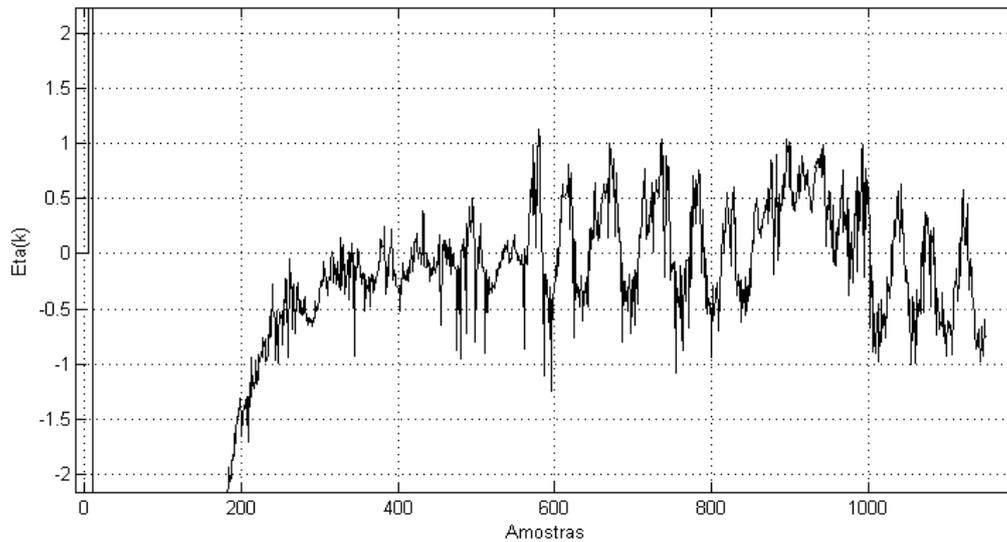


Figura 3.16: Distúrbio adicionado ao sistema considerando modelo (3.11) para pH 7.

Para os dados do ruído  $\eta(k)$  da Figura 3.16, a representação obtida para o ruído  $\xi(k)$  é apresentada na Figura 3.17.

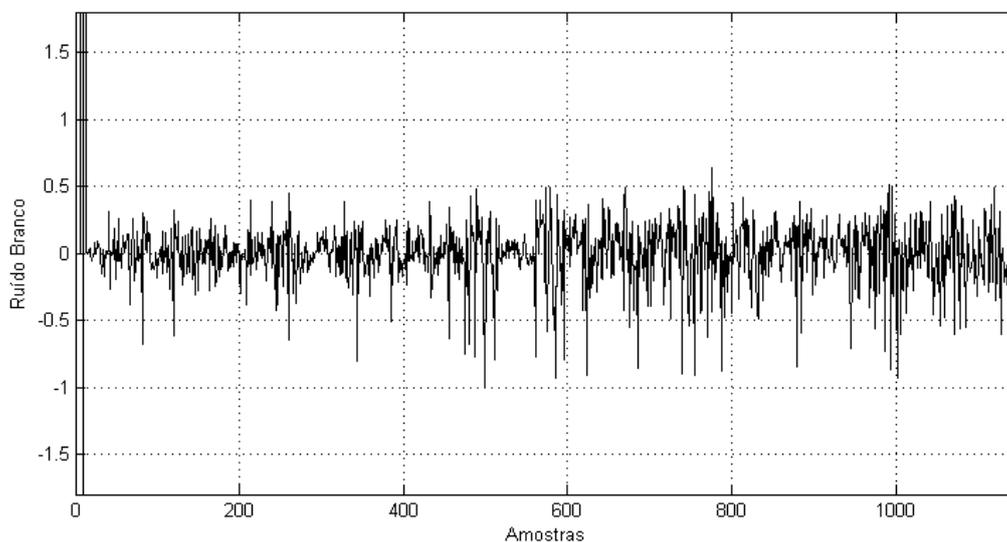


Figura 3.17: Representação do 'ruído branco'  $\xi(k)$  do sistema para pH 7.

Deve-se analisar se a série temporal da Figura 3.17 corresponde a uma boa representação de um ruído branco. Para tanto, aplica-se a função de autocorrelação (FAC)

ao dados, Figura 3.18.

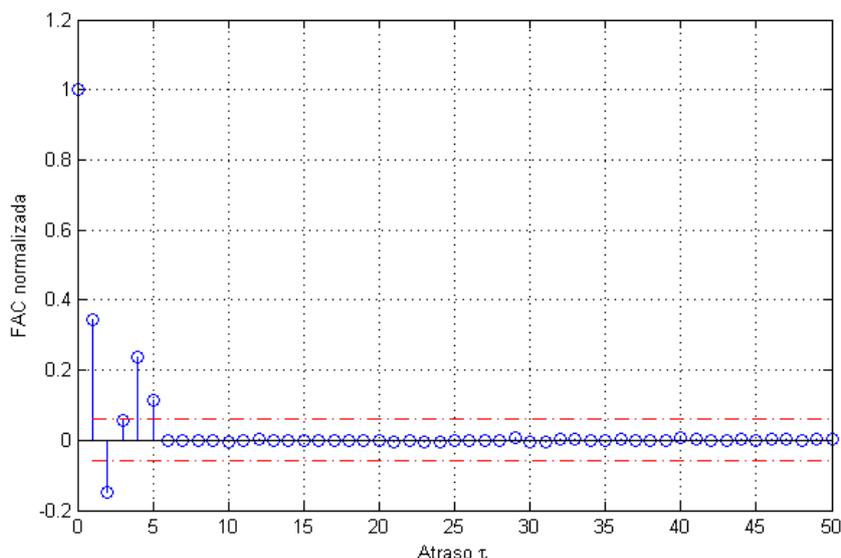


Figura 3.18: Função de autocorrelação normalizada de  $\xi_k$ .

Para um sinal ser considerado um ruído branco, a função de autocorrelação deste deve ser impulsiva, ou seja,  $r_{uu}(\tau) = 0$ , para todo  $k \neq 0$  (Jota, 2004). Nota-se que a representação de  $\xi(k)$  obtida possui correlação até o regressor  $(k - 5)$ . A autocorrelação de atrasos maiores que  $\tau = 5$ , estão dentro das faixas em vermelho, que correspondem ao intervalo de confiança de 95%. Dessa forma, a representação obtida para  $\xi(k)$  não é totalmente decorrelacionada. Mesmo assim, considera-se a série temporal da Figura 3.17 uma aproximação para o ruído  $\xi_k$  do sistema de controle de pH, e calcula-se a sua variância  $\sigma_\xi^2$  pela definição:

$$\sigma_\xi^2 = \frac{\sum (\xi_k - \bar{\xi})^2}{n} \quad (3.15)$$

em que:

- $\sigma_\xi^2$  = variância do ruído  $\xi_k$ ;
- $\bar{\xi}$  = média do ruído  $\xi_k$ ;
- $n$  = número de amostras.

Para o cálculo da  $\sigma_{\xi}^2$  pela definição de variância (3.15), é necessário um conjunto de dados do ruído. Esses só estão disponíveis depois do processo ter sido executado por um período determinado. Portanto, o método proposto nesta seção não calcula a variância mínima de maneira puramente *online*, pois requer uma massa de dados, com um certa quantidade valores amostrados. Considera-se, portanto, que o ruído do processo de pH não sofre variações bruscas durante certos intervalos de tempo, pois está relacionado aos critérios mais intrínsecos a uma malha de controle, como a instrumentação, vibrações, interferência eletromagnética. Sendo assim, é razoável considerar o ruído de um processo constante por em um espaço tempo delimitado, e compatível com a duração dos experimentos.

Desta forma, estimam-se os parâmetros do modelo do sistema e resolve-se a Equação Diofantina, Equação (1.2), calculando uma estimativa da variância mínima  $\hat{\sigma}_{mv}^2$  através da sua definição, Equação (1.5), utilizando os coeficientes estimados do polinômio  $E(z^{-1})$  e a variância do ruído calculada.

$$\hat{\sigma}_{mv}^2 = (1^2 + \hat{e}_1^2 + \hat{e}_2^2 + \hat{e}_3^2 + \hat{e}_4^2)\sigma_{\xi}^2 \quad (3.16)$$

Porém, essa expressão só é válida quando se garante a convergência dos parâmetros do sistema e, conseqüentemente, dos coeficientes do polinômio  $E(z^{-1})$ . Assim, analisando inicialmente o caso não-linear, supõe-se que os parâmetros do sistema oscilem bastante durante o procedimento de estimação. Contudo, para a planta de controle de pH com a modelagem proposta, observou-se que os parâmetros estimados apresentam um comportamento estável. O perfil de estimação dos coeficientes de é apresentado na Figura 3.19.

Por meio do perfil dos parâmetros mostrado na figura abaixo, constata-se que a estimação do sistema de pH é bastante estável. Apresenta forte variação apenas quando a planta sofre uma mudança de estado, provocada pelo aumento da vazão de base. Mesmo com essa considerável estabilidade na estimação, o cálculo da variância mínima é falseado, pois os coeficientes do polinômio  $E(z^{-1})$  não são constantes durante o cálculo teórico da variância mínima.

Diante disso, adapta-se uma simples solução que visa manter constante os coeficientes  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  até que suas estimações apresentem valores discrepantes. Neste caso,

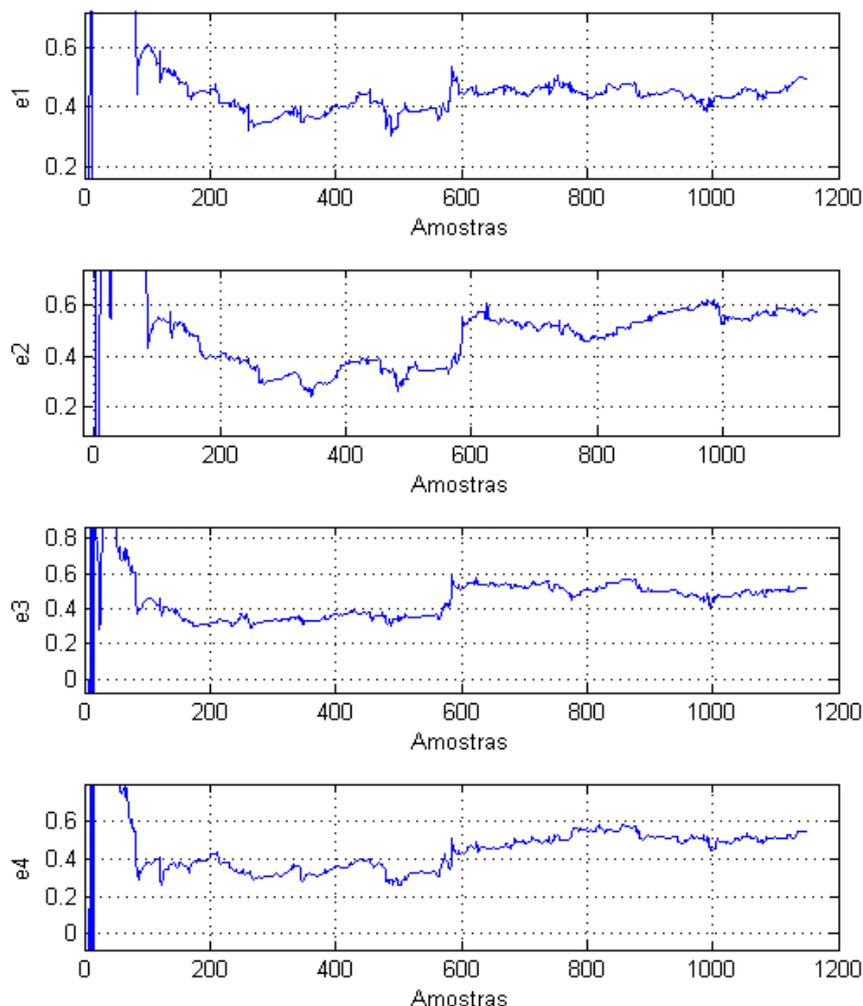


Figura 3.19: Comportamento dos coeficientes de  $E(z^{-1})$  durante a estimação.

entende-se por valores discrepantes uma variação maior ou menor que um certo percentual do valor atual. Assim, para implementação do sistema de pH e considerando o modelo (3.7), fixou-se que, para um valor 10% superior ou inferior em relação ao anterior, devem ser atribuídos aos coeficientes os valores atuais da estimação. Caso contrário, devem permanecer inalterados, como forma de buscar um valor constante para a soma dos coeficientes ao quadrado no cálculo da variância mínima e assim, atender à restrição da sua definição. Na Figura 3.20 compara-se o perfil de estimação

para cada instante de amostragem (—) com o perfil de estimação dos coeficientes de  $E(z^{-1})$  tendo implementado essa simples heurística (—).

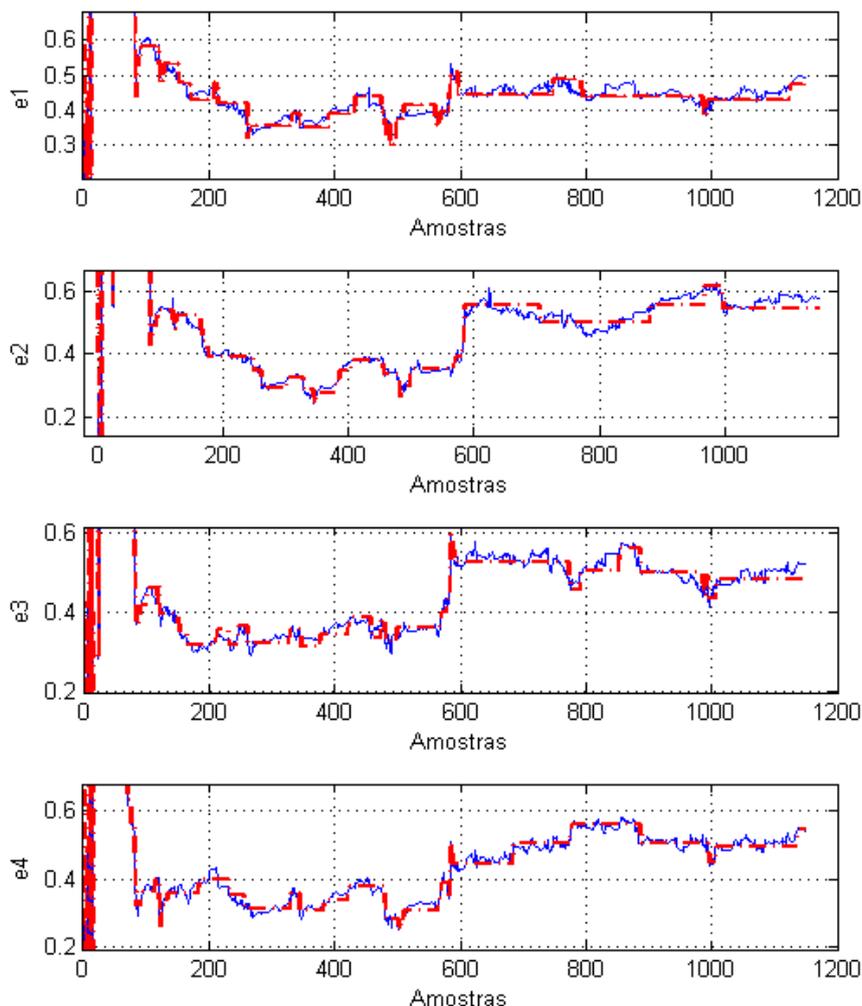


Figura 3.20: Comparação do perfil dos coeficientes de  $E(z^{-1})$  estimados em cada amostragem (—) com o perfil referente à uma simples heurística (—).

A solução desenvolvida apresentou bons resultados, já que acompanha o perfil original de estimação e, ao mesmo tempo, diminui as oscilações dos coeficientes. Entende-se, portanto, que o problema foi atenuado, já que durante alguns instantes de amostragem, os coeficientes permanecerão constantes, até que a nova estimação exceda o limite especificado.

Após essa discussão detalhada acerca das características de alguns métodos de estimação da variância mínima, verificam-se, na próxima seção, os efeitos na estimação da variância mínima para algumas alterações nas configurações do estimador, como também, para mudanças nas características de operação do processo. Objetiva-se com isso, definir a melhor estrutura para a estimação da variância mínima para um sistema não-linear, que possui comportamento bem diferente em cada ponto de operação e para o qual tem-se certa dificuldade em se determinar um modelo único para toda faixa de trabalho.

### 3.3 Efeitos na Estimação da Variância Mínima

Em todos os métodos descritos na seção anterior, o cálculo do Índice de Variância Mínima está intimamente relacionado com algumas configurações do estimador de parâmetros, como o tamanho da Janela Temporal Assintótica e a estrutura do modelo. Esses elementos devem ser determinados por tentativa e erro, ao comparar todos os resultados das simulações. Além disso, como a planta de pH é um processo não-linear, verifica-se o comportamento da variância mínima no caso de novas características de operação do sistema, analisando se os métodos de estimação estudados são sensíveis a essas variações e são capazes de estimar valores corretos para os novos comportamentos do sistema.

#### 3.3.1 Relativo à alteração do modelo

Analisa-se, primeiramente, o efeito da ordem do modelo no cálculo da métrica escolhida neste trabalho, o Índice de Variância Mínima. Para o Método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992), as conseqüências na variação do modelo para o Índice de Variância Mínima foram apresentadas nas figuras 3.2 e 3.4. O índice apresenta alterações com o incremento dos números de regressores, até uma certa ordem do modelo, a partir da qual não exibe diferenças significativas. O mais crítico para o caso de dinâmica não-linear é o fato de que não se obteve uma estrutura de modelo comum para toda a faixa de operação. Como ilustração e comparação com os outros pontos de operação, apresenta-se o gráfico de variação do Índice de Variância

Mínima para o pH 7 na Figura 3.21.

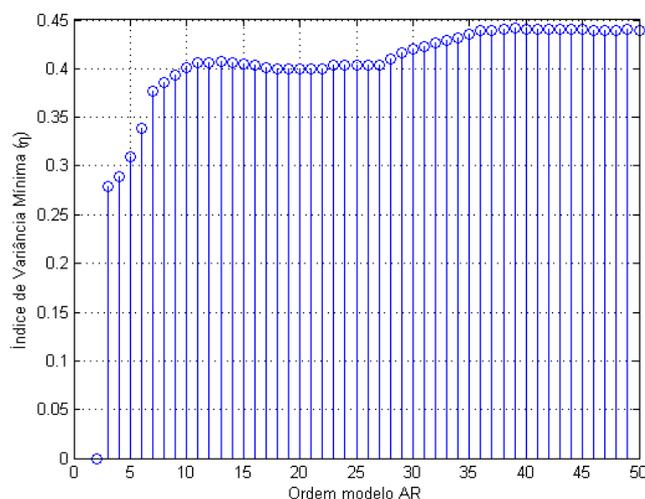


Figura 3.21: Variação do Índice de Variância Mínima ( $\eta$ ), Equação 1.7, em função da ordem do modelo AR para o pH 7 para o método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) não-recursivo.

Para o pH 7, o número necessário para manter a estabilidade do Índice de Variância Mínima foi, aproximadamente, de 36 regressores. Mais uma vez, o modelo do tipo AR requer uma grande quantidade de coeficientes para o modelo do tipo AR, o que não é interessante para o procedimento de estimação de parâmetros Jota (2004). Além disso, não se obteve um número comum de regressores ao analisar os diversos pontos de operação, o que dificulta a avaliação do sistema de pH de uma forma mais geral e completa, impossibilitando a estimação da variância mínima por meio de uma única estrutura do modelo.

Em relação aos outros dois métodos, estimação pelo Erro de Predição e pelo Resíduo do Modelo, verificou-se que ocorreram discrepâncias na predição  $\hat{pH}_{k+5/k}$  e na simulação do  $pH'_k$  para os dois modelos considerados neste trabalho, apresentados em (2.16) e (3.7). Mostrou-se que os resultados com o modelo com maior número de parâmetros foi superior para a predição  $\hat{pH}_{k+5/k}$  e simulação  $pH'_k$ . Sendo assim, nesta seção, analisam-se os efeitos do modelo na estimação da variância mínima. A Figura 3.22 ilustra o comportamento das estimções de variância mínima para a estrutura de modelo (2.16) para o pH 7, além da estimativa da variância da saída  $\hat{\sigma}_{pH}^2$  com o controlador GPC.

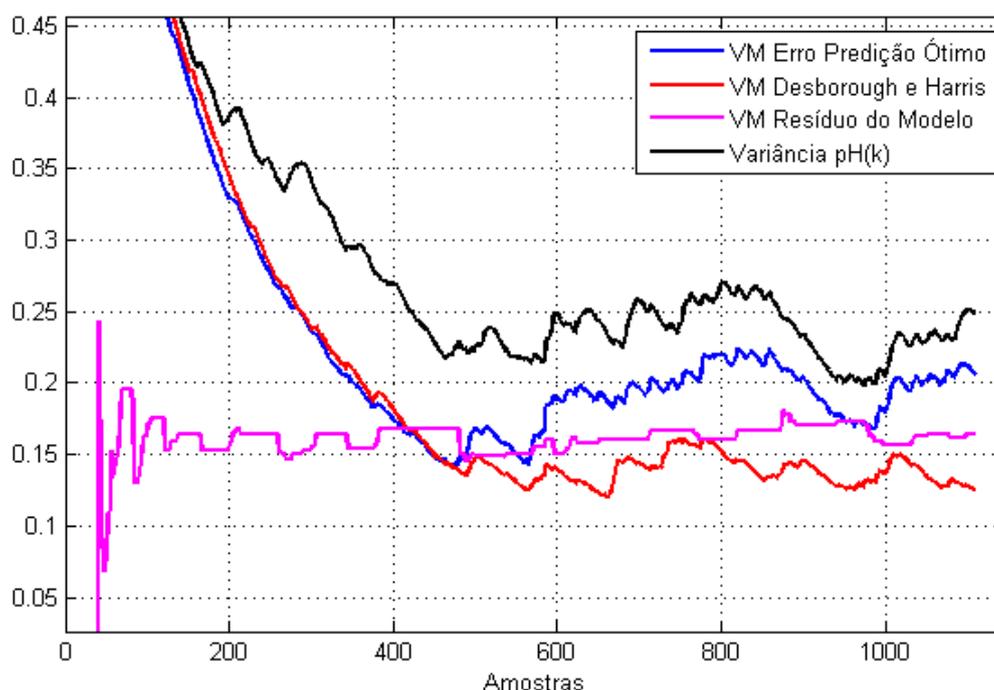


Figura 3.22: Comparação das estimações da VM para o modelo (2.16) e da  $\hat{\sigma}_{pH}^2$  com JTA=200 amostras.

Para o Método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) escolheu-se um modelo do tipo AR até o regressor  $pH(k - 36)$ . A Janela Temporal Assintótica foi configurada em 200 amostras. Todas as estimativas de variância foram inicializadas em  $\hat{\sigma}_{mv} = 0.5$ , de forma a contribuir para uma convergência mais rápida dos métodos que utilizam o filtro de média móvel. A Figura 3.23 apresenta o comportamento das estimativas dos métodos para o modelo (3.7) e aplicam as mesmas configurações descritas acima.

Comparando as figuras 3.22 e 3.23, nota-se que a estimação realizada por meio do Erro de Predição Ótimo apresentou diferenças no valor de convergência da estimativa para a variância mínima, que, para o modelo (2.16), foi maior quando comparado à estimativa com o modelo (3.7). Essa situação é consequência da perda de qualidade na predição no caso do modelo com menos coeficientes no modelo, o que reflete diretamente na estimação da variância mínima. Para a Figura 3.23, a estimação pelo Erro de Predição, representada por (—), é mais estável, devido à melhor predição

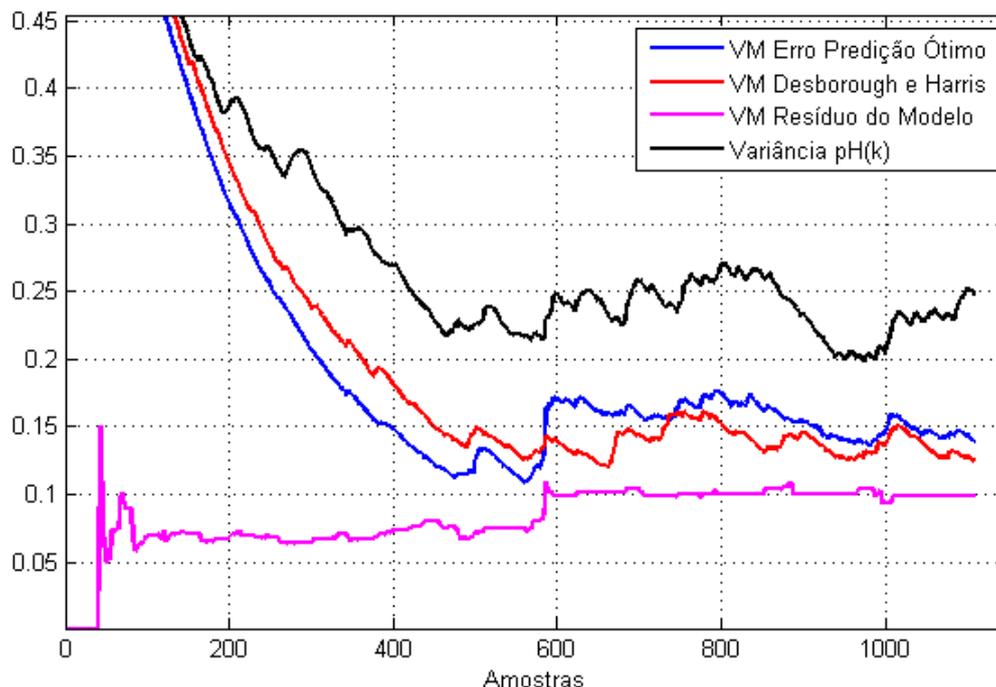


Figura 3.23: Comparação das estimações da VM para o modelo (3.7) e da  $\hat{\sigma}_{pH}^2$  com JTA=200 amostras.

do sistema com o modelo (3.7). Observando a estimacão pelo Resíduo do Modelo, representado no gráfico por (—), conclui-se que, os valores calculados para a variância mínima para a Figura 3.22 foram maiores do que para a Figura 3.23. Apesar de, na Figura 3.22, os valores indicarem maior consistência, deve-se atentar para o fato de que a simulao de  $pH'(k)$  com o modelo  $pH(k) = -a_1 \cdot pH(k-1) + b_r \cdot F_a(k-r) + d$  não exibe um bom resultado (Figura 3.24). Sendo assim, ainda não  possível concluir qual das duas estimativas  a correta, já que não se conhece o valor real da VM para o processo de pH.

Nas figuras 3.22 e 3.23 atentou-se também para um fato curioso em relao  utilizao do filtro de média móvel. Esse recurso  aplicado na definio da variância atual do controlador, no método do Erro de Predio timo e no método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992). Para o pH 7, o controlador GPC exibe uma melhora significativa de desempenho entre as amostras 800 e 1000, evidenciada pela diminuio do valor para a variância do controlador na Figura 3.23. Porém, mesmo

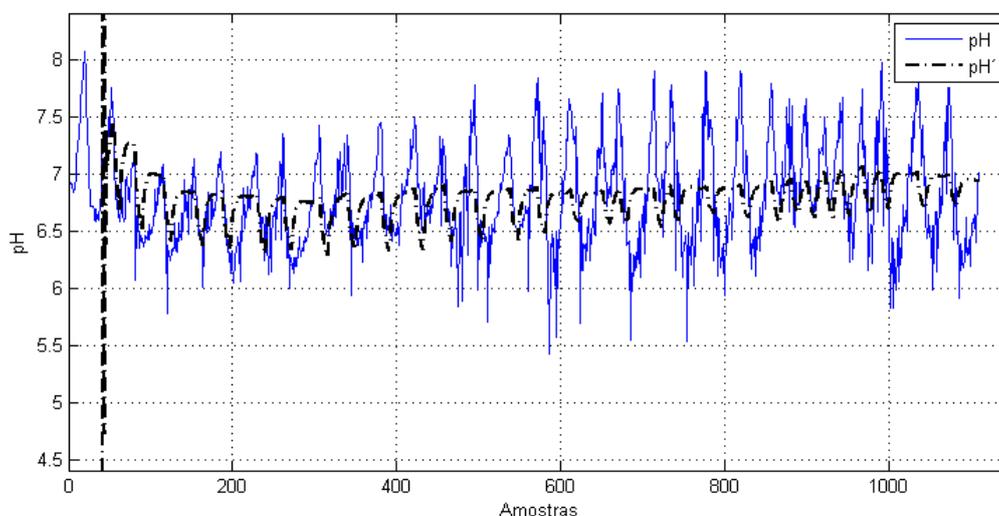


Figura 3.24: Simulação de  $pH'(k)$  com os parâmetros estimados em cada amostragem para pH 7 para o modelo (2.16).

sem qualquer alteração no processo, a variância mínima estimada pelo método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) e pelo Erro de Predição Ótimo, também acompanha essa tendência de decréscimo. Esse fato mascara o resultado final do Índice de Variância Mínima, pois a estimativa da variância da saída atual  $\hat{\sigma}_y^2$  é acompanhada da estimativa da variância mínima  $\hat{\sigma}_{mv}^2$ , e por fim, a razão entre os dois valores permanecerá praticamente inalterada, mesmo com a melhora do desempenho do controle. Esse fato é também evidenciado na Figura 3.22 para uma JTA=200. Para o cálculo realizado pelo Resíduo do Modelo, a variância mínima permaneceu constante nessa faixa de dados analisada. Sendo assim, o Índice de Variância Mínima com estimação realizada pelo Resíduo do Modelo conseguirá determinar, numericamente, a melhora do controle durante esse período.

### 3.3.2 Relativo às configurações do estimador

Como a determinação da VM está intimamente ligada às questões referentes à estimação de parâmetros, é necessário que sejam analisados os resultados referentes às alterações nas configurações do estimador. Observa-se, portanto, o comportamento das estimações para alterações na Janela Temporal Assintótica. Anteriormente, em

todos os casos, optou-se por um JTA = 200 amostras, escolha que fornece um longo tempo até a convergência. Sendo assim, escolhe-se um novo valor igual a 100 amostras.

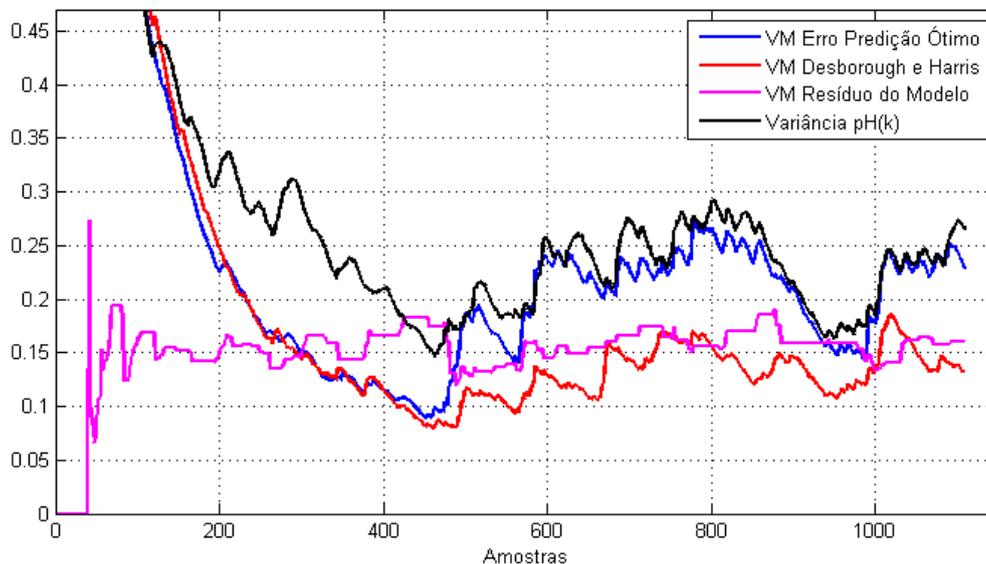


Figura 3.25: Comparação das estimações da VM para o modelo (2.16) e da  $\hat{\sigma}_{pH}^2$  com JTA=100 amostras.

Como esperado, a mudança no fator de esquecimento possibilitou que os métodos convergissem mais rapidamente, porém, ocasionou maiores oscilações dos parâmetros e, conseqüentemente, das estimações da VM. Essa melhora obtida convergência dos métodos foi pequena, comparando-se com o tempo requerido para o estabelecimento de estimativas praticamente constantes para o cálculo pelo Resíduo do Modelo, representado por (—). Como utiliza diretamente os parâmetros estimados do modelo para a determinação da variância mínima, são necessárias em torno de 40 amostras para atingir a convergência, como mostra a Figura 3.26. Já para os métodos que implementam um filtro de média móvel, do tipo  $\hat{\sigma}_{mv}(t) = \beta \cdot \hat{\sigma}_{mv}(t-1) + (1-\beta) \cdot p\hat{H}_{k+5/k'}^2$ , decorre bastante tempo até atingir um valor razoável, algo por volta de 400 amostras. Essa é uma grande vantagem da alternativa proposta por este trabalho.

Ademais, com a alteração da JTA foi possível chegar a uma conclusão a respeito de qual é a estimação correta para a variância mínima do sistema. Pela Figura 3.26, nota-se que as estimações pelo Método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992)

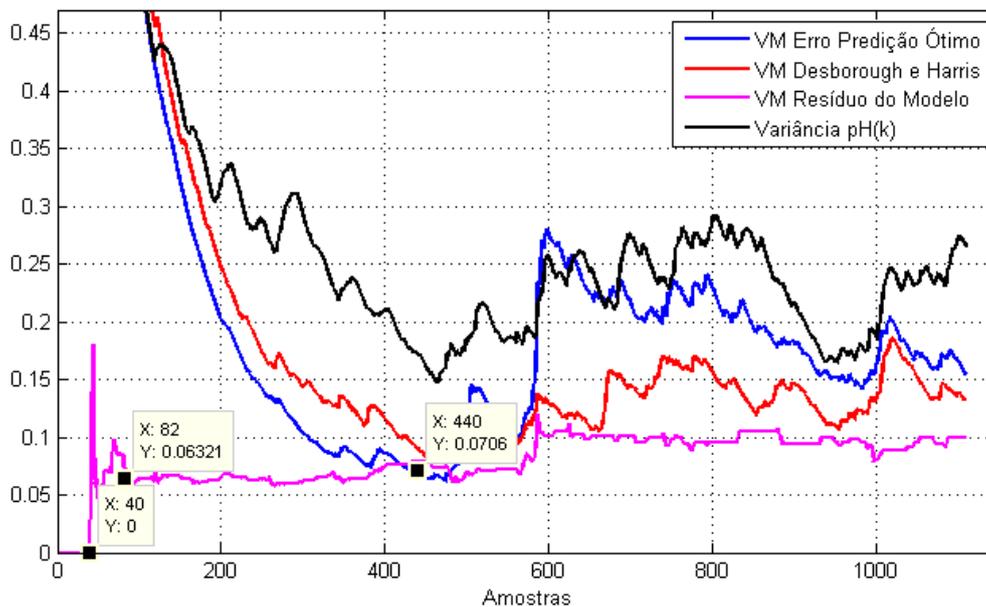


Figura 3.26: Comparação das estimativas da VM para o modelo (3.7) e da  $\hat{\sigma}_{pH}^2$  com JTA=100 amostras.

e pelo Erro de Predição Ótimo se aproximaram dos valores calculados para o Resíduo do Modelo com maior número de regressores, dado pela Equação (3.7), ao contrário do que aconteceu para o modelo (2.16). Dessa forma, podemos fazer uma inferência, de certa forma, evidente, mas que foi mascarada na Seção 3.3.1: o modelo que melhor simula os valores de pH com os parâmetros estimados, também disponibiliza melhores resultados para a determinação da variância mínima.

Em uma última análise, adota-se uma Janela Temporal Assintótica de 400 amostras, na qual não ocorre a convergência dos valores da variância mínima para as estimativas que utilizam o filtro de média móvel, enquanto o cálculo da VM pelo método do Resíduo do Modelo pouco se altera.

### 3.3.3 Relativo às perturbações no sistema

Em todos os ensaios realizados na malha de controle de pH com o controlador GPC, foram aplicadas perturbações no sistema, originadas do aumento da vazão de base  $F_b(k)$ . Essa mudança, que para o pH 7 ocorreu no instante de amostragem 575,

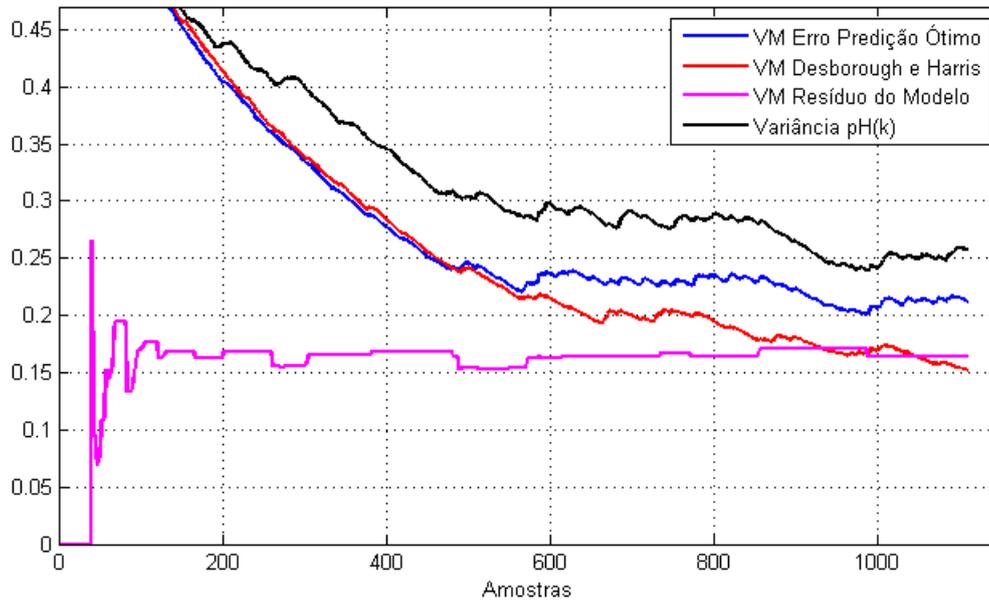


Figura 3.27: Comparação das estimativas da VM para o modelo (2.16) e da  $\hat{\sigma}_{pH}^2$  com JTA=400 amostras.

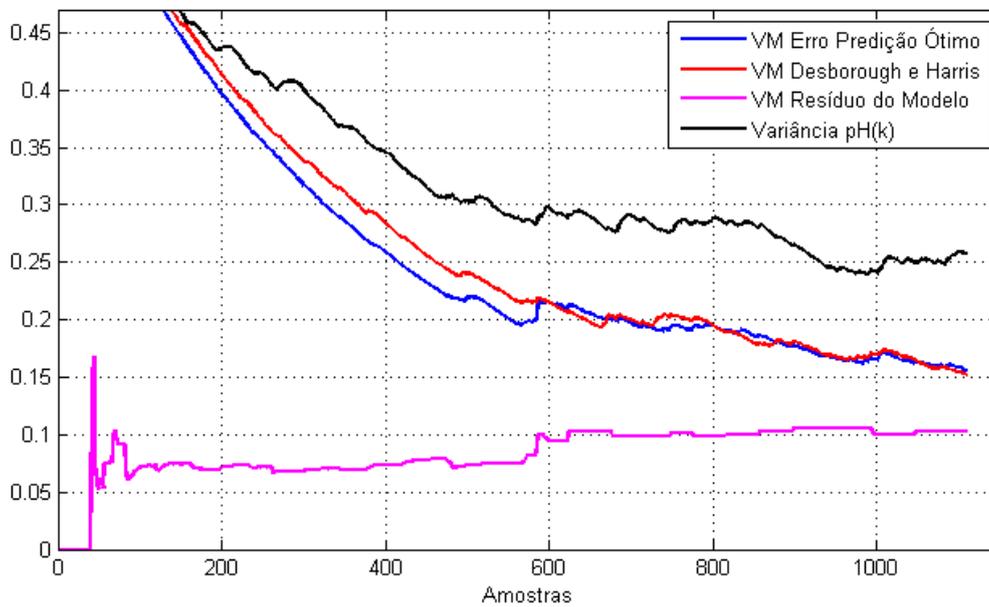


Figura 3.28: Comparação das estimativas da VM para o modelo (3.7) e da  $\hat{\sigma}_{pH}^2$  com JTA=400 amostras.

implica em um novo comportamento para o processo, já que uma nova condição é estabelecida. Essa, por sua vez, se traduz em valores diferentes para o modelo e também para a variância mínima. Pelos gráficos analisados anteriormente, nota-se que as estimativas dos métodos são sensíveis a essa 'nova' mínima variância teórica.

A proposta de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) entende a mudança na planta por meio da estimação do parâmetros do processo. Porém, o estabelecimento do novo patamar é lento e gradual como pode ser visto pela Figura 3.23. Verifica-se que esse processo é demorado pelo fato de o método aplicar um filtro de média móvel que releva amostras anteriores. Porém, como percebido para a predição  $p\hat{H}_{k+5/k}$  e para simulação  $pH'_k$ , um número maior de coeficientes em um modelo facilita a adaptação, devido ao maior grau de liberdade deste tipo de modelo (Jota, 2004).

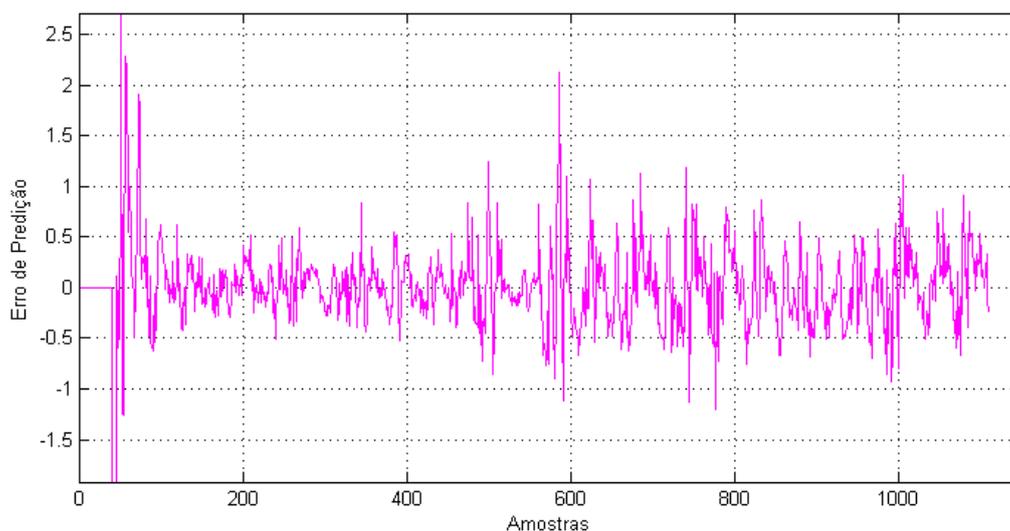


Figura 3.29: Erro de predição para pH 7 e preditor (3.8).

A estimação pelo Erro de Predição Ótimo absorve rapidamente a alteração estabelecida, pois o erro da predição ótima é imediatamente alterado e, mesmo com o filtro de média móvel, a mudança é percebida. Porém, a mudança na estimação excede, um pouco, a real variação do processo. Esse fato está relacionado com o encadeamento de alguns erros. Com o novo processo, os parâmetros estimados anteriormente contêm um erro associado. Esses parâmetros, que nesse momento, não representam mais o sistema, produzem uma predição muito discrepante em relação aos valores medi-

dos, (Figura 3.29), falseando os resultados do novo mínimo teórico estimado, como observado na Figura 3.23.

O método de determinação do Resíduo do Modelo 'enxerga' esse processo perturbado também através da estimação dos parâmetros. A mudança nos coeficientes do polinômio  $E(z^{-1})$  é imediata, porém, sendo que os erros oriundos do estimador não são propagados. Assim, mesmo não conhecendo os valores reais da VM teórica antes e depois da perturbação, tem-se a percepção de que a estimativa apresentada para a nova condição por meio do Resíduo do Modelo é a mais coerente.

### 3.4 Conclusão

Neste capítulo foram analisadas todas as condições necessárias para o cálculo do Índice de Variância Mínima para uma malha de controle não-linear. Verificou-se que uma atenção especial deve ser dada a definição do tempo morto da planta, por ser este um requisito da métrica escolhida, o Índice de Variância Mínima. Analisou-se o comportamento de três estimativas da mínima variância teórica para o processo de controle de pH. Foi demonstrado que o Método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) possui como principal restrição a dificuldade de escolher uma estrutura de modelo única para a toda a faixa de operação do pH. A análise pelo Erro de Predição Ótimo apresentou bons resultados, mas o seu ponto negativo está relacionado com a estimação realizada pelo filtro de média móvel que converge lentamente. Por fim, o terceiro método, que calcula a variância mínima através da sua definição dada pela Equação (1.5), mostrou rápida convergência e resultados satisfatórios. Porém, foram necessárias algumas considerações a respeito das características do ruído e da convergência dos coeficientes do polinômio  $E(z^{-1})$ . Toda essa análise será aplicada na sequência desse trabalho, com o intuito de avaliar o desempenho do sistema de pH pelo Índice de Variância Mínima.

---

# Análise dos Resultados Experimentais

---

## 4.1 Introdução

Este capítulo abrange os resultados da avaliação de desempenho para a malha de controle de pH, presente no Laboratório de Controle de Processos Industriais (LCPI). Examinam-se as influências dos métodos de estimação da variância mínima do capítulo anterior no diagnóstico dos controladores implementados. Conjuntamente, analisa-se a coerência dos resultados apresentados pela métrica em relação ao comportamento real do controle.

## 4.2 Controladores Utilizados

Os controladores avaliados neste capítulo foram projetados no trabalho de (Carvalho, 2010) para a planta de controle de pH. O primeiro é o controlador adaptativo GPC (*Generalized Predictive Control*). Já o segundo é um controlador PI, que foi inicialmente projetado para apresentar um pólo dominante em malha fechada semelhante ao GPC (Carvalho, 2010).

### 4.2.1 GPC - (*Generalized Predictive Control*)

Como descrito no Capítulo 3, o GPC projetado por (Carvalho, 2010) foi aplicado com uma heurística simplificada, baseada no custo relacionado a emitir uma rajada: *se o custo de não emitir uma rajada de ácido no instante de amostragem atual for menor do que o custo de emití-la, então a rajada não deve ser emitida*. Além disso, foi atribuído ao parâmetro de sintonia  $\lambda$  um valor nulo. Dessa forma, a função de custo associada a emissão ou não de uma rajada em um determinado instante de amostragem é atribuída

somente ao erro entre o pH e o *setpoint*.

O horizonte de predição do controlador foi definido examinando o efeito de cada rajada de ácido na dinâmica do pH. Foi estabelecido um horizonte de 24 amostras, que englobam 4 amostras relativas ao tempo morto, 10 amostras para a dinâmica de redução do pH relativa a vazão de ácido e mais 10 relativas ao efeito da vazão constante de base. O tempo morto da malha de pH utilizado por (Carvalho, 2010) foi diferente do estabelecido pelo presente trabalho. Porém, o controlador GPC é capaz de lidar com variações do tempo morto do processo, caso as discrepâncias estejam dentro da faixa do horizonte de predição estabelecido segundo (Clarke et al., 1987). Como ainda são consideradas mais 20 amostras relacionadas à dinâmica variável de adição dos reagentes, não há prejuízo na escolha de valores diferentes para o tempo morto.

O GPC é um controlador adaptativo, que aplica a estimação de parâmetros para calcular a sua ação de controle e assim atuar corretamente em cada ponto de operação. Dessa forma, ao acionar a planta, uma fase inicial de estimação do modelo de rajada de ácido é necessária, pois o comando da bomba peristáltica é intermitente, o que dificulta a determinação correta dos parâmetros. Sendo assim, esse procedimento requer o bombeamento de duas rajadas, bem espaçadas, para que o sistema seja capaz de definir precisamente a dinâmica do modelo de rajada projetado por (Carvalho, 2010). Esse recurso de inicialização gera erros iniciais grandes, que devem ser descontados na avaliação de desempenho para melhorar a convergência dos métodos.

### 4.2.2 Controlador PI

A título de comparação de desempenho, Carvalho (2010) projetou um controlador PI que, inicialmente, apresenta um pólo dominante semelhante ao controlador GPC. Em torno do ponto de operação de pH 6,5, Carvalho (2010) aproximou a resposta em malha fechada do sistema controlado pelo GPC por um sistema de primeira ordem com atraso puro de tempo, mostrado em (4.1).

$$G_{MF}(s) = \frac{e^{-6,4s}}{15s + 1} \quad (4.1)$$

Por meio do método da síntese direta, o controlador PI foi aproximado para:

$$C(s) = \frac{F_a(s)}{E(s)} = \frac{5.5962s + 1}{-27.6402s} \quad (4.2)$$

O ganho proporcional  $K_p = -0.2024$  e tempo integral  $T_i = 5.5962s$ . Para essa sintonia, a variável manipulada apresentou saturação em todas as situações testadas. Para diminuir esse problema, Carvalho (2010) dessintonizou o controlador, diminuindo sua ação integral para  $T_i = 120s$ .

## 4.3 Resultados Experimentais

### 4.3.1 Controlador GPC

Conhecendo os controladores que serão avaliados na planta de controle de pH, calcula-se, para todos os casos, o Índice de Variância Mínima aplicando os distintos métodos de estimação da VM analisados no Capítulo 3. A fórmula escolhida para a avaliação do desempenho é:

$$\eta = 1 - \frac{\sigma_{mv}^2}{\sigma_y^2} \quad (4.3)$$

Em um primeiro momento, avalia-se o desempenho do GPC em torno do pH 7. Baseado no que foi analisado no Capítulo 3, escolhe-se a JTA=200 amostras e o modelo (3.7). A série temporal que representa a saída do controlador a ser avaliado é apresentada na Figura 4.1. Baseado nas estimativas da Figura 3.23, escolhem-se valores iniciais próximos da convergência de cada um dos métodos, de maneira a reduzir o tempo até o estabelecimento das estimativas, resultando na Figura 4.2.

Embora tenha sido realizado um experimento com as mesmas configurações do anterior, com Janela Temporal Assintótica igual a 200 amostras e a aplicação do modelo com maior número de coeficientes, o resultado apresentado na Figura(4.2) difere do que foi mostrado na Figura(3.23). Considerando a inicialização com valores próximos aos de convergência, as estimativas do método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) e do Erro de Predição Ótimo melhoraram, se aproximando do resultado para a estimativa do Resíduo do Modelo. Porém, a análise pelo Erro de Predição Ótimo

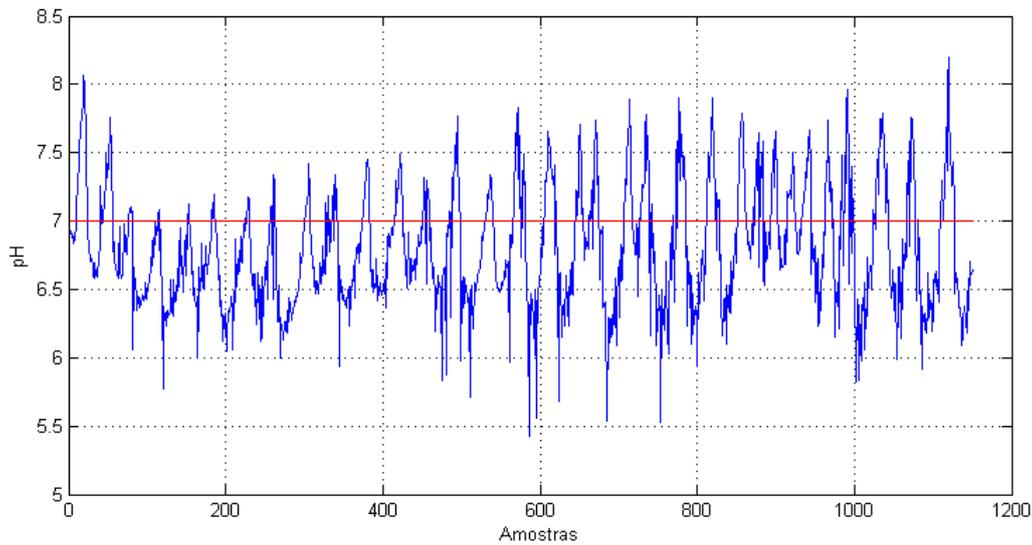


Figura 4.1: Saída do controlador GPC para o ponto de operação em torno do pH 7.

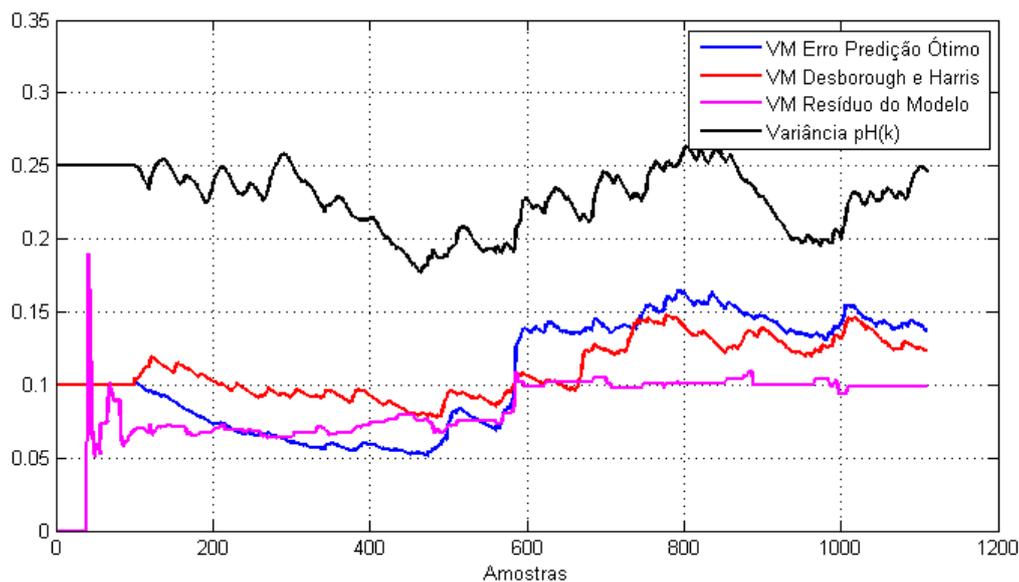


Figura 4.2: Comparação das estimações da VM para o modelo (3.7) e da  $\hat{\sigma}_{pH}^2$  com JTA=200 amostras em torno do pH 7, considerando a inicialização das estimativas.

continou exibindo excessos na para a estimação da variação da perturbação de base do processo. As estimativas da variância mínima que implementam o filtro de média móvel seguiram a melhora do desempenho do controlador entre as amostras 800 a

1000.

Sendo assim, calcula-se o Índice de Variância Mínima para a relação entre a variância do controlador GPC com as três estimativas analisadas no capítulo anterior: Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) (—); Erro de Predição Ótimo (—) e Resíduo do Modelo (—).

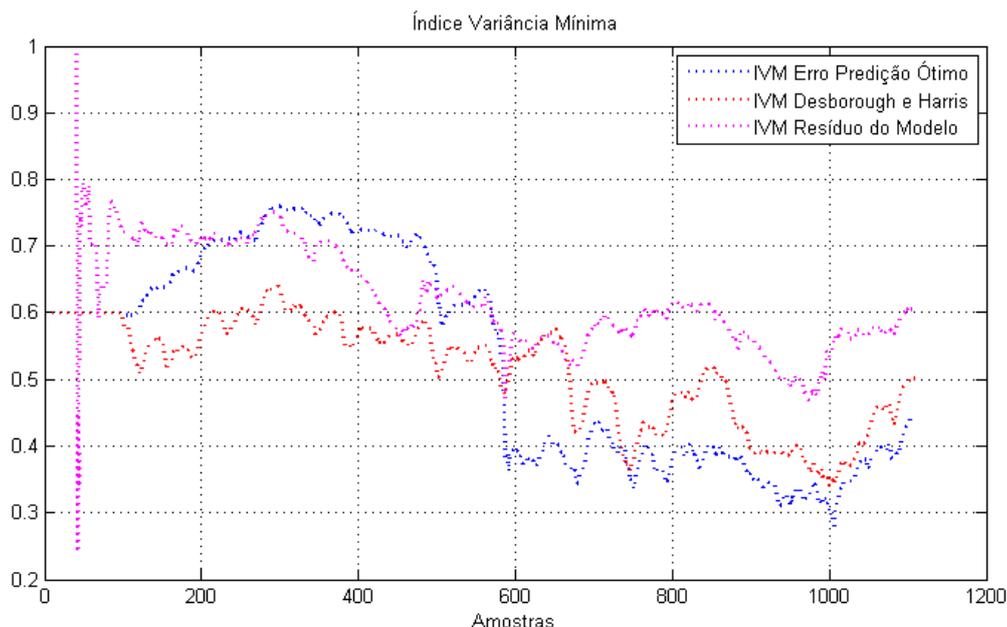


Figura 4.3: Cálculo do Índice de Variância Mínima para as estimativas da Variância Mínima de (4.2).

Como era esperado, a avaliação de desempenho foi um pouco mascarada pelas estimativas de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992), representado por (—) e pela estimativa do Erro de Predição, representada por (—), devido ao filtro de média móvel. O método do Resíduo do Modelo foi preciso na contabilização de um índice de desempenho melhor, pois a variância do controlador realmente foi reduzida. O problema relacionado à perturbação na estimação pelo Erro de Predição Ótimo reduz significativamente o valor do índice. Porém, essa conclusão é incorreta, pois, como mostrado anteriormente, a predição é ruim no instante da amostragem em que ocorre a variação da perturbação, uma vez que o sistema assume novas condições de operação e os parâmetros são alterados. Baseado no gráfico da Figura 4.3 e verificando o comportamento do controlador para o processo de pH, em uma visão geral, conclui-se

que o GPC no pH 7 exibiu uma variância entre 50% a 70% maior que o CVM.

Com o intuito de comparação, examina-se o desempenho do GPC em torno do pH 9. Neste ensaio, a estimação só é inicializada a partir da amostra 300, pois a ocorrência de um erro grande na fase de estimação de parâmetros dificultaria a convergência. Aumenta-se, neste experimento, a vazão de base no instante de amostragem 620.

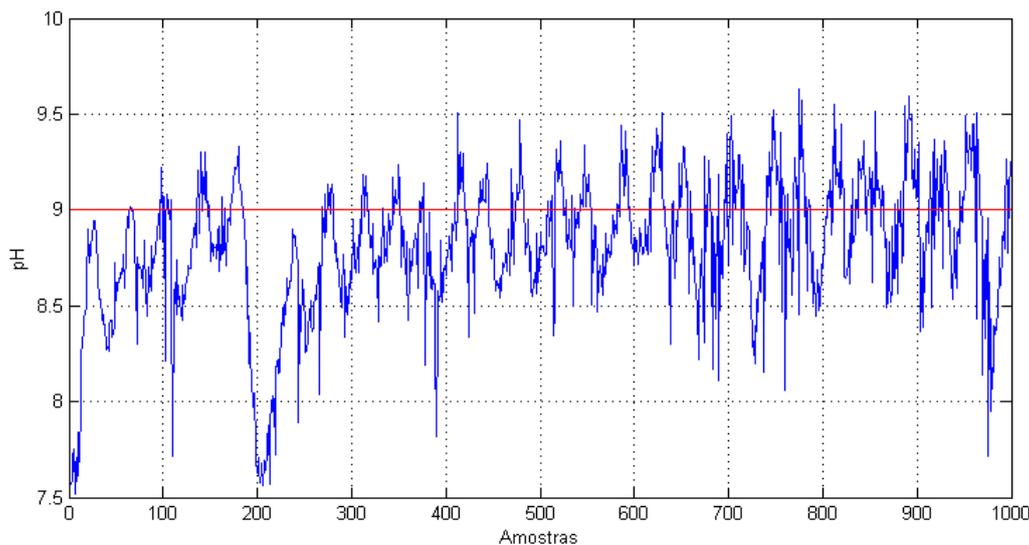


Figura 4.4: Saída para o controlador GPC para o ponto de operação em torno do pH 9.

Estima-se a variância mínima por meio das estratégias discutidas anteriormente e, em seguida, calcula-se o Índice de Variância Mínima para as diversas situações.

Analisando a Figura 4.6, observa-se que os índices determinados pelos métodos divergem em um certo ponto da avaliação. Ou seja, a partir da amostra 700, o Índice de Variância Mínima calculado pelo Resíduo do Modelo aumenta, mostrando a degradação no controle, enquanto que, para os demais, o índice diminui, evidenciando melhorias. Verificando as causas dessa discordância, percebe-se que, depois do aumento da vazão de base, o ganho  $B(z^{-1})/A(z^{-1})$  diminui, em módulo. O ganho  $B(z^{-1})/A(z^{-1})$  é a relação entre o somatório dos parâmetros estimados para o polinômio  $B(z^{-1})$  e o somatório dos parâmetros de  $A(z^{-1})$ . O modelo de pH (3.7) tem como entrada a vazão de ácido  $F_a(k)$  que reduz o pH da solução do tanque de mistura, o que justifica o ganho negativo. Como aumento da perturbação de base, o ganho estimado para o processo diminui,

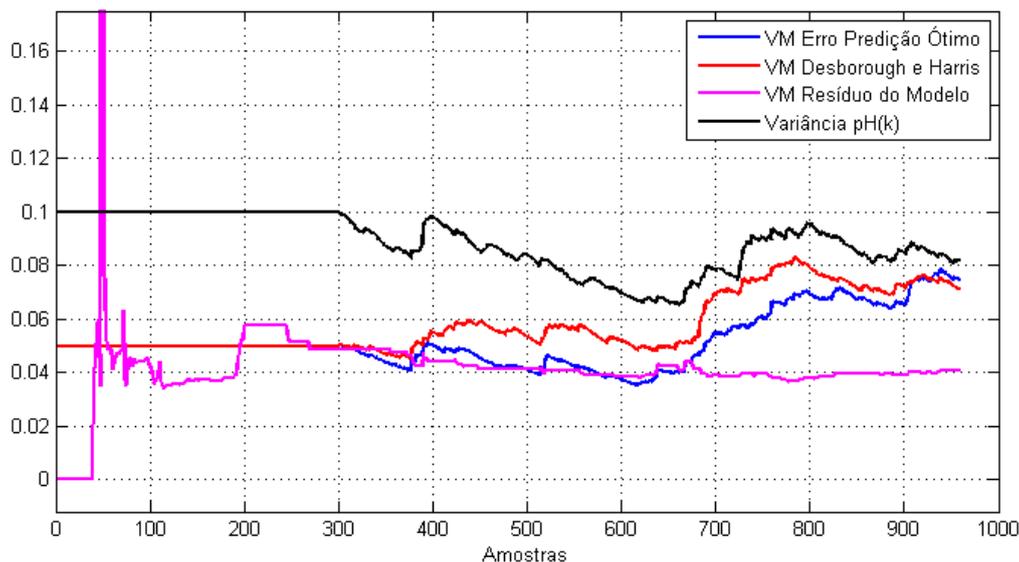


Figura 4.5: Comparação das estimações da VM para o modelo (3.7) e da  $\hat{\sigma}_{pH}^2$  para JTA=200 amostras em torno do pH 9, considerando a inicialização das estimativas.

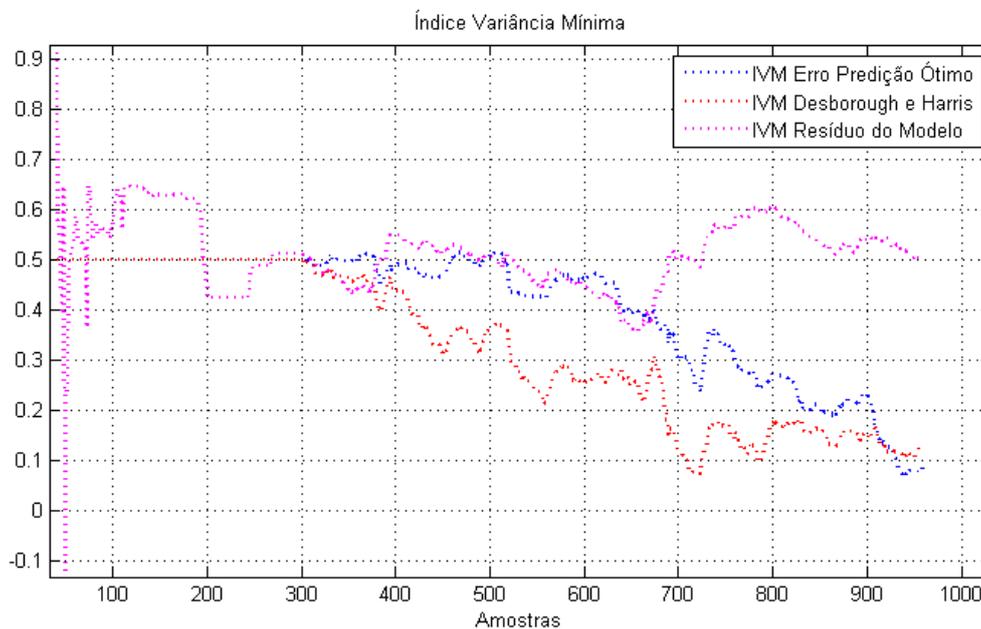


Figura 4.6: Cálculo do Índice de Variância Mínima para as estimativas de Variância Mínima de (4.5).

pois uma nova condição do sistema foi estabelecida. Essa alteração é mostrada na Figura 4.7 a partir da amostra 620.

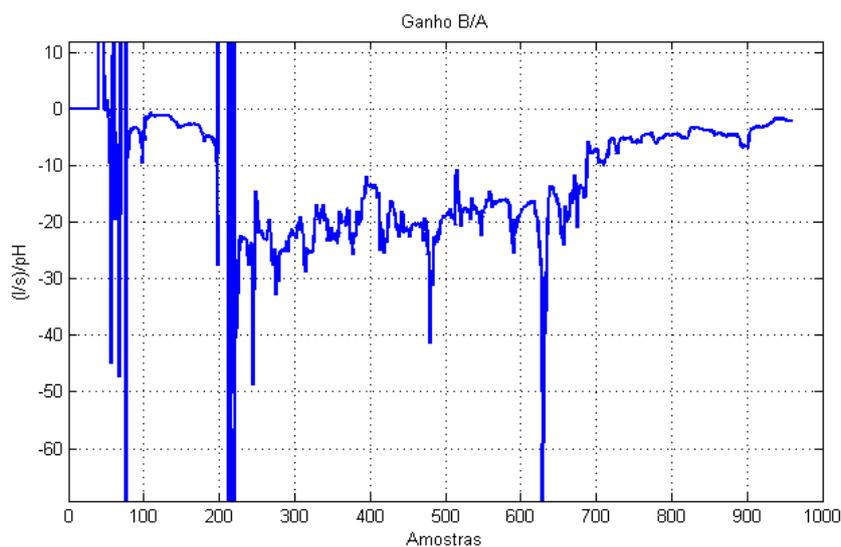


Figura 4.7: Ganho  $B/A$  do modelo de sistema de pH

Mesmo com nova condição do processo, verifica-se, pela Figura 4.8, que a soma dos coeficientes ao quadrado do polinômio  $E(z^{-1})$  permaneceu, de certa forma, constante. Como a variância mínima depende diretamente da soma ao quadrado dos coeficientes de  $E(z^{-1})$ , o cálculo realizado pelo Resíduo do Modelo não se alterou, e como a variância estimada da saída cresceu, o índice indicou a degradação do controle de forma errada. Após a perturbação, os parâmetros de  $A(z^{-1})$  se comportaram de maneiras distintas: enquanto alguns apresentaram uma tendência de alta, outros, pelo contrário, exibiram uma diminuição de valores. Ao serem equacionados pela Equação Diofantina (1.2), se anularam, apesar de prevalecer na soma total dos parâmetros de  $A(z^{-1})$  uma subida evidente, como ilustrado pela redução do ganho do processo. Esse fato está relacionado com a liberdade de adaptação do modelo, devido ao seu número excessivo de parâmetros (3.7).

Já para os outros métodos, não se observaram erros discrepantes na predição e na simulação de pH, como verificado no pH 7. O comportamento das estimativas é suave, acompanhando uma leve tendência, no entanto, as estimativas que utilizam o filtro de média móvel apresentam, novamente, longo tempo até a convergência. Dessa forma, conclui-se não ser possível inferir uma boa avaliação do GPC por meio da análise do gráfico da Figura 4.6.

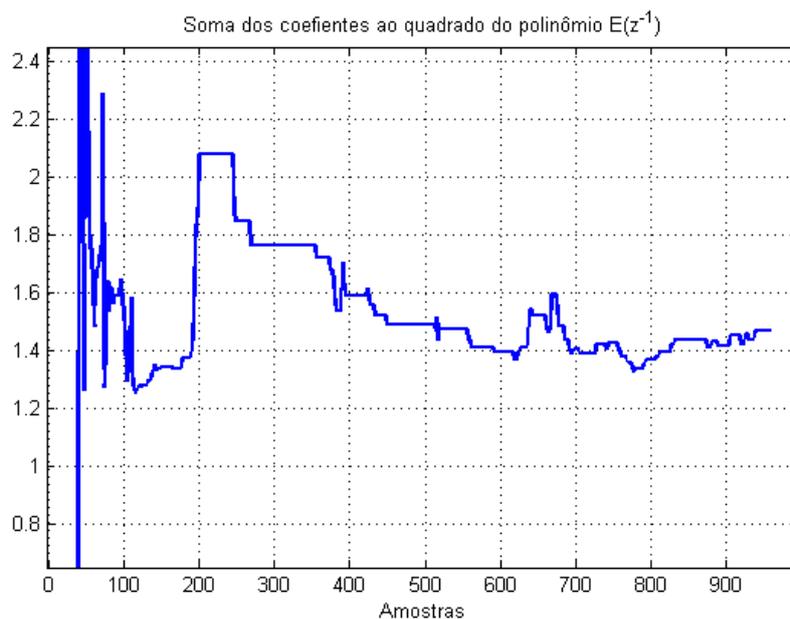


Figura 4.8: Soma dos coeficientes ao quadrado do polinômio  $E(z^{-1})$

Com os dois experimentos anteriores, apresentados nas figuras 4.2 e 4.5, notou-se que os métodos de estimação têm dificuldade de estimar a variância mínima para situações em que ocorrem uma perturbação de carga, representada pelo aumento da vazão de base. Sendo assim, promoveu-se um ensaio em torno do pH 7 sem nenhuma alteração das condições do processo, com pH do reagente ácido igual a pH 1,1 e do básico igual a pH 10,7 e o volume do tanque de mistura mantido constante em 3,5 litros.

Para esse ensaio, as estimações da variância mínima foram bem mais estáveis. Mais uma vez, o método pelo Erro de Predição Ótimo apresenta certas alterações referentes a erros de modelagem. O mesmo ocorre para a estimativa de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992), e portanto, acredita-se que através da estimativa do Resíduo do Modelo, avalia-se o processo com maior coerência. Desta forma, conclui-se que o GPC tem uma variância bem distante do mínimo teórico em torno do pH 7. É interessante notar que o comportamento do GPC, apresentado na Figura 4.3, para o mesmo ponto de operação e para configurações idênticas, foi superior ao da última análise, mostrada na Figura 4.10. Essa discordância de resultados é devida à sensibilidade do GPC em relação a fase inicial de estimação de parâmetros. Percebeu-se, durante a relação dos experimentos, que, caso esse procedimento não seja realizado

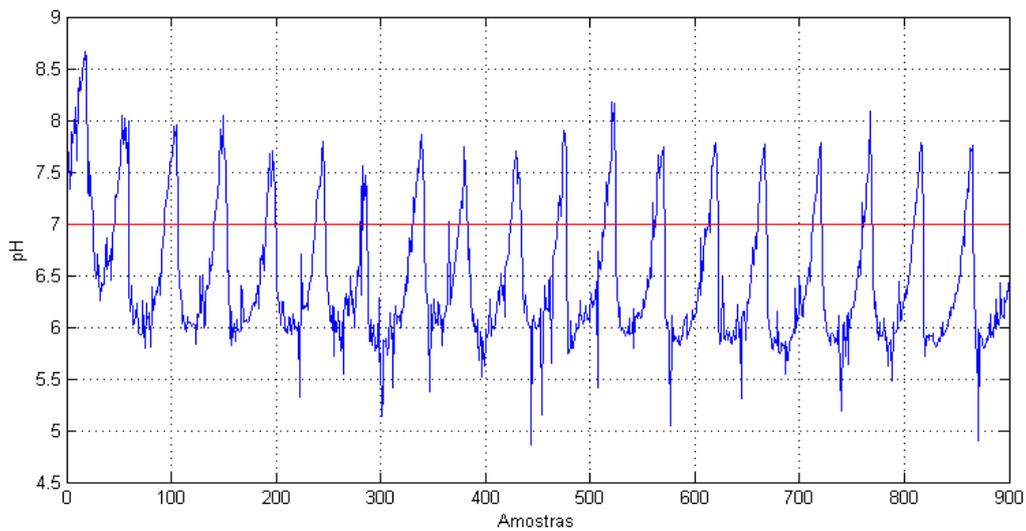


Figura 4.9: Saída do controlador GPC para o ponto de operação em torno do pH 7, sem alterar as condições do processo.

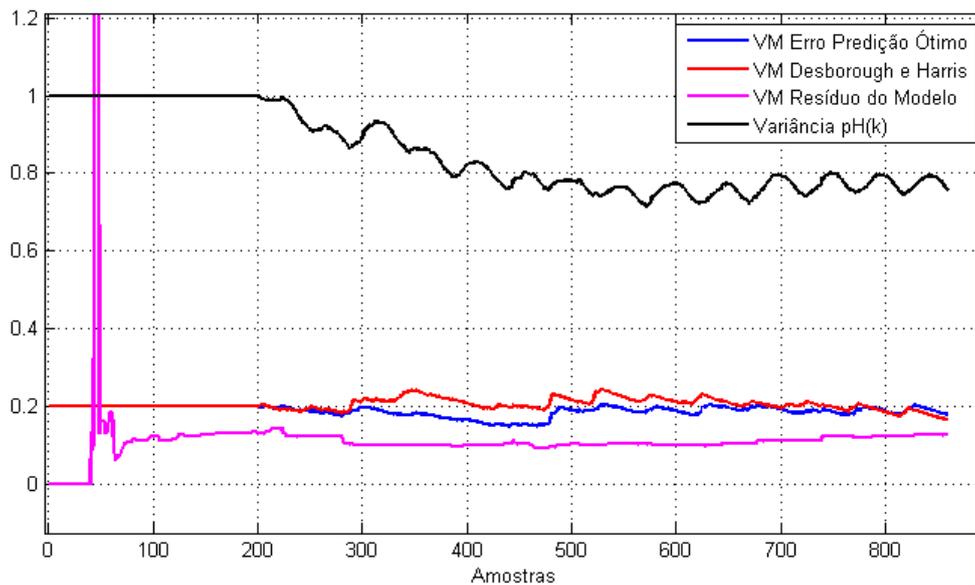


Figura 4.10: Comparação das estimações da VM para o modelo (3.7) e da  $\hat{\sigma}_{pH}^2$  para JTA=200 amostras em torno do pH 7, sem alterar as condições do processo.

com cuidado, deixando o modelo se adequar corretamente à dinâmica da rajada de ácido, o GPC tem dificuldades de apresentar um bom controle. Sendo assim, para o

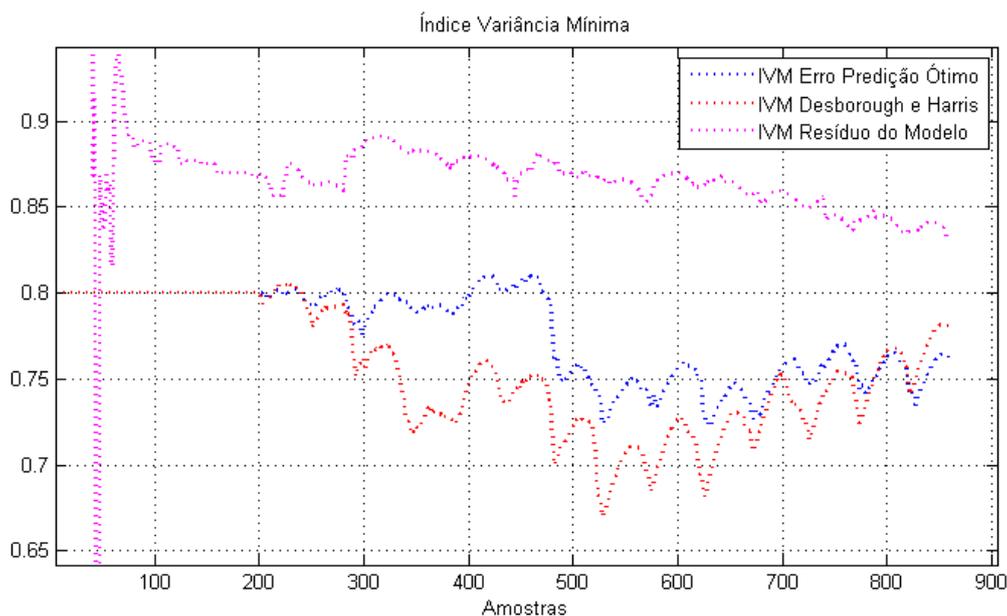


Figura 4.11: Cálculo do Índice de Variância Mínima para as estimativas de Variância Mínima de (4.10).

processo de pH, da forma como fora implementada a modelagem e o controle, pode-se afirmar que o procedimento inicial de estimação dos parâmetros é uma condição de contorno para o GPC. Dependendo da maneira como é realizada, o controlador exhibe resultados bem diferentes. Adiciona-se a essa justificativa o fato de que os experimentos na planta de pH para o *setpoint* pH7 foram realizados com concentrações de ácido e base distintos, o que modifica a dinâmica do sistema.

### 4.3.2 Controlador PI

O diagnóstico de desempenho do GPC foi realizado com um intervalo de amostragem igual 1,6 segundos, definido por (Carvalho, 2010), como uma boa frequência de amostragem de dados para a estimação de parâmetros. Em uma primeira análise, para o controlador PI, aplicou-se o mesmo intervalo para avaliar o desempenho desse controlador, porém, a série estimada que simula o  $pH(k)$  do processo, dada por  $pH'$ , se tornava instável para todos os pontos de operação. Dessa forma, buscando estimar valores de parâmetros que representam um sistema estável para  $pH'$ , aumentou-se o intervalo de amostragem para o controlador PI, que, de acordo com simulações realizadas, deve ser

3 vezes superior ao utilizado na avaliação do GPC, ou seja, igual a 4,8 segundos.

Essa mudança do intervalo de amostragem pode gerar uma certa desconfiança na comparação de desempenho dos dois controladores. Porém, essas escolhas são justificadas, pois, segundo (Carvalho, 2010), o controlador GPC requer um intervalo de amostragem bem menor, que possibilite analisar a dinâmica da rajada de ácido, base da heurística de verificação de sua emissão. Já para o controlador PI, que não faz esse tipo de análise, é suficiente um intervalo de amostragem maior. Dessa forma, aplicam-se os métodos ao diagnóstico do controlador PI dessintonizado para os dados em *setpoint* pH 9, que foram coletados para um sistema com ácido em pH 1,1 e base pH 10,42.

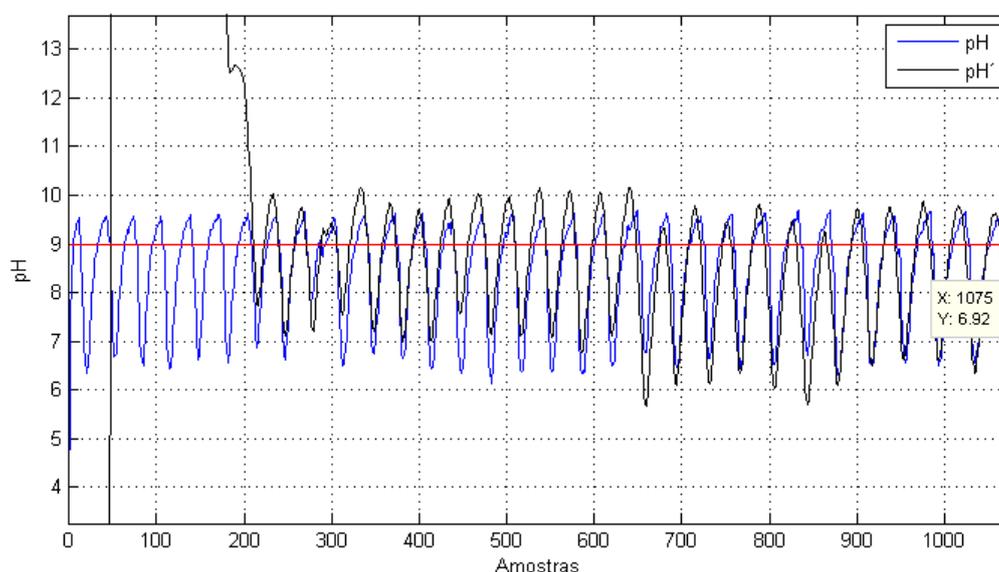


Figura 4.12: Saída para o controlador PI em torno do pH 9.

A estimação da variância mínima do sistema com o controlador PI foi configurada com  $JTA=200$  amostras e modelo de pH (3.7). O ruído estimado pelo método Resíduo de Modelo apresenta a função de autocorrelação mostrada pela Figura 4.13.

Como considerado no caso anterior, apesar de não ser um ruído branco, o ruído  $\xi_k$  é uma boa aproximação do ruído para um sistema. Desta forma, têm-se as estimativas da variância mínima e da variância da saída  $\hat{\sigma}_{pH}^2$  na Figura 4.14 e o cálculo do Índice de Variância Mínima na Figura 4.15.

Observa-se que as estimativas da variância mínima para todos os métodos para

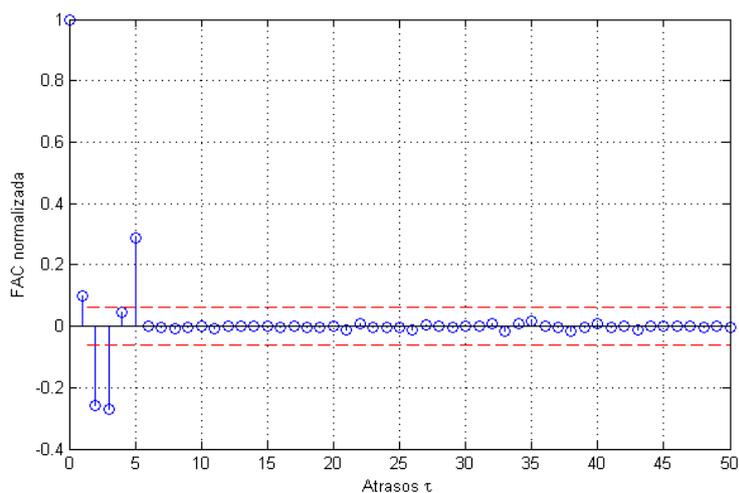


Figura 4.13: Função de autocorrelação normalizada de  $\xi_k$ .

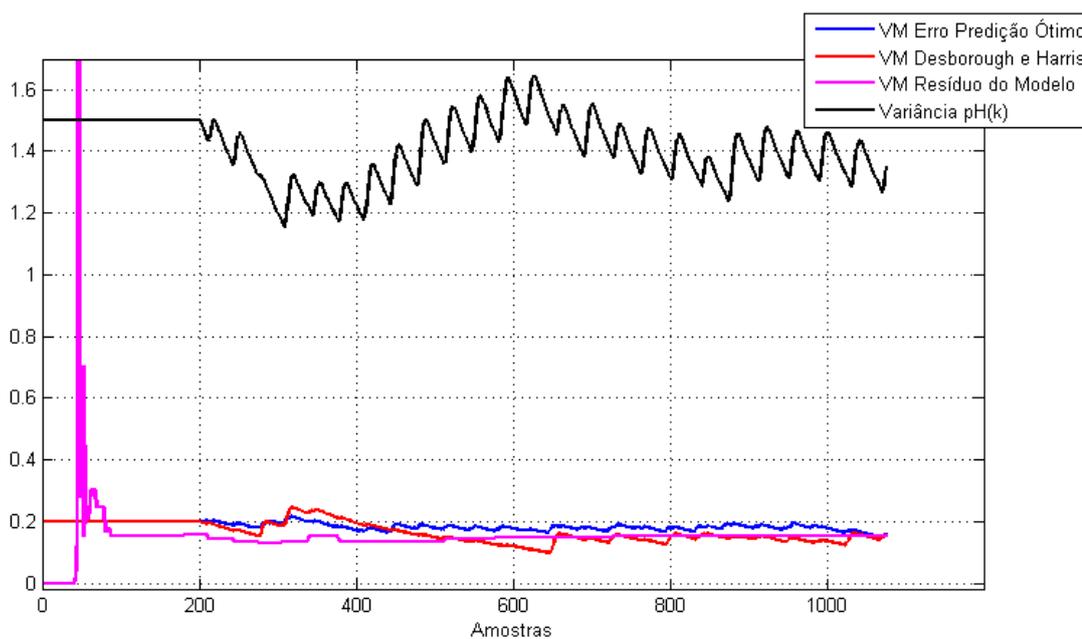


Figura 4.14: Comparação das estimativas da Variância Mínima para o modelo (3.7) e da  $\hat{\sigma}_{pH}^2$ , JTA=200, amostras em torno do pH 9 e controlador PI.

o controlador PI são próximos aos valores estimados com dados de uma aplicação do controlador GPC para o experimento sem variação de condições de operação. A afirmativa é uma constatação de que a estimativa da variância mínima, de certa forma, independe do controlador, sendo função do tempo morto e do modelo de ruído (Harris

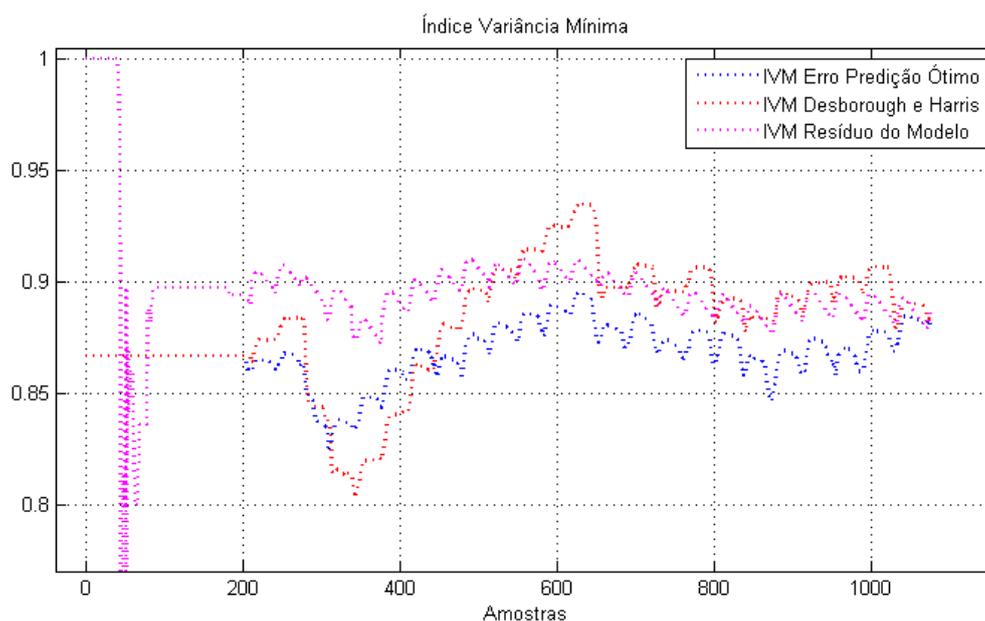


Figura 4.15: Cálculo do Índice de Variância Mínima para as estimativas de Variância Mínima de (4.14).

et al., 1999). Para o controlador PI, o Índice de Variância Mínima avaliou o desempenho em torno dos 90%, para a estimativa do Resíduo do Modelo, que se mostrou mais estável, quando se compara as estimativas realizadas neste trabalho.

Os índices calculados para o GPC e o PI ficaram bem próximos, se analisada a estimativa com o Resíduo do Modelo. O primeiro teve seu índice calculado abaixo do 0,9, enquanto o segundo vê seu índice variar em torno desse mesmo valor. Se olharmos para a saída do processo controlador, verificamos que em ambos os casos a variável pH excursiona em uma faixa de 2 unidades, ou seja, a proximidade dos resultados se mostra bastante coerente. Porém, a saída controlada por PI apresenta também um erro de *offset*, aproximadamente de uma unidade na escala do pH. Esse erro em estado estacionário não é contabilizado pelo Índice de Variância Mínima, apesar de ser uma característica não desejada em um sistema de controle. Outras dificuldades na análise do índice aplicado nesta dissertação serão discutidas nas conclusões finais deste trabalho.

## 4.4 Conclusão

Nesse capítulo, buscou-se avaliar o desempenho do sistema de controle de pH para de dois controladores: o GPC (*Generalized Predictive Control*) e o PI. Foram estudadas diversas situações, para as quais, em certas circunstâncias, não foi possível atribuir nenhuma conclusão, principalmente para alterações das condições iniciais do processo. Bons resultados foram obtidos para configurações mais estáveis da planta de pH, para as quais foi possível avaliar o desempenho dos controladores aplicados, pois as estimativas da variância mínima sofriram menos variações. As estimativas da VM utilizando com o GPC e o PI foram equivalentes, o que possibilitou uma comparação mais clara entre os controladores.

# Conclusões e Considerações Finais

---

## 5.1 Considerações Gerais

Este trabalho examinou a problemática relativa à avaliação de desempenho de plantas não-lineares, para a qual buscaram-se, exaustivamente, novas experiências e métodos relacionados ao tema. Porém, foi encontrada uma variedade pequena de trabalhos e investigações científicas que analisam o comportamento de controladores em uma planta de dinâmica não-linear. Basicamente, as pesquisas atuais apoiam-se em dois problemas distintos conforme (Yu et al., 2010a): a detecção, modelagem e quantificação de não-linearidades provenientes do agarramento de válvulas de controle e a determinação da mínima variância teórica. Sendo assim, o diagnóstico da planta de controle de pH, que apresenta ganhos variáveis ao longo da faixa de operação, foi realizado por meio da métrica que relaciona a mínima variância teórica com a variância atual do sistema de controle.

A grande dificuldade relacionada a esse método está na necessidade da definição do tempo morto. Para a planta de pH foi mostrado que o atraso puro de tempo varia entre os pontos de operação, sendo essa a maior restrição para o Índice de Variância Mínima. Este problema não pode ser suprimido, já que é intrínseco ao processo. Mesmo assim, com o auxílio do MMLS, definiu-se um valor único, tendo uma visão crítica dessa generalização.

Uma outra questão levantada neste trabalho, foi a determinação da mínima variância teórica, ainda mais, considerando um sistema real, para o qual não se tem conhecimento de um modelo, e muito menos dos seus parâmetros, e sobre o qual atuam as mais diversas fontes de ruído. Dessa forma, aplicam-se algumas alternativas de estimação da variância mínima. Uma delas é definida como método de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) para sistemas lineares, que foi implementada

com o intuito de analisar as consequências para uma aplicação não-linear. A grande dificuldade do método foi definir um modelo geral para toda a faixa de operação, já que números diferentes de regressores foram requeridos. Além disso, a estimação pelo filtro de média móvel, além de mascarar alguns resultados, exige um longo tempo de convergência. O segundo método é o Erro de Predição Ótimo que necessita de um bom preditor para determinar uma estimativa para VM. Sua aplicação é mais interessante, pois é possível determinar um preditor único. Porém, ainda está atrelado ao filtro de média móvel e aos inconvenientes da convergência demorada. Para esses métodos, notou-se que os valores iniciais das estimativas representam uma influência na convergência dos mesmos. Uma terceira alternativa foi proposta neste trabalho, com a qual pretende-se determinar uma aproximação para o ruído do processo por meio do Resíduo do Modelo, calculando a variância mínima através da sua definição da Teoria da Predição Ótima (Aström, 1970). Dessa forma, foram obtidos resultados mais estáveis e que convergiram muito mais rapidamente.

Como todas as alternativas estudadas são apenas estimativas do mínimo teórico de um sistema, é impossível escolher a solução dita mais correta. Apresentam-se, para cada caso específico, evidências de que o resultado apresentado é uma boa representação do valor real. Nesse sentido, verificou-se que todos os métodos têm dificuldades em analisar sistemas que alteram alguma condição de processo, como ponto de operação, perturbação de carga, etc. Nessas circunstâncias, as estimativas não se ajustam igualmente e, possivelmente, podem divergir em sua análise.

Já para configurações mais estáveis do processo de pH, em controle regulatório, as estimativas foram consideradas bem melhores. Por meio delas, avaliou-se o desempenho dos controladores GPC e PI desenvolvidos por (Carvalho, 2010). Com a análise baseada na estimativa feita pelo método do Resíduo do Modelo, conclui-se que o GPC apresenta um desempenho levemente superior ao PI dessintonizado. Observando o comportamento dos sistemas controlados, verifica-se que ambos possuem uma oscilação realmente parecida. Essa característica é evidenciada pelo Índice de Variância Mínima. No entanto, a variação para o controlador PI não se dá em torno da referência, provocando por um erro de *offset*, que deve ser penalizado pelo avaliador. Mas como analisa apenas a variância do processo, o Índice de Variância Mínima não contabiliza

esse desvio, produzindo uma interpretação equivocada da qualidade do controle.

Esse é apenas um dos erros provocados pela análise do desempenho pelo Índice de Variância Mínima. De acordo com (Farenzena, 2008), o método de avaliação baseado na relação entre a variância mínima e variância da saída possui baixa resolução de escala, e em alguns casos, a diferença numérica entre o controlador bem ou mal sintonizado é muito pequena. Além disso, não indica uma escala absoluta de comparação entre dois sistemas distintos. Um bom controle para um determinado processo pode ser avaliado da mesma maneira que um controle ruim para um segundo caso, ambos com boas avaliações (Farenzena, 2008). Esse fato tem relação direta com a aplicabilidade do Controlador de Variância Mínima em uma malha. Talvez, no segundo caso, a comparação com o CVM é muito injusta pois o sistema, de uma maneira em geral, não permite uma configuração com esse tipo de controlador, que possui uma forte ação de controle, ampla de largura de banda, ordem elevada e alta frequência no sinal de controle. As restrições a essas características tem relação direta com tempo de amostragem, instrumentação, sistemas digitais de automação, sem contar com situações mais críticas, como a ocorrência de zeros de fase não-mínima. Para a planta de pH, uma restrição bastante evidente está relacionada ao regime intermitente de rajadas da bomba peristáltica. Sendo assim, a avaliação de desempenho através do Índice de Variância Mínima deve ser realizada com certa parcimônia, tentando levar em consideração as restrições da malha de controle.

O grande diferencial deste trabalho foi a aplicação de diversas estimações de variância mínima em dados reais de uma planta existente no Laboratório de Controle de Processos Industriais da UFMG. Ao contrário do que é notado nos trabalhos correlatos, as análises são realizadas apenas por meio de simulações, que, em alguns casos, permitem conclusões improváveis para o universo prático.

## 5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Para esse trabalho podem ser adicionadas melhorias referentes à avaliação de desempenho de malhas de controle não-lineares. Uma primeira sugestão é a adição de um procedimento automático de estimação do tempo morto da planta, que é de fundamen-

tal importância para o Índice de Variância Mínima. No Capítulo 2, percebeu-se que esse parâmetro varia ao longo da faixa de trabalho, sendo assim, seria interessante defini-lo em cada ponto de operação para as condições instantâneas da planta. Além disso, na tentativa de resolver as inadequações dos modelos utilizados para certos pontos de operação, sugere-se a implementação de uma estimação de parâmetros multi-modelos, em que fosse possível escolher a melhor estrutura de modelo no estabelecimento de uma nova condição do processo.

Ainda pensando no Índice de Variância Mínima e no processo de estimação por meio do Resíduo do Modelo, seria possível melhorar a simples heurística relacionada à variação dos valores estimados para os coeficientes do polinômio  $E(z^{-1})$ . Ao invés de utilizar uma lógica de verdadeiro/falso para uma pequena faixa da porcentagem dos valores estimados, seria interessante suavizar essa restrição, aplicando-se lógica nebulosa à essa variação. Definiriam-se funções de pertinência para as faixas de valores dos coeficientes, de forma a contemplar proporcionalmente alterações significativas e mudanças discretas nos parâmetros estimados.

A planta de controle de pH do LCPI pode ser considerada um protótipo de uma estação de tratamento de água, que, para distribuição, deve ter o pH dentro dos limites estabelecidos por regulamentação. Baseando-se nessa percepção, promoveria-se a avaliação de desempenho da malha de controle de pH de forma a otimizar o consumo de insumos de uma ETA potável. Acredita-se que essa idéia pode ser interessante, pois um dos maiores custos operacionais de uma unidade de tratamento está relacionado com os gastos excessivos e, principalmente, desnecessários de reagentes para manter o pH da água dentro de certos padrões. Por meio da avaliação de desempenho desse tipo de sistema, seria possível reduzir esse desperdício e ampliar a eficiência da unidade industrial.

Além disso, deve-se analisar outras formas de avaliação para a planta de controle de pH, pois o Índice de Variância Mínima apresenta restrições e é um método de avaliação um tanto quanto injusto, pois considera como objeto de comparação o poderoso e as vezes, irrealizável, Controlador de Variância Mínima. A planta de controle de pH presente no LCPI utiliza bombas peristálticas para a adição de ácido no processo. Essas, por sua vez, injetam no tanque de mistura um volume praticamente constante

do reagente. Desta forma, o comportamento oscilatório do pH, percebido em todas os ensaios, não pode ser alterado pois é inerente à estrutura da planta, devido a restrição do volume da rajada de ácido. Com isso, para cada ganho do processo e concentrações dos reagentes ácido e básico, pode-se pensar em uma Mínima Oscilação do pH em torno da referência. Para atingir essa Mínima Oscilação seria necessário determinar instantes em que a aplicação de uma rajada é ideal. Baseado nisso, seria possível avaliar o desempenho dos diversos controladores, comparando o instante de rajada ideal com o instante em que o controlador implementado acionou a bomba peristáltica. Um índice poderia ser proposto ponderando-se diversos fatores como: a diferença para o instante de rajada ideal, o erro em regime permanente, variância do pH, índices clássicos, etc. Com isso, seria possível determinar um índice baseado na rajada do ácido, mas que englobasse também parâmetros de desempenho de um controle realimentado.

---

## Referências Bibliográficas

---

- Aström, K. J. (1970). *Introduction to Stochastic Control Theory*. Academic Press, 1ª edição.
- Atkins, P. W. e Jones, L. (2006). *Princípios de Química: Questionando a Vida Moderna e o Meio Ambiente*. Bookman, 3ª edição.
- Bialkowski, W. L. (1993). Dreams vs. reality: a view from both sides of the gap. *Pulp & Paper Canada*, 94:19–27.
- Björklund, S. (2003). *A survey and comparison of time delay estimation methods in linear systems*. Tese de Doutorado, Lund Institute of Technology.
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., e MacGregor, J. F. (1974). Some recent advances in forecasting and control - part ii. *Applied Statistics*, 23:158–179.
- Braga, A. R. e Jota, F. G. (1994). Critérios múltiplos para avaliação 'on line' de desempenho de controladores industriais.
- Carvalho, J. A. (2010). Projeto e sintonia de um controladores adaptativo para uma malha de ph. Monografia de Graduação - Colegiado de Engenharia de Controle e Automação - Universidade Federal de Minas Gerais.
- Choudhury, M., Shah, S., Thornhill, N., e Shook, D. S. (2006). Automatic detection and quantification of stiction in control valves. *Control Engineering Practice*, 14(12):1395 – 1412.
- Choudhury, M. A. A. S., Jain, M., e Shah, S. L. (2008). Stiction - definition, modeling, detection and quantification. *Journal of Process Control*, 18:232–243.

- Choudhury, M. A. A. S., Shah, S. L., e Thornhill, N. F. (2004). Diagnosis of poor control-loop performance using higher-order statistics. *Automatica*, 40:1719–1728.
- Clarke, D. W., Mohtadi, C., e Tuffs, P. S. (1987). Generalized predictive control. 1. the basic algorithm. *Automatica*, 23(2):137–148.
- Desborough, L. e Harris, T. (1992). Performance assessment measures for univariate feedback control. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 70(6):1186–1197.
- Desborough, L. e Harris, T. (1993). Performance assessment measures for univariate feedforward/feedback control. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 71(4):605–616.
- Desborough, L. e Miller, R. (2002). Increasing customer value of industrial control performance monitoring - honeywell's experience.
- DeVries, W. R. e Wu, S. M. (1978). Evaluation of process control effectiveness and diagnosis of variation in paper basis weight via multivariate time series analysis.
- Dorf, R. C, e B. R. H. (2009). *Sistemas de Controle Modernos*. LTC.
- Doyle III, F. J., Pearson, R. K., e Ogunnaike, B. A. (2002). *Identification and Control Using Volterra Models*. Springer, London.
- Ender, D. (1993). Process control performance: Not as good as you think. *Control Engineering*, 40:180–190.
- Fackrell, J. W. A. (1996). *Bispectral analysis of speech signals*. Tese de Doutorado, The University of Edinburgh, UK.
- Farenzena, M. (2008). *Novel Methodologies for Assessment and Diagnostics in Control Loop Management*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Grimble, M. J. (2002). Controller performance benchmarking and tuning using generalized minimum variance control. *Automatica*, 38:2111–2119.

- Grimble, M. J. (2005). Non-linear generalized minimum variance feedback, feedforward and tracking control. *Automatica*, 41:957–969.
- Harris, C. J. e Billings, S. A. (1985). *Self-Tuning and Adaptive Control: Theory and Applications*. Peter Peregrinus.
- Harris, T. J. e MacGregor, J. F. (1981). An overview of discrete stochastic controllers: Generalized pid algorithms with dead-time compensation. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 425-432.
- Harris, T., Boudreau, F., e MacGregor, J. (1996a). Performance assessment of multivariable feedback controllers. *Automatica*, 32(11):1505–1518.
- Harris, T., Seppala, C., e Desborough, L. (1999). A review of performance monitoring and assessment techniques for univariate and multivariate control systems. *Journal of Process Control*, 9(1):1–17.
- Harris, T. J. (1989). Assessment of control loop performance. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 67(5):856–861.
- Harris, T. J., Seppala, C. T., Jofriet, P. J., e Surgenor, B. (1996b). Plant-wide feedback control performance assessment using an expert-system framework. *Control Engineering Practice*, 4(9):1297–1303.
- Harris, T. J. e Yu, W. (2007). Controller assessment for a class of non-linear systems. *Journal of Process Control*, 17:607–619.
- Hägglund, T. (1995). A control-loop performance monitor. *Control Engineering Practice*, 3(11):1543–1551.
- Hägglund, T. (1999). Automatic detection of sluggish control loops. *Control Engineering Practice*, 7(12):1505 – 1511.
- Hinich, M. J. (1982). Testing for gaussianity and linearity of a stationary time series. *Journal of Time Series Analysis*, 3:169–176.

- Hoo, K., Piovoso, M., Schnelle, P., e Rowan, D. (2003). Process and controller performance monitoring: overview with industrial applications. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 17(7-9):635–662.
- Horch, A. (1999). A simple method for detection of stiction in control valves. *Control Engineering Practice*, 7(10):1221–1231.
- Horch, A. e Dumont, G. (2003). Guest editorial. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 17:523–525.
- Huang, B. (1999). Performance assessment of processes with abrupt changes of disturbances. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 77(5):1044–1054.
- Huang, B. (2002). Minimum variance control and performance assessment of time-variant processes. *Journal of Process Control*, 12(6):707–719.
- Huang, B. e Shah, S. (1998). Practical issues in multivariable feedback control performance assessment. *Journal of Process Control*, 8(5-6):421–430.
- Huang, B. e Shah, S. L. (1999). *Performance Assessment of Control Loops*. Springer.
- Huang, B., Shah, S. L., e Kwok, E. K. (1997). Good, bad or optimal? performance assessment of multivariable processes. *Automatica*, 33(6):1175 – 1183.
- Huang, B., Shah, S. L., e Miller, R. (2000). Feedforward plus feedback controller performance assessment of mimo systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(3):580–587.
- Isaksson, A. J., Horch, A., e Dumont, G. A. (2000). Event-triggered deadtime estimation - comparison of methods. In *Preprints Control Systems*, páginas 209–215, Victoria, Canada.
- Jacobs, O. L. R. (1993). *Introduction to Control Theory*. New York, 2° edição.
- Jelali, M. (2006). An overview of control performance assesement technology and industrial applications. *Control Engineering Practice*, 14(5):441–466.

- Jelali, M. (2007). Performance assessment of control systems in rolling mills - application to strip thickness and flatness control. *Journal of Process Control*, 17(10):805–816.
- Júnior, H. G. O. (2007). Aplicações de técnicas de controle avançado a uma malha de controle de pH. Monografia de Graduação - Colegiado de Engenharia de Controle e Automação - Universidade Federal de Minas Gerais.
- Jota, F. G. (1987). *The application of Self-Tuning Control Techniques to a Multivariable Process*. Tese de Doutorado, University of Oxford, Inglaterra.
- Jota, F. G. (2004). Controle adaptativo e robusto. Notas de Aula. Universidade Federal de Minas Gerais.
- Kempf, A. O. (2003). *Avaliação de Desempenho de Malhas de Controle*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Kohlmann, F. J. (2003). *What is pH, and How Is It Measured?* Hach Company.
- Kozub, D. J. (1997). Controller performance monitoring and diagnosis: experiences and challenges.
- Ljung, L. (1987). *System Identification*. Prentice-Hall.
- McMillan, G. K. (1994). *pH Measurement and Control*. Instrument Society of America.
- McNabb, C. e Qin, S. (2003). Projection based mimo control performance monitoring: I-covariance monitoring in state space. *Journal of Process Control*, 13(8):739–757.
- Narayanan, N. R. L., Krishnaswamy, P. R., e Rangaiah, G. P. (1998). Use of alternate process variables for enhancing pH control performance. *Chemical Engineering Science*, 53(17):3041–3049.
- Nikias, C. L. e Petropulu, A. (1993). *Higher order Spectra: A Nonlinear Signal Processing framework*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- Niu, S. S. e Ljung, L. (1994). Multiple model parameter estimation.

- Palmor, Z. J. e Shinnar, R. (1979). Design of sampled data controllers. *Ind. Eng, Chem. Proc. Des. Dev.*, 18:8–30.
- Passos, L. F. D. (2009). *Metodologia para Auditoria e Validação Ampla de Malhas de Controle - Estudo de Caso para uma Caldeira Industrial*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Passos, L. F. D., Torres, B. S., e Rodrigues, V. J. P. (2005). Metodologia para redução de oscilações de malhas de controle em uma usina de beneficiamento de minério de ferro.
- Pearson, R. K. (1999). *Discrete-Time Dynamic Models*. Oxford University Press, New York.
- Petersson, M., Arzen, K., e Hagglund, T. (2003). A comparison of two feedforward control structure assessment methods. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 17(7-9):609–624.
- Phillips, C. L. e Nagle, H. T. (1995). *Digital Control System: Analysis and Design*. Prentice-Hall, New Jersey, USA, 3° edição.
- Polito, C. M. (1995). *Utilização de Critérios de Avaliação de Desempenho Global Para Sintonia de Controladores de Processos Multimalha*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Qin, S. (1998). Control performance monitoring - a review and assessment. *Computer & Chemical Engineering*, 23(2):173–186.
- Rocha, F. F. (2006). Automação de uma planta piloto para aplicação de estratégias de controle de ph. Monografia de Graduação - Colegiado de Engenharia de Controle e Automação - Universidade Federal de Minas Gerais.
- Seborg, D. E., Edgar, T. F., e Mellichamp, D. A. (1989). *Process Dynamic and Control*. John Wiley & Sons.

- Stanfelj, N., Marlin, T. E., e Macgregor, J. F. (1993). Monitoring and diagnosing process-control performance - the single case. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 32(2):301–314.
- Swanda, P. A. (1999). *PID Controller Performance Assessment Based on Closed-Loop Response Data*. Tese de Doutorado, University of California, Santa Barbara, California, USA.
- Thornhill, N. (2005). Finding the source of nonlinearity in a process with plant-wide oscillation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(3):434–443.
- Thornhill, N. F., Huang, B., e Shah, S. L. (2003a). Controller performance assessment in set point tracking and regulatory control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 17:709–727.
- Thornhill, N. F., Huang, B., e Zhang, H. (2003b). Detection of multiple oscillations in control loops. *Journal of Process Control*, 13:91–100.
- Tyler, M. e Morari, M. (1996). Performance monitoring of control systems using likelihood methods. *Automatica*, 32(8):1145–1162.
- Yu, W., Wilson, D. I., e Young, B. R. (2010a). Control performance assessment for nonlinear systems. *Journal of Process Control*, 20(10):1235–1242.
- Yu, W., Wilson, D. I., e Young, B. R. (2010b). Nonlinear control performance assessment in the presence of valve stiction. *Journal of Process Control*, 20(6):754–761.

# Teoria da Predição Ótima

A teoria de controle com variância mínima deriva da teoria de predição ótima definida por (Aström, 1970). O desenvolvimento abaixo é baseado nas notas de aulas de (Jota, 2004). Dado que  $y_k$  é a saída do sistema,  $\mu_k$  a entrada, e  $\xi_k$  é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes, tem-se o modelo do sistema linear de uma entrada e uma saída:

$$A(z^{-1})y_k = z^{-r}B(z^{-1})\mu_k + C(z^{-1})\xi_k \quad (\text{A.1})$$

em que:

- $r \geq 1$ ;
- $A(z^{-1}) = 1 + a_1Z^{-1} + \dots + a_nZ^{-n}$
- $B(z^{-1}) = b_0 + b_1Z^{-1} + \dots + b_{n-r}Z^{-(n-r)}, b_0 \neq 0$
- $C(z^{-1}) = 1 + c_1Z^{-1} + \dots + c_nZ^{-n}$

No desenvolvimento subsequente, considera-se, necessariamente, os polinômios  $A(z^{-1})$  e  $C(z^{-1})$  estáveis. Para se determinar o preditor  $r$  passos à frente, com dados disponíveis até o tempo  $k$  ( $y_{k+r}/k$ ), define-se a Equação Diofantina do tipo:

$$\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} = E(z^{-1}) + z^{-r}\frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (\text{A.2})$$

em que:

- $E(z^{-1}) = 1 + e_1Z^{-1} + \dots + e_{r-1}Z^{-(r-1)}$
- $F(z^{-1}) = f_0 + f_1Z^{-1} + \dots + f_{n-1}Z^{-(n-1)}$

Usando (A.2), os coeficientes  $e_1, \dots, e_{r-1}$  são calculados recursivamente, a partir das  $(r-1)$  primeiras equações, enquanto  $f_0, \dots, f_{n-1}$  são calculados pelas  $n$  últimas equações. Substituindo a Equação Diofantina (A.2) no modelo do sistema, com  $\mu_k = 0$ , tem-se:

$$y_{k+r} = E(z^{-1})\xi_{k+r} + \frac{F(z^{-1})}{C(z^{-1})}y_k \quad (\text{A.3})$$

Calculando o erro médio quadrático de (A.3):

$$\mathbf{E} \{y_{k+r}^2\} = \mathbf{E} \{(E\xi_{k+r})^2\} + \mathbf{E} \left\{ \left( \frac{F}{C} y_k \right)^2 \right\} \quad (\text{A.4})$$

Como as componentes de ruído  $\xi_k$  são descorrelacionados,  $\mathbf{E} \{(E(z^{-1})\xi_{k+r})^2\} = 0$ , o preditor ótimo  $\hat{y}_{k+r}$  é dado por (A.5). Em algumas fórmulas, será suprimido o operador de atraso ( $z^{-1}$ ) dos polinômios, apenas como forma de simplificação.

$$\hat{y}_{k+r} = \frac{F}{C} y_k \quad (\text{A.5})$$

Para  $\mu \neq 0$ , a variância da saída  $\mathbf{E} \{y_{k+r}^2\}$  é dada por:

$$\mathbf{E} \{y_{k+r}^2\} = \mathbf{E} \{(E\xi_{k+r})^2\} + \mathbf{E} \left\{ \left( \frac{EB}{C} \mu_k + \frac{F}{C} y_k \right)^2 \right\} \quad (\text{A.6})$$

A Equação (A.6) é minizada quando  $EB\mu_k + Fy_k = 0$ , ou seja:

$$u_k = -\frac{F}{EB} y_k \quad (\text{A.7})$$

A relação dada por (A.7) é a lei de controle de variância mínima, pois quando aplicada em (A.6) resulta na mínima variância de saída possível para o sistema linear (A.1) com tempo morto igual a  $r$ .

$$y_k = E(z^{-1})\xi_k \quad (\text{A.8})$$

Dessa forma, a variância do processo sob a ação do CVM é igual a mínima variância teórica alcançada pelo sistema (A.9), que é igual à divisão longa entre os polinômios  $\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ .

$$E \{y_k^2\} = (1^2 + e_1^2 + \dots + e_{r-1}^2) \sigma_\xi^2 = \sigma_{mv}^2 \quad (\text{A.9})$$

• **Técnica da Compensação Direta**

Muitos processos sofrem perturbações que podem ou não ser medidas. Para a modelagem do sistema de controle de pH presente no LCPI, considerou-se a vazão de base  $F_b(k)$  como um perturbação. Como esta variável não era medida, na estimação de parâmetros foi equacionado o termo  $d$ , como forma de apreciar o efeito da vazão de base no modelo. Para um sistema com uma perturbação  $v_k$ , tem-se:

$$A(z^{-1})y_k = B(z^{-1})\mu_{k-r} + C(z^{-1})\xi_k + D(z^{-1})v_k \quad (\text{A.10})$$

Seguindo o mesmo desenvolvimento feito anteriormente, através da 1° Equação Diofantina  $C = EA + z^{-r}F$ , tem-se:

$$Cy_{k+r} = Fy_k + EB\mu_k + EC\xi_{k+r} + EDv_{k+r} \quad (\text{A.11})$$

Após os cálculos dos coeficientes dos polinômios  $E(z^{-1})$  e  $F(z^{-1})$  pela 1° Equação Diofantina, deve-se calcular o termo de desacoplamento da lei de controle  $F'(z^{-1})$  por meio da 2° Equação Diofantina  $ED = E'C + z^{-r}F'$ . De acordo com (Harris e Billings, 1985), se a perturbação for determinística e seu efeito sobre a saída tiver um atraso de tempo  $r$  igual ao da entrada  $\mu_k$ , então  $E' = 0$ . Para o caso específico da planta, considerou-se que o tempo morto tanto para a vazão de ácido  $F_a(k)$  como para a vazão de base  $F_b(k)$  são iguais. Assim, o preditor ótimo para o caso da compensação direta é:

$$C\hat{y}_{k+r} = Fy_k + EB\mu_k + F'v_k \quad (\text{A.12})$$

O erro de predição para a compensação direta é igual a  $\tilde{y}_{k+r/k} = y_{k+r} - \hat{y}_{k+r/k} = E\xi_{k+r} + E'v_{k+r}$ . Como  $E'v_{k+r} = 0$  para o estudo de caso deste trabalho, portanto, o erro de predição para a modelagem de pH é:

$$y_k = E(z^{-1})\xi_k \quad (\text{A.13})$$

Maiores detalhes sobre a teoria da predição ótima podem ser encontrados em (Jota, 2004).

## Mínimos Quadrados Multi-Modelos

O Mínimos Quadrados Multi-Modelos é uma técnica de estimação baseada nos princípios do estimador Mínimos Quadrados, que é o método mais aplicado em regressões lineares e na estimação de parâmetros, devido a sua simplicidade conceitual e fácil implementação (Niu e Ljung, 1994). Desta forma, primeiramente, é apresentada a formulação matemática do Mínimos Quadrados.

Considere um modelo do tipo *Autoregressive Moving Average Exogenous* (ARMAX) da Equação (B.1), em que  $y_k$  é a saída,  $u_k$  a entrada, e  $e_k$  é um ruído descorrelacionado adicionado ao sistema.

$$y_k = -a_1 \cdot y_{k-1} - a_2 \cdot y_{k-2} + \dots - a_n \cdot y_{k-n} + b_1 \cdot u_{k-1} + b_2 \cdot u_{k-2} + \dots + b_m \cdot u_{k-m} + e_k \quad (\text{B.1})$$

As N medições podem ser escritas na forma matricial segundo a Equação (B.3).

$$y = X \cdot \theta + e \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_0 & -y_{-1} & \cdots & -y_{1-n} & u_0 & u_{-1} & \cdots & u_{1-m} \\ -y_1 & -y_0 & \cdots & -y_{2-n} & u_1 & u_0 & \cdots & u_{2-m} \\ \vdots & \vdots \\ -y_{N-1} & -y_{N-2} & \cdots & -y_{N-n} & u_{N-1} & u_{N-2} & \cdots & u_{N-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

O objetivo do Mínimos Quadrados é encontrar a solução  $\hat{\theta} = [\hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_n \hat{b}_1 \hat{b}_2 \dots \hat{b}_m]^T$  que minimiza a soma dos quadrados da diferença entre os dados observados e os seus valores estimados, tal que:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \|y - X\theta\|_2 \quad (\text{B.4})$$

em que  $\| \cdot \|_2$  representa a norma Euclidiana. A solução para o vetor de parâmetros estimados  $\hat{\theta}$  pode ser encontrada, segundo (Niu e Ljung, 1994), através de:

$$\hat{\theta} = [X^T X]^{-1} X^T y \quad (\text{B.5})$$

Normalmente, o Mínimos Quadrados não é implementado pela fórmula (B.5), pois, muitas vezes, pretende-se fazer uma estimação dos parâmetros ao longo do tempo, ainda durante a execução do sistema. Além disso, a matriz  $X$  dos vetores de dados pode estar mal condicionada, o que impede o procedimento de inversão matricial. Para solucionar esses problemas, em geral, trabalha-se com o algoritmo do Mínimos Quadrados na forma recursiva, com algum método de fatoração da matriz de covariância, garantindo a sua característica não-negativa-definida. O algoritmo completo do Mínimos Quadrados Recursivo pode ser encontrado em (Jota, 2004). Logo abaixo, na Tabela B.1, encontra-se um resumo dos métodos de decomposição que podem ser usados em conjunto com o Mínimos Quadrados.

Tabela B.1: Métodos de decomposição Mínimos Quadrados

Fonte: (Niu e Ljung, 1994)

Método	Decomposição	Mínimos Quadrados
Decomposição LU	$X^T X = LU$	$\hat{\theta} = U^{-1}L^{-1}(X^T y)$
Decomposição $LDL^T$	$X^T X = LDL^T$	$\hat{\theta} = L^{-T}D^{-1}L^{-1}(X^T y)$
Fatoração de Cholesky	$X^T X = GG^T$	$\hat{\theta} = G^{-T}G^{-1}(X^T y)$
Decomposição QR	$X = QR$	$\hat{\theta} = R^{-1}Q^T y$

O Mínimos Quadrados, na sua forma padrão, é capaz de estimar apenas uma estrutura de modelo em cada execução do algoritmo. O MMLS, do inglês *Multi-Models Least*

*Square*, como o indicado pela nomenclatura, é um método capaz de estimar parâmetros de diversos modelos ao mesmo tempo, e ainda extrair informações adicionais da matriz de dados  $X$  (Niu e Ljung, 1994). O algoritmo básico é reformulado, de maneira a rearranjar e incrementar os regressores. Assumindo que a máxima ordem possível é igual a  $n$ , o vetor aumentado de dados  $\varphi(t)$  é igual a:

$$\varphi(t) = [-y(t-n) \ u(t-n) \ \cdots \ -y(t-1) \ u(t-1) \ -y(t)]^T \quad (\text{B.6})$$

Em comparação com a matriz de regressores de (B.3), os elementos do vetor aumentado de dados  $\varphi(t)$  estão intercalados e rearranjados em pares de entrada/saída. A saída atual do sistema  $y(t)$  também é incluída em (B.6). Dessa forma, a matriz aumentada de dados é:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \vdots \\ \varphi(N) \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

O MMLS define a matriz  $\mathcal{U}(t)$  chamada de matriz de parâmetros, na qual os parâmetros estimados de cada modelo de ordem  $n$  estão dispostos nas colunas ( $2n + 1$ ).

$$\mathcal{U}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\alpha}_1^{(1)} & \hat{\theta}_1^{(1)} & \hat{\alpha}_1^{(2)} & \hat{\theta}_1^{(2)} & \cdots & \hat{\alpha}_1^{(n)} & \hat{\theta}_1^{(n)} \\ & 1 & \hat{\theta}_2^{(1)} & \hat{\alpha}_2^{(2)} & \hat{\theta}_2^{(2)} & \cdots & \hat{\alpha}_2^{(n)} & \hat{\theta}_2^{(n)} \\ & & 1 & \hat{\alpha}_3^{(2)} & \hat{\theta}_3^{(2)} & \cdots & \hat{\alpha}_3^{(n)} & \hat{\theta}_3^{(n)} \\ & & & 1 & \hat{\theta}_4^{(2)} & \cdots & \hat{\alpha}_4^{(n)} & \hat{\theta}_4^{(n)} \\ & & & & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & 1 & \hat{\theta}_{2n}^{(n)} \\ & 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Os sobrescritos  $^{(i)}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) representam a ordem do modelo. Por exemplo,  $\hat{\theta}_1^{(n)}$  é o primeiro parâmetro para o  $n$ -ésimo modelo para o vetor de parâmetros. O MMLS, além de estimar um conjunto de diferentes modelos, atribui a cada ordem de modelo uma função custo  $J$ , que quantifica a capacidade de que um determinado modelo tem de se adequar aos dados. A ordem é escolhida a partir do momento em

que não se verificam alterações significativas de  $J$  com o incremento de  $n$ . A diagonal da matriz  $\mathcal{D}$  apresenta a função custo  $J^{(n)}$  cada modelo de ordem  $n$ .

$$\mathcal{D}(t) = \text{diag} \left[ J^{(0)}(t) \ J^{(1)}(t) \ J^{(2)}(t) \ J^{(3)}(t) \ \dots \ J^{(n)}(t) \right] \quad (\text{B.9})$$

Neste trabalho foi utilizada a fatoração UD, implementada através do algoritmo AUDI (*Augmented UD Identification*) (Niu e Ljung, 1994). Fatora-se a matriz de covariância:  $\mathbf{C}(t) = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$ . A matriz resultante  $\mathbf{U}$  representa a matriz de parâmetros e a inversa de  $\mathbf{D}$  resulta em matriz das funções custo. O algoritmo AUDI é mostrado em B.2.

$$\mathcal{U} = \mathbf{U} \quad (\text{B.10a})$$

$$\mathcal{D} = \mathbf{D}^{-1} \quad (\text{B.10b})$$

Tabela B.2: Algoritmo da Fatoração UD Recursiva

Fonte: (Niu e Ljung, 1994)

---


$$\begin{aligned} \varphi(t) &= [-y(t-n) \ u(t-n) \ \dots \ -y(t-1) \ u(t-1) \ -y(t)]^T \\ f &= \mathbf{U}^T(t-1)\varphi(t), \ g = \mathbf{D}(t-1)f, \ \beta_0 = \lambda(t) \\ \mathbf{for} \ j &= 1 \ \mathbf{to} \ d, \ \mathbf{do} \\ &\quad \beta_j = \beta_{j-1} + f_j g_j \\ &\quad \mathbf{D}_{jj} = \mathbf{D}_{jj}(t-1)\beta_{j-1}/\beta_j/\lambda(t) \\ &\quad \mu_j = -f_j/\beta_{j-1}, \ v_j = g_j \\ &\quad \mathbf{for} \ i = 1 \ \mathbf{to} \ j-1, \ \mathbf{do} \ (\mathbf{skip} \ j = 1) \\ &\quad \quad \mathbf{U}_{ij}(t) = \mathbf{U}_{ij}(t-1) + v_i \mu_j \\ &\quad \quad v_i = v_i + \mathbf{U}_{ij}(t-1)v_j \\ \mathcal{U} &= \mathbf{U}, \ \mathcal{D} = \mathbf{D}^{-1} \end{aligned}$$


---

## Estimação da Variância Mínima por (Desborough e Harris, 1992)

Desborough e Harris (1992) desenvolveram uma metodologia que permite a estimativa da variância mínima a partir de dados rotineiros de processo e a determinação de um índice normalizado de desempenho de malhas de controle. O índice é calculado através de uma simples regressão linear. Para a solução em tempo real, foi proposto um índice recursivo baseado em Mínimos Quadrados.

A forma de estimação da variância mínima definida por (Desborough e Harris, 1992) elimina a necessidade de resolução da Equação Diofantina e requer o conhecimento preciso do tempo morto da malha. Dada a variância da saída predita  $r$  passos à frente  $y_{k+r}$ :

$$\mathbf{E}\{y_{k+r}^2\} = \mathbf{E}\{(E\xi_{k+r})^2\} + \mathbf{E}\left\{\left(\frac{EB}{C}\mu_k + \frac{F}{C}y_k\right)^2\right\} \quad (\text{C.1})$$

Tem-se que:

$$\sigma_y^2 = \sigma_{mv}^2 + \sigma_{\hat{y}}^2 \quad (\text{C.2})$$

A variância da saída  $\sigma_y^2$  é igual a soma da variância mínima  $\sigma_{mv}^2$  com a variância do preditor  $r$  passos a frente  $\sigma_{\hat{y}}^2$ . Quando um controlador está atuando com o CVM, o segundo termo do lado direito da igualdade (C.2) é igual a zero (Jota, 2004). Desborough e Harris (1992) indicam ser mais útil avaliar o controle não em termos da variância de  $y_k$ , mas em termos do erro médio quadrático:

$$mse(y_k) = \sigma_{mv}^2 + \mu_y^2 \quad (\text{C.3})$$

em que  $\mu_y^2$  é o desvio médio do *setpoint*. Essa formulação tem a vantagem de levar em consideração erros em regime permanente que porventura existam. De (C.2) e sabendo que  $\tilde{y}_k$  é a variância do erro de predição e  $\hat{y}_k$  é variância dos valores preditos, tem-se que:

$$y_k - \mu_y = \tilde{y}_k + \hat{y}_k \quad (\text{C.4})$$

que é igual a:

$$y_k - \mu_y = \tilde{y}_k + \frac{\psi_1(z^{-1})}{\psi_2(z^{-1})} \quad (\text{C.5})$$

O sistema em malha fechada deve ser estável, a razão  $\psi_1(z^{-1})/\psi_2(z^{-1})$  deve formar uma série convergente e, dessa forma, a malha fechada pode ser representada por uma expressão com a forma:

$$y_k - \mu_y = \tilde{y}_k + \sum_{\infty}^{k=1} \alpha_k (y_{t-r-k+1} - \mu_y) \quad (\text{C.6})$$

Na prática, a série infinita é truncada após  $m$  termos, que é equivalente à ordem dos modelos utilizados para estimar os polinômios  $A(z^{-1})$  e  $C(z^{-1})$ , que representam os pólos do sistema e o modelo do ruído, respectivamente. A idéia principal dessa metodologia é estimar os parâmetros autoregressivos  $\alpha_k$  usando uma amostra de dados de operação em malha fechada através de uma regressão linear atrasada. Esta equação, em notação matricial pode ser escrita como:

$$\underline{y} = X\underline{\alpha} + \underline{\hat{y}} \quad (\text{C.7})$$

Em que:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_n \\ \hat{y}_{n-1} \\ \vdots \\ \hat{y}_{r+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{n-r} & \hat{y}_{n-r-1} & \cdots & \hat{y}_{n-r-m+1} \\ \hat{y}_{n-r-1} & \hat{y}_{n-r-2} & \cdots & \hat{y}_{n-r-m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{y}_m & \hat{y}_{m-1} & \cdots & \hat{y}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

Em que  $n$  é o tamanho da amostra e  $\hat{y}_n = y_n - \mu_n$  é o desvio da referência corrigido

pela média. O erro médio residual é dado por:

$$s_e^2 = \frac{(\underline{\dot{y}} - X\underline{\alpha})^T (\underline{\dot{y}} - X\underline{\alpha})}{n - r - 2m + 1} \quad (\text{C.9})$$

que é uma estimativa para a variância mínima  $\sigma_{mv}^2$ . A estimativa para o Índice de Variância Mínima é:

$$\hat{\eta} = \frac{n - r - m + 1}{n - r - 2m + 1} \frac{(\underline{\dot{y}} - X\underline{\alpha})^T (\underline{\dot{y}} - X\underline{\alpha})}{\underline{\dot{y}}^T \underline{\dot{y}} + \mu_y^2} \quad (\text{C.10})$$

A versão recursiva do índice é mais apropriada para estimação em tempo real do desempenho da malha de controle, requerendo a implementação de um algoritmo de Mínimos Quadrados Recursivo. Na estimação de  $\hat{\alpha}$ , substitui-se a média populacional  $\mu_y$  pela média amostral  $\bar{y}$ , que não está disponível na forma recursiva. Neste caso, o modelo utilizado para representar a malha fechada é modificado incluindo um termo constante  $\alpha_0$ . O vetor de parâmetros  $\hat{\alpha}$  é estimado por meio de (C.7) com uma forma aumentada, incluindo o termo  $\hat{\alpha}_0$  e na matriz de dados  $X$  é introduzida uma coluna unitária.

Para a definição da ordem  $m$  do modelo, os autores recomendam estimar o índice (C.10) para diversos valores de  $m$ . A melhor ordem será aquela a partir da qual não se observarem alterações significativas no índice com a adição de regressores.

---

## Estimação da Variância Mínima para um Sistema Linear

---

No intuito de analisar previamente os métodos de estimação da variância mínima ( $\sigma_{mv}^2$ ), utiliza-se, primeiramente, um sistema linear qualquer. Escolhe-se, eventualmente, uma malha de pressão de bombeamento de água de uma caldeira industrial estudada no trabalho de (Passos, 2009). Este mesmo autor definiu o modelo desse sistema, que, para o caso discreto, tem a seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{0.4233 z^{-3}}{1 - 0.5134z^{-1}} \quad (\text{D.1})$$

sendo que:

- $U(z^{-1})$  representa o comando das bombas de água do tubulação superior da caldeira;
- $Y(z^{-1})$  representa a pressão da água no tubulação superior da caldeira.

Empregou-se apenas a função de transferência (D.1), sendo que todos os dados apresentados nesta seção foram simulados. Para a avaliação de desempenho, foi utilizado um controlador do tipo PI com ganho proporcional  $K_p = 0.8$  e tempo integral  $T_i = 20s$ , adição de um ruído branco com variância  $\sigma_{ruído}^2 = 0.25$  e período de amostragem de 1 segundo.

Considerando a proposta de estimação recursiva de um índice normalizado apresentado por Desborough e Harris (1992), deve-se adequar aos dados um modelo do tipo AR (auto-regressivo). Sua ordem é definida incrementado-se o número de parâmetros até que o índice recursivo não expresse mudanças significativas em seu valor. Para o modelo da Equação (D.1), o controlador PI e o ruído branco adicionado ao sistema, o

Índice de Variância Mínima varia com o número de parâmetros como apresentado na Figura D.1.

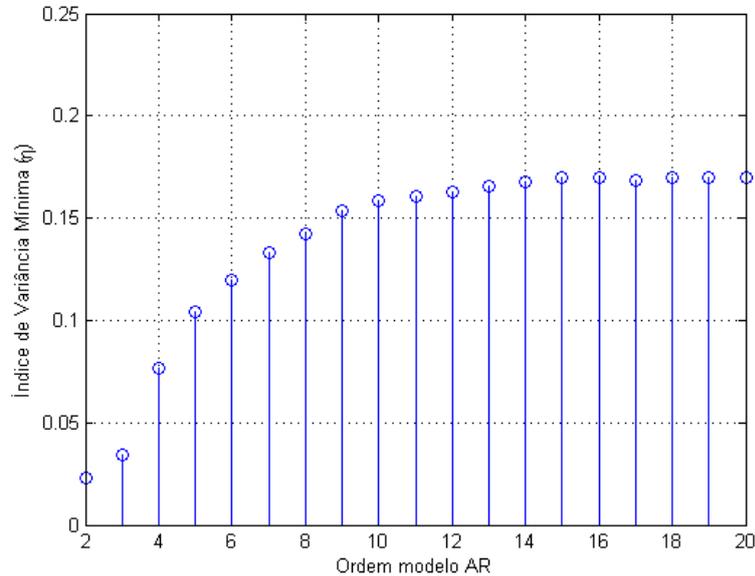


Figura D.1: Variação do Índice de Variância Mínima com a estrutura do modelo AR.

Analisando o gráfico, nota-se que para modelos com mais de 15 regressores não se observam alterações relevantes no Índice de Variância Mínima. Sendo assim, aplica-se um modelo auto-regressivo com ordem igual a 15 e compara-se a saída 'medida' do sistema com a saída do modelo estimado  $y(k) = -\hat{a}_1 \cdot y(k-1) - \hat{a}_2 \cdot y(k-2) - \dots - \hat{a}_{15} \cdot y(k-15)$  na Figura D.2.

A variância mínima teórica é resultado da soma dos coeficientes ao quadrado do polinômio  $E(z^{-1})$  da Equação Diofantina (1.4) e é igual a saída do sistema ao ser empregado o Controlador de Variância Mínima. Para a função de transferência (D.1) e variância do ruído  $\sigma_{ruído}^2 = 0.25$ , este valor é igual a:

$$\sigma_{mv} = (1 + -0.5134^2 + 0.2636^2) * \sigma_{ruído} = 0.3333 \quad (D.2)$$

Avalia-se o desempenho do controlador PI (dados da Figura D.3), por meio do Índice de Variância Mínima, sendo a variância de saída do processo  $\sigma_y^2$  e a variância mínima  $\sigma_{mv}^2$  estimadas como proposto por (Desborough e Harris, 1992). A Figura D.4

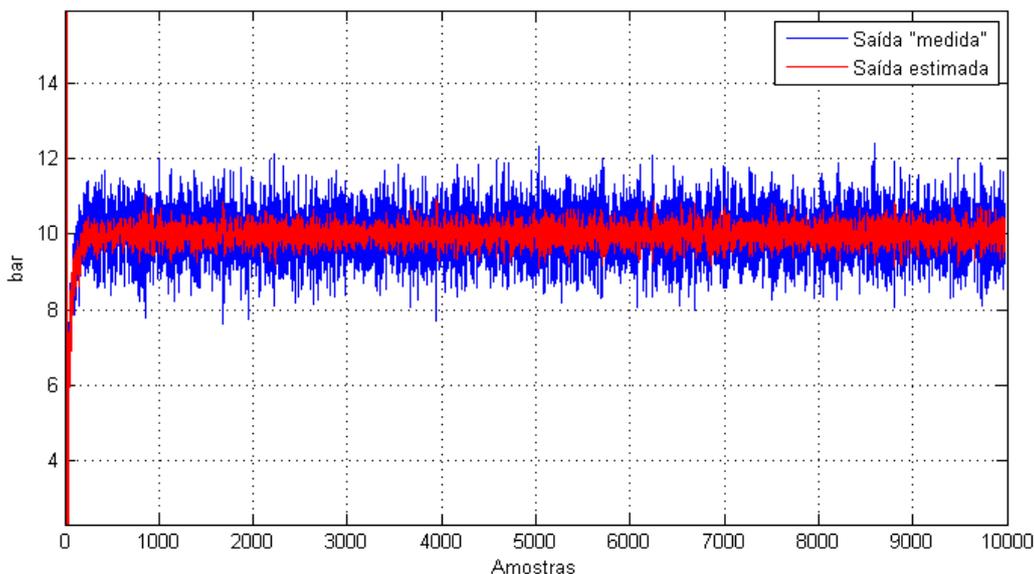


Figura D.2: Comparação entre a saída 'medida' e a saída do modelo estimado.

destaca, além das duas estimativas citadas, a variância mínima teórica (D.2). Para esta simulação foi utilizado um modelo auto-regressivo de ordem igual a 15, janela temporal assintótica de 500 amostras. Além disso, os dados para estimação recursiva das variâncias só foram contabilizados a partir da iteração número 50, buscando assim, uma convergência mais rápida.

Nota-se que a convergência de  $\hat{\sigma}_{mv}^2$  estimada para a  $\sigma_{mv}^2$  teórica é um pouco lenta, ocorrendo apenas a partir de 3500 amostras. Essa tendência pode ser acelerada com a diminuição da janela temporal assintótica, porém, essa alternativa deixaria a estimação da variância mínima, e por conseguinte, o índice de desempenho, com maiores oscilações. Dessa forma, procurou-se estabelecer um compromisso entre essas características, privilegiando o quesito de um menor grau de oscilação, já que a simulação era em regime regulatório. Pode-se verificar que, após a convergência,  $\hat{\sigma}_{mv}^2$  se aproxima do valor real  $\sigma_{mv}^2$  teórico, resultando, em média, em um valor igual a 0.3416. Um detalhe muito importante que deve ser atentado na Figura D.4: o comportamento de oscilação da variância mínima estimada e o da variância da saída possuem o mesmo aspecto. A ocorrência de picos e vales, subidas e descidas de ambas as estimativas ocorrem, ou muito próximas umas das outras, ou senão, no mesmo instante de amostragem. Como

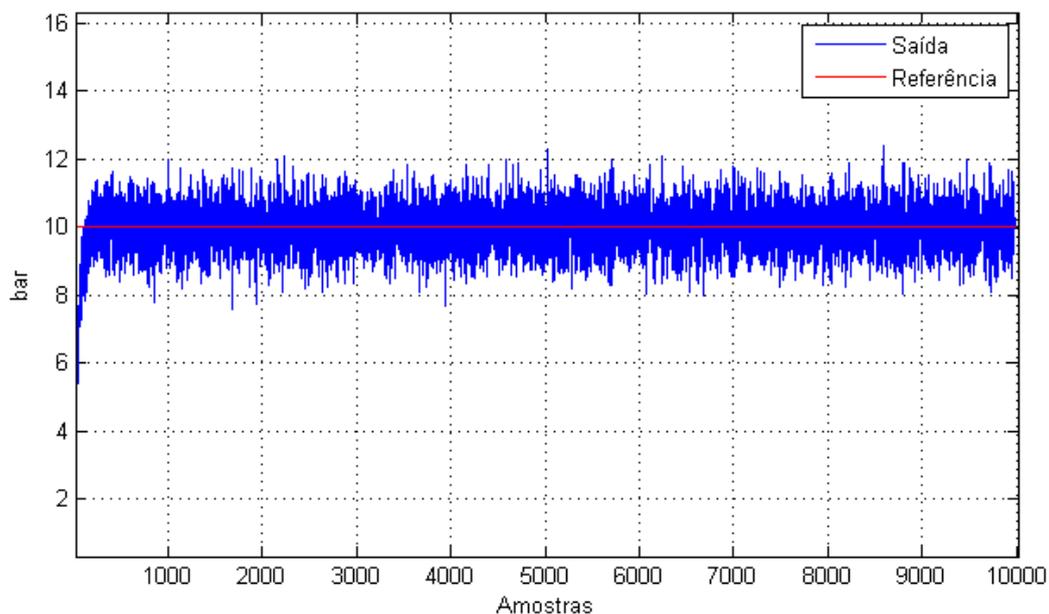


Figura D.3: Saída do sistema controlado.

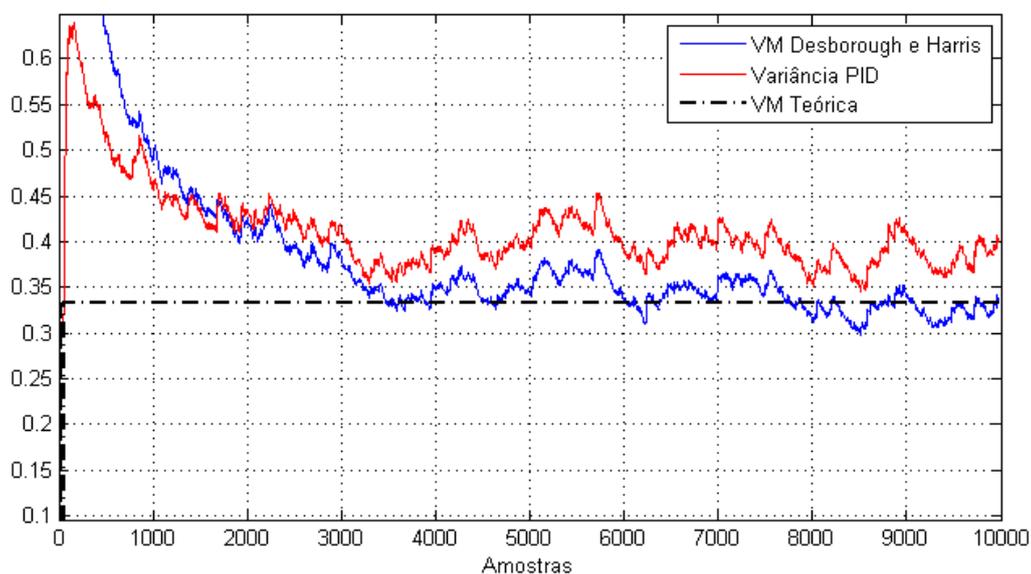


Figura D.4: Comparação da  $\sigma_{mv}$  teórica com a  $\hat{\sigma}_{mv}$  e  $\hat{\sigma}_y$  estimadas recursivamente.

proposto em (Desborough e Harris, 1992) aplica-se aos sinais uma média móvel do tipo:

$$\hat{\sigma}_{mv}(t) = \beta \cdot \hat{\sigma}_{mv}(t-1) + (1-\beta) \cdot e^2 \quad (\text{D.3a})$$

$$\hat{\sigma}_y(t) = \beta \cdot \hat{\sigma}_y(t-1) + (1-\beta) \cdot y^2 \quad (\text{D.3b})$$

sendo que  $\beta$  é o fator de esquecimento. Como são estimados da mesma maneira, possuem uma variação periódica análoga durante toda a simulação. Essa questão não é claramente exposta pelos trabalhos estudados nesta dissertação (Desborough e Harris, 1992, 1993; Kempf, 2003; Harris e Yu, 2007). Isso porque os resultados da avaliação de desempenho são apresentados apenas em função da razão entre as duas estimativas, sendo que, em nenhuma referência, tratou-se a estimação de  $\hat{\sigma}_{mv}^2$  e  $\hat{\sigma}_y^2$  separadamente, como em D.4. Considerando esse fato, presume-se a possibilidade de falseamento dos resultados do Índice de Variância Mínima (Harris, 1989) estimado recursivamente pelas Equações (D.3).

Um controlador pode exibir, em certos espaços de tempo, uma melhora em seu comportamento. Considerando um sistema atuando em servomecanismo, o controlador pode responder a mudanças de referência mais rapidamente, zerando o erro em regime permanente e estabilizando o sistema. Já para o controle regulatório, rejeitando perturbações de ruído e carga com maior precisão. A degradação da sua resposta pode ser evidenciada em respostas mais lentas e/ou maior influência das perturbações na saída do sistema. O índice de desempenho recursivo é aplicado com o intuito de revelar esses comportamentos pontuais do sistema de controle. Para o caso do Índice de Variância Mínima na forma (1.7), uma resposta mais adequada do controle seria evidenciada por a diminuição do valores do índice. Já em situações de degradação da saída seriam demonstrados por acréscimo dessa métrica. Porém, pelo modo como foram estimadas a variância mínima  $\hat{\sigma}_{mv}^2$  e a variância de saída  $\hat{\sigma}_y^2$ , podem ocorrer atenuações ou mesmo falseamento na análise do comportamento do controlador.

A Figura D.5 mostra o resultado da aplicação do Índice de Variância Mínima(1.7) relacionando os valores apresentados na Figura D.4. Em preto, relaciona-se a variância mínima teórica com a variância da saída estimada e, em vermelho, aplicam-se as estimativas da variância mínima e da variância da saída. Observa-se que, para o

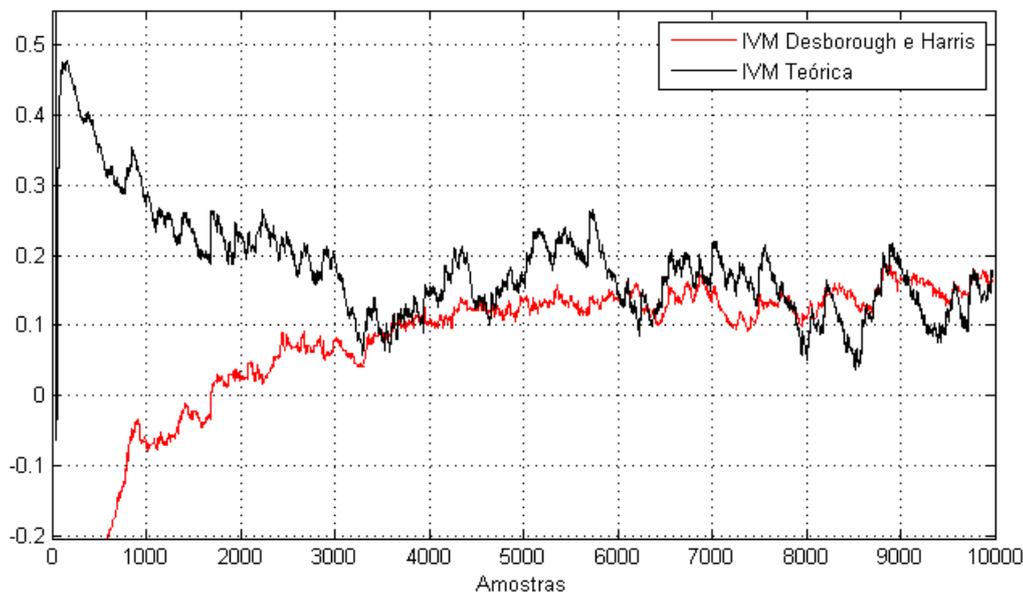


Figura D.5: Comparação do Índice de Variância Mínima calculados com a estimativa da VM (—) e com a VM teórica (—).

segundo caso (em vermelho), o Índice de Variância Mínima exibe menores variações comparando-se com o primeiro caso (em preto). Essa atenuação se deve às variações idênticas que as estimativas apresentaram pelo método recursivo. Esse comportamento não é interessante, uma vez que pode reduzir ou até mesmo falsear mudanças na resposta do sistema de controle. Verifica-se que essa questão se agrava, considerando sistemas não-lineares.

Os outros métodos estudados neste trabalho foram aplicados ao sistema linear (D.1). Portanto, a seguir, comparam-se as estimações de Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992), Erro de Predição Ótimo, e do Resíduo do Modelo. O preditor ótimo para o processo desse apêndice é:

$$\hat{y}_{k+3/k} = g_0 \cdot u(k) + g_1 \cdot u(k-1) + g_2 \cdot u(k-2) + f_0 \cdot y(k) \quad (\text{D.4})$$

A saída simulada  $y'(k)$  utilizada no método do Resíduo do Modelo é dada por:

$$y'(k) = -\hat{a}_1 \cdot y'(k-1) + \hat{b}_2 \cdot u(k-3) \quad (\text{D.5})$$

A Figura D.6 ilustra a função de autocorrelação de uma representação do ruído  $\xi(k)$  para o sistema linear estudado.

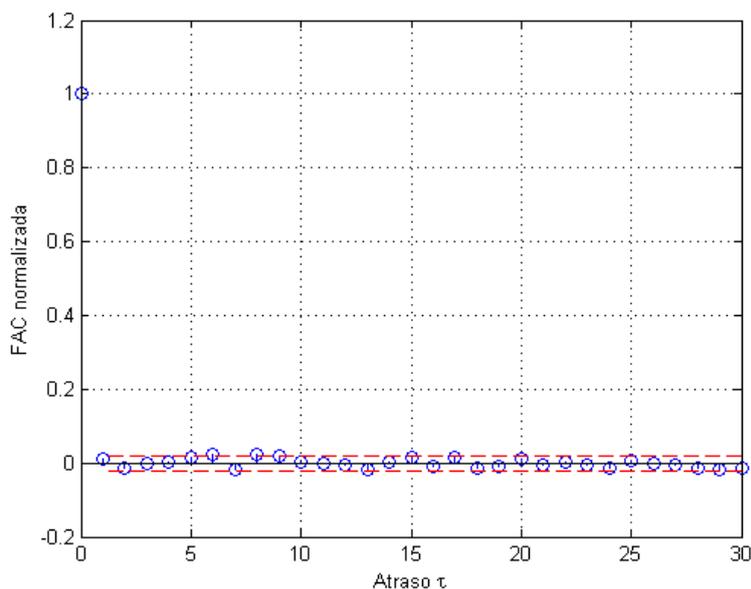


Figura D.6: Função de autocorrelação normalizada de  $\xi_k$  para o caso linear.

O ruído determinado apresentou boas características de um ruído branco, pois sua Função de Autocorrelação é impulsiva. Lembrando que esse é um caso ideal, em que o ruído foi simulado conjuntamente com a função de transferência. Além disso, o modelo do sistema é conhecido. Desta forma, as várias estimativas da Variância Mínima para o caso linear da Equação (D.1) são apresentadas a seguir.

A grande vantagem do método do Resíduo do Modelo em relação aos outros é a rápida convergência, além de ser mais estável, por não aplicar o filtro de média móvel durante a estimação, como demonstrado em capítulos anteriores.

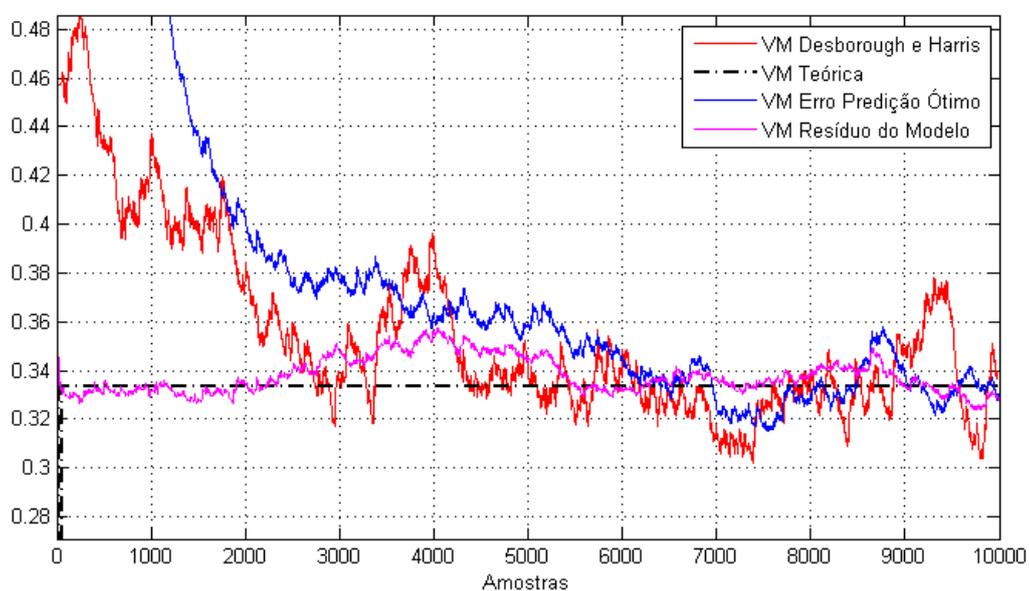


Figura D.7: Comparação da  $\sigma_{mv}$  teórica com as estimações da VM para o Desborough e Harris (Desborough e Harris, 1992) (—), Erro de Predição Ótimo (—) e Resíduo do Modelo (—).