Maria Imaculada de Souza Marcenes Gonçalves

CRENÇAS E DIFICULDADES DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO DOMÍNIO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Belo Horizonte

2013

Maria Imaculada de Souza Marcenes Gonçalves

CRENÇAS E DIFICULDADES DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO DOMÍNIO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Tese apresentada ao Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Educação.

Orientadora - Profª Drª Cristina de Castro Frade

Belo Horizonte

2013

G635c
T

Gonçalves, Maria Imaculada de Souza Marcenes.

Crenças e dificuldades de futuros professores de matemática no domínio dos números racionais [manuscrito] / Maria Imaculada de Souza Marcenes Gonçalves. - UFMG/FaE, 2013.

201 f., enc, il..

Tese - (Doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.

Orientadora : Cristina de Castro Frade.

Inclui apêndices e bibliografia.

1. Educação -- Teses. 2. Frações -- Estudo e ensino -- Teses. 3. Matemática -- Formação de professores -- Teses.

I. Título. II. Frade, Cristina de Castro. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação

CDD- 510.711

Catalogação da Fonte : Biblioteca da FaE/UFMG

Universidade Federal de Minas Gerais
Faculdade de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social

Tese intitulada **CRENÇAS E DIFICULDADES DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO DOMÍNIO DOS NÚMEROS RACIONAIS**, de autoria de **MARIA IMACULADA DE SOUZA MARCENES GONÇALVES**, analisada pela banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

____
Profª. Drª. Cristina de Castro Frade – Orientadora
Universidade Federal de Minas Gerais

____
Profª. Drª. Ana Cristina Ferreira
Universidade Federal de Ouro Preto

____
Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira
Universidade Federal de Ouro Preto

____
Profª. Drª. Maria Laura Magalhães Gomes
Universidade Federal de Minas Gerais

____
Profª. Drª. Samira Zaidan
Universidade Federal de Minas Gerais

____
Profª. Drª. Daisy Moreira Cunha
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Educação:
Conhecimento e Inclusão Social – FaE/UFMG

Belo Horizonte, 25 de fevereiro de 2013.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Belo Horizonte, MG – 31270-901 – Brasil – tel.: (031) 3409-5309 – fax (031) 3409-5309

Papai e mamãe, o carinho, o amor, a coragem e a determinação sem medidas para que eu me tornasse quem sou, para que eu chegasse até aqui.

Amir, meu companheiro, amor, amigo que não soltou a minha mão nessa caminhada.

Larissa, Luciana e Vinícius, meus amores que me amam, me incentivam e me orgulham com tantas vitórias.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Minas Gerais e aos professores da Linha de Educação Matemática pela oportunidade de aprendizado; à Coordenação do Programa de Doutorado em Educação da Universidade de Alicante (Espanha) e ao grupo *Inovacion Y Formacion Didactica*, por ter discutido minha pesquisa em seminário; ao Centro Universitário de Belo Horizonte (Uni-Bh) que tornou possível esta pesquisa.

Agradeço especialmente...

À professora Dra. Cristina de Castro Frade, não apenas pelas valiosas orientações, mas pela paciência e sabedoria com que lidou com as minhas questões.

Ao professor Dr. Salvador Llinares, meu orientador no doutorado sanduíche, pela generosidade e pelo respeito com minha pesquisa e, sobretudo, pela cordialidade e amabilidade com que me recebeu.

Aos professores Dra. Ana Cristina Ferreira, Dr. Plínio Cavalcanti Moreira, Dra. Samira Zaidan e Dra. Maria Laura Magalhães Gomes, por aceitarem fazer parte da banca, pelos pareceres e tempo dedicado.

À professora Julia Valls, por permitir que eu observasse suas aulas na Universidad de Alicante e pelas sugestões na elaboração das questões sobre frações.

À CAPES, pelo financiamento do estágio em Alicante.

À minha amiga Adriana Assis, que dividiu comigo angústias, incertezas, mas que também compartilhou momentos tão especiais no Brasil e na Espanha, pelas leituras críticas do meu trabalho que tanto me ajudaram.

Ao meu filho Vinícius, pela disponibilidade amorosa em ouvir-me e ajudar-me nas traduções.

Ao amigo Alexandre Rodrigues, pela disponibilidade e generosidade em ler e formatar este trabalho.

Ao amigo Érico Ferrão, pela dedicação em salvar uma entrevista que quase se perdeu.

Aos meus queridos alunos, que tornaram a pesquisa possível, um agradecimento muito especial por aceitarem o convite e por se disporem a chegar antes do horário das aulas, o que, algumas vezes, fez, com que eles se apressassem depois do trabalho para conceder entrevistas.

Aos amigos Rosicler Santos, Márcia Hauss, Vitório Pongelupe, Cristina Rotsen, Luciana Tenuta, Elvira Leite, Denise Martins, pela interlocução que ajudou a elucidar pontos importantes da pesquisa.

À Deniz Gonçalves, pelo abraço que marcou o início dessa caminhada.

À amiga Márcia Sarquis, pelo carinho e delicadeza que dedicou à leitura da tese.

À minha afilhada Camila Hauss, pela valiosa contribuição nas ilustrações.

Aos meus irmãos Inês e Anísio, David e Lia e a meus queridos sobrinhos, pelo incentivo e por cuidarem dos nossos pais.

RESUMO

Este trabalho de tese dedicou-se a um estudo das crenças e dificuldades de um grupo de alunos do primeiro ano do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro Universitário de Belo Horizonte (MG) acerca das frações. Os principais objetivos do estudo foram identificar as recordações desses alunos sobre esse conteúdo no ensino básico e as possíveis origens de tais crenças e dificuldades. No caso das crenças, a pesquisa fundamentou-se na ideia de crenças de um domínio específico conforme introduzida por Törner (2000). Para esse pesquisador, diferentes campos da matemática apresentam diferentes características e, por isso, possuem crenças específicas que as crenças globais sobre a Matemática não seriam capazes de explicar. Neste trabalho de tese, o domínio específico considerado foi o dos números racionais. As dificuldades foram tratadas como entraves de ações matemáticas, quando se está engajado em alguma situação que envolva lidar com certo conteúdo, e evidenciadas por meio de manifestações emocionais (medo, apreensão, bloqueio), na direção proposta por Sanmartí (2009). Os dados foram produzidos, a partir das respostas dos alunos a questionários e entrevistas, e de anotações de um diário de campo. O tratamento dos dados relativos às crenças baseou-se no modelo de Clement (2000). A principal característica desse modelo consiste no processo cíclico e constante do estudo de protocolos. Tal modelo permitiu encontrar quatro dimensões das crenças dos alunos acerca das frações: a) fração como um processo, como um número que se resolve, como divisão (ação); b) fração como (não) resposta a um problema; c) ensino e aprendizagem de fração; d) autoeficácia negativa. As dificuldades dos alunos em relação às frações foram identificadas principalmente pelas emoções de *medo*, *apreensão*, *bloqueio*, descritas pelos alunos durante as entrevistas. Procurou-se, também, identificar as origens dessas crenças por meio das recordações dos alunos acerca de suas experiências de ensino e aprendizagem com frações na escolarização básica. Os relatos dos alunos-participantes mostraram a pouca atenção dos professores com o tratamento das frações no ensino básico, resumindo-se em um ensino *tradicional*, *basicão*, com atividades rotineiras de *divisão da pizza*, redução de frações ao mínimo múltiplo comum e priorizando os números inteiros. Os resultados de pesquisa, obtidos das recordações dos alunos-participantes e, posteriormente, de três estudos de caso, indicaram, fortemente, que as origens das crenças e dificuldades dos alunos no domínio dos números racionais, em particular as frações, estão na escolarização básica desses alunos, mais precisamente no modo de ensino a que foram submetidos. O entendimento construído nesta pesquisa foi que, uma vez originadas as crenças em certo momento da vida escolar dos alunos, entra-se em um círculo vicioso envolvendo relações desfavoráveis entre ensino e aprendizagem, crenças e dificuldades. A esse respeito, esta pesquisa leva a uma reflexão sobre um papel perverso da escola: é suposto que a função da escola seja a de oferecer condições de ensino e aprendizagem que favoreçam uma compreensão significativa dos conteúdos de matemática, em particular das frações. Contudo, o que os resultados desta tese apontaram, para o caso das frações, é que a própria escola parece ser a principal responsável pelo descaso e limitação do ensino desse conteúdo. Uma implicação pedagógica decorrente deste estudo consiste na sugestão da incorporação de temáticas sobre o papel da afetividade no ensino e aprendizagem nos cursos de desenvolvimento profissional de professores.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem de frações. Crenças e dificuldades em relação às frações. Formação de professores de matemática.

ABSTRACT

This thesis work was dedicated to a survey about beliefs and difficulties of a group of first-year students from a degree course in Mathematics of the University Center in Belo Horizonte (MG) concerning fractions. The main objectives of the survey were to identify these students` remembrances with this content in basic school and the possible origins of those beliefs and difficulties. In the case of beliefs, the research was grounded on the idea of domain-specific beliefs as introduced by Törner (2000). For this researcher, different fields of Mathematics have different features and therefore have specific beliefs that could not be explained by global beliefs about Mathematics. In this thesis work, the specific domain considered was the one of rational numbers .The difficulties were treated as hindrances of mathematical actions when someone is engaged in a situation that involves handling with specific content and evidenced through emotional expression (fear, apprehension, blockage) in the direction proposed by Sanmartí (2009). The data was produced from the students' answers to questionnaires and interviews and field notes. The treatment of the data relative to the beliefs was based on Clement's (2000) model. The main feature of this model consists on a cyclic and constant study of protocols. That model allowed the researcher to find four dimensions of students' beliefs about fractions: a) fractions as a process, a number to be solved, as division (action); b) fraction as (not) the answer of a problem; c) fraction teaching and learning; d) negative self-efficacy. The students' difficulties in relation to fractions were identified mainly through emotions of *fear*, *apprehension*, *blockage*, described by the students during the interviews. It was also sought to identify the origins of these beliefs through the students' remembrances from their experiences of fraction teaching and learning in basic schooling. The participant students' reports showed the little attention of teachers to treating fractions in basic school, being summarized as *traditional*, *very basic* teaching, with routine activities of *pizza fractioning*, reducing fractions to least common multiple and giving priority to integers. The research results, obtained from the participant students` remembrances and later from three case studies, have strongly indicated that the origins of students' beliefs and difficulties in the domain of rational numbers, particularly fractions, come from the students' basic schooling, precisely the way of teaching they were submitted to. The understanding constructed in this research was that, once the beliefs were originated at a certain point in the pupils' school life, it begins a vicious circle involving unfavorable relations among teaching and learning, beliefs and difficulties. To this respect this research takes into a reflection about the perverse role of school: it is supposed that the school function is to provide conditions for teaching and learning that favor meaningful comprehension of mathematical content, particularly fractions. However, what the results of this thesis pointed out, for the case of fractions, was that school itself seems to be the responsible for the neglect and limitation of the teaching of this content. An important pedagogical implication coming from this survey consists on the suggestion of incorporation of thematic about the role of affection in teaching and learning in the teachers' professional-development courses.

Keywords: Fraction teaching and learning. Beliefs and difficulties about fractions. Graduation of Mathematics teachers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1.1 Lista de figuras

1.2 Lista de quadros

1.3 Lista de tabelas

Lista de siglas

C1	Primeira categoria de crença
C2	Segunda categoria de crença
C3	Terceira categoria de crença
C4	Quarta categoria de crença
COEP	Comitê de Ética em Pesquisa
COM	Centro de Processamento Multimídia
FaE/UFMG	Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais
Fafi-BH	Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Belo Horizonte
mmc	mínimo múltiplo comum
NAEP	National Assessment of Education Progress
PCK	Pedagogic Content knowledge
PCN's	Parâmetros Curriculares Nacionais
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
QC	Questionário sobre Crenças
RNP	Rational Number Project
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Básico
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
TCLE	Termo de Compromisso Livre e Esclarecido
TIG I	Trabalho Interdisciplinar de Graduação
UniBH	Centro Universitário de Belo Horizonte

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino dos números racionais há muito é pesquisado e discutido entre os educadores matemáticos. A apropriação do conceito de fração[1], dentro do campo dos números racionais, não é tarefa simples e tem repercussão na vida escolar. Sob um ponto de vista psicológico, David e Fonseca (2005) argumentam que o trabalho com números racionais surge como uma oportunidade privilegiada para se promoverem o desenvolvimento e a expansão de estruturas cognitivas necessárias ao desenvolvimento intelectual. Além disso, a importância de se compreender significativamente o conceito de fração respalda-se em situações simples do dia a dia, como medição, comparação e operação de divisão.

Pesquisar a formação e uso do conceito de fração sempre foi meu interesse. Mais recentemente, vislumbrar uma melhor compreensão da aprendizagem de frações sob a luz da afetividade, em particular do componente afetivo-cognitivo *crença* (McLEOD, 1992), tem sido o meu foco.

Por ora, estou me referindo à crença como uma verdade mantida pelo indivíduo independentemente de sua consensualidade por um conjunto de pessoas, verdade esta que pode ser inferida a partir de coisas que esse indivíduo diz ou faz (conscientemente ou não) e que seja possível de ser precedida pela frase *Eu acredito que*....

Atualmente, leciono em um curso de Licenciatura em Matemática de Belo Horizonte e observo uma grande insegurança dos alunos em resolver problemas envolvendo frações, ainda que já tenham passado pelo ensino básico. Esse fato é comum em todas as turmas nas quais venho lecionando. Os alunos que ingressam no curso são, em sua maioria, egressos de escola pública ou de cursos de educação de jovens e adultos e desejam, segundo eles, aprender a matemática à qual não tiveram acesso e/ou que não ficou compreendida em anos anteriores.

Chama a minha atenção, por exemplo, a indecisão enfrentada por eles, quando se deparam com problemas de geometria que requerem o domínio do conceito de fração. Acerca desse assunto, vejamos o depoimento de um aluno:

> – “Eu sei o que o problema está solicitando, só não sei o que fazer, quando ele diz que os comprimentos dos segmentos são proporcionais a 2, 3 e 4”.

[1] Ao longo desta tese, a não ser em situações em que julgar necessária a distinção, me permitirei tomar os termos números racionais e frações como sendo a mesma coisa.

Há alguns anos, nesse mesmo curso de licenciatura, quando escrevi na lousa $\frac{3}{4}(a+1)=\frac{3}{4}a+\frac{3}{4}$, uma aluna questionou se o resultado da operação não seria

$\frac{3a}{4a}+\frac{3}{4}$.

Nas discussões acerca de suas avaliações, alguns alunos afirmam ter errado o resultado final de certa questão porque o número, que seria a resposta correta, era um número *esquisito* (fração). Daí, eles mudam os cálculos, na esperança de, talvez, encontrar um número mais familiar para a resposta.

Episódios como esses têm me despertado para a possibilidade de os alunos trazerem, para o Curso de Licenciatura em Matemática, experiências negativas em relação à aprendizagem de frações, uma vez que, pela faixa etária, esperava-se que eles tivessem suas experiências mais consolidadas com esse conteúdo. Nas situações de avaliação, por exemplo, não saber operar com frações, ou não conseguir identificar o significado de números proporcionais, é motivo de ansiedade e de medo de errar a questão.

Vários estudos como os de Behr *et al.,* (1992); Kieren (1994); Bryant e Nunes, (1997); Romanatto (1997); Lamon (2007) e Moreira e Ferreira (2008) tratam da complexidade e da diversidade dos conceitos envolvidos em números racionais. Há, também, pesquisas que tratam da complexidade e das dificuldades no ensino e aprendizagem no domínio desses números - Soares, Ferreira e Moreira (1998); Lopes (2008); Magina e Campos (2008); Isiksal e Cakiroglu (2010); Pitta-Pantazi e Christou (2011). Aqui, a expressão *dificuldades no ensino e aprendizagem de algum conteúdo matemático* se refere a entraves (bloqueios, paralisações, relutâncias, ...) de ações matemáticas, revelados pelos professores ou pelos alunos quando esses estão engajados em alguma situação que envolva lidar com esse conteúdo.

No contexto da educação matemática, vários pesquisadores como, por exemplo, McLeod (1992); Chacón (2003a); Araújo *et al.* (2003); Bishop e Clarke (2005); Zan *et al.,* (2006) e Machado; Frade e Da Rocha Falcão (2010) têm se dedicado ao estudo de relações entre afetividade em suas diferentes manifestações e cognição. Para esses autores, crenças, emoções, sentimentos, atitudes e valores são elementos presentes, fundamentais e interferentes em qualquer situação de ensino e aprendizagem da matemática. A esse respeito, Chacón (2003a, p. 23) diz que

> [...] existe uma relação cíclica entre os afetos e aprendizagem: por um lado, a experiência do estudante ao aprender Matemática provoca diferentes reações e influi

> na formação de suas crenças; por outro lado, as crenças defendidas pelo sujeito têm uma consequência direta em seu comportamento em situações de aprendizagem e em sua capacidade de aprender. Os estímulos que o estudante recebe, ao aprender Matemática, geram nele certa tensão e provocam reações emocionais de forma positiva ou negativa. Se o indivíduo se depara com situações similares repetidamente, produzindo o mesmo tipo de reação afetiva, então a avaliação da reação emocional pode ser automatizada e se "solidifica" em atitudes. Essas atitudes e emoções influem nas crenças e colaboram para a sua formação.

A citação acima leva-nos a refletir sobre o fato de que a identificação de crenças dos alunos em relação à matemática e, em particular, às frações, pode nos fornecer informações relevantes para a compreensão de dificuldades na disciplina com o trabalho com esse conteúdo.

Encontramos, na literatura, também, alguns trabalhos interessantes sobre a influência do professor sobre as *crenças matemáticas*[2] dos alunos. Por exemplo, os trabalhos de Ponte (1992) e de Machado; Frade e Da Rocha Falcão (2010) mostram que os professores de matemática estão posicionados em um *lugar* fundamental nos processos de ensino e aprendizagem no que diz respeito à influência sobre as crenças dos alunos, já que são os responsáveis pela organização de suas experiências de aprendizagem e podem ser vistos como *modelos*.

No caso dos números racionais, Ciscar e Garcia (2000) afirmam que as crenças dos professores orientam suas ações em sala de aula e podem, às vezes, influenciar mais na sua prática do que o conhecimento de técnicas ou de planejamento para ensinar. Esses pesquisadores sugerem que os professores deveriam responder algumas perguntas que podem surgir quando têm que ensinar frações. Que noções acreditam que são básicas no ensino de frações? Acreditam que as crianças identificam a noção de operação com frações nas situações cotidianas? Acreditam que as crianças utilizam os algoritmos relativos às operações com frações em situações do cotidiano? O ensino de frações deve permanecer em um nível mais abstrato? A maneira de responder a esses e a outros questionamentos, segundo Ciscar e Garcia (2000), depende, em parte, das crenças dos professores.

Ainda, segundo Ciscar e Garcia (2000), os professores deveriam refletir sobre suas crenças em relação às frações, principalmente sob três aspectos: as frações e a utilidade ou não de seu ensino na escola; o que significa aprender o conceito de frações e o lugar que devem ocupar as frações no currículo e a valorização que o professor atribui às operações com as frações.

Sobre o ensino e a aprendizagem de frações, pesquisadores acreditam na necessidade de proporcionar às crianças uma experiência apropriada com as várias

---

[2] Crenças matemáticas se referem às crenças dos indivíduos acerca da matemática, de seu ensino, de sua aprendizagem, do contexto da sala de aula.

interpretações das frações, almejando uma compreensão significativa de seu conceito (KIERREN, 1976; STREEFLAND, 1978; BEHR *et al.,* 1983; KERSLAKE, 1986; ROMANATTO, 1997).

Percebe-se, com essas considerações, o quanto as crenças do professor em relação às frações podem influenciar as crenças que os alunos desenvolvem com esse conteúdo. De maneira geral, alunos que estão iniciando um Curso de Licenciatura em Matemática guardam recordações de suas experiências escolares acerca da aprendizagem de frações e do modo com que seus professores trataram esse conteúdo em sala de aula. Informações sobre tais experiências podem, também, ajudar a esclarecer as crenças e as dificuldades desses alunos em relação às frações.

Diante do exposto, este trabalho de tese é norteado pelo seguinte problema: **quais crenças e dificuldades os alunos do primeiro ano de um Curso de Licenciatura em Matemática trazem consigo em relação às frações?**

Realizar um estudo visando oferecer uma resposta a essa questão tornou-se, então, o objetivo central de minha investigação. No caso das crenças, meu foco incidiu naquelas que são mais específicas do que os tipos de crenças matemáticas encontradas na literatura, a saber, *crenças de um domínio específico* conforme introduzidas por Törner (2000). Para esse autor, domínios específicos da matemática, como, por exemplo, geometria, estatística e cálculo têm crenças específicas, e as crenças globais[3] sobre a matemática não seriam capazes de explicar adequadamente as crenças de um domínio mais específico dessa disciplina. Törner (2002) justifica a pertinência de tratar crenças mais específicas a um conteúdo matemático argumentando o seguinte.

> Nos periódicos matemáticos classificamos os conteúdos matemáticos em áreas e também fazemos isso no ensino da Matemática – alguns ensinam cálculo, outros se preocupam com álgebra, outros trabalham com geometria. Porque os diferentes campos da Matemática possuem diferentes características, e porque existe uma razão para distinguir entre as crenças relativas à questão de conteúdos [*subject-matter beliefs*] e às crenças globais, propomos o termo *'crenças de um domínio específico'* [*domain-specific beliefs*]. (TÖRNER, 2002, p. 87, itálico no original)[4]

No caso desta pesquisa, o domínio específico considerado é o conjunto dos números racionais.

[3] Por crenças globais, Törner (2002) se refere às crenças gerais sobre a matemática, incluindo, por exemplo, crenças acerca do ensino ou aprendizagem da matemática, da natureza da matemática e da origem e do desenvolvimento do conhecimento matemático.

[4] Todas as traduções de citações referentes a trabalhos escritos em língua estrangeira são de minha autoria. A página indicada refere-se ao trabalho no original.

São questões de pesquisa deste estudo:

1. Quais recordações escolares os alunos do primeiro ano de um Curso de Licenciatura em Matemática têm sobre frações?
2. A partir dessas recordações, o que podemos dizer sobre a origem das crenças e dificuldades apresentadas por esses alunos em relação às frações?

Para responder a essas questões foi realizada uma investigação empírica com um grupo de alunos de uma faculdade particular de Belo Horizonte, que iniciou o Curso de Licenciatura em Matemática no primeiro semestre de 2010. Essa investigação, que será discutida em detalhes mais adiante, foi realizada em dois momentos da formação desses alunos: no primeiro período do curso, que denomino primeira fase de pesquisa, e no quarto período do curso (2011), que chamo de segunda fase de pesquisa.

A contribuição de meu trabalho para o campo de pesquisa em educação matemática encontra-se, a meu ver, no oferecimento de uma abordagem que procura integrar *ensino e aprendizagem*, *crenças e dificuldades*, em relação às frações, tendo em vista a escassez de trabalhos desenvolvidos na convergência dessas temáticas.

Esta tese está organizada em sete capítulos da seguinte maneira: o primeiro capítulo, *Marco teórico*, é dedicado aos referenciais teóricos que sustentam a investigação. Apresentam-se pesquisas no campo da educação matemática que tratam de crenças, bem como trabalhos que discutem dificuldades no ensino e aprendizagem de frações.

No segundo capítulo, *Problema de investigação e metodologia*, delimitam-se o estudo, o ambiente de pesquisa e os participantes, a implementação e a estratégia de análise dos dados, acrescidos da descrição dos procedimentos metodológicos utilizados.

No terceiro capítulo, *Análise e discussão das crenças e das recordações de experiências vividas pelos alunos*, promove-se uma análise e interpretação dos dados. Descrevem-se e ilustram-se as categorias de crenças construídas e as recordações escolares dos participantes e interpretam-se os dados globalmente. Nos capítulos IV, V e VI discutem-se três estudos de caso.

No sétimo capítulo, *Considerações finais*, tem-se a conclusão do trabalho, destacando-se os resultados que emergiram da análise e da interpretação dos dados empíricos, bem como se indicam possíveis pesquisas futuras que eles apontam para a área de educação matemática.

CAPÍTULO I
MARCO TEÓRICO

1 Crenças na educação matemática

O estudo das crenças começa a ser explorado pelos psicólogos sociais somente no começo do século XX (THOMPSON, 1992). Isso porque, de acordo com Leder, Pehkonem e Törner (2002), as perspectivas comportamentais de aprendizagem, anteriores a esse período, atraíram maior atenção dos pesquisadores, e os esforços de investigação voltaram-se para aspectos mais facilmente observáveis do comportamento humano. Com isso, a perda de interesse na investigação de crenças foi inevitável. Somente com o desenvolvimento da ciência cognitiva nos anos 1970 ressurgem as atenções para as crenças e sistema de crenças (ABELSON, 1979).

A literatura mostra que pesquisar crenças exige um estudo cauteloso, porque, embora seja um construto adotado por vários pesquisadores, não existe um consenso sobre sua definição (THOMPSON, 1992; TÖRNER, 2002; LEDER e FORGARZ, 2002; PEHKONEN, 2004; MAAB e SCHLÖGLMANN, 2009). Cury (1999), por exemplo, diz que, além das variações de significado, são encontradas, em várias pesquisas, aproximações com outros conceitos como, por exemplo, *concepção*, *conhecimento*, *opinião* (ou ponto de vista, visão) e *modelo*. Além disso, problemas de tradução têm influenciado a forma como alguns autores se referem a esses construtos[5].

Atualmente, a literatura sobre crenças é abundante, mostrando estudos sob diversas perspectivas e focos de interesse. As leituras que realizei sobre o assunto tiveram como objetivo auxiliar-me na elaboração de um referencial teórico que pudesse enriquecer meu entendimento desse construto.

No campo da educação matemática, meus estudos sobre crenças voltaram-se, sobretudo, às pesquisas dos últimos dez anos (ver, por exemplo, Ferreira, (1998) para uma revisão anterior a esse período). Não obstante, faço referência a algumas contribuições advindas das áreas da psicologia (ABELSON, 1979, NISBETT e ROSS, 1980; ROKEACH, 1981), da antropologia (NESPOR, 1985) e mesmo da educação matemática, anteriores a esse

[5] Para esta pesquisa, a palavra *belief* foi traduzida do inglês como crença, embora seja, muitas vezes, traduzida em outros trabalhos como concepção.

período, que influenciaram notadamente os estudos sobre crenças nesse campo de pesquisa nos últimos dez anos. Devido à influência das contribuições aludidas da psicologia e da antropologia, precedo minha exposição sobre crenças discorrendo, brevemente, sobre elas.

Para Abelson (1979), as crenças são um tipo de conhecimento de manipulação, por meio do qual as pessoas lidam com propósitos particulares ou circunstâncias necessárias. Mesmo sendo uma tarefa delicada estabelecer uma fronteira entre conhecimento e crença, Abelson (1979) distingue esses termos apontando diferenças como: as crenças são mais subjetivas e o conhecimento mais objetivo, as crenças podem não ser consensuais, enquanto o conhecimento responde a algum critério de verdade para um determinado grupo de pessoas. Por exemplo, o teorema de Pitágoras seria, para Abelson (1979), um conhecimento objetivo, pois que é uma verdade matemática legitimada pela comunidade científica. Por outro lado, pensar que só existe uma maneira de demonstrá-lo já poderia ser visto como uma crença. E essa crença seria um conhecimento subjetivo, na medida em que suas raízes poderiam se originar do desconhecimento de outras formas de demonstração.

Outra tentativa de diferenciar conhecimento e crença é oferecida por Nisbett e Ross (1980) ao conceitualizarem o que denominam *conhecimento genérico*. Para esses pesquisadores, um conhecimento genérico é uma estrutura composta por um componente cognitivo, organizado esquematicamente, e um componente de crenças, constituído de elementos de avaliação e julgamento. Isso significa que, segundo Nisbett e Ross (1980), por trás de qualquer conhecimento, existe sempre uma crença que desempenha um papel avaliativo e de julgamento desse conhecimento. Voltando ao exemplo do Teorema de Pitágoras, poderíamos dizer que uma demonstração desse teorema (ainda que equivocada sob o ponto de vista da matemática), pertenceria, para Nisbett e Ross (1980), às instâncias do cognitivo, enquanto que acreditar, por exemplo, que suas aplicações são difíceis estaria na esfera das crenças.

Já a perspectiva de Rokeach (1981) não se propõe a discutir uma comparação entre crenças e conhecimento. Aliás, esse pesquisador toma uma direção totalmente diferente se comparada às de Abelson (1979) e Nisbett e Ross (1980). Ao usar o termo crença, Rokeach (1981) não se "[...] refere necessariamente a relatórios verbais tomados em valor nominal; as crenças são inferências feitas por um observador sobre estados de expectativas básicos" (ROKEACH, 1981, p. 1). Segundo esse autor, quando uma pessoa diz

> [...] "nisto eu acredito...", ela pode ou não estar representando exatamente aquilo em que verdadeiramente acredita, porque há frequentemente razões sociais e pessoais

> constrangedoras, conscientes ou inconscientes, por causa das quais ela não contará ou não nos pode contar (ROKEACH, 1981, p. 1).

Concordo com Rokeach (1981) no que se refere à confiabilidade das declarações de uma pessoa quando está em jogo a revelação de informações que podem torná-la frágil ou desconfortável diante do ouvinte. Entretanto, se conduzidas com o devido cuidado, entrevistas em profundidade[6] (POUPART, 2008), por exemplo, poderão produzir dados capazes de sugerir inferências interessantes acerca das crenças do indivíduo. Para Rokeach (1981), as crenças sobre a realidade física e social existem dentro de um sistema de crenças em que todas elas se encontram organizadas de uma forma psicológica, mas não necessariamente lógica. Nesse sistema, as crenças se organizam da seguinte maneira: tipo A – Crenças primitivas, tipo B – Crenças primitivas, tipo C – Crenças de autoridade, tipo D – Crenças derivadas, tipo E – Crenças inconsequentes.

Tipo A – Crenças primitivas – São crenças mais centrais, cujo consenso é unânime. As crenças primitivas são aprendidas em contato direto com o seu objeto e, portanto, não derivam de outras crenças. Essas crenças podem ser comparadas grosseiramente aos termos primitivos de um sistema axiomático de matemática e representam as verdades básicas do indivíduo. Por exemplo, quando alguém diz *eu acredito que meu nome é Ana* essa é uma verdade que independe da aceitação de outras pessoas, é uma verdade básica.

Tipo B – Crenças primitivas – Também chamadas de primitivas, são crenças sobre as quais pode não existir consenso ao contrário das primitivas do Tipo A. Essas são crenças aprendidas também em contato com o objeto. Entretanto, sua manutenção não depende da aceitação de outras pessoas, e argumentos e persuasão podem não ser capazes de penetrá-las. Por exemplo, quando alguma pessoa diz: *eu acredito que sou inteligente*, reflete sua crença sobre si mesma advinda de suas experiências e que tem suas bases em uma fé genuína.

Tipo C – Crenças de autoridade – Segundo Rokeach (1981), as crenças de autoridade marcam o início do desenvolvimento das crenças não primitivas em que a criança é forçada a pensar numa concepção seletiva de autoridade positiva e negativa. Por exemplo, a crença na existência de Papai Noel passa a ser questionada, sendo que, em um determinado momento da vida, ela foi uma crença tida como primitiva, pois a criança acreditava em Papai

[6] Entrevistas em profundidade são entrevistas não-estruturadas nas quais o entrevistador, após ter dado uma instrução inicial de fala ao entrevistado, visando norteá-lo sobre o tema em discussão, confere-lhe o máximo de liberdade para tratar o assunto, tentando "[...] orientar seus relances sobre as dimensões abordadas pelo interlocutor" (POUPART, 2008, p. 224).

Noel sem questionar sua existência.

Tipo D – Crenças derivadas – São crenças provenientes de outras. Essas crenças admitem controvérsias e, portanto, são questionáveis. Crenças do tipo D podem ser mantidas mais porque o crente mantém uma relação de confiança com uma autoridade, do que por estar exposto ao objeto da crença. Por exemplo, acreditar em uma notícia sobre determinado assunto porque o responsável por divulgá-la é uma autoridade nesse assunto seria um exemplo de crença derivada.

Tipo E – Crenças inconsequentes – São crenças que parecem representar questões de gosto mais ou menos arbitrárias. Originam-se do contato direto com o objeto de crença, e sua manutenção não depende de consenso social. Como exemplo, Rokeach (1981) refere-se às questões de gosto que não interferem em outras crenças.

O sistema de crenças admitido por Rokeach (1981) funciona como uma rede organizada de crenças em que umas podem interferir nas outras. Esse autor sugere que tal interferência se daria por meio de conexões: aquelas crenças que exercem maior influência sobre as outras são denominadas crenças com mais conexões funcionais e, portanto, seriam mais centrais. Por exemplo, as crenças que exerceriam menos influência nas decisões do indivíduo seriam as crenças inconsequentes e as que mais afetariam seriam as crenças primitivas do Tipo A.

Nesse sentido, Vila e Callejo (2006) dizem que, uma vez que nos referimos a determinada crença, é possível pensar que, junto com ela, podem estar agrupadas outras crenças como se fossem *cachos*. Se as crenças se agrupam dessa forma dentro de um sistema, tais *cachos* podem ser vistos como grupos isolados ou que se relacionam uns com os outros no mesmo sentido (sem se oporem) ou de maneira oposta. Contudo, a possibilidade de algumas crenças se oporem não significa uma situação de conflito, como argumentam Vila e Callejo (2006, p. 51) afirmando que “ [...] é possível manter simultaneamente crenças opostas, protegidas em seus respectivos clusters, sem que isso suponha um conflito.”

Nespor (1985) diz que as crenças têm fortes componentes afetivos e avaliativos se comparados ao conhecimento. E esses componentes afetivos operam independentemente da cognição associada ao conhecimento. Em outras palavras, para Nespor (1985), o conhecimento de um tópico difere dos sentimentos sobre o tópico. Ele argumenta, ainda, que as crenças retiram seu poder de episódios prévios ou eventos para *colorirem* a compreensão dos eventos subsequentes. Tais episódios têm um papel-chave nos estudos das práticas dos professores como o próprio autor exemplifica com dados de sua pesquisa: os esforços da professora Skylark para criar um ambiente amistoso em sala de aula originaram-se de suas próprias memórias de infância.

No contexto da educação matemática, as ideias sobre crenças são, também, bastante diversificadas e variam conforme o foco de interesse. A esse respeito, Pajares (1992) diz que as crenças são os maiores indicadores das decisões das pessoas, e que a psicologia educacional nem sempre designa a seus construtos uma precisão a ponto de que, definir crenças é, na melhor das hipóteses, um jogo de escolhas. Para Pajares (1992), as crenças *viajam em disfarces* e, com frequência, sob *apelidos* – atitudes, valores, julgamentos, axiomas, opiniões, ideologia, percepções, concepções, sistemas conceituais, preconcepções, disposições, teorias implícitas, teorias explícitas, teorias pessoais, processos mentais internos, estratégias de ação, regras de prática, princípios práticos, perspectivas, repertórios de interpretação, estratégia social, para mencionar alguns que podem ser encontrados na literatura.

Para Thompson (1992), a crença é um subconjunto das concepções. As concepções são definidas por Thompson (1992) como uma estrutura mental mais geral abrangendo crenças, significado, imagens, proposições, regras, gostos e preferências. Thompson (1992) distingue crença de conhecimento em termos de suas características.

> - As crenças podem ser mantidas com vários graus de convicção, o que não acontece com o conhecimento.
> - As crenças não são consensuais, são questionáveis. Já o conhecimento tem as características de ser certo e verdadeiro, de acordo com os filósofos. A autora cita Scheffler (1965), afirmando que, para esse pesquisador, conhecimento satisfaz a condição de verdade, enquanto as crenças existem independentemente de sua validade.
> - Dentro de uma perspectiva epistemológica tradicional, as crenças frequentemente podem ser mantidas ou justificadas por razões que não levam em consideração um acordo sobre como devem ser avaliadas ou julgadas, ao contrário do conhecimento (THOMPSON, 1992, p.130).

Outro entendimento para crenças é oferecido por Ponte (1992) ao propor que as crenças são como uma parte relativamente *pouco elaborada* do conhecimento. Assim, crença e conhecimento não são como dois domínios disjuntos. Nas crenças, predominaria a elaboração mais ou menos fantasiosa e a falta de confrontação com a realidade empírica. No conhecimento mais elaborado de natureza prática predominariam os aspectos experienciais. No conhecimento de natureza teórica prepondera a argumentação racional. Poderíamos dizer, então, que, para Ponte (1992), o que diferencia crença de conhecimento seria o não-*status* científico da primeira e o *status* científico do segundo.

Para McLeod (1992), as crenças são componentes do domínio afetivo-cognitivo, assim como as emoções e atitudes, sendo que as emoções mudam mais rapidamente (são mais instáveis) do que as atitudes e as crenças. Segundo McLeod (1992), as emoções são menos cognitivas, isto é, estariam mais próximas da esfera do *coração*, dos sentimentos, do que dos processos intelectuais, racionais, sendo sentidas mais intensamente do que as atitudes e as crenças. Para esse pesquisador, as crenças são proposições ou outra configuração cognitiva para as quais o indivíduo atribui algum valor de verdade. Ainda, para McLeod (1992), as crenças são mais cognitivas, em sua natureza, do que as atitudes, e seu desenvolvimento é gradual e está ligado a fatores culturais. McLeod (1992) considera quatro categorias de crenças na educação matemática, comumente chamadas de crenças matemáticas: crenças sobre a matemática, sobre si mesmo, sobre o ensino de matemática e sobre o contexto social no qual o ensino e a aprendizagem da disciplina acontece.

Leder, Pekhonen e Törner (2002) apresentam pesquisas representativas acerca das crenças na educação matemática de estudantes e professores. Uma delas é atribuída a Hart (2002) que interpreta crença como parte de nosso conhecimento subjetivo, porém tendo um forte componente afetivo. Isso seria diferente do conhecimento, visto que, para a autora, um conhecimento é algo socialmente acordado como verdadeiro ou falso, e cita um exemplo: "[...] eu posso ter a crença que a adição de frações é difícil (baseado em meus insucessos e minhas experiências como estudante), mas eu posso dizer que 1/2 mais 1/2 é igual a 1 com alguma certeza" (HART, 2002, p.162). Isso quer dizer que 1/2 mais 1/2 é igual a 1 é uma afirmação aceita socialmente como verdadeira, enquanto que dizer que fração é difícil é uma afirmação cuja veracidade pode não ser compartilhada socialmente. Dessa maneira, a crença é interpretada por Hart (2002) como um conhecimento subjetivo e que pode não ser consensual, enquanto o conhecimento é socialmente aceito como verdadeiro. Ainda, para Hart (2002), uma crença é capaz de regular o comportamento do indivíduo. No exemplo citado, a crença que *fração é difícil*, é capaz de atuar fazendo com que aquele que a mantém evite situações em que tenha que operar com as frações.

Para Op'tEynde, De corte e Verschaffel (2002, p. 24), "[...] as crenças matemáticas dos estudantes são as suas concepções subjetivas implícitas ou explícitas e que influenciam a aprendizagem matemática e a resolução de problemas". Para esses autores, a crença se refere ao que o indivíduo acredita ser verdade, independentemente de outras pessoas concordarem ou não, independentemente de outras pessoas aceitarem se é ou não verdade. Para OP't Eynde, De corte e Verschafel (2002), o conhecimento pode ser entendido como um construto construído socialmente e aceito em uma comunidade de prática, que vai além do indivíduo e requer uma condição verdadeira (premissa). Ao dizer, por exemplo, que *PI é um número irracional*, estaríamos falando de uma informação aceita por uma comunidade e que é sempre verdadeira (premissa). Essa informação seria um conhecimento, que está, por exemplo, nos livros didáticos ou científicos. Ainda, para esses autores, o consenso sobre a veracidade de um conhecimento garante-lhe sua posição epistemológica. O conhecimento, diferentemente da crença, admite um valor de verdade, podendo ser verdadeiro ou falso. Opt'Eynde, De corte e Versachafel (2002) parecem concordar com Hart (2002) no que se refere ao caráter subjetivo das crenças e com o fato de o conhecimento ser algo reconhecidamente verdadeiro perante a sociedade. Eles ainda ressaltam que uma crença não pode ser julgada como verdadeira ou falsa, mas, sim, como positiva ou negativa.

Goldin (2002, p. 64) define crenças como as "[...] múltiplas configurações cognitivo/afetivas, frequentemente incluindo uma proposição codificada, para as quais a pessoa que as preserva atribui algum valor de verdade". Goldin (2002, p. 69) considera que o "[...] conhecimento se refere às crenças que, independentemente de serem aceitas ou garantidas por um indivíduo ou um grupo, são verdadeiras, corretas, válidas".

Furinghetti e Pehkonen (2002) consideram que o lugar das crenças na dimensão afetivo-cognitiva está definido da seguinte maneira:

> [...] realçar as conexões entre crenças e conhecimento significa entender as crenças principalmente como pertencentes ao sistema cognitivo do indivíduo, por outro lado, ver as crenças como uma forma de reagir a determinadas situações significa considerá-las vinculadas à parte afetiva do indivíduo (FURINGHETTI e PEHKONEN, 2002, p. 40).

Sobre conhecimento, Furinghetti e Pehkonen (2002) consideram dois aspectos: conhecimento objetivo (oficial) – conhecimento que é aceito por uma comunidade e conhecimento subjetivo (pessoal), conhecimento que não necessariamente está sujeito a uma avaliação dos outros. Para esses pesquisadores, crenças pertencem ao conhecimento subjetivo do indivíduo e, quando expressas como sentenças, elas podem ser, ou não, logicamente verdadeiras.

Leder e Forgasz (2002) declaram que a abordagem das crenças em seus trabalhos é fortemente influenciada pela afirmação de Rokeach (1972), em que ele diz: "[...] uma crença é simplesmente uma proposição consciente ou inconsciente, inferida do que a pessoa diz ou faz capaz de ser precedida pela frase 'eu acredito que...' " (LEDER e FORGASZ, 2002, p. 98).

No estudo de Philipp (2007, p. 259), "[...] crenças são as lentes através das quais a pessoa interpreta o mundo." Elas podem ser o entendimento, as proposições, premissas sobre o mundo, tidos como verdadeiros. Como para McLeod (1992), para Philipp (2007), as crenças são mais cognitivas, sentidas menos intensamente e mais difíceis de mudar do que as atitudes. Diferentemente do conhecimento as crenças podem ser mantidas com vários graus de convencimento, e não precisam ser consensuais.

Pelo exposto, vemos que não existe um consenso sobre a esfera (ou esferas) às quais pertencem as crenças. Para alguns autores aqui citados, as crenças parecem pertencer à esfera cognitiva. Para outros, as crenças parecem pertencer à esfera afetiva. E ainda há aqueles que situam as crenças em uma interface das esferas cognitiva e afetiva. É importante observar que, por trás dessa discussão, reside uma questão psicológica e filosófica de fundo, qual seja, a tradição, desde Descartes, de cisão entre razão e emoção, ou como afirmam Hazin, Frade e Da Rocha Falcão (2010), entre aspectos cognitivos (*res cogitans*) e somático-afetivos (*res extensa*).

No que diz respeito especificamente ao estudo psicológico da cognição, Hazin, Frade, e Da Rocha Falcão (2010) se remetem a Freud, Piaget e Vygotsky, cada um considerado em seu contexto de contribuição, para ilustrar o quão difícil é ultrapassar a cisão aludida. A pesquisa sobre autoestima e desempenho escolar em matemática, realizada por esses autores, representa um esforço empírico nessa direção. No campo da educação matemática, tal esforço pode ser visto na edição especial do periódico *Educational Studies in Mathematics,* organizada por Zan *et al*. (2006). Já na introdução dessa edição, esses pesquisadores explicitam seus pressupostos teórico-metodológicos acerca da existência de uma interrelação entre afeto e cognição. Para Zan *et al.* (2006), evidências dessa interrelação são dadas por pesquisas desse campo sobre resolução de problemas (por exemplo, SCHOENFELD, 1985) e, também, por investigações advindas do contexto da neurociência (por exemplo, DAMÁSIO, 1996) que enfatizam uma profunda relação entre emoções e processos de tomada de decisões. Tal interrelação entre afeto e cognição é um pressuposto desta tese. Aqui, afeto não é algo separado da cognição, mas, sim, parte dela (ZAN *et al*, 2006).

Vemos também que, para alguns pesquisadores, a busca por uma definição de crença vincula-se a uma tentativa de distinguir crença e conhecimento, ainda que se mostrem bastante vagos e/ou imprecisos nessa empreitada. De algum modo, o que parece comum entre esses autores é que, para eles, o conhecimento seria algo *oficial*, incontestavelmente resguardado pela ciência, ou por uma comunidade científica, de questões quanto à sua veracidade, validade ou consensualidade. Já a crença, seria algo *não oficial*, válido para quem a mantém, não necessariamente consensual por um conjunto de pessoas e que não estaria em julgamento pela ciência. O mérito das contribuições desses autores é inegável. Contudo, tais tentativas de distinção entre crença e conhecimento deveriam levar em conta o fato de que uma crença tida como verdadeira, em determinada época, contexto ou cultura, pode não o ser em outra época, contexto ou cultura. O mesmo pode acontecer com o que eles entendem por conhecimento. A história da matemática mostra que um conhecimento pode ser mantido como inquestionável durante certo período de tempo, mas que, com o progresso da pesquisa matemática, pode ser modificado ou mesmo abandonado. Um exemplo de tal conhecimento encontra-se na história da geometria e é relembrado por Goldin, Rösken e Törner (2009) como a seguir.

> HIELBERT (1899/1962) deixou claro que em uma abordagem axiomática da geometria, as antigas "definições" de *ponto* e *reta* oferecidas por Euclides não serviam verdadeiramente como definições, mas somente delineavam possíveis percepções para os estudiosos quando falavam ou pensavam sobre esses objetos (GOLDIN; RÖSKEN; TÖRNER, 2009, p. 3, aspas e itálico no original).

Existem, ainda, pesquisadores que se dedicam a distinguir crença de concepção. Thompson (1992), por exemplo, considera que as concepções de professores de matemática envolvem crenças, imagens, conceitos, significados, regras e preferências conscientes ou subconscientes desses professores acerca da disciplina. Entretanto, para essa autora, a "[...] distinção entre crença e concepção pode não ser tão importante" (THOMPSON, 1992, p. 130).

Furinghetti (1996) explica que as concepções de um indivíduo acerca da matemática são como um conjunto de certas crenças. Chacón (2003a, p.20) refere-se às crenças matemáticas como "[...] um dos componentes do conhecimento subjetivo implícito do indivíduo sobre a Matemática, seu ensino e sua aprendizagem." Para ela, esse conhecimento está baseado na experiência. Já as concepções são entendidas por essa pesquisadora como as "[...] crenças conscientes e são diferentes das crenças básicas que muitas vezes são inconscientes e têm o componente afetivo mais enfatizado" (CHACÓN 2003a, p.20).

Em outras palavras, Chacón (2003a) considera crenças e concepções como componentes do conhecimento subjetivo, porém se diferenciam da seguinte maneira: uma crença pode ser mantida pelo sujeito sem que ele tenha consciência de tal crença, já uma concepção é sustentada conscientemente por uma pessoa; a crença traz um componente afetivo acentuado, o que não ocorre com a concepção.

Também, para Pehkonen (2004), as concepções são como crenças conscientes. Ele ressalta que os termos crenças e concepções são usados paralelamente na literatura e, como Chácon (2003a), que as crenças apresentam um forte componente afetivo, enquanto as concepções têm um forte componente cognitivo.

E há, ainda, algumas perspectivas que expressam uma ideia de crença sem vinculá-la aos termos conhecimento e/ou concepção como por exemplo, Rokeach (1981), Leder e Forgasz (2002), Philipp (2007). Essa é a perspectiva que adoto nesta tese, tendo em vista meus objetivos de pesquisa. De fato, o foco principal de minha investigação consiste em identificar aspectos do conteúdo de frações que alunos do primeiro ano de um Curso de Licenciatura em Matemática tomam como verdadeiros para eles, a partir da recordação de suas experiências vividas, bem como as dificuldades por que passam ao lidar com esse conteúdo. Minha conclusão sobre a revisão da literatura apresentada sobre crenças é que tal identificação é possível de ser feita sem a necessidade de aprofundar-me em discussões sobre o que seja conhecimento e/ou concepção, o que, no caso do conhecimento, teria que adentrar, inevitavelmente, nos recônditos da filosofia. A esse respeito, concordo com Törner (2002) quando sugere que o efeito de um esclarecimento para a palavra *crença* em contextos de pesquisa tem um papel funcional, por exemplo, o de facilitar a elaboração de questões de pesquisa pertinentes. Törner (2002) não vê necessidade de se buscar uma definição *autoritária*, como ele mesmo afirma, para a palavra *crença*. Afinal, segundo ele, não existe uma definição clara em aritmética para indicar o que se entende por um número e, nem por isso, os homens deixaram de trabalhar com sucesso com números durante séculos.

Com base na literatura apresentada, crenças expressam, para mim, verdades mantidas pelo indivíduo independentemente de sua consensualidade por um conjunto de pessoas verdades estas que podem ser inferidas a partir de coisas que esse indivíduo diz ou faz (conscientemente ou não), e que sejam possíveis de serem precedidas pela frase *Eu acredito que...*. Ainda que possam ser subjetivas, crenças são construídas socialmente, nas relações do indivíduo com outros e, mais geralmente, com o mundo. Elas funcionam como lentes através das quais o indivíduo percebe o mundo e age sobre ele, como sugerido por Philipp (2007). E é isso que independe de consenso ou validade por parte de um conjunto de pessoas. É ainda algo que situo na esfera afetivo-cognitiva no sentido dado por Nespor (1985): o que o indivíduo conhece sobre uma coisa difere de seus sentimentos por ela. Ou ainda, porque carregam as impressões e emoções das experiências vividas pelo indivíduo sobre seus objetos de crença. Nesse sentido, são resistentes a mudanças. Por fim, podem interferir uma nas outras.

A seguir, apresento como a literatura da educação matemática tem tratado as *crenças matemáticas* e as *crenças de um domínio específico*.

2 Crenças matemáticas e crenças de um domínio específico

Como dito anteriormente, estudiosos da educação matemática têm se dedicado a pesquisar as crenças e suas influências no ensino e na aprendizagem da disciplina. Na obra publicada por Leder, Pehkonen e Törner (2002), diversos pesquisadores discorrem sobre suas investigações que variam entre as crenças de estudantes, de professores e de futuros professores acerca da matemática, de sua aprendizagem, de seu ensino, do contexto social da sala de aula, do currículo de matemática. Llinares (2002), por exemplo, estuda o papel das crenças e do conhecimento na aprendizagem de futuros professores, sob a perspectiva da aprendizagem situada (LAVE, 1988; LAVE; WENGER, 1991), considerando participação e reificação[7] como processos envolvidos na negociação de significados. Em sua pesquisa com futuros professores de matemática, Llinares (2002) ressalta que a negociação de significados em atividades desenvolvidas pelos alunos em sua investigação mostrou os diferentes papéis desempenhados pelo conhecimento e pelas crenças que os estudantes levam para o programa de formação.

Já a pesquisa de Philippou e Christou (2002) examina a crença de eficácia de professores da escola primária da Universidade de Cyprus acerca do ensino de matemática. Os resultados mostram que os professores se sentem bastante competentes para ensinar matemática e que o nível de eficácia melhora, diminuindo depois durante o período inicial da carreira. Esses pesquisadores acreditam que os resultados de sua pesquisa podem ter importantes implicações na formação dos professores.

Chapman (2002) discute sobre a natureza e a mudança da estrutura de crenças de professores do ensino médio no Canadá. Segundo essa pesquisadora, tornou-se uma visão aceita entre os pesquisadores que o conhecimento subjetivo do professor determina em parte o que acontece na sala de aula. Consequentemente, pensar em uma reforma do ensino de

[7] O termo *reificação* abrange processos como “[...] fazer, desenhar, representar, nomear, codificar e descrever, tanto como perceber, interpretar, utilizar, reutilizar, decodificar e reestruturar” (WENGER, 1998, p. 59). Assim, o termo *reificação* indica a transformação de algo abstrato em algo *concreto*.

matemática significa pensar em uma reformulação no pensamento do professor de matemática como critério importante para se obter sucesso na reforma do ensino. Um aspecto do pensamento do professor que é visto como sendo importante para entender e facilitar a mudança/melhoramento do ensino é a crença. Os resultados da pesquisa de Chapman (2002) mostram que a estrutura de crenças de cada professor é construída, gradualmente, ao longo do tempo, e centrada em uma visão pedagógica da matemática. Tal pesquisa sugere, ainda, que essa estrutura de crenças pode ser complexa e que, simplesmente, expor os professores a uma estrutura de crenças e contextos alternativos pode não ser suficiente para alterar o ensino de maneira significativa. Chapman (2002) defende que, ao se determinar uma abordagem para influenciar uma reforma no ensino de matemática, é importante levar em conta a relação existente entre o aspecto do ensino a ser mudado e o conjunto de crenças que será afetada mais imediatamente pela abordagem. Chapman (2002) observa, ainda, que um dilema, entretanto, é saber a quais experiências alternativas alguém deve ser exposto de maneira que tais experiências possam influenciar suas crenças. As descobertas de seu estudo sugerem que a estrutura de crenças e o ensino são únicos e pessoais para o indivíduo. Diante disso, Chapman (2002) argumenta que as mesmas atividades ou situações de aprendizagem podem não levar professores diferentes a lidar, efetivamente, com as suas circunstâncias pessoais, ainda que mantenham crenças compatíveis com uma perspectiva de reforma no ensino da matemática.

De acordo com Ernest (1988), três tipos de visão da matemática devem ser consideradas quando se refere às crenças do professor em relação à matemática: visão utilitarista da matemática (matemática como ferramenta que auxilia outros campos do conhecimento), visão platônica da matemática (matemática como um corpo estático de conhecimento), visão sob uma perspectiva de resolução de problemas (a matemática é algo aberto sujeito a mudanças). Assim, para Ernest (1988), as crenças do professor acerca da matemática podem ter suas bases na sua maneira de perceber e entender a matemática. Também para Chacón (2003a, p. 64) "[...] as concepções ou sistemas de crenças do professor sobre a natureza da matemática estão arraigadas nas diferentes visões da filosofia da Matemática". Ainda para a autora, mais que o conhecimento, as crenças do professor acerca da matemática e da aprendizagem podem interferir significativamente em suas atuações.

Hart (2002) baseia-se na experiência dos professores envolvidos em um projeto de desenvolvimento profissional nos Estados Unidos para explorar o que eles mesmos acreditavam ser importante para alcançar uma mudança na prática de ensino. Nessa pesquisa, Hart constatou que um fator que os professores acreditam ser fundamental para a mudança da prática é a cooperação dos colegas, no sentido de realizarem planejamentos conjuntos, trocarem informações. Por outro lado, o currículo foi apontado como um fator menos importante.

Philipp (2007) destaca que são três as maiores áreas de interesse das pesquisas acerca das crenças de professores e futuros professores de matemática: crenças dos professores relacionadas ao pensamento matemático dos estudantes, crenças dos professores acerca do currículo de matemática, crenças dos professores acerca da tecnologia.

No que se refere às crenças de um domínio específico (TÖRNER, 2002), elas estariam associadas, como já dito, a uma área ou tópico específicos da matemática como, por exemplo, à álgebra, à geometria ou à estatística. Em minha busca por referências acerca dessas crenças, tal como introduzidas por Törner (2000), encontrei, apenas, dois relatos: a pesquisa de Törner (2000) e um estudo realizado por Aguirre (2009).

Törner (2000) realizou uma pesquisa inicialmente com dez professores, alunos de pós-graduação, que foram convidados em um seminário de cálculo para escreverem ensaios de uma a duas páginas sobre: 1) o cálculo e eu: sobre como foi minha experiência com o cálculo na escola ou na universidade; 2) como eu gostaria de ter aprendido cálculo; 3) como eu gostaria de ensinar cálculo. Em um intervalo de três semanas, seis alunos entregaram seus ensaios que foram usados pelo pesquisador para a elaboração de estudos de casos. Essa pesquisa mostrou que os alunos manifestaram as seguintes crenças acerca do cálculo: 1) o cálculo é reduzido na escola ao cálculo com funções; 2) o cálculo diferencial é um ofício (*craft*), o cálculo integral é uma arte; 3) a lógica é a diretriz central para a matemática e particularmente para o cálculo; 4) a exatidão como propriedade da matemática pode ser demonstrada particularmente, no cálculo; 5) o cálculo tem a tarefa especial de preparar os alunos para cursos na universidade; 6) a elegância matemática e a imaterialidade dos objetos matemáticos, tão apreciadas pelos matemáticos, significam perda de descrição e compreensão; 7) o reconhecimento de aplicações de um conteúdo facilita a aprendizagem. Törner (2000) apresenta como uma crença mais isolada a crença acerca do currículo; 8) a organização sistemática da matemática facilita a aprendizagem da disciplina.

Em relação à crença mencionada no item (6), Törner (2000) diz que

> [...] é senso comum que a Matemática deve ser apresentada com tanta elegância e abstração quanto possível, e essa é uma experiência enfadonha para os alunos (primeira experiência negativa), que os afeta de forma determinística, levando ao desenvolvimento dessa crença (TÖRNER, 2000, p.133).

Como ilustração, Torner (2002) apresenta dois depoimentos dos professores em relação às crenças mencionadas no item 3 e 4, acima. Para o item 3, ele cita os depoimentos do professor Lars[8] para exemplificar o aspecto da lógica em relação ao cálculo: "[...] *pode-se trabalhar facilmente com "material lógico"... quando você adquiriu as regras, por exemplo transformando frações em números decimais*" (TÖRNER, 2002, p. 89 - aspas e itálico no original). Segundo Torner (2002), de acordo com Lars "[...] *o cálculo tem um padrão similar, assim como...o pensamento lógico-matemático desenvolvido e aprofundado aqu*i [no seminário]" (TÖRNER, 2002, p.89 -itálico no original). Nesse seminário, Lars reforçou sua crença: "[...] *este* [pensamento lógico-matemático] *começou no cálculo com os fundamentos da lógica que eu considero muito úteis*" (TÖRNER, 2002, p. 89-itálico no original). A consequência para esse professor, segundo o pesquisador, é uma orientação rigorosa para os aspectos da lógica: "[...] *se fosse possível fazer algo sobre a lógica na escola tão cedo quanto no sexto ano* (com onze ou doze anos)". (TÖRNER, 2002, p. 89 - itálico no original).

Törner explica que o aluno Nicholas[9] avaliou, em seus depoimentos, a exatidão (item 4) como uma importante característica da matemática, particularmente do cálculo, e esta também foi um avaliação de Lars. De acordo com Törner (2002), enquanto Nicholas vê a exatidão como uma dificuldade inevitável, a qual pode ser didaticamente contornada, Lars vê o aspecto da exatidão mais fundamentalmente. Nas palavras de Lars, a matemática demanda:

> [...] *a máxima precisão e muito esforço..., portanto deve-se começar a operar com termos exatos o mais cedo quanto possível. O Cálculo é adequado para essa empreitada. Por exemplo, a definição de* $\varepsilon-\delta$ *para continuidade pode ser considerada uma das grandes realizações na história cultural da matemática...* (TÖRNER, 2002, p. 89 - itálico no original).

Para Törner (2002), as citações dos professores acima mostram que crenças de domínios específicos precisam ser consideradas em termos de uma visão global da matemática.

No caso de Aguirre (2009), ela investigou professores de matemática nos Estados Unidos acerca de suas crenças sobre álgebra, geometria e estatística, que influenciaram a

---

[8] Como citado por Törner (2002).

[9] Como citado por Törner (2002).

maneira com a qual os professores responderam à reforma educacional de matemática naquele país[10]. Tal investigação incorporou várias fontes de dados coletados durante dois anos (1998 - 2000). Entre essas fontes estavam reuniões de departamento, entrevistas semiestruturadas com os professores e encontros com os participantes em que as informações obtidas foram compartilhas com os sujeitos. Esses encontros tiveram como objetivo obter esclarecimentos dos participantes sobre suas interpretações das informações, conferir as interpretações iniciais e fornecer informações ao departamento para planejamentos futuros.

As análises e interpretações dos depoimentos e entrevistas desses professores revelaram duas dimensões dessas crenças: o papel da abstração dentro de cada domínio (álgebra, geometria e estatística) e a utilidade de cada domínio para o futuro profissional dos alunos. Aguirre (2009) ressalta que as crenças sobre álgebra foram particularmente mais evidentes, emergiram das respostas dos professores em relação à reforma educacional da matemática. Como exemplo de tal evidência, a pesquisadora exibe um diálogo entre os professores do Departamento de Matemática acerca da álgebra e de como os alunos aprendem esse conteúdo, do qual recorto a fala da professora Joscelyn[11].

> Joscelyn: Mas eu tenho alguns alunos que não conseguem lidar bem com a álgebra. Eles lidam muito bem com todas as outras partes da Matemática, com exceção da álgebra. Então isso é uma área problemática. Algumas crianças veem-na e lidam bem e algumas crianças simplesmente estão em um nível em que não conseguem compreender (AGUIRRE, 2009, p. 50).

Segundo Aguirre (2009), o comentário de Joscelyn sugere a crença da professora de que a capacidade dos alunos de aprender matemática não se deve, apenas, a uma questão de desenvolvimento, mas também a uma questão do conteúdo em pauta ou de um domínio específico – a álgebra – e ela parece acreditar que há algo de especial, de problemático em relação a outros tópicos da disciplina.

A partir dos resultados obtidos em sua investigação, Aguirre (2009) propõe que algumas questões mereçam ser aprofundadas em investigações acerca de crenças de um domínio específico da matemática. Uma das questões às quais ela se refere é: quais são as raízes do forte *status* atribuído à álgebra e à abstração? Vê-se que tal questionamento se

[10] Nos últimos 20 anos a reforma na educação matemática americana solicitou mudanças no conteúdo e no ensino para melhorar a aprendizagem e o desempenho dos alunos. Como parte dessa solicitação, o foco dos pesquisadores passou a incidir também sobre o estudo das crenças dos professores sobre: a natureza da matemática, o ensino, a aprendizagem e os estudantes, como aspectos fundamentais para a mudança (AGUIRRE, 2009).

[11] Nome como consta no original.

aproxima de meus interesses e, consequentemente, de minhas questões de pesquisa no que se refere à investigação de possíveis origens (ou raízes) das crenças de um grupo de alunos, futuros professores de matemática sobre frações.

3 Os números racionais e as frações

Nesta seção, discorro sobre os conceitos de números racionais e de frações, visando oferecer ao leitor uma melhor compreensão da complexidade e da diversidade de ideias que envolvem esses conteúdos. Para tanto, apresento como alguns autores escreveram sobre números racionais e/ou frações.

A título de informação, teço, inicialmente e de maneira breve, algumas considerações sobre os termos fração, número fracionário e número racional.

D'Augustine (1982) distingue número fracionário e fração da seguinte maneira.

> Define-se um número fracionário como cociente[12] de dois números naturais, de modo que o divisor seja diferente de zero, isto é, um número fracionário é qualquer número que pode ter o nome $\frac{a}{b}$, onde a e b são números naturais e $b \neq 0$.
> Uma fração pode ser definida como o símbolo ou o nome para o número fracionário e pode ter a forma $\frac{a}{b}$, onde a e b designam números naturais.
> É importante saber que uma fração designa um número fracionário, bem como é também importante saber quando duas frações designam o mesmo número fracionário [...]. Dizemos que $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ designam o mesmo número fracionário porque 2 x 6 = 3 x 4.
> [...] Quando duas frações designam o mesmo número fracionário dizemos que elas são equivalentes. (D'AUGUSTINE, 1982, p. 146).

Esse autor ressalta que a criança deve ser alertada, no início dos estudos dos números fracionários, para o fato de que todos os números naturais são também números fracionários.

Para D'Augustine (1982), o número fracionário distingue-se da fração da seguinte maneira: o número 3, por exemplo, pode ser expresso pelo símbolo $\frac{9}{3}$ que tem o nome de nove terços e que é chamado fração. O número 3 como é quociente de 9 por 3 é dito número fracionário. Sendo assim, todos os números naturais podem ser escritos em forma de fração (por meio da classe de equivalência) de diversas formas e recebem o nome de números fracionários.

---

[12] Como está escrito no original.

O mesmo ocorre com números como $\frac{1}{3}$ que têm infinitas representações dadas pela sua classe de equivalência ($\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}$,...). As representações de $\frac{1}{3}$ são chamadas frações do número fracionário $\frac{1}{3}$.

Ainda, segundo D'Augustine (1982), os números fracionários são um subconjunto dos números racionais e podem ser representados também por números decimais. Ao propor o ensino de razão, esse autor diz que pares ordenados que expressam determinada razão podem ser escritos por meio de números fracionários. Ele enfatiza que a razão é muito utilizada no dia a dia para estabelecer uma correspondência vários a vários como, por exemplo, a venda de balas à razão de três por dez centavos. A noção de porcentagem também é mencionada como útil na sociedade e como outra notação para os números fracionários.

Para Caraça (2003), o conjunto dos números racionais nasceu de uma necessidade de medir. Se medir é comparar o número de vezes que a unidade de medida cabe naquilo que se quer medir, quando comparamos quantas vezes um segmento de comprimento 3 unidades cabe em outro de 11 unidades, percebemos claramente que isso não é possível no conjunto dos números inteiros. Surge, então, a necessidade de números que expressem essa comparação, pois, no caso do exemplo, 3 não é divisor de 11, ou seja, um segmento de 3 unidades não cabe um número inteiro de vezes em um segmento de comprimento 11 unidades. Para Caraça (2003), o novo campo numérico que atende a essa exigência deve considerar três requisitos: qualquer medição deve poder ser expressa, qualquer divisão possa se realizar, que os novos números se reduzam a números inteiros, quando for o caso.

> Satisfaz-se a estes requisitos dando a seguinte definição. Sejam dois segmentos de recta $\overline{AB}\ e\ \overline{CD}$, em cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento u - $\overline{AB}$ contém m vezes e $\overline{CD}$ contém n vezes o segmento u. Diz-se por definição, que a medida do segmento $\overline{AB}$ tomando $\overline{CD}$ como unidade, é o número $\frac{m}{n}$ e escreve-se $\overline{AB} = \frac{m}{n}.\overline{CD}$, quaisquer que sejam os números inteiros m e n (n não nulo); se m for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ coincide com o número inteiro, que é quociente da divisão; se m não for divisível por n o número diz-se fraccionário. O número $\frac{m}{n}$ diz-se em qualquer hipótese, racional – ao número m chama-se numerador e ao número n denominador. (CARAÇA, 2003, p. 35)

Ainda, de acordo com Caraça (2003), os números racionais são formados por números fracionários e números inteiros.

Para Centurión (2006), as frações devem se reduzir a números naturais, quando houver possibilidade de uma divisão exata. Ou seja, os números naturais podem ser escritos na forma fracionária nos casos em que o denominador é um divisor do numerador. Centurión define.

> Vimos que, ao dividir em partes uma grandeza, considerada como um todo, cada uma das partes é uma unidade fracionária. Uma ou mais unidades fracionárias reunidas constituem uma fração. [...] Toda fração estará sempre associada a duas ações;
>
> - Dividir um todo em partes iguais, sendo cada uma das partes, as unidades fracionárias;
> - Considerar uma ou mais unidades fracionárias.
>
> Assim, na fração $\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$, ou simplesmente, $\frac{n}{d}$, não podemos mais "enxergar" cada um dos números naturais n e d isoladamente, mas "um novo tipo" de número, representado pelo símbolo $\frac{n}{d}$. (CENTURIÓN, 2006, p. 220)

Niven (1984), no início do capítulo sobre os números racionais, lembra que o conjunto dos números naturais é fechado em relação à soma e à multiplicação e que o conjunto dos números inteiros é fechado em relação à soma, subtração e multiplicação e que, sendo assim, nesses dois conjuntos, a divisão nem sempre é definida, como é o caso da divisão de 7 por 3. Ele define "[...] o conjunto dos números racionais como conjunto das frações do tipo $-\frac{2}{5}, \frac{4}{3}, \frac{7}{6}$" (NIVEN, 1984, p. 30). Logo em seguida, escreve: "[...] mais precisamente, um número racional (ou uma fração ordinária) é um número que pode ser colocado na forma $\frac{a}{d}$, onde a e d são inteiros e d é diferente de zero" (NIVEN, 1984, p. 30).

O autor observa que é necessário que d seja diferente de zero, uma vez que d é um divisor exato ou não de a. Se d não é um divisor exato de a, Niven (1984) destaca que, dessa forma, a palavra divisor está sendo usada em um sentido mais amplo do que quando é tratada nos conjuntos dos números naturais e inteiros. Para esse autor, número racional e fração ordinária são utilizados algumas vezes como sinônimos, ao passo que a palavra fração sozinha representa qualquer expressão algébrica que tem um numerador e um denominador, e exemplifica: "$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{17}{x}, \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2}$" (NIVEN, 1984, p. 31). Ao fazer referência à própria definição de número racional, Niven (1984) explica que existem infinitas maneiras de se descrever um número racional, por exemplo, $\frac{2}{3}$ pode ser escrito como $\frac{4}{6}, \frac{3}{9}, \ldots, \frac{2\pi}{3\pi}$ ou $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$ ou $\frac{-10}{-15}$ e chama a atenção para o fato de que $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ pode ser manipulado de maneira que $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$, o que significa que $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ é um número racional e, nesse caso, $\sqrt{12}$ e $\sqrt{3}$ não são inteiros. O mesmo não acontece com $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}\,\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{5}$, que é irracional (NIVEN, 1984).

Para Lamon (2007), o termo *frações* e a expressão *números racionais* não são sinônimos, e é mais preciso pensar nas frações como um subconjunto dos números racionais. Outras distinções importantes relacionadas aos números racionais são dadas por essa autora nos seguintes exemplos.

> - Todos os números racionais podem ser escritos na forma de fração.
>
> $\frac{3}{4}$, $\frac{\sqrt{4}}{3}$ (normalmente escrita como $\frac{2}{3}$), $\frac{2.1}{4.1}$ (normalmente escrita como $\frac{21}{41}$), e $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$ (normalmente escrita como $\frac{2}{1}$) são frações e números racionais.
>
> - Nem todos os números escritos na forma de fração são racionais.
> - $\frac{\pi}{2}$ não é um número racional embora esteja escrito na forma de fração.
> - Uma fração não corresponde a números racionais diferentes.
>
> Não existe um número racional diferente para cada uma das três frações $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{9}$ e $\frac{10}{15}$.
>
> [...] estas frações são diferentes numerais designando o mesmo número racional. [...]
>
> - Os números racionais podem ser escritos como frações, mas eles podem ser escritos de outra forma também (LAMON, 2007, p. 635, tradução minha).

Lamon (2007) não concorda com o uso da palavra fração, referindo-se, exclusivamente, a uma interpretação dos números racionais, mais especificamente a comparação parte-todo. Ressalta, porém, que a ideia parte-todo muitas vezes é a mais utilizada no ensino e, por isso, é compreensível que fração e fração parte-todo tornem-se sinônimos.

Nunes e Bryant (1997) advertem para os perigos que estão envolvidos na complexidade e na diversidade dos conceitos envolvidos em frações e números racionais e adotam, em sua obra *Crianças fazendo matemática*, a expressão *números racionais* de uma maneira mais geral e fração quando se referem a problemas parte-todo.

Concordo com Nunes e Bryant (1997) quanto à complexidade e à diversidade de ideias que envolvem os conceitos de fração e de números racionais. Inicialmente, a ideia parte-todo parece ser a ideia mais central da fração e dela derivam as ideias de quociente, razão, operador, medida, como descreve o diagrama de Behr *et al*. (1983) na figura 1.

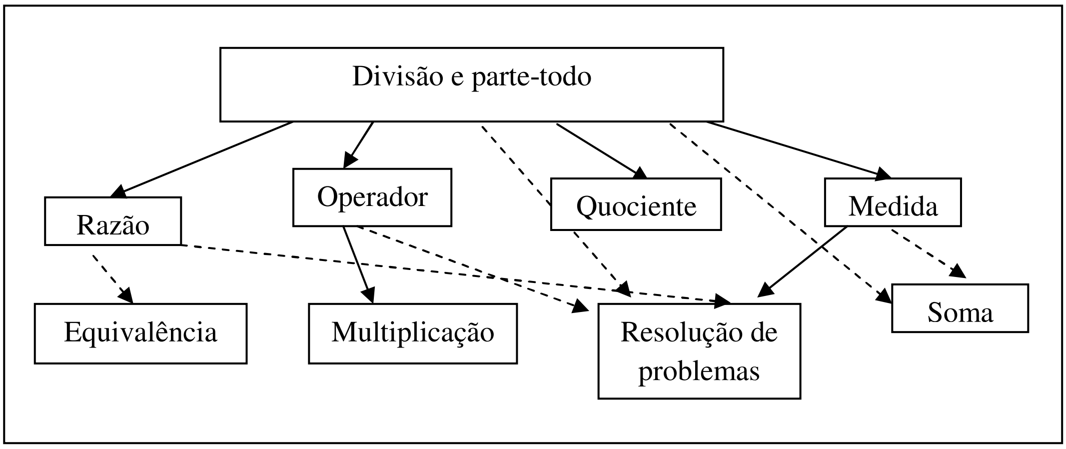


Figura 1 - Esquema conceitual para instrução dos números racionais
Fonte - BEHR *et al*., 1983, p. 100

Os primeiros contatos do estudante com as frações são situações em que a comparação do inteiro com suas partes parece ser a principal interpretação. Nesse sentido, Ciscar e Garcia (2000) também parecem concordar que a ideia de parte-todo parece ser central no estudo das frações e que dela derivam todas as outras interpretações.

Segundo Behr *et al*. (1992), os números racionais são os elementos de um conjunto quociente infinito, consistindo de infinitas classes de equivalência, cujos elementos são frações. Entretanto, quando as frações e os números racionais são aplicados em situações do cotidiano, do ponto de vista pedagógico, eles podem assumir diversas *personalidades*. Ainda, para esses autores, na perspectiva da pesquisa e do desenvolvimento do currículo, o problema é descrever essas *personalidades* em detalhes e com clareza suficientes para que a organização de experiências de aprendizagem para as crianças tenha uma base teórica sólida.

Dessa maneira, os termos número fracionário e fração serão entendidos aqui como sinônimos. Distinguir número fracionário de fração, no meu entendimento, seria o mesmo que reportar às discussões entre as diferenças entre número e numeral, o que não é desejável nesse momento. Concordo ainda com Ciscar e Garcia (2000) sobre o fato de que o conjunto dos números racionais abarca todas as interpretações das frações e que essas interpretações derivam da ideia central de fração como uma relação parte-todo.

Na seção seguinte, discuto, sob uma perspectiva pedagógica, as diversas interpretações das frações.

4 As frações e suas diferentes interpretações

O conjunto dos números racionais é formado pelos números inteiros e todos aqueles números que representamos em forma de fração. Qualquer elemento desse conjunto pode ser escrito na forma a/b, em que a e b são números inteiros, com $b \neq 0$. Dessa maneira, a fração pode ser entendida como uma representação de um número.

Assim como o número 2 representa a quantidade 2, seja dois pedaços de uma barra de chocolate ou duas balas, 1/2 representa metade de uma quantidade, seja de uma barra de chocolate ou de um conjunto de balas. Nas duas situações, os números estão associados a algo concreto, a alguma grandeza, seja ela contínua ou discreta[13]. Da mesma forma como o estudante se desvincula do concreto para lidar com os números naturais, é desejável que ele se desvincule do concreto para lidar com as frações. Isso porque, ao efetuarmos as adições 2 + 3 e 1/2 + 1/4, estamos operando com os números, independentemente de um contexto ou de uma quantidade à qual eles se referem. O exercício da abstração é exigido nessas situações, o que significa que vamos realizar a adição sem a preocupação de saber se estamos somando balas ou barras de chocolate.

Nesse ponto, entendo que estamos tratando de operações numéricas, em que, no primeiro caso (2 + 3), somamos números naturais e, no segundo caso (1/2 + 1/4), estamos somando frações, em que cada uma representa um número racional.

Assim como representamos os números inteiros na reta, podemos indicar uma fração na reta como representação de um número racional e, dessa forma, escrever 0,5 ou 1/2 significa expressar o mesmo número. Daqui em diante, ao escrever fração, estarei me referindo à ideia central de comparação parte-todo. Entretanto, concordo com Behr *et al.* (1983) que dessa ideia derivam as outras interpretações das frações: razão, operador, quociente, medida. Ao me reportar ao conjunto dos números racionais, refiro-me a todos os números que podem ser escritos na forma de fração. Assim, o foco desta pesquisa são os números racionais na representação fracionária, com suas diferentes interpretações.

O conceito de números racionais começa a ser desenvolvido nas séries iniciais da escola e traz consigo diferentes interpretações, exigindo amadurecimento cognitivo, mesmo sendo um conceito presente no cotidiano. Esses números têm recebido atenção de vários

---

[13] Uma grandeza é dita contínua se, quando particionada, preserva suas características. Por exemplo, uma barra de chocolate pode ser dividida e, mesmo assim, cada parte continua sendo chocolate. Uma grandeza discreta refere-se a um conjunto de objetos idênticos, considerado como unidade, e que, ao ser particionado, resulta em subconjuntos com o mesmo número de objetos.

pesquisadores (KIEREN, 1976; HART; KERSLAKE, 1983; BEHR *et al.*, 1983; KERSLAKE, 1986; ROMANATTO, 1997; CISCAR; GARCIA, 2000; SILVA, 2005; AMATO, 2005; LAMON, 2006; MAGINA; CAMPOS, 2008; MOREIRA; FERREIRA, 2008), que discutem as ideias que permeiam o conceito, bem como a complexidade do ensino e aprendizagem desses números.

De acordo com Behr *et al.*(1983), o conceito de número racional está entre as ideias matemáticas mais importantes e complexas encontradas durante os anos do ensino básico.

> Sua importância pode ser vista de diferentes perspectivas: a) de uma perspectiva prática, a capacidade de lidar efetivamente com este conceito melhora consideravelmente a capacidade de compreender e lidar com situações e problemas da realidade; b) de uma perspectiva psicológica, os números racionais constituem um cenário rico dentro do qual a criança pode desenvolver e expandir estruturas mentais para continuar o seu desenvolvimento intelectual e c) de uma perspectiva matemática o entendimento dos números racionais fornece a base sobre a qual operações algébricas elementares podem se fundamentar (BEHR *et al.*, 1983, p. 91).

Para Kieren (1976), os números racionais podem ser interpretados de sete maneiras diferentes, que ele denomina subconstrutos, como: frações, decimal, classes de equivalência, medidas, quocientes, operadores e razão. Kieren (1976) ressalta que o completo entendimento dos números racionais depende, não só do entendimento de cada um desses subconstrutos, mas de como eles se relacionam entre si. Entretanto, em um trabalho posterior, publicado no ano de 1980, Kieren identificou e discutiu cinco subconstrutos para os números racionais: parte-todo, razão, quociente, medida e operador. Ainda, na década de 80, pesquisadores do Rational Number Project[14] redefiniram alguns subconstrutos elaborados por Kieren e subdividiram outros. Os subconstrutos ficaram definidos como: parte-todo, razão, medida, quociente indicado, operador e corpo quociente. Os autores chamam a atenção para o fato de que o subconstruto corpo quociente envolve dois níveis de sofisticação.

> Por um lado, 8/4 ou 2/3 interpretados como uma divisão indicada resulta em estabelecer a equivalência entre 8/4 e 2, ou 2/3 e 0,666... Mas os números racionais podem ser considerados como elementos de um corpo quociente e, como tal, podem ser usados para definir equivalência, adição, multiplicação e outras propriedades de uma perspectiva puramente dedutiva; todos os algoritmos são derivados de equações por meio das propriedades do corpo (KIEREN, 1976). Este nível de sofisticação geralmente requer estruturas intelectuais que não estão ao alcance dos alunos do ensino médio (BEHR *et al.*, 1983, p. 96, tradução minha).

[14] O Rational Number Project (RNP) é um projeto que coordena, desenvolve e divulga pesquisas sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais desde 1979 nos Estados Unidos.

De acordo com Behr *et al.* (1983), análises teóricas e evidências empíricas indicam que podem ser necessárias diferentes estruturas cognitivas para lidar com os vários subconstrutos dos números racionais, que foram finalmente estabelecidos como: relação parte-todo, medida, razão, quociente e operador.

Segundo Ciscar e Garcia (2000), existem diferentes interpretações para as frações, e elas são usadas em contextos e situações que, às vezes, parecem não ter nada em comum. Esses autores ressaltam a relação parte-todo como a ideia central no estudo das frações e desenvolvem as interpretações de operador, quociente de dois números etc., a partir dessa ideia central. Ciscar e Garcia (2000) definem como número racional o construto teórico que sintetiza todas as interpretações das frações e ressaltam que "[...] há um longo caminho que percorrer entre as primeiras ideias intuitivas de metades e terços até a consideração das frações como elementos integrantes de uma estrutura algébrica" (CISCAR; GARCIA, 2000, p. 13).

Considero, para esta investigação, as mesmas interpretações que Llinares (2003) propõe para as frações: medida, quociente, operador e razão. Para Llinares (2003), na ideia de medida está implícita a ideia de parte-todo, uma vez que medir é estabelecer uma relação entre uma parte e um todo, seja ele discreto ou contínuo. A ideia de fração associada a um ponto da reta numérica já seria mais abstrata que as demais.

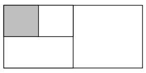
O subconstructo medida (parte-todo)

A interpretação da ideia parte-todo das frações depende diretamente da capacidade de partição, seja de uma quantidade contínua ou de um conjunto de objetos em partes iguais, ou em conjuntos do mesmo tamanho. Essa interpretação é a primeira a ser introduzida no ensino de frações, é tratada nas séries iniciais principalmente usando-se figuras geométricas (quadrados, retângulos, círculos), conjuntos de objetos, e tem como representação mais comum o modelo a/b, em que a e b são números naturais e b é diferente de zero. Entretanto, utilizar figuras geométricas para a representação de frações está relacionado, também, ao conceito de área, ou seja, à ideia de medida. Segundo Owens (1980), existe uma relação positiva entre o sucesso dos estudantes em questões de área e o sucesso em conteúdos que utilizam as regiões geométricas para ilustrar frações.

Outra consideração que se deve fazer reside na dificuldade de compreender uma fração maior que o inteiro dentro da ideia parte-todo, uma vez que, nessa ideia, pressupõe-se um inteiro dividido em partes iguais e algumas dessas partes são consideradas. Como explicar a fração 4/3 dentro dessa concepção? Como dividir o inteiro em três partes e considerar quatro dessas partes? Penso que trazer à tona a ideia de medida é de fundamental importância nesses casos estabelecendo previamente o que está sendo considerado como unidade. Feita essa consideração, o que se pretende é a compreensão de que em uma unidade não cabem 5/3. Ou seja, considerando 5/3 = 5.1/3, basta induzir o aluno a fazer a comparação de quantas vezes 1/3 cabe dentro da unidade para que ele próprio perceba a necessidade de mais uma unidade para conseguir a fração 5/3. Nessa tarefa está implícita a ideia de medida. Kieren (1976) considera três estruturas cognitivas importantes envolvidas no construto medida das frações.

> - Para a noção de unidade e sua divisão arbitrária, a criança deveria perceber que a unidade é invariante sob partição, e deveria perceber também que a unidade pode ser dividida em qualquer número de partes congruentes;
> - a criança deveria ser capaz de conceituar relações parte-todo nesse contexto e de reconhecer equivalências surgindo de partições da unidade (1/2 = 3/6);
> - a criança deveria desenvolver o conceito de uma relação de ordem, o que, por sua vez, envolve as habilidades de ordenar a realidade física e de usar corretamente a simbologia (KIEREN, 1976, p. 125)

Considerando a citação de Kieren (1976), acima, a ideia parte-todo enfatizada na perspectiva de figuras geométricas, por meio da dupla contagem, pode se tornar um entrave às tarefas que apresentam, por exemplo, figuras em que as partes sombreadas não sejam congruentes.

A parte sombreada na figura  pode ser expressa como uma fração da figura, ainda que esta não esteja dividida em partes iguais. A ideia de fração precisa, a meu ver, ser explorada de várias maneiras, para que não haja dúvida quando o aluno se deparar com situações diferentes daquelas apresentadas rotineiramente em sala de aula, nas quais o professor divide figuras geométricas em partes iguais, pinta uma ou algumas dessas partes e informa que o número de partes nas quais a figura foi dividida chama-se denominador e o número de partes consideradas se chama numerador. De acordo com Nunes e Bryant (1997), a ênfase nessas divisões, acrescida de algumas regras sobre operações com esses números (denominador e numerador), pode transmitir a falsa impressão de que as crianças sabem muito sobre frações. De fato, a pesquisa de Kerslake (1986) realizada com adolescentes entre 12 e 14 anos revela, em uma questão sobre equivalência (figura 2), que eles conseguem apresentar uma resposta correta, mas a justificativa, no entanto, não demonstra entendimento. Os adolescentes explicam que sabem que as duas frações apontadas nas figuras são equivalentes porque, se removerem as linhas, as figuras parecem ser iguais. Ainda, na pesquisa de Kerslake (1986), a maioria desses estudantes define fração como parte de um número ou como um número sobre o outro.

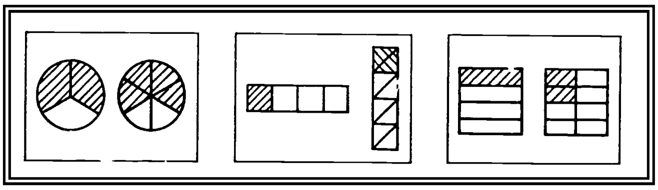
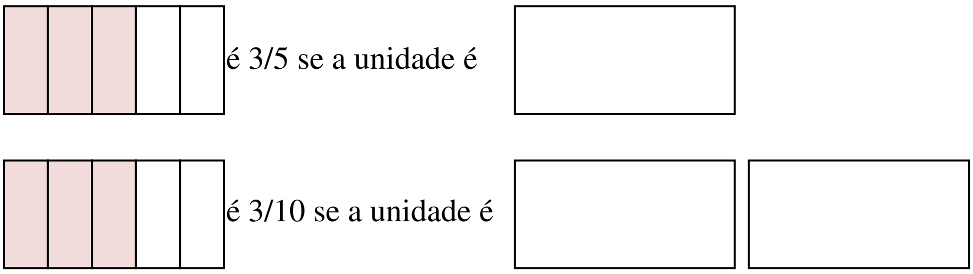


Figura 2 - Questão sobre equivalência
Fonte: KERSLAKE, 1986, p. 20

Sob a perspectiva dessa interpretação de fração é desejável que a ideia de unidade seja bem trabalhada e que o aprendiz não tenha dúvida sobre a que unidade uma dada fração se refere. Atividades que demandem do aluno calcular o inteiro a partir de uma fração devem fazer parte do repertório do professor e dos livros didáticos. No desenvolvimento do significado de unidade, a informação proveniente da representação usada pode proporcionar informações diferentes uma vez que a mesma quantidade pode ser representada por números distintos (LLINARES 2003).

Por exemplo:



Dentro da ideia de se construir a unidade a partir de uma fração desta, é preciso destacar a importância da fração unitária (1/n) como a *unidade* a ser utilizada para medir. Assim, dada uma quantidade (contínua ou discreta) que representa uma fração de certa unidade (todo), é importante que o aluno saiba que, ao determinar a quantidade que representa a fração unitária, facilmente determinará a unidade ou o todo.

Por exemplo:

Se representam 2/5 da unidade, 1/5 da unidade equivale a

Portanto, a unidade é composta de cinco círculos:

Os alunos estão acostumados, na escola, a lidar com a divisão de uma quantidade em partes iguais ao denominador de uma fração, e essa prática parece se tronar um hábito entre eles, de maneira que atividades que exigem realizar uma operação diferente, qual seja, dividir a quantidade apresentada em partes iguais ao numerador pode lhes parecer estranha. A partir do momento em que, no ensino das frações, a ideia de unidade passa a ser requerida, é provável que os alunos lidem com mais naturalidade com essa questão. A ideia da fração unitária como unidade de medida pode ser evidenciada quando se chama a atenção dos alunos para o fato de que em 2/5 cabem duas vezes 1/5 e que em 5/5 cabem cinco vezes 1/5.

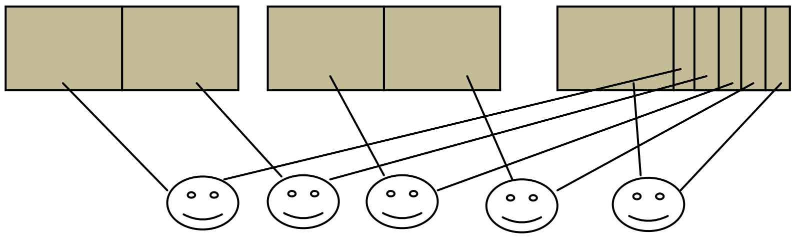
A importância de se explorar a ideia de unidade envolvida no trabalho com as frações também se faz presente quando os alunos necessitam, por exemplo, compará-las. Como saber se 1/3 é maior que 1/4 se não explicitarmos a unidade à qual as frações se referem? Se considerarmos 1/3 de seis laranjas, e 1/4 de 16 laranjas, nesse caso, 1/4 representa a maior quantidade de laranjas. Por outro lado, se considerarmos 1/3 e 1/4 de uma mesma barra de chocolate, 1/4 representa a menor quantidade, assim como no contexto da reta numérica, 1/4 é menor que 1/3.

O subconstruto quociente

A ideia de quociente das frações está ligada às situações de divisão. Situações em que uma grandeza contínua ou discreta deve ser dividida igualmente podem resultar em frações que representam o resultado da divisão. Por exemplo, o problema de se dividir igualmente três bolos para cinco crianças resulta em que cada criança receberá 3/5 de um bolo. Situações como essas podem se revelar bastante interessantes a partir do momento em que podem ocorrer diversos procedimentos para se obter a divisão e, consequentemente, a constatação de frações equivalentes. De acordo com Llinares (2003), os alunos deveriam ser encorajados a realizar desenhos correspondentes às suas ações. Para esse autor, as ideias de soma e equivalência apareceriam naturalmente.

De acordo com Kieren (1976), as estruturas cognitivas necessárias para lidar com essa interpretação das frações são: “raciocínio sobre hipóteses”; “dada uma situação, derivar propriedades”; “proporcionalidade”; e “partição” (KIEREN, 1976, p. 130, tradução minha).

Kieren (1976), no entanto, destaca a partição como a estrutura mais importante nesse contexto. Atividades que significam a fração como quociente e envolvem situações de partição oferecem a oportunidade para os alunos exporem diversas maneiras de se fazer uma divisão. Por exemplo, dividir três barras iguais de chocolate para cinco crianças. A operação é dividir 3 por 5, que resulta no quociente 3/5. No exemplo citado, uma solução seria dividir cada barra ao meio, cabendo uma metade para cada criança, e dividir a metade restante em cinco partes, uma parte para cada criança. Dessa maneira, cada criança receberia 1/2 + (1/5 de 1/2).



Outra possibilidade seria dividir cada barra em cinco partes iguais e distribuir as partes entre as crianças até que se esgotem todas as barras. Dessa maneira, cada criança receberia um quinto de cada barra, num total de 3 x 1/5, ou 3/5 de uma barra de chocolate. Situações que envolvem partição podem proporcionar aos alunos a compreensão de frações equivalentes e da soma de frações, e eles deveriam ser encorajados a buscar diferentes divisões em um mesmo problema para constatar as relações entre as partes. Ainda, nesse contexto de partição, conhecendo o número de grupos a serem formados, o quociente representa o tamanho de cada grupo e nesse sentido, é possível se pensar em medida: quantas vezes 1/4 cabe dentro de 1/2? Quantas vezes 1/10 cabe dentro de 2/5?

O subconstruto operador

A ideia de fração como operador se apoia no significado de função, uma fração modificando uma quantidade, seja contínua ou discreta. Por exemplo, 3/4 de 16 laranjas correspondem a 12 laranjas. Dessa maneira, a fração 3/4 atua sobre a quantidade de 16 laranjas, modificando-a, transformando-a em nove laranjas. Dizer 3/4 de 16 laranjas significa o mesmo que 3 vezes 1/4 das 16 laranjas. Dessa forma, a fração vista como operador reduz ou amplia uma quantidade. Essa ideia de operador envolve duas operações simultâneas. No caso do exemplo, dividir por 4 e, em seguida, multiplicar por 3 ou multiplicar por 3 e, em seguida, dividir por 4.

Segundo Kieren (1976), são três as estruturas cognitivas associadas à fração como operador: "[...] habilidade de compor funções, isto é, conceber o produto de duas operações como passível de ser representado por uma nova operação; noção geral de reversibilidade, que dá suporte às noções abstratas de inverso e identidade; e proporcionalidade" (KIEREN, 1976, p. 118, tradução minha).

No caso das grandezas contínuas, é fácil verificar que, como operador multiplicativo, a fração cumpre o papel de *esticar* ou *encolher*. Por exemplo, ao realizarmos a ampliação de uma foto em 4/3, a ideia é que suas dimensões sejam ampliadas em 4/3, o que significa multiplicar suas dimensões por 4/3. Desse modo, duas operações estariam sendo realizadas, a divisão de cada medida por 3 e a multiplicação do resultado por 4. No caso de haver redução, a fração deve ser menor que a unidade. Segundo Romanatto (1999, p. 43),

> [...] a relação operador multiplicativo define uma estrutura multiplicativa dos números racionais e é a mais algébrica das ideias básicas desse tipo de número. Ainda como multiplicação, axb, no qual "a" é o multiplicador e "b" o multiplicando, o resultado 3/4 pode ser entendido como:
> a) 3/4 = três vezes 1/4
> b) 3/4 = uma vez 3/4
> c) 3/4 = 3/4 de um
> d) 3/4 = 1/4 de três.

Concordo com Romanatto (1999) quanto ao fato de que a ideia de fração como operador pode ser um exemplo antecipador da noção de função, e é possível pensar que alunos habituados com esse tipo de raciocínio poderão se sentir mais familiarizados com o estudo das funções.

O subconstruto razão

A ideia de comparação está implícita nesse subconstruto. A comparação entre grandezas de uma mesma magnitude e de magnitudes diferentes pode ser expressa por meio de uma fração. Assim, a fração pode ser útil para comparar parte de um conjunto com o todo ou uma parte com outra parte.

Uma relação conjunto-conjunto está presente quando se compara a altura ou o peso de duas pessoas, por exemplo. Por outro lado, ao comparar o número de bolas pretas em relação ao número de bolas brancas em um conjunto formado por bolas pretas e brancas a relação que se estabelece é de parte-parte.

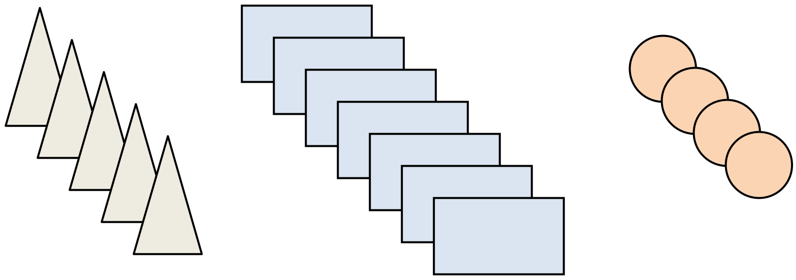
A relação entre quantidades de magnitudes diferentes pode ser exemplificada quando se trata de comparar a distância e o tempo gasto por um automóvel para percorrer certo trajeto. Nesse caso, a razão entre essas grandezas expressa a velocidade do automóvel.

No caso desse subconstruto, é bastante natural surgirem situações do cotidiano que se prestam a significar a fração como índice comparativo, ou razão, como problemas que utilizam a probabilidade ou porcentagem.

Essa interpretação de fração, embora mais fácil de ser contextualizada, pressupõe que a criança tenha "[...] a capacidade de lidar simbolicamente com equivalência e perceber a invariância do número em diferentes escalas" (KIEREN, 1976, p. 119).

No contexto em que a fração é utilizada para comparar duas quantidades, pode não existir de forma natural uma unidade como nos contextos anteriores. A comparação pode ser entre grandezas de naturezas distintas, ou não. Por exemplo, a comparação de velocidades implica a comparação de grandezas diferentes como distância e tempo: um carro c_1 percorre uma distância de 10 km em 30 minutos, outro carro c_2 percorre 6 km em 20 minutos. Qual dos dois carros tem a maior velocidade?

Por outro lado, se compararmos a altura de duas pessoas, estamos comparando grandezas de mesma natureza, como é o caso também dos seguintes exemplos:



A razão entre o número de círculos e o número de retângulos é 4/7.

A razão entre o número de triângulos e o número de círculos é 5/4.

As razões podem ser comparações parte-parte ou parte-todo. Se compararmos o número de carros vermelhos com o número de carros pretos em um estacionamento, a comparação que estamos fazendo, sem conhecermos o total de carros, é entre parte-parte do conjunto. Llinares (2003, p. 197) exemplifica a situação em que a comparação parte e parte fornece informações sobre o crescimento de uma planta: "[...] uma planta que media inicialmente 11 cm, há duas semanas media 14 cm. Quanto a planta cresceu em relação ao que media há duas semanas?" Nesse caso, a razão 3/11 proporciona a informação sobre o quanto a planta cresceu em duas semanas em relação ao seu tamanho inicial.

Nesse contexto, é importante ter cuidado ao somar frações que representam a comparação parte-parte, como exemplificado por Romanatto (1999, p. 42): "[...] duas jarras iguais contêm suco de laranja. Em uma, para cada duas partes de suco, juntam-se três partes de água e, na outra, para cada uma parte de suco, misturam-se duas partes de água. Em qual das jarras o suco é mais concentrado?”

A sugestão de se retomar esse problema, a fim de estabelecer outras relações, pode solicitar dos alunos a razão de suco para água se juntarmos as duas jarras de suco. Nessa nova situação deve ficar claro que a soma das razões não é possível, pois as razões expressam a relação parte-parte, e que é necessário recompor as razões de suco e de água em função da nova mistura e, assim, seria possível expressar a nova razão. Segundo Bertoni (2009), razão não é um assunto muito simples, mas deve ser trabalhado com as crianças.

Ainda, dentro do contexto de fração como razão, estão associadas as ideias de probabilidade e porcentagem. Pesquisas comprovam a dificuldade dos alunos em lidar com problemas de probabilidade (FISCHBEIN; NELLO; MARINO, 1991; GREEN, 1983; MUNISAMY; DORAISAMY, 1998; FERNANDES, 1998). Dificuldades em lidar com problemas de probabilidade poderiam ser minimizadas, a meu ver, se no ensino básico as crianças fossem encorajadas a resolver problemas simples cuja ideia central é utilizar a razão para expressar uma solução. Problemas como, por exemplo, em uma caixa há cinco bolas pretas e três azuis. Ao retirarmos da caixa uma bola, qual é a probabilidade que seja uma bola azul?, podem ser investigados com as crianças, deixando que elas expressem seu pensamento, sem necessitar registrar formalmente seu raciocínio. Com isso, não há a necessidade de se chegar rapidamente ao resultado, mas, ao serem solicitadas a resolverem um problema como esse, as crianças podem começar a desenvolver competências quando o assunto for razão.

No contexto em que se estabelece a proporcionalidade entre um número qualquer e 100, estamos falando de porcentagem. Nessa perspectiva, não há, também, uma unidade de forma natural, mas as porcentagens atuam como operadores. Quando dizemos 20% de 40, estamos realizando a operação 20/100 de 40 ou 20/100 x 40, que significa multiplicar 20 por 40 e dividir por 100.

Em uma situação de compra com desconto, a ideia de porcentagem pode ser investigada em situações do cotidiano: calcular o valor do desconto de 15% que uma pessoa obteve em uma compra de R$300,00. Nesse caso, pode-se fazer a seguinte associação: de cada R$100,00 da compra deve-se subtrair R$15,00 e, nesse caso, o desconto equivale a R$45,00. Assim, existe a relação de proporcionalidade 15/100 = 45/300. Encorajar os alunos a concluírem, por exemplo, que 3/4 de uma unidade podem ser escritos em forma de porcentagem (75% da unidade), partindo da ideia de frações equivalentes, é uma maneira de ampliar as relações que os alunos podem estabelecer entre os significados das frações no campo dos números racionais.

A reta numérica

Uma fração a/b, com b não nulo, pode expressar um número na reta numérica. A fração vista nesse contexto requer, a meu ver, um exercício de abstração e a compreensão da ideia de fração como medida.

Diante disso, um caminho promissor para o ensino e aprendizagem das frações seria expor o aluno a atividades e situações-problema que favorecessem o entendimento delas em diversos contextos. De acordo com Romanatto (1999), o que diferenciaria tais contextos não seriam as atividades ou as situações-problema trabalhadas, mas as relações matemáticas construídas ou adquiridas e suas repercussões conceituais e operacionais. Romanatto (1999) adverte que a competência dos alunos em determinado contexto não garante um bom desempenho em outros contextos, por exemplo, os domínios qualitativo e quantitativo das relações presentes nos problemas relacionados à ideia de fração pouco pode, segundo ele, contribuir quando o assunto é razão ou probabilidade.

A reta numérica é um contexto que favorece a ideia de medida. A representação de uma fração na reta pode facilitar o entendimento de número. Não muito raro, os alunos apresentam dúvidas sobre a ideia de representar um número, por exemplo, 3/2, na reta, mas a localização do ponto/número correspondente a essa fração na reta pode auxiliar na compreensão. É importante apresentar para os alunos situações em que os intervalos da reta estejam divididos, por exemplo, em quatro partes, cinco partes, para que fique claro que cada unidade na reta pode ser dividida em tantas partes quantas se queira, e isso facilita a localização dos pontos. A representação das frações na reta pode auxiliar também na compreensão das frações equivalentes.

5 Apropriação do conceito de números racionais e dificuldades dos alunos com frações

Nesta seção, apresento, inicialmente, algumas contribuições da literatura da educação matemática acerca da apropriação do conceito de números racionais e de suas operações. Em seguida, discuto as dificuldades dos alunos com esse conteúdo. Como indicado na introdução desta tese, por dificuldades estou me referindo a entraves de ações matemáticas revelados pelos alunos quando estão engajados em alguma situação que envolva lidar com certos conteúdos matemáticos, no caso em questão, com frações.

O ensino e a aprendizagem dos números racionais têm motivado várias pesquisas na área da educação matemática. O conceito de número racional, por ser complexo, gera dificuldades na sua compreensão e, consequentemente, em suas operações. De acordo com Moreira (2004, p. 96), “[...] a aquisição da noção abstrata de número racional parece estar associada a um longo processo de construção e reelaboração, quase que elemento a elemento”.

Para Behr *et al.* (1992), há um consenso de que a aprendizagem do conceito de número racional continua sendo um sério obstáculo no desenvolvimento matemático das crianças. Mesmo diante dessa constatação, alguns pesquisadores afirmam que ainda não existe um acordo claro sobre como facilitar a aprendizagem desse conceito. Várias questões sobre como facilitar a apropriação do conhecimento de número racional pelas crianças permanecem sem resposta, mesmo que essas questões estejam claramente formuladas. Por outro lado, há que se descobrir por quais tipos de experiências as crianças necessitam passar para desenvolver os seus conhecimentos acerca do número racional.

Nessa mesma direção, Confrey e Harel (1994) afirmam que o número racional deveria ser visto como uma teia de relações ou uma teia de conceitos inter-relacionados. As relações às quais se referem os autores podem ser estabelecidas em contextos significativos em que o número racional esteja presente assumindo diversas *personalidades* como medida, quociente, razão, operador multiplicativo, um número na reta numérica e probabilidade. Assim, entendo que a compreensão desejável e significativa desses números pode ser alcançada se forem consideradas situações em que seja possível construir as ideias envolvidas nos números racionais. Dessa maneira, poderia ocorrer uma construção mais eficaz do conceito.

Concordo com Lovell (1986) quando ele diz que, para que um conceito seja eficaz e operativo, tem que se considerar seu lado abstrato, independentemente do material concreto e de uma situação. O autor exemplifica que,

> [...] em uma determinada etapa, a criança pode chegar a adquirir a ideia de número negativo considerando temperaturas acima e abaixo do ponto de fusão do gelo, de alturas acima e abaixo do nível do mar, ou de pontos à direita e à esquerda de uma origem previamente determinada; mas se em sua mente não está formado o conceito abstrato de “negatividade”, esses números não têm um autêntico valor operativo. Este conceito de número inteiro negativo não se pode obter a partir de materiais naturais, como se pode obter os números inteiros positivos, porque os números

> negativos não possuem uma correspondência com o mundo físico, mesmo que tenham um importante papel na matemática (LOVELL, 1986, p. 35, tradução minha).

Assim, como acontece na construção do conceito de número natural, na construção do conceito de número racional, deveria haver a desvinculação do concreto de forma gradativa e não imediata dando lugar à abstração.

Nesse sentido, para Soares, Ferreira e Moreira (1998, p. 4),

> [...] talvez seja interessante ter em mente o processo análogo que ocorre na construção do conceito de número natural: a criança observa, no mundo, certas concretudes, como duas pessoas, dois carros, etc., e vai desenvolvendo a percepção de que uma mesma 'coisa' (o que virá a constituir a sua percepção de número dois) está associada a todas as concretudes. [...] O processo de se captar o 2 como algo 'livre' da concretude a que se refere originalmente é análogo ao processo de se captar o 2/7, por exemplo, como algo 'livre' daquilo a que ele se 'aplica' em situações concretas - 2/7 da área de um terreno, 2/7 de uma maçã, 2/7 dos alunos de uma classe, etc. Mas esse desvinculamento do concreto, que está no cerne da construção do conceito de número, não é uma ruptura cabal que desconecta abstrato e concreto. Pelo contrário, o sentido desse desvinculamento é a potencialidade de novos vínculos a novas concretudes. Por outro lado, esses novos vínculos vão proporcionar um aprofundamento no nível de abstração com que é percebido o conceito de número racional.

O exemplo citado na introdução desta tese, em que uma aluna do Curso de Licenciatura em Matemática aplica a propriedade distributiva quando calcula $\frac{3}{4}(a+1)=\frac{3a}{4a}+\frac{3}{4}$, chama a atenção para uma possível incompreensão do conceito de fração, para a analogia que os alunos fazem da propriedade distributiva com números naturais e para as dúvidas dos estudantes em lidar com as operações em um contexto de cálculo algébrico.

Segundo Moreira (2004, p.100), "[...] em termos dos significados, as conexões entre as operações nesses dois campos numéricos [racionais e inteiros] não se mostram de modo tão claro. Por exemplo, por que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, enquanto $\frac{a}{b}\ x\ \frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$?"

A utilização de situações empíricas que estimulem a experiência com frações é desejável no ensino desse conteúdo, supondo que a apropriação do conceito de fração consolide-se e torne viável a descoberta dos procedimentos operacionais com elas. De fato, Kline *apud* Moreira, (2004) a esse respeito, diz:

> [...] quando usamos a adição de frações em situações reais, para somar $1/2$ com $1/3$, por exemplo, nós reduzimos ambas a sextos e, então, somamos $3/6$ com $2/6$ para

> obter $\frac{5}{6}$. Entretanto, quando multiplicamos frações, multiplicamos os numeradores e os denominadores de modo que $\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{6}$. Poderíamos somar frações somando os numeradores e os denominadores para obter $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$. Por que não usamos esse método? É mais simples, mas não se adapta às situações empíricas. [...] Portanto, a lógica não dita o conteúdo da Matemática; o uso é que determina a estrutura lógica. A organização lógica é posterior e constitui, essencialmente, um ornamento (MOREIRA, 2004, p. 101).

No caso em questão, a ênfase exagerada nos algoritmos, por exemplo, pode distanciar o aluno da compreensão das ideias de frações, uma vez que tal ênfase torna-se um processo mecânico e sem significado, quando não se tem o conceito bem formado. Para uma aprendizagem significativa das frações, os alunos, a meu ver, deveriam conhecer as ideias que permeiam o conceito desses números como, por exemplo, fração, quando se quer comparar partes com o todo; razão, para designar o quociente entre dois números; operador[15] (BEHR *et al*., 1983) e deveriam transitar por elas com mais facilidade.

Entretanto, é importante que se tenha em mente, durante o processo de escolarização, que a apropriação do conceito de número racional não se dá de forma imediata e tampouco em um só momento. Há que se pensar que essa construção acontecerá durante a vida escolar do aluno e de acordo com suas condições para apreender esse novo conceito.

Campos (1975), ao estudar a gênese do conceito de fração na criança, cita Inhelder e Szeminska (1948) para se referir às condições necessárias para a existência da fração. São elas: a) existência de uma totalidade divisível; b) exigência de um número determinado de partes; c) esgotamento do todo; d) relação entre o número de partes e o número de cortes; e) equalização das partes; f) conceptualização de cada fração, como parte de um todo e como um todo em si, susceptível de novas partições; g) atendimento ao princípio da invariância: a soma das frações construídas é igual ao todo inicial. Cada condição descrita foi verificada por Jean Piaget em crianças de várias idades e ele pôde constatar as dificuldades que elas apresentavam em cada etapa. Entendo que essas experiências de Piaget, talvez, possam indicar os motivos de tanta apreensão por parte dos alunos da escola básica e, por que não, também de seus professores, em aprender e em ensinar frações. O professor deveria estar preparado para investigar com seus alunos cada uma dessas etapas descritas, e os alunos, por sua vez, deveriam apresentar respostas que orientassem o trabalho do professor.

No que se refere às dificuldades dos alunos na aprendizagem de frações, os relatos

[15] Nesse caso, a fração transforma uma quantidade inicial em outra, ou um conjunto inicial em outro. Por exemplo, $\frac{3}{8}$ de 24 elementos que passam a ser nove elementos.

encontrados na literatura são sempre muito parecidos. A comparação entre frações, por exemplo, é, em geral, mal compreendida por muitos. De fato, algumas pesquisas mostram (STREEFLAND, 1991; LAMON, 1999; NUNES, 2003) que os alunos tendem a pensar, por exemplo, que um quarto é menor do que um quinto porque quatro é menor que cinco.

Segundo Behr *et al*. (1983), resultados de pesquisa do National Assessment of Education Progress (NAEP) mostram que as crianças têm apresentado dificuldades significativas na aprendizagem e na aplicação do conceito de frações. Por exemplo, os resultados indicam que a maioria dos estudantes entre 13 e 17 anos realizam com sucesso a operação de adição de frações com o mesmo denominador, mas somente um terço daqueles com idade de 13 anos e dois terços daqueles com idade de 17 anos resolveram corretamente a adição 1/2 + 1/3. Behr *et al*. (1983) ressaltam que o baixo desempenho dos alunos pode ser um resultado da ênfase do currículo em procedimentos e algoritmos mais do que em um desenvolvimento cuidadoso do entendimento conceitual.

Em uma investigação realizada pelo RNP com crianças de segunda à oitava séries, Lesh, Landau e Hamilton (1983) relatam as dificuldades e os erros cometidos por elas em problemas com situações envolvendo frações. Por exemplo, em um problema em que as crianças deveriam somar 1/4 e 1/5 de uma pizza, 38% das crianças resolveram corretamente a questão por escrito, utilizando o mínimo múltiplo comum dos denominadores e 35% somaram ambos os numeradores e denominadores. Em entrevista, os alunos manipularam regiões circulares (representando a pizza) para solucionar o problema e reconheceram que a resposta 2/9 não era correta. Entretanto, quando confrontados com seus registros escritos, metade desses alunos manteve 2/9 como resposta correta. Para o conflito de respostas, os alunos justificaram que estavam resolvendo duas situações diferentes: em uma situação estavam operando com números (no caso dos registros) e, na outra, com pizzas (no caso do material concreto). Para esses pesquisadores, os comentários dos alunos indicam que eles acreditam que, tanto os cálculos matemáticos podem não estar necessariamente de acordo com algumas situações do mundo real, quanto a matemática é imprevisível, podendo apresentar respostas diferentes para o mesmo problema.

Gagatsis *et al*. (2009) realizaram pesquisa com estudantes de 10 a 14 anos de escolas urbanas e rurais em Cyprus acerca de suas crenças sobre os diferentes tipos de representações do conceito de fração. Um resultado interessante revelado por essa pesquisa mostra como as dificuldades dos alunos em lidar com diferentes representações da fração aumentam com a elevação do grau de escolarização. Esse resultado é justificado pelos pesquisadores, além de outros fatores, pela falta de ênfase na aprendizagem do conceito com múltiplas representações.

No Brasil, pesquisadores constatam as dificuldades dos alunos em lidar com os números racionais em diferentes momentos de sua formação escolar e sob diferentes aspectos. Soares, Ferreira e Moreira (1998) analisaram o desempenho de alunos do ensino básico em determinadas questões sobre frações e números racionais, com o propósito de propor uma nova abordagem para os sistemas numéricos (racionais e reais) em um curso de licenciatura. Os pesquisadores analisaram os erros e as dificuldades dos alunos nos itens propostos. Destaco o item que envolve a noção de equivalência.

> *Que números devem ser colocados no lugar do e do Δ de forma a tornar as frações abaixo equivalentes?*
>
> $$\frac{2}{7} = \frac{\square}{14} = \frac{10}{\Delta}$$
>
> Aqui há pelo menos duas dificuldades misturadas à noção de equivalência de frações:
>
> 1) a dupla igualdade, que o aluno tende a ver como $\frac{2}{7} = \frac{\square}{14}$ e $\frac{\square}{14} = \frac{10}{\Delta}$, deixando de considerar a terceira forma $\frac{2}{7} = \frac{10}{\Delta}$.
>
> 2) (consequência de 1) $\frac{10}{35}$ não pode ser obtido de $\frac{4}{14}$ multiplicando-se ambos os termos da 2.ª fração por um mesmo inteiro. Isso é o que o aluno está acostumado a fazer.
>
> Diante de tais dificuldades surge uma espécie de ruptura com a noção de equivalência e com o próprio conceito de fração: é relativamente grande o número dos alunos que buscaram padrões para os 3 denominadores e para os 3 numeradores independentemente. Como observa Hart, ignoraram o fato de que na fração $\frac{a}{b}$ os inteiros a e b se relacionam de forma indissolúvel e não tem sentido tratá-los como dois números completamente independentes. (SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1998, p. 8, itálico no original)

Também, na recente publicação do Boletim de Educação Matemática (BOLEMA, 2008, n. 31), número especial dedicado ao tema frações e que foi motivado pelas discussões constantes na lista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) sobre o tema, pesquisas se referem às dificuldades de alunos e professores com as frações. Por exemplo, Magina e Campos (2008) pesquisaram sobre as frações nas perspectivas do professor e do aluno, e constataram desempenhos insuficientes dos alunos em muitos problemas apresentados, principalmente naqueles cujos significados relacionavam-se aos significados “número” e “operador multiplicativo”.

Bertoni (2008) observa que, em cursos de capacitação de professores, existia uma resistência por parte deles em trabalhar com fichas, canudos, dentre outros materiais concretos. Contudo, esses professores apresentavam dificuldade em abandonar recursos como as figuras geométricas divididas e pintadas. A pesquisadora exemplifica:

> Uma dificuldade reveladora ocorria quando, propositadamente, introduzíamos um elemento irreal no problema, como: *4/3 da estrada estão asfaltados*...Participantes não hesitavam em tomar um retângulo, alguns deles, dois e prosseguir nas divisões. Isso evidenciava que 4/3 não tinha um significado quantitativo real, apenas conduzia a uma representação (BERTONI, 2008, p. 219, itálico no original).

Dificuldades dos alunos podem ser verificadas, também, no ensino e aprendizagem da divisão, desde as séries iniciais. Para Lagoa (1991, p. 46-48), “as crianças não sabem exatamente o que é uma fração, não conseguem fazer operações com ela e, quando o fazem, valem-se de fórmulas decoradas as quais acabarão esquecendo depois de formadas.” Essa citação refere-se à conclusão de uma equipe de seis professores do Centro de Ciências Matemáticas, Físicas e Tecnológicas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), os quais verificaram que os alunos não conseguiram fazer a passagem do concreto para o abstrato, existente na associação das partes pintadas de uma figura, ao todo dessa figura. Quando conseguiam fazer tal associação, não levavam em conta o princípio da ideia de fração, ou seja, a divisão do todo em partes iguais. Lagoa (1991) aponta, ainda, quais são os erros mais comuns detectados em testes específicos: somar frações como se fossem números inteiros; não fazer a comparação entre as partes; não fazer a operação de divisão, quando o enunciado de um problema dizia: dividir 12 balas, de modo que cada pessoa receba $\frac{1}{3}$ das balas. Da mesma forma, alunos de 8ª série tiveram dificuldade em realizar a seguinte operação: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. De acordo com a autora, isso acontece mesmo entre aqueles alunos que tiram boas notas. Todos perdiam muito tempo em aplicar a regra para somar frações, sem se darem conta de que bastaria usar frações equivalentes.

Um resultado igualmente importante é o apresentado pelo Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Básico, (SAEB, 2001, p. 29-30), muitos alunos não possuem o conceito de fração bem formado, confundem numerador com denominador e não conseguem estabelecer uma relação entre o todo e suas partes. Nessa avaliação sistêmica, o item que não apresenta a figura como apoio para a visualização do problema apresentou maior dificuldade, indicando que a não abstração compromete a resolução do problema.

A pesquisa realizada por Maciel e Câmara (2007) buscou identificar como se comporta o rendimento de alunos em atividades de resolução de problemas envolvendo as ideias associadas às frações em função de sua escolaridade. Os pesquisadores constataram que alunos do 3º Ciclo (5ª e 6ª séries) apresentam rendimento diferenciado dos outros investigados. Ao mesmo tempo, verificaram que os tipos de erros cometidos pelos sujeitos pouco se alteraram com o desenvolvimento da escolaridade. Mesmo assim, pôde-se perceber que, em algumas séries que trabalhavam *números proporcionais* (3º Ciclo), os alunos rendiam melhor nas questões de frações como *quociente* ou *parte-todo*.

Algumas pesquisas revelam, ainda, indícios de que os entraves em relação à aprendizagem de frações estão mais relacionados ao ensino do que ao processo de desenvolvimento dos alunos. A partir dos pressupostos teóricos admitidos nesta pesquisa, o ensino das frações deve contemplar as diferentes ideias envolvidas em seu conceito e suas inter-relações. Além disso, o tempo necessário para que o conceito esteja consolidado não é algo que se possa definir com exatidão e deve se estender por um longo período da vida escolar.

Embora os trabalhos sobre dificuldades dos alunos com frações, aqui relatados, se refiram de uma maneira ou de outra a entraves de ações matemáticas que os alunos apresentam quando estão engajados em alguma situação envolvendo esse conteúdo, percebemos que, em alguns deles (BEHR *et al*., 1983; LAGOA, 1991; SAEB, 2001), há uma sugestão de que a constatação de erros em testes ou questões específicas pode ter sido tomada como evidência de certa(s) dificuldade(s). Ou, ainda, tais autores parecem não optar por uma distinção entre erro e dificuldade. Isso é curioso, se considerarmos que, tanto no senso comum, quanto nos dicionários da língua portuguesa como, por exemplo, os dicionários Houaiss e o Michaellis e o Dicionário Online de Português, existe uma concordância quanto ao fato de que uma dificuldade pressupõe um ato de vivenciar uma situação crítica, aflitiva, de apuro, aperto ou relutância. Cabe, então, perguntar: como se pode evidenciar uma manifestação de dificuldade dos alunos em lidar com frações somente pela constatação de erros em testes ou questões específicas?

Ora, se a uma dificuldade/a um entrave subentende-se um ato de vivenciar tais situações, então, deveria ser mais apropriado tomar essas situações como evidências de dificuldades. Em outras palavras, manifestações de dificuldades podem (e devem) ser evidenciadas por meio de estados emocionais ou sentimentos *sofridos*, tais como uma aflição, um embaraço, um bloqueio, uma paralisação, um aperto, um apuro de uma certa ação. São esses estados emocionais ou sentimentos – explicitados pelos alunos ou inferidos por um observador – que adoto, nesta pesquisa, como evidências de dificuldades dos alunos quando estão envolvidos em situações que têm que lidar com frações. Com esse posicionamento, situo uma dificuldade dos alunos na esfera afetivo-cognitiva no sentido de que, por um lado, uma dificuldade pode comprometer a realização de uma atividade matemática e, por outro, uma atividade matemática pode provocar um estado emocional de dificuldade.

Sanmartí (2009, p. 7) diferencia claramente dificuldade e erro e propõe uma abordagem para a origem desses dois aspectos que vai ao encontro da opção que adoto em minha investigação. Sanmartí diz que as

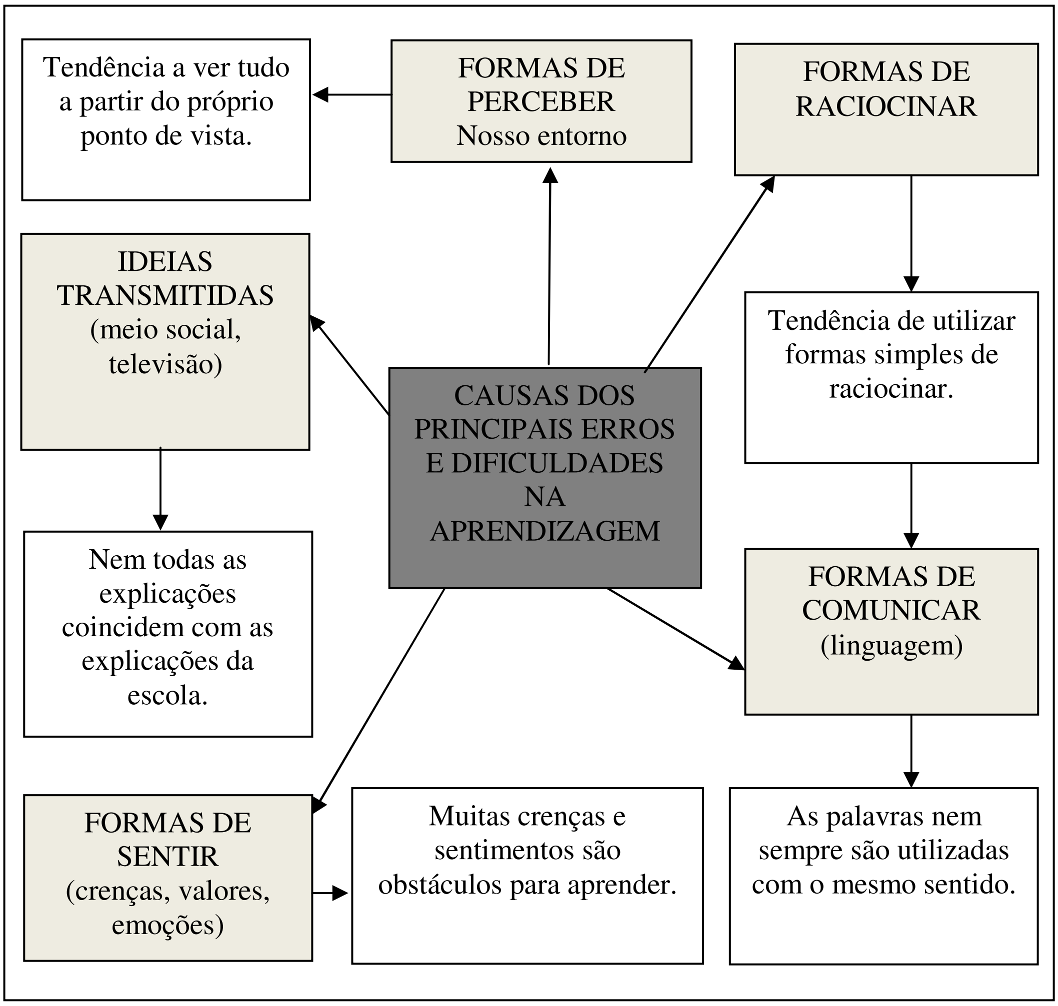
> [...] dificuldades e os erros dos alunos provêm fundamentalmente de como percebem o que é importante aprender, de suas formas de raciocinar, de falar, de escrever e, geralmente de comunicar o conhecimento e de "emocionar-se" com ele, e de seus próprios valores. Muitas vezes não é fácil superar essas dificuldades (aspas no original).

Ao se referir às possíveis dificuldades e erros dos alunos como advindas também da maneira como eles se emocionam com o conhecimento, Sanmartí (2009) indica a existência de uma interrelação entre componentes afetivos tais como crenças, valores, atitudes e dificuldades em relação a algum conteúdo.

No quadro 1, a seguir, Sanmartí (2009) propõe cinco eixos principais em que estariam ancoradas as dificuldades e erros dos alunos: formas de perceber, ideias transmitidas, formas de sentir, formas de raciocinar e formas de comunicar.

QUADRO 1

Causas dos principais erros e dificuldades na aprendizagem dos alunos



Fonte - SANMARTÍ, 2009, p. 8.

No meu modo de ver, todos os cinco eixos são relevantes quando se trata de examinar as dificuldades dos alunos acerca dos números racionais. Contudo, para esta pesquisa, um deles é especialmente importante e diz respeito às formas de sentir. Considerar as crenças e sentimentos como um dos obstáculos à aprendizagem pode nos ajudar a desvendar em que medida essas formas de sentir dos estudantes em relação às frações podem levá-los a dificuldades em lidar com esse conteúdo e vice-versa.

Para finalizar, há que se levar em conta que uma dificuldade como está sendo considerada neste trabalho, suscita ainda algumas considerações.

- Um estudante, ao lidar com frações, pode sentir certo desconforto e até repugnância (indicando estar em dificuldade) sem que esse estado emocional tenha como consequência o erro na realização da tarefa. Mas, também, esse estado emocional pode levá-lo a um erro. Por outro lado, um erro não implica necessariamente a presença de um estado de desconforto, de uma dificuldade.

- Um estudante, ao lidar com frações, pode não apresentar uma reação emocional negativa (indicando não apresentar dificuldades) e, no entanto, cometer erros ao realizar uma tarefa. Por outro lado, obviamente, uma reação emocional positiva pode estar presente e não induzir ao erro.
- Um erro pode estar vinculado ainda a um descuido, distração ou mesmo, a uma resposta aleatória, quando não se tem certeza de uma solução, à aplicação de procedimentos errôneos ou à compreensão equivocada do conceito. E isso pode levar o aluno a manifestar uma dificuldade (reação emocional negativa) ou não.

CAPÍTULO II
PROBLEMA DE INVESTIGAÇÃO E METODOLOGIA

1 Delimitação do estudo e modalidade de pesquisa

O principal objetivo desta pesquisa foi realizar um estudo sobre as crenças e as dificuldades que alunos do primeiro ano de um Curso de Licenciatura em Matemática trazem consigo em relação às frações.

Para tal, duas questões de pesquisa foram propostas:

- Quais recordações de experiências escolares esses alunos têm sobre frações?
- A partir de tais recordações, o que podemos dizer sobre a origem das crenças e dificuldades apresentadas por esses alunos em relação às frações?

Para oferecer uma resposta a essas questões, iniciei, no primeiro semestre de 2010, uma pesquisa empírica com um grupo de alunos iniciantes de um Curso de Licenciatura em Matemática de uma faculdade da rede particular da região urbana de Belo Horizonte. Essa pesquisa se deu em dois momentos da formação desses alunos: no primeiro e no quarto períodos do curso. A esses dois momentos, refiro-me como primeira e segunda fases de pesquisa. Essa partição foi puramente circunstancial, não visando explorar uma comparação de resultados entre elas. Ocorreu que iniciei a produção dos dados em 2010 e, no primeiro semestre de 2011, me ausentei do País para a realização de um estágio doutoral por seis meses. Ao retornar ao Brasil em agosto de 2011, dei continuidade à produção de dados que havia iniciado em 2010. Assim, a primeira fase de pesquisa corresponde ao período em que tal produção se deu antes de minha saída do Brasil, enquanto a segunda fase corresponde ao período em que ela foi realizada após meu regresso ao País.

A modalidade de pesquisa adotada foi a qualitativa e a interpretativa. Tal escolha se apoiou no fato de que crenças e dificuldades podem não se dar a conhecer por meio de informações quantitativas e nem de modo imediato, precisando ser desveladas ou inferidas. Os dados não são evidentes em si mesmos; as evidências são construtos interpretativos do pesquisador (FRADE, 2003).

Nesse sentido, a abordagem qualitativa seria mais apropriada tendo em vista que apresenta especificidades que são condizentes com o problema desta investigação e, também, com a natureza das questões que orientam este estudo. Tais especificidades são: 1) a fonte direta dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal agente de recolha desses mesmos dados; 2) os dados que o investigador recolhe são essencialmente de caráter descritivo; 3) os investigadores que utilizam metodologias qualitativas interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente pelos resultados; 4) a análise dos dados é feita de forma indutiva; e 5) o investigador preocupa-se, acima de tudo, em tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

A interpretação dos dados se deu a partir dos protocolos gerados pelas respostas dos alunos a um questionário sobre crenças e a algumas questões sobre frações, pelas gravações em vídeo de entrevistas, pelos registros escritos de observações e de um diário de campo.

2 Contexto de pesquisa

Esta investigação foi realizada no Centro Universitário de Belo Horizonte (UniBH), junto a um grupo de alunos do primeiro período do Curso Noturno de Licenciatura em Matemática. A escolha do UniBH como cenário de pesquisa deveu-se ao fato de essa ser a instituição na qual leciono há 14 anos para o curso de licenciatura aludido, tempo em que venho observando como os alunos que ingressam no curso lidam com as frações. Essas observações ocorreram de maneira informal, a partir de comentários dos alunos, tais como, *a fração é um número esquisito*, *a resposta de um problema não deve ser uma fração* e *por que trabalhar com frações?*, bem como de situações de insegurança e indecisão ao lidarem com esse conteúdo como aquelas situações exemplificadas na introdução deste trabalho.

Fundada em 1964 por um grupo de professores, a Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Belo Horizonte (então chamada Fafi-BH) foi a primeira faculdade a oferecer o Curso Noturno de Matemática. Em 2000, a Fafi-BH tornou-se um centro universitário quando passou a chamar Centro Universitário de Belo Horizonte (UniBH). Atualmente, o Uni-BH oferece mais de 40 cursos de graduação, nas modalidades bacharelado, licenciatura e graduação tecnológica; dezenas de cursos de pós-graduação *lato sensu*; um curso de mestrado em tecnologia de alimentos; e diversos cursos de extensão. O UniBH está instalado em três unidades, localizadas nos bairros Lagoinha, Lourdes e Estoril e atende, hoje, cerca de 15 mil alunos. Com o objetivo de integrar ensino, pesquisa e extensão, bem como de proporcionar aos alunos uma aprendizagem que alia teoria e prática, o UniBH mantém estágios supervisionados em todas as áreas. Consciente de seu papel social, o UniBH estabelece parcerias com a comunidade desenvolvendo ações que beneficiam especialmente a população carente, com mais de mil atendimentos mensais prestados gratuitamente, além de importantes projetos ligados à sustentabilidade.

O atual Curso de Licenciatura em Matemática do UniBH divide-se em três ciclos e meio, sendo cada ciclo composto de dois módulos semestrais (A e B), totalizando sete módulos. O curso não exige pré-requisitos entre disciplinas de um mesmo ciclo, ou seja, o aluno pode cursar disciplinas do módulo B antes de cursar as disciplinas do módulo A, ou cursar disciplinas dos dois módulos simultaneamente. Tal opção de grade curricular permite o *ensalamento* adotado pela instituição, garantindo o funcionamento do curso, pois o número de ingressantes é baixo e, muitas vezes, insuficiente para compor uma turma.

Definida a escolha pelo UniBH, o passo seguinte foi convidar a turma de alunos que ingressou no primeiro semestre de 2010 no Curso Noturno de Matemática a participar da pesquisa.

O planejamento para iniciar o meu primeiro encontro com essa turma foi negociado com Laura[16], professora da disciplina introdução à geometria plana, levando em conta o melhor dia para que eu pudesse usar uma de suas aulas para conhecer os alunos e, na sequência, aplicar um questionário sobre crenças e questões sobre frações, instrumentos que serão detalhados mais adiante.

Em um primeiro momento, pensei em aplicar os instrumentos em dois dias, mas, por sugestão da professora Laura, decidi aplicar, inicialmente, o questionário sobre crenças em uma aula em que ela faria a devolução de uma prova para os alunos. Assim, a aplicação desse instrumento não causaria prejuízo (atraso no programa) à disciplina e, caso entendesse que o tempo restante poderia ser suficiente para a aplicação das questões sobre frações, aproveitaria todo o horário dessa aula.

No dia 10 de maio de 2010, passados vinte minutos do início da primeira aula da disciplina aludida, aguardei no corredor do quarto andar, em frente à sala do primeiro período, um sinal de Laura para que eu pudesse entrar em sua sala de aula. Assim que a professora terminou de entregar e comentar a avaliação dos alunos, me chamou para conversar com eles.

Os alunos não me conheciam, uma vez que eram calouros. Foi então que eu me apresentei como professora do curso e aluna do doutorado em educação da Faculdade de

[16] O nome dos professores e de todos os alunos citados nesta tese são fictícios.

Educação da Universidade Federal de Minas Gerais (FaE/UFMG). Expliquei-lhes, em linhas gerais, os objetivos de minha investigação e convidei-os a colaborar com a pesquisa respondendo a um questionário e a algumas questões. Esclareci aos alunos que esses instrumentos não teriam qualquer implicação na vida acadêmica deles, que a identidade de cada um seria preservada e que as informações obtidas seriam utilizadas apenas para fins de pesquisa. Expliquei, também, que, caso eles concordassem em participar, precisaria de outro encontro com eles, a ocorrer nas dependências do UniBH, porém, dessa vez, individualmente para uma entrevista. Disse, ainda, que tais encontros seriam agendados de acordo com a disponibilidade de cada um. Em seguida, apresentei-lhes o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), aprovado pelo Comitê de Ética na Pesquisa (COEP) da UFMG, para que aqueles alunos que se dispusessem a participar pudessem ler e assinar.

Dos vinte e cinco alunos da turma de Laura, vinte e um aceitaram participar da pesquisa prontamente. Então, iniciei o processo de produção dos dados, distribuindo, primeiramente, o questionário sobre crenças para eles responderem. Quando todos terminaram de responder ao questionário, avaliei que teriam tempo suficiente para responder às questões sobre frações. Então, recolhi os questionários e distribuí as folhas com as questões para que eles resolvessem. Os alunos terminaram antes do final da aula.

Nos dias que se seguiram à aplicação desses dois instrumentos de recolha de dados, iniciei uma análise preliminar dos questionários e das questões resolvidas, visando a elaboração de algumas perguntas que norteariam as entrevistas. Contudo, só foi possível iniciar as entrevistas no segundo semestre de 2010 porque os alunos começaram a realizar as avaliações finais do curso e não disponibilizaram qualquer dia para que eu pudesse conversar com eles.

Além da disciplina introdução à geometria plana, a turma em questão cursou as seguintes disciplinas: introdução à lógica matemática, psicologia da educação, filosofia e sociologia da educação, leitura e produção de texto e trabalho interdisciplinar de graduação I[17] (TIG I), sendo que nenhuma dessas foi ministrada por mim.

Apesar dos vinte e um alunos terem respondido ao questionário sobre crenças e resolvido as questões sobre frações, propostos para a primeira fase de pesquisa, apenas oito se dispuseram a conceder as entrevistas necessárias ao andamento da investigação. Dentre os oito alunos, somente um mostrou certo receio em falar de suas dúvidas acerca das questões

[17] A disciplina Trabalho Interdisciplinar de Graduação (TIG) é uma modalidade de atividade desenvolvida em todos os módulos do curso. Dentro da proposta da interdisciplinaridade, os alunos são orientados a desenvolverem um trabalho que envolva os conhecimentos das disciplinas ministradas no módulo.

que havia resolvido, apesar de ter concordado em ser entrevistado.

No segundo semestre de 2010, lecionei a disciplina fundamentos de trigonometria e números complexos para a turma dos oito alunos que estavam participando da pesquisa. Preocupei-me em agendar as entrevistas assim que começou o semestre para que eles não sofressem, na medida do possível, influências do estudo que faríamos do ciclo trigonométrico, uma vez que, nesse estudo, haveria uma ênfase nas frações.

Além da disciplina fundamentos de trigonometria e números complexos, esses alunos cursaram, no segundo semestre de 2010, as disciplinas: estrutura e funcionamento de educação, geometria analítica A, estudo de funções, matemática e educação A, e trabalho interdisciplinar de graduação II. Na disciplina matemática e educação A os alunos estudaram algumas tendências da educação matemática, a saber: modelagem, resolução de problemas, investigação e etnomatemática.

Finalizadas as oito entrevistas individuais, as quais foram registradas em áudio e vídeo, iniciei o processo de transcrição de todas elas[18].

No primeiro semestre de 2011, dediquei-me ao estágio doutoral realizado na Universidade de Alicante, na cidade de Alicante, Espanha, sob a supervisão do professor Salvador Llinares. Nessa ocasião, foram elaborados outros instrumentos de produção de dados (novas questões sobre frações e possíveis perguntas norteadoras para as entrevistas) que seriam aplicados na segunda fase da pesquisa. Também, iniciamos o processo de análise mais sistemática de todo o material obtido dos oito alunos-participantes que haviam concordado em dar continuidade à pesquisa.

Enquanto estava na Espanha, mantive contato por email com esses oito alunos e fiquei ciente de que três deles já não mais frequentavam o curso. Um fato muito comum nos primeiros períodos é o trancamento de matrícula, momento em que alguns alunos começam a questionar sobre a opção de ser professor. Os alunos que se mantiveram no curso encontravam-se, naquele momento, no terceiro semestre da graduação cursando as disciplinas cálculo diferencial e integral I, fundamentos de geometria plana, física A, língua brasileira de sinais, trabalho interdisciplinar de graduação III.

Decidi, então, prosseguir a segunda fase de pesquisa com cinco alunos apenas, pois, ao final, eles teriam sido submetidos a todos os instrumentos de recolha de dados propostos para as duas fases.

Assim que cheguei ao Brasil, no segundo dia letivo, comecei a organizar, dentre

[18] As transcrições foram feitas por mim.

as questões sobre frações elaboradas na Espanha, aquelas que iriam ser aplicadas aos alunos na segunda fase. Iniciei o segundo semestre de 2011 lecionando geometria analítica B para a turma dos cinco alunos-participantes da pesquisa e, rapidamente, me reuni com eles para explicar-lhes que daria continuidade à recolha dos dados e, para tanto, precisaria da colaboração deles mais uma vez resolvendo novas questões e concedendo entrevistas nos moldes daquelas que aconteceram na primeira fase (na própria faculdade em horário extraclasse). Nenhum dos cinco alunos-participantes se mostrou indiferente ao meu pedido e nem cogitou de não participar da segunda fase – todos foram muito solícitos. Assim, agendamos para 22/09/2011 o dia em que eles resolveriam tais questões.

Logo, no dia seguinte em que os alunos resolveram as questões sobre frações, iniciei uma análise preliminar das respostas, visando adaptar, se necessário, as perguntas das entrevistas, que já havia esboçado, a esse novo momento da pesquisa, bem como agilizá-las.

Na primeira fase de pesquisa, as gravações das entrevistas foram realizadas por mim com uma filmadora doméstica. Isso me tomou muito tempo, pois tinha que ficar sempre atenta à duração de gravação dos DVD's, ao ajuste da câmera e à duração de bateria. Por esse motivo, decidi procurar o Centro de Produção Multimídia (CPM) do UniBH para solicitar uma câmera apropriada e um operador de câmera que pudesse me acompanhar nas entrevistas. Fui informada pela coordenadora do CPM sobre a possibilidade de realizar as entrevistas nos estúdios do próprio Centro, pois, assim, seria mais fácil conseguir o acompanhamento de um cinegrafista que ficasse à minha disposição durante o tempo das entrevistas. Concordei com a solicitação de que as entrevistas fossem realizadas nos estúdios do CPM. Entretanto, devido às restrições de horários do CPM, tive que marcar mais de um encontro com quatro dos cinco participantes, pois o tempo disponibilizado a mim no estúdio era de aproximadamente uma hora, tempo que se mostrou insuficiente para esgotar a entrevista de cada um dos alunos (apenas para um aluno foi possível agendar um período maior, de duas horas, em uma manhã de sábado). Dessa forma, foi necessário adequar os encontros com os alunos de acordo com a disponibilidade deles e dos horários disponíveis no CPM. Ocorreu, então, que entre uma entrevista e outra de um(a) mesmo(a) aluno(a), era realizada a entrevista com outro(a) aluno(a). Ainda, no CPM, pude contar com a colaboração dos funcionários para editar todas as gravações em DVDs.

Na segunda fase de pesquisa realizei a transcrição de duas entrevistas apenas. As transcrições das demais foram feitas por uma profissional e, depois, repassadas a mim para conferência.

3 Alunos-participantes

Os sujeitos-participantes da pesquisa variaram conforme as duas fases da investigação. Em relação à primeira fase, os sujeitos foram os oito alunos de Laura que responderam ao questionário sobre crenças, resolveram as questões sobre frações e concederam entrevistas. São eles: Matheus, Eloisa, Rosa, Eva, Tiago, Renato, Lucas e Walter. O perfil socioeconômico deles era de classe média baixa. No início da pesquisa, eles tinham idades entre 19 e 32 anos, e as atividades profissionais de Tiago, Renato, Lucas, Walter, Rosa, Eloisa e Eva estavam relacionadas ao comércio. Entretanto, na segunda fase da investigação, Rosa, Eloisa e Eva já estavam lecionando em escolas públicas. Matheus não estava trabalhando no início da pesquisa, porém, na segunda fase, atuou como monitor de matemática em uma escola particular. Desses oito alunos, cinco cursaram o ensino básico apenas em escolas públicas, e três estudaram em escolas públicas e particulares.

A licenciatura em matemática foi a primeira opção de curso superior para três desses alunos, Walter, Matheus e Rosa. Para Renato, a escolha foi feita, segundo ele, com a finalidade de eliminar algumas disciplinas do Curso de Engenharia, seu curso pretendido, e primeira opção. Na primeira fase da pesquisa Tiago revelou sua vontade de cursar Medicina, e por isso, matemática não era sua primeira opção de curso superior. Eloisa e Eva revelaram que já haviam iniciado o Curso de Engenharia, mas não prosseguiram porque descobriram que não queriam ser engenheiras. Lucas revelou apenas que pretendia deixar a profissão de motoboy que ele julgava estressante. Depois de muito pensar, Lucas entendeu que o Curso de Matemática seria uma boa opção para ele, tendo em vista que era motivado pelo gosto que nutria pela disciplina e pelas opções de descanso inerentes à profissão de professor. Todos Os oito alunos revelaram apoio da família quanto à escolha do Curso de Licenciatura em Matemática.

Já, na segunda fase de pesquisa, o número de sujeitos-participantes reduziu-se a cinco desses oito alunos. Nessa ocasião, esses cinco alunos resolveram novas questões sobre frações e concederam novas entrevistas. Não participaram da segunda fase os alunos Renato, Lucas e Walter porque eram aqueles alunos que já não mais frequentavam o curso.

4 O Desenho, a implementação e a análise da investigação

Foi dito anteriormente que a produção dos dados desta pesquisa foi gerada a partir das respostas dos alunos a um questionário sobre crenças, das soluções de questões sobre frações, das transcrições das gravações em vídeo das entrevistas e dos registros escritos de observações e de um diário de campo.

Os quadros 2 e 3 mostram os participantes envolvidos em cada atividade, as datas e os horários em que ocorreram tais atividades, bem como as disciplinas que cursaram em cada semestre.

QUADRO 2
Participantes da primeira fase, atividades realizadas e disciplinas cursadas

<table>
<tr><th rowspan="10">Primeira fase</th><th>Participantes</th><th>Data</th><th>Horário</th><th>Atividade</th><th>Disciplinas cursadas em 2010</th></tr>
<tr><td>21 alunos do curso de matemática</td><td>10/05/2010</td><td>21h 20min às 22h 15min</td><td>Questionário sobre crenças
Seis questões sobre frações</td><td>Introdução à geometria plana
Psicologia da educação
Filosofia e sociologia da educação
Leitura e produção de Texto
Introdução à lógica matemática
TIG I</td></tr>
<tr><td>Matheus</td><td>10/08/2010</td><td>17h – 18h</td><td rowspan="8">Entrevistas</td><td rowspan="8">Estrutura e funcionamento de educação
Estudo de funções
Fundamentos de trigonometria e números complexos
Geometria analítica A
Matemática e educação A
TIG I</td></tr>
<tr><td>Eloisa</td><td>10/08/2010</td><td>18h – 19h</td></tr>
<tr><td>Eva</td><td>11/08/2010</td><td>17h – 18h</td></tr>
<tr><td>Rosa</td><td>11/08/2010</td><td>18h – 19h</td></tr>
<tr><td>Tiago</td><td>12/08/2010</td><td>17h – 18h</td></tr>
<tr><td>Walter</td><td>13/08/2010</td><td>18h – 19h</td></tr>
<tr><td>Renato</td><td>12/08/2010</td><td>18h – 19h</td></tr>
<tr><td>Lucas</td><td>19/08/2010</td><td>20h 30min – 21h 30min</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora da tese, 2013.

QUADRO 3
Participantes da segunda fase, atividades realizadas e disciplinas cursadas

	Participantes	Data	Horário	Atividade	Disciplinas cursadas no segundo semestre de 2011
Segunda fase	Eloisa Eva Matheus Tiago Rosa	22/09/2011	20h 40min – 21h 40min	Dez questões sobre frações	Geometria analítica B Educação especial Física geral B Matemática finita Tecnologia e educação matemática Seminário de pesquisa A
	Eloisa	28/09/2011	17h 30min – 18h 30min	Entrevistas	
		13/10/2011	18h – 19h		
	Eva	29/09/2011	20h 30min – 21h 30min		
		20/10/2011	20h 30min – 22h		
	Matheus	01/10/2011	7h 30min – 9h		
	Tiago	05/10/2011	18h – 19h		
		26/10/2011	18h – 19h		
	Rosa	27/10/2011	20h 30min – 22h		
		24/11/2011	20h 30min – 22h		

Fonte: Elaborado pela autora da tese, 2013.

A seguir descrevo os instrumentos utilizados para a produção dos dados em cada uma das fases de pesquisa.

4.1 Instrumentos de produção de dados – primeira fase

Op't Eynde, De Corte e Versachafel, (2002) e Chacón, (2003b) chamam a atenção para a variedade de instrumentos de produção de dados que são utilizados para o estudo de crenças: questionários, entrevistas, análise de conteúdos de diários de campo, reflexões e observações. Com base nessa consideração, utilizei esses instrumentos em minha pesquisa.

Para a primeira fase de pesquisa, foram desenvolvidos os seguintes instrumentos de produção de dados:

1. questionário sobre crenças (QC), Apêndice I;
2. seis questões sobre frações (QF_1), Apêndice II;
3. entrevista tendo como ponto de partida as respostas do questionário sobre crenças (E_1);
4. entrevista com o objetivo de discutir as resoluções das questões sobre frações (E_2).

4.1.1 Questionário sobre crenças (QC)

O questionário sobre crenças, adaptado de um questionário proposto por Chacón (2003a), foi composto por 15 afirmações, cada uma delas contendo as seguintes alternativas: concordo totalmente, concordo, discordo, discordo totalmente. Esse questionário teve como objetivo levar os alunos a se posicionarem em relação a algumas afirmações envolvendo: a matemática como disciplina, o conteúdo *frações* e a profissão docente em matemática. O quadro 4, a seguir, mostra alguns exemplos dessas afirmações e a que elas se referem. O questionário completo encontra-se no Apêndice A.

QUADRO 4
Exemplos de afirmações do questionário de crenças

Afirmação em relação	Número de afirmações	Exemplo
À matemática como disciplina	05 (1, 2, 3, 13, 14)	• A matemática é abstrata para mim. • Gosto muito de resolver problemas de matemática.
Às frações	09 (4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15)	• Gosto muito de resolver problemas de matemática que envolvam números fracionários. • Quando eu me tornar professor vou ensinar frações do jeito que eu aprendi na escola. • Quando resolvo um problema e o resultado é um número fracionário, fico em dúvida se a resposta está correta, mesmo achando que os procedimentos que utilizei na resolução possam estar corretos.
À profissão docente em matemática	01 (10)	• Ser professor de matemática não era minha primeira opção profissional.

Fonte: Elaborado pela autora da tese, 2013.

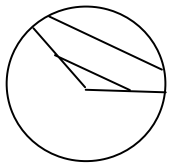
A razão de elaborar afirmativas envolvendo, tanto a matemática, quanto disciplina, quanto a profissão docente em matemática, nasceu de uma expectativa de que o posicionamento dos alunos a essas proposições pudesse esclarecer alguns de seus posicionamentos em relação às frações, como comentarei mais adiante quando descrever a entrevista E_1 de esclarecimento a esse questionário.

4.1.2 Questões sobre frações (QF_1)

Para esse questionário, foram elaboradas seis questões, privilegiando as interpretações para as frações: parte-todo, operador, representação na reta real, medida, divisão.

Esse questionário visou analisar as respostas dos alunos em termos dessas interpretações. A seguir, apresento as questões explicitando o objetivo de cada uma delas e as respostas que eu esperava dos alunos.

1. Qual a opção que se refere à parte riscada do desenho?



( ) Cerca de metade

( ) Menos de um terço

( ) Mais de um quarto

( ) Cerca de um quinto

Explique como você chegou a essa resposta

Figura 3 - Primeira questão do instrumento QF_1
Fonte: Adaptada de SANTOS, 1997.

Objetivo: identificar o conceito de fração com a ideia de parte-todo e todo-parte de um conjunto contínuo, em uma representação gráfica.

O desenho apresentado na figura 3 foi dividido de maneira que o aluno deveria encontrar a sua estratégia para relacionar a parte riscada com o todo e com outras partes.

Respostas esperadas: cerca de metade e mais de um quarto.

Para cerca de metade e mais de um quarto, o aluno poderia dividir o círculo em quatro partes iguais e, assim, já teria como avaliar as alternativas.

Entretanto, isso poderia ser feito sem a divisão do círculo, apenas observando que a parte riscada está próxima da metade da figura e, portanto, é maior do que um quarto.

Para descartar a opção de cerca de um quinto, o aluno poderia comparar a primeira e a terceira afirmativas no seguinte sentido: tendo a certeza de que a parte riscada corresponde a uma fração do inteiro que é menor do que a metade e maior do que um quarto desse inteiro, essa parte não pode ser próxima de um quinto. Para descartar a opção menos de um terço, ele poderia pensar que, se a parte riscada se refere a cerca de metade, não pode ser menor que um terço.

2. Um conjunto de seis cadernos pode ser repartido, igualmente, de quantas formas diferentes? É possível reparti-los em quartos? Justifique.

Figura 4 - Segunda questão do instrumento QF_1
Fonte: Adaptada de SANTOS, 1997.

Objetivo: identificar o conceito de fração com a ideia de divisão.

A opção por não colocar o desenho na figura 4 foi intencional na tentativa de que os alunos construíssem uma figura para auxiliá-los na resolução.

Respostas esperadas: ao elaborar essa questão, minha expectativa era de que o aluno poderia pensar em repartir os cadernos em três grupos de dois cadernos, dois grupos de três cadernos, em seis grupos de um caderno e em um grupo de seis cadernos. Posteriormente, ao discuti-la com alguns colegas do Uni-Bh, concordei com eles que deveria também considerar a possibilidade de alguns alunos repartirem cada caderno em partes iguais, por exemplo, ao meio, ou mesmo, em quatro quartos.

Quanto a repartir o conjunto em quartos, no caso de não ocorrer a possibilidade aludida, as respostas esperadas poderiam ser: não seria possível repartir em quartos, pois sobrariam dois cadernos; seria possível, porém, descaracterizando o conjunto. Ainda, nesse caso, dentre as justificativas para a divisão, esperava-se que o aluno percebesse as possibilidades de repartir os cadernos com os divisores de 6.

No caso de o aluno desconsiderar o fato de as frações serem partes iguais de um todo, poderiam também dar respostas similares a: dois grupos de dois cadernos e dois grupos de um caderno.

3. Coloque em ordem crescente os seguintes números racionais:
$\frac{15}{16}, \frac{11}{12}, \frac{18}{19}, 1, \frac{47}{48}$ e $\frac{2}{3}$.

Figura 5 - Terceira questão do instrumento QF_1
Fonte: Elaborada pela autora da tese, 2013.

Objetivo: comparar o número racional expresso na forma de frações, valendo-se das relações entre numerador e denominador.

Pretendíamos que o aluno estabelecesse a ordem crescente entre as frações usando a ideia parte-todo para compará-las. Esperávamos que os alunos utilizassem desenho para ajudá-los a comparar as frações. Em minhas observações de sala de aula, percebo que os alunos, diante de uma questão como essa, sentem-se na *obrigação* de ter uma calculadora, transformando o número na forma de fração para a forma decimal, para fazer a comparação.

Minha expectativa foi que o aluno percebesse a relação entre o numerador e o denominador de cada fração e não efetuasse a divisão. Não foi permitido o uso de calculadora.

As respostas esperadas seriam:

$\frac{47}{48}, \frac{18}{19}, \frac{15}{16}, \frac{11}{12}, \frac{2}{3}, 1$

$1, \frac{47}{48}, \frac{18}{19}, \frac{15}{16}, \frac{11}{12}, \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}, \frac{11}{12}, \frac{15}{16}, \frac{18}{19}, \frac{47}{48}, 1$

No caso da primeira resposta esperada, é comum os alunos observarem os denominadores e concluírem que a fração que tem o maior denominador é a que representa o número menor. No caso da segunda resposta, algum aluno poderia simplesmente inverter a ordem da resposta correta de crescente para decrescente. No caso da terceira opção, a correta, o aluno poderia também, equivocadamente, considerar os numeradores e colocá-los em ordem crescente ou considerar os denominadores e colocá-los em ordem crescente.

4. Marque a alternativa na qual está bem representado o resultado da expressão $\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)$, pela parte pintada da figura.

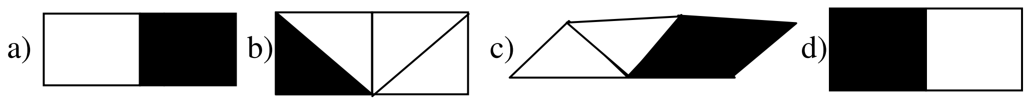


Figura 6 - Quarta questão do instrumento QF_1
Fonte**:** Adaptada de atividade elaborada pela autora para a Olimpíada Fiat de Matemática, 2007.

Objetivos:

1 - Verificar como os alunos resolvem operações simples de adição e subtração com frações de denominadores diferentes.

2 - Verificar se os alunos reconhecem a representação da fração, encontrada como resposta para a expressão, em um diagrama.

Penso que esta questão não é difícil no que se refere à resolução das operações e à associação da resposta com um dos diagramas (figura 6). A intenção não foi vincular as operações diretamente a uma das figuras, ou seja, esperávamos que o aluno resolvesse a expressão dada.

Respostas esperadas:

$\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{8-3-2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, opção correta: letra b)

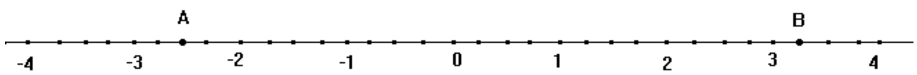
$\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{8-3+2}{12} = \frac{7}{12}$, erro no sinal do "+2" no numerador.

$\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{10}$, o aluno soma os denominadores e mantém os numeradores, que são iguais.

$\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{8-(3+2)}{12} = 3,$ o aluno poderia desconsiderar o denominador.

Nessa última possibilidade de resolução, como não teria opção de resposta, o(a) aluno(a) poderia tentar corrigir seu erro. Um ato muito comum entre os alunos, porém, é o de eliminar denominadores após redução das frações ao mesmo denominador.

5. Na representação da reta abaixo, a unidade de comprimento foi dividida em quatro partes iguais. Cada ponto representa um número racional.



O valor de $\frac{A-B}{A+B}$. é

a) 1 b) -1 c) $-\frac{23}{3}$ d) 0 e) $-\frac{19}{7}$

Figura 7 - Quinta questão do instrumento QF_1
Fonte: Adaptada de atividade elaborada pela autora para a Olimpíada Fiat de Matemática, 2007.

Objetivo: identificar o conceito de fração com a ideia de medida, localizar um número fracionário na reta numérica, operar com frações.

Uma ideia mais complexa é a do conceito de fração relacionada à medida. Nem sempre os alunos conseguem compreender a subdivisão da unidade de medida. em subunidades e associar os pontos divisores a uma fração do comprimento. Com essa questão (figura 7), tive a intenção de me aproximar de uma possível dificuldade dos alunos (que poderia ser evidenciada ou não em entrevista) para localizar frações na reta, aproveitando para observar como eles efetuam a multiplicação e a divisão de frações. Entretanto, fiquei na expectativa de que alguns deles pudessem preferir lidar com os números decimais.

Respostas esperadas:

$\frac{A-B}{A+B}.=1$, simplificando A e B

$\frac{A-B}{A+B}.=-1$, simplificando A e B e considerando que o fato de ser –B o resultado poderia ser negativo.

$$\frac{A-B}{A+B}=\frac{-\frac{10}{4}-\frac{13}{4}}{-\frac{10}{4}+\frac{13}{4}}=\frac{-\frac{23}{4}}{\frac{3}{4}}=-\frac{23}{3}$$

$\frac{A-B}{A+B}=0$, simplificando A e B e considerando que o resultado seria 0 pelo fato da simplificação ter sido total.

Efetuar as operações usando $A=-2\frac{1}{2}$ e $B=3\frac{1}{4}$

Efetuar as operações usando $A=-3{,}5$ e $B=3{,}25$. O aluno poderia se confundir na orientação dos números negativos ao considerar $A=-3{,}5$, quando deveria considerar $A=-2{,}5$.

> 6. Para fazer um *poster* de uma foto 9x12 cm, foi preciso alterá-la considerando-se a razão 7/9. Quais as dimensões da nova foto no pôster?

Figura 8 - Sexta questão do instrumento QF_1
Fonte: Adaptada de SANTOS, 1997.

Objetivo: identificar o conceito de fração como operador.

Minha intenção foi verificar se os alunos entendiam a fração como operador, que tem a ideia de transformar um número ou uma quantidade, bem como perceber se eles utilizam o pensamento proporcional.

Respostas esperadas: o aluno considera a fração como números separados em que um deles vai incidir sobre uma dimensão da foto e o outro sobre a outra dimensão.

9 x 7= 63

12 x 9=108

A nova foto tem as dimensões 63 x 108

Outra possibilidade seria que o aluno pensasse na seguinte relação: $\frac{9}{12}x\frac{7}{9}=\frac{63}{108}$.

O aluno poderia também multiplicar a razão de redução por cada uma das dimensões, obter um resultado e subtrair esse resultado das dimensões iniciais:

$$9 \text{ x} \frac{7}{9} = 7$$

$$12 \text{ x } \frac{7}{9} = \frac{28}{3}$$

$$9 - 7 = 2$$

$$12 - \frac{28}{3} = \frac{8}{3}$$

A nova foto tem as dimensões $2 \text{x} \frac{8}{3}$

A possibilidade que apresentaria a resposta correta seria multiplicar o fator de redução por ambas as dimensões:

$$9 \text{ x} \frac{7}{9} = 7$$

$$12 \text{ x} \frac{7}{9} = \frac{28}{3}$$

A nova foto tem as dimensões $7 \text{ x } \frac{28}{3}$

4.1.3 Entrevista de esclarecimento das crenças (E_1)

A entrevista realizada na primeira fase de pesquisa com cada um dos oito alunos-participantes teve como ponto de partida os posicionamentos dos alunos diante das afirmações propostas no Questionário sobre Crenças (QC). Exemplos desses posicionamentos de um aluno e perguntas feitas a ele nessa entrevista estão mostrados no quadro 5.

QUADRO 5

Exemplos de posicionamentos de um aluno a algumas afirmações do QC, e das perguntas feitas na E_1

<table>
<tr><th>Posicionamentos (QC)</th><th>Perguntas (E_1)</th></tr>
<tr><td>Gosto muito de resolver problemas de matemática (Concordo totalmente)</td><td rowspan="2">Você disse que gosta de resolver problemas de matemática, mas não gosta de resolver problemas que envolvam números fracionários. Explique-me como é isso</td></tr>
<tr><td>Gosto muito de resolver problemas de matemática que envolvam números fracionário (Discordo)</td></tr>
<tr><td>Quando me pedem para resolver um problema com números fracionários fico nervoso (Concordo)</td><td>Por que você fica nervoso quando tem que resolver um problema com números fracionários?</td></tr>
<tr><td>Minha experiência com o aprendizado de frações na escola foi positiva, não tive dificuldades (Discordo)</td><td>Como foi sua experiência com as frações na escola?</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora da tese, 2013.

A transcrição da primeira entrevista E_1 gerou o protocolo e_1 de cada aluno a partir de suas respostas ao QC.

4.1.4 Entrevista de esclarecimento das questões (E_2)

A transcrição da segunda entrevista E_2 de cada aluno gerou o protocolo e_2. Foi elaborado também um protocolo P_1 de cada aluno sobre cada questão que ele resolveu. Nesses protocolos, registrei as resoluções apresentadas, os procedimentos utilizados pelos alunos e as minhas inferências. Tais documentos tiveram como objetivo fazer com que eu me aproximasse das possíveis dúvidas desses alunos em cada questão. Em seguida, a partir das informações obtidas na entrevista E_2 sobre as questões, elaborei o protocolo P_2, tratando de cada questão, os erros cometidos em cada uma, inserindo as resoluções originais e completando com as informações fornecidas por ocasião da entrevista abordando crenças (E_1).

Sintetizando, foram confeccionados quatro protocolos na primeira fase desta investigação:

a) e_1 - contendo a transcrição da primeira entrevista sobre as crenças dos alunos acerca da matemática e das frações, e meus comentários;

b) e_2 - contendo a transcrição da segunda entrevista, com esclarecimentos dos alunos para a resolução das questões, e meus comentários;

c) P_1 - elaborado para cada aluno, contendo a resolução de cada questão, explicitando os procedimentos utilizados e minhas inferências;

d) P_2 - elaborado para cada questão, contendo as resoluções apresentadas com a inserção dos registros dos alunos, os erros cometidos, e as informações obtidas nos protocolos e_1 e e_2.

A seguir descrevo os instrumentos utilizados na segunda fase de pesquisa.

4.2 Instrumentos de produção de dados – segunda fase

O cuidado em produzir dados que possibilitassem uma análise em profundidade do fenômeno por mim pesquisado levou-me à segunda fase de pesquisa. Os instrumentos utilizados, nessa fase, foram:

1. questões sobre números racionais (QF_2), Apêndice C;
2. entrevista com o objetivo de discutir as resoluções das questões propostas na segunda fase (E_3).

Os instrumentos de produção de dados para a realização da segunda fase dessa investigação foram confeccionados a partir dos resultados da primeira fase, considerando-se as estratégias utilizadas nas soluções das questões, os erros mais comuns e as dificuldades evidenciadas nas entrevistas. Essa fase foi planejada quando eu estava realizando estágio doutoral na Espanha, sob a supervisão do professor Salvador Llinares.

Elaborei 23 questões privilegiando as interpretações para as frações: parte-todo, operador, número na reta real, medida, divisão, planejadas, inicialmente, para serem usadas da seguinte maneira: dez questões seriam propostas e respondidas individualmente por cada um dos alunos; seis questões seriam propostas em uma oficina em que os alunos tivessem oportunidade de discutir com os colegas; e sete questões seriam tratadas em um grupo de discussão composto pelos alunos e por mim.

Por motivos alheios à minha vontade, a oficina e o grupo de discussão tal como previstos não foram implementados.

4.2.1 Questões sobre números racionais (QF_2)

Kieren (1988) e Lamon (2007) sugerem que a ideia de parte-todo envolvida na compreensão dos números racionais não é independente da ideia de medida também envolvida no entendimento desses números. O que está subjacente ao construto medida é a comparação parte-todo, definida em uma situação na qual uma quantidade contínua ou um conjunto discreto de objetos é dividido em partes iguais e as partes são relacionadas com o todo.

A questão Q1, figura 9, a seguir, privilegia esse construto.

Q1. Considere como unidade o conjunto de pontos abaixo para responder às perguntas a seguir.

a) Você pode construir terços desse conjunto?
b) Construa um conjunto com 2/3 do conjunto dado.
c) Construa um conjunto com 5/3 do conjunto dado.
d) É possível construir quartos deste conjunto de pontos? Por quê?

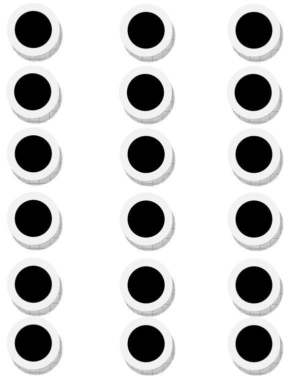


Figura 9- Primeira questão do instrumento QF_2
Fonte: LAMON, 1999, p. 73, adaptada pela autora da tese.

Objetivo: estabelecer relações das partes com o todo, construir quantidades que representam uma fração maior que o inteiro.

Essa questão pode trazer dúvidas para o aluno que não está familiarizado com as diferentes situações em que as palavras que se referem a partições estão inseridas em um contexto. Nesse caso, o significado da palavra terços pode não ser compreendido como a divisão desse conjunto em três subconjuntos com o mesmo número de pontos.

Respostas esperadas: o aluno apresentaria cada linha como representando um terço do total de pontos. Uma dúvida na resolução desse problema pode ser de ordem didática, na medida em que problemas que envolvem os termos meios, terços, quartos, em seus enunciados, são menos usuais do que a representação simbólica dessas quantidades.

O aluno entenderia que não é possível construir um conjunto com 5/3 dos elementos do conjunto inicial porque seria um conjunto com um número maior de elementos. Nesse caso, os alunos podem ter dúvidas em relação à fração imprópria.

Ainda, dentro da ideia de medida, como interpretação das frações, uma situação que envolve a noção de unidade, que deve ser construída a partir da representação de uma fração da unidade, deve ser privilegiada. Essa interpretação está na questão Q2, figura 10.

Q2. Considere o seguinte conjunto: ◯◯◯◯

a) Se o conjunto representa 2/3 da unidade, qual é a unidade?

b) Se o conjunto representa 4/3 da unidade, qual é a unidade?

c) Como você pensou para resolver esta questão?

Figura 10 - Segunda questão do instrumento QF_2
Fonte: LLINARES, 2003, p. 193.

Objetivo: identificar a unidade em um contexto discreto a partir de uma fração dessa unidade.

Problemas que envolvem esse tipo de raciocínio não são muito comuns no tratamento das frações, o que pode gerar uma dúvida na resolução de situações em que, dada uma parte do inteiro, seja ele discreto ou contínuo, o aluno deve ser capaz de calcular qual é a unidade a que essa parte se refere. O objetivo dessa questão foi perceber se o aluno era capaz de reconstruir a unidade a partir de suas partes.

Resposta esperada: os alunos considerariam o número de elementos do conjunto como 3 pelo fato de ser o número que consta nos denominadores, baseando-se no procedimento rotineiro de dividir uma grandeza em partes iguais ao denominador e considerar partes iguais ao numerador.

A questão Q3, figura 11, considera um conjunto discreto como unidade, e seu objetivo foi saber se o aluno era capaz de expressar uma parte da unidade em forma de fração e qual é a estratégia utilizada para identificar a parte como subconjunto da unidade, uma vez que eles deveriam justificar suas respostas.

Q3. Considere como unidade o conjunto ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯

Que fração da unidade ◯ ◯ representam?

Figura 11 - Terceira questão do instrumento QF_2
Fonte: Elaborada com a colaboração do professor Salvador Llinares, 2011.

Objetivo: representar uma parte de uma grandeza discreta em forma de fração.

Respostas esperadas: esperava que os alunos apresentassem a resposta correta 1/3.

Por se tratar de um conjunto discreto, uma questão como essa não deveria apresentar muita dificuldade, uma vez que, se o aluno comparar duas bolinhas com o total, já terá a fração equivalente à fração da unidade solicitada. Se pensar duas bolinhas de seis, terá a fração 2/6, que equivale a 1/3.

O aluno poderia escrever 1/3, comparando duas bolinhas com o total 6.

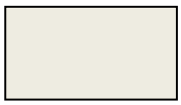
O aluno poderia escrever 6/3, se equivocando quanto à relação que deveria estabelecer entre as quantidades, (6 em 2 ou 2 em 6).

Já a questão Q4, figura 12, poderia oferecer alguma dificuldade por se tratar de um conjunto contínuo em que a figura representa parte de uma unidade ou mais que a unidade. Nesses casos, deve-se perceber, assim como na questão 2, que a operação necessária para resolver o problema é a divisão da figura em partes iguais ao número que se encontra no numerador, obtendo-se, assim, a fração unitária que possibilita a identificação da unidade.

Com essa questão tive a intenção de perceber se o aluno é capaz de reconstruir a unidade a partir de suas partes quando o contexto é um conjunto contínuo.

Figura 1 - Quarta questão do instrumento QF_2

Q4. Considere a figura



1- Se na figura estão representados 3/4 de uma unidade, qual é a unidade?
2- Se na figura estão representados 5/3 da unidade, qual é a unidade?

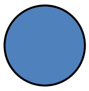
Figura 12 - Quarta questão do instrumento QF_2
Fonte: Elaborada com a colaboração do professor Salvador Llinares, 2011.

Objetivo: identificar a unidade em um contexto contínuo a partir de uma fração dessa unidade.

Respostas esperadas: o aluno poderia desenhar um retângulo representando a unidade uma vez que eles estão habituados com a figura de um retângulo sempre representando o todo e, não, parte dele.

O aluno poderia dividir o retângulo em quatro partes, no caso da opção a), indicando 4 como resposta para essa opção e dividir o retângulo em três partes, indicando 3 como resposta, no caso da opção b). Esse procedimento poderia refletir uma predisposição em considerar como unidade o número que se encontra nos denominadores das frações.

A questão Q5, figura 13 também se refere a uma unidade contínua. Entretanto, o aluno é solicitado a representar, por meio de desenhos, partes da unidade que compõem uma quantidade menor ou maior que o inteiro. O objetivo da questão é verificar quais as estratégias utilizadas para representar as frações solicitadas e também comparar o modo de pensar para resolver essa questão com o modo de pensar para resolver a questão 1, que trata da mesma ideia, tomando, porém como unidade um conjunto discreto.

Q5. Se  é a unidade:

a) Represente 3/4, dessa unidade.

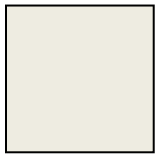
b) Represente 5/4, usando essa unidade.

Figura 13 - Quinta questão do instrumento QF_2
Fonte: LLINARES, 2003 *apud* CHAMORRO, 2003 p. 192, adaptada pela autora da tese.

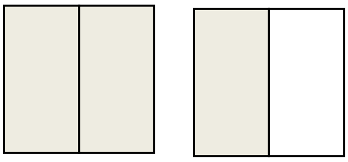
Objetivo: representar por meio de desenho uma fração (própria ou imprópria) de uma grandeza contínua.

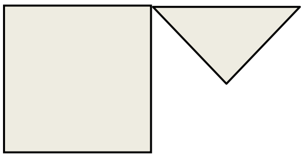
Respostas esperadas: minha expectativa era que os alunos tivessem facilidade com essas representações e apresentassem a resposta correta. Os alunos dividiriam o círculo primeiramente em quatro partes e pintariam três delas, respondendo a opção a). Na opção b) entendi que os alunos fariam a mesma divisão, acrescentando porém, uma das quatro partes ao desenho.

A questão Q6, figura 14, envolve a escrita de uma fração imprópria e pode revelar como os estudantes representam quantidades maiores do que uma unidade por meio das frações. Tive a intenção de observar o uso do número misto para essa representação. A previsão era que essa questão não oferecesse dificuldade para os alunos. Entretanto, era esperado que algum aluno não relacionasse o triângulo na letra c) como parte do quadrado ou não dividisse o quadrado usando suas diagonais. Já na opção c) o estudante poderia se confundir ou apresentar alguma dificuldade devido ao fato de a figura apresentar diferentes divisões.

Q6. Para cada alternativa abaixo, considere  como a unidade.

Escreva uma fração que representa as partes pintadas nas figuras:

a) 

b) 

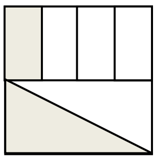
c) 

Figura14 - Sexta questão do instrumento QF_2
Fonte: Elaborada com a colaboração do professor Salvador Llinares, 2011.

Objetivo: operar com diferentes divisões de uma figura, identificando partes equivalentes. Escrever frações que representam quantidades maiores que o inteiro.

Respostas esperadas: na opção a) O aluno poderia responder: 3/4, desconsiderando que a unidade é um quadrado, 3/2 considerando corretamente o quadrado como unidade, ou ainda escrever 1 1/2 escrevendo o número misto que representa a parte colorida.

Na opção b) o aluno poderia responder: 5/8 completando o segundo quadrado e contando as partes considerando dois quadrados como unidade, ou 5/4 considerando corretamente o quadrado como unidade ou ainda escrevendo o número misto 1 1/4 que representa a parte colorida.

Na opção c) o aluno poderia responder: 2/6 desconsiderando a divisão em partes iguais, ou escrever 1/4 + 1/2 considerando cada metade do quadrado como a unidade.

A questão Q7, figura 15, trata da representação, por meio de desenho de frações menores e maiores que a unidade.

Q7. Ilustre cada uma das frações abaixo:

a) 1/5

b) 7/3

c) $1\frac{1}{4}$

Figura 15 - Sétima questão do instrumento QF_2
Fonte: Elaborada com a colaboração do professor Salvador Llinares e da professora Julia Valls, 2011.

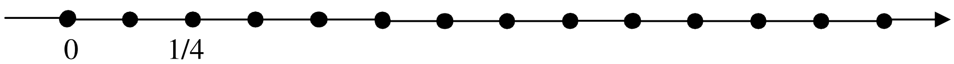
Objetivo: verificar o tipo de representação pictórica mais familiar para o aluno quando se trata de representar uma fração por meio de desenho.

Resposta esperada: o aluno usaria círculos ou retângulos para representar as frações.

Minha expectativa era que os alunos tivessem preferência por utilizar figuras contínuas para representar as frações. Não penso se tratar de um fato novo nas pesquisas a preferência por esse tipo de desenho. Entretanto, caso minha suspeita se confirmasse, esse seria um bom momento para compreender, por meio da entrevista, o motivo de tal preferência e desafiar os alunos a representarem de outra maneira, utilizando outro tipo de unidade. Assim, poderia obter informações sobre possíveis crenças dos alunos acerca das frações e suas representações.

A questão Q8, figura 16, contempla a perspectiva da fração como medida e como representação de um número na reta.

Q8. Localize na reta abaixo os números 3/4, 6/8 e 3/2.



Explique como você pensou.

Figura 16 - Oitava questão do instrumento QF_2
Fonte: LAMON, 1999, p. 118, adaptada pela autora da tese.

Objetivo: localizar um número na reta usando sua representação fracionária. Estabelecer uma relação de ordem entre os números fracionários.

Respostas esperadas: o aluno efetuaria a divisão do numerador pelo denominador de cada fração na tentativa de encontrar a forma decimal dos números e, assim, indicar cada um deles na reta.

O aluno poderia desconsiderar, desatentamente, o fato de que 1/4 é menor que 1/2 e indicar o ponto entre 0 e 1/4 como 1/2 pelo fato de o ponto estar na metade do intervalo. A partir daí ele indicaria o ponto imediatamente à direita de 1/4 como 3/2. Para indicar os pontos 3/4 e 6/8, o aluno contaria três vezes a medida considerada como 1/4, indicando 3/4 e 6/8.

O aluno consideraria corretamente a medida 1/4 na reta e marcaria corretamente 3/4 contando três vezes o intervalo correspondente a 1/4. Para indicar 3/2, assim que localizasse o ponto 2/4, percebendo a equivalência de 2/4 com 1/2, o aluno usaria a medida 1/2 para localizar 3/2. Para localizar 6/8, o aluno localizaria no mesmo ponto que 3/4 pensando na equivalência entre as frações.

Em uma questão como essa, um possível impedimento a uma resolução de sucesso é a percepção da reta numérica como composta apenas por números inteiros, ou seja, um obstáculo de origem epistemológica. De acordo com pesquisa realizada por Lamon (2007), alunos que foram iniciados nos estudos dos números racionais por meio do subconstruto medida tiveram um entendimento significativo da unidade, de subintervalos, equivalência, ordem e densidade dos números racionais. Os resultados da pesquisa de Lamon (1999) mostram ainda que o subconstruto medida parece ser o mais fortemente e naturalmente relacionado aos outros subconstrutos. O objetivo dessa questão foi verificar se os alunos compreendem a fração como uma representação de um número na reta e que a reta não é constituída apenas por números inteiros.

O aluno pôde usar a questão Q8 para encontrar uma solução para a questão Q9, figura 17. Além de saber que estratégia ele utilizou para resolver o problema, pude verificar se ele percebeu cada divisão como sendo 1/8 da unidade, o que resolveria a questão. O aluno deveria inicialmente indicar a fração 1/2 na reta para depois localizar a fração entre 1/4 e 1/2.

Q9. Represente na reta abaixo uma fração entre 1/4 e 1/2. Explique como você pensou.

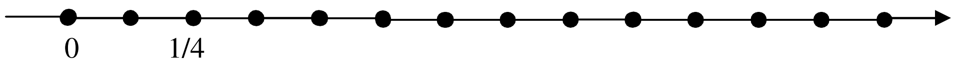


Figura 17 - Nona questão do instrumento QF_2
Fonte: Elaborada com a colaboração do professor Salvador Llinares e da professora Julia Valls, 2011.

Objetivo: localizar um número na reta usando sua representação fracionária. Verificar se o aluno utilizaria os intervalos propostos para apresentar sua resposta.

Respostas esperadas: se o aluno localizasse corretamente a fração 1/2, poderia utilizar a média aritmética para solucionar a questão, apresentando a resposta correta, 3/8.

Sem efetuar os cálculos, o aluno poderia compreender que o ponto entre 0 e 1/4 é a metade da medida correspondente a 1/4 e, portanto, fazendo a contagem utilizando como medida 1/8, a fração que responderia a questão seria 3/8.

O aluno poderia indicar como resposta a fração 1/3, sem assinalar essa fração na reta, simplesmente considerando o fato de que 1/3 está entre 1/4 e 1/2, ou consideraria o ponto assinalado entre 1/4 e 1/2 como 1/3.

A questão Q10, figura 18, abarca as ideias de fração como medida e operador, e teve como objetivo compreender como os alunos pensam para calcular uma fração de uma quantidade conhecendo-se parte da unidade. O aluno deveria compreender que o conjunto apresentado não é a unidade e que, para calcular a unidade, poderia dividir as balas em dois grupos de mesma quantidade encontrando o número de balas correspondente a 1/3. Em seguida, o procedimento mais usual seria identificar a unidade, ou seja, doze balas, para responder a questão.

Q10. O desenho abaixo representa 2/3 das balas que Pedro tem.

Quantas balas equivalem a metade das balas de Pedro?

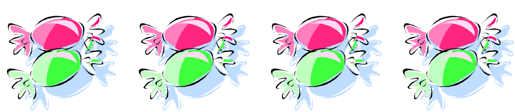


Figura18 - Décima questão do instrumento QF_2
Fonte: LAMON, 2007, p. 648, adaptada pela autora da tese.

Objetivo: verificar como o aluno calcula uma fração de quantidade discreta conhecendo-se outra fração dessa mesma quantidade.

Respostas esperadas: o aluno poderia utilizar a regra de três como recurso para calcular a quantidade de balas que equivalem à metade das balas de Pedro.

O aluno poderia utilizar a fração unitária, calculando inicialmente quantas balas equivalem a 1/3 do conjunto e, em seguida, o total de balas que equivale a 3/3. A partir desse resultado, ele calcularia a quantidade de balas que equivale à metade.

4.2.2 Entrevista de esclarecimento das questões da segunda fase (E_3)

A transcrição da entrevista de cada aluno gerou o protocolo e_3. Foi elaborado também um protocolo P_3 de cada aluno sobre cada questão que ele resolveu. Em seguida, a partir das informações obtidas na entrevista abordando as questões, elaborei o protocolo P_4, tratando de cada questão, os erros cometidos em cada uma, inserindo as resoluções originais e completando com as informações fornecidas por ocasião da referida entrevista.

Em síntese, nessa segunda fase, os dados produzidos ficaram registrados nos seguintes protocolos:

a) e_3 - contendo a transcrição da entrevista clínica sobre a resolução das questões e meus comentários;
b) P_3 - elaborado para cada aluno, contendo a resolução de cada questão, explicitando os procedimentos utilizados e minhas inferências;
c) P_4 - elaborado para cada questão, contendo as resoluções apresentadas com a inserção dos registros dos alunos, os erros cometidos, e as informações obtidas no protocolo e_3.

Nas entrevistas realizadas nas duas fases da pesquisa, as questões que os alunos não resolveram ou que resolveram equivocadamente foram discutidas por mim com cada um. Entendi que esse procedimento seria útil para a formação dos futuros professores, pois trataria, de modo particular, suas dúvidas acerca do conteúdo. Por outro lado, essa seria também uma forma de retribuir o tempo e a disposição que os alunos dispensaram à minha investigação.

4.3 Estratégias de organização e análise dos dados

Algumas pesquisas sobre crenças matemáticas de alunos mantêm-se ancoradas em categorias já identificadas na literatura, apresentando resultados que se encaixam em modelos já existentes. No caso de minha investigação, não foram definidas previamente na literatura quaisquer categorias de crenças no domínio específico dos números racionais.

O modelo de Clement

Para organizar a análise das crenças dos alunos em relação às frações, utilizei como método o modelo de Clement (2000). A principal característica desse modelo consiste na busca constante da explicação de um fenômeno por meio de formulação de uma hipótese, que, se for verdadeira, explica o fenômeno em questão.

Clement (2000, p. 554) propõe o diagrama a seguir, figura 19, como uma síntese do modelo.

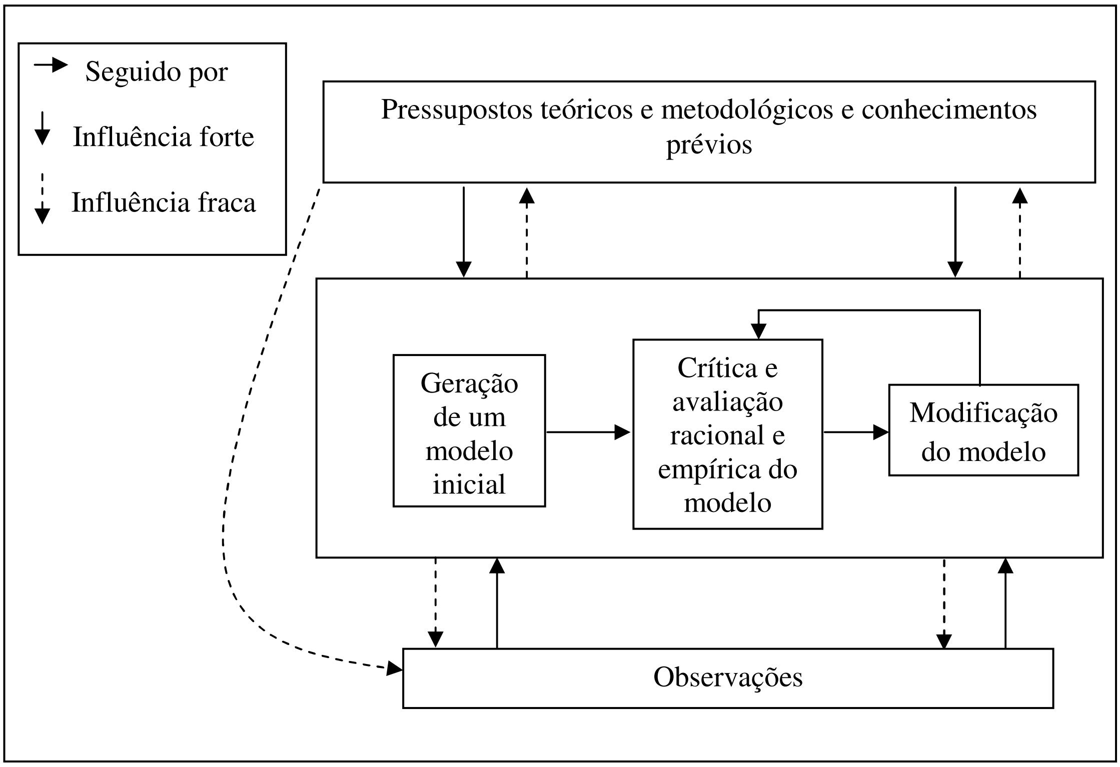


Figura 19 - Modelo de Clement (2000)
Fonte: CLEMENT, 2000, p. 554.

De acordo com esse diagrama, o pesquisador cria, a partir de pressupostos teóricos e metodológicos e de seus conhecimentos prévios, um modelo inicial que é avaliado e criticado mediante o estudo de novos dados, e esse procedimento modifica o modelo inicial ou corrobora o modelo já existente. A relação entre os pressupostos teóricos, o conhecimento prévio do pesquisador e o modelo não tem a mesma intensidade, como se pode ver no diagrama. Em outras palavras, o modelo tem uma influência mais fraca sobre os pressupostos teóricos e o conhecimento prévio do pesquisador. Caso essa relação fosse mais forte, poderíamos estar diante de um novo paradigma, ou seja, um modelo que influencia fortemente uma teoria já existente poderia incitar uma nova perspectiva teórica.

Quanto às observações, essas influenciam mais fortemente o modelo, podendo, inclusive, modificá-lo, como dito anteriormente, ao passo que o modelo quase não as influencia, assim como os pressupostos teóricos influenciam fracamente essas observações, que são entendidas como todos os dados obtidos por meio de registros e entrevistas. Assim, as observações têm uma influência mais forte sobre o modelo, uma vez que são os dados empíricos que possibilitam a avaliação e a crítica do modelo.

Essa prática de sucessivos refinamentos dos dados para explicar um fenômeno permite a criação de modelos mais confiáveis e bem formados, o que não significa certeza absoluta do modelo (CLEMENT, 2000) como acontece com qualquer outro modelo. Esse procedimento foi adotado para a categorização das crenças, tanto da primeira, quanto da segunda fase da pesquisa.

A partir do protocolo P_2 de dois alunos, escolhidos aleatoriamente, foi possível elaborar a primeira versão do modelo descritivo das crenças dos alunos acerca das frações (etapa *Geração de um modelo inicial* da figura 19). Em seguida, os protocolos P_2 dos demais alunos, tanto da primeira fase quanto da segunda, foram observados cuidadosamente um a um (etapa *Observações* da figura 19).

Durante esse processo, crenças eram identificadas ao mesmo tempo em que serviam para avaliar criticamente a primeira versão aludida do modelo: ou avaliava-se que as crenças ora identificadas se encaixavam nessa versão, ou avaliava-se que elas geravam novas categorias (etapa *Crítica e avaliação* da figura 19). No último caso, o modelo de crenças obtido até então era modificado para contemplar as novas categorias que emergiam (etapa *Modificação do modelo* da figura 19).

Uma vez modificado o modelo, uma nova avaliação crítica dele era realizada. Nessa nova avaliação, todos os protocolos foram relidos com o objetivo de não deixar que uma declaração, que porventura pudesse revelar algo importante, fosse mal ou indevidamente interpretada. Também, a denominação dada a cada categoria foi reavaliada.

É importante observar que as etapas do modelo de Clement (2000) foram contempladas ao longo das duas fases de pesquisa. Em outras palavras, ao término da primeira fase de pesquisa, chegamos a um modelo final de crenças relativas aos dados dessa fase. Ao iniciar a segunda fase de pesquisa, tomamos, como modelo inicial de crenças, o modelo final que havia sido construído na primeira fase. De maneira similar à primeira fase, as observações das crenças obtidas dos protocolos da segunda fase serviram para avaliar o modelo preexistente, mantendo-o ou modificando-o.

O procedimento de validação das categorias criadas ocorreu em dois momentos. A categorização das crenças obtidas na primeira fase foi realizada enquanto eu estava realizando estágio doutoral e apresentada em seminário para professores que compõem o Departamento de Inovación y Investigación Didáctica da Faculdad de Educación, de Alicante, coordenado pelo professor Salvador Llinares, em junho de 2011.

No referido seminário, recebi sugestões para refinar algumas categorias e alterar alguns de seus nomes, visando a busca de uma categorização mais apurada. Já, na segunda fase, a validação do modelo se deu em discussões com um grupo de estudo formado por minha orientadora, a coordenadora, e seus orientandos. Nessa ocasião, reavaliamos cada uma das categorias existentes em termos de seus exemplares (falas) e denominações, produzindo um refinamento do modelo até que obtivéssemos um modelo final acordado[19] pelo grupo.

******

Terminado o trabalho de categorização das crenças, o passo seguinte foi examinar, nos protocolos dos oito alunos-participantes, relativos às duas fases de pesquisa, informações sobre suas experiências escolares no ensino básico com as frações, visando encontrar indícios das origens dessas crenças, bem como de possíveis manifestações emocionais que pudessem ser interpretadas como evidências de dificuldades dos alunos em relação a esse conteúdo.

Lembro que a palavra dificuldade é usada nesta pesquisa como sendo um entrave, um bloqueio, uma relutância, um impedimento, dentre outras, de ações matemáticas por parte dos alunos quando estão engajados em situações envolvendo frações, e manifesta-se por meio

---

[19] Passível porém, de futuros questionamentos ou adaptações como qualquer modelo ou categorização da área de Ciências Sociais e Humanas.

de certa emoção “sofrida” passível de ser revelada pelos alunos ou inferida pela pesquisadora.

Dito isso, a primeira parte da análise é dedicada a uma discussão global dos dados envolvendo oito alunos-participantes: Eva, Eloisa, Rosa, Matheus, Tiago, Renato, Lucas e Walter. A segunda parte da análise contempla três estudos de caso relativos a Eva, Eloisa e Tiago.

A opção por apresentar uma análise mais aprofundada do processo de pesquisa vivido por esses três alunos deveu-se ao fato de que, dentre os cinco alunos (Eva, Eloisa, Rosa, Matheus e Tiago) que participaram integralmente da pesquisa, Eva, Eloisa e Tiago foram aqueles em cuja interpretação dos dados foi possível produzir evidências de crenças e experiências escolares sobre frações e dificuldades com esse conteúdo. Em outras palavras, embora crenças e experiências escolares de Matheus e Rosa tenham sido evidenciadas, como também erros na resolução das questões sobre frações, não foi possível produzir evidências de que tivessem alguma dificuldade em lidar com as frações. Por esse motivo, não se tornaram casos a serem estudados em profundidade.

CAPÍTULO III
ANÁLISE E DISCUSSÃO DAS CRENÇAS E DAS RECORDAÇÕES DE EXPERIÊNCIAS VIVIDAS PELOS ALUNOS

Neste capítulo, apresento a categorização das crenças dos alunos acerca das frações, bem como as recordações de suas experiências vividas sobre o ensino e aprendizagem desse conteúdo na escolarização básica.

1 Crenças dos alunos acerca das frações

Como dito no capítulo anterior, a categorização das crenças foi elaborada a partir dos dados produzidos pelos oito alunos, Matheus, Eloisa, Rosa, Eva, Tiago, Renato, Lucas e Walter, que participaram ou da primeira fase de pesquisa, ou das duas fases. Mais precisamente, baseamos tal categorização em depoimentos desses alunos concedidos nas entrevistas E_1, E_2 e E_3. Como a segunda fase de pesquisa visou dar continuidade à recolha dos dados da primeira fase (que foi interrompida em virtude de estágio doutoral de seis meses realizado fora do País), e como não houve alteração significativa das categorias de crenças na segunda fase, achei não ser necessário apresentar tais depoimentos explicitando em qual fase ocorreram. Isso não quer dizer que o contexto no qual se deram tais depoimentos não tenha sido mencionado. Em alguns casos, turnos de falas ocorridos em contextos distintos (por exemplo, entrevistas E_2 e E_3) foram agrupados num mesmo depoimento quando se avaliou que o depoente fazia menção a um mesmo assunto.

Outro esclarecimento diz respeito ao aluno Lucas, que participou somente da primeira fase de pesquisa e que se mostrou receoso em conversar sobre suas respostas ao questionário sobre frações (QF_1). Nessa fase, ele foi o último aluno a ser entrevistado em uma única entrevista, na qual pretendíamos conversar sobre suas respostas ao questionário sobre crenças (QC) e ao questionário $QF_{1.}$ Entretanto, quando iniciei as perguntas a Lucas, percebi que ele sentia uma grande necessidade de falar a respeito de sua história pessoal e, principalmente, dos motivos que o levaram a escolher a profissão de professor. Tendo em vista meu constrangimento em interrompê-lo para perguntar-lhe sobre outras questões, a entrevista com Lucas não ocorreu da forma como eu havia previsto. Por esse motivo, alguns posicionamentos dele em relação às afirmações do questionário QC não foram esclarecidos e não constam da discussão desta seção.

Dito isso, passo à descrição e ilustração das categorias de crenças identificadas.

a. Fração como um processo, como um número que se resolve, como divisão (ação) (C1)

Esta categoria abarca a ideia de que, diante de uma fração, deve existir, necessariamente, uma ação sobre ela, qual seja, dividir o numerador pelo denominador ou dividir uma figura em partes iguais e considerar algumas dessas partes.

Por exemplo, num diálogo com os alunos em que a conversa girou em torno da presença das frações no dia a dia deles, alguns disseram como percebiam uma fração.

> "**Eloisa -** Acho que muito esporádico [...] que fração é uma divisão de partes, tá começando a entrar [...] fração é uma parte de um inteiro. É uma parte de algo, de qualquer coisa, que eu quiser trabalhar eu consigo uma fração daquilo, eu consigo uma parte, eu consigo separar, né, separar... partes iguais."[20]
>
> "**Rosa -** Em tudo que a gente for ver sempre tem uma fraçãozinha que a gente tá tentando resolver."
>
> "**Walter -** Eu não percebo [as frações no meu dia a dia], mas a partir do momento em que ela aparece, por exemplo 4 sobre 2, rapidinho eu dou um jeito disso virar 2 logo e se não tiver jeito [ergue os ombros], tenho que me virar... mas é muito difícil aparecer."

Tiago manifestou sua percepção acerca de fração enquanto esclarecia na entrevista E_3 a solução de uma das questões do questionário QF_2:

> "**Tiago -** A fração é a divisão de dois números inteiros."

Que a parte-todo ou a divisão do numerador pelo denominador é uma interpretação natural para fração não há a menor dúvida. O interessante nas falas, acima, é a ênfase com que Eloisa, Rosa, Walter e Tiago dão a essa interpretação em detrimento de outras; como se acreditassem que ela é 'a' única.

Tal ênfase é compartilhada, também, por Eva, Matheus e Renato. De fato, quando perguntei em uma entrevista o que significava fração para eles, Eva, Matheus e Renato

[20] Nas transcrições desta e das demais falas dos alunos não se levou em consideração a correção linguística. Tal se deu com o propósito de conservar a espontaneidade do falar de cada um dos entrevistados.

responderam o seguinte.

> “**Eva -** Fração, pra mim, é divisão. Já tô dividindo numerador, denominador.”
>
> “**Matheus -** É aquilo que eu acho que eu falei né, uma fração ela é sempre uma parte de alguma coisa. Se é parte, foi dividido. Então, eu acho que toda fração obviamente é uma divisão, que é uma parte, um objeto fracionado, alguma coisa assim, então acho que sim, essa questão se pensar um dividido pelo outro, acho que é isso, essa é a ideia correta. Sempre que aparece uma fração é o numerador dividido pelo denominador, né, sempre uma divisão.”
>
> “**Renato -** É uma divisão, divide o de cima pelo de baixo. Às vezes, igual no começo, quando vai ensinar fração pega o bolo divide, aí um quarto. [...] eu acho que é uma divisão.”

De todos os depoimentos acima, as falas de Walter e de Eva são as mais enfáticas ao sugerir que o traço que divide uma fração entre numeradores e denominadores é mais do que uma mera representação simbólica de divisão; é um comando que deve ser *obedecido* imediatamente ao aparecer uma fração.

No caso de Matheus, vemos que a interpretação de fração como parte-todo ou divisão do numerador pelo denominador, para ele, é ‘a’ correta, uma verdade que ele toma para si, sugerindo que, havendo outras interpretações, elas não seriam corretas para expressar o conceito de fração.

b. <u>Fração como (não) resposta à um problema (C2)</u>

Essa categoria sintetiza um posicionamento dos alunos diante da resposta de um problema ser uma fração. Tais posicionamentos podem ser identificados nas falas dos alunos Renato e Walter quando responderam à minha pergunta: por que você marcou no questionário QC que fica em dúvida quando o resultado de um problema é um número fracionário (fração)?

> “**Renato -** Eu não sabia que o lado de um triângulo poderia dar em fração, então eu fiz, o exercício era avaliativo, valendo cinco pontos, eu fiz, deixei a resposta mas já saí sabendo que tava errado, achando que tava errado, só que quando eu fui ver tava certo. [...] Não sei, número inteiro dá mais segurança.

> “**Walter -** Aconteceu isso até numa prova da professora Laura. Sei que a resposta deu 4/3, com isso eu fiz a questão quatro vezes e deu 4/3, eu apaguei e deixei como errada, porque, pra mim, não podia ter dado fração, eu perdi a questão por ela ter dado 4/3 e tava certo, só que eu não acreditei que era 4/3, eu apaguei e deixei tudo errado, deixei sem fazer, perdi a questão por causa da resposta em fração, porque, pra mim, uma resposta nunca pode..., pra mim, seria um número inteiro e acabou.”

Nos depoimentos acima, os alunos referem-se a um exercício avaliativo que fizeram na disciplina fundamentos de geometria plana, em que deveriam encontrar a medida do lado de um triângulo. Renato e Walter declaram que as dúvidas que tiveram em relação à resposta parecem estar ancoradas em uma verdade que ambos mantêm, segundo a qual, a medida do lado de um triângulo não pode ser uma fração. Diante dessa crença, esses alunos tomam decisões diferentes: Renato decide deixar registrada a resposta 4/3, ainda que convicto de que ela estava errada. Já Walter encontra 4/3 como resposta e, na convicção de que também estava errada, apaga tudo o que havia feito, deixando a questão em branco.

Os depoimentos de Renato e Walter mostram, de maneira clara, como uma crença em relação às frações pode influenciar tomadas de decisões, por parte dos alunos, em situações em que eles têm que lidar ou operar com esse conteúdo. O interessante, nesses depoimentos, é que a crença de que a medida dos lados de um triângulo não pode ser uma fração parece ser mais forte (no sentido de prevalecer sobre) do que a crença que eles revelaram acerca de uma fração ser uma divisão. Se Renato e Walter tivessem sido guiados por essa última, dividiriam quatro por três encontrando um número decimal que, talvez, fizesse mais sentido para eles aceitarem como medida de um lado de um triângulo.

No questionário sobre crenças, Eva, também, registrou que uma fração não pode ser resposta a um problema. Quando lhe perguntei o porquê desse registro, ela declarou que, quando isso ocorria, sempre transformava a fração em número decimal. Após discutirmos a representação decimal de uma fração, perguntei-lhe se ela ainda ficava em dúvida quando a resposta de um problema era uma fração. Ela respondeu:

> “**Eva -** Fico. Eu já transformo aquela fração em número decimal.”

A resposta de Eva indica que, mesmo tendo concordado sobre o fato de que uma fração tem representação decimal, ela mantém a crença ou toma como verdade para si que a resposta a um problema não pode ser dada na forma de fração.

Essa crença é, também, compartilhada por Eloisa no questionário sobre crenças. Quando lhe pedi esclarecimento sobre a questão, ela deu o seguinte depoimento.

> "**Eloisa -** Quando alguma resposta dava fracionária, a gente [pensava ou dizia] "não, essa resposta tá errada". Ou mesmo no colégio também: "não, essa resposta nossa tá errada". Ah não, mas tinha que dar um número inteiro. Por que não deu um número inteiro? Fração é sempre meio esquisito. Nó, deu fração, será que é isso mesmo? Aí depois, quando dá essa quebra, o psicológico abala."

As falas de Eloisa e de Walter mostram que a crença que sustentam sobre a resposta de problemas não poder ser uma fração pode conter um elemento a mais, por exemplo, do que a crença de Eva: ambos explicitam, ainda que em situações diferentes, que a resposta tem que ser um número inteiro.

Para Matheus e Rosa, o fato de a resposta de um problema ser uma fração sempre causou estranhamento e já foi motivo de rever a questão ou conferi-la com os colegas.

> "**Matheus -** Já desconfiei bastante, na hora que dava fração eu desconfiava, será que é isto mesmo? E aí eu fazia de novo."
>
> "**Rosa -** Dependendo mesmo da resposta, a minha maior dúvida é que, por mais que esteja certo, você vai conferir com o colega do lado ou todo mundo, vamos ver como ficou, aí você fala assim: o meu deu 1/3, não o meu deu ¾ , aí você fica será que eu errei, será que não errei, eu acho que esse é o mais complicado mesmo. Fração é um número... Fração é um número...deu fração. Então, essa dúvida eu não tenho mais não."

Na fala de Matheus, acima, vemos que ele usa os verbos no passado, sugerindo que hoje, talvez, essa dúvida já não exista mais. No caso de Rosa, ela declara que não tem mais essa dúvida, o que parece não ser o caso de Tiago:

> "**Tiago -** Eu fico em dúvida até hoje quando a resposta dá fração. A gente tá acostumado com número inteiro, bonitinho."

Isso é curioso, pois, mesmo tendo a oportunidade de discutir essa questão em entrevista comigo, Tiago parece não ter ficado convencido de que uma resposta a um problema pode ser uma fração. E dá a dica de que tal crença é resistente devido à rotina de se trabalhar com números inteiros.

Finalmente, nos casos de Eloisa e Renato, vemos que, além de eles mostrarem acreditar que a resposta de um problema não pode mesmo ser uma fração, seus depoimentos sugerem que crenças como essas podem envolver o aluno em uma circunstância emocional capaz de comprometer seu desempenho ao lidar com esse conteúdo. De fato, ao Renato dizer que *número inteiro dá mais segurança* e ao Eloisa declarar que *o psicológico abala*, eles dão indícios da presença do que está sendo considerado neste trabalho como dificuldade.

<u>c. Ensino e aprendizagem de frações (C3)</u>

Essa categoria assemelha-se às categorias das crenças sobre o ensino e aprendizagem da matemática identificadas por McLeod (1992) e Chacón (2003a). A diferença é, porém, que, aqui, se trata do conteúdo específico *frações*. Com essa categoria, procurei sintetizar as crenças dos estudantes acerca do ensino e aprendizagem de frações e de suas operações.

Para nomear essa categoria como ensino e aprendizagem tomei como base declarações em que os alunos expressam o que eles acreditam ser requisitos para lidar com as frações e como eles acreditam que esses números devem ser ensinados na escola. Os depoimentos abaixo referem-se às respostas dos alunos à seguinte pergunta: Já ouvi muitos alunos dizerem que fração é um bicho de sete cabeças, você concorda com isso?

> "**Tiago -** Fração não é um bicho de sete cabeças, é difícil, pra alguns... É o que eu falei difícil pra uns e não difícil pra outros, mas exige mais raciocínio, pensamento ponderado pra resolver, não é assim igual outras coisas na matemática pra saber operar fração tem que ter excelência nas operações adição, multiplicação, divisão."
>
> "**Eloisa -** É mais difícil de assimilar, no meu ponto de vista, mas se você se dedica...,vai."

As falas acima se assemelham à fala da professora Joscelyn, citada na apresentação da pesquisa de Aguirre (2009), no sentido de que Tiago e Eloisa parecem manter a crença de que o conteúdo frações (como a crença da professora Joscelyn no caso da álgebra) é especial em relação a outros conteúdos da matemática. Para Tiago, por exemplo, lidar com frações, ao contrário de outros tópicos da disciplina, exige *mais raciocínio*, *pensamento ponderado* e *excelência nas operações*. Para Eloisa, o conteúdo frações é *mais difícil*, o que exige maior dedicação do aluno.

O uso de material concreto foi citado por alguns alunos como um recurso importante no ensino e aprendizagem de frações. O que os alunos chamam de material concreto são objetos tangíveis que podem ser manipulados com a finalidade de dar significado às frações. Por exemplo, ao ser perguntado porque respondeu no questionário sobre crenças que não vai ensinar frações do jeito que aprendeu na escola, Renato declarou:

> "**Renato -** Eu acho muito simplório você pegar uma circunferência e dividir em quatro, tem que trazer a realidade pra sala. Eu acredito no condicionamento e no agrado. Pegar um saco de pirulito e dividir..."

Renato sugere que a maneira pela qual aprendeu frações é simplória. Ele acredita que vincular o aprendizado de frações a situações de estímulo (condicionamento) e resposta (agrado), relacionadas ao dia a dia, como a divisão de guloseimas, seria mais prazerosa e, portanto, mais significativa. Em outras palavras, para Renato, o aluno deve ser estimulado a resolver determinada tarefa porque sabe que, ao final, será recompensado.

A manipulação de material concreto parece fundamental e presta-se a significar esses números na vida, como pode ser observado na fala de Eloisa, quando solicitei em entrevista que ela se expressasse em relação a como pensa em ensinar esse conteúdo na escola.

> "**Eloisa -** Eu vou tentar detalhar o máximo possível, com demonstração, recortar alguma coisa, os alunos montarem, pra ser nítido na vida deles."

Como Renato e Eloisa, Matheus também acredita que o ensino de frações deve abordar questões mais relacionadas ao dia a dia. Ao ser perguntado sobre o porquê de ele ter declarado no questionário QC que não ensinaria frações como aprendeu na escola, ele esclareceu:

> "**Matheus -** Eu acho que tem formas melhores de aprender. Com questões mais concretas, essa questão da pizza e tal acho que essa matéria (frações) dá pra você levar mais para o dia a dia do aluno. Eu ensinaria dessa forma."

As declarações de Renato, Eloisa e Matheus sugerem que o ensino de frações parece requerer uma atenção especial do professor, no que diz respeito ao uso de materiais concretos para que esse conteúdo tenha sentido na vida dos alunos. Renato, Eloisa e Matheus, ao destacarem formas alternativas de ensinar, parecem estabelecer uma comparação com a forma como aprenderam. E, ao fazerem isso, dão indícios de uma origem para as crenças relativas ao ensino e aprendizagem de frações, no seguinte sentido: se os alunos não tiveram uma experiência positiva com as frações e percebem uma lacuna no entendimento desse conteúdo, tendem a acreditar que outra maneira de ensinar, por exemplo, por meio de situações vinculadas ao dia a dia ou usando-se material concreto, diferente daquela com a qual tiveram contato, poderá ser mais eficiente.

Para Lucas, lidar com frações implica ter um *dom*, revelando a crença de que, mais especial do que o conteúdo, uma pessoa para ensinar/explicar frações é que tem que ser *especial*. Além do dom, para Lucas, o professor também teria que ter o conhecimento daquilo que vai ensinar/explicar, no caso, as frações. Em um trecho de seu depoimento, dado em entrevista (E_1), quando falava um pouco sobre sua experiência com o ensino de frações, Lucas afirma:

> "**Lucas -** E com fração se a pessoa não tiver o dom, o conhecimento dela pra explicar a pessoa nem procura mexer, é onde eu acho que tem a dificuldade em fração."

Lucas ainda dá uma dica de outra possível origem para as crenças dos alunos sobre o ensino e aprendizagem de frações: para ele, os próprios professores têm dificuldade com esse conteúdo, o que faz com ele seja explorado de maneira precária e, muitas vezes, fique inacabado.

> "**Lucas -** Acho que até os próprios professores mesmo, tanto do ensino fundamental quanto do médio... Acho que os próprios professores têm dificuldades com frações eles cortam elas, se passar, passa só o básico e pula de matéria, não vou mexer com fração se não vou acabar me perdendo aqui."

Quando perguntei a Walter por que ele discordou da afirmação *O meu conhecimento sobre frações é suficiente para que eu consiga resolver problemas com esses números* no questionário QC, ele explicou:

> "**Walter -** Pela questão de nunca ter tido professores bons, nó, fulano, é o melhor professor de matemática, eu nunca tive esse professor de matemática que me ensinou do jeito que eu precisava de aprender a fração. Hoje, tenho que me desdobrar pra aprender a tal da fração."

Walter atribui sua falta de habilidade com as frações à ausência de um bom professor de matemática que lhe ensinasse o conteúdo de maneira satisfatória, o que pode ser considerado uma outra evidência para a origem das crenças dos alunos sobre o ensino e aprendizagem de frações.

Diante do exposto, ao falarem sobre suas crenças acerca do ensino e aprendizagem de frações, os alunos-participantes se remetem a algumas de suas experiências no ensino básico, dando indícios de que possíveis origens dessas crenças são advindas do modo como o ensino de frações foi trabalhado e/ou de característica pessoal do professor (ser ou não ser um bom professor).

d. Autoeficácia negativa (C4)

As crenças de autoeficácia referem-se às crenças do indivíduo sobre o seu próprio potencial. De acordo com Bandura (1994, p. 2), "[...] a crença de autoeficácia é a crença na própria capacidade de organizar e executar cursos de ações requeridas para produzir determinadas realizações".

É possível identificar nos depoimentos dos alunos como eles percebem o próprio potencial para lidar com as frações. Eva, por exemplo, falou sobre sua predisposição para lidar com frações ao ser solicitada a explicar por que concordou com a seguinte afirmação do questionário de crenças (QC): *Quando me pedem para resolver problemas com números fracionários, fico nervoso (a).*

> "**Eva -** É, eu tenho um bloqueio com isso..."
>
> **Pesquisadora -** Você acha que tem?
>
> "**Eva -** Eu tenho. Eu não acho não, eu tenho. A matemática é assim, tem umas coisas que você tem mais facilidades, outras não. Eu não sou muito chegada a fração, nunca fui bem (a aluna estava muito inquieta)."
>
> **Pesquisadora -** Mas você gosta de matemática...
>
> "**Eva -** Gosto, mas não gosto de fração."

Walter demonstrou como vê seu potencial para lidar com as frações quando pedi que usasse algumas expressões para dar pistas a alguém da palavra secreta *fração* em suposto jogo de adivinhação. O aluno disse:

> "**Walter -** Não tenho vergonha de falar que é, porque é, complicada, aprende-se nas séries iniciais da escola, o resultado nem sempre vai dar um número inteiro, mais nada, não sei muita coisa de fração, não sei muita coisa de fração."

Bandura (1994) argumenta que as crenças de autoeficácia influenciam a maneira como as pessoas se sentem, pensam, se motivam e se comportam, sendo que essas crenças produzem esses efeitos diversos, por meio de quatro processos principais: cognitivos, motivacionais, afetivos e de seleção[21]. Em todos esses processos, a crença de autoeficácia negativa pode gerar uma expectativa mais baixa em relação ao desempenho. Isso parece ocorrer com Eva, quando ela diz que nunca foi bem com frações, que não gosta desse conteúdo e que tem bloqueio (dificuldade). Também, parece ocorrer com Walter quando ele declara que não sabe muita coisa de fração e com Renato quando afirma que não domina o conteúdo suficiente para ensinar.

No caso de Lucas, enquanto discutíamos uma das questões do questionário QF_1, ele me interrompeu e disse:

> "**Lucas -** Comecei a dar fração para os alunos, aí depois eu pensei: gente o que é que eu estou fazendo? Vai eu trabalhar com fração e aí eu falei: gente eu tô me embolando todo aqui... por que que eu fui pegar fração? Penso hoje dando aula desse jeito, tô agarrando demais nisso aqui, não vou passar isso não porque não domino, vou passar só até aqui, até onde eu sei, daqui pra lá eu não vou mexer."

Para Bandura (1994), assim como predispor o indivíduo a se envolver de maneira mais efetiva em tarefas, demonstrando boa motivação, crenças de autoeficácia podem produzir ansiedade:

> [...] pessoas que acreditam que podem exercer controle sobre potenciais ameaças não evocam pensamentos receosos e, portanto, não são perturbadas pelos mesmos, ao contrário daquelas que acreditam que não conseguem gerir as ameaças e sentem alto grau de ansiedade (BANDURA, 1994, p. 5).

As ameaças às quais Bandura (1994) se refere podem ser exemplificadas na fala a seguir, em que Tiago parece sentir-se aflito diante das operações com as frações. Ele relatou em entrevista.

---

[21] De julgamento sobre o enfrentamento ou não de tarefas.

> “**Tiago -** Quando eu vejo aquela fração com duas, três frações, aquele tanto de cálculo,... Meu Deus como é que eu resolvo isso? Me dá pane só de olhar.”

Tiago revela em seu depoimento um grau de desconforto, uma dificuldade que ele define como *pane* ao lidar com frações.

A crença de autoeficácia regula os processos de seleção, na medida em que controla a escolha do aluno sobre o enfrentamento ou não de tarefas, com base na percepção sobre a sua capacidade de obtenção de êxito. Algo na direção que disse ainda há pouco sobre o fato de Renato e Walter terem tomado decisões distintas em relação a registrarem a resposta 4/3 como medida do lado de um triângulo. Essa regulação pode ser percebida, também, na fala de Lucas, quando ele disse:

> “**Lucas -** Não vou passar isso não porque não domino, vou passar só até aqui, até onde eu sei, daqui pra lá eu não vou mexer.”

O quadro 6, a seguir, sintetiza as crenças dos alunos acerca das frações produzidas nesta investigação.

QUADRO 6
Síntese das crenças dos alunos acerca das frações

Categoria	Código		Exemplos
Fração como um processo, como um número que se resolve, como divisão (ação)	C1		"Fração é uma parte de um inteiro. É uma parte de algo, de qualquer coisa [...]" "É uma divisão, divide o de cima pelo de baixo"
Fração como (não) resposta à um problema	C2		"Eu não sabia que o lado de um triângulo poderia dar em fração" "Eu fico em dúvida até hoje quando a resposta dá fração [...]"
Ensino e aprendizagem de frações	C3	O ensino e a aprendizagem de frações exigem habilidades diferentes – tanto dos alunos quanto dos professores – em relação aos demais conteúdos	"Fração [...] exige mais raciocínio, pensamento ponderado [...]" "E com fração se a pessoa não tiver o dom [...]"
		O ensino de frações pode ser facilitado pelo uso de materiais concretos	"Eu acredito no condicionamento e no agrado. Pegar um saco de pirulito e dividir [...]"
		O conteúdo frações deve ser ensinado levando-se em conta o dia a dia do aluno	"Acho que esta matéria (frações) dá pra você levar mais para o dia a dia do aluno"
Autoeficácia negativa	C4		"Eu [...] nunca fui bem." "Com fração eu agarro [...] não vou passar isso não porque não domino"

Fonte: Elaborado pela autora da tese, 2013.

Considerando os tipos de crenças elencados por Rokeach (1981), podemos dizer que as crenças evidenciadas nesta investigação aproximam-se da classificação de crenças do Tipo D (crenças derivadas), com exceção da crença C4 (autoeficácia negativa) que pode ser classificada como crença do Tipo B (crença primitiva). No caso das crenças derivadas, a importância atribuída ao conteúdo *frações*, por parte dos alunos, por exemplo, parece estar relacionada a uma autoridade como o currículo, a escola, o professor, ou mesmo, o pesquisador, originando-se mais de uma relação de confiança (muitas vezes tácita) entre a pessoa que as mantém e essas autoridades. Ainda, no caso das crenças C1 e C2, elas poderiam ser pensadas como provenientes das crenças dos professores no sentido de que o modo de ensino de um professor em relação às frações seria guiado, dentre outras, por suas próprias crenças em relação a esse conteúdo. Para as crenças C3, uma hipótese seria que elas seriam derivadas das crenças C1 e C2, tendo em vista que as alternativas de ensino que os alunos propõem para as frações se justificariam em termos da consciência que eles mostraram ter sobre a limitação de seus conhecimentos acerca desse conteúdo.

Já, em relação às crenças de autoeficácia negativa, podemos dizer que se aproximam das crenças primitivas que são crenças aprendidas, também, em contato com o objeto, mas sua manutenção não depende da aceitação de outras pessoas. As crenças de auto-eficácia evidenciadas nesta pesquisa mostram um resultado similar ao da pesquisa de Aguirre (2009). Segundo os depoimentos dos alunos que mostraram ter essa crença, a capacidade deles de aprender frações parece não dever, apenas, a um problema afetivo-cognitivo, mas, sobretudo, a uma questão do conteúdo *frações*, de um domínio específico – os números racionais – sobre a qual eles parecem acreditar que há algo de especial, de problemático em relação a outros tópicos da disciplina.

Por outro lado, esta tese mostrou, em capítulo anterior, o quão complexa é a apropriação dos diversos aspectos conceituais relacionados aos números racionais. Vimos que vários educadores matemáticos chamam a atenção para a importância de os alunos vivenciarem experiências adequadas que promovam a compreensão das múltiplas interpretações das frações (KIEREN, 1976; BEHR *et al.*,1992; CONFREY e HAREL, 1994). Talvez, os alunos não tenham ciência dessas interpretações ou, se a têm, podem não vê-las articuladas. E, ao se depararem com suas aplicações, constatam que lhes falta conhecimento/habilidade para lidar com as frações em determinadas situações, reforçando a hipótese de que as crenças de autoeficácia, aqui discutidas, seriam provenientes dessa constatação.

A respeito do ensino dos números racionais, Soares, Ferreira e Moreira (1998) propõem que

> [...] o professor deve compreender profundamente o significado da Matemática que está sendo proposta à criança. Não se trata apenas de absorver informações mas sobretudo de desenvolver relações, estabelecer novas formas de olhar o mundo: um todo que é uno e ao mesmo tempo fracionável, quantidades absolutas que são relativizadas, etc. Como em todo processo significativo de desenvolvimento, expandem-se as raízes que vinculam a criança ao mundo e crescem as asas que lhe permitem maior flexibilidade nas relações com esse mundo (SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1998, p.13).

A citação acima ressalta a importância da conscientização do professor sobre o seu papel como educador matemático. Em algumas declarações dos alunos acerca do ensino e aprendizagem das frações parece implícita a ausência de um professor que atue nos moldes que Soares, Ferreira e Moreira. (1998) propõem.

Para Shulman (1986), além de compreender o conteúdo matemático e seu significado, o professor deve saber: como os alunos aprendem, o conhecimento prévio dos alunos sobre o assunto, estratégias que possibilitem o entendimento. De acordo com Shulman (1986), o conhecimento pedagógico de conteúdo (PCK[22]) vai além do conhecimento específico do conteúdo, incluindo o conhecimento do professor para o ensino. Por exemplo, no meu entendimento do PCK, para ensinar soma de frações que não têm o mesmo denominador, além de conhecer sobre o procedimento de reduzir as frações ao mesmo denominador (usando o Mínimo Múltiplo Comum - mmc), o professor deve conhecer as frações equivalentes e valer-se desse conhecimento para esclarecer seus alunos sobre a ideia subjacente ao procedimento do mmc. É importante que essa ideia seja eficaz para o ensino da soma de frações, nesse caso.

Na seção seguinte apresento os relatos dos alunos acerca de suas experiências escolares com as frações com o objetivo de aproximar-me das origens de suas crenças.

2 Recordações escolares dos alunos sobre as frações

As declarações dos alunos acerca de suas recordações escolares sobre suas experiências com frações no ensino básico são importantes porque se remetem ao modo como esse conteúdo foi ministrado e aprendido. Ao reconstituírem essas experiências, os alunos contribuem para uma compreensão das possíveis origens das crenças desveladas na seção anterior.

Por exemplo, enquanto esclareciam por que desconfiavam de uma resposta a um problema ser uma fração, Eva e Eloisa revelaram supostas preferências do professor por determinados conteúdos da matemática:

> "**Eva -** O professor ele quer o mais fácil. Numa sala de quinta série o professor vai dar fração, ou número inteiro? Claro que é o número inteiro, o mais fácil, sempre foi assim. Eu não lembro de ter trabalhado muito com fração, muito pouco."

> "**Eloisa -** A gente é treinado tanto a encontrar número inteiro."

[22] Em inglês: *Pedagogic Content Knowledge*

As falas de ambas as alunas indicam, fortemente, que os professores tendem a privilegiar o estudo dos números inteiros em detrimento do estudo das frações. Tal opção do professor, segundo Eva, estaria relacionada à maior facilidade do próprio professor em lidar com números inteiros do que com frações, conforme observado, também, por Lucas em um de seus depoimentos na seção anterior. Nesse mesmo sentido, quando Eloisa disse que os alunos são treinados a encontrar número inteiro, pode estar subentendida em sua fala a preferência do professor por lidar com esses números.

Por outro lado, o ensino tradicional, baseado em modelos e repetições, também é explicitado como predominante nas ações do professor, segundo outro relato de Eloisa, no qual recordou sua vivência escolar com as frações.

> "**Eloisa -** Foi bem tradicional, a questão do modelo e faça igual e eu tive uma birra porque a gente fazia, fazia, fazia, aquele tanto de exercício e na hora da prova não caía, caía diferente e eu não sabia fazer diferente, eu só sabia fazer igual estava no livro."

Não obstante, na continuidade de seu relato, Eloisa mostra ter dúvidas quanto à responsabilidade do professor no processo de ensino e aprendizagem.

> "**Eloisa -** Mas eu não sei nem se eu posso culpar o professor ou eu, assim, essa questão de correr atrás."

Continuando um depoimento mostrado na seção anterior, Lucas foi enfático ao compartilhar com Eva e Eloisa supostas escolhas do professor quando ministra o conteúdo frações.

> "**Lucas -** Acho que até os próprios professores mesmo, tanto do Ensino Fundamental quanto do Médio, acho que os próprios professores têm dificuldades com frações. Eles cortam elas, se passar, passa só o básico e pula de matéria, não vou mexer com fração senão vou acabar me perdendo aqui."

No depoimento acima, não há evidência de que Lucas se referia a seus professores da escola básica. Ao final da entrevista com Lucas, não ficou claro se as escolhas de seus professores podem tê-lo influenciado em sua própria escolha de não trabalhar muito frações com seus alunos porque não dominava o conteúdo (ficava *agarrado*), ou se, pelo fato de ele não dominar o conteúdo, acreditava que o mesmo ocorria com outros professores do ensino básico.

Alguns alunos detalharam como aprenderam frações e ressaltaram as opções metodológicas do professor, como é possível observar nos seguintes depoimentos.

> "**Renato -** Eu aprendi com a circunferência foi como eu aprendi, eu não consegui assimilar."
>
> "**Tiago -** Foi mais ou menos aquele basicão, tenho uma pizza, divide ela em quatro partes, uma parte é um quarto, duas são dois quartos, três são três quartos, só basicão mesmo..."
>
> "**Matheus -** Na escola a gente aprende mais com aquelas barras. Acho que é convenção ou até alguma coisa assim. Faz a barra e marque acho que é questão do ensino mesmo, acho que é questão mais mecânica mesmo."

Nunes e Bryant (1997, p. 191) destacam os perigos envolvidos em apresentar frações às crianças na forma parte-todo.

> Uma forma comum de apresentar as crianças às frações é mostrar-lhes todos divididos em partes, alguns dos quais distinguidos do resto, por exemplo, pintados. As crianças são informadas que o número total de partes é o denominador, então o numero de partes pintadas é o numerador. Essa introdução, junto com alguma instrução sobre algumas poucas regras para calcular, permite que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre frações.

Walter recordou sua experiência com as frações no ensino básico destacando sua relação difícil com o professor, lembrando que suas solicitações não eram atendidas e as dúvidas persistiam:

> "**Walter -** A gente perguntava assim: professor, eu não entendi. Aí ele falava: tá, daqui a pouco eu te explico, só que esse daqui a pouco nunca chegava. Era aquele adestramento, só que ia cair na prova eu estudava, eu aprendi o que eu sei hoje, que não é nada, eu não sei fazer uma multiplicação em fração, se me der um problema com fração eu vou pegar um livro e vou lembrar o que é, porque eu não sei o que é, se você me perguntar eu não sei não, eu não tive experiências boas com as frações."

Rosa também não demonstrou uma recordação positiva em relação à sua experiência com as frações na escola.

> "**Rosa -** Da forma que eu aprendi acho que foi muito complicado, frações eu achei assim muito empurrado, com a barriga mesmo."

No depoimento, acima, Rosa considerou que esse conteúdo não foi ensinado satisfatoriamente, sugerindo que seu(sua) professor(a) fez a escolha – empurrar com a barriga – a que Lucas se referiu anteriormente:

> "**Lucas -** Eles cortam elas, se passar, passa só o básico e pula de matéria, não vou mexer com fração senão vou acabar me perdendo aqui."

Os relatos dos oito alunos acerca das lembranças de suas experiências com as frações no ensino básico indicam insatisfação com a aprendizagem do conteúdo, ao mesmo tempo em que apontam para a pouca atenção que esse conteúdo recebeu dos professores na escola. Dizer que os professores preferiam ensinar números inteiros ou que não prosseguiam no ensino das frações porque não dominavam esse conteúdo sugere o risco de existência de um círculo vicioso: os professores não aprendem o conteúdo *frações* de maneira significativa e, portanto, não conseguem ensinar esse conteúdo de maneira satisfatória. Se não conseguem ensinar de maneira satisfatória, os alunos desses professores não aprendem o conteúdo *frações* de maneira significativa. Dentre esses alunos, alguns serão professores que não conseguirão ensinar a seus alunos o conteúdo *frações* de maneira satisfatória porque não aprenderam de maneira significativa e assim, por diante.

Do ponto de vista metodológico, a maioria dos depoimentos indica que o ensino de frações parece ter se centrado, principalmente, na partição de figuras que representam pizzas, barras de chocolate, bolo, barras etc., ou na divisão do numerador pelo denominador. Diante disso, os depoimentos expressam experiências limitadas dos alunos com as frações.

O quadro 7 sintetiza as experiências dos alunos com as frações no ensino básico.

QUADRO 7

Síntese de recordações das experiências vividas dos alunos com as frações no ensino básico

Experiências dos alunos com as frações no Ensino Básico relatadas a partir de suas recordações	
Experiências	Exemplos
Os professores preferiam ensinar números inteiros a frações	“O professor vai dar fração, ou número inteiro? Claro que é o número inteiro, o mais fácil, sempre foi assim. Eu não lembro de ter trabalhado muito com fração, muito pouco” (Eva) “A gente é treinado tanto a encontrar número inteiro” (Eloisa) “Frações eu achei assim muito empurrado, com a barriga mesmo” (Rosa)
O ensino de frações foi tradicional baseado em algoritmos, regras, repetições	“Foi bem tradicional, a questão do modelo e faça igual” (Eloisa) “Era aquele adestramento, só que ia cair na prova eu estudava” (Eloisa)
O ensino de frações foi básico	“Eu aprendi com a circunferência.” (Renato) “Foi mais ou menos aquele basicão tenho uma pizza, divide ela em quatro partes, uma parte é um quarto, só o basicão mesmo (Tiago)
	Na escola a gente aprende mais com aquelas barras, acho que é convenção ou até alguma coisa assim, faz a barra e marque” (Matheus)
O professor não esclarecia as dúvidas	“A gente perguntava assim: professor, eu não entendi. Aí ele falava: tá, daqui a pouco eu te explico, só que esse daqui a pouco nunca chegava” (Walter)

Fonte: Elaborado pela autora da tese, 2013.

A partir da análise e da interpretação realizadas até o momento, podemos já esboçar algumas considerações sobre as origens das crenças sobre frações dos alunos-participantes, bem como de suas dificuldades ao lidar com esse conteúdo. Os depoimentos desses alunos indicam que, tanto as crenças, quanto as dificuldades evidenciadas parecem mesmo se originar de suas experiências escolares com o conteúdo, notadamente, do modo de ensino a que foram submetidos na escola básica. Isso não quer dizer que outros cenários de vida desses alunos não possam ter contribuído para o desenvolvimento/reforço dessas crenças. No caso das crenças, uma vez disparado seu desenvolvimento, entra-se no círculo vicioso descrito anteriormente. No caso das dificuldades, sua manutenção poderia ser explicada conforme o ciclo ao qual se refere Chacón (2003a) na introdução desta tese.

Nos capítulos IV, V e VI a seguir, a análise de três estudos de caso dá continuidade à discussão acima.

Os estudos de casos de três dos cinco alunos que participaram das duas fases da pesquisa visam apresentar e discutir as crenças desses alunos em um domínio específico da matemática – números racionais, as possíveis origens dessas crenças e as dificuldades reveladas por cada aluno ao resolver as questões propostas nos dois questionários aplicados.

Em cada caso, as questões foram analisadas, levando-se em conta a crença de fração que pode ter norteado as ações de cada aluno no momento da resolução das questões. Assim, questões cujas soluções sugerem que uma mesma crença foi mobilizada foram analisadas em sequência e trianguladas com respostas a pedidos de esclarecimento em entrevistas, independentemente da ordem em que elas apareceram nos instrumentos. Todas as questões que os alunos acertaram ou erraram foram examinadas. Optei, porém, por comentar apenas aquelas que, no meu entender, poderiam contribuir para a elaboração de respostas às perguntas desta investigação.

Para estudos de casos considerei aprofundar-me nos casos de Eva, Eloisa e Tiago pelos motivos que descrevo a seguir. Como aludido, participaram inicialmente da pesquisa 21 alunos do primeiro período do Curso de Licenciatura em Matemática. Em seguida, apenas oito alunos concederam entrevistas, e, finalmente, cinco alunos participaram da segunda fase. Assim, a escolha dos casos foi feita considerando os alunos que participaram das duas fases da pesquisa e, dentre eles, aqueles cujos dados triangulados ofereceram uma resposta às questões desta investigação.

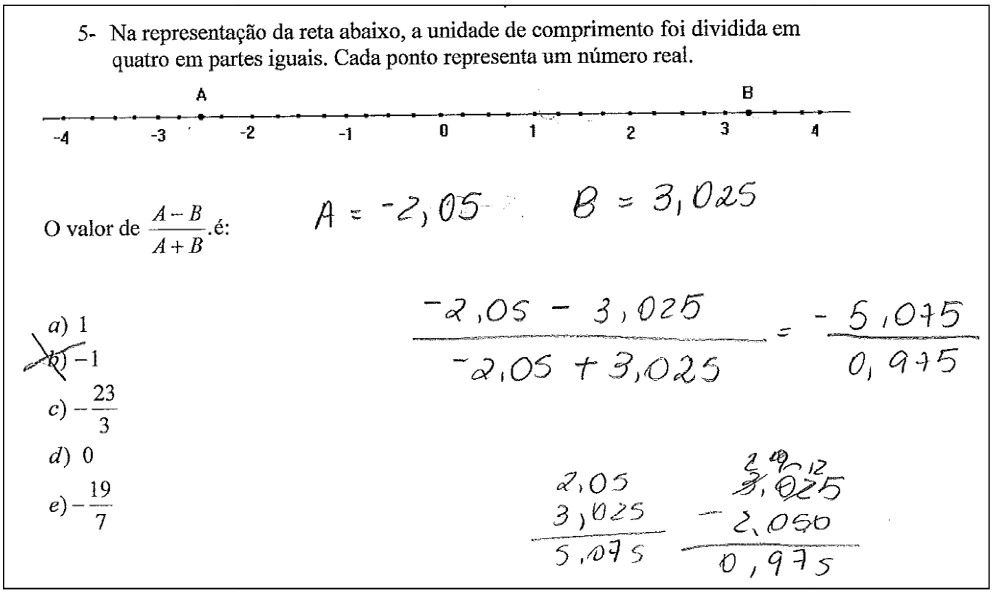
Dois dos cinco alunos – Matheus e Rosa – não indicaram manifestações de dificuldades ao trabalharem com frações, no sentido em que o termo dificuldade está sendo discutido nesta pesquisa. Matheus não manifestou qualquer sensação de entrave ou de obstáculo, que considero dificuldade, e errou apenas uma das 16 questões propostas. Rosa teve um aproveitamento abaixo do de Matheus, acertando três questões no questionário da primeira fase e seis questões no questionário da segunda fase. Como Matheus, Rosa, porém, não expressou qualquer sensação de embaraço que pudesse indicar uma dificuldade.

CAPÍTULO IV
ESTUDO DE CASO 1: EVA

Na primeira fase da pesquisa, Eva acertou três das cinco questões propostas sobre frações (lembrando que a sexta questão não foi avaliada). As questões que ela errou foram a 3 e a 5. Já, no questionário da segunda fase (QF_2), ela acertou duas questões completamente (questões Q1 e Q6), cinco questões parcialmente (questões Q5, Q6, Q7, Q8 e Q9) e errou três questões (questões Q2, Q3, Q4). Examinando as resoluções apresentadas por Eva nos dois questionários QF_1 e QF_2, bem como seus esclarecimentos nas entrevistas, foi possível inferir ou mesmo especular, em alguns casos, que certas crenças dessa aluna acerca das frações e certas experiências com esse conteúdo no ensino básico possam ter guiado suas ações ao resolver algumas dessas questões.

Na questão 5 proposta no questionário QF_1 (figura 20), Eva se equivocou ao considerar os pontos A como -2,05 e B como 3,025. O correto seria A: -2,5 e B: 3,25. Nesse caso, a aluna pode ter se confundido na escrita dos números, invertendo a posição do zero na parte decimal (escreveu -2,05, quando deveria ter escrito -2,50, e 3,025, quando deveria ter escrito 3,250), ou pensado que a parte decimal deveria ser precedida do algarismo 0. Por exemplo, como 0,5 representa 1/2 e 0,25 representa 1/4, pode ser que Eva tenha desconsiderado a vírgula e entendido 05 como a parte decimal de -2,5 e 025 como a parte decimal de 3,25. Após somar e subtrair corretamente os supostos valores de A e B, encontrando 5,075 e 0,975, respectivamente, Eva não mostrou registro de que tivesse efetuado a divisão solicitada pelo exercício, embora tenha marcado como resposta a opção b. Uma vez que as opções de resposta eram números inteiros ou frações e, não decimais, é possível que ela não tenha percebido isso, ou mesmo, que não tenha conseguido colocar os números decimais em forma de fração para efetuar a divisão solicitada – essa seria uma estratégia para se chegar a uma das opções oferecidas como resposta. Observando a opção marcada por Eva como resposta à divisão (-5,075 por 0,975), é possível, também, levantar a hipótese de que ela não tenha feito uma análise dos números envolvidos na divisão em termos de uma estimativa para o resultado da operação. Em outras palavras, ela pode não ter pensado que, se 0,975 está muito próximo de 1, a divisão de -5,075 por 0,975 estaria muito próxima de -5,075 e não de -1 como foi a resposta que escolheu.

Eva não registrou a intenção de trabalhar com a forma fracionária dos números A e B que estavam representados na reta.


5- Na representação da reta abaixo, a unidade de comprimento foi dividida em quatro em partes iguais. Cada ponto representa um número real.

O valor de $\frac{A-B}{A+B}$.é:

$A = -2,05 \quad B = 3,025$

$\frac{-2,05 - 3,025}{-2,05 + 3,025} = -\frac{5,075}{0,975}$

a) 1

b) -1

c) $-\frac{23}{3}$

d) 0

e) $-\frac{19}{7}$

$2,05 + 3,025 = 5,075$

$3,025 - 2,050 = 0,975$

Figura 20 - Solução de Eva para a questão 5 (QF_1)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

A preferência de Eva por lidar com os números decimais para representar frações na reta pode ser atribuída à familiaridade dos alunos em expressar medidas na forma de número decimal e, não, de frações. Entretanto, Eva manifesta dificuldade em operar com os números decimais. De fato, operar com esses números parece ser uma tarefa desconfortável para essa aluna, como ela disse sobre o que é uma fração na entrevista E_1.

> "**Eva -** Toda fração é uma divisão quando vem aquela questão de número decimal isso me incomoda. Eu tenho um bloqueio com isso."

As questões Q8 e Q9, QF_2 também trataram da localização de números racionais na reta. Eva acertou parcialmente a questão Q8, e a questão Q9 ela não resolveu. A questão Q8 solicitava a localização de três números racionais na reta, (figura 21).

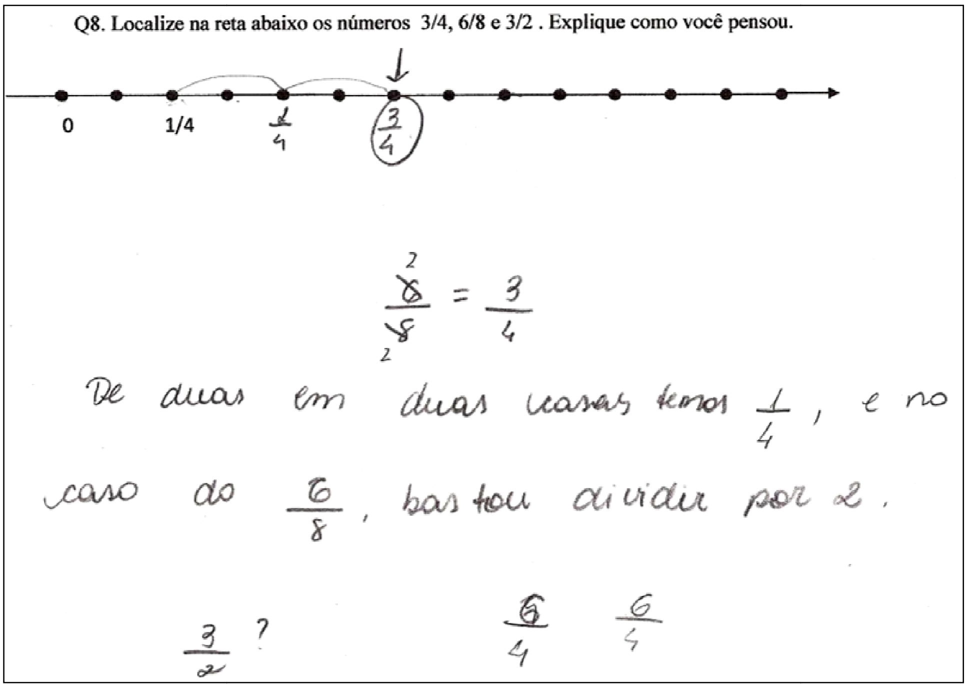


Figura 21 - Solução de Eva para a questão 8 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Os registros de Eva mostram que, para essa questão, ela optou por não trabalhar com decimais como o fez na questão 5 discutida acima. Isso é interessante, tendo em vista que se, por um lado, para ela, fração é divisão, por outro, fica incomodada (e até bloqueada) em transformar frações em decimais. Embora tenha conseguido localizar corretamente o número 3/4, ela não conseguiu localizar 3/2, indicando sua dúvida com o sinal de interrogação. Já 6/8, ela simplificou e, como esta é uma fração equivalente a 3/4, parece que Eva se deu por satisfeita quanto à já localização desse número na reta. Por que Eva não conseguiu localizar 3/2? Pelo registro que fez, a partir de uma contagem, foi possível a ela localizar os múltiplos de 1/4: 2/4 e 3/4. Ao registrar duas vezes a fração 6/4, ela sugere que tenha procurado uma fração equivalente a 3/2, com denominador 4. Contudo, não prosseguiu na contagem, o que a ajudaria a localizar 3/2. Na entrevista E_2, quando pedi esclarecimentos sobre como resolveu essa questão, Eva mostrou ter dúvidas, o que pode explicar o porquê de não ter prosseguido na contagem.

> "**Eva -** Sacando mesmo. Não imaginei: ah, isso aqui. Não, eu acho que eu pensei, sim. Se daqui pra cá é um quarto... Não, eu pensei sim, mas eu achei que tava errado."

A solução apresentada por Eva para a questão Q9 mostra uma iniciativa diferente da que ela teve na questão Q8, (figura 22).

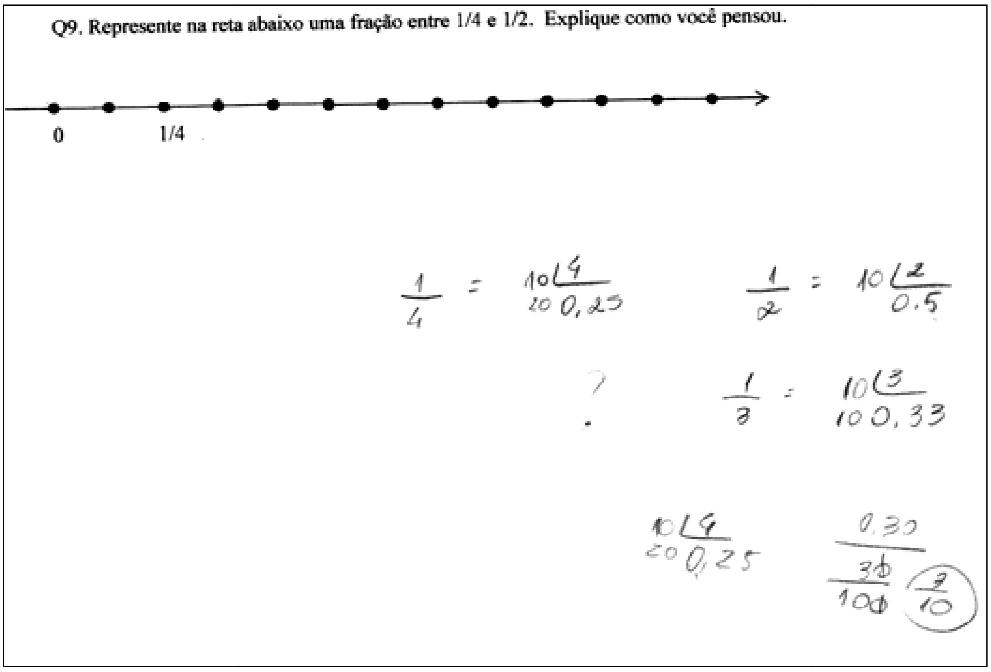


Figura 22 - Solução de Eva para a questão 9 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Os registros de Eva mostram que, aqui, ela decidiu trabalhar com decimais: ela calculou o número decimal correspondente a cada uma das frações, mas não apresentou uma resposta para a questão. As operações efetuadas por Eva sugerem que a aluna buscava responder a questão comparando os números decimais, mas, como ela mesma relatou, tem dificuldades em trabalhar com números decimais e, por isso, pode não ter resolvido completamente a questão.

Em entrevista, perguntei a Eva se ela faria essa questão sem realizar as divisões e ela respondeu:

"**Eva -** Ai... Não sei, não. Acho que não."

Pesquisadora - Você acha mais fácil fazer essa questão...

"**Eva -** Ah, claro que é algoritmo, né? Claro, fazendo conta."

Na entrevista E_3, perguntei novamente a Eva o que era uma fração e ela respondeu:

"**Eva -** Fração, pra mim, é divisão. Já tô dividindo numerador, denominador, achei o meu número decimal. Eu não imagino fração em desenhozinho, essas coisas assim, não."

Prosseguí o diálogo na tentativa de compreender um pouco mais sobre a visão de Eva acerca das frações.

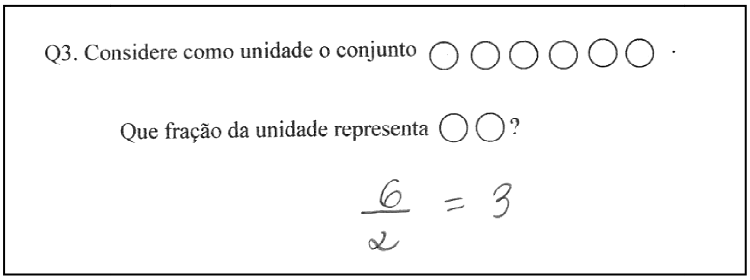
Pesquisadora - Hum, hum... Você não pensa no que aquela fração...no que ela representa?

"**Eva -** Não,... não. Nunca penso. Sempre eu penso na divisão."

Pesquisadora - E na divisão no sentido de dividir mesmo, numerador pelo denominador?

"**Eva -** É, dividir e achar o decimal ou inteiro, né?"

De fato, Eva se confundiu sobre a relação que deveria estabelecer entre as quantidades envolvidas na questão Q3, do questionário da segunda fase, (figura 23).


Q3. Considere como unidade o conjunto ○○○○○○ .

Que fração da unidade representa ○○?

$\frac{6}{2} = 3$

Figura 23 - Solução de Eva para a questão 3 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Eva parece ter realizado a divisão entre os números que representam as duas quantidades envolvidas no enunciado da questão sem refletir sobre o que estava fazendo. O registro 6/2, Eva explicou na entrevista.

"**Eva -** Porque, na verdade, quando a gente fala fração, a parte de baixo é o total que a gente tem e o de cima é o que a gente usa. Não é assim?"

Eva afirmou, no diálogo anterior, que fração é a divisão de dois números inteiros. No caso da questão Q3, o registro da aluna indica a iniciativa da divisão como primeiro procedimento para resolver a questão, apresentando como resposta um número inteiro. Já, em sua explicação na entrevista, Eva parece ter pensado também na comparação da parte com o todo e, mesmo assim, equivocou-se quando registrou 6/2. A fala e o registro de Eva indicam que ela se ocupou em dividir 6 por 2, e o resultado dessa divisão, 3, não foi avaliado por ela. No final da entrevista sobre essa questão pedi a Eva que separasse o conjunto de seis círculos em conjuntos com dois círculos, na tentativa de que ela percebesse a relação do resultado que havia encontrado, com a pergunta da questão, como mostra o diálogo abaixo.

> **Pesquisadora -** Agora, no conjunto, se você separar de duas em duas bolinhas. E aí, você não lembra por que você fez seis dividido por dois?
>
> "**Eva -** Não, eu acho que é porque eu vi que tinha seis aqui, dois aqui, aí eu pensei assim: ah, não vai ser dois sextos não, porque vai ficar muito fácil, aí eu coloquei três mesmo."

A fala de Eva indica que, no momento da resolução da questão, ela não se deu conta de que dois círculos representam 1/3 do total de círculos.

Em um outro momento da entrevista E_3, perguntei a Eva se ela já havia respondido questões como as que foram propostas nos instrumentos desta pesquisa e ela respondeu:

> "**Eva -** Nunca. Eu não aprendi isso no ensino fundamental, não. Nunca, nunca aprendi isso. Sabe o que eu aprendi de fração? A pizza. Pedro come dois pedaços. A pizza de dezoito pedaços e a fração, e mmc, só."

A última fala de Eva, acima, indica uma possível origem do ciclo entre afeto e aprendizagem a que Chacón (2003a) se refere, como citado na introdução desta tese. A aprendizagem de frações, tal como Eva sugere que ocorreu na escola básica, restrita à divisão de uma grandeza contínua (pizza) e aos procedimentos de redução de frações a um denominador comum, pode ter contribuído para a formação da crença de que fração representa uma divisão somente. É importante ressaltar que a própria aluna avalia como limitada a sua aprendizagem, no momento em que usa a palavra *só*. Por outro lado, como diz Chacón (2003a), essa crença influenciaria diretamente seu comportamento, enquanto aprendiz, quando tem que lidar com esses números.

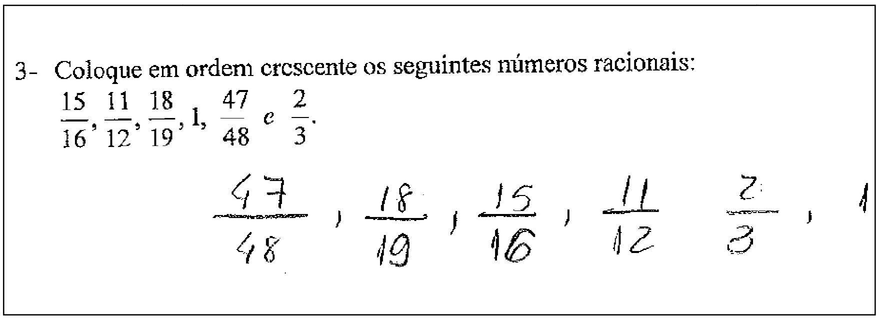
No que se refere à dificuldade de Eva para lidar com frações, apelo para Sanmartí (2009) quando ela argumenta que, entre os obstáculos para a aprendizagem, estão as crenças e os sentimentos do indivíduo. No caso de Eva, esses sentimentos/dificuldades foram descritos como sendo incômodo e bloqueio diante de situações que envolvem frações na forma decimal.

Já o fato de ter marcado como resposta da questão 5 o número -1 pode refletir uma *preferência* de Eva pelos números inteiros, uma vez que, ao relatar sua experiência com as frações no ensino básico, ela disse, na entrevista realizada na segunda fase, a preferência dos professores pelo ensino dos números inteiros em detrimento do ensino dos números fracionários. No diálogo abaixo é possível identificar, não só essa preferência de Eva, mas também como ela reforça a ideia de fração como divisão.

> **Pesquisadora -** E quando você resolve um problema numa prova ou um exercício que deu o resultado, deu uma fração, você acha, você fica na dúvida se aquela resposta estava certa?
>
> “**Eva -** Fico. De cara eu já transformo aquela fração em número decimal, mas... Hoje em dia eu não ligo muito pra isso, não, porque a gente que tá fazendo matemática a gente não liga muito pra número, né, decimal. Mas dá aquele medinho: podia ser um número inteiro, por que não foi um número inteiro?”
>
> **Pesquisadora -** Hum, hum... E você acha que isso é por conta de quê?
>
> “**Eva -** Por conta desse déficit que a gente tem na escola. Professor, ele quer o mais fácil. Você acha que, pra ele dar um número com fração, ele não vai dar um número inteiro, não? É ou não é?”
>
> **Pesquisadora -** Hum, hum...
>
> “**Eva -** Numa sala de quinta série o professor vai dar fração ou número inteiro? Claro que é número inteiro. Mais fácil. Sempre foi assim.”

Nesse caso, mais uma vez, é possível inferir sobre a existência de uma relação entre as experiências escolares de Eva e sua escolha pela resposta que apresentava um número inteiro quando está em dúvida. Para ela, os professores preferem ensinar os números inteiros e, por isso, o ensino das frações fica sempre em desvantagem. Esse fato pode ter dado origem a uma predisposição da aluna em buscar por respostas na forma de números inteiros em detrimento daquelas na forma de frações ou decimais.

Em relação à questão 3 do questionário QF_1, (figura 24), aparentemente, a resposta de Eva parece não refletir sua crença de que, para operar com as frações, é preciso dividir o numerador pelo denominador, pois não se vê registro desse procedimento na questão. De fato, ela não registra a divisão do numerador pelo denominador (uma estratégia muito comum entre os alunos) o que, como já suposto, pode refletir seu incômodo ao lidar com esses números.


3- Coloque em ordem crescente os seguintes números racionais:
$\frac{15}{16}, \frac{11}{12}, \frac{18}{19}, 1, \frac{47}{48}$ e $\frac{2}{3}$.

$\frac{47}{48}, \frac{18}{19}, \frac{15}{16}, \frac{11}{12}$ $\frac{2}{3}$, 1

Figura 2 - Solução de Eva para a questão 3 (QF_1)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Analisando os registros de Eva, é possível que ela tenha se confundido, escrevendo os números na ordem decrescente, errando, mesmo assim, a posição do número 1.

Como observado, o depoimento de Eva acerca de suas experiências com as frações no ensino básico sugere que ela foi submetida a um ensino limitado de procedimentos, como divisão de uma grandeza contínua em partes iguais (pizza), a comparação entre as partes e o todo, e cálculos do mínimo múltiplo comum. Eva poderia ter utilizado a redução das frações a um mesmo denominador para compará-las, transformá-las em número decimal ou fazer a comparação utilizando um desenho. Nenhuma dessas estratégias foi registrada e ela parece ter se fixado nos denominadores para fazer a comparação, pensando que a fração com o maior denominador seria sempre a menor. Se ela se fixou nos denominadores, não observou que, para comparar as frações comparando apenas os denominadores, seria necessário que os numeradores fossem iguais. Este é um erro comum entre os alunos: o hábito de comparar apenas os denominadores para comparar os números fracionários (MAGINA; CAMPOS, 2008). No caso de Eva, é possível que ela tenha memorizado uma regra, um procedimento, sem a compreensão do que estava fazendo. Talvez tenha sido esse um dos motivos pelos quais Eva não dividiu o numerador pelo denominador. Em outras palavras, se ela considerou válida, no caso da questão 3, a regra de comparar apenas os denominadores, não houve necessidade de realizar a divisão. Outro motivo seria o fato de Eva se sentir incomodada quando tem que lidar com a representação decimal do número fracionário.

Refletindo sobre as estratégias que Eva poderia ter utilizado para resolver a questão 3, apesar de dizer que, na escola, o cálculo do mmc foi privilegiado nos estudos das frações, Eva não registrou a utilização desse recurso. A utilização de uma figura, um todo contínuo, mais familiar para a aluna, para realizar a comparação também não foi registrada na resolução dessa questão. Afinal, ela declarou que não imagina fração em desenhos. Ainda, no caso desta questão, mesmo que o cálculo do mmc tenha sido enfatizado no ensino de frações, o que é possível inferir é que uma aprendizagem limitada desse tema no ensino básico, como ela mesma mencionou, não ofereceu à aluna múltiplas possibilidades de lidar com frações em diferentes situações.

As questões que serão discutidas a seguir se referem às frações de uma unidade contínua. Como dito no início dessa seção, as questões que os alunos acertaram serão discutidas na medida em que colaborarem para o esclarecimento da análise.

O início da próxima discussão é a questão Q6 do questionário QF_2 que Eva acertou parcialmente. Essa questão solicitava que se representasse as partes coloridas de uma figura por uma fração, (figura 25). Embora tenha representado as quantidades mostradas nas opções a e b como uma soma de frações, Eva parece não ter se surpreendido com as divisões das figuras (mais exploradas na escola). Entretanto, a figura em que as divisões não eram convencionais parece ter surpreendido a aluna.

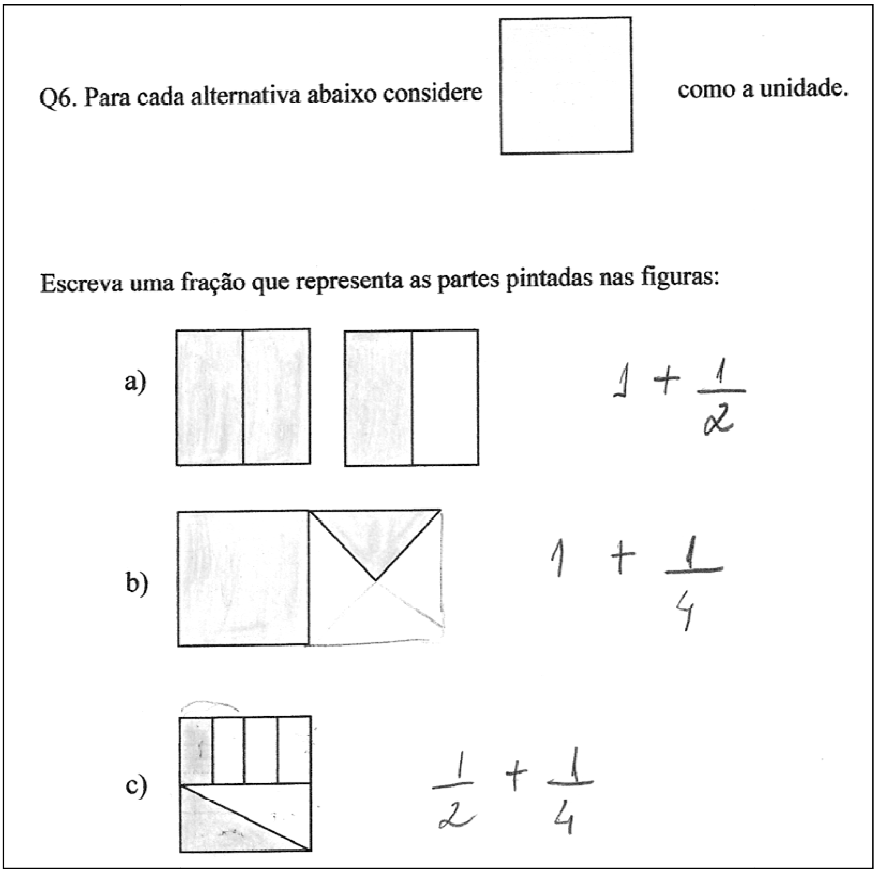
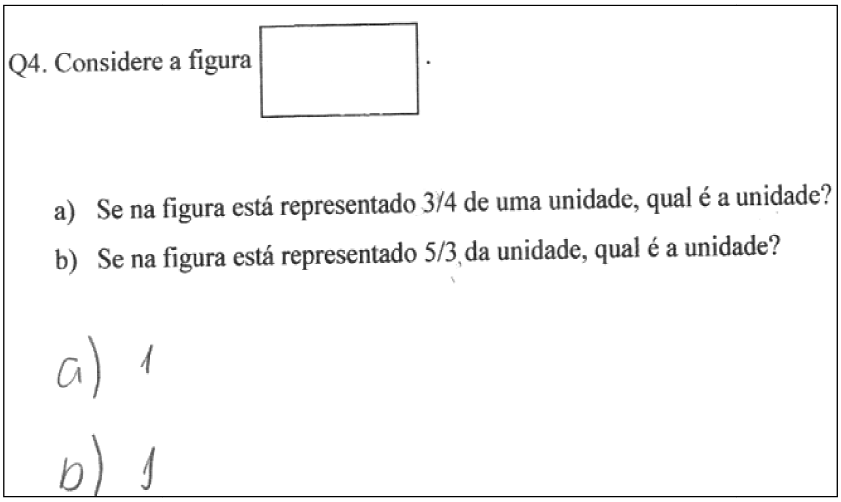


Figura 25 - Solução de Eva para a questão 6 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Na opção c, pelo registro da aluna, vê-se que ela considerou cada metade do quadrado como um inteiro, uma vez que as divisões eram diferentes em cada metade. Assim, para ela, na parte superior da figura estaria representado 1/4 e, na parte inferior, 1/2, mesmo que o enunciado estivesse dizendo que a unidade era o quadrado. Nesse caso, para ela, deve fazer sentido expressar a parte sombreada por uma soma de frações, uma vez que elas se referem à fração de duas unidades. Esse tipo de situação, quando apresentada aos alunos, pode causar surpresa tendo em vista o privilégio que têm, no ensino desse conteúdo, situações como as apresentadas nas opções a e b (SILVA; ALMOULOUD, 2008). O erro cometido por Eva, na opção c, pode ser atribuído à falta de familiaridade com situações que envolvam partições diferentes da mesma unidade, a uma leitura desatenta do enunciado da questão (desconsiderou, por um momento, o fato de que o quadrado era a unidade) ou, ainda, à não constatação de que a área de um triângulo é equivalente à área de dois retângulos pequenos e que cada retângulo representa um oitavo. Aqui, mais uma vez, parece que um ensino limitado, com figuras convencionais do tipo *pizza*, não oferece possibilidades para as diversas situações em que se pode representar partes de um todo. E essa suposição é reforçada em um depoimento de Eva em entrevista. Quando solicitada a refletir sobre o erro cometido, Eva manifestou uma dificuldade ao se deparar com o desenho da opção c. Em outras palavras, ela indicou que passou por um estado emocional de espanto diante do desenho, como mostra o protocolo abaixo:

> "**Eva -** Essa aqui eu falei: Meu Deus, o que é isto? Dividir a mesma figura em partes diferentes? Eu pensei: pronto, tem algum problema ai. O que eu tenho que pensar aqui?"

Também na questão Q4, do mesmo questionário, Eva parece que não compreendeu que a figura dada representava parte do inteiro e, não, o inteiro, e escreveu "1" como resposta às duas perguntas (figura 26).

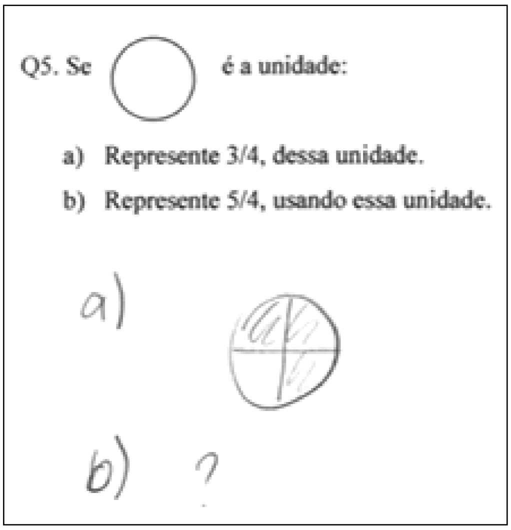

Q4. Considere a figura .

a) Se na figura está representado 3/4 de uma unidade, qual é a unidade?
b) Se na figura está representado 5/3 da unidade, qual é a unidade?

a) 1
b) 1

Figura 26 - Solução de Eva para a questão 4 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Já na questão Q5 do mesmo questionário, a unidade apresentada (círculo) era o inteiro, e a aluna deveria representar 3/4 e 5/4 usando essa unidade (figura 27).


Q5. Se é a unidade:

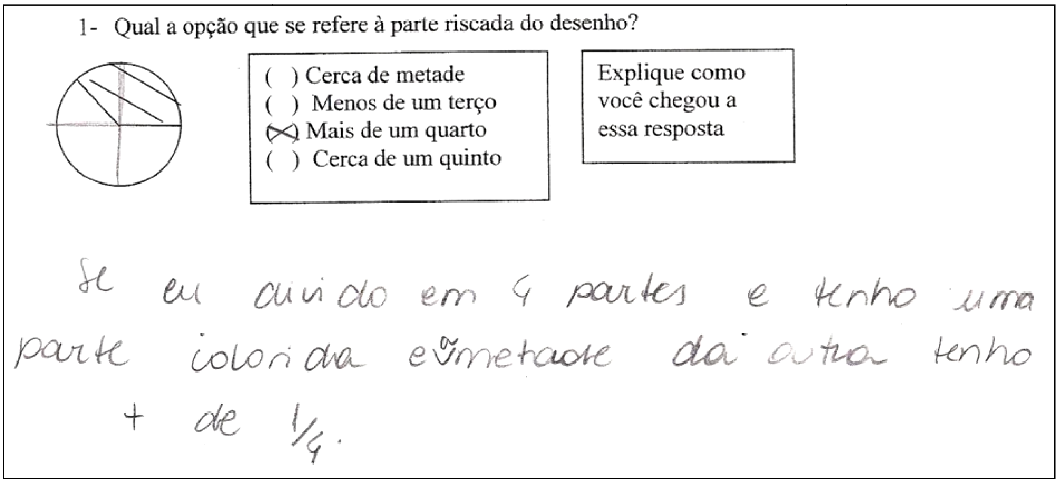
a) Represente 3/4, dessa unidade.
b) Represente 5/4, usando essa unidade.

a)
b) ?

Figura 27 - Solução de Eva para a questão 5 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Os registros de Eva mostram que ela não teve dúvida quanto à representação da fração de uma quantidade menor que o inteiro. Entretanto, quando a fração se referia a uma quantidade maior que a unidade (fração imprópria), Eva escreveu um sinal de interrogação, indicando sua incerteza.

As questões 1 e 4 do questionário QF_1 também se referiam às partições de uma unidade contínua e Eva acertou as duas questões. No caso da questão 1, (figura 28), a aluna avaliou corretamente (mais de 1/4) a parte riscada na figura.


1- Qual a opção que se refere à parte riscada do desenho?

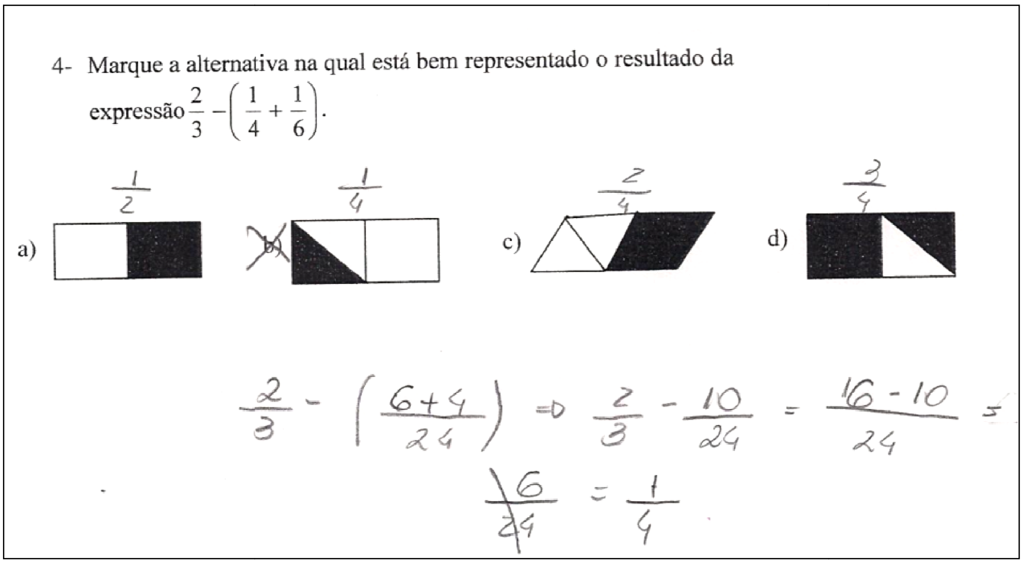
( ) Cerca de metade
( ) Menos de um terço
(X) Mais de um quarto
( ) Cerca de um quinto

Explique como você chegou a essa resposta

Se eu divido em 4 partes e tenho uma parte colorida e metade da outra tenho + de 1/4.

Figura 28 - Solução de Eva para a questão 1 (QF_1)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Na questão 4, do mesmo questionário, Eva realizou corretamente as operações indicadas no enunciado e também marcou corretamente a figura que representa a fração encontrada como resposta, (figura 29).


4- Marque a alternativa na qual está bem representado o resultado da expressão $\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)$.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{4}$ d) $\frac{3}{4}$

$$\frac{2}{3}-\left(\frac{6+4}{24}\right) \Rightarrow \frac{2}{3}-\frac{10}{24}=\frac{16-10}{24}=$$
$$\frac{\cancel{6}}{\cancel{24}}=\frac{1}{4}$$

Figura 29 - Solução de Eva para a questão 4 (QF_1)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Confrontando as análises dessas questões, ocorreu-me que os registros de Eva indicam que ela tem dúvidas quanto à representação de uma fração maior que a unidade, quando essa unidade é uma quantidade contínua. Entretanto, na questão 6 da segunda fase, (figura 25), apesar de não escrever, nas opções a e b , uma única fração que representasse as partes pintadas das figuras, Eva escreveu a soma de um número inteiro com uma fração, o que indica sua percepção de uma quantidade maior que inteiro.

Finalmente, acerca dessa discussão, apresento a resolução de Eva para a questão Q7 do questionário da segunda fase que me ajudou a identificar a possível dúvida da aluna, (figura 30).

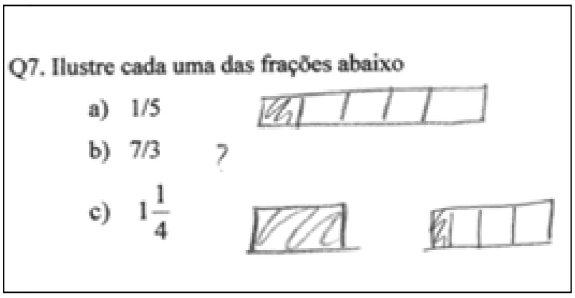


Figura 30 - Solução de Eva para a questão 7 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Na questão acima, Eva não conseguiu representar, por meio de um desenho, a fração imprópria 7/3, registrando sua dúvida com o sinal de interrogação, mas representou corretamente o número misto 1 1/4, que também se refere a uma quantidade maior que o inteiro. Os registros de Eva na resolução dessa questão e na resolução das opções a e b da questão Q6, (figura 25), indicam fortemente que Eva parece não ter dúvidas quando trabalha com a representação mista de uma quantidade maior que o inteiro (1+1/2, 1+1/4, ou 1 1/4), o que não acontece quando tem que lidar com uma única fração que representa essa quantidade: a fração imprópria.

Na entrevista, quando pedi a Eva que esclarecesse a resolução da questão Q7, ela respondeu:

> "**Eva -** Aí, nem desenhei, não sabia... Agora, um quinto, um inteiro e um quarto, claro que eu sei, entendeu? Mas o outro..."
>
> **Pesquisadora -** O sete terços...
>
> "**Eva -** Não."

Os registros e a declaração de Eva, mencionados acima, são evidências de que fração imprópria é algo que a aluna não compreende bem.

As questões Q1 e Q2 do questionário QF_2 também solicitavam que os alunos lidassem com frações que representassem uma quantidade maior que o inteiro. A unidade, nesses casos, porém era discreta.

Na questão Q1, foi dado um conjunto de 18 pontos, e a aluna deveria construir, respondendo à opção c, outro conjunto com 5/3 do conjunto dado, (figura 31).

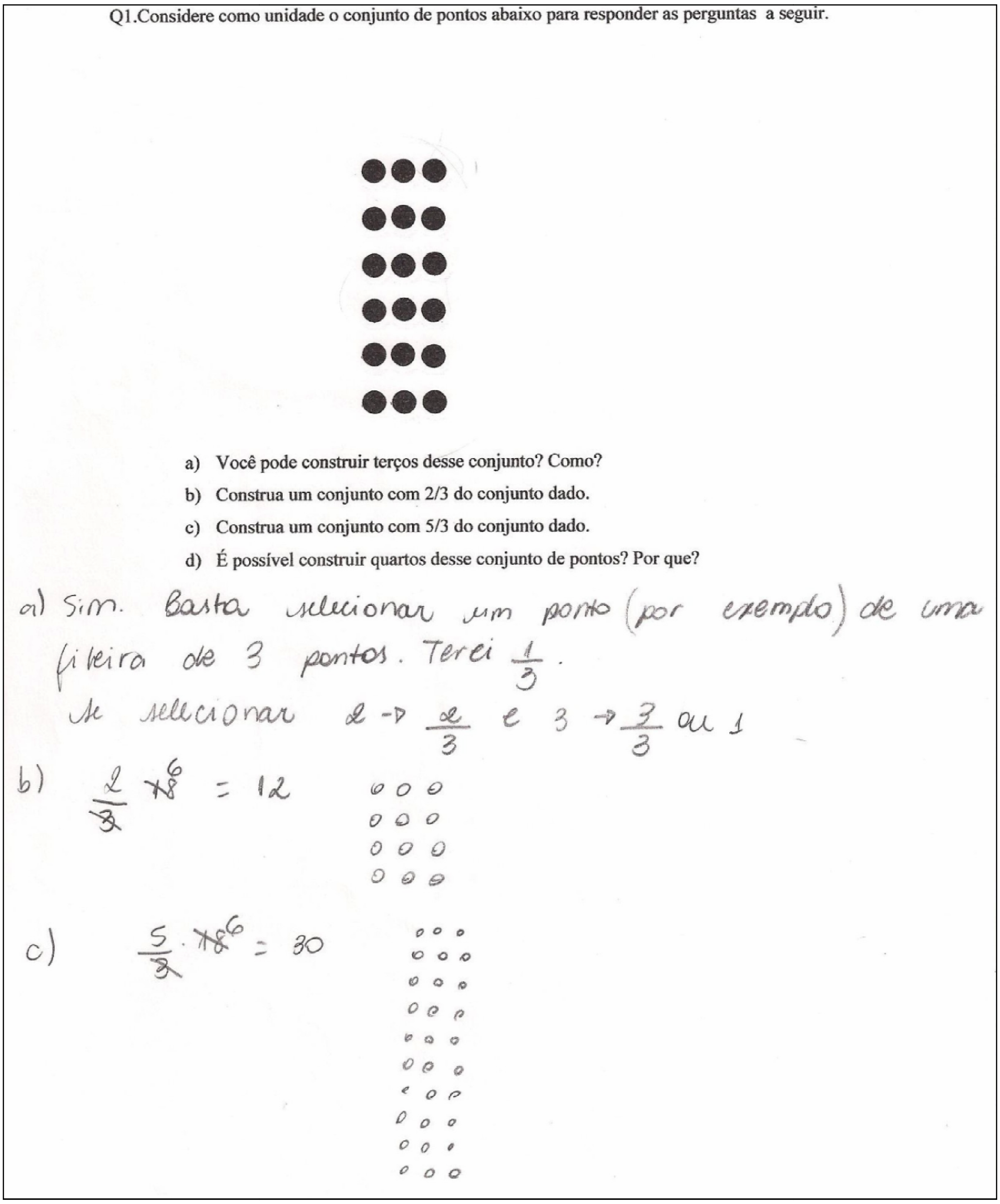
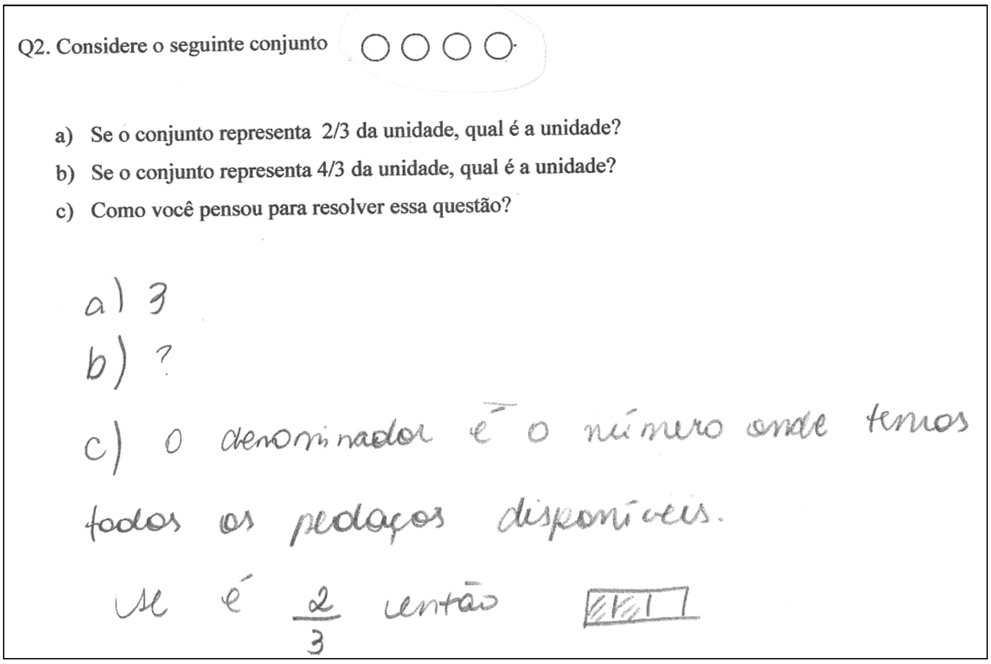


Figura 31 - Solução de Eva para a questão 1 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Eva calculou 5/3 de 18 e desenhou 30 pontos representando essa quantidade. A aluna obteve uma resposta correta para a questão. Entendo que isso foi possível por se tratar de fração de uma unidade discreta, mesmo sendo imprópria. Em outras palavras, o fato de o desenho dado ser a própria unidade (ainda que discreta) permitiu que Eva realizasse uma operação, cujo resultado lhe garantiu um número que ela expressou por meio de um conjunto de pontos exibido como resposta.

Já na questão Q2, entendo que a opção b, referente à fração imprópria, não pode ser analisada sob o mesmo prisma que a questão 1, uma vez que as propostas são diferentes, (figura 32).


Q2. Considere o seguinte conjunto

a) Se o conjunto representa 2/3 da unidade, qual é a unidade?
b) Se o conjunto representa 4/3 da unidade, qual é a unidade?
c) Como você pensou para resolver essa questão?

a) 3
b) ?
c) o denominador é o número onde temos todos os pedaços disponíveis.
se é $\frac{2}{3}$ então

Figura 32 - Solução de Eva para a questão 2 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Fazendo uma análise primeiramente da opção a, a justificativa de Eva (apresentada na letra c) para sua resposta a essa proposta sugere que ela, mais uma vez, usou a ideia de fração como divisão, no sentido parte-todo. Segundo Eva, como o denominador indica o número de partes em que o todo foi dividido, para ela, esse número significa o total de partes, como ela mesma registra: *são todos os pedaços disponíveis*. Ela desenhou um inteiro contínuo (retângulo) mostrando a representação de 2/3, e parece ter considerado que poderia usar a mesma ideia para responder a pergunta da opção a. Ela pode ter pensado que, uma vez que o inteiro foi dividido em três partes (no caso do retângulo) e esse número representa, para ela, o inteiro, no caso dos círculos, isso também acontece. O enunciado afirma porém, que o conjunto de quatro círculos representa 2/3 da unidade. Então, era de se esperar que a aluna inferisse que a unidade teria mais que quatro círculos. Entretanto, isso não aconteceu, pois ela respondeu que a unidade era composta de três círculos. Já a pergunta b Eva não respondeu e indicou, por meio de interrogação, que não soube como fazer. Problemas em que a quantidade apresentada não significa o inteiro e, sim, parte dele, se distanciam dos problemas convencionais e podem não ser compreendidos pelos alunos. Na alternativa b, Eva pode ter se sentido impossibilitada de apresentar uma resposta e sua justificativa, por se tratar de uma fração maior que o inteiro. Aqui, podemos dizer que Eva manifestou dúvida sobre frações impróprias, embora diferente das dúvidas mencionadas anteriormente. Sabemos que calcular a unidade a partir de uma fração dessa unidade implica um raciocínio diferente do que Eva apresentou na opção c, da questão Q1. Não era o caso, na questão Q2, de calcular 4/3 de quatro bolinhas.

Na entrevista, quando pedi esclarecimentos sobre como ela pensou para resolver a questão, Eva reforçou minha hipótese da falta de compreensão do enunciado. Ela disse:

> “**Eva -** Pois é, eu não entendi isso. A unidade seria o conjunto?”

Quando expliquei que, nesse caso, foi dada uma parte da unidade e não a unidade, a aluna recorreu à álgebra.

> “**Eva -** Seria dois terços de x? Eu poderia pensar assim? Tá, e aí? Como que eu vou descobrir? Eu não sei quanto vale a unidade. Seria dois terços de x.”

Nesse momento, a aluna escreveu no papel o seguinte (figura 33):

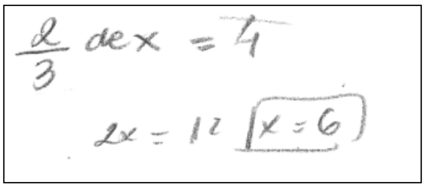
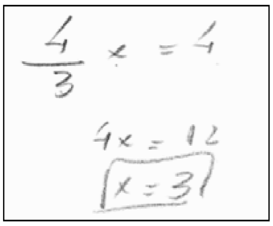


Figura 33 - Registro feito por Eva, na entrevista, como solução da questão Q2a (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Ainda perguntei a Eva como ela faria para resolver essa questão sem o auxílio da álgebra. Ela respondeu corretamente e, em seguida, disse:

> “**Eva -** A gente tem esse defeito né, de querer fazer só conta, conta, conta, não vê outra forma.”

Continuando a entrevista, pedi a Eva que tentasse resolver também a letra b. Ela escreveu no papel o seguinte, figura 34.



$$\frac{4}{3}x = 4$$

$$4x = 12$$

$$\boxed{x = 3}$$

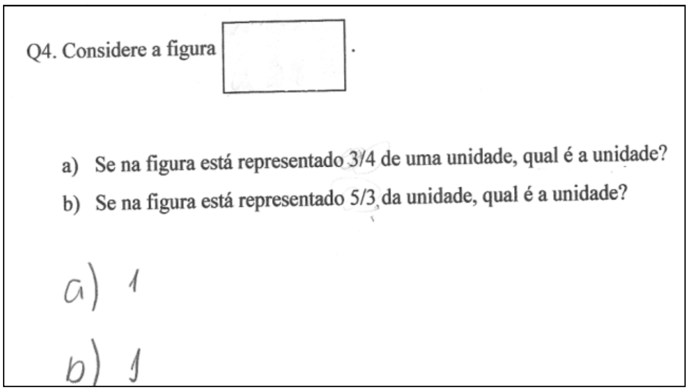
Figura 34 - Registro feito por Eva, na entrevista, como solução da questão Q2b (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Quando pedi que explicasse sobre a justificativa para a opção c que tinha acabado de resolver, Eva disse:

> “**Eva -** Não precisa nem de ler isso aqui, tá errado. Como resolver essa questão? Eu pensei usando o algoritmo.”

Por algoritmo entendi que ela estava se referindo aos procedimentos algébricos realizados durante a entrevista, uma vez que não havia registrado antes qualquer algoritmo para resolver a questão.

Também na questão Q4, Eva não compreendeu que a figura dada representava parte do inteiro e não o inteiro, e escreveu “1” como resposta às duas perguntas (figura 35).



Q4. Considere a figura .

a) Se na figura está representado 3/4 de uma unidade, qual é a unidade?
b) Se na figura está representado 5/3 da unidade, qual é a unidade?

a) 1

b) 1

Figura 35 - Solução de Eva para a questão Q4 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

A resposta de Eva sugere que apresentar no enunciado da questão uma figura comumente utilizada para representar a unidade pode ter induzido a aluna a responder que a unidade é 1, um retângulo.

Ao ser indagada, na entrevista, sobre como pensou para resolver a questão, Eva respondeu:

"**Eva -** Se eu fizer isso aqui, tá errado? Tá errado."

Nesse momento, ela escreveu no papel (figura 36).

$$\frac{3}{4}x = \frac{3}{4}$$

Figura 36 - Registro de Eva na entrevista como solução da questão Q4 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Entretanto, diferentemente da questão Q2, Eva não registrou o uso correto do cálculo algébrico, o que parece indicar que ela não percebeu uma possibilidade de resposta usando, aqui, o mesmo recurso que tinha usado na questão Q2. A expressão que a aluna escreveu parece ser a tradução de como ela entendeu o problema: se x significa a unidade, de acordo com o registro de Eva, a unidade é 1, um retângulo.

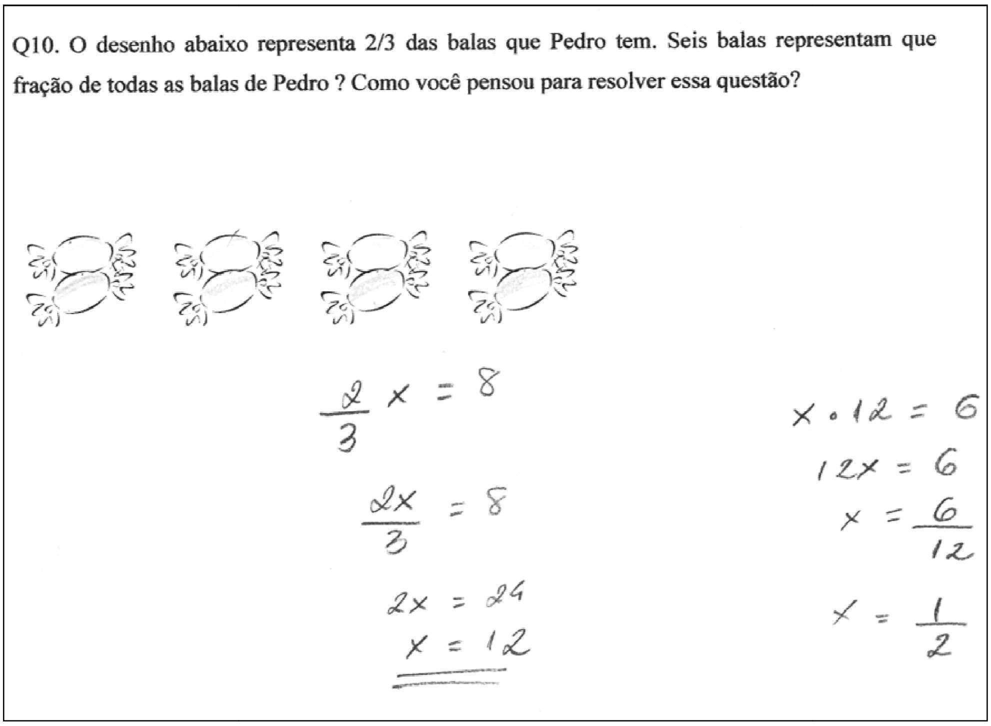
No meu entender, a apropriação de recursos algébricos como a estratégia importante e segura na solução de problemas pode, em certas situações, *camuflar* o entendimento de um assunto, como parece ter acontecido com Eva. Por exemplo, quando Eva resolveu a questão Q2 usando uma expressão algébrica e apresentou a resposta correta, esse procedimento, embora correto, pode não traduzir a real compreensão que Eva tem da questão, tendo em vista o erro cometido na questão Q4 e seus esclarecimentos em entrevista.

Continuando a entrevista acerca da questão Q4, quando pedi a Eva que representasse 1/4 da figura, sabendo que, no desenho, estavam representados 3/4, ela respondeu:

"**Eva -** Ah, não tem jeito não."

Para Eva, dividir a figura em um número de partes iguais ao numerador parece uma tarefa não familiar a ela, diferente daquelas às quais ela teve acesso. Afinal, o procedimento mais comum é considerar que, diante de uma fração, deve-se dividir o inteiro, ou a unidade, em um número de partes iguais ao denominador.

Passo à discussão da resposta de Eva à questão Q10 (figura 37). A iniciativa de Eva é usar uma variável para representar a unidade e assim resolver uma equação do primeiro grau.


Q10. O desenho abaixo representa 2/3 das balas que Pedro tem. Seis balas representam que fração de todas as balas de Pedro ? Como você pensou para resolver essa questão?

$$\frac{2}{3}x = 8$$

$$\frac{2x}{3} = 8$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

$$x \cdot 12 = 6$$

$$12x = 6$$

$$x = \frac{6}{12}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Figura 37 - Solução de Eva para a questão Q10 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Na tentativa de aproximar-me da compreensão de Eva acerca dessa questão, perguntei, na entrevista, como ela ensinaria um problema como esse a alunos do quinto ou do sexto ano que não têm, por exemplo, o conhecimento de álgebra e desconhecem o significado de variável. Num primeiro momento, ela se valeu da resposta que já havia encontrado, 12 balas, usando a expressão algébrica e aponta para o número 12, no papel.

"**Eva -** Dá, já sei, doze, aqui."

Insisti para que ela tentasse calcular o total de balas sem usar tal recurso.

"**Eva -** Aqui tem um terço, são quatro, e aqui são dois terços que são um, dois, três, quatro, cinco, seis,..., oito, então três terços vão ser mais quatro, doze.

Pesquisadora - Que fração seis balas representam do total de balas que ele tem?

"**Eva -** Meio. Gente, a gente tem que fazer conta, o que é isso? Impressionante! Certíssimo isso que você tá fazendo. Abrir a visão da gente. Professor não faz isso não."

Eva ficou surpresa com o fato de não ter que fazer a conta para resolver a questão e ainda disse que acreditava que os colegas haviam resolvido como ela.

"**Eva -** Eu aposto que os meninos foram todos pra conta também."

Para a aluna *fazer a conta* parece significar resolver uma equação, usar um pouco de álgebra.

Eva disse estar impressionada com o fato de constatar a necessidade de sempre usar uma expressão algébrica em situações como as da questão Q10. Resolver a questão fazendo apenas a contagem das balas, a partir do conhecimento da fração unitária do conjunto, foi uma surpresa para ela. Esse procedimento não deveria ser novidade, considerando o nível de escolaridade da estudante.

Por outro lado, o ensino básico pode não ter proporcionado a Eva experiências com as frações em que ela pudesse adquirir habilidades e desenvolver procedimentos variados ou alternativos, como ela disse na entrevista:

"**Eva -** O problema vem lá de trás, né? Por isso que tem que ter trabalho diferente mesmo. É isso aí, professora, muito legal. Muito bom! (referindo-se aos problemas propostos nos instrumentos da pesquisa). Quando eu estudei na escola, foi uma coisa muito básica, assim."

A álgebra é uma aliada valiosa na resolução de problemas matemáticos. No meu entendimento, porém, a resposta correta proveniente de procedimentos algébricos nem sempre indica a compreensão da situação. Por exemplo, o enunciado de um problema pode ser traduzido por uma equação algébrica que, por sua vez, pode ser resolvida satisfatoriamente. Entretanto, a resposta encontrada pode não ser adequada (como é o caso de respostas negativas para algumas medidas) e não ser avaliada pelo aluno. Pode ocorrer também que, sem os recursos da álgebra, o aluno não seja capaz de resolver o problema, pois não o compreende de fato.

Eva demonstrou resistência em resolver o problema quando foi solicitada a não usar a expressão algébrica. Isso ficou evidente quando ela apresentou rapidamente o total de balas encontrado quando equacionou o problema. Embora tivesse conseguido resolver o problema apenas calculando mentalmente, a aluna demonstrou estar incomodada no momento da entrevista, manifestando ansiedade para terminar a conversa sobre a questão.

No momento em que estava resolvendo as questões do questionário Q2, percebi que Eva estava inquieta, indicando que passava por um estado de desconforto e tensão ao mudar de posição constantemente na cadeira e tentando observar as respostas dos colegas. A uma certa altura, Eva se manifestou dizendo:

"**Eva -** Jesus Amado! De onde você tirou isso?"

Tal estado emocional é descrito por Damásio (2000) como a seguir.

> Quando percebemos que uma pessoa está "tensa" ou "irritadiça", "desanimada" ou "entusiasmada", "abatida" ou "animada" sem que nenhuma palavra tenha sido dita para traduzir qualquer um desses possíveis estados, o que detectamos são emoções de fundo.[...] detectamos emoções de fundo por detalhes sutis como a postura do corpo, a velocidade e o contorno dos movimentos, mudanças mínimas na quantidade e na velocidade dos movimentos oculares e no grau de contração dos músculos faciais (DAMÁSIO, 2000, p.75-76 – aspas no original).

Ainda, de acordo com Damásio (2000), as emoções cumprem um papel regulador em organismos equipados com consciência, de maneira que o indivíduo seja capaz de agir diante da consciência de determinada emoção. A consciência permite que o sentimento seja conhecido e, que a emoção por intermédio do sentimento[23] permeie o processo de pensamento. Assim, a emoção, seja ela qual for, apresenta-se diante das situações em que o conhecimento do indivíduo é solicitado e regula suas ações. No caso específico de Eva, a consciência de suas emoções diante de problemas que envolvem frações permitiu que ela expressasse com clareza o que sentia nesses momentos.

---

[23] Damásio (2000) diferencia sentimento de emoção. Para ele, o termo *sentimento* é uma experiência subjetiva/privada de uma emoção, enquanto o termo *emoção* é o conjunto de reações, muitas delas observáveis publicamente.

> "**Eva -** Quando vem aquela questão de número decimal, transforme a fração em decimal, isso me incomoda. Eu tenho um bloqueio com isso. Eu não sou muito chegada a fração, nunca fui bem. Dá aquele medinho: podia ser um número inteiro, por que que não foi um número inteiro?"

A situação de incômodo e até mesmo de bloqueio ao ter que operar com as frações parece perturbar a aluna. Eva disse sentir um *medinho*, quando se expressou sobre a possibilidade de a resposta de um problema ser uma fração. É possível observar nas palavras de Eva a insegurança que lhe causa o medo de estar equivocada quando a resposta de um problema é uma fração. As manifestações de dificuldade ficaram explicitas nas declarações dessa aluna.

Comentário

A partir do exposto, foi possível elaborar algumas conclusões acerca do caso de Eva. Ela mantém a crença de fração como divisão e oferece fortes indícios de que essa crença tem origem em suas experiências escolares com esses números. De fato, ela revelou ter vivenciado um ensino carente de experiências que significassem as frações de acordo com suas diferentes interpretações. Ela cita, lembrando sua experiência de aprendizagem desse conteúdo no ensino básico, a divisão do numerador pelo denominador, a divisão da pizza e o cálculo do mmc para operar com as frações. Assim, se a aluna não teve oportunidade de experimentar de maneira significativa situações em que deveria usar fração, por exemplo, como operador, razão, como representação de um número na reta, é possível que, para ela, a fração não seja mesmo mais que a divisão do numerador pelo denominador. E isso, muito provavelmente, pode ter sido o motivo que fez emergir a crença aludida de Eva, levando-a a desenvolver dificuldades no trato com esses números e ao cometimento de erros nas questões. Os equívocos cometidos por Eva fazem parte de um acervo de erros sobre frações cometidos pelos alunos, já evidenciados pela literatura, (KERSLAKE, 1986, SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1998, NIEKERK *el al.*; 1999, MACIEL; CÂMARA, 2007). No entanto, sob o ponto de vista emocional, o caso de Eva mostra que lidar com certo conteúdo matemático pode gerar sentimentos e emoções que, por sua vez, causam transtornos e dificuldades (como neste trabalho as concebemos) para o aluno, e, consequentemente, prejuízo no seu desempenho quando está diante de um problema que envolve esse conteúdo (no caso de Eva, frações). Um aluno, diante desse quadro, pode ser conduzido ao erro, pois, de acordo com Sanmartí (2009), as dificuldades e os erros dos alunos provêm fundamentalmente de como eles *se emocionam* com o conhecimento.

Além disso, é importante considerar que as experiências escolares de Eva, muito provavelmente, configuram-se como o início da relação cíclica que Chacón (2003a) estabelece entre afetos e aprendizagem. A figura 38 indica uma representação para esse ciclo e seu reflexo na prática profissional de Eva.

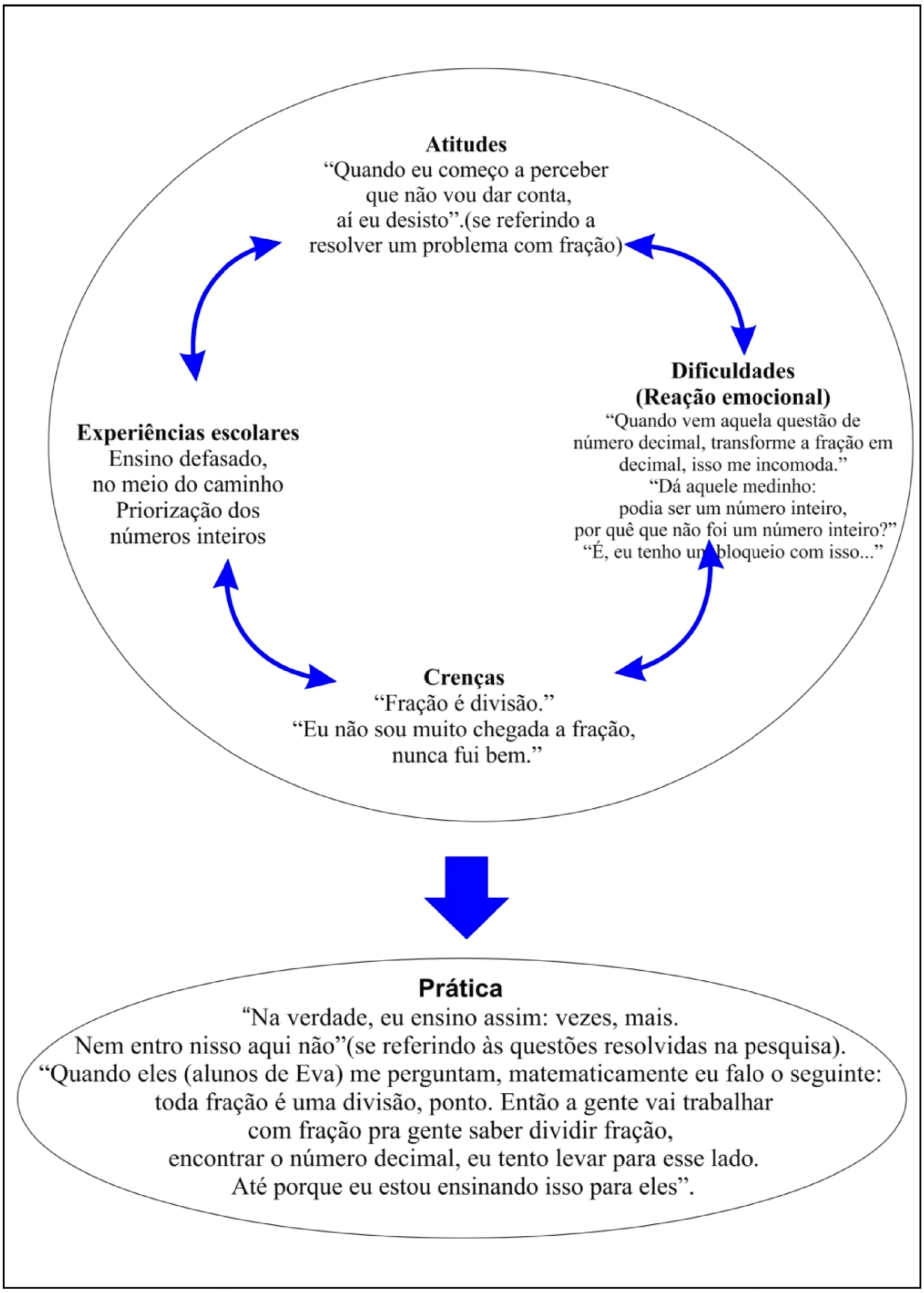


Figura 38 - Relação cíclica entre afetos e aprendizagem e reflexos na prática pedagógica - caso de Eva
Fonte: Elaborada pela autora da tese, 2013.

As situações de aprendizagem, que significaram a fração apenas como divisão, as mensagens dos professores (os números inteiros são mais fáceis de ensinar e aprender do que as frações), foram estímulos que Eva recebeu durante o ensino básico. Tais estímulos contribuem para a formação de suas crenças que, por sua vez, provocam uma reação emocional negativa (bloqueio), quando ela está diante de situações em que deve operar com frações, predispondo a aluna a atitudes negativas em relação ao conteúdo. Contudo, ressalto que as relações entre as experiências escolares, crenças, reações emocionais e atitudes não se estabelecem em um único sentido ou direção. Tais relações se realimentam de forma cíclica.

CAPÍTULO V

ESTUDO DE CASO 2: ELOISA

Eloisa acertou três das cinco questões propostas no questionário QF_1. As questões que Eloisa errou, assim como Eva, foram a 3 e a 5. Já, no questionário QF_2, Eloisa acertou completamente quatro questões (questões Q2, Q3, Q7, Q10), parcialmente duas (questões Q1 e Q6), e errou quatro questões (questões Q4, Q5, Q8, Q9). As tabelas 1 e 2 mostram o desempenho de Eloisa e Eva nas questões dos questionários QF_1 e QF_2.

TABELA 1
Desempenho de Eva e Eloisa no questionário QF_1

Primeira fase (QF_1)					
Alunas	Questões				
	1	2	3	4	5
Eva	A	A	E	A	E
Eloisa	A	A	E	A	E

Legenda
A - Acertou
AP - Acertou Parcialmente
E – Errou

Fonte - Elaborada pela autora da tese, 2013,

TABELA 2
Desempenho de Eva e Eloisa no questionário QF_2

Segunda fase (QF_2)										
Alunas	Questões									
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Eva	A	E	E	E	AP	A	AP	AP	E	AP
Eloisa	AP	A	A	E	E	AP	A	E	E	A

Fonte - Elaborada pela autora da tese, 2013.

Eloisa deixou claro, na primeira fase da investigação, que a fração como divisão é o pensamento que determina suas ações no domínio dos números racionais. Quando perguntei a ela , na entrevista E_1, o que é fração, ela respondeu:

“**Eloisa -** Que fração é uma divisão de partes tá começando a entrar.”

Em outro momento dessa mesma entrevista, simulei um jogo de adivinhação em que a palavra secreta era fração. Eloisa deveria dar pistas dessa palavra a outra pessoa. A aluna então disse:

> "**Eloisa -** Eu ia falar dividir. É, eu **só** consigo pensar em divisão, fracionar, consigo pensar um dividido pelo outro."

As expressões *divisão de partes* e *fracionar* indicam a ideia de dividir um todo em partes iguais e considerar algumas dessas partes. Por outro lado, quando disse que pensa em *um dividido pelo outro*, Eloisa se refere à divisão do numerador pelo denominador de uma fração. Essa parece ser a principal crença (ou talvez a única) de Eloisa acerca do que significa uma fração.

Dividir o numerador pelo denominador foi a iniciativa de Eloisa para resolver a questão 3, na primeira fase (figura 39).

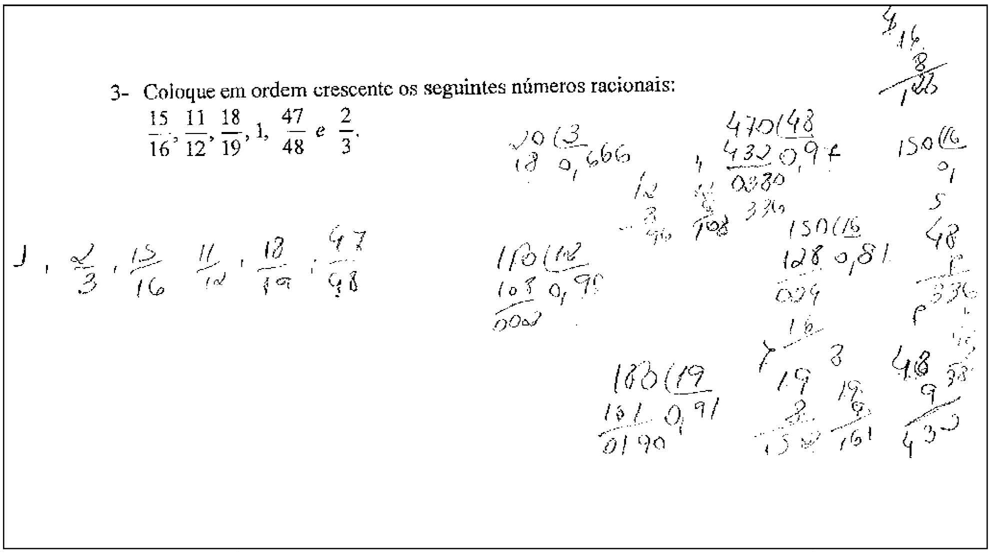


Figura 39 - Solução de Eloisa para a questão 3 (QF1)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Como já dito, a divisão do numerador pelo denominador é uma iniciativa comum dos alunos em questões como essa. Uma vez efetuadas as divisões, Eloisa teria os números decimais para serem comparados. Ao analisar, porém, a correspondência entre essas formas decimais e as frações para compará-las, ela comete erro. Eloisa pode ter se distraído ao escrever os números em ordem crescente, pois realizou corretamente as divisões, mas trocou a posição de três números: 1, 11/12 e 15/16. Talvez, a aluna tenha se confundido pensando que a ordem dos números seria decrescente, quando colocou o número 1 em primeiro lugar, como o menor. Na entrevista, pedi que Eloisa esclarecesse sobre como pensou para resolver essa questão. Ela disse:

> "**Eloisa -** Porque, às vezes, o número de fração dá a impressão de que é maior e, na verdade ele é menor, aí por isso eu fiz assim."

Com esse depoimento, Eloisa mostra que a representação fracionária de um número racional pode confundi-la na identificação e comparação desse número com outros. Assim, proceder à divisão do numerador pelo denominador é mais seguro, embora ela pareça não ter usado a comparação na forma de decimais. Quando perguntada por mim, em entrevista, porque colocou o 1 como sendo o menor, ela corrigiu sua resposta e justificou, usando como argumento a divisão:

> "**Eloisa -** Não, aí agora não [risos]. Porque 1 dividido por 1 é 1, ele seria o maior."

Eloisa pareceu não perceber que se todas as frações têm o numerador menor que o denominador, cada uma delas representa um número racional menor que 1. Portanto, 1 é o maior número apresentado na sequência.

Para resolver a questão 5, (figura 40), também do questionário QF_1, Eloisa pareceu não ter considerado que cada intervalo foi dividido em quatro partes iguais. Ela registrou que considerou, equivocadamente, o ponto A como sendo -3 e o ponto B como 6.

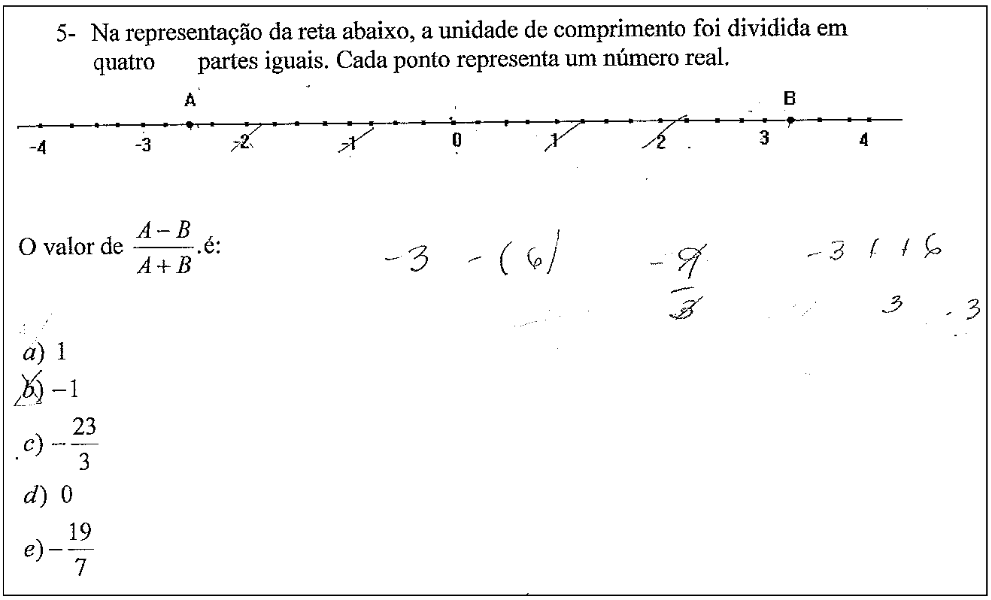


Figura 40 - Solução de Eloisa para a questão 5 (QF_1)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Eloisa operou com esses números de acordo com as orientações da questão 5 e, em seguida, dividiu os resultados. A resposta mais atrativa para a aluna foi -1, ou seja, um número inteiro. Observando atentamente o registro da aluna, é possível perceber a marca deixada na opção a, indicando, provavelmente, que ela havia considerado inicialmente o número 1 como resposta. Isso sinaliza que a possibilidade de encontrar como resposta uma fração parece ter sido descartada. De acordo com os valores de A e B que ela arbitrou, de fato, a divisão resultou em um número inteiro.

É possível inferir uma explicação para Eloisa ter identificado os pontos A e B como números inteiros e também ter marcado como resposta um número inteiro. Na entrevista E_3, solicitei que ela falasse um pouco sobre sua experiência com as frações no ensino básico. Ela relatou o seguinte:

> "**Eloisa -** A minha professora de terceira série, ela trabalhou muita multiplicação, muita divisão, muita tabuada, mas eu não lembro de fração."

O fato de não se recordar do ensino de fração transmite a ideia de que esse conteúdo não foi trabalhado de forma satisfatória. Quando pedi esclarecimentos sobre por que afirmou que fica em dúvida quando a solução de um problema é uma fração, Eloisa respondeu:

> "**Eloisa -** Eu desconfio. Nossa! Deu fração, será que é isso mesmo?Até porque a gente é treinado tanto a encontrar número inteiro (referindo-se à escola) aí depois quando dá essa quebra, **o** psicológico abala."

É importante observar que, para a aluna, a escola enfatiza o ensino dos números inteiros a ponto de ela considerar esse ensino um treinamento para lidar com tais números. A dificuldade de Eloisa com frações ficou evidente quando disse: o *psicológico abala*.

Ainda na entrevista E_1, pedi a Eloisa que explicasse por que ela afirmou, no questionário de crenças, gostar de resolver problemas de matemática, exceto aqueles que tenham números fracionários. Ela respondeu:

> "**Eloisa -** Acho que é porque no ensino médio eu não tinha domínio sobre isso, então quando eu vejo fração no triângulo, seja em qualquer matéria, eu *fico um pouco apreensiva* sobre o resultado daquilo eu não tenho um domínio dessa questão ainda não."

Sendo assim, há possibilidade de Eloisa ter operado numa situação afetivo-cognitiva que dirigiu sua resposta para os números inteiros. Ao esclarecer a resolução dada para a questão 5, Eloisa confirma essa possibilidade. Ela disse:

> "**Eloisa - E**u só considerei falando inteiro (ela lê novamente o enunciado), não, não, não tem inteiro não... só que eu fiquei com o número na cabeça."

Assim, mesmo lendo o enunciado novamente e refutando o que havia considerado, Eloisa percebeu que manteve, em seu pensamento, os números inteiros.

Na segunda fase da pesquisa, Eloisa errou também as duas questões que tratavam de localizar frações na reta. Analisemos inicialmente a questão Q8 (QF_2) (figura 41).

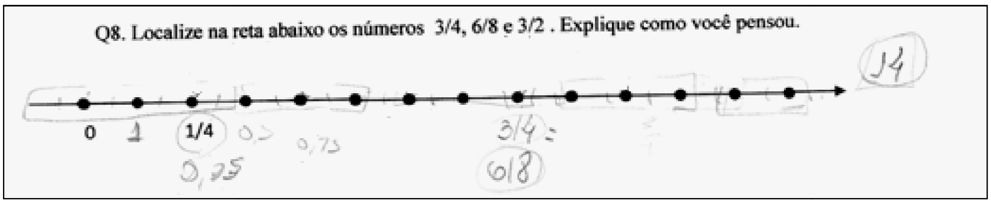


Figura 41 - Solução de Eloisa para a questão Q8 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Na entrevista E_3, quando pedi que Eloisa explicasse como pensou para resolver a questão Q8, ela exclamou:

> "**Eloisa -** Nossa, essa questão!!!! (risos)"

Pela expressão de Eloisa entendi que se tratava de uma questão diferente para ela.

Ao escrever 1 imediatamente após o zero e antes de 1/4, Eloisa não *respeitou* a ordenação da reta. Além disso, ela explicou, em entrevista, que considerou cada ponto isoladamente como elemento de uma quantidade discreta.

> "**Eloisa -** Eu contei, um, dois, três,..., quatorze, a minha unidade é quatorze. Tenho quatorze bolinhas. Ai você falou que três representam um quarto. Acho que eu até tentei dividir 14 por 4, não é, não dá...aí deixa eu contar, um, dois, três, quatro,..., nove."

No relato acima vê-se que Eloisa considerou que, se três pontos (que ela chama de bolinhas) representam 1/4 , então 3/4 correspondem a nove pontos. Por esse motivo ela contou nove pontos para localizar 3/4 e 6/8.

Eloisa ainda esclareceu:

> "**Eloisa -** Aí eu considerei só os pontos, eu não considerei os intervalos não, eu nem pensei em intervalo."

Ela revelou sua impressão sobre a reta quando perguntei quantos números existem entre dois números quaisquer.

> "**Eloisa -** Nenhum, né."

Se, no entendimento de Eloisa, entre dois números na reta não existe outro, é possível que ela pense nos pontos como elementos de uma quantidade discreta.

Eloisa dividiu o numerador pelo denominador, como fez na questão 3 da primeira fase (figura 39), obtendo a representação decimal das frações, mas esse procedimento não garantiu que ela resolvesse corretamente o problema. Quando perguntei a ela por que usou a representação decimal das frações, ela explicou:

> "**Eloisa -** Quem é um quarto em número decimal? Toda vez que eu vou fazer função, por exemplo, que eu acho em forma de fração eu jogo em número decimal. Porque número decimal, eu consigo visualizar exatamente, entre aspas, onde ele estaria. O 0,25 é mais próximo do zero do que do 1. Aí eu consigo fazer essa relação. Em fração eu geralmente não... a não ser que esses que a gente já conhece, igual 1/2, 1/4 que a gente usa muito, mas mesmo assim, mesmo conhecendo, eu coloco lá como número decimal."
>
> **Pesquisadora -** Entendi.
>
> "**Eloisa -** É automático. Pra eu colocar na reta, é automático eu mudar pra decimal."

A minha suspeita sobre a preferência de representar números fracionários na reta em sua forma decimal se confirmou com o depoimento de Eloisa. Isso pode estar indicando que sua crença de fração como divisão pode tê-la guiado nessa preferência.

Na questão 9, Eloisa localizou corretamente a fração 1/2. Mesmo assim, não calculou uma fração entre 1/4 e 1/2, (figura 42).

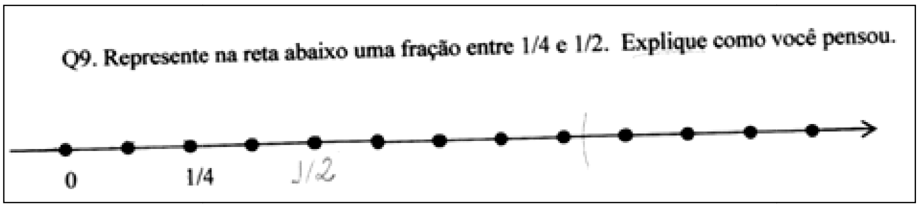


Figura 42 - Solução de Eloisa para a questão Q9 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Na entrevista E_3, quando pedi que Eloisa explicasse sua resposta, ela disse:

> "**Eloisa -** Aqui embora eu tenha contado, é como se eu tivesse ignorado esse primeiro ponto. Então se aqui é 1/4, ele é metade de um meio. Vamos supor que a nossa unidade fosse oito. Um, dois, três, quatro, cinco, seis,..., oito. Aqui. Não, não dá certo. Teria que ser 16, né? Pra ser 1/4 aqui. Pra eu considerar 2, um quarto. Se eu considerei dois como um quarto, quatro é um meio, foi assim que eu pensei. Sempre assim, eu nem considerei esse ponto não, um meio tá aqui. (risos)"

Eloisa apenas explicou como pensou e resolveu a questão com a minha ajuda, mas, em determinado momento, ela perguntou se a resposta poderia ser 1/3. Resolvendo a questão usando apenas o desenho do enunciado e constatando que a fração correspondente ao ponto que está entre 1/4 e 1/2 é 3/8, Eloisa se confundiu e disse que esse ponto era também 1/3. Foi então que percebi que Eloisa estava considerando o mesmo número (0,3333...) como representação decimal de 1/3 e 3/8, como mostra o diálogo na entrevista E_3.

> "**Eloisa -** Eu consigo qualquer outra. E 3/8, ele é também..."
>
> **Pesquisadora -** 3/8 ele não é 0,333...
>
> "**Eloisa -** É."
>
> **Pesquisadora -** Não.
>
> "**Eloisa -** Não? "
>
> **Pesquisadora -** Não porque aqui você falou comigo que 0,333... representa 1/3. Não foi isso que você falou?
>
> "**Eloisa -** Hum hum."
>
> **Pesquisadora -** 1/3 não é 3/8.
>
> "**Eloisa -** Mas a divisão dele dá, não dá não? Três por oito, (ela faz a conta) não aí muda, muda, mas chega perto, né..."

Para se certificar de que as representações decimais de 1/3 e 3/8 não são iguais, Eloisa precisou efetuar a divisão do numerador pelo denominador das frações.

A última pergunta que fiz para Eloisa, na entrevista E_3, foi: o que é uma fração para você? A aluna respondeu:

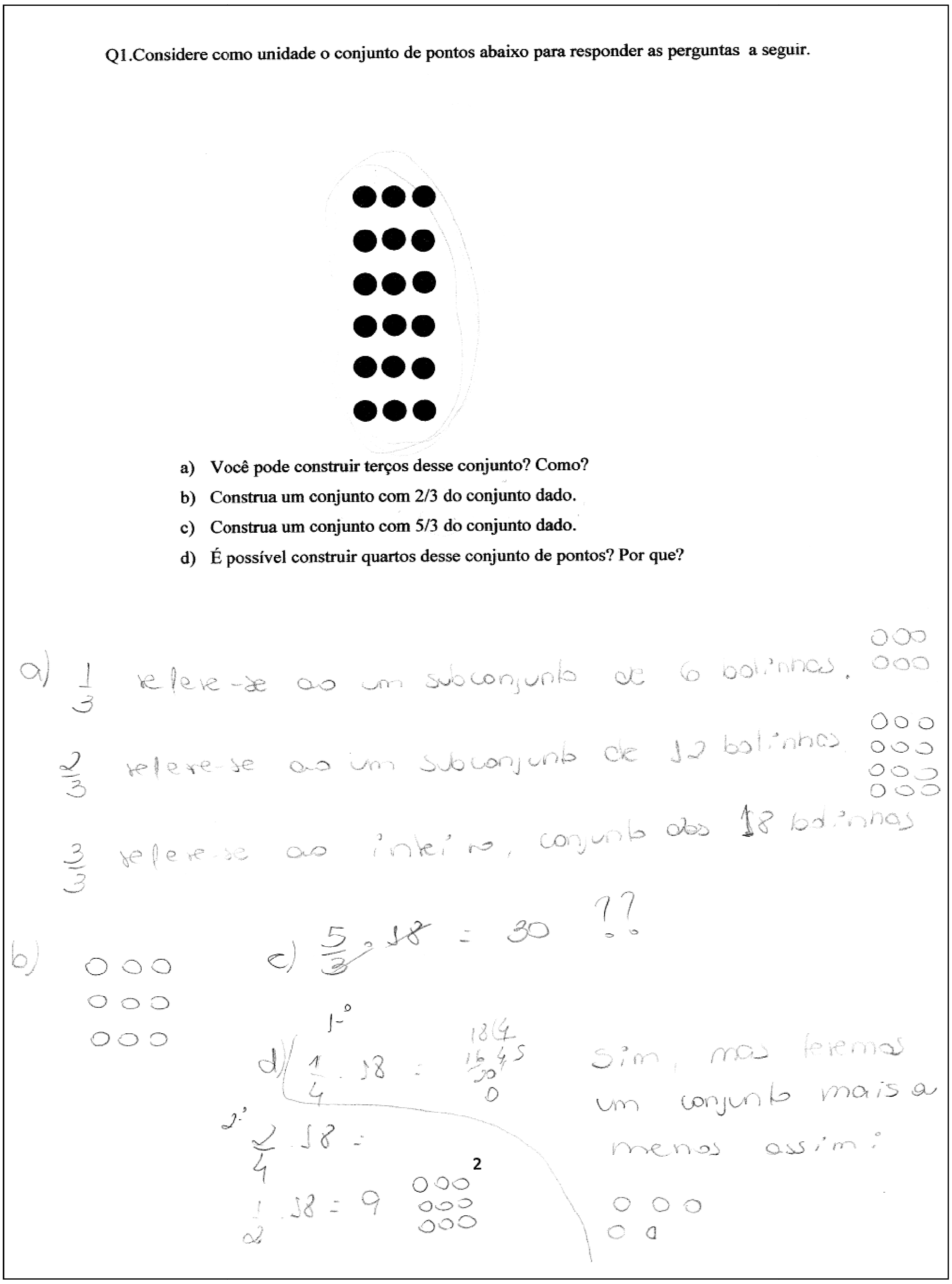
> "**Eloisa -** É uma parte de um inteiro. É uma parte de algo, de qualquer coisa que eu quiser trabalhar, eu consigo uma fração daquilo, eu consigo uma parte, eu consigo separar, né... partes iguais."

Essa maneira de compreender a fração dentro do domínio dos números racionais em detrimento de outras, embora não seja equivocada, pode comprometer um entendimento mais abrangente. Por exemplo, os enunciados dos problemas que se referiam a frações impróprias não foram bem entendidos por Eloisa. A fração imprópria foi entendida como uma parte da unidade. Na sua visão, a fração é principalmente (ou apenas) *parte de algo* e, portanto, deveria caber dentro da unidade. Em certo momento da entrevista, a aluna percebeu essa contradição quando revelou:

> "**Eloisa -** Mesmo porque quando tem, o meu numerador é maior que o meu denominador, isso me estranha, sabe, fica parecendo uma coisa impossível."

Será que o estranhamento de Eloisa acerca das frações impróprias se deve à necessidade de se utilizar mais de uma unidade para representá-las? Segundo Bertoni (2009), essa necessidade pode representar certo obstáculo cognitivo para o aluno.

Analisando a resolução apresentada por Eloisa para a questão Q1(QF_2) é possível que o obstáculo ao qual se refere Bertoni (2009) tenha se configurado, pelos sinais de interrogação no registro da aluna, (figura 43).



Q1.Considere como unidade o conjunto de pontos abaixo para responder as perguntas a seguir.

a) Você pode construir terços desse conjunto? Como?
b) Construa um conjunto com 2/3 do conjunto dado.
c) Construa um conjunto com 5/3 do conjunto dado.
d) É possível construir quartos desse conjunto de pontos? Por que?

a) $\frac{1}{3}$ refere-se ao um subconjunto de 6 bolinhas.

$\frac{2}{3}$ refere-se ao um subconjunto de 12 bolinhas

$\frac{3}{3}$ refere-se ao inteiro, conjunto dos 18 bolinhas

b)

c) $\frac{5}{3} \cdot \cancel{18} = 30$??

d) 1º $\frac{1}{4} \cdot 18 =$ 18|4 16 4,5 20 0

2º $\frac{2}{4} \cdot 18 =$

$\frac{1}{2} \cdot 18 = 9$

Sim, mas teremos um conjunto mais ou menos assim:

Figura 43 - Solução de Eloisa para a questão Q1 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Em entrevista pedi que Eloisa esclarecesse sobre as interrogações no registro. Ela disse:

> "**Eloisa -** Agora, esse aqui, construa um conjunto de 5/3, ele, ele eu não consegui imaginar não porque como que eu vou ter cinco terços, o terço, se é uma divisão por 3, como que eu vou ter cinco terços numa divisão de três, entendeu? Três terços é um inteiro, aí eu não consegui."

A fração imprópria não se encaixa na crença de Eloisa de uma fração ser divisão, e a contradição parece evidente para ela. A declaração da aluna mostra a impossibilidade de 5/3 caberem dentro do inteiro 3/3. Está claro, nesse depoimento, a procedência do estranhamento de Eloisa, ou a origem do obstáculo ao qual se refere Bertoni (2009). Também na resolução do item c, ainda da questão Q1, é possível detectar, pelo registro do sinal de interrogação, a dúvida de Eloisa (figura 44):

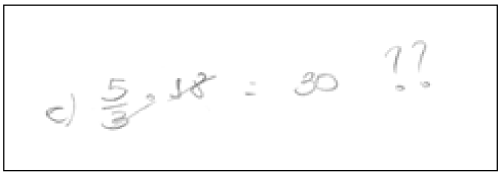


Figura 44 - Registro de Eloisa da solução da questão Q1c (QF_2).
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Como o resultado da operação é um número que representa uma quantidade maior que o total de pontos apresentado no enunciado da questão, Eloisa representa com a interrogação a sua dúvida: como uma fração de uma quantidade pode ser maior que a quantidade? Esse questionamento, entretanto, é previsível, de acordo com Miguel e Miorim (1986), quando se define a fração como parte de um todo. Ao se fazer isso, a palavra parte é tomada no seu sentido literal, ou seja, significando sempre um pedaço menor que o todo, o que dificulta a introdução da ideia de frações impróprias. Eis a justificativa de Eloisa para o sinal de interrogação:

> "**Eloisa -** Eu pensei na divisão propriamente dita, a gente tá dividindo 18 bolinhas em subconjuntos, de repente tem mais ?"

A fala de Eloisa confirma sua crença-padrão: a fração como divisão. Ainda que o enunciado solicite a construção de um novo conjunto a partir de uma unidade fracionária de um conjunto dado, a ideia que permanece é a de fração como uma parte menor que o inteiro. Assim, o conjunto a ser construído não poderia conter mais elementos que o conjunto inicial. Essa crença acerca das frações pode ser reflexo das experiências de Eloisa, com esses números, no ensino básico, como ela indica em entrevista.

> "**Eloisa -** Foi bem tradicional, a questão do modelo e faça igual, e na hora da prova não caía, caía diferente, e eu não sabia fazer diferente,

> eu só sabia fazer igual estava no livro. Com fração ficou um pouco defasado, eu não lembro muito não, mas fração ficou no meio do caminho, não foi legal não."

Bertoni (2008) descreve, como a seguir, uma experiência que poderia ser significativa na compreensão das frações que representam quantidades maiores que a unidade:

> *[...] em meio litro de leite há 2 quartos de litro; em meio litro mais metade de meio litro há 3 quartos de litro.* Ou outro: *em 1 1/4 litro de leite há 4 quartos de litro mais um quarto, são 5 quartos de litro de leite* (BERTONI, 2008, p. 227, itálico no original).

A autora destaca.

> Esses processos intuitivos, de reconhecimento das quantidades fracionárias na realidade, contrastam com processos escolares como *transforme 1 1/4 em fração imprópria* o qual por sua vez, é feito segundo o processo de multiplicar o número inteiro pelo denominador e somar com o numerador (BERTONI, 2008, p. 227, itálico no original).

O depoimento de Eloisa corrobora a citação de Bertoni (2008), quando a aluna afirma que o ensino foi *tradicional*, que ficou *defasado*, no *meio do caminho*. Com essas expressões é possível pensar que não houve um ensino satisfatório de frações de maneira a contribuir para uma compreensão significativa das frações impróprias.

Centurión (2006) considera fração uma ou mais unidades fracionárias reunidas, sendo que cada unidade fracionária é uma das partes iguais em que uma grandeza foi dividida. Considerando essa definição, é possível reunir tantas unidades fracionárias quanto se queira e, assim, obter uma fração maior que a unidade e, dessa maneira, a ideia de fração imprópria poderia surgir mais naturalmente.

No caso específico da questão Q1 do questionário QF_2, é necessário discutir alguns aspectos relacionados às orientações contidas no enunciado que podem ter contribuído para as decisões de Eloisa quando resolveu a questão, especificamente, a opção d. O enunciado refere-se a um conjunto de 18 pontos e, por esse motivo, não seria possível construir quartos de tal conjunto, uma vez que o ponto é indivisível. Por outro lado, embora o enunciado tenha esclarecido que se trata de um conjunto de pontos, a figura parece ter induzido Eloisa a considerar cada elemento como se fosse uma bolinha e, portanto, possível de ser dividida. Essa suspeita é confirmada no próprio registro de Eloisa ao desenhar uma meia bolinha (meia lua) e quando ela diz: a gente tá dividindo 18 bolinhas em subconjuntos. Dessa maneira, a aluna considerou a possibilidade de dividir o conjunto em quatro subconjuntos contendo quatro pontos e meio, respondendo ao item d da questão Q1, como mostra a figura 45.

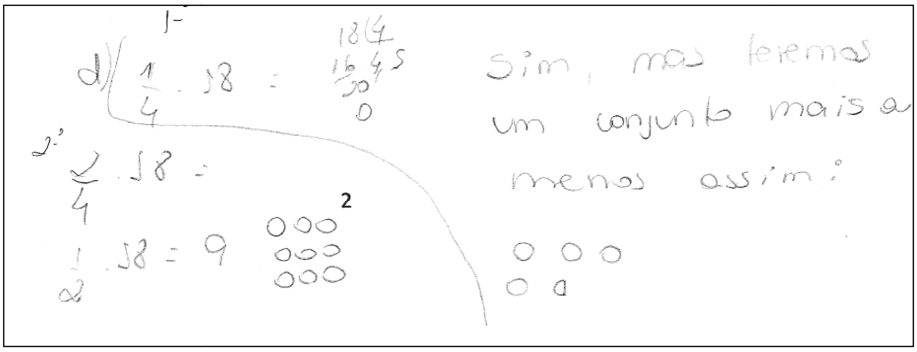


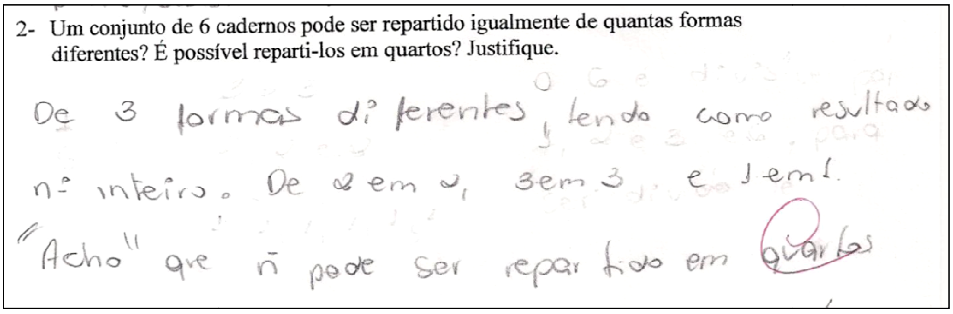
Figura 45 - Registro de Eloisa na solução da questão Q1d (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Ao utilizar a expressão *mais ou menos* no registro acima, Eloisa indicou que não estava convencida de que o conjunto poderia conter metade de uma *bolinha* (como ela passou a considerar cada elemento do conjunto). Ela argumentou sobre sua incerteza, quando perguntei por que ela havia escrito tal expressão.

> "**Eloisa -** Um quarto representa quatro bolinhas e meia, metade de uma bolinha, mas é aquela de não tava com aquela *certeza*, aí você põe um mais ou menos."

A pergunta do item d sugere ainda que os alunos avaliem a possibilidade de construir 2/4 e 3/4 utilizando 1/4 do conjunto de 18 pontos. Eloisa calculou 2/4 das *bolinhas*, usando a fração equivalente 1/2 das *bolinhas*, um subconjunto com nove *bolinhas*.

Já a questão 2 do questionário QF_1 Eloisa respondeu de maneira diferente de como respondeu a questão 1 analisada acima (figura 46).


2- Um conjunto de 6 cadernos pode ser repartido igualmente de quantas formas diferentes? É possível reparti-los em quartos? Justifique.

De 3 formas diferentes, tendo como resultado nº inteiro. De 2 em 2, 3 em 3, e 1 em 1.
"Acho" que ñ pode ser repartido em quartos

Figura 46 - Solução de Eloisa para a questão 2 (QF_1)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Diferentemente de sua resposta à questão Q1 aludida, Eloisa não repartiu os cadernos, respondendo que não seria possível repartir o conjunto de cadernos em quartos. Isso é interessante, pois sugere que, sob um ponto de vista funcional, faz sentido para ela existir meia bolinha, como no caso de meio limão, mas não faz sentido existir meio caderno.

Na resolução da questão Q4, a rotina da dupla contagem: dividir o inteiro em partes iguais e considerar algumas dessas partes pode ter induzido Eloisa a considerar a divisão da unidade em partes iguais ao denominador, independentemente da proposta da questão, (figura 47).

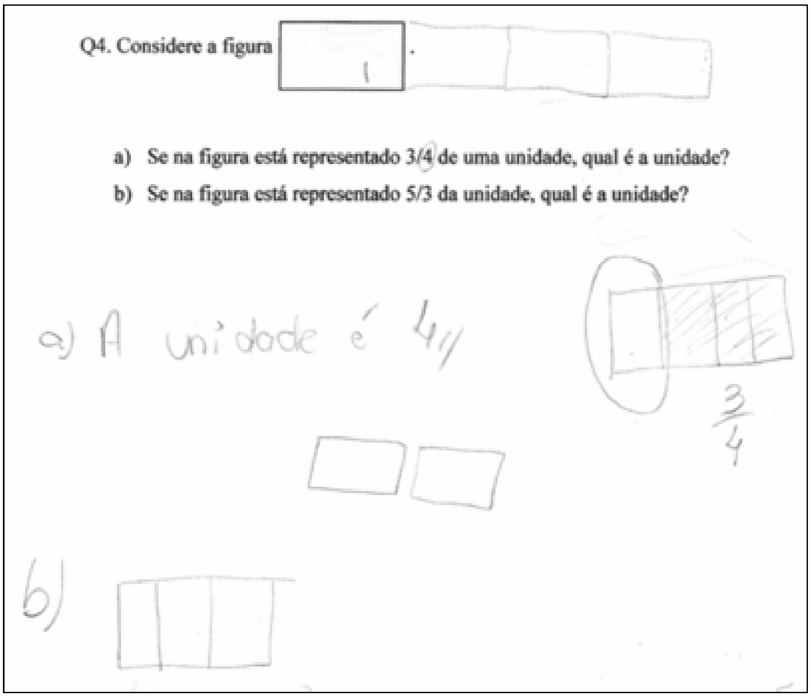


Figura 47- Solução de Eloisa para a questão Q4 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Nesse caso, para Eloisa, o número de partes em que o inteiro foi dividido pareceu corresponder à unidade, e foi preciso completar a figura até que ela representasse um todo dividido em quatro partes (a aluna triplicou o retângulo apresentado no enunciado). Assim, ela registrou: *a unidade é 4*.

Na entrevista E_3, Eloisa esclareceu:

> "**Eloisa -** Eu peguei, eu dividi ele, aqui eu não visualizei de jeito nenhum. Ele é três quartos, então o que seria um quarto dele, entendeu? Eu peguei ele e dividi como se ele fosse o meu inteiro, dividi em quatro partes, falei que a unidade é quatro (mas ela não

> divide o inteiro em quatro partes, ela triplica). Como aqui tá falando que é 3/4, existem mais três partes desse desenho que não estão expressas aqui.”

Quando disse na entrevista: que ele é três quartos, então o que seria um quarto dele, entendeu?, penso que Eloisa fez a pergunta que poderia levá-la à solução correta da questão. Algo porém, deve ter interferido no seu processo de pensamento. O que a impediu de prosseguir com esse raciocínio? O que a fez transformar o retângulo que representa 3/4, em 1/4, triplicando essa figura? O que a impediu de calcular a unidade fracionária? O que a levou a pensar que existem mais três partes que não estavam desenhadas ali? Minha hipótese foi que Eloisa poderia ter tido em mente a ideia de dividir a figura pelo número indicado no denominador, reproduzindo um procedimento-padrão. Esse pensamento pareceu mais forte e decisivo e, talvez, tenha ofuscado o que seria a busca por uma solução satisfatória para o problema. Sobre isso, Eloisa explicou em entrevista:

> “**Eloisa -** Eu levei em consideração aqui o 4, se eu tenho ¾, é alguém dividido em quatro ou um conjunto de quatro coisas, quatro retângulos.”

Também, o hábito, entre os alunos, de considerar as formas geométricas, por exemplo, retângulo, círculo, quadrado, como inteiros, e não como partes do inteiro, pode ter orientado as ações de Eloisa. Assim, quando o enunciado do problema se referiu a uma dessas figuras como parte do inteiro, essa proposta pode ter confundido a aluna. Na entrevista, ela esclareceu o seguinte:

> “**Eloisa -** É, é como eu não visualizei de jeito nenhum eu achei que era isso aqui, entendeu? Eu desenhei e pensei é o oposto, tipo pegadinha de prova, sabe?”

Eloisa desenhou um retângulo, dividiu em quatro partes, sombreou três e circulou uma das partes. Essa parte sombreada poderia ser a mesma figura apresentada no enunciado da questão? Tal suspeita não se confirmou na entrevista. Eloisa explicou seu desenho.

> “**Eloisa - N**um desenho a gente tem lá uma figura, um retângulo, eu posso dividir ele em quatro partes e eu coloro três dele, tanto representa 3/4, essa parte colorida, como representa 1/4 a parte não colorida. Mas o contrário também eu posso colocar se de repente desse aqui, dessa minha figura dividida em quatro eu tiro só a parte

colorida, claro sabendo que eu tenho quatro partes, ela pode ser a representação do oposto. Se aqui eu tenho um quarto né, eu pensei nessa ideia na hora. Fiz o desenho e até circulei aqui como se esse aqui fosse isso aqui, como aqui tá falando que é 3/4 , existem mais três partes desse desenho que não estão expressas aqui. Está apontando para um quarto, está apontando para os outros, que sobrou."

Ela insistiu em considerar o denominador como indicador da unidade. Esse depoimento indica não só a crença de Eloisa acerca de as frações serem divisões, mas também como ela adaptou o problema à sua crença. Na opção b, Eloisa apresentou um retângulo dividido em três partes como resposta e, na entrevista, afirmou que a unidade era 3.

"**Eloisa -** A unidade vai continuar sendo 3, eu pus até aqui. (Ela desenhou o retângulo dividido em três partes)."

Eloisa não avaliou que, se a figura representava 5/3 da unidade, então a unidade deveria ser um retângulo menor que o retângulo apresentado. Ela estranhou o enunciado da questão, uma vez que já havia declarado que a fração imprópria lhe parecia algo impossível. Referir-se à fração imprópria usando a ideia de fração como parte do todo implica uma contradição. Sob esse aspecto, a reação de Eloisa não foi nenhuma novidade. No entanto, considerando que ela declarou sua crença de fração como *parte de algo*, isso pode explicar como essa crença pode ter contribuído para a sua falta de entendimento da fração imprópria.

Observa-se que, na questão Q5 (figura 48) a ideia de fração como divisão também está nos registros da aluna, quando ela considerou que o denominador indica a unidade.

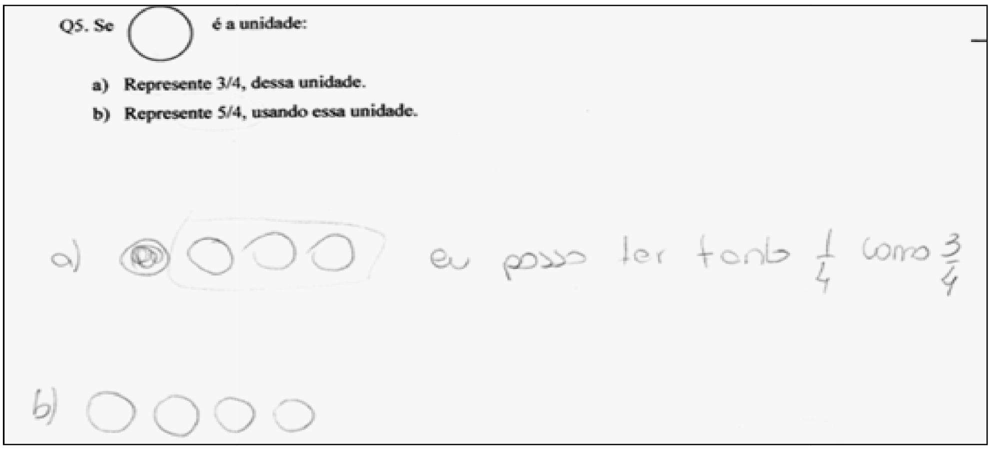


Figura 48 - Solução de Eloisa para a questão Q5 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Nessa questão, o que se pede é uma fração da unidade, no caso, o círculo. Eloisa entendeu o círculo como a unidade fracionária e assim compôs um conjunto com quatro dessas unidades. Mas, O enunciado, entretanto, é bastante claro ao solicitar 3/4 e 5/4 *dessa unidade*, de um círculo.

Em seu depoimento na entrevista E_3, Eloisa esclareceu:

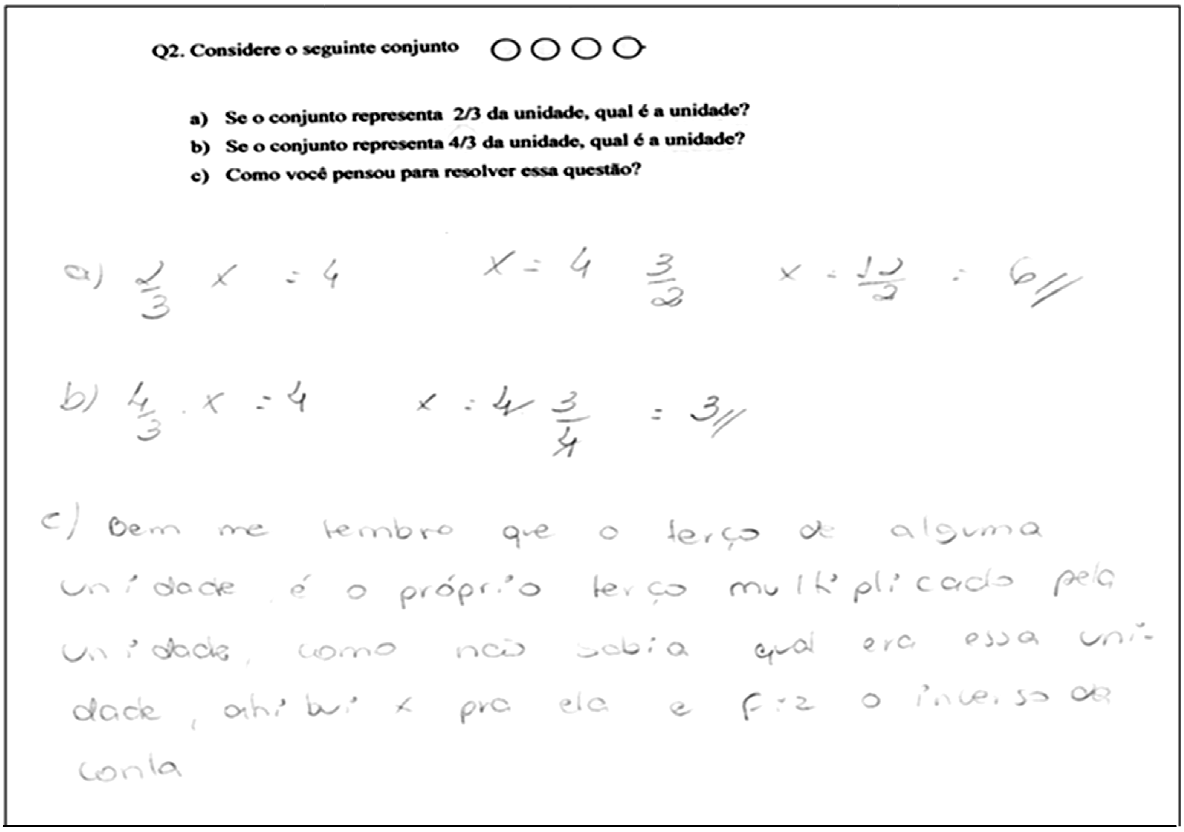
> "**Eloisa -** Eu não atinei não, continuei com o mesmo pensamento do exercício 4. Com certeza, mesmo pensamento."

Pedi à aluna que esclarecesse como pensou para resolver a opção b.

> "**Eloisa -** Vácuo, vácuo..."

Com essas palavras, Eloisa caracterizou sua incompreensão acerca dessa questão.

Na resolução da questão Q2, Eloisa reproduziu o enunciado por meio de uma expressão algébrica, (figura 49). O procedimento da aluna, embora correto, é um artifício que pode esconder a falta de compreensão do conceito.



Q2. Considere o seguinte conjunto ○○○○

a) Se o conjunto representa 2/3 da unidade, qual é a unidade?
b) Se o conjunto representa 4/3 da unidade, qual é a unidade?
c) Como você pensou para resolver essa questão?

a) $\frac{2}{3} x = 4 \quad x = 4 \; \frac{3}{2} \quad x = \frac{12}{2} = 6$

b) $\frac{4}{3} . x = 4 \quad x = 4 \; \frac{3}{4} = 3$

c) Bem me lembro que o terço de alguma unidade é o próprio terço multiplicado pela unidade, como não sabia qual era essa unidade, atribui x pra ela e fiz o inverso da conta

Figura 49 - Solução de Eloisa para a questão Q2 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

O registro de Eloisa mostra que ela explicou justamente a operação algébrica que fez. Ao ser questionada na entrevista E_3 sobre como resolveria o problema sem a ajuda da álgebra, Eloisa declarou:

> "**Eloisa -** Na matemática, não existe só uma maneira, por isso que ela é linda demais, mas identificar não. Sem o uso das contas eu ia quebrar minha cabeça até conseguir, né."

Eloisa considerou que existem outras maneiras de pensar, porém manteve a álgebra como principal recurso. A divisão da quantidade de bolinhas pelo numerador da fração que representa tal quantidade, a fim de obter a fração unitária, não foi uma estratégia possível para Eloisa. No entanto, ao resolver a equação, essa divisão foi realizada, apenas como um caminho para obter a resposta. Novamente, Eloisa mencionou na mesma entrevista sua dúvida acerca das frações que representam uma quantidade maior que o inteiro.

> "**Eloisa -** Quando tem, quando o meu numerador é maior que o meu denominador isso me estranha sabe, fica parecendo uma coisa impossível."

É necessário, nesse momento, analisar as questões Q6 e Q7, que também tratavam de frações impróprias.

Na questão Q6 (figura 50) apesar de se equivocar nas operações, Eloisa apresenta um resultado correto para as opções <u>a</u> e <u>b</u>, que envolvem a representação de fração imprópria.

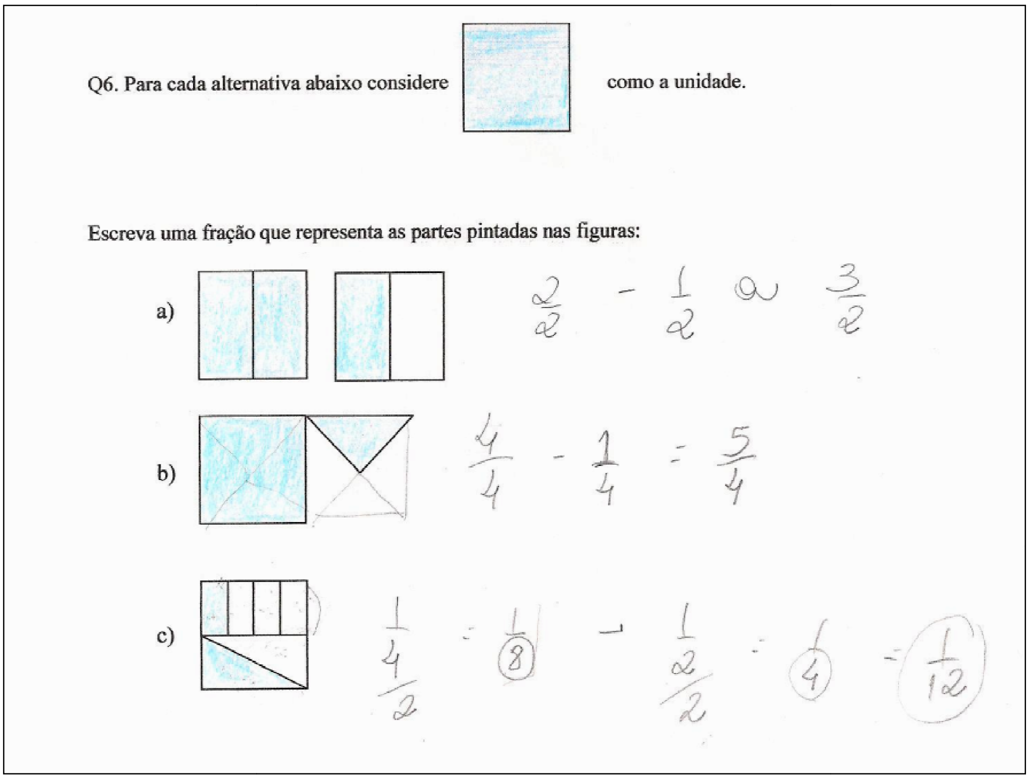


Figura 50 - Solução de Eloisa para a questão Q6 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Primeiramente analisei os registros de Eloisa nas opções a e b da questão Q6, comparando, em seguida, com os registros da aluna na resolução das questões Q5 e Q7. Essa lógica permitiu uma inferência acerca da dúvida de Eloisa com as frações impróprias. No caso da questão Q6, acima, entendo que Eloisa se enganou ao escrever o sinal de subtração no lugar do sinal de adição, e isso pode ter sido ocasionado por falta de atenção. Ocorreu-me também que Eloisa pudesse ter utilizado o traço (-) para separar as frações que representam cada figura em cada uma das opções e, não, como sinal de operação (figura 50). Essa hipótese foi descartada na entrevista E_3 quando a aluna não soube explicar por que utilizou o traço e revelou que escutou de um colega uma dica de que se tratava de um número maior que 1.

> "**Eloisa -** É, na verdade aqui tinha que ser soma, né? Já veio colorida, essa é a unidade (aponta para o quadrado inicial), então aqui é um inteiro, é um meio, mais um meio, mais um meio, três meios. O menos aqui, o menos aqui agora também não sei não porque que eu pus menos. Foi erro mesmo. [Risos] Eu sei que quando chegou aqui, não sei o que aconteceu que alguém falou, o Matheus falou alguma coisa, eu sei que eu voltei e acho que é por isso que eu fiz isso aqui (escreveu 3/2 e 5/4), mas eu acho que era isolado disso."

Assim como Eva, Eloisa escreveu corretamente, nessa questão, uma fração que representasse cada figura separadamente. Eva não apresentou uma única fração que representasse as partes pintadas das figuras e Eloisa ouviu a dica da resposta de um colega.

Na questão Q5 (figura 48) analisada anteriormente, Eloisa deveria ter representado por meio de um desenho as frações apresentadas no enunciado. Nessa questão ela errou não só a representação da fração imprópria, mas também a representação da fração própria. Já na questão 7 (figura 51), a aluna poderia escolher um tipo de grandeza para representar as frações.

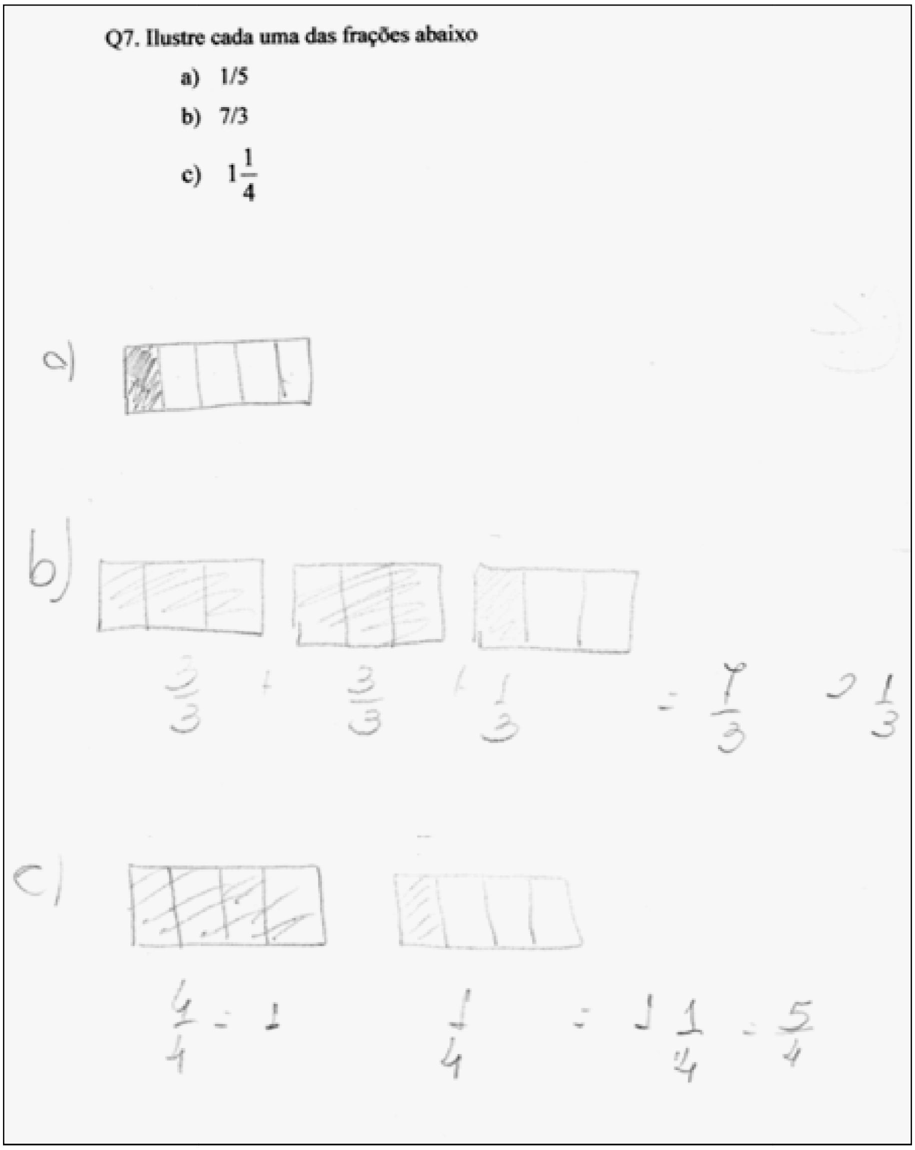


Figura 51 - Solução de Eloisa para a questão Q7 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Na questão acima Eloisa, opta pelo retângulo (grandeza contínua) para representar corretamente as frações.

Por que Eloisa conseguiu escrever corretamente as frações impróprias nas questões Q6 e Q7, tendo revelado anteriormente que tais frações parecem *algo impossível*, mas errou a representação da fração imprópria nas questões Q1 (letra c) e Q5 (letra b)? Acerca das dúvidas de Eloisa em relação às frações impróprias é possível inferir que, para ela, pensar a fração como parte de algo pode ter comprometido seu entendimento do significado da fração imprópria, como explico a seguir. Na questão Q1 do questionário QF_2, letra c, quando foi solicitada a construir um conjunto cujo número de elementos representava uma fração imprópria do conjunto dado, Eloisa pode não ter obtido sucesso em função de sua crença de fração como parte de algo apenas. Por outro lado, escreveu, corretamente, na questão 6, uma fração imprópria representando as partes coloridas de uma figura. Ou seja, por meio de um processo usual de contagem das partes e comparação das partes com o todo, ela obteve as frações. O mesmo acontecendo no caso em que representou corretamente, por meio de partições do retângulo, as frações impróprias solicitadas na questão Q7. Assim, se Eloisa se complicou quando teve que construir conjuntos que representavam frações impróprias, em contrapartida representou satisfatoriamente essas frações. Quando perguntei se ela se lembrava de ter se deparado com questões como essas em algum momento de sua vida escolar, ela respondeu:

> "**Eloisa -** Nunca. Eu nem lembro de ter trabalhado questões de fração assim, se não me engano, fração é na terceira série que a gente aprende, eu lembro que a minha professora focou muito na tabuada. Mas eu não lembro de ter trabalhado com fração dessa forma."

O depoimento de Eloisa revela como suas experiências com as frações no ensino básico podem *colorir* seu entendimento acerca desses números, como observou Nespor (1985). Os registros da resolução da questão Q2 (figura 49) corroboram essa inferência, indicando que, por meio do processo algébrico, a aluna conseguiu calcular o número de bolinhas que representam a fração 4/3. Ela revelou em entrevista que, sem o auxílio da álgebra, teria que quebrar a cabeça para resolver a questão.

Também, na questão Q10, Eloisa valeu-se da expressão algébrica para resolver o problema (figura 52).

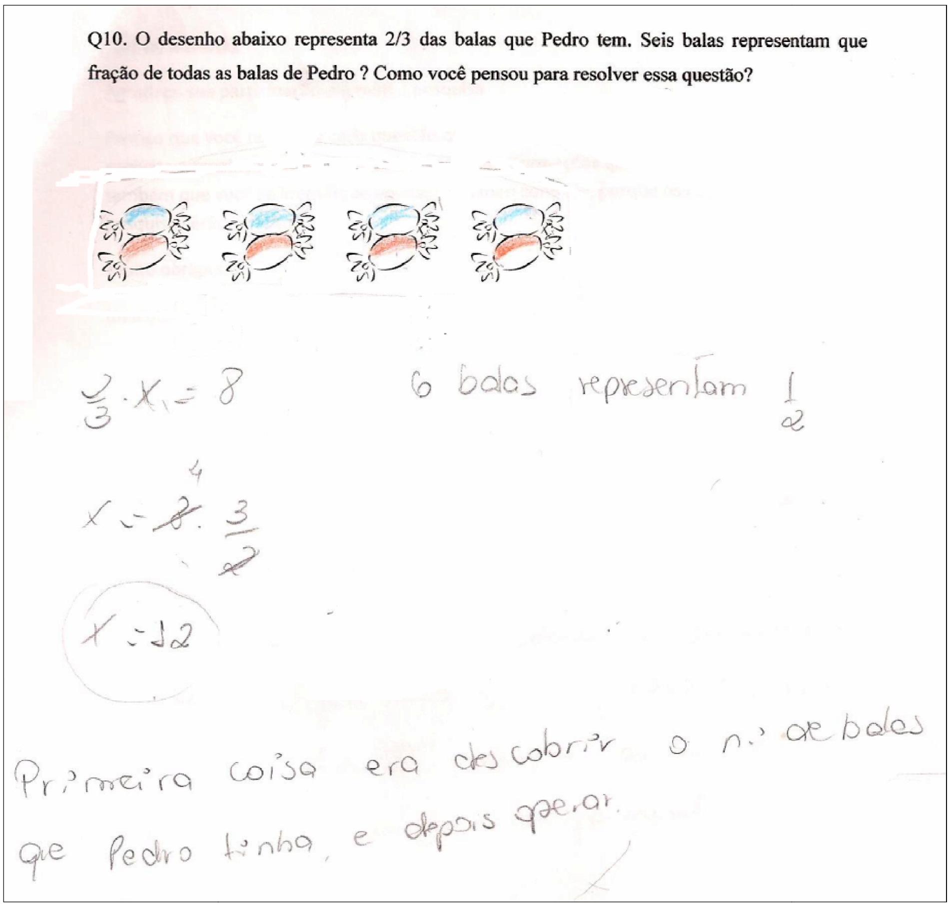


Figura 52 - Solução de Eloisa para a questão Q10 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Novamente, na entrevista, desafiei Eloisa a resolver o problema sem o auxílio da álgebra. Em seu depoimento, ela revelou a sua impossibilidade.

> “**Eloisa -** Dois terços de x é igual a oito, então o meu total de balas é doze, eu fiz algebricamente. Eu não conseguia ver que eu conseguia separar isso, então vou fazer do jeitinho que dá, usando o algoritmo.”

A explicação da aluna, registrada na figura acima, suscita a pergunta: qual é a abordagem de frações no ensino básico para esse tipo de problema? Eloisa revelou sua experiência com esse tipo de situação:

> “**Eloisa -** Bem, me lembro que o terço de alguma unidade é o próprio terço multiplicado pela unidade, como não sabia qual era essa unidade, atribuí x pra ela e fiz o inverso da conta.”

A explicação de Eloisa foi a tradução da expressão algébrica que ela considerou para resolver o problema. Se tivesse pensado que dividindo a quantidade de balas por dois teria a fração unitária do conjunto, Eloisa poderia chegar à resposta sem a utilização da variável.

Comentário

Diferentemente do caso de Eva, Eloisa não manifestou uma expressão física que pudesse ser considerada como uma manifestação de emoção de fundo. Entretanto, em entrevista, a aluna revelou que se sente apreensiva diante de problemas que envolvem frações. Quando solicitei a Eloisa que esclarecesse por que respondeu no questionário QC que gosta de resolver problemas de matemática, mas não gosta de resolver problemas que envolvam números fracionários, ela respondeu que quando vê fração em triângulo, seja em qualquer matéria, ela fica um pouco apreensiva. Com essa fala, Eloisa sugere que, ao se deparar com frações, uma emoção é manifestada, seja ela perceptível publicamente ou não. Considerando o papel regulador das emoções, conforme discutido por Damásio (2005b), é de se esperar que a apreensão de Eloisa tenha produzido um cenário desfavorável para ela trabalhar com frações e no qual se manifesta a dificuldade da aluna para compreender e lidar com esse conteúdo.

Eloisa não se lembrou nitidamente de suas experiências com as frações no ensino básico, mas mencionou alguns fatos importantes. Assim como Eva, Eloisa destacou a relevância do ensino dos números inteiros no ensino básico, e, em sua recordação, também está a ênfase nas quatro operações e na memorização da tabuada. Por outro lado, ela garantiu, assim como Eva, que não havia resolvido questões como as que foram propostas nos questionários QF_1 e QF_2. A dúvida sobre frações impróprias ficou evidente nos depoimentos da aluna, que relatou, em entrevista, desconhecer a representação desses números em um desenho, por exemplo, embora tenha conseguido representar esse tipo de fração usando retângulos.

Assim como no caso de Eva, a análise e interpretação do caso de Eloisa apontam para uma ligação entre as experiências da aluna com as frações no ensino básico e a formação de suas crenças e de seus sentimentos em relação a esse conteúdo. Ainda, Eloisa foi bastante enfática, quando se referiu à sua escolarização matemática básica, dizendo que os alunos foram *treinados* a encontrar números inteiros como resposta a um problema. A expressão da aluna sugere a valorização da compreensão dos números inteiros e o descaso com o ensino das frações. De fato, ao dizer que não havia se deparado com questões como as que foram resolvidas nessa pesquisa, Eloisa manifesta uma experiência limitada com esse conteúdo, se considerarmos sua escolaridade.

No caso de Eloisa, assim como no caso de Eva, é possível admitir as experiências escolares da aluna com as frações como a possível origem de um *processo cíclico*, em que crenças e dificuldades são manifestadas, com reflexos em sua prática profissional (figura 53).

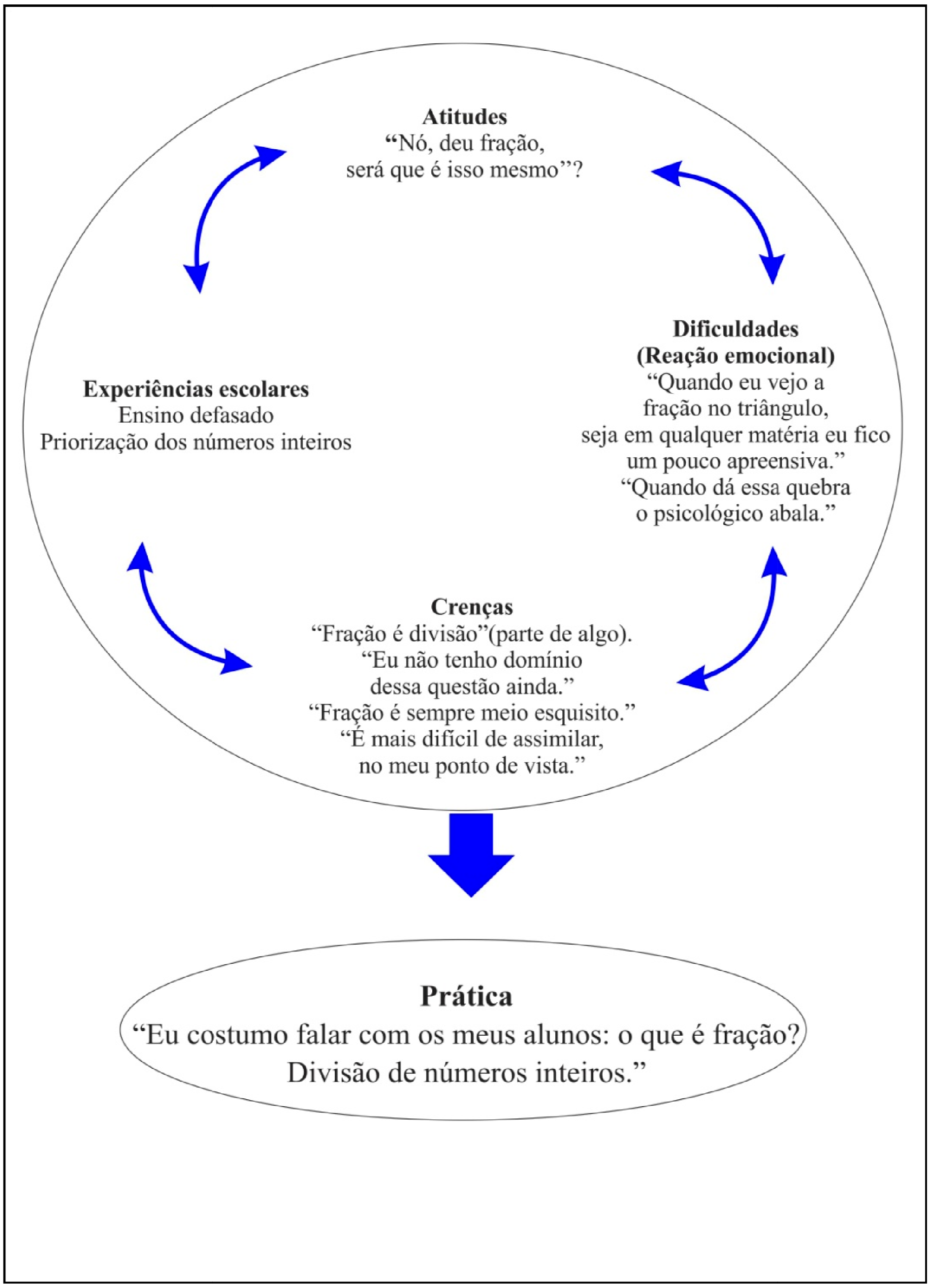


Figura 53 - Relação cíclica entre afetos e aprendizagem e reflexos na prática pedagógica - caso de Eloisa
Fonte: Elaborada pela autora da tese, 2013.

As experiências escolares de Eloisa, cuja ênfase foi dada aos números inteiros, à tabuada e que, segundo ela, fazem parte de um ensino defasado, configuram-se, neste estudo, como a origem das crenças da aluna. As crenças, por sua vez, provocam reações emocionais negativas, por exemplo, apreensão diante das operações com as frações. Tais reações podem acarretar atitudes, por exemplo, desconfiar da resposta de um problema quando esta é uma fração. As relações que se estabelecem nesse círculo não são unilaterais e este estudo indica as experiências escolares como ponto de partida.

CAPÍTULO VI
ESTUDO DE CASO 3: TIAGO

Na primeira fase da pesquisa, no questionário QF_1, Tiago acertou duas questões (questões 1 e 4), duas ele errou (questões 3 e 5) e resolveu uma parcialmente (questão 2). Assim como Eva e Eloisa, Tiago errou as questões 3 e 5. Diferentemente, de Eva e Eloisa porém, Tiago acertou parcialmente a questão 2.

Das questões propostas no questionário QF_2, Tiago acertou as questões Q3, Q5 e Q8, errou as questões Q6, Q10, e acertou parcialmente as questões Q1, Q2, Q4, Q7 e Q9. As questões que Tiago errou na segunda fase de pesquisa não coincidiram com as questões que Eva e Eloisa erraram. As tabelas 3 e 4 mostram o desempenho dos três alunos nas duas fases da pesquisa.

TABELA 3
Desempenho de Eva, Eloisa e Tiago no questionário QF_1

Primeira fase					
Alunas	Questões				
	1	2	3	4	5
Eva	A	A	E	A	E
Eloisa	A	A	E	A	E
Tiago	A	AP	E	A	E

Legenda
A - Acertou
AP - Acertou Parcialmente
E – Errou

Fonte: Elaborada pela autora da tese, 2013.

TABELA 4
Desempenho de Eva, Eloisa e Tiago no questionário QF_2

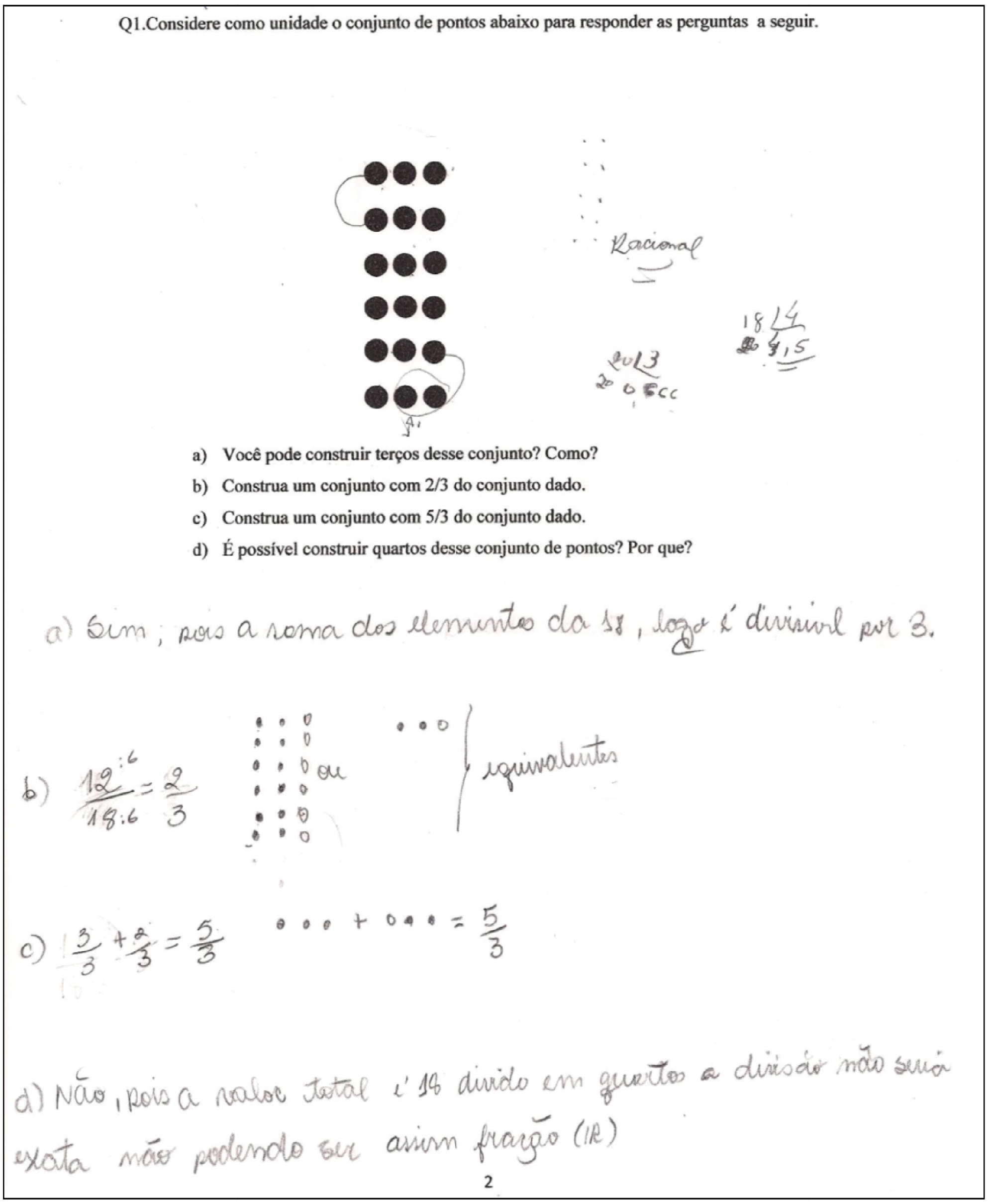
Segunda fase										
Alunos	Questões									
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Eva	A	E	E	E	AP	A	AP	AP	E	AP
Eloisa	AP	A	A	E	E	AP	A	E	E	A
Tiago	AP	AP	A	AP	A	E	AP	A	AP	E

Fonte - Elaborada pela autora da tese, 2013.

A crença de Tiago em relação ao entendimento do que é uma fração se mostrou, como no caso de Eva e de Eloisa, relacionada à ideia de divisão. Na entrevista E_1, ao ser perguntado o que era uma fração, Tiago respondeu:

> "**Tiago -** A fração é a divisão de dois números inteiros."

Posteriormente, na entrevista E_3, solicitei a Tiago que explicasse como resolveu a questão Q1 abaixo, (figura 54).



Q1.Considere como unidade o conjunto de pontos abaixo para responder as perguntas a seguir.

Racional

a) Você pode construir terços desse conjunto? Como?

b) Construa um conjunto com 2/3 do conjunto dado.

c) Construa um conjunto com 5/3 do conjunto dado.

d) É possível construir quartos desse conjunto de pontos? Por que?

a) Sim; pois a soma dos elementos da 18, logo é divisível por 3.

b) $\frac{12^{:6}}{18_{:6}} = \frac{2}{3}$ ou equivalentes

c) $\frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ = $\frac{5}{3}$

d) Não, pois o valor total é 18 divido em quartos a divisão não seria exata não podendo ser assim fração (IR)

2

Figura 54 - Solução de Tiago para a questão Q1 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

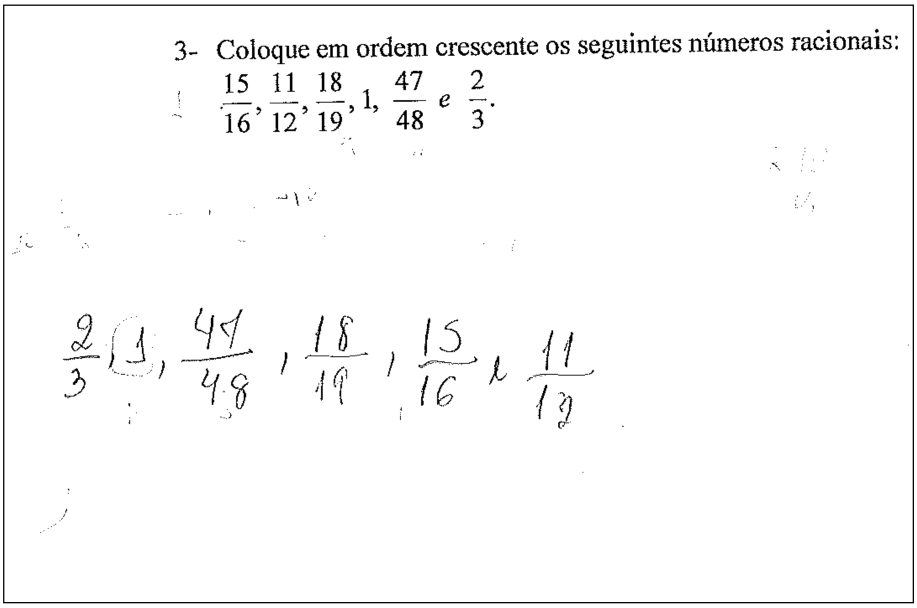
Primeiro, no registro acima do item b, parece que Tiago considerou como unidade um conjunto de três pontos ao invés do conjunto de dezoito pontos. Ele explicou o motivo dessa consideração como a seguir.

> "**Tiago -** Então, eu peguei a representação só de três, pra conta ficar menor."

Observa-se também, nesse registro, que Tiago dividiu o numerador pelo denominador das frações, nos casos dos itens a e d, buscando um número decimal. Esse é um procedimento que o aluno julga natural e mais fácil quando necessita lidar com as frações, como ele disse na entrevista.

> **Pesquisadora -** Você tem sempre mais facilidade em usar primeiro o decimal?
>
> "**Tiago -** Mas o decimal é muito mais prático."

Na questão 3 (figura 55) do questionário QF_1, Tiago se enganou e colocou alguns números em ordem decrescente.



3- Coloque em ordem crescente os seguintes números racionais:
$\frac{15}{16}, \frac{11}{12}, \frac{18}{19}, 1, \frac{47}{48}$ e $\frac{2}{3}$.

$\frac{2}{3}, 1, \frac{47}{48}, \frac{18}{19}, \frac{15}{16}$ e $\frac{11}{12}$

Figura 55 - Resolução de Tiago para a questão 3 (QF_1)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Uma explicação para esse erro pode ser devido à hipótese de que Tiago tenha se fixado nos denominadores das frações e concluiu que aquela que apresentava maior denominador seria a menor. Considerando essa possibilidade, verifiquei que Tiago escreveu os números 2/3 e 1 em uma sequência equivocada.

Na entrevista E_2, Tiago disse que fez a divisão do numerador pelo denominador.

> "**Tiago -** Ah, porque eu fiz a divisão, transformei para número decimal."

E completou:

> "**Tiago -** Só que fração assim não tem que transformar, tem que olhar o denominador."

Nos registros de Tiago, é possível identificar que algumas frações foram transformadas em números decimais, mas, mesmo usando esse recurso, ele não escreveu corretamente os números em ordem crescente. Ele se referiu equivocadamente a uma regra, pois, apenas comparando os denominadores, não é possível estabelecer a ordem crescente dos números. É preciso também avaliar os numeradores. De toda maneira, a divisão parece ter sido a primeira ideia que ocorreu a Tiago para resolver a questão. Sem desmerecer a iniciativa legítima do aluno de dividir o numerador pelo denominador das frações para compará-las, o que chama a minha atenção é que, mesmo usando esse procedimento, ele não apresentou uma solução correta.

Operar com as frações pode não ser uma opção de Tiago, pois ele disse que o decimal é muito mais prático.

Por outro lado, pode ser que haja uma predisposição emocional desse aluno em não operar com as frações. Quando questionado sobre como se sente quando tem que lidar com um problema que envolve fração, na entrevista E_3, o aluno relatou:

> "**Tiago -** Você vê a prova toda, aí já bloqueia na fração aí embola tudo."

Essa fala de Tiago foi bastante significativa, pois se referiu, tanto ao seu estado emocional, indicando dificuldade, quanto às consequências que esse estado pode provocar em seu desempenho. Por exemplo, na resolução da questão 5 (figura 56), talvez vejamos um reflexo desse bloqueio/*embolamento* a que Tiago se refere. É possível perceber que Tiago resolveu a questão e, em seguida, apagou o que havia feito, deixando escritos apenas os valores de A e B e a resposta assinalada: um número inteiro.

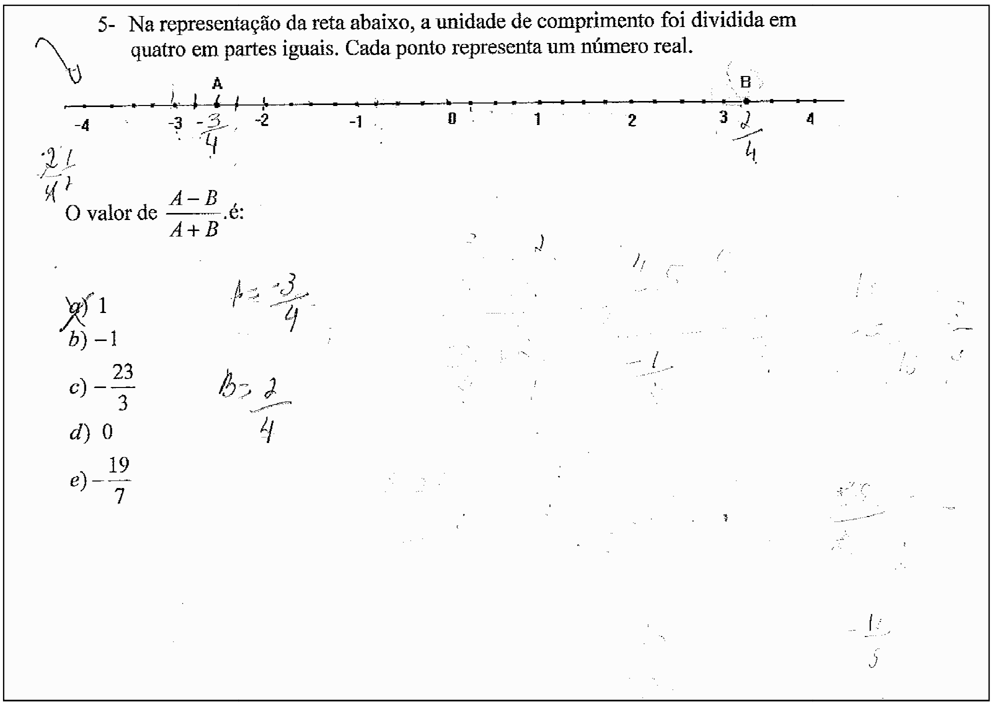


Figura 56 - Solução de Tiago para a questão 5 (QF_1)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Quando escreveu A = - 3/4 e B = 2/4, Tiago parece ter considerado cada intervalo separadamente, da seguinte maneira: contou três pontos de -3 até o ponto A e dois pontos de 3 até B. Como foi dito no enunciado que cada intervalo estava dividido em quatro partes iguais, ele considerou A como -3/4 e B como 2/4. Ao identificar os pontos A e B dessa maneira, ele mostrou uma compreensão equivocada da reta que o levou a errar a questão. Por outro lado, foi possível verificar no registro original da resolução da questão as operações realizadas por Tiago com os números que ele achou. As operações de adição e subtração foram realizadas corretamente com os valores por ele arbitrados, porém, para efetuar a divisão das frações, ele se complicou. Ao solicitar a Tiago esclarecimentos sobre sua resolução na entrevista E_2, ele relatou:

> "**Tiago -** Ah, olha professora, eu não lembrava desse negócio!"

Já, na entrevista E_1, Tiago revelou o que lhe causa medo e o impede de ter êxito em situações em que tem que lidar com as frações.

> "**Tiago -** O que me dá mais medo são aquelas compostas, que tem uma em cima da outra... aí o bicho pega. Esse medo me mobiliza para fazer o errado. Às vezes, eu faço a questão e pelo nervosismo... o primeiro resultado que eu achar eu deixo, eu não confiro, e quando eu vejo depois, se eu tivesse relaxado mais, eu teria conseguido. Quando eu vejo aquela fração com duas, três frações, aquele tanto de cálculo,... meu Deus como é que eu resolvo isso? Me dá pane só de olhar."

Nesta pesquisa, não considero separados afeto e cognição e, sendo assim, entendo que a dificuldade de Tiago em lidar com as frações é proveniente de fatores cognitivo/afetivos, como revelado pelo próprio aluno ao declarar que esse medo o mobiliza para fazer o errado. A esse respeito, Damásio (2005) diz que as emoções têm a função de regular as decisões do indivíduo. Damásio (2005) considera, ainda, que a consciência de uma emoção pode trazer benefícios para o indivíduo e exemplifica.

> [...] se vier a saber que o animal ou a situação X causa medo, você tem duas formas de se comportar em relação a X. A primeira é inata, você não a controla; além disso, não é específica de X: pode ser causada por um grande número de seres, objetos e circunstâncias. A segunda forma baseia-se na sua própria experiência e é específica de X. O conhecimento de X permite-lhe pensar com antecipação e prever a probabilidade de sua presença num dado meio ambiente, de modo a conseguir evitar X antecipadamente, em vez de ter de reagir a sua presença numa emergência (DAMÁSIO, 2005, p.161).

A fala de Tiago, analisada à luz da citação de Damásio (2005), indica que o aluno tem consciência de sua emoção de medo ao lidar com as frações e das consequências de sentir tal emoção. Ao usar a palavra *mobiliza*, Tiago mostra que o medo parece levá-lo a tomar uma decisão que, como ele mesmo reconhece, é desfavorável.

As questões Q8 e Q9 propostas no questionário QF_2 envolviam, também, a representação fracionária dos números racionais na reta. Minha expectativa para essas questões era que os alunos observassem os pontos já identificados na reta de maneira a usá-los como referência para localizar os demais pontos solicitados.

Tiago resolveu satisfatoriamente a questão Q8, (figura 57).

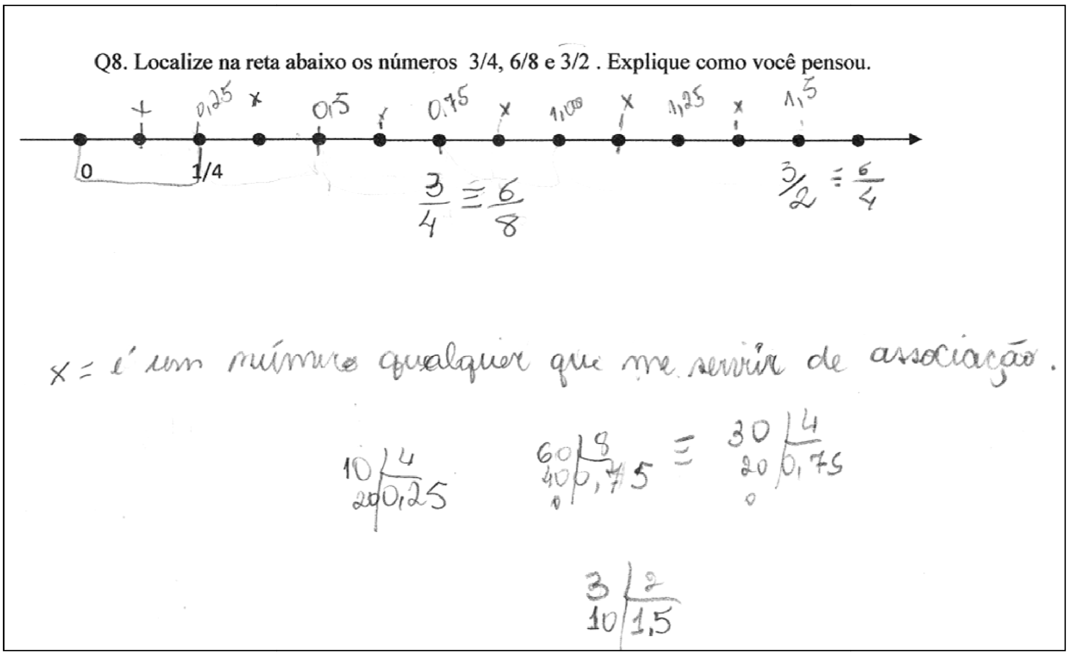


Figura 57 - Solução de Tiago para a questão Q8 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

No registro dessa questão, vemos que Tiago realizou a divisão do numerador pelo denominador das frações para encontrar os decimais correspondentes. Como já discutido, tal procedimento pode ser devido tanto a sua crença de que *fração é a divisão de dois números inteiros*, revelada na entrevista E_3, quanto a uma estratégia usual dos alunos, na qual localizar decimais na reta é mais fácil (ou prático) e, ainda, a uma combinação dessas.

Na entrevista E_3, pedi que Tiago explicasse como pensou para resolver a questão Q8, mesmo tendo resolvido corretamente a questão. Tiago disse:

"**Tiago -** Eu fiz a associação decimal."

Pedi que Tiago identificasse a medida correspondente a 1/4 e que, a partir dessa informação, tentasse identificar as frações na reta. O aluno resolveu a questão rapidamente usando essa estratégia, mas mesmo assim declarou:

"**Tiago -** Mas o decimal é muito mais prático."

A última fala de Tiago confirma minha hipótese de que os alunos julgam mais prática a utilização do número racional na sua forma decimal que na forma fracionária, quando se trata de localizar esses números na reta. Entretanto, em uma questão como a Q8, em que a medida correspondente a 1/4 estava explicitada e o que se pedia era a localização de múltiplos de 1/4, por que os alunos sentem necessidade de transformar a fração em número decimal se bastava apenas fazer a contagem na reta dos múltiplos de 1/4? O que leva os alunos a esse tipo de procedimento? Por que os alunos não entenderam com naturalidade a contagem dos intervalos nesse caso? Sem desmerecer a estratégia utilizada pelos alunos para resolver essa questão e considerando que o que pode ser um procedimento fácil para algumas pessoas pode não ser para outras, penso estar subtendido nos procedimentos dos alunos algo mais do que simplesmente considerar a representação decimal como um meio mais fácil ou prático para resolver uma questão como a Q8. É possível que esses alunos tenham sido submetidos a experiências que deram pouca importância à representação fracionária dos números na reta, valorizando mais a representação decimal. No caso de Tiago, ele declarou que o ensino das frações foi o *basicão* o que aumenta minha suspeita sobre os motivos de sua preferência sobre os números decimais no caso da questão Q8. O mesmo pode ter ocorrido com Eva e Eloisa, que também declararam experiências simples com as frações como a *divisão da pizza*, o *cálculo do mmc*, *o estudo priorizado dos números inteiros*. Para resolver a questão Q9, Tiago recorreu também à representação decimal das frações, como é possível ler na sua justificativa, (figura 58).

Analisando a resposta de Tiago sem considerar sua justificativa, parece que ele foi induzido a *completar* uma sequência decrescente dos denominadores 4 e 2 ao marcar a fração 1/3, não considerando a contagem e a identificação dos pontos entre 0 e 1/4, e entre 1/4 e 1/2.

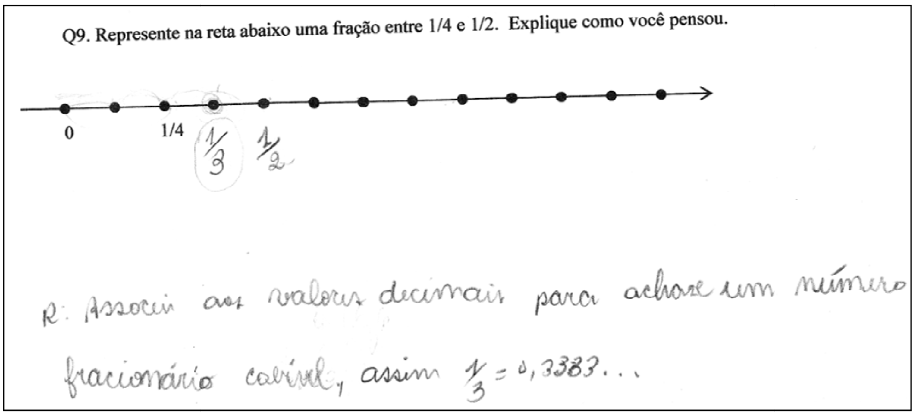


Figura 58 - Solução de Tiago para a questão Q9 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Na entrevista E_3, quando pedi esclarecimentos sobre a resolução da questão Q9, Tiago respondeu:

"**Tiago -** Pelo decimal: 1/4 vale 0,25, 1/2 vale 0,5. Um número entre eles é 1/3."

Assim como Eva e Eloisa, Tiago pensou em 1/3 como uma resposta para a questão Q9, embora Eva não tenha registrado 1/3 na reta. Entretanto, Eloisa e Tiago se equivocaram ao responder que o ponto assinalado na figura entre 1/4 e 1/2 representa 1/3, e Tiago, diferentemente de Eloisa, identificou rapidamente o número fracionário 3/8 como uma resposta usando o desenho do enunciado da questão.

Retomando a discussão instigada pela resolução da questão Q8, o fato de Tiago, diante de minhas considerações, conseguir reconhecer facilmente como uma resposta da questão Q9 a fração 3/8, também pode indicar que a persistência na utilização da forma decimal pode não passar de um procedimento-padrão decorrente da crença de que a fração é a divisão de dois números inteiros. Na entrevista E_3, depois de resolvermos a questão Q9 sem o uso do número decimal, eu disse a Tiago que era de meu interesse conhecer a sua estratégia para resolver essa questão, ao que ele respondeu:

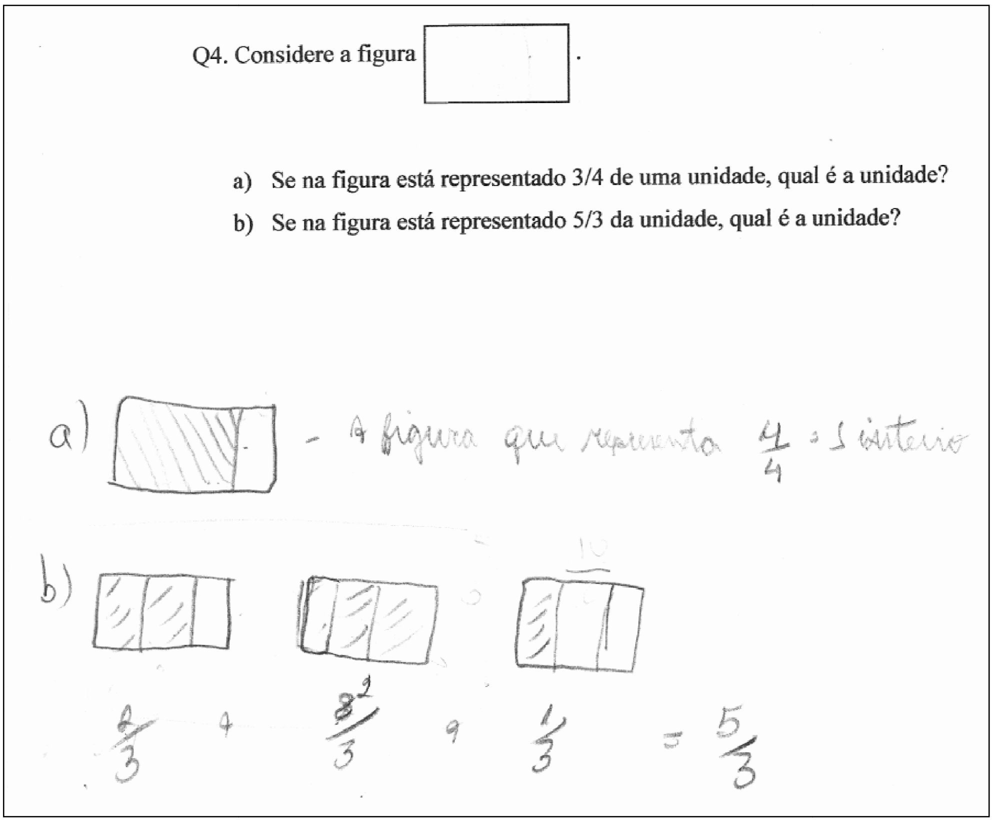
"**Tiago** - A estratégia é a sua, professora!"

Pesquisadora - É uma boa estratégia a minha?

"**Tiago** - Muito bom!!! É mais rápido pela geométrica."

O que Tiago chamou de *geométrica* foi a utilização da reta como estava no enunciado, sem o uso da divisão. Com a fala de Tiago entendi que, para ele, essa era uma maneira diferente de pensar os números fracionários na reta. Infelizmente não tive oportunidade de saber como Tiago resolveria daquele momento em diante questões em tivesse que lidar com os números fracionários na reta.

Na questão Q4, Tiago resolveu satisfatoriamente a opção a, que se referia a uma fração própria, mas se complicou ao responder a opção b referente a uma fração imprópria (figura 59).


Q4. Considere a figura .

a) Se na figura está representado 3/4 de uma unidade, qual é a unidade?
b) Se na figura está representado 5/3 da unidade, qual é a unidade?

a) - A figura que representa $\frac{4}{4}$ = 1 inteiro

b) $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

Figura 59 - Solução de Tiago para a questão Q4 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Por se tratar de uma fração que representa uma quantidade maior que o inteiro, Tiago pode ter sentido a necessidade de considerar dois outros retângulos além do que estava no enunciado da questão, para resolver o item b. Se isso ocorreu, minha suspeita foi que ele dividiu cada retângulo em três partes, de acordo com o entendimento de dividir o inteiro em partes iguais ao denominador, e usou a dupla contagem. Por outro lado, para representar 5/3, nessa perspectiva, Tiago não registrou que tivesse avaliado esgotar todas as partes de uma unidade. Esse registro mostra que Tiago considerou 2/3 de cada unidade e um terço de uma terceira unidade. Mesmo o enunciado se referindo ao retângulo como 5/3 da unidade, Tiago pareceu não se dar conta de que a unidade seria uma quantidade menor que a figura apresentada.

Na entrevista E_3, pedi que Tiago esclarecesse suas respostas à questão Q4. O aluno explicou:

> “**Tiago -** Eu dividi em duas unidades de terços, hachurei e colori 3/3, que vai dar um inteiro. Depois eu peguei mais 2/3, e depois eu peguei mais 1/3. Por que eu fiz isso?...”

O próprio aluno pareceu não entender o que havia feito. Com a explicação de Tiago entendi que ele estava considerando todo o segundo retângulo como hachurado (o que estava indicado pelo número 1 no numerador da segunda fração), mas mesmo assim sua fala confirmou a minha suspeita da dupla contagem, sem refletir sobre a solicitação da questão, tal como fez Eloisa.

Para a questão Q6 (figura 60), minha expectativa era que Tiago não tivesse dificuldade para resolver as opções a e b, mas que poderia estranhar a proposta feita na opção c, uma vez que a figura apresentava divisões não convencionais.

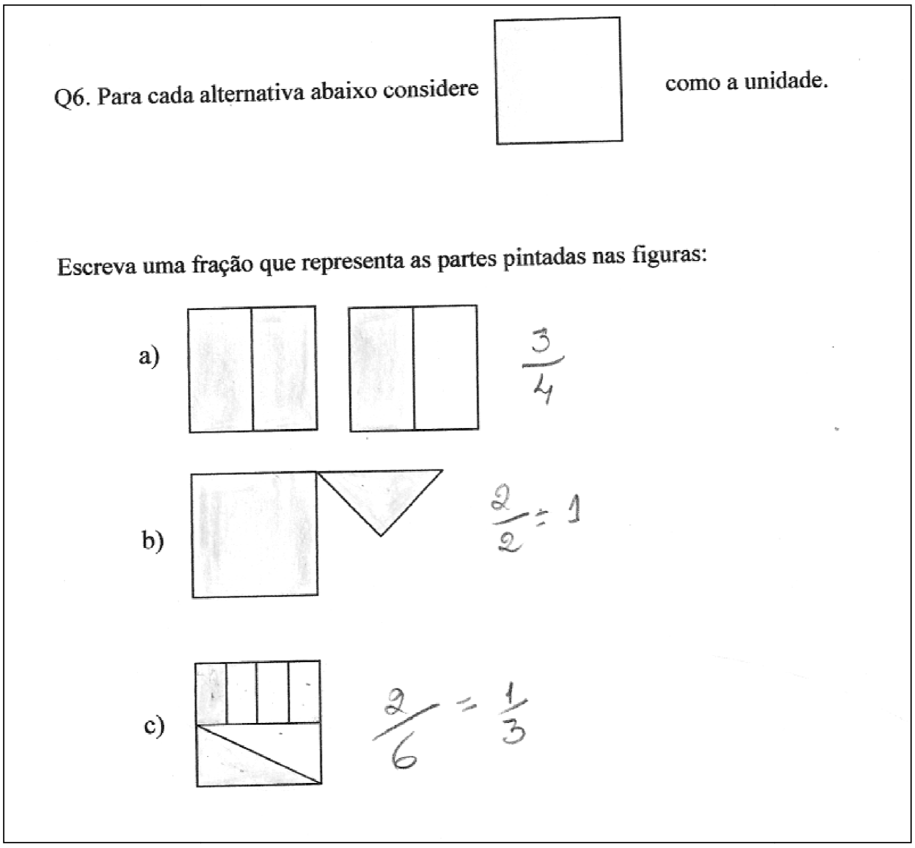


Figura 60 - Solução de Tiago para a questão Q6 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

No registro acima, para resolver as opções a e b, Tiago não observou a unidade apresentada no enunciado. Na opção a, considerando a unidade como dois quadrados e, por meio da dupla contagem, ele representou a parte sombreada como 3/4. Na opção b, o fato de o segundo quadrado não apresentar uma divisão mais explícita, parece ter levado Tiago a fazer a dupla contagem da seguinte maneira: duas partes tomadas de duas partes dadas. Ainda, ele escreveu como resposta o número 1, indicando que a parte sombreada se referia ao inteiro. Na opção c, a contagem dupla não ajuda a resolver o problema, pois o todo não estava dividido explicitamente em partes iguais. Assim, era necessário verificar a equivalência entre as áreas das partes sombreadas e relacionar essas partes com o todo. Essa não foi a decisão de Tiago.

Ao explicar como pensou para resolver essa questão na entrevista E_3, Tiago naturalmente e, sem qualquer intervenção de minha parte, corrigiu as opções a e b . Essa ação imediata do aluno, o diagnóstico, e a correção que ele próprio fez de seus erros estão em consonância com a manifestação de suas emoções quando está diante de problemas que envolvem frações, pois, como ele mesmo disse, o medo mobiliza-o para fazer o que não é certo, mas, quando relaxa, consegue resolver corretamente um problema.

Em entrevista perguntei a Tiago sobre sua impressão acerca da questão Q6 e mais especificamente da opção c, e ele disse:

> “**Tiago -** Não é o tradicional que se estuda na escola.”

A avaliação que o aluno fez da questão revela como ele vê que esse conteúdo é abordado na escola. Completando sua fala anterior, ele disse:

> “**Tiago -** Sai do paradigma da pizza, que tira um, quanto você tirou da pizza, quanto que sobrou, que parte ela representa...”

Assim como procedeu na explicação de sua resposta à questão Q6, Tiago também se apressou para corrigir o que havia registrado como resposta à opção b, da questão Q7 (figura 61), sem a minha intervenção.

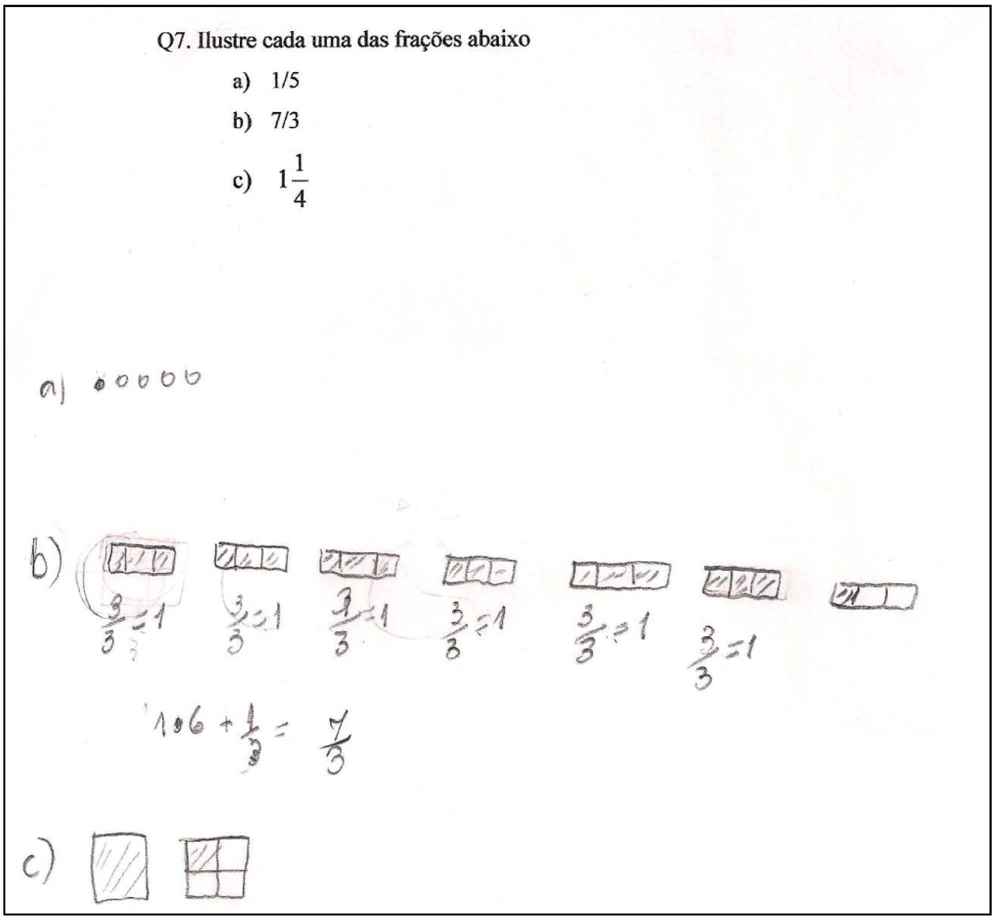


Figura 61 - Solução de Tiago para a questão Q7 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

O aluno explicou:

> “**Tiago -** Não sei por que diabos eu botei isso aqui, mas era pra ter parado aqui, né? Porque dois inteiros mais um terço, né já poderia ter parado aqui. Eu fiz vinte e um terços, professora, olha pra você ver que triste.”

Tiago entendeu que bastariam três retângulos para representar 7/3.

Já no item c da mesma questão, cujo número é maior que 1, Tiago não teve dúvidas sobre como representar a fração. Talvez por ser uma fração mista, estaria explícito que se tratava de desenhar um inteiro mais um quarto. Minha expectativa inicial era que os alunos não tivessem dúvidas nessa questão, mas que poderiam ter preferências quanto à representação usando apenas um tipo de grandeza, contínua ou discreta. No caso de Tiago, (ao contrário dos casos de Eva e Eloisa), minha expectativa não se confirmou, pois no item a ele usou um conjunto discreto, diferentemente do que utilizou nas opções b e c. Não obstante, para minha surpresa, o aluno errou ao representar a fração 7/3.

A fala de Tiago, acima, contém evidências de que ele pode ter agido de maneira precipitada ou impensada, impulsionado pela emoção de medo, de nervosismo, que ele mesmo revelou em seus depoimentos. Esse impulso pode ser interpretado pela ideia de marcador somático, como introduzida por Damásio (2005). Segundo Damásio (2005, p. 206),

> [...] os marcadores-somáticos são um caso especial do uso de sentimentos gerados a partir de emoções secundárias[24]. Essas emoções e sentimentos foram ligados, pela aprendizagem, a resultados futuros previstos de determinados cenários. Quando um marcador-somático negativo é justaposto a um determinado resultado futuro, a combinação funciona como uma campainha de alarme. Quando ao contrário, é justaposto um marcador somático positivo, o resultado é um incentivo.

Um bom exemplo para ilustrar o funcionamento de um marcador somático é o seguinte: suponha que, ao abrir uma máquina de lavar roupas, uma pessoa se depara com uma cobra dentro da máquina. Isso pode assustá-la o bastante a ponto de essa pessoa manifestar algumas emoções, tais como rubor, suor e tremor. Se essa experiência foi marcante, profunda, ao abrir a máquina novamente, em outro momento, é possível que essa pessoa seja *alertada* na forma de uma antecipação de medo, de receio, de cuidado de abrir a máquina, mesmo sabendo que pode não haver mais a cobra dentro dela.

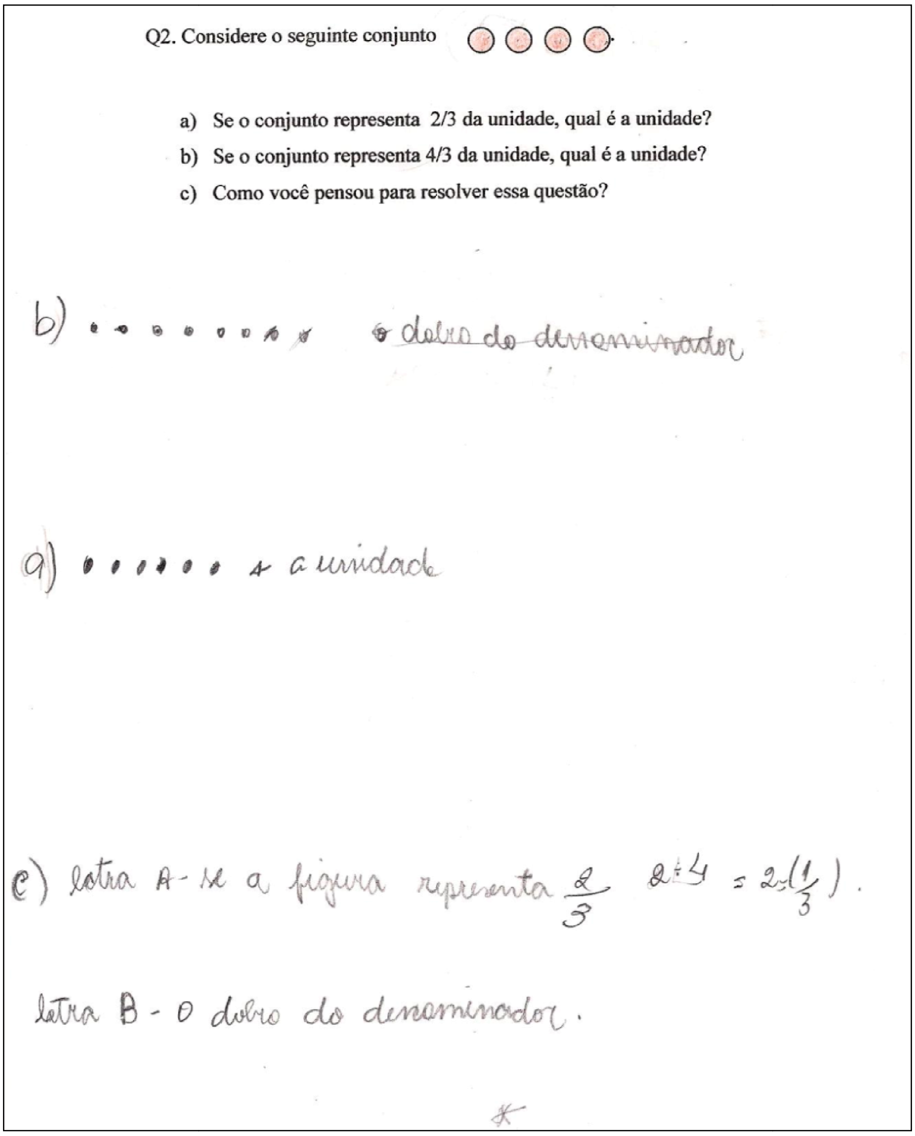
Nesse caso, conforme Damásio (2005), tal alarme foi dado por um marcador somático que foi criado na situação e que poderá continuar dando alarme todas as vezes em que a pessoa abrir a máquina. Damásio (2005) ressalta que os marcadores-somáticos não podem ser observados. O que se pode observar são as decisões do indivíduo baseadas na hipótese do marcador-somático. Diante dessa ideia, é possível que as experiências prévias de Tiago com as frações tenham lhe deixado marcas que atuam de forma negativa, quando ele se defronta com um problema que envolve esse conteúdo. Essas marcas, nesse caso, podem estar atuando como a campainha de alarme (medo, pane), a qual se refere Damásio (2005), e predispõem o aluno a decisões desfavoráveis no tratamento das frações. Entretanto, os depoimentos desse aluno indicam que toda vez que as frações aparecem, ele parece estar convencido de que vai errar. Essa reflexão se torna pertinente a partir das declarações de Tiago sobre sua experiência escolar com as frações e suas emoções diante delas.

---

[24] Segundo Damásio (2005), emoções primárias, ou inatas, ou instintivas, são aquelas que estão presentes no ser humano desde o seu nascimento e, portanto, não são aprendidas. Elas podem ser muito úteis, por exemplo, ao permitir que alguém se defenda ou se esquive de algo que possa ameaçá-la. O ser humano é capaz de se esquivar de um animal em seu caminho, mesmo antes de reconhecê-lo como ameaçador ou não. Para Damásio (2005), o medo do animal faz parte da estrutura do cérebro humano e é uma emoção inata. Já as emoções secundárias, diz Damásio (2005), são oriundas das primárias em resposta a um estímulo ou fato externo.

Levantei outras hipóteses sobre os erros de Tiago acerca da representação da fração imprópria: seria possível que esse aluno também tivesse alguma dúvida sobre frações impróprias? Seria o caso de se considerar suas experiências escolares com esses números e suas crenças como causadoras de um possível estranhamento das frações impróprias?

Com relação à questão Q2 do questionário QF_2, Tiago resolveu os itens a e b apresentado uma quantidade de círculos igual ao dobro dos denominadores das frações (figura 62). Embora no item b Tiago tenha desenhado inicialmente oito círculos, notei que ele riscou os dois últimos legitimando o que escreveu: o dobro do denominador.


Q2. Considere o seguinte conjunto

a) Se o conjunto representa 2/3 da unidade, qual é a unidade?
b) Se o conjunto representa 4/3 da unidade, qual é a unidade?
c) Como você pensou para resolver essa questão?

b) o dobro do denominador

a) a unidade

c) letra A- se a figura representa $\frac{2}{3}$

letra B - o dobro do denominador.

Figura 62 - Solução de Tiago para a questão Q2 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

Na entrevista E_3, ele explica sua incerteza sobre o que escreveu:

"**Tiago -** Sem saber se eu estava certo, fui tocando. Eu fui lembrando tudo que eu sabia e o que não sabia."

Os registros de Tiago para resolver as questões Q4 (figura 59) e Q7 (figura 61), analisadas anteriormente, e que se referiam às frações impróprias, mostram que no momento em que resolvia essas questões, o aluno pareceu confuso para representar as frações solicitadas. Uma provável explicação para as dúvidas de Tiago (o que ele diz que não sabia) pode estar relacionada às suas experiências escolares com as frações, que ele revelou como *basicão*, baseadas na *divisão da pizza*.

Contudo, mais uma informação fornecida por Tiago fez-me atribuir ainda outra explicação para o fato de ele ter se confundido nessas questões. Como já aludido, Tiago disse que o medo faz com que ele tome decisões erradas em relação às questões que envolvam frações. Assim, aliado às suas experiências escolares restritas com as frações, o fator emocional parece ter contribuído de maneira expressiva para que Tiago não tivesse sucesso nas questões.

Na questão Q10 do questionário QF_2 (figura 63), Tiago parece não ter considerado que as balas apresentadas no enunciado da questão não se referiam ao total de balas e, sim, a 2/3 delas.

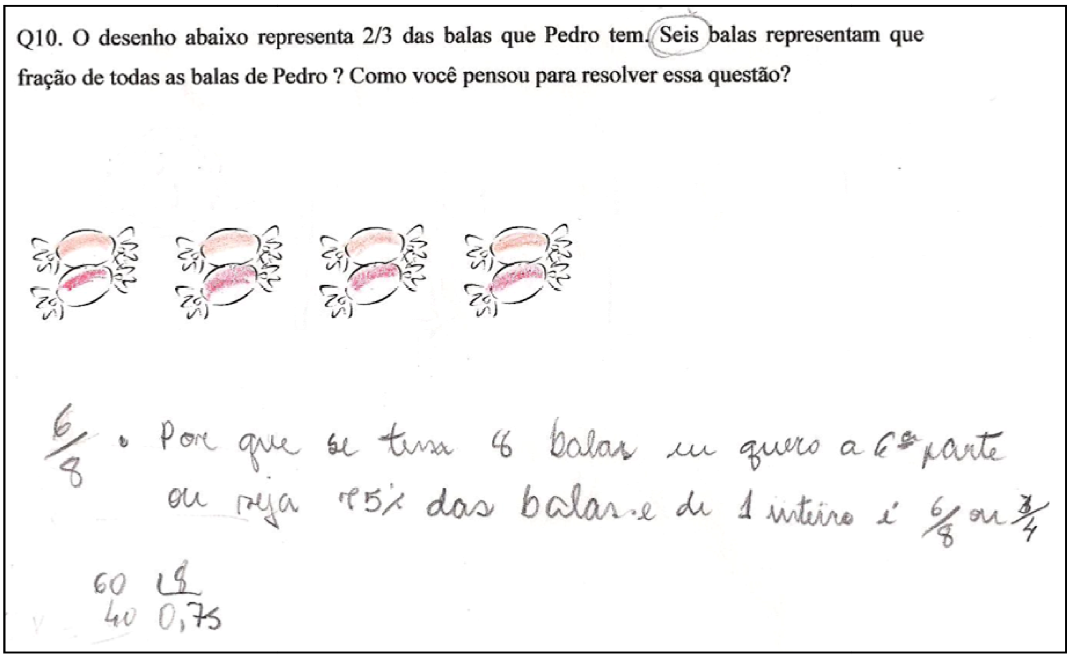


Figura 63 - Solução de Tiago para a questão Q10 (QF_2)
Fonte: Acervo da autora da tese, 2013.

O registro acima mostra que, para resolver essa questão, Tiago dividiu o numerador pelo denominador, encontrando a porcentagem que seis balas representam de oito balas. Entretanto, não foi essa a solicitação da questão.

Durante as entrevistas, percebi que Tiago se mostrou um pouco apreensivo, assim como Eva e por diversas vezes, seus depoimentos foram um pouco confusos. Por exemplo, quando pedi explicações sobre por que ele considerou que um conjunto de 18 pontos, na questão Q1 do questionário QF_2 , não poderia ser dividido em quartos, o aluno expressou-se de duas formas que eu considero contraditórias. Explico essa contradição com trechos dos diálogos das entrevistas.

> **Pesquisadora -** É possível construir quartos desse conjunto?
>
> "**Tiago -** Não. Porque dezoito não é divisível por quatro. Não foi isso que eu pensei?"
>
> **Pesquisadora -** Acho que sim.
>
> "**Tiago -** Por que não vai dar divisão exata, dezoito por quatro. Aí não vai entrar no que a gente está estudando, que é fração. As frações são do conjunto dos reais."
>
> **Pesquisadora -** É... você escreveu que dividir...
>
> "**Tiago -** O valor total é dezoito, e ele mesmo dividido em quatro a divisão não seria exata, não poderia ser fração."
>
> **Pesquisadora -** Como seria essa questão de que não poderia ser fração?
>
> "**Tiago -** Por que a fração não é a divisão de dois números inteiros?"
>
> **Pesquisadora -** Hum...
>
> "**Tiago -** Então? A divisão de dezoito por quatro não dá um número inteiro. Você tem que aproximar o valor. E, como não existe fração no conjunto dos números reais, desculpe, racionais, a fração não é inexata. A divisão de dois números tem que dar exata. Cabe dentro dos números reais...racionais, tem que ser exata. A fração é a divisão de dois números inteiros."

Nesse diálogo, Tiago não percebeu que, quando disse que a divisão de dezoito por quatro não é exata e, por isso, não é uma fração, ele se contradiz, pois ele mesmo afirmou anteriormente que, para operar com as frações, prefere transformá-las em número decimal. Também, na última fala acima, Tiago disse que as frações não existem dentro do conjunto dos números reais e depois se corrige trocando os reais pelos racionais, afirmando que as frações não pertencem ao conjunto dos números racionais. Mas, em seguida, afirma que a fração cabe dentro dos números reais, racionais. Essa confusão de Tiago parece refletir seu receio e insegurança quando o assunto é fração. De fato, ele manifestou um pensamento, em um primeiro momento, e, logo em seguida, se corrige. Isso parece de acordo com o que o aluno afirmou sobre os reflexos do medo em suas atitudes.

Comentário

No caso de Tiago, assim como nos casos anteriores, os dados produzidos pelos registros e depoimentos mostraram evidências da crença do aluno acerca das frações, quando ele lida com problemas em que necessita operar com elas. De acordo com Tiago, fração é a divisão de dois números inteiros, e essa crença parece ter permeado a resolução de algumas questões. A emoção de medo foi evidenciada pelo aluno em seus depoimentos e pareceu dificultar a solução de algumas questões propostas nos questionários QF_1 e QF_2. As reações emocionais reveladas por Tiago ao lidar com frações foram mais detalhadas e enfáticas do que as reações reveladas por Eva e Eloisa.

No que se refere às experiências de Tiago com as frações no ensino básico, foi possível constatar, assim como no caso de Eva e de Eloisa, um *ensino tradicional*, baseado principalmente, no *paradigma da pizza*. Mais uma vez, a prática da divisão de uma grandeza contínua em partes iguais foi mencionada como referencial no estudo das frações. Essa opção pedagógica por parte de professores pode indicar as origens da crença de fração como divisão.

Como nos casos anteriores, é possível também apresentar um diagrama que expresse o ciclo a que Chacón (2003a) se refere, composto pelas experiências escolares de Tiago com as frações, sua crença, e suas dificuldades com esses números, (figura 64). Não foi possível, porém, tirar uma conclusão acerca das consequências de tal ciclo na futura prática profissional de Tiago, tendo em vista que ele não estava lecionando na época em que a pesquisa foi realizada.

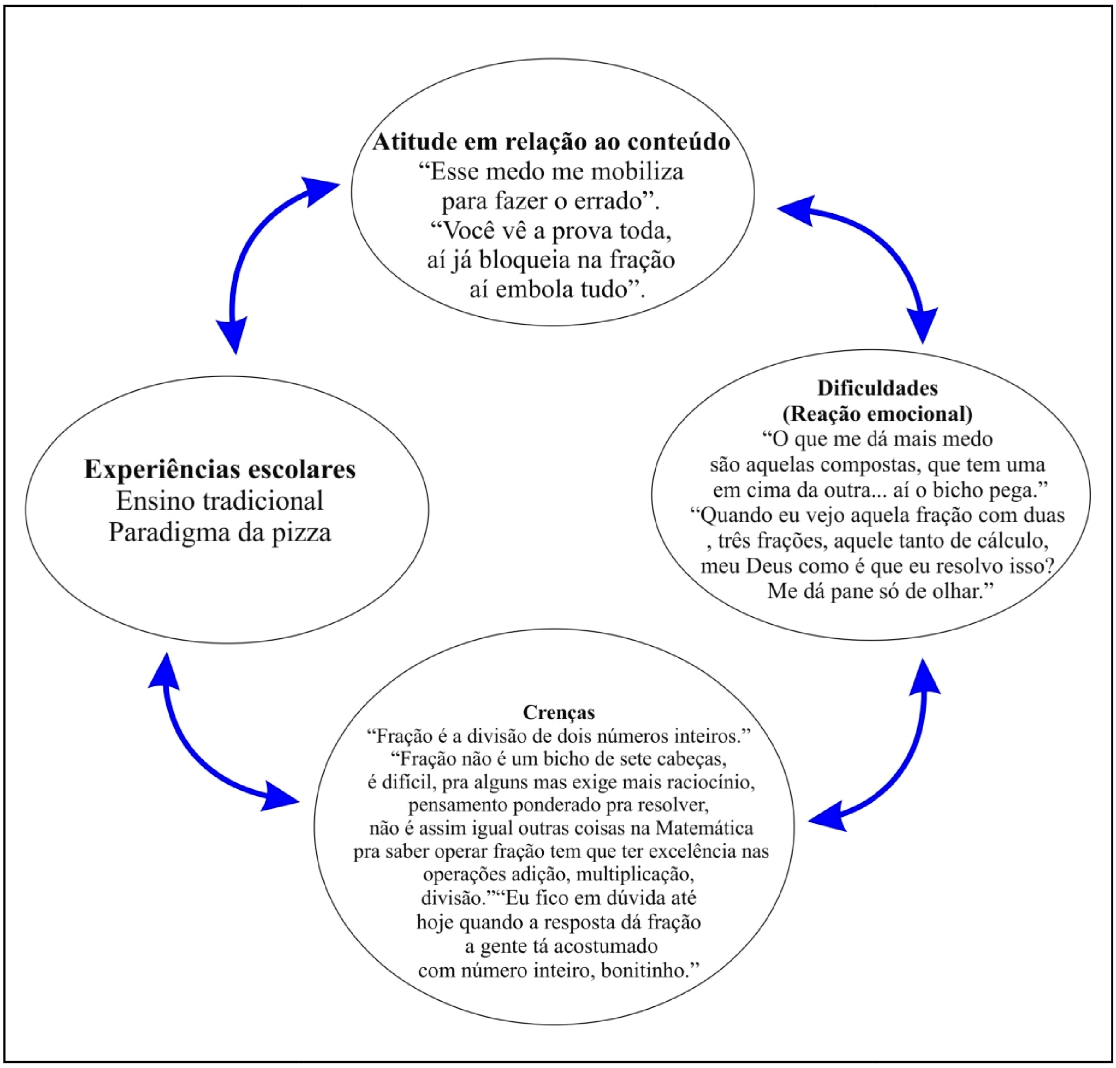


Figura 64 - Relação cíclica entre afeto e aprendizagem - caso de Tiago
Fonte: Elaborada pela autora da tese, 2013.

Assim como nos casos de Eva e Eloisa, as experiências escolares de Tiago com as frações parecem ser a origem de suas crenças acerca desses números. Um ensino baseado em procedimentos simples como a partição de uma grandeza contínua e a comparação das partes com o todo, que Tiago caracteriza como *basicão*, possivelmente gerou a crença de que fração é apenas a divisão de dois números inteiros.

Sua crença em ação, por sua vez, pode causar medo e até mesmo bloqueio diante de situações em que o aluno tem que operar com as frações. Como Tiago revelou, o medo provoca nele uma atitude desfavorável diante dos problemas. Assim como nos casos anteriores, as relações indicadas no círculo não têm um sentido único, mas se realimentam de forma cíclica.

***

Após analisar os três estudos de caso, foi possível observar e comparar o desempenho dos alunos em questões que envolviam grandezas contínuas e discretas e em questões que se referiam à fração imprópria. Na primeira fase da pesquisa, os três alunos acertaram as questões que se referiam à grandeza contínua quando a unidade (todo) era o círculo ou o retângulo. Entretanto, a questão da reta não foi resolvida satisfatoriamente por esses três alunos. Na primeira fase, infelizmente não foi possível comparar o desempenho dos alunos em questões que envolviam grandezas contínuas com alguma questão que envolvesse grandezas discretas porque o questionário QF_1 não conteve essas últimas. O mesmo aconteceu em relação às frações impróprias. Por outro lado, na segunda fase de pesquisa, foi possível obter informações mais relevantes em relação a esses pontos. Independentemente da proposta das questões, aquelas que se referiam a uma grandeza contínua tiveram maior índice de erros. No entanto, na questão em que os alunos poderiam representar as frações por meio de um desenho, a preferência dos alunos foi por um todo contínuo. Os alunos erraram ou acertaram parcialmente as questões em que deveriam apresentar a unidade a partir de uma sua fração quando a grandeza era contínua. Na questão que também envolvia esse tipo de grandeza, mas em que a figura apresentada era a unidade, Eva e Eloisa se equivocaram e Tiago a acertou. Também no questionário QF_2, os alunos se equivocaram nas questões que se referiam à reta, eles erraram ou acertaram parcialmente essas questões, e Tiago acertou uma delas.

Com relação aos erros cometidos com as frações impróprias, Eva e Eloisa erraram a questão que solicitava o todo contínuo a partir de uma fração imprópria deste e Tiago apresentou uma resposta correta. Por outro lado, os três alunos erraram a mesma proposta quando o todo era discreto. Representar uma fração maior que o todo quando ele era contínuo também não foi possível para Eva e Eloisa, mas Tiago realizou a tarefa corretamente. Já escrever a fração que representa uma quantidade maior que o todo contínuo não foi possível para Tiago. Eva resolveu parcialmente e Eloisa resolveu corretamente a questão. A questão que solicitava dos alunos a representação de uma fração imprópria foi resolvida de forma satisfatória por Eloisa, parcialmente por Eva e Tiago, não apresentou uma resposta correta. No caso de Eva, a representação de uma quantidade maior que o inteiro, indicada por um número misto, foi realizada corretamente, enquanto a representação da fração imprópria, nessa mesma questão, não foi resolvida. Embora esta pesquisa não tivesse a intenção de investigar os erros, não me furtei a discuti-los com os alunos nem em informar ao leitor. Em cada caso, os erros foram discutidos com Eva, Eloisa e Tiago. Quando achei que um erro poderia me indicar uma possível crença ou dificuldade, procurei confirmar tal possibilidade em entrevista com os três alunos, conforme registrado nos estudos de caso. Não me debrucei, porém, em elaborar uma conclusão sobre possíveis relações entre erros, crenças e dificuldades para não desviar o foco desta pesquisa.

CAPÍTULO VII
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta tese foi dedicada ao estudo das crenças e dificuldades de um grupo de alunos iniciantes de Curso de Licenciatura em Matemática acerca das frações visando identificar: a) as recordações dos alunos acerca de suas experiências com esse conteúdo no ensino básico; b) as possíveis origens dessas crenças e dificuldades.

A pesquisa foi realizada com base no conceito de *crença de um domínio específico*, desenvolvido por Törner (2000, 2002). Para esse pesquisador, diferentes campos da matemática têm crenças específicas e, por isso, as crenças gerais sobre a Matemática não seriam suficientes para explicar crenças em domínios ou áreas mais específicos da disciplina. Segundo Aguirre (2009), além de conhecer as crenças de um domínio específico da matemática, é preciso conhecer as raízes de tais crenças, e esse tem sido, segundo essa pesquisadora, um terreno ainda pouco explorado nas pesquisas em educação matemática.

O interesse pelos componentes afetivos envolvidos em situações de ensino e aprendizagem levou-me ao encontro de referenciais teóricos: Chacón (2003a); Araújo *et al.,* (2003); Bishop (2005); Zan *et al.,* (2006) e Machado; Frade e Da Rocha Falcão (2010), que pudessem me oferecer uma melhor compreensão das crenças e dificuldades dos alunos para lidar com as frações à luz da afetividade.

Grande parte das pesquisas sobre dificuldades dos alunos com conteúdos matemáticos é estudada sob uma perspectiva da cognição. No caso desta tese, tomou-se como pressuposto o fato de que afeto e cognição são inseparáveis. Diante disso, propus-me a investigar as dificuldades dos alunos acerca das frações levando em conta, também, as formas como esses alunos sentem e se emocionam com esse conteúdo. Tal proposição é sustentada, por exemplo, por Sanmartí (2009), ao argumentar que as causas dos principais erros e dificuldades dos alunos estão nas formas de raciocinar, nas formas de comunicar, nas ideias transmitidas, nas formas de perceber e nas formas de sentir.

É preciso admitir que não é fato inovador pensar que, por um lado, as crenças e as emoções influenciam o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos e que, por outro lado, esse ensino e essa aprendizagem influenciam as crenças e emoções. Também sabemos que as experiências escolares são, em muitos casos, uma referência (boa ou não) na vida dos indivíduos que passaram pela escolarização formal. Todavia, esta pesquisa traz uma contribuição para o campo da educação matemática ao oferecer uma abordagem teórico-metodológica que procura integrar *ensino e aprendizagem*, *crenças* e *dificuldades*, em relação às frações.

Os dados desta investigação foram produzidos por meio de questionários, entrevistas e diário de campo e, nos casos das crenças sobre frações, foram tratados segundo o modelo de Clement (2000). A partir de um processo cíclico e constante do estudo de protocolos, tal modelo permitiu a criação de uma categorização para essas crenças. No processo de elaboração dessas categorias, a ideia de crença de um domínio específico permeou todo o procedimento. Ao final, chegou-se à seguinte categorização: a) fração como um processo, como um número que se resolve, como divisão, (ação); b) fração como (não) resposta a um problema; c) ensino e aprendizagem de frações; d) autoeficácia negativa. Em seguida, procurou-se identificar as origens dessas crenças por meio das recordações dos alunos acerca de suas experiências de ensino e aprendizagem com frações na escolarização básica. Ao longo das análises e interpretações dos protocolos nesses dois momentos de tratamento dos dados, evidências sobre as possíveis origens das crenças e dificuldades dos alunos-participantes em relação às frações foram já sendo produzidas.

Os estudos de caso dos alunos Eva, Eloisa e Tiago possibilitaram reflexões mais sistemáticas e em maior profundidade, reforçaram as análises e interpretações aludidas, culminando com o oferecimento de respostas às questões de pesquisa desta tese. Considerando-se o contexto específico no qual esta pesquisa foi realizada, os capítulos dedicados às análises e interpretações indicaram, fortemente, que as origens das crenças e dificuldades dos alunos no domínio dos números racionais, em particular, as frações, estão na escolarização básica desses alunos, mais precisamente, no modo de ensino a que foram submetidos. Isso não quer dizer, como dito anteriormente, que outros cenários de vida desses alunos, tais como o dia a dia fora da escola, não possam ter contribuído para reforçá-las. Contudo, o entendimento construído durante a pesquisa foi que, uma vez originadas as crenças num certo momento da vida escolar dos alunos-participantes, entra-se num círculo vicioso no qual as relações entre ensino e aprendizagem, crenças e dificuldades na escola podem ser representadas conforme os diagramas apresentados ao final de cada estudo de caso.

Ao relatarem sobre a pouca atenção dos professores com o tratamento das frações no ensino básico, a mensagem que os alunos-participantes passaram foi de um ensino *tradicional*, *basicão*, com atividades rotineiras de *divisão da pizza* redução de frações ao *mmc*, e que priorizou os números inteiros em detrimento das frações.

Nos casos de Eva e de Eloisa, ficou bastante nítida a importância que seus professores deram ao ensino dos números inteiros quando elas disseram que esses professores preferiam lecionar esse conteúdo ou que foram *treinadas* a trabalhar com ele.

As crenças e as dificuldades evidenciadas neste trabalho de tese mostram que, de fato, faz sentido tratar crenças e dificuldades em termos de um domínio específico como proposto por Törner (2000, 2002). Os resultados aqui obtidos se assemelham aos resultados das investigações de Törner (2000, 2002) e de Aguirre (2009) no que diz respeito a serem as crenças e as dificuldades mesmo de um domínio específico, no caso desta pesquisa, os números racionais e, no caso de Törner (2000, 2002) e de Aguirre (2009), o cálculo e a álgebra, respectivamente.

A ideia de que uma fração é uma divisão, apesar de não ser equivocada, não apareceu vinculada a nenhuma outra interpretação das frações, interpretações essas que vários educadores matemáticos citados nesta tese, juntamente com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), orientam que sejam exploradas no ensino básico.

Os alunos-participantes desta investigação já lecionaram ou estavam lecionando na ocasião da pesquisa. Aqueles que já ensinaram ou estavam ensinando frações forneceram informações sobre como lidam com esses números com seus alunos: coincidentemente de maneira semelhante com a forma como seus professores do ensino básico lidaram.

Nos três estudos de caso, construiu-se uma possível relação cíclica entre afetos e aprendizagem na direção dada por Chacón (2003a). No caso de Eva e de Eloisa, mostrou-se como tal ciclo pode influenciar sua prática profissional.

Diante do exposto, cabe então questionar: que visão se pode esperar que um graduando em matemática tenha acerca das frações se suas lembranças indicam experiências reduzidas e pobres de significado? A esse respeito, esta pesquisa leva a uma reflexão sobre um papel perverso, contraditório da escola: é suposto que a função da escola seja a de oferecer condições de ensino e aprendizagem que favoreçam uma compreensão significativa dos conteúdos de matemática, em particular, das frações. Contudo, o que os resultados desta investigação apontam, para o caso das frações, é que a própria escola parece ser a principal responsável pelo descaso e limitação do ensino desse conteúdo.

Como implicações pedagógicas deste estudo, é preciso considerar as crenças e as dificuldades que os alunos recém-ingressos em um Curso de Licenciatura de Matemática trazem acerca das frações, indo além do que é puramente cognitivo (SCHOENFELD, 1983). Um curso de formação de professores de matemática deve ser uma oportunidade, não apenas de construir novos conhecimentos, mas de desvelar determinadas crenças, no sentido de refletir sobre elas e, porque não, reestruturá-las, quando for desejável. Segundo Chacón (2003a, p. 147),

> [...] cada professor adota em sala de aula uma série de decisões e de atitudes que traduz suas ideias sobre o que é, para que serve e como se aprende a matemática, sem esquecer sua própria predileção para um ou outro conteúdo ou para determinado tipo de atividade. Predileções que podem ou não coincidir com as que os alunos costumam desenvolver, pois existem ou podem existir diferenças de idade, sexo, cultura, etc. Esse conjunto de avaliações, que geralmente não está explícito, é, realmente, transmitido aos estudantes; por isso, é preferível considerá-lo aberto e refletir sobre ele, do mesmo modo que se reflete sobre os conceitos ou as técnicas que se pretende ensinar.

Uma sugestão para tratar as crenças e dificuldades em cursos de desenvolvimento profissional de professores de Matemática poderia se basear nos seguintes aspectos propostos por Chacón (2003a, p. 148):

> 1. Proporcionar um conhecimento suficientemente profundo e com orientação prática sobre a natureza dos diferentes aspectos (afetivos, cognitivos, ambientais, sociais, etc.) que podem estimular ou bloquear a aprendizagem em matemática.
> 2. Realizar uma aproximação aos conteúdos atitudinais em matemática, oferecendo chaves e ferramentas para operacionalizá-los em sala de aula.
> 3. Apresentar propostas didáticas de ensino/aprendizagem/avaliação da dimensão afetiva em matemática em sala de aula .

A partir do estudo realizado nesta tese de doutorado, vislumbro a possibilidade de contemplar, no Curso de Licenciatura em Matemática que leciono, os aspectos descritos acima. Um tratamento do papel da afetividade no ensino e aprendizagem da matemática pode, certamente, ser incorporado por exemplo, às disciplinas didáticas; àquelas que se dedicam aos métodos e técnicas de ensino de conteúdos para o ensino básico.

Credito uma limitação desta tese ao fato de não ter sido possível, por uma questão de tempo, explorar com maior profundidade os ciclos *afeto-aprendizagem* dados pelos diagramas dos três estudos de caso. Creio que uma possibilidade de mudar o cenário desfavorável a uma situação significativa de ensino e aprendizagem de frações seria *atacar*, romper um a um os elos que formam esses ciclos. Mas como? Essa é a pergunta que deixo para futuras investigações que, porventura, venham a se interessar pela temática desta tese.

REFERÊNCIAS

ABELSON, R. P. Differences between beliefs and knowledge systems, cognitive science: a multidisciplinary Journal, v. 3, n. 4, p. 355, 1979 – Disponível em: <www.dx.doi.org/10.1207/s15516709cog0304>. Acesso em: 10/03/2011.

AGUIRRE, J. M. Teacher domain-specific beliefs and their impact on mathematics education reform. *In:* MAAB, J., SCHLÖGLMANN W. (Eds.). Beliefs and attitudes in mathematics education. *New Results Research*, Roterdam/Taipei: Sense Publishers, p. 45-58, 2009.

AMATO, S. A. Developing students' understanding of the concept of fractions as numbers. *In:* Chick, H. L., Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME). Melbourne, v. 2, p. 49-56, 2005.

ARAÚJO, C. R.; ANDRADE, F.; HAZIN, I.; DA ROCHA FALCÃO, J. T.; NASCIMENTO, J. C.; LESSA, M. M. L. Affective aspects on mathematics conceptualization: From dichotomies to an integrated approach. In: PATEMAN, N.; DOUGHERTY, B.; ZILLIOX, J. (Eds.). *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME). Honolulu, USA, v. 2, p. 269-276, 2003.

BANDURA, A. Self-efficacy. *In:* RAMACHAUDRAN, V.S. (Ed.), *Encyclopedia of human behaviour.* New York: Academic Press, 1994. v. 4, p. 71-81. (Reprinted in FRIEDMAN, H. [Ed.]. *Encyclopedia of mental health*. San Diego: Academic Press, 1998).

BEHR, M. J.; LESH, R.; POST, T. R.; SILVER, E. A. Rational – Number concepts. *In*: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). *Acquisition of Mathematical Concepts and Process*. Orlando-Florida: Academic Press, 1983, p. 91-126.

BEHR, M.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational number, ratio and proportion. *In*: GROUWS, D. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: MacMillan Publishing, 1992, p. 296-333.

BERTONI, N. E. A construção do conhecimento sobre número fracionário. *Bolema,* Rio Claro, v. 21 n. 31, p. 209-237. 2008

BERTONI, N. E. *Educação e linguagem matemática IV- Frações e Números Fracionários*. Brasília: UnB, 2009.

BISHOP, A.; CLARKE, B. Monash University. Values in maths and science - what can we learn from children's drawings? *Conference of the Mathematics Association of Victoria*, Dezembro, 2005.

BOGDAN, R.C; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora, 1994.

BOLEMA – Boletim de Educação Matemática/UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Departamento de Matemática, v. 21, n.31, 2008.

BRYANT, P.; NUNES, T. *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

CAMPOS, E. M. *Estudo sobre a gênese do conceito de fração na criança segundo Piaget e com vistas a inferências metodológicas,* 1975. 227 p. Dissertação. (Mestrado em Educação) Pontifícia Universidade Católica de Porto Alegre.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Gradiva, 2003.

CENTURIÓN, M. *Números e operações*. São Paulo: Scipione, 2006.

CHACÓN, I. M. G. *Matemática emocional*: os afetos na aprendizagem matemática. São Paulo: Artmed, 2003a.

CHACÓN, I. M. G. La tarea intelectual em matemáticas: afeto, meta-afecto y los sistemas de creencias. *Boletin de La Associación Matemática Venezolana*, v. X, n. 2, p. 225-247, 2003b.

CHAMORRO, M. del C. (coord.) Didáctica de las matemáticas para primária. *Pearson Educación,* Madrid, 2003, p. 187 - 220.

CHAPMAN, O. Belief structure and inservice high school mathematics teacher growth. *In*: LEDER, G. C.; PEHKONEN, E.; TÖRNER, G. (Eds.) *Beliefs*: a hidden variable in mathematics education? London: Kluwer, 2002, p. 177-195.

CISCAR, S. L.; GARCIA, M. V. S. *Fracciones*: la relacion parte-todo. Madrid: Sintesis, 2000.

CLEMENT, J. Analysis of clinical interviews: foundations and model viability. *In:* KELLY; LESH, R. (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*. New Jersey: Mahwah, 2000, p. 547-589.

CONFREY, J.; HAREL, G. Introduction. *In* CONFREY, J. e HAREL, G (Eds), *The development multiplicative of reasoning in the learning of mathematics*,1994, p. 1-26.

CURY, H. N. Concepções e crenças dos professores de Matemática: pesquisas realizadas e significado dos termos utilizados. *Bolema*, Rio Claro, v.12, n.13, p. 29-43, 1999.

D'AGUSTINE, C. *Métodos modernos para o ensino da matemática*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1982.

DAMASIO, A. *Descartes' error*: emotion, reason and the human brain. Papermac: Basingstoke, 1996.

DAMÁSIO, A. R. *O mistério da consciência*: do corpo e das emoções ao conhecimento de si. São Paulo: Companhia das Letras, 2000.

DAMÁSIO, A. R.*O erro de Descartes:* emoção, razão e o cérebro humano. 2 ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2005.

DAVID, M. M. S.; FONSECA, M. C. F. R. Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária. *Revista Presença Pedagógica:* Educação Matemática. Belo Horizonte: Dimensão, v.1, n. Especial, p. 59-71, 2005.

ERNEST, P. *The impact of beliefs on the teaching of mathematics*. Budapest, Hungary, 1988. Paper prepared for ICME VI.

FERNANDES, J. A. Orientações para o ensino de probabilidades. *In:* Comissão Organizadora do ProfMat 98 (Orgs.). *Actas do ProfMat*, v. 98, , p.81-88, 1998.

FERREIRA, A. C. *O desafio de ensinar-aprender matemática no curso noturno*: um estudo das crenças de estudantes de uma escola pública de Belo Horizonte. 1998. 189 p. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de Campinas, São Paulo.

FISCHBEIN, E., NELLO, M. S. e MARINO, M. S. Factors afecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, p. 523-549, Dec. 1991.

FRADE, C. C*omponentes tácitos e explícitos do conhecimento matemático de áreas e medidas*. 2003. 249 p. Tese. (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

FURINGHETTI, F. A theorical framework for teachers' conceptions *In*: PEHKONEN, E. (Ed.) *Current state of research on mathematical beliefs III*. Proceedings of the MAVI-3 Workshop University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 170. 1996, p.19–25.

FURINGHETTI, F.; PEHKONEN, E. Rethinking characterizations of beliefs. *In*: LEDER, G. C.; PEHKONEN, E.; TÖRNER, G. (Eds.) *Beliefs:* a hiden variable in mathematics education? Boston/London: Kluwer Academic Publishers Dordrecht, v. 31, p. 39-57, 2002.

GAGATSIS, A.; PANAOURA, A.; DELIYANNI, E.; ELIA, I. Students' beliefs about the use of representations in the learning of fractions, 2009. *Proceedings of CERME 6, January 28th - February 1st*, Lyon/France, 2009, p.64-73.

GOLDIN, G. Affect, meta-affect, and mathematical beliefs strutuctures *In*: LEDER, G. C.; PEHKONEN, E.; TÖRNER, G. (Eds.) *Beliefs*: a hiden variable in mathematics education? Boston/London: Kluwer Academic Publishers Dordrecht, v. 31, p. 59-72, 2002. 2002.

GOLDIN, G.; RÖSKEN, B. e TÖRNER, G. Beliefs – no longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. *In:* MAAB, J., SCHLÖGLMANN W. (Ed.). *Beliefs and attitudes in mathematics education* – New Results Research. Roterdam/Taipei: Sense Publishers, 2009, p.1-18.

GREEN., D. R. A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. *In* GREY, D. R.; HOLMES P.; BARNETT, V. e CONSTABLE, G. M. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*. Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust, v. 2, p. 766-783, 1983.

GROWS, D. A. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan-NCTM, 1992.

HART, K.; KERSLAKE, D. *Avoid of fractions*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association. Montreal, 1983.

HART, L. A four year follow-up study. *In:* LEDER, G. C.; PEHKONEN, E.; TÖRNER, G.

(Eds.) *Beliefs*: a hiden variable in mathematics education? Boston/London: Kluwer Academic Publishers Dordrecht, v. 31. p.161-176, 2002.

HAZIN, I.; FRADE**,** C**.**; DA ROCHA FALCÃO, J. T. Autoestima e desempenho escolar em matemática: contribuições teóricas sobre a problematização das relações entre cognição e afetividade. *Educar em Revista* (Impresso), n. 36, p. 39-54, 2010.

ISIKSAL, M.; CAKIROGLU, E. *The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge:* the case of multiplication of fractions. Ankara/Turkey: Springer, 2010.

KERSLAKE, D. *Fractions*: children's strategies and errors. London: NFER-Nelson, 1986.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. *In*: LESH, R. (Ed.). *Number and measurement*: papers from a research workshop. Columbus: Eric/Smeac, 1976, p. 101-104.

KIEREN, T. E. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. *In*: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades*. VA/Hillsdale New Jersey: Reston, National Council of Teachers of Mathematics/Lawrence Erlbaum, 1988. p. 162-181.

KIEREN, T. E. The rational number construct-its elements and mechanisms. *In:* KIEREN, T. E. (Ed.). *Recent research on number learning*. Columbus: Eric/Smeac, 1980, p.125-150.

KIEREN, T. Multiple views of multiplicative structures. *In:* HAREL, G.; CONFREY, J. (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. New York: State University of New York Press, 1994, p. 389-400.

LAGOA, Ana. Por que as crianças acham tão difícil entender frações. *Nova Escola*, p. 46-49, abr. 1991.

LAMON, S. J. Rational numbers and proportional reasoning - toward a theoretical framework for research. *In*: LESTER, F. K. (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*: a project of the National Council of Teachers of Mathematics. [s.l.]: [s.ed.], v. 2, 2007.

LAMON, S. J. *Teaching fractions and ratios for understanding*. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1999.

LAMON, S. J. *Teaching fractions and ratios for understanding:* essencial content knowledge and instructional strategies for teachers. 2. ed. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum, 2006.

LAVE, J. *Cognition in practice*: mind, mathematics, and culture in everyday life. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1988.

LAVE, J. e WENGER, E. *Situated learning. Legitimate peripherical participation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

LEDER, G. C.; PEHKONEN, E.; TÖRNER, G. (Eds.) *Beliefs:* A hidden variable in mathematics education? Boston/London: Kluwer Academic Publishers, v. 31, 2002.

LEDER, G.; FORGASZ, H. Measuring mathematical beliefs and their impact on the learning of mathematics: a new approach. *In*: LEDER, G. C.; PEHKONEN, E.; TÖRNER, G. (Eds.) *Beliefs:* a hidden variable in mathematics education? Boston/London: Kluwer Academic Publishers, v. 31, 2002.

LEDER, G.; PEHKONEN, E.; TÖRNER, G. Setting the scene. *In*: LEDER, G. C.; PEHKONEN, E.; TÖRNER, G. (Eds.) *Beliefs*: A hidden variable in mathematics education? Boston/London: Kluwer Academic Publishers, v. 31, 2002.

LESH, R.; LANDAU, M. e HAMILTON, E. Conceptual models and applied mathematical problem-solving. *In*: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). *Acquisition of mathematical concepts and process*. Orlando-Florida: Academic Press, 1983, p. 264-343.

LLINARES, S. Fracciones, decimales y razón. Desde La relación parte-todo al razonamento proporcional. *In:* CHAMORRO, M. C. (Ed.) *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Person, 2003, p. 186-220.

LLINARES, S. Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs. *In*: LEDER, G. C.; PEHKONEN, E.; TÖRNER, G. (Eds.) *Beliefs*: A hidden variable in mathematics education? Boston/London: Kluwer Academic Publishers, v. 31, p. 195-209, 2002.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Bolema,* Rio Claro, n. 31, p. 1-22, 2008.

LOVELL, K. *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos em lós niños*. Madrid: Morata, 1986.

MAAB, J.; SCHLÖGLMANN W. (Ed.). *Beliefs and attitudes in mathematics education* – New results research. Roterdam/Taipei: Sense Publishers, 2009.

MACHADO, M. C.; FRADE, C; DA ROCHA FALCÃO, J. T. Influência de aspectos afetivos na relação entre professor e alunos em sala de aula de matemática. *Bolema,* Rio Claro. v. 23, p. 683-713, 2010.

MACIEL, A.; CÂMARA, M. Analisando o rendimento de alunos das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em atividades frações e ideias associadas. *Bolema,* Rio Claro, n. 28, p. 163-177, 2007.

MAGINA, S; CAMPOS, T. A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. *Bolema*, Rio Claro, n. 31, p. 23-40, 2008.

MCLEOD, D. B. Research on affect in Mathematics education: a reconceptualization. *In:* GROWS, D. A. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: Macmillan-NCTM, 1992, p. 575-596.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. *O ensino de matemática no primeiro grau. Projeto Magistério*. São Paulo: Atual, 1986.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M. C. C. A teoria dos subconstrutos e o número racional como operador: das estruturas algébricas às cognitivas. *Bolema*, Rio Claro, n. 31, p. 103-127, 2008.

MOREIRA, P.C. *O conhecimento matemático do professor:* formação na licenciatura e prática docente na escola básica. 2004. 202 p. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

MUNISAMY, S. e DORAISAMY, L. Levels of understanding of probability concepts among secondary school pupils. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, v. 29, n. 1, 1998, p.39-45.

NESPOR, J. K. *The role of beliefs in the practice of teaching*: final report of the teacher beliefs study. Texas/Austin: National Institute of Education (Ed.).Washington, DC, 1985.

NIEKERK, T.; NEWSTEAD, K.; MURRAY, H.; OLIVIER, A. *Success and obstacle in the development of 6 learners'conceptions of fractions*. Paper present at the 5th Annual Congress of the association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), Port Elizabeth, 5-9 July, 1999.

NISBETT, R. e ROSS, L. *Human inference:* Strategies and shortcomings of social judgment. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1980.

NIVEN, I. *Números*: racionais e irracionais. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

NUNES, T. Criança pode aprender fração. E gosta! *In*: GROSSI, E. P. (Org.). *Por que ainda há quem não aprende?* A teoria. Rio de Janeiro: Vozes, 2003, p. 119-148.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OP'T EYNDE, P.; DE CORTE, E.; VERSCHAFFEL, L. Framing student's mathematics-related beliefs. *In*: LEDER, G. C.; PEHKONEN, E.; TÖRNER, G. (Eds.) *Beliefs:* a hiden variable in mathematics education? Boston/London: Kluwer Academic Publishers, v. 31, p. 13-37, 2002.

OWENS, D. The relationship of area measurement and learning initial fraction concepts by children in grades three and four. *In:* KIEREN, T. E. (Ed.). *Recent research on number learning*. Columbus: Eric/Smeac, 1980. p. 167-173.

PAJARES, F. Teacher's beliefs and educational research: clearning up a messy construct. *Review of Educational Research*, v. 62, n. 3, p. 307-332, 1992.

PEHKONEN, E. *State-of-the-art in mathematical beliefs research*. Helsink: University of Helsink/Finland. ICME 10, 2004.

PHILIPP, R. A. Mathematics teachers' beliefs and affect. *In* LESTER, F. K. (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. United States: Information Age, 2007, p. 257-315.

PHILIPPOU, G.; CHRISTOU, C. A study of the mathematics teaching efficacy beliefs of primary teachers. *In*: LEDER, G. C.; PEHKONEN, E.; TÖRNER, G. (Eds.) *Beliefs:* a hiden variable in mathematics education? Kluwer Academic Publishers Dordrecht/Boston/London, v. 31, p. 211– 231, 2002.

PIAGET, J.; INHELDER, B.; SZEMINSKA, A. *La géometrie spontanée* de l'enfant. Paris: Presses Universitaires de France, 1948.

PITTA-PANTAZI, D.; CHRISTOU, C. *The structure of prospective kindergartesn teachers' proportional reasoning*. Cyprus: Springer, 2011.

PONTE, J. P. Concepções dos professores de matemática e processos de formação. *In*: *Educação Matemática*. Coleção Temas de Investigação, Secção de Educação Matemática da sociedade portuguesa de ciências da educação. Portugal: [s.ed.], 1992, p. 185-239.

POUPART, J. A entrevista do tipo qualitativo: considerações epistemológicas, teóricas e metodológicas. *In:* POUPART, J.; DESLAURIERS, J. P.; GROULX, L.; LAPERRIÈRE, A.; MAYER, R.; PIRES, A. P. (Eds.). *A Pesquisa Qualitativa:* Enfoques epistemológicos e metodológicos. Petrópolis: Vozes, 2008. p. 215-253.

POUPART, J.; DESLAURIERS, J. P.; GROULX, L.; LAPERRIÈRE, A.; MAYER, R.; PIRES, A. P. (Eds.), *A Pesquisa Qualitativa:* Enfoques epistemológicos e metodológicos. Petrópolis: Vozes, 2008.

ROKEACH, M. *Beliefs, attitudes and values*. San Francisco: Jossey-Bass Inc., 1972.

ROKEACH, M. *Crenças, valores e atitudes*. Rio de Janeiro: Interciência, 1981.

ROMANATTO, M. C. *Número racional*: relações necessárias à sua compreensão, 1997. 169 p. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de Campinas, São Paulo.

ROMANATTO, M. C. Número racional: uma teia de relações. *Zetetiké. CEMPEM*: Faculdade de Educação/UNICAMP, SP. – v.7, n.12, p. 37-49, 1999.

SAEB. Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica. Brasília: MEC, 2001, 2003.

SANMARTÍ, N. *Avaliar para aprender*. Porto Alegre: Artmed, 2009.

SANTOS, V. M. P. *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática*: métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 1997.

SCHEFFLER, I. *Conditions of Knowledgw:* An introduction to epistemology and education. Glenview, II. Scott, Foresman and Company, 1965.

SCHOENFELD, A. H., Beyond the purely cognitive: Belief Systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science*, v. 7, p. 329-363, 1983.

SCHOENFELD, A. H., *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic Press, 1985.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVA, M. J. F. *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*. 2005. 302 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática), PUC/SP. São Paulo.

SILVA, M. J.F.; ALMOULOUD, S. A. As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo. *Bolema*, Rio Claro, n. 31, p. 55-78, 2008.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. *Números racionais e reais*: as concepções dos alunos e a formação do professor. Belo Horizonte: UFMG, 1998. (Mimeogr.)

STREEFLAND, L. *Fractions in realistic mathematics education*: a paradigm of developmental research. Dordrecht: Kluwer Academic, 1991.

STREEFLAND, L. Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction. *Educational Studies in Mathematics*, v.9, p. 51-73, 1978.

THOMPSON, A. Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. *In*: GROUWS, D. A.(Ed.) *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York, NY: Macmillan, 1992.

TÖRNER, G. Mathematical beliefs – a search for a common ground: some theorical considerations on structuring beliefs, some research questions, and some phenomenological observations. *In*: LEDER, G. C.; PEHKONEN, E.; TÖRNER, G. (Eds.) *Beliefs: a* hidden variable in mathematics education? Boston/London: Kluwer Academic Publishers, v. 31, 2002.

TÖRNER,G. Domain specific beliefs and calculus. Some theoretical remarks and phenomenological observations. *In*: PEHKONEN, E.; TÖRNER, G., *Mathematical beliefs and their impact on teaching and learning of mathematics. Proceedings of the workshop in Oberwolfach,* Nov. 21-27, p. 127-137, 2000.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. *Matemática para aprender a pensar*: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

WENGER, E. *Communities of ractice:* learning, meaning and identity. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

ZAN, R.; BROWN, L.; EVANS, J.; HANNULA, M.S. (Eds.). Special issue on affect in mathematics education. *Educational Studies*. [s.n.t.], 2006.

APÊNDICES

APÊNDICE A
QUESTIONÁRIO SOBRE CRENÇAS (QC)

Avalie cada afirmação e marque apenas uma alternativa.

1- Tenho muita dificuldade para entender a Matemática.

	Concordo totalmente		Concordo		Discordo		Discordo totalmente

2- A matemática é algo muito abstrato para mim.

	Concordo totalmente		Concordo		Discordo		Discordo totalmente

3- Gosto muito de resolver problemas de matemática.

	Concordo totalmente		Concordo		Discordo		Discordo totalmente

4- Gosto muito de resolver problemas de matemática que envolvam números fracionários.

	Concordo totalmente		Concordo		Discordo		Discordo totalmente

5- Quando me pedem para resolver problemas com números fracionários fico nervoso(a).

	Concordo totalmente		Concordo		Discordo		Discordo totalmente

6- Sinto medo quando me pedem para resolver um problema com números fracionários.

	Concordo totalmente		Concordo		Discordo		Discordo totalmente

7- Quando minhas tentativas de resolver um problema que envolve números fracionários fracassam, continuo persistindo na tentativa de resolvê-lo.

	Concordo totalmente		Concordo		Discordo		Discordo totalmente

8- Quando resolvo um problema e o resultado é um número fracionário, fico em dúvida se a resposta está correta, mesmo achando que os procedimentos que utilizei na resolução possam estar corretos.

	Concordo totalmente		Concordo		Discordo		Discordo totalmente

9- Desisto facilmente de resolver um problema quando ele envolve números fracionários.

	Concordo totalmente		Concordo		Discordo		Discordo totalmente

10- Ser professor de matemática não era minha primeira opção profissional.

	Concordo totalmente		Concordo		Discordo		Discordo totalmente

11- Quando eu me tornar professor, vou ensinar frações do jeito que eu aprendi na escola.

	Concordo totalmente		Concordo		Discordo		Discordo totalmente

12- Minha experiência com o aprendizado de frações na escola foi positiva, não tive dificuldades.

	Concordo totalmente		Concordo		Discordo		Discordo totalmente

13- A matemática que aprendi na escola me auxilia nas minhas tarefas do dia a dia.

	Concordo totalmente		Concordo		Discordo		Discordo totalmente

14- Na minha família a matemática sempre foi valorizada.

	Concordo totalmente		Concordo		Discordo		Discordo totalmente

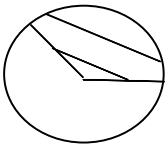
15 - O meu conhecimento sobre frações é suficiente para que eu consiga resolver problemas com esses números.

	Concordo totalmente		Concordo		Discordo		Discordo totalmente

APÊNDICE B
QUESTIONÁRIO SOBRE OS NÚMEROS RACIONAIS (QF_1)

Instruções: Você deve responder às questões, exibindo a resolução de cada uma. Isso se aplica também às questões de múltipla escolha.

1- Qual a opção que se refere à parte riscada do desenho?



( ) Cerca de metade
( ) Menos de um terço
( ) Mais de um quarto
( ) Cerca de um quinto

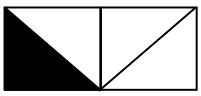
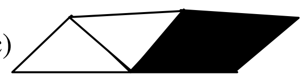
Explique como você chegou a essa resposta

2- Um conjunto de 6 cadernos pode ser repartido, igualmente, de quantas formas diferentes? É possível reparti-los em quartos? Justifique.

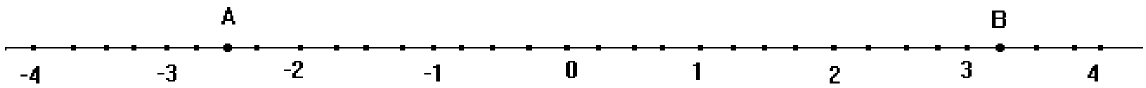
3- Coloque em ordem crescente os seguintes números racionais:

$\frac{15}{16}, \frac{11}{12}, \frac{18}{19}, 1, \frac{47}{48}$ e $\frac{2}{3}$.

4- Marque a alternativa na qual está bem representado o resultado da expressão $\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)$, pela parte pintada da figura.

a)  b)  c)  d) 

5- Na representação da reta abaixo, a unidade de comprimento foi dividida em quatro partes iguais. Cada ponto representa um número racional.



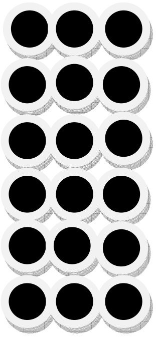
O valor de $\dfrac{A-B}{A+B}\cdot$ é:

a) 1 b) -1 c) $-\dfrac{23}{3}$ d) 0 e) $-\dfrac{19}{7}$

6- Para fazer um pôster de uma foto 9x12 cm, foi preciso alterá-la considerando-se a razão 7/9. Quais as dimensões da nova foto no pôster?

APÊNDICE C
QUESTIONÁRIO SOBRE OS NÚMEROS RACIONAIS E CRENÇAS (QF_2)

Q1. Considere como unidade o conjunto de pontos abaixo para responder as perguntas a seguir.



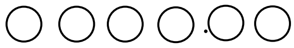
a) Você pode construir terços desse conjunto? Como?
b) Construa um conjunto com 2/3 do conjunto dado.
c) Construa um conjunto com 5/3 do conjunto dado.
d) É possível construir quartos desse conjunto de pontos? Por quê?

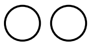
Perguntas sobre Q1 realizadas na entrevista.
O que significa para você a palavra terços? É possível obter terços desse conjunto de pontos de maneira diferente da que você fez?
Como você obteve 2/3 do conjunto? E 5/3 desse conjunto?
No conjunto dado, é possível identificar 5/3? Por quê?

Q2. Considere o seguinte conjunto ◯ ◯ ◯ ◯

a) Se o conjunto representa 2/3 da unidade, qual é a unidade?
b) Se o conjunto representa 4/3 da unidade, qual é a unidade?
c) Como você pensou para resolver essa questão?

Perguntas sobre Q2 realizadas na entrevista.
Como você pensou para resolver essa questão?
Se eu dissesse que uma bolinha representa 1/3 da unidade, qual seria a unidade?
Se eu disser que uma bolinha representa 2/3 da unidade, qual seria a unidade?
O que você entende por unidade?

Q3. Considere como unidade o conjunto 

Que fração da unidade  representa ?

Perguntas sobre Q3 realizadas na entrevista.
Como você pensou para resolver Q3?
Que frações representam duas bolinhas, três bolinhas, quatro bolinhas?
Você poderia identificar 2/3 no conjunto considerado como unidade? Por quê?
Que fração da unidade representa uma bolinha?

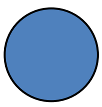
Q4. Considere a figura .

a) Se na figura estão representados 3/4 de uma unidade, qual é a unidade?
b) Se na figura estão representados 5/3 da unidade, qual é a unidade?

Perguntas sobre Q4 realizadas na entrevista.
Como você pensou para resolver o problema Q4?

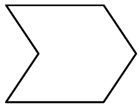
Considere agora a figura:

a) se a figura representa 1/2 da unidade, construa a unidade.
b) se a figura representa 1/3 da unidade, construa a unidade.

Q5. Se  é a unidade,

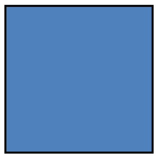
a) Represente 3/4, dessa unidade.
b) Represente 5/4, usando essa unidade.

Perguntas sobre Q5 realizadas na entrevista.
Como você pensou para resolver esse problema?
Você consegue identificar 2/3 na figura? Como?
Você consegue identificar 5/3 na figura? Por quê?
Considere agora a figura abaixo como unidade.

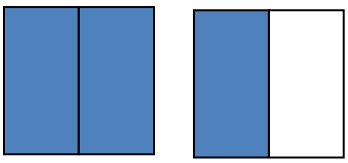


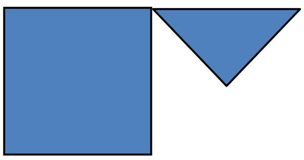
a) Represente 1/4 dessa unidade.
b) Represente 5/4 usando essa unidade.

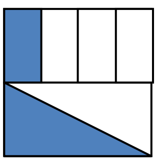
Alguém já havia feito esse tipo de pergunta a você?
Você já havia pensado sobre elas?
Você acha importante pensar sobre elas? Por quê?
Você faria esses questionamentos a seus alunos? Por quê?

Q6. Para cada alternativa abaixo, considere  como a unidade.

Escreva uma fração que represente as partes pintadas nas figuras:

a) 

b) 

c) 

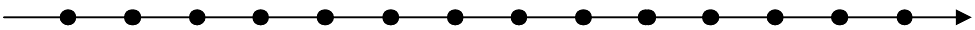
Perguntas sobre Q6 realizadas na entrevista.
Como você pensou para resolver esse problema?
Como você entende a divisão das figuras das opções c) e d)? Você consegue relacionar o triângulo sombreado com o quadrado?
Para você, como está dividida a figura da letra c)? É possível considerarmos essas diferentes divisões quando estamos tratando de frações? Por quê?

Q7. Ilustre cada uma das frações abaixo.

a) 1/5 b) 7/3 c) $1\frac{1}{4}$

Perguntas sobre Q7 realizadas na entrevista.
Por que você escolheu esse tipo de representação?
Você poderia representar essas frações usando material concreto? (Folha de papel e bolinhas ou fichas).

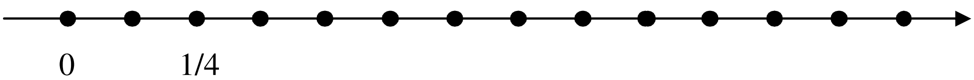
Q8. Localize na reta abaixo os números 3/4, 6/8 e 3/2. Explique como você pensou.



Perguntas sobre Q8 realizadas na entrevista.
Mostre-me na reta qual é a medida correspondente a 1/4.
Você consegue localizar o 1 na reta?
Você consegue identificar sua dificuldade nessa questão?

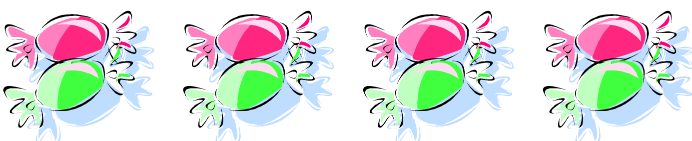
Q9. Represente na reta abaixo uma fração entre 1/4 e 1/2.

Explique como você pensou.



Perguntas sobre Q9 realizadas na entrevista.
Como você pensou para conseguir uma fração entre 1/4 e 1/2?
Para você, quantos números existem entre 0 e 1/4?

Q10. O desenho abaixo representa 2/3 das balas que Pedro tem. Seis balas representam que fração de todas as balas de Pedro? Como você pensou para resolver essa questão?



Pergunta sobre Q10 realizada na entrevista.
Como você pensou para responder essa pergunta?