

Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

Análise Não-Linear de Estruturas de Concreto por meio do Método Element Free Galerkin

Ramon Pereira da Silva

Tese submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Roque Luiz da Silva Pitangueira

Co-orientador: Prof. Felício Bruzzi Barros

Belo Horizonte, 20 de dezembro de 2012

Agradecimentos

Aos meus pais, que me apoiam através de exemplos como trabalho, perseverança e dedicação à família.

A meus orientadores Professores Roque Luiz da Silva Pitangueira e Felício Bruzzi Barros, primeiramente por estenderem suas mãos creditando seus respectivos votos de confiança, assim como pela orientação concedida sempre com o mesmo entusiasmo, dedicação e amizade.

Àqueles que me antecederam neste trabalho, sem o que tudo o mais seria muito mais difícil. Em especial aos muitos companheiros do projeto **INSANE**, em particular ao Samuel Penna, pela pronta disponibilidade e colaboração.

Aos meus ex-professores e ex-orientadores. Em particular os professores Alcebíades de Vasconcellos Filho e Leônidas Conceição Barroso, por me apresentarem à academia.

Com receio de ser traído pela memória, opto por agradecer de modo coletivo aos meus colegas e amigos professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG que, de

maneira direta ou indireta, colaboraram com este trabalho, seja assumindo encargos extras, ou simplesmente oferecendo apoio e estímulo.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas sempre muito atenciosos e solícitos.

Meus amigos de longa data, Paulo, Heloísa, Edilson e Hélio, assim como aqueles recém chegados, Helder, Eliane e André, meus irmãos e suas respectivas esposas, meus sobrinhos Lucas e Racchel, agradeço o apoio sem hora marcada.

À Laura Cançado Ribeiro cujo carinho, perspicácia e sensibilidade me ajudaram a desatar muitos e intrincados nós.

Aos meus sogros, Nelson e Maria José, pelo incentivo e acolhimento incondicional.

Finalmente, e fundamentalmente, agradeço à minha família, Carine e Theo, pelo apoio irrisolto, pelo amor e carinho dedicados, transigindo dos momentos juntos e, acima de tudo, por estimularem a me tornar um ser humano melhor. A eles dedico este trabalho.

Resumo

No modelamento de materiais parcialmente frágeis, como concreto, rochas e geomateriais, consideram-se inicialmente os mesmos como contínuos, elásticos, isotrópicos e homogêneos. Todavia, a natureza desta classe de materiais é intrinsecamente heterogênea. Não obstante esse fato, à medida que cargas são aplicadas e das deformações daí decorrentes, estes materiais deixam de ser homogêneos e isotrópicos, assim como não mais se comportam elasticamente.

Para a simulação numérica de estruturas desses materiais utilizando-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), e considerando-os como inicialmente homogêneos, em uma análise fisicamente não-linear, muitas vezes defronta-se com problemas de localização de deformação numericamente induzida.

A fim de contornar este tipo de problema, pesquisadores têm proposto modelos constitutivos parametrizados em função do tamanho do elemento finito usado em determinada malha. Todavia, um modelo constitutivo não deve estar vinculado a características geométricas da malha, ficando seu uso bem limitado.

Estratégias que introduzem dependência entre malha e modelo constitutivo para solucionar problemas de localização de deformações têm sido criticadas, uma vez que estas envolvem alterações artificiais nas propriedades do material em função de alguma característica geométrica da malha. A tentativa de evitar esta inconsistência, fisicamente inaceitável, é extremamente relevante para a comunidade científica da área de métodos numéricos e computacionais aplicados à engenharia.

Uma das contribuições deste trabalho foi apresentar um projeto de implementação de um método sem malha tirando o máximo proveito em termos de aproveitamento de código legado da plataforma **INSANE**, originalmente preparada para o MEF. Outra contribuição foi a proposta de cálculo do preditor e do corretor nos métodos de controle utilizando-se controle por parâmetros no processo iterativo incremental, como alternativa ao processo tradicional que utiliza controle por deslocamentos.

Os experimentos numéricos realizados indicam que os mesmos cuidados tomados para realização de análise fisicamente não linear via MEF devem ser também observados para o caso do EFG.

Também detectou-se que, dos vários parâmetros necessários ao EFG, a escolha do tamanho do domínio de influência, da integração numérica e da base polinomial usada, são determinantes para a realização de análise fisicamente não linear.

Abstract

Softening behavior materials such as concrete, rocks and geomaterials, are initially modeled as a continuum, elastic, isotropic and homogeneous medium. However, this class of materials is inherently heterogeneous. Nonetheless, as the loads are applied, and the deformations thereof, such materials no longer exhibit the same initial behavior.

The numerical simulation of such materials, in particular performing a physically nonlinear Finite Element Method (FEM) analysis, often leads to numerically induced localization problems.

Furthermore, a reasonable accurate FEM discretization usually restricts the material's random spatial characteristics to the geometry of the finite elements employed. Also, taking into account, for instance, material discontinuities, usually requires expensive remeshing operations to track the cracking path.

In order to overcome such difficulties, much work has been devoted into the development of constitutive modelling, where some parameter associated to the finite element's geometric

dimensions introduced into the formulation. This, however, renders an artificial modelling, which is physically inconsistent.

One of the contributions of this Thesis was presenting a computational implementation of a meshless method while reusing the maximum possible legacy code **INSANE**, a software platform originally developed for the FEM.

Another contribution was a novel form of calculating the predictor and corrector incremental loading factor used in the nonlinear solver, in which the nodal parameters associated to the MLS approximation are used instead of the nodal displacements.

The numerical experiments performed throughout this work suggest that when performing a physically nonlinear analysis using the EFG, one should take the same caution measures usually taken when using the FEM in the same circumstances.

Also, it was detected that, from all of the possible parameters necessary to the EFG, the choices of the size of the domain of influence, the numerical integration scheme and the polynomial basis used, are fundamental to performing a physically nonlinear analysis.

Sumário

Sumário	viii
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiv
Lista de Símbolos	xvi
1 Introdução	1
2 Métodos Sem Malha	4
2.1 Introdução	4
2.2 Aproximações nos Métodos Sem Malha	7
2.2.1 Obtenção das Funções de Forma	8
2.2.2 SPH	10
2.2.3 MLS	13
2.2.4 PIM	21
2.2.5 RPIM	23
2.2.6 RPIMp	25
2.3 Formulação dos Métodos Sem Malha	27

2.4	Imposição de Condições de Contorno	34
2.4.1	Modificação da Forma Fraca	35
2.4.2	Modificação das Funções de Forma	37
2.4.3	Acoplamento	37
2.5	Formulação dos Métodos sem Malha Acoplados ao MEF	42
3	Um Ambiente Teórico e Computacional de Modelos Constitutivos para Concreto	45
3.1	Tentativas de Unificação	51
3.2	Unificação Teórica	54
4	Implementação	57
4.1	Sistema INSANE	58
4.2	Análise Estática Fisicamente Não Linear	60
4.3	Classes Implementadas	67
4.4	Contribuições	71
5	Experimentos Numéricos	79
5.1	Domínio de Suporte	80
5.1.1	Painel L	81
5.2	Integração Numérica	86
5.3	Base Polinomial	87
5.4	Processo Iterativo Incremental	90
5.5	Aproximação do Tensor Constitutivo	97
5.5.1	Chapa Tractionada	97
5.6	Diferentes Modelos de Análise	101
5.6.1	Barra 3D	101
5.6.2	Viga Alta	103

5.6.3 Viga Com Defeito Inicial	106
6 Considerações Finais	108
Referências Bibliográficas	113

Lista de Figuras

2.1	Aproximação MLS $u^{\rho}(x)$ da função $u(x)$ em 1D. $u^h(x)$ corresponde a uma aproximação de elementos finitos linear.	14
2.2	Domínio de <i>influência</i> e domínio de <i>suporte</i> . Imagem adaptada de Liu (2003). . .	15
2.3	Domínio 2D: nós (\bullet, \circ) e ponto de integração (\square)	33
2.4	Nós de elementos finitos ativos $(\bullet \in I^h)$ sobre o contorno e suporte para o cálculo das funções de forma de elementos finitos (em cinza).	38
2.5	Funções de forma acopladas: elementos finitos (linha tracejada) e EFG (linha cheia). Crédito imagem Fernández-Méndez e Huerta (2004).	40
2.6	Funções de forma acopladas, associadas aos pontos A e B no domínio. Discretização em elementos finitos no contorno, nós (\circ) e partículas (\times) . Crédito imagem Fernández-Méndez e Huerta (2004).	41
2.7	Discretização em elementos finitos no contorno, nós (\bullet) e partículas também no interior dos elementos (\times) . Crédito imagem Fernández-Méndez e Huerta (2004). .	41
4.1	Organização do núcleo numérico do INSANE	59
4.2	Organização de classes que implementam a interface <code>Model</code>	59
4.3	Classes que implementam a interface <code>Assembler</code>	60
4.4	Classe <code>MfreeModel</code>	67

4.5	Classe <code>Element</code>	68
4.6	Classe <code>MfreeNode</code>	69
4.7	Classe <code>Geometry</code>	70
4.8	Classe <code>MfreeShape</code>	71
4.9	Classe <code>Basis</code>	71
4.10	Elementos finitos acoplados (linha cheia) à célula de integração (linha pontilhada). Nós do domínio (○), nós de elementos finitos (●), pontos de integração (+). Nós de incidência não destacados.	72
4.11	Camada contendo um elemento finito acoplado à malha de células de integração.	73
4.12	<i>Framework</i> de modelos constitutivos do INSANE	74
4.13	Busca com critério de visibilidade	75
5.1	Geometria do painel L.	81
5.2	Painel L: discretização e malha de células de integração. Destacam-se na figura à direita os elementos de acoplamento em cor mais clara.	82
5.3	Compara tamanho domínio de influência	83
5.4	Trajetória de equilíbrio comparada aos resultados experimentais	84
5.5	Padrão dano: esquerda, $\rho_x = \rho_y = 2h$ com 5×5 pontos de Gauss. Ao centro, $\rho_x = \rho_y = h$ com 2×2 pontos de Gauss. À direita MEF Q4 com 2×2 pontos de Gauss.	84
5.6	Aspecto de dano: à esquerda, EFG+MEF $\rho_x = \rho_y = 2h$ com 5×5 pontos de Gauss, ao centro padrão experimental, à direita MEF Q4 com 2×2 pontos de Gauss. Imagem central adaptada de Penna (2011).	85
5.7	Compara ordem de integração com $\rho = 2h$	86
5.8	Painel L: discretização e malha de células de integração. Destacam-se na figura à direita os elementos de acoplamento em cor mais clara.	87
5.9	Compara aproximação quadrática	88

5.10	Comparação da aproximação linear e quadrática para $\rho = 2h$	89
5.11	Comparação da aproximação linear e quadrática $\rho = 3h$	89
5.12	Compara métodos de controle tradicional (por deslocamentos)	91
5.13	Compara métodos de controle utilizando-se parâmetros	92
5.14	Compara controle por deslocamento \times controle por parâmetro (CDD) nó <i>A</i>	93
5.15	Comparação do controle de deslocamento \times controle por parâmetro (CDD) nó <i>B</i>	95
5.16	Comparação do controle por deslocamento \times controle por parâmetro (CAC) nó <i>A</i>	95
5.17	Comparação do controle por deslocamento \times controle por parâmetro (CAC) nó <i>B</i>	96
5.18	Geometria chapa tracionada, discretização com 16 células de integração / 25 nós	97
5.19	Aproximação do tensor constitutivo	98
5.20	Distribuição da deformação normal ϵ_{xx} nos passos de carga anterior e imediatamente seguinte à ocorrência de localização de deformações numericamente induzida.	99
5.21	Distribuição do dano nos passos de carga anterior e imediatamente após a ocorrência de localização de deformações numericamente induzida.	100
5.22	Discretização barra 3D. Note as células de integração nas extremidades.	102
5.23	Trajetória de equilíbrio do deslocamento horizontal do nó <i>A</i>	102
5.24	Geometria viga alta com balanço	103
5.25	Discretização viga alta	104
5.26	Malha de células de integração viga alta	104
5.27	Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do nó <i>A</i> (EPT).	105
5.28	Viga com defeito: Geometria e discretização	106
5.29	Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do nó <i>A</i>	107
6.1	Corpo e seu carregamento	110
6.2	Comportamento do material	110
6.3	Resposta estrutural global	111

Lista de Tabelas

2.1	RBFs típicas	24
2.2	Tabela comparativa construção das funções de forma	28
4.1	Métodos de controle utilizados no algoritmo 1	64
4.2	Métodos de controle: proposta	78
5.1	Comparação da trajetória de deslocamentos do nó A (CDD)	94
5.2	Comparação da trajetória de deslocamentos do nó B (CDD)	94

Lista de Algoritmos

1	Método de Newton Raphson (versão em deslocamentos)	63
2	Cálculo da matriz de rigidez tangente	65
3	Cálculo do vetor de forças nodais equivalentes	65
4	Montagem do vetor de forças nodais equivalentes para uma célula	66
5	Cálculo das funções de forma de EFG	66
6	Método de Newton Raphson (versão proposta)	78

Lista de Símbolos

CAC	Controle do comprimento do arco cilíndrico
CDD	Controle direto de deslocamento
CDG	Controle de deslocamento generalizado
EFG	Element Free Galerkin
EPT	Estado plano de tensões
INSANE	INterative Structural ANalysis Environment
MEF	Método dos Elementos Finitos
MLS	Moving Least Squares
MM	Método sem Malha
PIM	Point Interpolation Method
RBF	Radial Basis Function
RPIM	Radial Point Interpolation Method
RPIM _p	Radial Point Interpolation Method with Polinomial Reproduction

α	Valor máximo de dano admissível para o material
α_c	Valor máximo de dano admissível para o material na compressão
α_t	Valor máximo de dano admissível para o material na tração
β	Intensidade de evolução do dano
β_c	Intensidade de evolução do dano na compressão
β_t	Intensidade de evolução do dano na tração
$\delta\lambda$	Incremento do fator de carga
$\delta\mathbf{U}$	Vetor de incrementos de deslocamentos
$\delta\mathbf{U}^P$	Vetor de incrementos de deslocamentos associados ao vetor \mathbf{P}
$\delta\mathbf{U}^Q$	Vetor de incrementos de deslocamentos associados ao vetor \mathbf{Q}
$\delta\mathbf{V}$	Vetor de incrementos de parâmetros
$\delta\mathbf{V}^P$	Vetor de incrementos de parâmetros associados ao vetor \mathbf{P}
$\delta\mathbf{V}^Q$	Vetor de incrementos de parâmetros associados ao vetor \mathbf{Q}
ΔV_j	Volume associado à partícula de índice j
$\delta(\cdot)$	Função delta de Dirac
$\delta(\cdot)$	Varição
δ_{ij}	Delta de Kronecker
$\dot{\lambda}_m$	Componentes do vetor de multiplicadores inelásticos
$\dot{\sigma}_{ij}$	Componentes do tensor incremento de tensões

$\dot{\epsilon}_{kl}^d$	Componentes do tensor incremento de deformações associadas à degradação da rigidez
$\dot{\epsilon}_{kl}$	Componentes do tensor incremento de deformações
η, C, c, q	Parâmetros de forma da função de base radial
Γ	Contorno do domínio da função $u(\cdot)$
Γ_D	Região no contorno na qual são prescritas as condições de contorno essenciais ou de Dirichlet
Γ_N	Região no contorno na qual são prescritas as condições de contorno naturais ou de Newmman
κ_0	Valor da deformação equivalente a partir do qual o processo de dano se inicia
λ_j^i	Fator de carga no passo de carga i , iteração j
ν	Coeficiente de Poisson
Ω	Domínio de definição da função $u(\cdot)$
Ω^ρ	Sub-domínio no qual as funções de forma do EFG têm influência
Ω^h	Sub-domínio no qual as funções de forma do MEF têm influência
$\partial\Omega^\rho$	Contorno do sub-domínio Ω^ρ
ϕ	Função peso
ρ	Parâmetro que define a abrangência da função peso, dimensão do domínio de influência
ρ_x	Parâmetro que define a abrangência da função peso, dimensão do domínio de influência na direção x

ρ_y	Parâmetro que define a abrangência da função peso, dimensão do domínio de influência na direção y
ρ_z	Parâmetro que define a abrangência da função peso, dimensão do domínio de influência na direção z
σ_{ij}	Componentes do tensor de tensões
ε_c	Deformação relativa ao limite elástico na compressão
ε_{kl}	Componentes do tensor de deformação
ε_t	Deformação relativa ao limite elástico na tração
φ_j	Vetor contendo as funções de forma do j -ésimo nó
α	Vetor de coeficientes associados à aproximação
β	Vetor de coeficientes associados à aproximação
γ	Vetor auxiliar
$\gamma_{,ij}$	Derivada segunda das componentes do vetor γ em relação às variáveis x_i, x_j
$\gamma_{,i}$	Derivada primeira das componentes do vetor γ em relação à variável x_i
λ	Vetor multiplicadores de Lagrange
σ	Tensor de tensões
ε	Tensor de deformações
φ	Matriz contendo as funções de forma
\bar{H}_{nm}	Componentes do tensor pós-crítico (no domínio das deformações)
\bar{m}_{mkl}	Componentes do tensor das direções da degradação (no domínio das deformações)

\bar{n}_{nij}	Componentes do tensor dos gradientes das funções de carregamento (no domínio das deformações)
$\ddot{\mathbf{x}}$	Vetor da segunda variação temporal das variáveis de estado
$\dot{\mathbf{x}}$	Vetor da primeira variação temporal das variáveis de estado
ℓ	Dimensão da base polinomial
$\hat{\mathbf{t}}$	Vetor de forças de superfície prescritas
$\hat{\mathbf{u}}$	Vetor de deslocamentos prescritos
\mathbf{x}	Ponto no espaço Euclidiano tridimensional
\mathbf{x}_Q	Coordenadas de um ponto de integração no espaço Euclidiano tridimensional
\overline{ij}	Segmento de reta definido pelos pontos i e j
$\tilde{\mathbf{N}}^\rho$	Vetor contendo as funções de forma do EFG acopladas ao MEF
$\tilde{\mathbf{N}}_{,ij}^\rho$	Derivada segunda das componentes do vetor $\tilde{\mathbf{N}}^\rho$ em relação às variáveis x_i, x_j
$\tilde{\mathbf{N}}_{,i}^\rho$	Derivada primeira das componentes do vetor $\tilde{\mathbf{N}}^\rho$ em relação à variável x_i
\tilde{N}_j^ρ	Componente j do vetor contendo as funções de forma do EFG acopladas ao MEF
$\bar{\mathbf{n}}$	Vetor normal
\mathbf{A}	Matriz dos coeficientes associados à segunda variação temporal das variáveis de estado
\mathbf{B}	Matriz auxiliar
\mathbf{B}	Matriz dos coeficientes associados à primeira variação temporal das variáveis de estado
\mathbf{b}	Vetor de forças de corpo

$\mathbf{B}_\rho, \mathbf{B}_j^\rho$	Matriz das relações entre deformações e deslocamentos no EFG
$\mathbf{B}_h, \mathbf{B}_i^h$	Matriz das relações entre deformações e deslocamentos no MEF
$\mathbf{B}_{,ij}$	Derivada segunda da matriz auxiliar \mathbf{B} em relação às variáveis x_i, x_j
$\mathbf{B}_{,i}$	Derivada primeira da matriz auxiliar \mathbf{B} em relação à variável x_i
\mathbf{C}	Matriz dos coeficientes associados às variáveis de estado
\mathbf{D}	Tensor das propriedades constitutivas
\mathbf{d}	Vetor de variáveis de estado duais
\mathbf{E}_s	Matriz constitutiva secante
\mathbf{E}_t	Matriz constitutiva tangente
\mathbf{F}	Vetor de forças equivalentes às tensões internas
\mathbf{F}^b	Vetor de forças nodais equivalentes devidas às forças de corpo
\mathbf{F}^t	Vetor de forças nodais equivalentes devidas às forças aplicadas sobre o contorno
\mathbf{G}	Matriz auxiliar no cálculo dos multiplicadores de Lagrange
\mathbf{H}	Tensor pós-crítico (no domínio das tensões)
\mathbf{K}	Matrix de rigidez
$\mathbf{K}^{\rho\rho}$	Matrix de rigidez parcela relativa ao EFG
$\mathbf{K}^{\rho h}$	Matrix de rigidez parcela relativa ao acoplamento EFG-MEF
\mathbf{K}^{hh}	Matrix de rigidez parcela relativa ao MEF
\mathbf{K}_t	Matrix de rigidez tangente
\mathbf{L}	Operador diferencial

M	Matriz momento
m	Tensor das direções de degradação (no domínio das tensões)
$\mathbf{M}_{,ij}$	Derivada segunda da matriz momento em relação às variáveis x_i, x_j
$\mathbf{M}_{,i}$	Derivada primeira da matriz momento em relação à variável x_i
n	Tensor das funções de carregamento (no domínio das tensões)
\mathbf{N}^ρ	Vetor contendo as funções de forma do EFG
$\mathbf{N}_{,ij}^\rho$	Derivada segunda das componentes do vetor \mathbf{N}^ρ em relação às variáveis x_i, x_j
$\mathbf{N}_{,i}^\rho$	Derivada primeira das componentes do vetor \mathbf{N}^ρ em relação à variável x_i
\mathbf{N}^h	Vetor contendo as funções de forma do MEF
$\mathbf{N}_{,i}^h$	Derivada primeira das componentes do vetor \mathbf{N}^h em relação à variável x_i
P	Vetor de cargas de referência
p	Vetor contendo os monômios que formam a base polinomial
\mathbf{P}_m	Matriz momento em RPIMp
\mathbf{P}_Q	Matriz momento em PIM
$\mathbf{p}_{,ij}$	Derivada segunda das componentes do vetor p em relação às variáveis x_i, x_j
$\mathbf{p}_{,i}$	Derivada primeira das componentes do vetor p em relação à variável x_i
Q	Vetor de forças residuais
q	Vetor auxiliar no cálculo dos multiplicadores de Lagrange
R	Vetor contendo as funções de base radial
\mathbf{R}_Q	Matriz momento em RPIM e RPIMp

S_a	Matriz auxiliar no cálculo de α em RPIMp
S_b	Matriz auxiliar no cálculo de β em RPIMp
\mathbf{u}^p	Vetor de deslocamentos devidos à aproximação pelo EFG
\mathbf{u}^h	Vetor de deslocamentos devidos à aproximação pelo MEF
\mathbf{U}_s	Vetor que contém os parâmetros associados aos nós pertencentes ao domínio de suporte de um ponto \mathbf{x}
\mathbf{x}	Vetor de variáveis de estado do problema
C_{ijkl}	Componentes do tensor de flexibilidade secante
d	Dimensão do problema ($d = 1, 2, 3$)
E	Módulo de elasticidade longitudinal
E_0	Módulo de elasticidade elástico
E_{ijkl}	Componentes do tensor de rigidez secante
E_{ijkl}^t	Componentes do tensor de rigidez tangente
$f(\cdot)$	Função que calcula os deslocamentos nodais em função dos parâmetros nodais
F_n	Funções de carregamento
f_c	Tensão relativa ao limite de resistência à compressão
f_t	Tensão relativa ao limite de resistência à tração
G_f	Energia de fratura por comprimento de trinca
h	Comprimento material característico
h	Distância característica entre nós

h_x	Distância característica entre nós na direção x
h_y	Distância característica entre nós na direção y
i, j, r, s	Índices
I^ρ	Coleção de índices associados à aproximação pelo EFG
I^h	Coleção de índices associados à aproximação pelo MEF
k	Ordem máxima dos monômios contidos na base polinomial, ordem da aproximação
m_{mkl}	Componentes do tensor das direções da degradação (no domínio das tensões)
n	Número de nós
N^λ	Função de forma associada aos multiplicadores de Lagrange
N_j^ρ	Componente j do vetor contendo as funções de forma do EFG
N_i^h	Componente i do vetor contendo as funções de forma do MEF
n_λ	Número de multiplicadores de Lagrange
n_t	Número total de nós
n_{nij}	Componentes do tensor dos gradientes das funções de carregamento (no domínio das tensões)
P	Polígono P - Piecewise Linear Complex (PLC)
P^k	Consistência da aproximação de ordem k
p_n	Conjunto de variáveis internas que controlam o processo de degradação
R_j	j -ésima função de base radial

r_j	Distância Euclidiana entre o ponto \mathbf{x} e o ponto \mathbf{x}_j
u	Componente de deslocamento de um nó na direção x
$u(\cdot)$	Função escalar
u^ρ	Componente de deslocamento de um nó na direção x devido à aproximação pelo EFG
$u^\rho(\cdot)$	Parcela da aproximação da função $u(\cdot)$ devida ao EFG
u^h	Componente de deslocamento de um nó na direção x devido à aproximação pelo MEF
$u^h(\cdot)$	Parcela da aproximação da função $u(\cdot)$ devida ao MEF
u_j	j -ésimo parâmetro associado ao MLS
v	Componente de deslocamento de um nó na direção y
v^ρ	Componente de deslocamento de um nó na direção y devido à aproximação pelo EFG
v^h	Componente de deslocamento de um nó na direção y devido à aproximação pelo MEF
w	Componente de deslocamento de um nó na direção z
\mathbf{t}	Vetor de forças de superfície
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos

Introdução

Para a solução de vários problemas em engenharia, expressos por complexas equações diferenciais, diversos métodos numéricos são utilizados, os quais constroem soluções aproximadas gerando um conjunto de equações algébricas.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) está consolidado e tem sido amplamente usado com sucesso em diversos campos. Todavia, à medida que modelos mais complexos são necessários, algumas limitações ainda persistem, dificultando sua adoção. Em particular, uma vez que o MEF depende de uma malha de elementos finitos para construir a aproximação de determinada solução, problemas que envolvem descontinuidades, grandes deformações localizadas, por exemplo, são fortemente afetados quando ocorre distorção dos elementos da malha ou alinhamento preferencial dos mesmos. Quando um refinamento da malha é necessário, pode haver perda de precisão ao mapear resultados de uma malha para outra. Além do mais, o custo computacional e de mão-de-obra especializada na construção e verificação de malhas 3D é elevado. No caso da simulação de propagação de trincas, cujo percurso é geralmente desconhecido e extremamente complexo, a existência de uma malha significa seguir um ca-

minho paralelo ao alinhamento dos elementos, o que não necessariamente é o percurso real. Acrescenta-se a esta situação que, uma vez identificada uma fratura, implica na separação entre elementos e conseqüente geração de nova malha a cada passo da análise. Outro problema exemplo é o de localização de deformações numericamente induzida, o qual ocorre quando do modelamento numérico de sólidos constituídos por materiais parcialmente frágeis, como o concreto, rochas e geomateriais.

Um dos objetivos dos métodos sem malha (MM) é exatamente a independência de uma malha de elementos para a construção da aproximação, e sim fazê-lo tendo por base uma nuvem arbitrária de nós, ou partículas, como usualmente descrito na bibliografia pertinente (Nguyen et al. (2008), Huerta et al. (2004a), Liu (2003)). Neste contexto, por exemplo, a simulação numérica de propagação de trincas ou problemas que envolvam descontinuidades e/ou interfaces podem ser mais facilmente tratados, quando comparado às dificuldades inerentes ao MEF.

No entanto, não existem apenas vantagens nos MM. As funções de forma utilizam-se de funções racionais, resultando em alto custo computacional para a avaliação das mesmas, além da necessidade de adotar-se esquemas de integração numérica mais complexos. Quando da imposição de condições de contorno é necessário recorrer a esquemas mais elaborados (Fernández-Méndez e Huerta (2004)), pois as funções de forma não são interpolantes, i.e., não possuem a propriedade delta de Kronecker ou, em outras palavras, as funções de forma não assumem valores um ou zero, respectivamente, quando são associadas ou não aos nós da discretização. De um modo geral, o custo computacional dos MM é maior que aquele do MEF. Todavia, para a gama de problemas para os quais o MEF mostra-se limitado, o aumento no custo computacional pode ser tolerado.

O objetivo principal do trabalho foi desenvolver um modelo de análise fisicamente não-linear de estruturas constituídas de materiais parcialmente frágeis baseado em um método sem malha acoplado ao MEF. A principal motivação foi aproveitar a flexibilidade dos métodos sem malha evitando as dificuldades inerentes da utilização do MEF. Sua implementação computacional foi baseada na plataforma **INSANE** em desenvolvimento no DEEs.

Este texto está organizado em 5 capítulos, além desta introdução. Os métodos sem malha, em particular o *Element Free Galerkin* (EFG), sua formulação considerando o acoplamento com o MEF, bem como alguns detalhes da implementação, são objeto do capítulo 2. Uma breve revisão sobre alguns modelos constitutivos para o concreto forma o capítulo 3. No capítulo 4 são discutidos mais detalhes da implementação assim como algumas contribuições desta tese. No capítulo seguinte, de número 5, experimentos numéricos são apresentados e discutidos. Finalmente, o capítulo final faz um breve resumo crítico do trabalho de tese, bem como apresenta um conjunto de desdobramentos para possíveis trabalhos futuros dando continuidade à pesquisa.

Métodos Sem Malha

2.1 Introdução

Objetivando-se ter uma visão geral do assunto apresenta-se, no que se segue, algumas características comuns aos MM, conforme [Fries e Matthies \(2004\)](#).

Ausência de malha

1. Não existe a necessidade de uma malha de elementos, da qual exige-se estabelecer a conectividade dos nós a priori. Todavia, nos MM esta conectividade é determinada em tempo de execução, e pode resultar em grande esforço computacional. Assim, na implementação dos MM alguns cuidados devem ser tomados na escolha dos algoritmos e estruturas de dados que envolvem a manipulação de atributos dos nós.
2. Inexistência de sensibilidade ao alinhamento de elementos da malha em determinada direção. Esta sensibilidade pode ser prejudicial em simulações de trincas, por exemplo.

3. Adaptatividade tipo h é facilmente implementada, pois a conectividade entre nós é determinada dinamicamente.
4. Adaptatividade tipo p é mais simples comparativamente ao MEF.
5. Não há a necessidade de geração de malha a priori, tampouco durante o decorrer da análise. Entretanto, dependendo do MM adotado, uma malha de suporte para realizar a integração numérica é necessária.

Continuidade das funções de forma

1. Nos MM as funções de forma podem ser facilmente construídas para se obter a ordem de continuidade desejada.
2. Como consequência, não há necessidade de utilizar-se técnicas de pós-processamento para a determinação de derivadas contínuas de ordem mais elevada das incógnitas aproximadas, como deformações ou tensões.
3. Quando existem descontinuidades, trincas ou interfaces de diferentes materiais, no problema a ser analisado, pode-se construir a aproximação de modo a capturar tais fenômenos, sem as limitações inerentes ao MEF.

Convergência

Embora não tenha sido provado teoricamente, experimentos numéricos sugerem que para a mesma ordem de consistência, a ser explicado na seção 2.2, os MM apresentam melhores resultados de convergência do que os resultados obtidos com métodos baseados em malhas, como afirmado em Fries e Matthies (2004), citando Li e Liu (1996).

Esforço computacional

Geralmente, para problemas em que tanto o MEF e os MM são capazes de representar de forma adequada a solução numérica, considerando a mesma precisão, os MM demandam mais esforço computacional do que os métodos baseados em malhas. Porque:

1. As funções de forma nos MM são mais complexas do que aquelas dos métodos baseados em malha, usualmente do tipo polinomial.
2. O número de pontos de integração é bem mais elevado para realizar a integração numérica com o mesmo grau de precisão. Erros na integração numérica redundam em instabilidade numérica.
3. Para cada ponto de integração é necessário efetuar uma série de operações computacionalmente exigentes, tais como:
 - a) busca pelos nós que pertencem ao domínio de suporte;
 - b) solução de vários pequenos sistemas de equações para a determinação das derivadas das funções de forma;
 - c) uma série de operações algébricas entre matriz-matriz e matriz-vetor para calcular as derivadas das funções de forma;
4. O sistema de equações lineares resultante tem largura de banda geralmente maior, devido ao tamanho dos domínios de influência de cada nó, o que resulta da maior ou menor quantidade de nós presentes em determinado domínio de suporte.

2.2 Aproximações nos Métodos Sem Malha

Considere uma função escalar $u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, a qual é definida sobre o domínio aberto Ω e contorno Γ , sendo \mathbf{x} as coordenadas cartesianas de um ponto dentro do referido domínio. Uma aproximação de $u(\mathbf{x})$, denotada $u^\rho(\mathbf{x})$, tem o formato similar àquele utilizado no MEF, a saber:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^\rho(\mathbf{x}) = \sum_{j \in I^\rho} N_j^\rho(\mathbf{x}) u_j \quad (2.1)$$

onde $N_j^\rho(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções de forma, sendo I^ρ o conjunto de índices dos nós (ou partículas) para os quais $N_j^\rho(\mathbf{x}) \neq 0$, u_j é o valor referente à partícula de índice j , localizada em \mathbf{x}_j . A diferença marcante relativa ao MEF é que, neste, as funções de forma são *interpolantes*, enquanto que nos MM $N_j^\rho(\mathbf{x})$ são *aproximações*, ou seja $u_j \neq u(\mathbf{x}_j)$. Em outras palavras, $N_j^\rho(\mathbf{x}_i) \neq \delta_{ij}$.

As funções de forma $N_j^\rho(\mathbf{x})$ são calculadas com base nas funções peso, $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, as quais devem obedecer a certos requisitos: (i) ser contínua; (ii) ser positiva dentro do seu domínio; (iii) ter suporte compacto. A continuidade da função peso determina a continuidade da função de forma. Embora a positividade da função peso não seja uma exigência matemática, esta condição decorre da necessidade de se obter resultados fisicamente plausíveis como, por exemplo, na análise de fluidos, cuja densidade do meio não pode ser negativa. Por sua vez, o suporte compacto, além de influenciar a banda da matriz, permite a adoção de aproximações com características locais.

2.2.1 Obtenção das Funções de Forma

Nos métodos sem malha constroem-se aproximações de uma função escalar $u(\mathbf{x})$ via integral de convolução, via séries finitas, ou diferenças finitas. Cada uma das técnicas têm suas vantagens e desvantagens, como será descrito resumidamente no que se segue. Veja Liu (2003).

Métodos de aproximação integral

$$f(x) = \int_{x_1}^{x_2} f(\xi) \phi(x - \xi) d\xi$$

1. *Smoothed particle hydrodynamics method* SPH
2. *Reproducing kernel particle method* RKPM
3. *General kernel reproduction method* GKR

Métodos baseados em séries

$$f(x) = a_0 + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + \dots$$

1. *Moving least squares* MLS
2. *Point interpolation methods* PIM (polinomial ou radial)
3. PU (Partição da Unidade, hp-clouds)
4. MEF

Métodos baseados em diferenças finitas

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - a)^2 + \dots$$

1. Método das Diferenças Finitas, malha regular
2. Método dos Pontos Finitos, malha irregular

Um passo fundamental nos MM é a obtenção das funções de forma. Existem certos pré-requisitos que as funções de forma devem atender para garantir precisão, eficiência e convergência da aproximação. São eles:

1. distribuição arbitrária dos nós;
2. estabilidade do algoritmo numérico;
3. consistência;
4. suporte compacto;
5. eficiência computacional;
6. compatibilidade;
7. propriedade delta de Kronecker (desejável).

Permitir a distribuição arbitrária dos nós, além de ser evidente, dá liberdade para efetuar-se refinamentos sucessivos da solução guiados por estimadores de erro, por exemplo. A necessidade de garantir-se estabilidade do algoritmo decorre da aleatoriedade da distribuição de nós pois,

dependendo do método usado para obtenção das funções de forma, bem como da quantidade e arranjo geométrico dos nós, pode resultar em singularidades. O critério de consistência garante a convergência da solução numérica à medida que aumenta-se a densidade de partículas ou, em outras palavras, diminui-se a distância entre partículas. A condição de suporte compacto aumenta o grau de esparsidade, o que colabora com o requisito de eficiência. Este, por sua vez, evidencia uma característica desejável em todos os métodos numéricos. Idealmente, o custo computacional deveria ser da mesma ordem de grandeza do MEF. Funções de forma cuja avaliação computacional seja intensa, pode inviabilizar o uso do método numérico. A exigência de compatibilidade decorre do uso da forma fraca do método de Galerkin global, que exige continuidade da aproximação entre contornos dos sub-domínios, ou contornos dos respectivos domínios de influência. Caso seja utilizado a forma local do método de Galerkin, esta exigência pode ser relaxada. Finalmente, a propriedade delta de Kronecker facilita a imposição de condições de contorno. A maioria dos métodos para obtenção das funções de forma existentes não satisfaz tal condição, o que exige a adoção de esquemas alternativos para a imposição das condições de contorno (Fernández-Méndez e Huerta (2004)).

2.2.2 SPH

O método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) é o precursor dos MM, e tem suas origens na astrofísica no trabalho de Lucy (1977) como citado em Huerta et al. (2004a). Seja a função $u(\mathbf{x})$ definida em $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Sua representação (exata) na forma integral é obtida através da expressão

$$u(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \delta(\mathbf{x} - \xi) d\xi, \quad (2.2)$$

onde $\delta(\cdot)$ é a função delta de Dirac. A ideia básica na abordagem SPH consiste em aproximar a função $u(\mathbf{x})$ por uma convolução (na sua forma contínua), ou seja:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^\rho(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} u(\xi) \phi(\mathbf{x} - \xi, \rho) d\xi, \quad (2.3)$$

onde $u^\rho(\mathbf{x})$ representa a aproximação, e não uma interpolação, da função $u(\mathbf{x})$, $\phi(\mathbf{x})$ é a função peso associada à posição \mathbf{x} (atinge seu valor máximo em \mathbf{x} , decrescendo até o limite de seu suporte, ou região de influência), e o parâmetro ρ define a abrangência da função peso, também referido como domínio de influência ou suporte.

De acordo com Monaghan (1982), citado por Liu (2003), esta representação integral é válida e converge se a função peso satisfizer as seguintes condições:

1. Positividade: $\phi(\mathbf{x} - \xi, \rho) > 0$ sobre o domínio Ω ;
2. Suporte Compacto: $\phi(\mathbf{x} - \xi, \rho) = 0$ fora do domínio Ω ;
3. Unidade: $\int_{\Omega} \phi(\mathbf{x} - \xi, \rho) d\xi = 1$;
4. Decaimento: ϕ é uma função monotônica decrescente;
5. Delta de Dirac: $\phi(\eta, \rho) \rightarrow \delta(\eta)$ à medida que $\rho \rightarrow 0$.

Os requisitos 2 e 3 formam as condições mínimas necessárias para a construção de funções peso usadas em métodos sem malha baseados em representação integral.

A forma discreta de $u^\rho(\mathbf{x})$ é obtida aplicando-se o somatório para todas as partículas no domínio Ω , a saber:

$$u^\rho(\mathbf{x}) = \sum_j u_j \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \Delta V_j, \quad (2.4)$$

onde ΔV_j representa o volume da partícula j .

Uma dificuldade na aplicação do SPH é o cálculo automático do volume de uma partícula para um meio contínuo arbitrário sem o uso compulsório de uma malha. Todavia, uma vez definidas as condições iniciais de cada partícula, a própria formulação do método se encarrega de fazer as atualizações necessárias. Este tipo de procedimento é naturalmente aplicável, por exemplo, a problemas onde ocorrem explosões ou penetrações, Liu (2003).

A Eq. (2.4) pode ser reescrita no formato usado em elementos finitos:

$$u^\rho(\mathbf{x}) = \sum_j N_j^\rho(\mathbf{x}) u_j, \quad (2.5)$$

onde $N_j^\rho(\mathbf{x})$ é denominada função de forma do método SPH, a qual é definida como:

$$N_j^\rho(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \Delta V_j. \quad (2.6)$$

Observe-se contudo que, a despeito da analogia com o formato usado no MEF, as funções de forma do SPH não possuem a propriedade delta de Kronecker. Devido a esta característica, geralmente $N_i^\rho(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij}$, o que significa dizer que $u^\rho(\mathbf{x}_j) \neq u_j$. Assim, u_j é denominado parâmetro da partícula j , que não corresponde ao valor nodal da função no referido nó. As funções de forma não são interpoladores, pois a função aproximada não passa pelos parâmetros nodais usados para se calcular as funções de forma. Com efeito, a Eq. (2.4) não é uma interpolação de uma função, mas somente a aproximação de uma função.

Assim como no MEF, um MM tem de convergir, no sentido de que a solução numérica obtida por um MM deve se aproximar da solução exata à medida que a distância entre partículas tende a zero. Para um MM convergir, é necessário que as funções de forma apresentem determinado grau de consistência – Liu (2003).

Usualmente a consistência é medida pela ordem polinomial que as funções de forma podem representar. Por exemplo, se a aproximação pode reproduzir, exatamente, uma função cons-

tante, esta aproximação é dita de consistência zero, ou P^0 . Analogamente, se a aproximação consegue reproduzir exatamente uma função linear, sua consistência é denotada por P^1 . De modo geral, a consistência é dita P^k se a aproximação reproduzir exatamente um polinômio de ordem k . Denomina-se completude a característica de uma aproximação de consistência de ordem k , P^k , garantir, também, que a aproximação é (completamente) consistente para todas as ordens abaixo de k , i.e., de P^0 até P^{k-1} . Para funções de forma polinomiais, completude implica na utilização de todos os termos polinomiais até a ordem desejada. Uma discussão mais detalhada pode ser encontrada em [Fries e Matthies \(2004\)](#).

Pode-se demonstrar, veja por exemplo [Liu \(2003\)](#), que o método SPH possui apenas consistência de ordem zero. A condição de consistência linear é apenas garantida para o caso da função peso ser simétrica em relação à origem, o que para problemas de domínio infinito, não é difícil de ser obtido. Entretanto, é difícil construir funções peso simétricas em pontos na vizinhança ou sobre o contorno do problema.

2.2.3 MLS

O método dos mínimos quadrados móveis (*Moving Least Squares – MLS*) é frequentemente utilizado em ajustes de dados. Como citado em [Liu \(2003\)](#), [Nayroles et al. \(1992\)](#) foram os pioneiros na utilização do MLS para a construção das funções de forma no método dos elementos difusos (*Diffuse Element Method – DEM*).

A aproximação baseada no MLS possui duas características que o torna uma escolha recorrente, a saber: (i) a função aproximada é contínua e suave em todo o domínio do problema; (ii) é possível reproduzir uma aproximação com a ordem desejada de consistência.

No MLS, a aproximação da função $u(\mathbf{x})$ é denotada por $u^\rho(\mathbf{x})$ e se escreve:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^\rho(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\ell} p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}), \quad (2.7)$$

onde ℓ é o número de monômios da base polinomial $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, e $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ é o vetor de coeficientes, os quais são funções de \mathbf{x} . A Fig. 2.1 ilustra o processo em 1D. O valor *aproximado* $u^\rho(x_j)$ depende não somente do parâmetro nodal u_j , mas de todos os parâmetros nodais $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ daqueles nós que fazem parte do domínio de suporte (a ser definido posteriormente) do nó j .

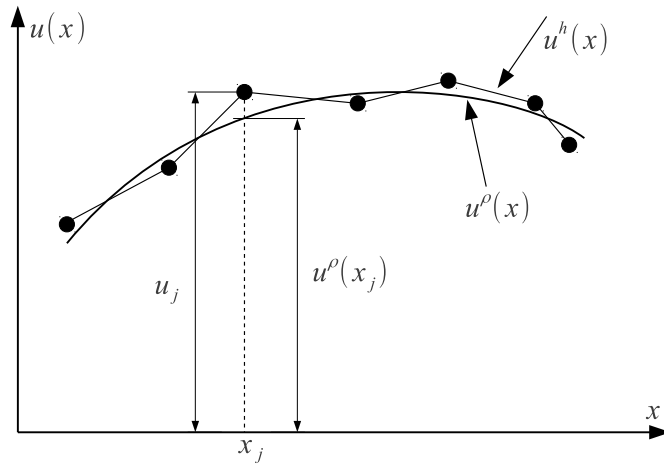


Figura 2.1: Aproximação MLS $u^\rho(x)$ da função $u(x)$ em 1D. $u^h(x)$ corresponde a uma aproximação de elementos finitos linear.

Para garantir um mínimo de completude na aproximação, frequentemente utiliza-se uma base polinomial composta por monômios de baixa ordem, os quais estão presentes no vetor $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ usado na equação Eq. (2.7). Por exemplo, em 1D este vetor seria dado por

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, x^2, \dots, x^k\}, \quad (2.8)$$

e para 2D seria

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(x, y) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^k, y^k\}, \quad (2.9)$$

e, para 3D,

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(x, y, z) = \{1, x, y, z, xy, xz, yz, x^2, y^2, z^2, \dots, x^k, y^k, z^k\}. \quad (2.10)$$

Observe-se que k denota a ordem da base polinomial completa, que contém ℓ termos, i.e., a dimensão da base polinomial é ℓ . O número de termos é dado por

$$\ell = \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+d)}{d!} \quad (2.11)$$

onde k é a ordem máxima dos monômios e d é a dimensão do problema. A cardinalidade de $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ depende do grau da base polinomial usada, bem como da geometria na qual o problema está definido. Todavia, pode-se acrescentar funções de caráter especial, tais como aquelas para capturar singularidade no campo de tensões na ponta de uma trinca. Neste texto apenas será apresentado o caso da base polinomial.

O vetor de coeficientes $\alpha(\mathbf{x})$ é determinado utilizando-se o conjunto de n nós pertencentes ao *domínio de suporte* de \mathbf{x} . O domínio de suporte de determinado ponto \mathbf{x} é formado por todos os pontos \mathbf{x}_j do domínio do problema, onde $j = 1, \dots, n$, cujos *domínios de influência* contêm o ponto \mathbf{x} em questão. A Fig. 2.2 abaixo ilustra o conceito. Restringe-se o exemplo

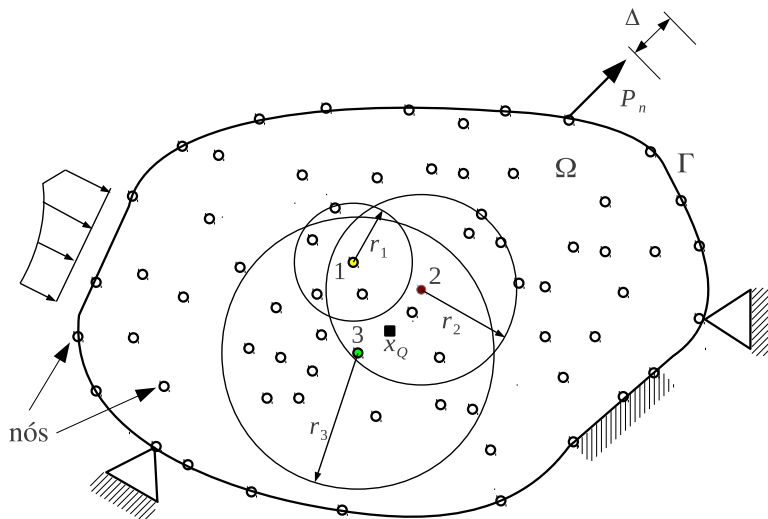


Figura 2.2: Domínio de *influência* e domínio de *suporte*. Imagem adaptada de Liu (2003).

apenas aos nós 1 a 3 que possuem, respectivamente, *domínios de influência* circulares de raios r_1, r_2, r_3 . O *domínio de suporte* do ponto \mathbf{x}_Q contém apenas os nós 2 e 3, pois \mathbf{x}_Q não está contido no domínio de influência do nó 1.

Admita-se o conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ contendo os parâmetros nodais da função $u(\mathbf{x})$, avaliados, respectivamente, nos nós $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ que são os nós que formam o domínio de suporte de \mathbf{x} . Através da aplicação sucessiva da Eq. (2.7), tem-se:

$$u^\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}), \quad (2.12)$$

onde $j = 1, \dots, n$, sendo que $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ contém ℓ coeficientes desconhecidos, dependentes de \mathbf{x} . Para o cálculo dos mesmos, minimiza-se um funcional contendo os resíduos entre os valores aproximados $u^\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$ e os valores nodais $u(\mathbf{x}_j)$, ponderados por uma função peso $\phi(\cdot)$, associada ao ponto \mathbf{x} , convenientemente escolhida, como descrito abaixo:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{x}) &= \sum_j^n \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) [u^\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) - u(\mathbf{x}_j)]^2 \\ &= \sum_j^n \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) - u_j]^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

O papel da função peso é duplo, a saber: (i) ela permite que os nós dentro do domínio de suporte mais próximos ao ponto de interesse contribuam mais do que aqueles mais distantes do referido ponto; (ii) uma vez que a função peso é suave e contínua, e tem suporte compacto, os nós entram ou saem do domínio de suporte de maneira gradual, o que resulta em compatibilidade da função de forma assim construída.

A escolha da função peso deve respeitar as condições listadas na seção 2.2.2.

Como dito anteriormente, o procedimento para a determinação dos valores de $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ para um valor arbitrário de \mathbf{x} , é minimizar o funcional da Eq. (2.13), impondo

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0}, \quad (2.14)$$

o que resulta no sistema de equações algébricas abaixo:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s, \quad (2.15)$$

no qual \mathbf{M} é denominada matriz momento, definida por

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \sum_j^n \phi_j(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j), \quad (2.16)$$

na qual, para os casos em que se trabalha com a mesma função peso para todas as posições \mathbf{x} do domínio, tem-se:

$$\phi_j(\mathbf{x}) \equiv \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j). \quad (2.17)$$

A matriz \mathbf{B} que aparece na Eq. (2.15) tem o formato

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n], \quad (2.18)$$

que é um arranjo de n vetores do tipo

$$\mathbf{B}_j = \phi_j(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j). \quad (2.19)$$

Finalmente, o vetor \mathbf{U}_s contém os parâmetros dos nós internos ao domínio de suporte de \mathbf{x} , ou seja:

$$\mathbf{U}_s^T = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}.$$

A solução do sistema (2.15) para $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ se escreve

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s. \quad (2.20)$$

Substituindo a Eq. (2.20) na Eq. (2.7), obtém-se

$$w^\rho(\mathbf{x}) = \sum_i^n \sum_{j=1}^\ell p_j(\mathbf{x}) [\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})]_{ij} u_j, \quad (2.21)$$

a qual pode ser reescrita no seguinte formato:

$$w^\rho(\mathbf{x}) = \sum_j^n N_j^\rho(\mathbf{x}) u_j, \quad (2.22)$$

onde $N_j^\rho(\mathbf{x})$ denota a *função de forma* no MLS, como definida a seguir:

$$N_j^\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^\ell p_i(\mathbf{x}) [\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})]_{ij} = \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_j, \quad (2.23)$$

recordando-se que ℓ representa o número de termos da base polinomial $\mathbf{p}(\mathbf{x})$.

Observa-se porém que, para garantir a existência da inversa da matriz \mathbf{M} , o número de nós n no domínio de suporte de \mathbf{x} tem que ser superior a ℓ , i.e., $n > \ell$. Todavia, esta é uma condição necessária, mas não suficiente. Imagine-se, à guisa de exemplo, que se queira aproximar o valor de uma função $u(\mathbf{x})$ em 2D. Acrescente-se, apenas como hipótese, que a base de monômios escolhida seja de primeiro grau, com termos em $\mathbf{x} = \{1, x, y\}$, i.e., $\ell = 3$. Então, supondo-se que fossem utilizados $n = 100$ pontos dentro do domínio de suporte de um valor arbitrário \mathbf{x} , com a particularidade de que todos estão alinhados, ainda assim a matriz momento seria singular. Portanto, à exigência de $n > \ell$ deve-se acrescentar que os pontos no domínio de suporte têm que estar arbitrariamente distribuídos.

A aproximação $u^\rho(\mathbf{x})$ descrita pelas Eqs. (2.22) e (2.23) pode, alternativamente, ter a seguinte forma:

$$u^\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^\rho(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s, \quad (2.24)$$

onde $\mathbf{N}^\rho(\mathbf{x})$ é a matriz de funções de forma associadas aos n nós no domínio de suporte como abaixo:

$$\mathbf{N}^\rho(\mathbf{x}) = [N_1^\rho(\mathbf{x}), N_2^\rho(\mathbf{x}), \dots, N_n^\rho(\mathbf{x})]. \quad (2.25)$$

Para obter-se as derivadas parciais da função a ser aproximada, bem como das funções de forma, reescreve-se, por conveniência, a expressão para $\mathbf{N}^\rho(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{N}^\rho(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\gamma}^T(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad (2.26)$$

na qual $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})$ é identificada na expressão abaixo:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}). \quad (2.27)$$

As derivadas parciais de $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})$ podem então ser avaliadas pelas expressões seguintes:

$$\mathbf{M} \boldsymbol{\gamma}_{,i} = \mathbf{p}_{,i} - \mathbf{M}_{,i} \boldsymbol{\gamma}, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\gamma}_{,ij} = \mathbf{p}_{,ij} - (\mathbf{M}_{,i}\boldsymbol{\gamma}_{,j} + \mathbf{M}_{,j}\boldsymbol{\gamma}_{,i} + \mathbf{M}_{,ij}\boldsymbol{\gamma}). \quad (2.29)$$

Finalmente, as derivadas parciais das funções de forma são dadas pelas expressões que se seguem:

$$\mathbf{N}_{,i}^\rho = \boldsymbol{\gamma}_{,i}^T \mathbf{B} + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{B}_{,i}, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{N}_{,ij}^\rho = \boldsymbol{\gamma}_{,ij}^T \mathbf{B} + \boldsymbol{\gamma}_{,i}^T \mathbf{B}_{,j} + \boldsymbol{\gamma}_{,j}^T \mathbf{B}_{,i} + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{B}_{,ij}. \quad (2.31)$$

Cabe ressaltar que, na aproximação obtida utilizando-se o MLS, as funções de forma não reproduzem as características do delta de Kronecker, i.e., $N_i^\rho(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij}$, o que significa dizer que $u^\rho(\mathbf{x}_j) \neq u_j$.

A consistência do MLS depende da ordem dos monômios contidos na base polinomial descrita nas Eqs. (2.8) ou (2.9). Se a ordem completa dos monômios é k , então as funções de forma do MLS possuem consistência P^k . Veja (Liu, 2003, pp. 84–86) ou (Fernández-Méndez, 2001, pp. 14–16).

2.2.3.1 Funções Peso

As funções peso comumente utilizadas são apresentadas a seguir.

Spline cúbica

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{para } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \text{para } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

Spline quártica

$$\phi(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (2.33)$$

Exponencial

$$\phi(r) = \begin{cases} e^{-(r/\alpha)^2} & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (2.34)$$

onde α é uma constante, geralmente igual a 0.3, segundo Liu (2003).

Spline quártica alternativa

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{9}{2}r^2 + \frac{19}{3}r^3 - \frac{5}{2}r^4 & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (2.35)$$

O valor da função peso do nó \mathbf{x}_j no ponto \mathbf{x} depende da definição da geometria do domínio de influência do referido nó, i.e., radial ou tensorial. Caso esta geometria seja radial, $\phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \equiv$

$\phi(r)$. Por outro lado, se esta geometria for do tipo tensorial, $\phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \equiv \phi(r_x) \phi(r_y) \phi(r_z)$. Nas Eq. (2.32) a Eq. (2.35), r, r_x, r_y, r_z são definidos, conforme cada caso, pelas Eq. (2.36).

$$r = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|}{\rho} \quad r_x = \frac{|x - x_j|}{\rho_x} \quad r_y = \frac{|y - y_j|}{\rho_y} \quad r_z = \frac{|z - z_j|}{\rho_z} \quad (2.36)$$

Os parâmetros $\rho, \rho_x, \rho_y, \rho_z$ definem a abrangência do domínio de influência para o qual a função peso $\phi(\cdot) \neq 0$.

2.2.4 PIM

A aproximação baseada no método de interpolação de pontos (point interpolation method – PIM) requer que a função de interpolação passe por cada nó dentro do domínio de suporte do ponto de interesse. Considere a aproximação da função $u(\mathbf{x})$, denotada por $u^\rho(\mathbf{x})$, que se escreve:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^\rho(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n p_j(\mathbf{x}) \alpha_j(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}), \quad (2.37)$$

onde n é o número nós dentro do domínio de suporte do ponto \mathbf{x} , $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ é a base polinomial, e $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ é o vetor de coeficientes, os quais são funções de \mathbf{x} . Como o número de pontos dentro do domínio de suporte é igual ao número de monômios presentes na base polinomial, os coeficientes α_j são constantes na vizinhança do ponto de interesse. A base polinomial é escolhida conforme as Eqs. (2.8 – 2.10). Conforme Liu (2003), a ordem de consistência depende da base polinomial escolhida.

Os coeficientes $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ são obtidos exigindo-se que a Eq. (2.37) seja satisfeita em todos os n nós dentro do domínio de suporte do ponto de interesse. Assim, para o j -ésimo nó tem-se

$$u_j = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \quad j = 1, \dots, n \quad (2.38)$$

para a qual $u_j = u(\mathbf{x}_j)$. A Eq. (2.38) pode ser reescrita na forma da Eq. (2.39)

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{P}_Q \boldsymbol{\alpha} \quad (2.39)$$

na qual o vetor \mathbf{U}_s contém os parâmetros nodais de todos os n nós dentro do domínio de suporte do ponto de interesse e \mathbf{P}_Q é denominada matriz momento no formato abaixo:

$$\mathbf{P}_Q = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Note que a matriz \mathbf{P}_Q não é simétrica. Todavia, assumindo-se que a mesma possua inversa, o vetor $\boldsymbol{\alpha}$ pode ser obtido resolvendo-se a Eq. (2.39), i.e.,

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{P}_Q^{-1} \mathbf{U}_s \quad (2.41)$$

Substituindo-se a Eq. (2.41) na Eq. (2.37), tem-se

$$u^p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\mathbf{x}) u_j = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (2.42)$$

onde $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ é a matriz das funções de forma definida abaixo

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}_Q^{-1} = [\varphi_1(\mathbf{x}) \quad \varphi_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \varphi_n(\mathbf{x})] \quad (2.43)$$

Ressalta-se, todavia, que no caso de não haver inversa da matriz momento, a solução do sistema na Eq. (2.41) não será única, e todo o processo falha. Liu (2003) analisa as condições para garantir a inversa de \mathbf{P}_Q .

Garantindo-se que a matriz momento possua inversa, as funções de forma de PIM possuem as seguintes características:

1. são linearmente independentes
2. possuem propriedade Delta de Kronecker

3. formam a partição da unidade
4. capacidade de reproduzir funções lineares
5. possuem suporte compacto
6. não utilizam função peso
7. em geral, não são compatíveis

2.2.5 RPIM

O método RPIM (Radial PIM) é similar ao PIM, todavia utiliza uma base de funções radial (RBF – radial basis functions). A grande vantagem sobre o PIM é que sua matriz momento possui inversa.

No método RPIM a aproximação da função $u(\mathbf{x})$, denotada por $u^\rho(\mathbf{x})$, se escreve:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^\rho(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n R_j(\mathbf{x}) \alpha_j(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}), \quad (2.44)$$

na qual $\boldsymbol{\alpha}$ é o vetor de coeficientes incógnitos, $R_j(\mathbf{x})$ é uma RBF típica, como descrito na Tabela 2.1, onde r_j é a distância Euclidiana entre o ponto \mathbf{x} e o ponto \mathbf{x}_j , definido pela Eq. (2.45)

$$r_j = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)} \quad (2.45)$$

O vetor de incógnitas $\boldsymbol{\alpha}$ na Eq. (2.44) é determinado ao impor que a interpolação passe pelos n nós dentro do domínio de suporte do ponto de interesse. Assim, a interpolação no k -ésimo ponto fica:

$$u_k = u(\mathbf{x}_k) = \sum_{j=1}^n R_j(\mathbf{x}_k) \alpha_j(\mathbf{x}) \quad k = 1, \dots, n \quad (2.46)$$

Tabela 2.1: RBFs típicas

Nome	Expressão	Parâmetros de forma
Multiquádrica	$R_j(\mathbf{x}) = (r_j^2 + C^2)^q$	C, q
Gaussiana	$R_j(\mathbf{x}) = \exp(-cr_j^2)$	c
Spline placa fina	$R_j(\mathbf{x}) = r_j^\eta$	η
RBF logarítmica	$R_j(\mathbf{x}) = r_j^\eta \log r_j$	η

Repetindo-se a aplicação da Eq. (2.46) para os n pontos dentro do domínio de suporte, resulta na abaixo

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{R}_Q \boldsymbol{\alpha} \quad (2.47)$$

na qual o vetor \mathbf{U}_s contém os parâmetros nodais de todos os n nós dentro do domínio de suporte do ponto de interesse e \mathbf{R}_Q é denominada matriz momento no formato abaixo:

$$\mathbf{R}_Q = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \cdots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \cdots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \cdots & R_n(r_n) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Como a distância entre dois pontos independe da ordem de cálculo, tem-se que $R_j(\mathbf{x}_k) = R_k(\mathbf{x}_j)$, e assim a matriz momento é simétrica. Conforme Liu (2003), à exceção de valores específicos para os parâmetros de forma adotados nas RBFs, a matriz momento \mathbf{R}_Q é, em geral, simétrica, positiva definida, tendo, portanto, inversa. Os coeficientes $\boldsymbol{\alpha}$ são obtidos resolvendo-se a Eq. (2.47), i.e.,

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{U}_s \quad (2.49)$$

Substituindo-se a Eq. (2.49) na Eq. (2.44), tem-se

$$w^\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{U}_s = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (2.50)$$

onde $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ é a matriz das funções de forma definida abaixo

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [R_1(\mathbf{x}) \quad R_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad R_n(\mathbf{x})] \mathbf{R}_Q^{-1} = [\varphi_1(\mathbf{x}) \quad \varphi_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \varphi_n(\mathbf{x})] \quad (2.51)$$

As funções de forma do método RPIM não possuem a consistência polinomial observada nos métodos PIM e MLS ou, em outras palavras, as funções de forma de RPIM não atendem ao *patch test* (i.e., não reproduzem exatamente polinômio linear). Todavia, de acordo com Liu (2003), aproximação de qualquer função contínua utilizando-se RBFs sempre converge.

2.2.6 RPIM_p

A fim de contornar o problema de consistência polinomial identificado no método RPIM, Wang e Liu (2002) propuseram a adição de polinômios à base de funções utilizadas na construção das funções de forma. O método RPIM_p é uma extensão do método RPIM. Considerando n nós na vizinhança de um ponto de interesse, a aproximação da função $u(\mathbf{x})$, se escreve:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x})\alpha_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})\beta_j(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) \quad (2.52)$$

na qual $\boldsymbol{\alpha}$ é o vetor de coeficientes incógnitos associados aos n termos da base radial $R_i(\mathbf{x})$, como descrito na Tabela 2.1, e $\boldsymbol{\beta}$ é o vetor de coeficientes incógnitos associados aos m termos da base polinomial $p_j(\mathbf{x})$.

Os vetores incógnitos são determinados exigindo-se que a interpolação passe pelos n nós dentro do domínio de suporte do ponto de interesse. Assim, para o k -ésimo ponto tem-se:

$$u_k = u(\mathbf{x}_k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i R_i(\mathbf{x}_k) + \sum_{j=1}^m \beta_j p_j(\mathbf{x}_k) \quad \text{com } k = 1, \dots, n \quad (2.53)$$

que pode ser reescrita em forma matricial

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{R}_Q \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{P}_m \boldsymbol{\beta} \quad (2.54)$$

onde \mathbf{U}_s é o vetor que contém os parâmetros associados aos n nós pertencentes ao domínio de suporte de um ponto \mathbf{x} . Os termos polinomiais devem obedecer à uma restrição adicional

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i p_j(\mathbf{x}_i) = 0 \quad \text{com } j = 1, \dots, m \quad (2.55)$$

ou em forma matricial

$$\mathbf{P}_m^T \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad (2.56)$$

Combinando as equações 2.54 e 2.56 resulta

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_Q & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

A definição da matriz momento para as funções de base radial \mathbf{R}_Q é dada pela Eq. (2.48), enquanto que a matriz momento \mathbf{P}_m é uma matriz $n \times m$ na forma abaixo

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

A partir da Eq. (2.54), admitindo-se \mathbf{R}_Q seja inversível, tem-se

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{U}_s - \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m \boldsymbol{\beta} \quad (2.59)$$

Substituindo-se a Eq. (2.59) na Eq. (2.56) obtém-se

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{S}_b \mathbf{U}_s \quad (2.60)$$

onde

$$\mathbf{S}_b = [\mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m]^{-1} \mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1} \quad (2.61)$$

Reescreve-se a Eq. (2.59) utilizando-se a Eq. (2.60), obtendo-se

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{S}_a \mathbf{U}_s \quad (2.62)$$

na qual

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{R}_Q^{-1} - \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m \mathbf{S}_b \quad (2.63)$$

Assim, a interpolação descrita na Eq. (2.52) é reescrita na forma

$$u^\rho(\mathbf{x}) = [\mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_a + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_b] \mathbf{U}_s = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (2.64)$$

na qual o termo entre colchetes é a matriz das funções de forma.

As condições para garantir solução única para os vetores incógnitas α e β são discutidas em Liu (2003). Garantindo-se a existência e unicidade de solução para α e β , Liu (2003) demonstram que as funções de forma do método RPIMP possuem a propriedade delta de Kronecker, bem como apresentam consistência polinomial (P^k), desde que a base de monômios utilizada seja completa de ordem k .

2.3 Formulação dos Métodos Sem Malha

Existem duas grandes vertentes para a formulação dos métodos sem malha, construídos via formulação fraca, que são: os princípios variacionais e os métodos de resíduos ponderados. A formulação fraca, que pode ter caráter local ou global é mais utilizada, pois tem a vantagem de reduzir a ordem das derivadas envolvidas, bem como resultam em sistemas algébricos mais estáveis, por conseguinte com resultados mais precisos Liu (2003).

Dos métodos variacionais, pode-se citar, o princípio da energia potencial mínima, o princípio de Hamilton e, o mais utilizado, o método de Galerkin, também citado na literatura como Bubnov-Galerkin Nguyen et al. (2008).

Os métodos de resíduos ponderados são ferramentas mais gerais e podem ser aplicados a problemas de várias áreas do conhecimento. Diversos métodos variacionais podem ser obtidos a partir dos métodos de resíduos ponderados dependendo da escolha das funções de ponderação Liu (2003).

Belytschko et al. (1994), baseados no trabalho de Nayroles et al. (1992), apresentaram o *Element-Free Galerkin* (EFG). Ambos os trabalhos citados formam a base de muitos métodos sem malha encontrados na literatura.

Três características básicas do EFG são:

1. as funções de forma são obtidas a partir do método dos Mínimos Quadrados Móveis (*Moving Least Squares – MLS*);
2. o método de Galerkin é utilizado para a obtenção do sistema de equações discretas;
3. a integração numérica utiliza uma malha de células de integração em segundo plano.

O EFG tem várias características numéricas desejáveis em comparação aos seguintes métodos sem malha, as quais são listados na tabela abaixo, conforme Liu (2003). A propriedade Delta

Funções de forma	Reprodutibilidade	Consistência	Compatibilidade	Delta de Kronecker
SPH	não no contorno, sim no interior	não no contorno, sim no interior	sim, na forma contínua	não
MLS	sim	sim	sim	não
PIM Polinomial	sim	sim	não	sim
PIM Radial	sim	não	não	sim
PIM Radial com base polinomial	sim	sim	não	sim

Tabela 2.2: Tabela comparativa construção das funções de forma

de Kronecker seria a única característica negativa para a opção pelo EFG, pois a utilização

do método da Penalidade ou do multiplicador de Lagrange para a imposição das condições de contorno essenciais implicaria em comprometimento do condicionamento da matriz de rigidez. Todavia, a possibilidade de se utilizar o acoplamento das funções de forma de elementos finitos com aquelas do EFG facilita a imposição das condições de contorno.

Seja a equação diferencial parcial e condições de contorno para o equilíbrio de um ponto material no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ no contexto da mecânica dos sólidos:

$$\text{Encontrar } \mathbf{u} \text{ tal que: } \begin{cases} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} & \text{em } \Gamma_D \\ \mathbf{t}(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{t}} & \text{em } \Gamma_N \end{cases} \quad (2.65)$$

onde:

\mathbf{L} é o operador diferencial;

$\mathbf{u}^T = \{u, v, w\}$ é o vetor deslocamentos;

$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor de tensões;

\mathbf{D} é o tensor das propriedades constitutivas;

$\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor de deformações;

\mathbf{b} é o vetor de forças de corpo;

$\hat{\mathbf{u}}$ é o vetor de deslocamentos prescritos;

Γ_D é a região no contorno na qual são prescritos os deslocamentos (condições de contorno essenciais ou de Dirichlet);

$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{n}}$ é o vetor de forças de superfície no contorno de normal $\bar{\mathbf{n}}$;

$\hat{\mathbf{t}}$ é o vetor de forças de superfície prescritas;

Γ_N é a região no contorno na qual são prescritas as forças de superfície (condições de contorno naturais ou de Newmman);

No método EFG a discretização do problema se dá na forma de nós cobrindo o domínio a ser estudado. Os deslocamentos de um ponto são aproximados utilizando-se as funções de forma obtidas via método dos Mínimos Quadrados Móveis, a partir das quais obtém-se os parâmetros dos nós no interior do domínio de suporte do referido ponto. O método de Galerkin é então usado para determinar a forma discreta da Eq. (2.65), resultando em um sistema de equações lineares no qual os parâmetros dos nós são incógnitas a serem calculadas. Uma vez resolvido este sistema de equações, os deslocamentos dos nós, ou de qualquer outro ponto do domínio, são aproximados utilizando as funções de forma associadas ao ponto em questão e os respectivos parâmetros dos nós associados ao domínio de suporte do referido ponto. Por seu turno, as deformações são calculadas a partir das derivadas das funções de forma e dos parâmetros dos nós.

Lembrando-se que as funções de forma não possuem a propriedade de delta de Kronecker, apresenta-se a seguir, de forma sintética, a forma fraca de Galerkin para a Eq. (2.65), com multiplicadores de Lagrange, λ , para a imposição das condições de contorno.

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_D} \delta\lambda^T (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_D} \delta\mathbf{u}^T \lambda d\Gamma = 0 \quad (2.66)$$

Considerando um problema em domínio 2D, os deslocamentos aproximados $\mathbf{u}^\rho(\mathbf{x})$ são obtidos usando-se a Eq. (2.22) para u e v :

$$\mathbf{u}^\rho = \begin{Bmatrix} u^\rho \\ v^\rho \end{Bmatrix} = \sum_i^n \begin{bmatrix} N_i^\rho(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & N_i^\rho(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^\rho \\ v_i^\rho \end{Bmatrix} = \sum_i^n \mathbf{N}_i^\rho \mathbf{u}_i^\rho \quad (2.67)$$

onde n corresponde ao número de nós no interior do domínio de suporte do ponto \mathbf{x} , \mathbf{N}_i^ρ denota a matriz de funções de forma, e u_i^ρ, v_i^ρ são, respectivamente, os parâmetros do nó i .

Utilizando-se a Eq. (2.67), as deformações podem ser obtidas:

$$\mathbf{L}\mathbf{u}^\rho = \mathbf{L} \sum_i^n \mathbf{N}_i^\rho \mathbf{u}_i^\rho = \sum_I^n \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i^\rho & 0 \\ 0 & N_i^\rho \end{bmatrix} = \sum_i^n \begin{bmatrix} N_{i,x}^\rho & 0 \\ 0 & N_{i,y}^\rho \\ N_{i,y}^\rho & N_{i,x}^\rho \end{bmatrix} = \sum_i^n \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (2.68)$$

na qual $N_{i,x}^\rho$ e $N_{i,y}^\rho$ são as derivadas parciais das funções de forma, respectivamente para x e y .

O multiplicador de Lagrange na Eq. (2.66) também é uma incógnita do problema, a qual deve ser calculada nos nós sobre a região do contorno na qual se impõem as condições de contorno essenciais, como abaixo:

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_i^{n_\lambda} \mathbf{N}_i^\lambda(s) \lambda_i \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D \quad (2.69)$$

onde n_λ é o número de nós usados para a interpolação, s é o comprimento do arco sobre a região na qual se impõem as condições de contorno essenciais, λ_i é o multiplicador de Lagrange para o nó i , $N_i^\lambda(s)$ é o interpolante de Lagrange, usado no MEF. O k -ésimo termo de um interpolador de Lagrange de ordem p no ponto s é dado pela expressão:

$$N_k^p(s) = \frac{\prod_{i=0}^p (s - s_i)}{\prod_{i=0}^p (s_k - s_i)} \quad i \neq k \quad (2.70)$$

O vetor de multiplicadores de Lagrange pode ser escrito em forma matricial

$$\boldsymbol{\lambda} = \sum_i^{n_\lambda} \begin{bmatrix} N_i^\lambda & 0 \\ 0 & N_i^\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_{u_i} \\ \lambda_{v_i} \end{Bmatrix} = \sum_i^{n_\lambda} \mathbf{N}_i^\lambda \boldsymbol{\lambda}_i. \quad (2.71)$$

Substituindo-se as Eqs.(2.91), (2.68) e (2.71) na Eq. (2.90), tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \left(\sum_i^n \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \right)^T \left(\mathbf{D} \sum_j^n \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j \right) d\Omega + \\ & - \int_{\Omega} \delta \left(\sum_i^n \mathbf{N}_i^\rho \mathbf{u}_i \right)^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \delta \left(\sum_i^n \mathbf{N}_i^\rho \mathbf{u}_i \right)^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \\ & - \int_{\Gamma_D} \delta \boldsymbol{\lambda}^T \left[\left(\sum_i^n \mathbf{N}_i^\rho \mathbf{u}_i \right) - \hat{\mathbf{u}} \right] d\Gamma - \int_{\Gamma_D} \delta \left(\sum_i^n \mathbf{N}_i^\rho \mathbf{u}_i \right)^T \boldsymbol{\lambda} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

A simplificação da Eq. (2.72) resulta no seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}, \quad (2.73)$$

no qual \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, \mathbf{F} o vetor de forças nodais global, \mathbf{U} o vetor de parâmetros nodais (associados à aproximação dos deslocamentos nodais), e $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor contendo todos os multiplicadores de Lagrange. A matriz \mathbf{G} e o vetor \mathbf{q} estão relacionados ao cálculo dos multiplicadores de Lagrange para a imposição dos deslocamentos prescritos. Em contraste com o MEF, as matrizes na Eq. (2.73) são formadas pelas contribuições dos nós no domínio, como descrito sinteticamente a seguir. A matriz de rigidez global é obtida com a contribuição de \mathbf{K}_{ij} matrizes de rigidez nodais:

$$\mathbf{K} = \sum_i^{n_t} \sum_j^{n_t} \mathbf{K}_{ij} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega. \quad (2.74)$$

Note que o número de termos nos somatórios foi substituído por n_t a fim de considerar todos os nós no domínio do problema. O vetor de forças nodais \mathbf{F}_i é dado pela expressão

$$\mathbf{F} = \sum_i^{n_t} \mathbf{F}_i \quad \text{sendo} \quad \mathbf{F}_i = \int_{\Omega} (\mathbf{N}_i^\rho)^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_N} (\mathbf{N}_i^\rho)^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma. \quad (2.75)$$

Por sua vez a matriz global \mathbf{G} é formada pela contribuição das matrizes nodais \mathbf{G}_{ij}

$$\mathbf{G} = \sum_i^{n_t} \sum_j^{n_{\lambda t}} \mathbf{G}_{ij} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{G}_{ij} = - \int_{\Gamma_D} (\mathbf{N}_i^\rho)^T \mathbf{N}_j^\lambda d\Gamma, \quad (2.76)$$

na qual o número de termos no somatório interno foi modificado para $n_{\lambda t}$ a fim de considerar o total de multiplicadores de Lagrange no domínio. Finalmente, o vetor global \mathbf{q} é montado

de modo análogo ao vetor de forças nodais global, com a contribuição dos vetores nodais \mathbf{q}_i na forma da expressão abaixo:

$$\mathbf{q} = \sum_i^{n_{\lambda t}} \mathbf{q}_i \quad \text{sendo} \quad \mathbf{q}_i = - \int_{\Gamma_D} (\mathbf{N}_i^\rho)^T \hat{\mathbf{u}} d\Gamma. \quad (2.77)$$

Deve-se notar que a matriz de rigidez nodal é simétrica, assim como a matriz de rigidez global. Como o sistema de equações é aumentado para fazer o cálculo dos multiplicadores de Lagrange, a matriz final é simétrica, mas não positiva definida, o que implica em baixa eficiência computacional da solução do referido sistema, dependendo do número e da ordem de interpolação dos multiplicadores de Lagrange.

Com relação à avaliação das matrizes acima, é necessário a utilização de integração numérica. No EFG tal procedimento baseia-se na utilização de uma malha de células de integração (Fig. 2.3), à semelhança de uma malha de elementos finitos, com a particularidade de que sua função é apenas dar suporte à integração numérica, não havendo relação de conectividade dos nós desta malha de células com os nós do domínio do problema. (Liu, 2003, pp. 164) sugere

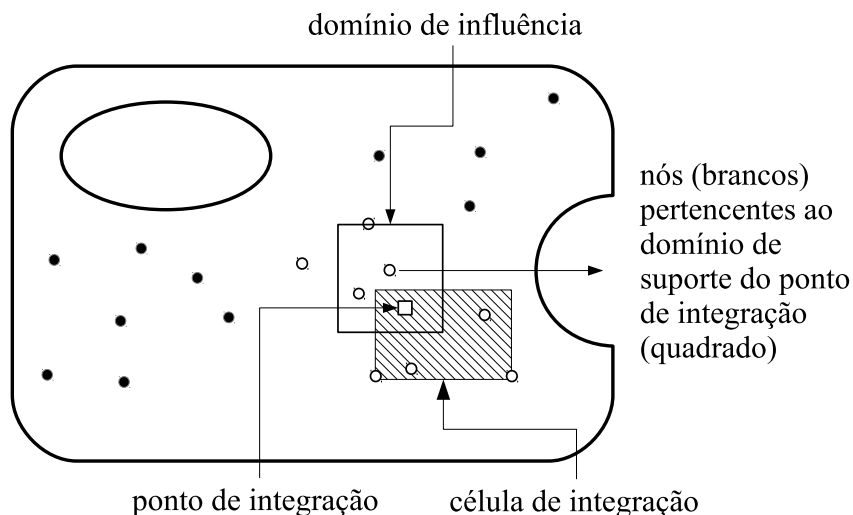


Figura 2.3: Domínio 2D: nós (\bullet, \circ) e ponto de integração (\square).

que para se obter uma solução precisa o suficiente, é necessário ter um número de pontos

de Gauss de no mínimo 3 vezes o número total de nós no domínio para problemas 2D. Tal número depende de um balanço entre a densidade de células e do número de pontos de Gauss em cada célula. Já Lu et al. (1994) sugerem utilizar n_Q pontos de Gauss em cada direção, sendo $n_Q \geq \sqrt{nn} + 3$ resultando em uma integração contendo $n_Q \times n_Q$ pontos de Gauss, onde nn é o número de nós dentro de uma célula de integração.

2.4 Imposição de Condições de Contorno

As funções de forma obtidas nos vários métodos sem malha, na sua grande maioria, não apresentam a propriedade do delta de Kronecker, como já citado. Assim, a imposição das condições de contorno essenciais requer um trabalho adicional, diferentemente daquele exigido pelo MEF para a mesma tarefa. Muitas técnicas são encontradas na literatura, as quais podem ser classificadas em dois grandes grupos, conforme destacam Fernández-Méndez e Huerta (2004), a saber:

1. métodos baseados na modificação da formulação fraca do problema, tais como multiplicador de Lagrange Belytschko et al. (1994), método da penalidade Zhu e Atluri (1998) e método de Nitsche;
2. métodos que modificam as funções de forma Belytschko et al. (1995); Fernández-Méndez e Huerta (2004); Gosz e Liu (1996); Huerta e Fernández-Méndez (2000);

2.4.1 Modificação da Forma Fraca

Os métodos classificados no primeiro grupo modificam a forma fraca de modo a permitir o uso de funções tentativas que não se anulam na região sujeita às condições de contorno essenciais. Em Fernández-Méndez e Huerta (2004) há uma comparação dos três métodos resumidamente apresentados nesta seção, e o método de acoplamento contínuo entre as funções de forma do MEF e EFG proposto pelos referidos autores.

2.4.1.1 Multiplicador de Lagrange

É um dos métodos mais utilizados para a imposição de condições de contorno devido à sua simplicidade e generalidade. Um multiplicador de Lagrange está associado a cada restrição imposta, e corresponde a uma nova incógnita acrescentada ao problema, o que implica no aumento da dimensão do mesmo. Além do aumento da dimensão do sistema de equações a ser resolvido, o uso do multiplicador de Lagrange resulta em uma matriz final simétrica, mas não mais positiva definida, o que impede a adoção dos tradicionais métodos de solução de equações lineares.

Uma desvantagem mais grave é que o espaço de interpolação dos multiplicadores de Lagrange deve ser escolhido com critério para atender, simultaneamente, a duas limitações: (i) precisa ser suficientemente rico para chegar a resultados aceitáveis, (ii) ao mesmo tempo em que quanto maior for o número de multiplicadores, mais singular se torna o sistema.

Como notado em Fernández-Méndez e Huerta (2004), o espaço de interpolação tanto para o multiplicador de Lagrange, quanto para as incógnitas do problema, devem atender à condição de estabilidade *inf sup* de Babuska-Brezzi.

Para o MEF esta escolha não representa um obstáculo, embora o mesmo não possa ser afirmado para os métodos sem malha.

2.4.1.2 Método da Penalidade

Assim como o multiplicador de Lagrange, o método da penalidade ((Liu, 2003, Sec. 6.2)) é geral e facilmente implementável, pois requer o uso de uma única constante. Duas vantagens relativas são que (i) a dimensão do sistema de equações final não tem sua dimensão aumentada, e (ii) a matriz final é simétrica positiva definida. Todavia, o parâmetro de penalidade deve ser suficientemente grande para se impor as condições de contorno essenciais a fim de se obter resultados confiáveis. Isto implica no mal condicionamento da matriz de equações, degradando a precisão do resultado final e, conseqüentemente limitando o uso desta técnica.

2.4.1.3 Método de Nitsche

O método de Nitsche, descrito em Fernández-Méndez e Huerta (2004), é similar ao método da penalidade, pois requer a utilização de um único parâmetro, portanto com as mesmas vantagens já citadas. Uma vantagem adicional é que o parâmetro de penalidade empregado não exige valor tão elevado, não incrementando assim o número de condicionamento da matriz. Todavia, sua formulação não é geral, exigindo-se a modificação da forma fraca para cada problema em particular.

2.4.2 Modificação das Funções de Forma

Existem várias alternativas encontradas na literatura as quais se enquadram em dois grupos segundo esta classificação, a saber: (i) métodos que fazem uso de alguma combinação linear das funções de forma e/ou dos parâmetros incógnitas do método sem malha utilizado, de modo a obter a propriedade de delta de Kronecker na região sujeita às condições de contorno essenciais; (ii) métodos que fazem o acoplamento das funções de forma dos métodos sem malha com outros métodos como elementos finitos, elementos de contorno, entre outros Liu (2003).

2.4.3 Acoplamento

Para evitar o uso dos métodos citados anteriormente, e pensando na facilidade de imposição de condições de contorno do MEF, uma maneira alternativa para modificar as funções de forma de modo a permitir a imposição das referidas condições de contorno essenciais, é o acoplamento das funções de forma do método sem malha com o MEF, especificamente na região do contorno essencial, o que permite a imposição direta dos valores prescritos. Belytschko et al. (1995) apresentam uma técnica de acoplamento na qual tanto elementos finitos quanto partículas têm influência em uma região de transição bem específica. Nesta técnica, os nós de elementos finitos são substituídos por partículas, sendo necessária a definição de funções rampa, as quais restringem os valores assumidos pela funções de forma nesta região de transição. Todavia, como apontado por Fernández-Méndez e Huerta (2004), uma limitação desta abordagem é que a região de transição é do tamanho de um elemento finito com interpolação linear.

O acoplamento proposto por Fernández-Méndez e Huerta (Huerta e Fernández-Méndez (2000); Fernández-Méndez e Huerta (2004); Huerta et al. (2004b)) segue os passos de Belytschko et al. (1995), apresentando duas grandes vantagens: (i) é uma formulação geral de acoplamento contínuo, (ii) pode ser utilizado como método de interpolação mista de elementos finitos, enriquecendo o espaço vetorial de interpolação ao acrescentar tantas partículas quanto se queira dentro dos elementos finitos.

Em síntese, este método pode ser assim descrito. Seja um conjunto de partículas $\mathbf{x}_i \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, e uma base polinomial completa, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$. Assuma que neste domínio a aproximação de $u(\mathbf{x})$ seja na forma,

$$u(\mathbf{x}) \simeq u^h(\mathbf{x}) + u^\rho(\mathbf{x}) \quad (2.78)$$

na qual $u^h(\mathbf{x})$ refere-se à aproximação devida ao MEF e $u^\rho(\mathbf{x})$ a parcela desta aproximação devida a um método sem malha, em particular o EFG. Assume-se que o domínio Ω seja a união de dois sub-domínios não disjuntos, i.e., $\Omega = \Omega^h + \Omega^\rho$. Também é necessário existir um conjunto de nós $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I^h}$ (Figura 2.4) aos quais estão associadas as funções de forma do MEF, $N_i^h(\mathbf{x})$, de modo que a parcela da aproximação de $u(\mathbf{x})$ via MEF, $u^h(\mathbf{x})$, é obtida da maneira usual, i.e.,

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_i u(\mathbf{x}_i) N_i^h(\mathbf{x}) \quad (2.79)$$

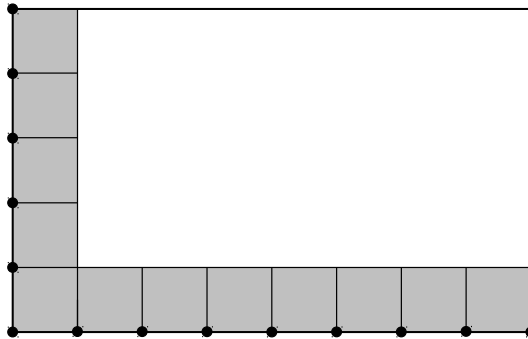


Figura 2.4: Nós de elementos finitos ativos ($\bullet \in I^h$) sobre o contorno e suporte para o cálculo das funções de forma de elementos finitos (em cinza).

Por outro lado, no domínio do problema requer-se que exista um conjunto de nós $\{\mathbf{x}_j\}_{j \in I^\rho}$, aos quais, de modo análogo, estão associadas as funções de forma do EFG, $N_j^\rho(\mathbf{x})$, a partir das quais é obtida a parcela da aproximação de $u(\mathbf{x})$ via método sem malha, $u^\rho(\mathbf{x})$, conforme abaixo

$$u^\rho(\mathbf{x}) = \sum_j u(\mathbf{x}_j) N_j^\rho(\mathbf{x}), \quad (2.80)$$

sendo que I^ρ é o conjunto de índices dos nós do domínio Ω^ρ na vizinhança de \mathbf{x} , i.e.,

$$I^\rho = \{j \text{ tal que } |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}| \leq \rho\} \quad (2.81)$$

Deste modo, pode-se definir objetivamente os sub-domínios anteriormente citados. O sub-domínio Ω^h denota uma região na qual as funções de forma $N_i^h(\mathbf{x})$ têm influência na aproximação de $u(\mathbf{x})$, i.e.,

$$\Omega^h = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \exists i \in I^h, N_i^h(\mathbf{x}) \neq 0\}. \quad (2.82)$$

Por sua vez, Ω^ρ é o sub-domínio no qual ao menos uma função de forma $N_j^\rho(\mathbf{x})$ seja não nula, ou seja,

$$\Omega^\rho = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \exists j \in I^\rho, N_j^\rho(\mathbf{x}) \neq 0\}. \quad (2.83)$$

Assim, na região¹ $\Omega^h \setminus \Omega^\rho$ na qual somente elementos finitos estão presentes, somente a aproximação via MEF está presente, e $u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x})$. Na região onde apenas partículas têm influência na aproximação, $\Omega^\rho \setminus \Omega^h$, a aproximação é devida somente ao EFG, $u(\mathbf{x}) \approx u^\rho(\mathbf{x})$. Entretanto, existe uma região do domínio, $\tilde{\Omega} = \Omega^h \cap \Omega^\rho$, na qual a interpolação mista ocorre, i.e.,

$$u(\mathbf{x}) \simeq \tilde{u}(\mathbf{x}) = u^h(\mathbf{x}) + u^\rho(\mathbf{x}) = \sum_{j \in I^h} N_j^h(\mathbf{x}) u_j + \sum_{i \in I^\rho} \tilde{N}_i^\rho(\mathbf{x}) u_i \quad (2.84)$$

onde $\tilde{N}_i^\rho(\mathbf{x})$ é a função de forma usada no EFG, modificada levando-se em consideração o acoplamento com as funções de forma de elementos finitos.

¹ $C = A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Então $C = \{1, 2\}$.

As funções de forma na Eq. (2.84) são definidas do mesmo modo que aquelas do EFG,

$$\tilde{N}_i^\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \tilde{\alpha}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (2.85)$$

Entretanto, o vetor $\tilde{\alpha}(\mathbf{x})$ é obtido impondo-se a condição de que o mesmo reproduza exatamente todos os polinômios em $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, para a aproximação combinada, i.e.,

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in I^h} N_j^h(\mathbf{x}) \mathbf{p}(x_j) + \sum_{i \in I^\rho} \tilde{N}_i^\rho(\mathbf{x}) \mathbf{p}(x_i) \quad (2.86)$$

Substituição da Eq. (2.85) na Eq. (2.86) resulta no sistema de equações abaixo:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) \tilde{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) - \sum_{j \in I^h} N_j^h(\mathbf{x}) \mathbf{p}(x_j) \quad (2.87)$$

Na Figura 2.5 destaca-se a adaptação da função de forma do EFG para na região $\tilde{\Omega}$ de interpolação mista.

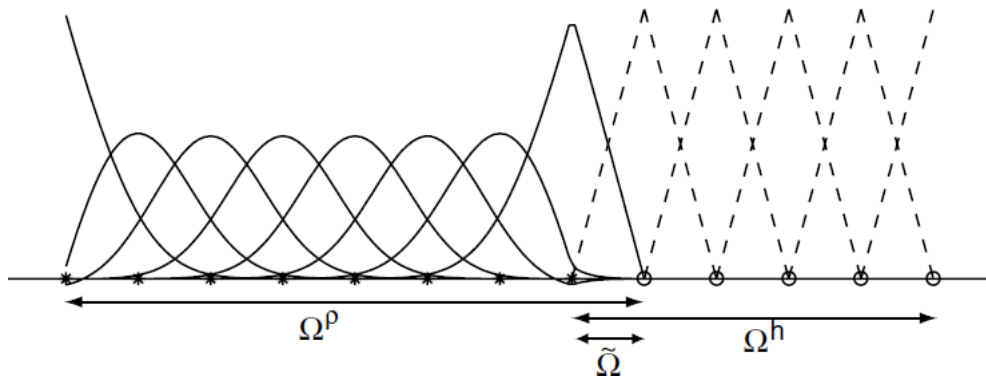


Figura 2.5: Funções de forma acopladas: elementos finitos (linha tracejada) e EFG (linha cheia). Crédito imagem Fernández-Méndez e Huerta (2004).

Observa-se também que, na região onde somente partículas atuam, $\Omega^\rho \setminus \Omega^h$, o somatório no termo direito da Eq. (2.87) é igual a zero, e então $\tilde{\alpha}(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})$. Portanto, $\tilde{N}_i^\rho(\mathbf{x}) = N_i^\rho(\mathbf{x})$. Por outro lado, onde somente elementos finitos atuam, $\Omega^h \setminus \Omega^\rho$, $\tilde{\alpha}(\mathbf{x}) = 0$, e $\tilde{N}_i^\rho(\mathbf{x}) = 0$.

Fernández-Méndez e Huerta (2004) demonstram que a aproximação $\tilde{u}(\mathbf{x})$ é contínua em Ω , desde que duas condições sejam atendidas:

- (i) o grau de todos os polinômios em \mathbf{p} seja menor ou igual àqueles da base de elementos finitos, e
- (ii) o domínio de influência das partículas inclua a região na qual elementos finitos não tenham uma base de interpolação completa.

A partir destas considerações, os autores demonstram também que $\tilde{N}_i^p(\mathbf{x}) = 0$ na região $\partial\Omega^p \cap \Omega$, interseção do contorno de Ω^p com o domínio Ω do problema.

A Fig. 2.6 ilustra as funções de forma acopladas para os pontos A e B em um domínio 2D.

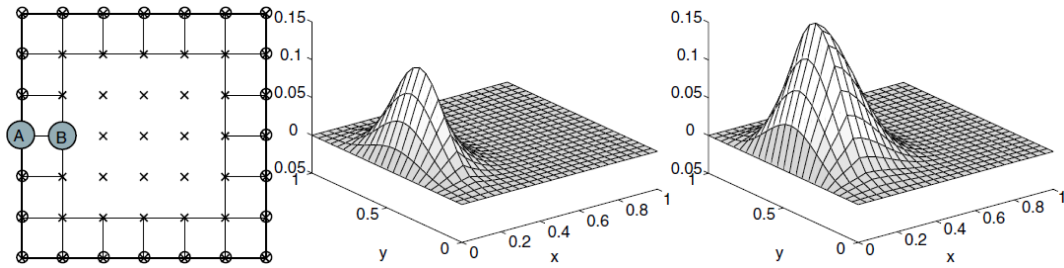


Figura 2.6: Funções de forma acopladas, associadas aos pontos A e B no domínio. Discretização em elementos finitos no contorno, nós (\circ) e partículas (\times). Crédito imagem Fernández-Méndez e Huerta (2004).

A generalidade deste método de acoplamento permite o uso de qualquer distribuição de partículas, inclusive no interior dos elementos finitos, como ilustra a Fig. 2.7.

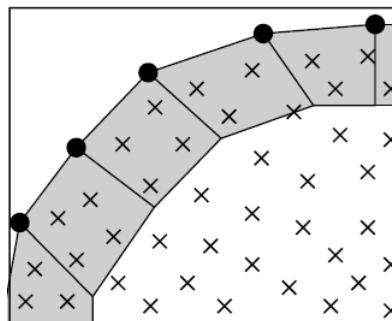


Figura 2.7: Discretização em elementos finitos no contorno, nós (\bullet) e partículas também no interior dos elementos (\times). Crédito imagem Fernández-Méndez e Huerta (2004).

2.5 Formulação dos Métodos sem Malha Acoplados ao MEF

A derivada das funções de forma para a componente x_k é dada pela Eq. (2.88):

$$\tilde{N}_{j,k}^\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \tilde{\alpha}_{,k}(\mathbf{x}) \phi\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{\rho}\right) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \tilde{\alpha}(\mathbf{x}) \frac{1}{\rho} \phi_{,k}\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{\rho}\right) \quad (2.88)$$

onde o vetor $\tilde{\alpha}_{,k}(\mathbf{x})$ é obtido resolvendo-se o sistema dado pela Eq. (2.89), o qual é obtido derivando-se a Eq. (2.87) em relação à componente x_k , a saber:

$$\mathbf{M}_{,k}(\mathbf{x}) \tilde{\alpha}(\mathbf{x}) + \mathbf{M}(\mathbf{x}) \tilde{\alpha}_{,k}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,k}(\mathbf{x}) - \sum_{i \in I^h} \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) N_{i,k}^h(\mathbf{x}) \quad (2.89)$$

Lembrando-se que as funções de forma não possuem a propriedade de delta de Kronecker, apresenta-se a seguir, de forma sintética, a forma fraca de Galerkin para a Eq. (2.65), com acoplamento entre EFG e MEF para a imposição das condições de contorno.

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (2.90)$$

Os deslocamentos aproximados $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ são obtidos usando-se a Eq. (2.79) para u^h e v^h :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} u^h \\ v^h \end{Bmatrix} = \sum_{i \in I^h} \begin{bmatrix} N_i^h(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & N_i^h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^h \\ v_i^h \end{Bmatrix} = \sum_{i \in I^h} \mathbf{N}_i^h \mathbf{u}_i^h \quad (2.91)$$

na qual \mathbf{N}_i^h denota a matriz de funções de forma do MEF, e u_i, v_i são, respectivamente, os parâmetros do nó i . De modo análogo, a parcela de deslocamento devida à aproximação do EFG é obtida utilizando-se a Eq. (2.80) para u^ρ e v^ρ :

$$\mathbf{u}^\rho(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} u^\rho \\ v^\rho \end{Bmatrix} = \sum_{j \in I^\rho} \begin{bmatrix} N_j^\rho(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & N_j^\rho(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j^\rho \\ v_j^\rho \end{Bmatrix} = \sum_{j \in I^\rho} \mathbf{N}_j^\rho \mathbf{u}_j^\rho \quad (2.92)$$

onde \mathbf{N}_j^ρ denota a matriz de funções de forma de EFG, e u_j, v_j são, respectivamente, os parâmetros do nó j .

Utilizando-se a Eq. (2.91), as deformações podem ser obtidas:

$$\mathbf{L}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \sum_{i \in I^h} \mathbf{N}_i^h \mathbf{u}_i^h = \sum_{i \in I^h} \begin{bmatrix} N_{i,x}^h & 0 \\ 0 & N_{i,y}^h \\ N_{i,y}^h & N_{i,x}^h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^h \\ v_i^h \end{Bmatrix} = \sum_{i \in I^h} \mathbf{B}_i^h \mathbf{u}_i^h \quad (2.93)$$

onde

$$\mathbf{B}_i^h = \begin{bmatrix} N_{i,x}^h & 0 \\ 0 & N_{i,y}^h \\ N_{i,y}^h & N_{i,x}^h \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

e

$$\mathbf{L}\mathbf{u}^\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \sum_{j \in I^\rho} \mathbf{N}_j^\rho \mathbf{u}_j^\rho = \sum_{j \in I^\rho} \begin{bmatrix} N_{j,x}^\rho & 0 \\ 0 & N_{j,y}^\rho \\ N_{j,y}^\rho & N_{j,x}^\rho \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j^\rho \\ v_j^\rho \end{Bmatrix} = \sum_{j \in I^\rho} \mathbf{B}_j^\rho \mathbf{u}_j^\rho \quad (2.95)$$

onde

$$\mathbf{B}_j^\rho = \begin{bmatrix} N_{j,x}^\rho & 0 \\ 0 & N_{j,y}^\rho \\ N_{j,y}^\rho & N_{j,x}^\rho \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

nas quais $N_{i,x}^h$ e $N_{i,y}^h$ são as derivadas parciais das funções de forma, respectivamente para x e y , e as matrizes \mathbf{B}_i^h e \mathbf{B}_j^ρ relacionam deformações e deslocamentos para as aproximações devidas, respectivamente, ao MEF e ao EFG.

Substituindo-se as Eqs.(2.91), (2.92), (2.93) e (2.95) na Eq. (2.90), tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \left(\sum_{i \in I^h} \mathbf{B}_i^h \mathbf{u}_i^h + \sum_{r \in I^\rho} \mathbf{B}_r^\rho \mathbf{u}_r^\rho \right)^T \mathbf{D} \left(\sum_{j \in I^h} \mathbf{B}_j^h \mathbf{u}_j^h + \sum_{s \in I^\rho} \mathbf{B}_s^\rho \mathbf{u}_s^\rho \right) d\Omega + \\ & - \int_{\Omega} \delta \left(\sum_{i \in I^h} \mathbf{N}_i^h \mathbf{u}_i^h + \sum_{r \in I^\rho} \mathbf{N}_r^\rho \mathbf{u}_r^\rho \right)^T \mathbf{b} d\Omega + \\ & - \int_{\Gamma_N} \delta \left(\sum_{i \in I^h} \mathbf{N}_i^h \mathbf{u}_i^h + \sum_{r \in I^\rho} \mathbf{N}_r^\rho \mathbf{u}_r^\rho \right)^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

Em contraste com o MEF, as matrizes na Eq. (2.97) são formadas pelas contribuições dos nós no domínio, como descrito sinteticamente a seguir. A matriz de rigidez global é obtida com a contribuição de \mathbf{K}_{ij} matrizes de rigidez nodais considerando o acoplamento entre as parcelas de MEF e aquelas do EFG:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{\rho\rho} + \mathbf{K}^{\rho h} + \mathbf{K}^{h\rho} + \mathbf{K}^{hh} \quad (2.98)$$

$$\mathbf{K}^{\rho\rho} = \sum_{r \in I^\rho} \sum_{s \in I^\rho} \mathbf{K}_{rs} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{K}_{rs} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_r^\rho)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_s^\rho d\Omega \quad (2.99)$$

$$\mathbf{K}^{h\rho} = \sum_{i \in I^h} \sum_{r \in I^\rho} \mathbf{K}_{ir} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{K}_{ir} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_i^h)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_r^\rho d\Omega \quad (2.100)$$

$$\mathbf{K}^{\rho h} = \sum_{s \in I^\rho} \sum_{j \in I^h} \mathbf{K}_{sj} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{K}_{sj} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_s^\rho)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j^h d\Omega \quad (2.101)$$

$$\mathbf{K}^{hh} = \sum_{i \in I^h} \sum_{j \in I^h} \mathbf{K}_{ij} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_i^h)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j^h d\Omega \quad (2.102)$$

O vetor de forças nodais equivalentes é formado com a contribuição das forças de corpo e aquelas aplicadas ao contorno:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^b + \mathbf{F}^t \quad (2.103)$$

cujas expressões são dadas a seguir:

$$\mathbf{F}^b = \sum_{i \in I^h} \mathbf{F}_i^b + \sum_{r \in I^\rho} \mathbf{F}_r^b \quad \text{sendo} \quad \mathbf{F}_i^b = \int_{\Omega} (\mathbf{N}_i^h)^T \mathbf{b} d\Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_r^b = \int_{\Omega} (\mathbf{N}_r^\rho)^T \mathbf{b} d\Omega \quad (2.104)$$

$$\mathbf{F}^t = \sum_{i \in I^h} \mathbf{F}_i^t + \sum_{r \in I^\rho} \mathbf{F}_r^t \quad \text{sendo} \quad \mathbf{F}_i^t = \int_{\Gamma_N} (\mathbf{N}_i^h)^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_r^t = \int_{\Gamma_N} (\mathbf{N}_r^\rho)^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (2.105)$$

Deve-se notar que a matriz de rigidez nodal é simétrica, assim como a matriz de rigidez global. Com relação à avaliação das matrizes acima, é necessário a utilização de integração numérica. No EFG tal procedimento baseia-se na utilização de uma malha de células de integração (Fig. 2.3), à semelhança de uma malha de elementos finitos, com a particularidade de que sua função é apenas dar suporte à integração numérica, não havendo relação de conectividade dos nós desta malha de células com os nós do domínio do problema.

Um Ambiente Teórico e Computacional de Modelos Constitutivos para Concreto

Teorias existentes para o estudo de estruturas de concreto, notadamente as baseadas no Método dos Elementos Finitos, foram elaboradas ao longo de muitos anos. Muito do que está descrito aqui, de maneira sucinta, tem por base os trabalhos de [Pitangueira \(1998\)](#) e [Penna \(2011\)](#).

A ocorrência, isolada ou combinada, de diferentes fenômenos tornam o comportamento mecânico do concreto de difícil descrição analítica. Tal comportamento é fonte de estudos e pesquisa desde o início do século XX, quando surgiram os primeiros fundamentos teóricos.

Inicialmente, o estudo do concreto armado era baseado em aproximações empíricas e as teorias eram estabelecidas com base em simplificações, que contornavam dificuldades de formulação de uma estrutura teórica mais elaborada.

Nesse contexto, o método dos elementos finitos surgiu como um recurso geral que ampliou as possibilidades de estudo. Hipóteses, antes simplificadas para serem incorporadas na teoria

analítica, passaram a ser inseridas em modelos cada vez mais sofisticados com o objetivo de descrever o comportamento do concreto de forma mais realista possível.

Vários aspectos do método dos elementos finitos, quando este é empregado para caracterizar o comportamento não linear do concreto, são estudados desde os primeiros modelos. Um dos primeiros trabalhos nesta área foi o de [Ngo e Scordelis \(1967\)](#) que, considerando os materiais como elásticos-lineares, incluía representações para as armaduras e fissuras, sendo as trincas inseridas na malha de elementos finitos de forma discreta, assumindo padrões já constatados empiricamente.

O trabalho de [Nilson \(1968\)](#) era semelhante, sendo as trincas inseridas na malha de forma discreta, entretanto, já se considerava o comportamento não linear do material. Até então, nestes modelos iniciais, a idealização de um meio contínuo fissurado, em substituição ao meio contínuo intacto inicial, não havia sido concebida. A representação do processo de fissuração em modelos planos foi inicialmente tratada por [Rashid \(1968\)](#), que introduzia trincas paralelas distribuídas em regiões internas aos elementos finitos, em contraposição à inserção das fissuras nas interfaces entre elementos. O material atingia um limite de resistência e, neste ponto, a rigidez da região decaía devido ao início da degradação. Embora limitado, o modelo proposto apresentava facilidade de implementação e já trazia a hipótese fundamental dos modelos de fissuração distribuída: a substituição do meio contínuo inicial por um meio, também contínuo, cujas propriedades mecânicas representem uma região com fissuras uniformemente distribuídas.

Modelos subsequentes ([Suidan e Schnobrich \(1973\)](#)) mantiveram a rigidez residual transversal como função do módulo de elasticidade transversal inicial, através de um fator de redução denominado fator de retenção ao cisalhamento.

Modelos unidimensionais para tratar o concreto, através de relações momento-curvatura, também já eram usados. No trabalho de Monnier (1970), por meio de estudos teóricos e experimentais em vigas de concreto, leis não lineares para a relação momento-curvatura foram desenvolvidas. Uma abordagem computacional sobre o assunto foi feita por Blaauwendraad (1972), que revisou os conceitos adotados até aquele momento e apresentou um modelo unidimensional que considerava efeitos de segunda ordem combinados com relações momento-curvatura.

O uso de parâmetros da mecânica da fratura para modelagem de estruturas de concreto foi iniciado por Hillerborg et al. (1976). Neste trabalho, o concreto é descrito com um comportamento crescente de tensão até um limite máximo. A partir deste limite, o material entra em regime de amolecimento – diminuição de tensão acompanhada de aumento de deformação – que é regido por uma lei não linear baseada na energia de fratura.

No mesmo ano, Bažant (1976) estudou o amolecimento do concreto e o surgimento de uma banda de fissuração, descrita através da variação da flexibilidade. O monitoramento da flexibilidade também foi estudado por Swartz et al. (1978), sendo feita uma análise de sua variação em vigas de concreto submetidas à flexão. A partir de então, os modelos de fissuração distribuída baseados em flexibilidade foram desenvolvidos.

Darwin e Pecknold (1976) apresentaram a modelagem de painéis de concreto armado submetido a cargas cíclicas, usando leis tensão-deformação biaxiais que admitiam degradação tanto em tração como em compressão. Este trabalho foi de grande relevância, pois, até o momento, apenas a degradação do concreto por tração era considerada.

Inspirados em Bažant (1976), muitos trabalhos (Bažant e Cedolin (1979, 1980, 1983)) foram publicados abordando o mesmo tema: o surgimento de uma região fissurada designada como banda de fissuração ou zona de processamento de fissuras. Mas, somente no trabalho de

Bažant e Oh (1983), a teoria foi elaborada admitindo um amolecimento gradual. O modelo considerava a relação constitutiva com amolecimento (como proposto por Hillerborg et al. (1976)) associada a um certo comprimento de banda de fissuração, que era tratado como uma propriedade do material.

A partir destes primeiros modelos, os conceitos de fissuração distribuída se sedimentaram e diversos trabalhos surgiram (de Borst e Nauta (1985), Rots et al. (1985) e Rots e de Borst (1987)), aprimorando as teorias existentes, resultando nos modelos de fissuração fixa e rotacional como conhecidos hoje.

A demanda dos modelos de fissuração distribuída por leis tensão-deformação representativas das regiões degradadas motivou muitos trabalhos, como os de Carreira e Chu (1985), Carreira e Chu (1986), Boone et al. (1986) e Boone e Ingraffea (1987), que definem leis tensão-deformação representativas do concreto.

Rots (1988) apresentou um amplo estudo sobre os modelos de fissuração distribuída, empregando estes modelos para descrever o processo de fraturamento do concreto. No mesmo ano, um outro amplo estudo sobre o comportamento não linear do concreto foi apresentado por Proença (1988). Neste trabalho, após descrever modelos elastoplásticos e modelos baseados na mecânica da fratura, Proença apresenta uma formulação variacional para a modelagem constitutiva.

Em paralelo aos modelos de fissuração, a mecânica do dano contínuo (Lemaitre e Dufailly (1987); Lemaitre (1992); Lemaitre e Desmorat (2005)) passa a ser usada na modelagem de materiais parcialmente frágeis. O trabalho de Lemaitre e Dufailly (1987) apresenta várias medidas de dano e conclui que a forma mais eficiente de se medir o dano de um material é por meio da quantificação da densidade de defeitos. Entretanto, tal processo é difícil e incerto para

os casos em que não se tem uma uniformidade dos defeitos. Além disso, questões relativas ao tamanho e posição da região de observação do dano ainda são muito subjetivas.

Neste cenário, surgem os modelos de dano baseados em deformação equivalente. Mazars (1984) apresentou um modelo bastante simples, mas eficiente. O denominado modelo de dano escalar admite que o dano é medido por uma variável escalar, definida como deformação equivalente e calculada com base nas deformações principais positivas.

Na mesma linha de Mazars (1984), anos mais tarde, outro modelo de dano escalar baseado em deformação equivalente foi proposto por Brekelmans et al. (1992). O modelo previa que o material poderia apresentar comportamentos distintos em tração e em compressão, o que é essencial para a modelagem do concreto. A proposta associava a tração e a compressão em uma constante usada no cálculo da deformação equivalente.

Os modelos de dano escalar foram a base de muitos trabalhos, podendo ser citados: Chow e Wang (1987), Bažant e Pijaudier-Cabot (1987), Bažant e Pijaudier-Cabot (1988), de Vree et al. (1995), Ghrib e Tinawi (1995), Petrangeli e Ožbolt (1996), Lee et al. (1997), Jirásek e Zimmermann (1998), Pituba (1998), Cauvin e Testa (1999), de Borst e Gutiérrez (1999), de Borst (2002), Pituba (2003), Junior e Venturini (2007), Alves et al. (2000), Scotta et al. (2002), Jirásek e Patzák (2002), Xiang et al. (2002) e Lee et al. (2004), além de inúmeros trabalhos e aplicações encontrados na literatura.

Para uma melhor descrição da anisotropia existente no concreto, uma nova proposta, baseada na teoria de microplanos (Taylor (1938)), foi apresentada por Bažant e Gambarova (1984) e Bažant e Oh (1985). Nesta proposta, o ponto material é tratado como um conjunto de microplanos, orientados em diversas direções e posicionados na superfície de uma esfera de raio unitário centrada no referido ponto. As deformações nestes microplanos correspondem à

aplicação de uma restrição cinemática e/ou estática ao tensor macroscópico de deformações. Através de relações tensão-deformação, válidas para os microplanos, calculam-se as tensões em cada microplano. Por fim, impondo-se condições de equivalência de energia, obtém-se o estado macroscópico de tensões e uma avaliação da degradação da rigidez.

Uma primeira evolução deste modelo foi proposta por Carol et al. (1992), que apresentavam a teoria pela primeira vez usando somente restrição cinemática, abandonando assim os modelos de restrição mista. Embora o modelo marcasse uma evolução, apresentava inconsistências que foram corrigidas e apresentadas por Ožbolt et al. (2001). Os modelos de microplanos até então formulados usavam o princípio dos trabalhos virtuais para a equivalência de energia. Mas foi constatado que as leis termodinâmicas não eram plenamente atendidas. Desta forma, Carol et al. (2001a) e Kuhl et al. (2001), apresentaram uma nova estrutura teórica consistente com os princípios termodinâmicos.

Mais recentemente, Leukart e Ramm (2002, 2006) adotaram uma nova decomposição das deformações macroscópicas, propondo assim uma nova formulação da teoria de microplanos baseada nos princípios da termodinâmica.

O desenvolvimento de modelos seguindo a teoria da plasticidade compreendem uma grande parte da modelagem constitutiva de materiais em geral. A teoria da plasticidade, amplamente difundida e empregada, constitui um formato teórico consagrado. Para aplicação deste formato, critérios de resistência são adotados de acordo com as características do material que se deseja representar. Assim, além de todos os modelos desenvolvidos especificamente para o concreto, que tentam representar os fenômenos característicos deste material, foram desenvolvidos ainda modelos baseados na teoria clássica da plasticidade. Os fundamentos da teoria da plasticidade para o concreto podem ser visto em obras clássicas como a de Chen (1982).

3.1 Tentativas de Unificação

Muitas vertentes da modelagem constitutiva são fundamentadas em estruturas teóricas capazes de representar as principais características do meio material, captando os comportamentos observados experimentalmente e propiciando um modelo mais realista.

A mecânica da fratura, a mecânica do dano contínuo e a teoria da plasticidade são as principais estruturas teóricas usadas para a formulação constitutiva em geral, sendo, muitas vezes, usadas em conjunto para maior fidelidade de representação.

Uma base teórica comum a estes modelos é a termodinâmica que, em sua generalidade, descreve os processos energéticos envolvidos no comportamento do material. [Lemaitre e Desmorat \(2005\)](#) afirmam que, partindo-se de três passos básicos, é possível descrever o comportamento dos diferentes materiais por meio dos processos termodinâmicos irreversíveis envolvidos. Para tanto deve-se definir: (1) as variáveis de estado, cujos valores correntes caracterizam o mecanismo termodinâmico correspondente; (2) o estado potencial a partir do qual pode-se obter as leis de estado e a definição das variáveis internas ao processo; (3) o potencial de dissipação e por conseguinte as leis de evolução das variáveis de estado associadas com os mecanismos dissipativos. Maiores detalhes do uso das equações da termodinâmica, como base para a modelagem constitutiva, podem ser vistas em [Neto et al. \(2006\)](#).

Embora geral, a termodinâmica é pouco prática no que tange a implementação computacional de modelos em um contexto unificado. Vários autores desenvolveram propostas teóricas para tratar de forma geral a formulação constitutiva. Em muitos trabalhos, a consistência energética é apresentada. Em outros, o foco principal é estabelecer regras gerais diretamente aplicadas à modelagem computacional.

Uma das primeiras propostas de abordagem unificada é apresentada por Rots e de Borst (1987) que ressalta as propriedades dos modelos de fissuração distribuída de modo a generalizar os conceitos de sistema local e global, considerando o critério de surgimento de trincas no sistema local, para em seguida correlacioná-los à plasticidade.

Resumindo uma grande quantidade de trabalhos devotados à modelagem da degradação dos meios materiais, Carol et al. (1994) propõem uma unificação teórica de modelos de degradação elástica baseados em uma única superfície de carregamento. Neste trabalho os autores desenvolvem um arcabouço teórico genérico compreendendo uma grande parte dos modelos de dano em analogia com os conceitos e notações da teoria da plasticidade clássica. As equações constitutivas são postas de forma lógica e estruturada, indicando uma unicidade na formulação de modelos constitutivos, sejam estes baseados em tensão, deformação, forças termodinâmicas conjugadas ou dano. A proposta é ilustrada somente para modelos isotrópicos com uma única superfície de carregamento. Os autores aplicam a estrutura teórica por eles proposta em trabalhos diversos Rizzi et al. (1995), Rizzi (1995), Carol (1996), Carol e Willam (1996), Carol (1999), Hansen et al. (2001), que visam o estudo de problemas específicos. Nestes trabalhos, o prometido potencial da estrutura teórica não é explorado e as limitações não são superadas. Dentre estes trabalhos destaca-se o de Rizzi et al. (1995) que, embora tenha abordado uma formulação aplicada a materiais multi dissipativos, baseado na teoria da plasticidade com múltiplas superfícies apresentada por Simo e Hughes (1998), não apresenta uma generalização visando uma estrutura teórica/computacional aplicada à modelagem constitutiva.

Com uma abordagem mais prática, de Borst e Gutiérrez (1999), partindo da derivação da relação total da matriz de rigidez e empregando diferentes propostas de deformações equivalentes, generalizam modelos de dano isotrópicos, ortotrópicos e anisotrópicos. Anos mais tarde, de Borst (2002) faz uma breve revisão de modelos para meios parcialmente frágeis baseados na mecânica da fratura, usando, para tanto, a proposta de seu trabalho anterior (de Borst e Gu-

tiérrez (1999)). Mesmo generalizando a derivação das equações e usando uma única notação, a falta de abstração limita a proposta a modelos de dano escalar.

Armero e Oller (2000a) apresentam uma estrutura teórica para o acoplamento da mecânica do dano com plasticidade. A formulação apresentada baseia-se em tensão e indica uma forma generalizada para algoritmos de retorno. Na continuação deste trabalho Armero e Oller (2000b), são apresentadas aplicações das ideias propostas na primeira parte. Modelos de plasticidade com dano, empregados à metais com efeitos de abertura e fechamento de trincas, são explorados. Os próprios autores indicam a limitação da proposta à modelos de dano acoplados à plasticidade, ressaltando que modelos de dano distribuído, como os modelos clássicos de fissuração, não são contemplados pela proposta.

Voltando ao tema de 1994, Carol et al. (2001b) desenvolvem as equações do trabalho anterior com tensores de dano de segunda ordem. Os tensores de rigidez e flexibilidade bem como suas respectivas derivadas são apresentados. Na segunda parte do trabalho (Carol et al. (2001c)) um novo modelo de dano ortotrópico é demonstrado. O modelo é ilustrado apenas com soluções analíticas de alguns poucos exemplos teóricos simples. O trabalho, portanto, carece de uma abordagem numérica-computacional aplicada a métodos consagrados, como o método dos elementos finitos. Além disso, a impossibilidade de uso de múltiplas superfícies de carregamento não é superada.

Recentemente, muitos autores (Wu et al. (2006), Wu e Li (2006b,a), Wu (2007a,b), Pröchtel e Häußler-Combe (2008) e Matallah e LaBorderie (2009)) se beneficiaram das propostas de generalização e unificação, dadas nos trabalhos de Carol et al. (1994, 2001b,c) . Sem preocupação de superar as limitações da proposta, esses autores desenvolveram seus próprios modelos constitutivos e propuseram diversas aplicações da estrutura unificada.

3.2 Unificação Teórica

A tese de doutorado de Penna (2011) apresenta, dentre outras inovações, a concepção de um ambiente para unificação dos modelos de degradação elástica, que abrange as teorias constitutivas para materiais parcialmente frágeis. As equações foram desenvolvidas em formato geral e posteriormente particularizadas para os alguns modelos constitutivos, após adequá-los ao formato geral estabelecido. Este trabalho apresenta uma expansão da estrutura teórica proposta por Carol et al. (1994). A proposta é capaz de contemplar vários modelos constitutivos elastoplásticos ou de degradação elástica; isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico, formulados com uma ou várias funções de carregamento.

Para análise fisicamente não linear, na Mecânica dos Sólidos Computacional, é necessário estimar sucessivamente o equilíbrio entre forças internas e externas e a degradação do meio. As forças internas são, normalmente, estimadas por integração das tensões internas no domínio do problema e a degradação do meio é estimada através do cálculo da matriz de rigidez incremental ou grandeza equivalente. Independentemente do modelo discreto com o qual se avalia as deformações em um ponto interno, o cálculo das tensões internas e da variação incremental das mesmas dependem somente do modelo constitutivo usado para representar o degradação do meio. Este modelo requer, como dados de entrada, somente, as deformações correntes e a história progressiva das variáveis que o caracteriza.

Na unificação proposta por Penna (2011) parte-se do pressuposto da existência de uma relação total entre tensões e deformações, na forma

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.1)$$

e

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl} , \quad (3.2)$$

sendo E_{ijkl} e C_{ijkl} , respectivamente, as componentes dos tensores de rigidez e flexibilidade secantes. As relações acima na forma de taxas são dadas por

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} + \dot{E}_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3.3)$$

e

$$\dot{\epsilon}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \dot{C}_{ijkl} \sigma_{kl} . \quad (3.4)$$

Pode-se escrever as equações relativas ao processo incremental de degradação elástica na forma:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^d) \quad (3.5)$$

sendo

$$\dot{\epsilon}_{kl}^d = \dot{\lambda}_m m_{mkl} \quad (3.6)$$

onde $\dot{\epsilon}_{kl}^d$ é o incremento de deformação devido à degradação de rigidez, $\dot{\lambda}_m$ são as componentes do vetor de multiplicadores inelásticos, ou seja, a magnitude do processo de degradação, e m_{mkl} são as componentes do tensor das direções da degradação.

Admitindo-se uma função de carregamento (F_n) na qual grandezas internas (p_n) controlam o processo de degradação, e estas por sua vez são funções das deformações de degradação ϵ_{kl}^d , pode-se escrever a Eq. (3.5) como

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} , \quad (3.7)$$

onde

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{m}_{mij} \bar{n}_{nkl} \quad (3.8)$$

é o operador tangente, sendo \bar{H}_{nm} as componentes do tensor pós-crítico (ou módulos de endurecimento ou amolecimento), \bar{m}_{mij} as componentes do tensor de degradação, e \bar{n}_{nkl} as componentes do tensor dos gradientes das funções de carregamento.

Na tese de Penna (2011) os tensores \mathbf{H} , \mathbf{m} e \mathbf{n} são detalhados e especializados para vários modelos constitutivos de concreto, entre os quais citam-se:

Modelo de Fissuração Distribuída de Borst e Nauta (1985), Carreira e Chu (1985, 1986), Boone et al. (1986) e Boone e Ingraffea (1987)

Modelo de Dano Ortotrópico devido a de Borst e Gutiérrez (1999)

Modelo de Dano de Mazars (1984)

Modelo de Dano Isotrópico de Mazars e Lemaitre (1984)

Modelo de Dano Isotrópico de Lemaitre e Chaboche (1990)

Modelo de Dano Isotrópico de Simo e Ju (1987)

Modelo de Dano Isotrópico de Ju (1989)

Modelo de Dano Isotrópico de Brekelmans et al. (1992)

Modelo de Dano Volumétrico de Penna (2011)

A unificação, sucintamente aqui descrita, foi elaborada e validada dentro do contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF). Um dos objetivos a que esta tese se propõe é validar o *framework* proposto por Penna (2011) na análise fisicamente não linear através do método sem malha acoplado ao MEF implementado nesta tese.

Implementação

A implementação computacional do EFG utiliza o sistema **INSANE** (Interactive Structural Analysis Environment), uma plataforma de “software” livre em desenvolvimento no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais (<http://www.dees.ufmg.br/insane>). O ambiente computacional do **INSANE**, desenvolvido em linguagem Java, é constituído de três grandes aplicações: pré-processador, processador e pós-processador. No processador, ou núcleo numérico do sistema, diferentes modelos discretos de análise estrutural assim como vários modelos constitutivos estão implementados.

A base do sistema **INSANE** é o MEF. Todavia, graças ao projeto orientado a objetos do mesmo, a implementação do método sem malha aqui apresentado herdou, reutilizou ou modificou classes do mesmo e, quando necessário, acrescentou classes específicas.

Em particular, destaca-se a montagem da matriz de rigidez global, que é análoga àquela usada no MEF. No paradigma de programação orientada a objetos, uma célula de integração é um

tipo de elemento finito, herdando todos os seus métodos. Uma célula de integração possui características próprias, como a identificação do elemento finito a ela acoplado, a definição dos nós que compõem o domínio de suporte de cada ponto de integração, o cálculo de deformações considerando o acoplamento, entre outras. Detalhes da implementação serão discutidos nas seções seguintes.

4.1 Sistema **INSANE**

O núcleo numérico do **INSANE** consiste nas interfaces *Model*, *Assembler* e *Solution*, organizadas conforme ilustra a Fig. 4.1 abaixo, as quais representam a abstração adotada para as implementações específicas, respectivamente, do modelo discreto, procedimento de montagem do sistema de equações e dos métodos de solução e obtenção dos resultados numéricos. Adicionalmente, a interface *Persistence* encapsula as operações de entrada e saída, bem como a comunicação entre os módulos pré e pós-processamento.

O sistema **INSANE** está em contínuo desenvolvimento, e a implementação em discussão baseia-se na descrição elaborada por Fonseca (2008). Entretanto, o sistema reflete os trabalhos de Fonseca (2006), Fuina (2009) e Penna (2011), entre outros.

A interface *Assembler* descreve os métodos necessários para a montagem de um sistema de equações descrito pela Eq. (4.1)

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d} \quad (4.1)$$

onde \mathbf{x} é o vetor de variáveis de estado do problema, sendo $\dot{\mathbf{x}}$ e $\ddot{\mathbf{x}}$, respectivamente, a primeira e segunda derivadas temporais de \mathbf{x} ; \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são matrizes e \mathbf{d} é um vetor, os quais podem ou não depender da variável de estado ou de suas variações.

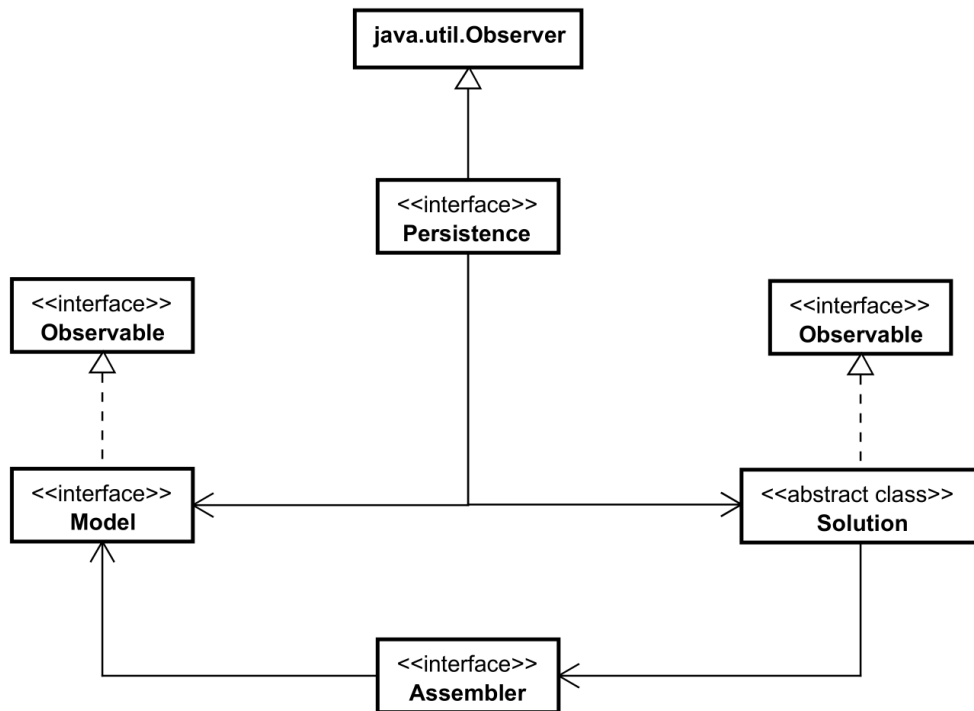


Figura 4.1: Organização do núcleo numérico do **INSANE**

Esta descrição genérica possibilita a implementação de diversos modelos discretos, como MEF (Método dos Elementos Finitos), MEFG (Método dos Elementos Finitos Generalizados), MEC (Método dos Elementos de Contorno) e MM (Métodos sem Malha), dentre outros, como ilustra a Fig. 4.2. A interface `Model` possui a estrutura de dados associada ao modelo discreto

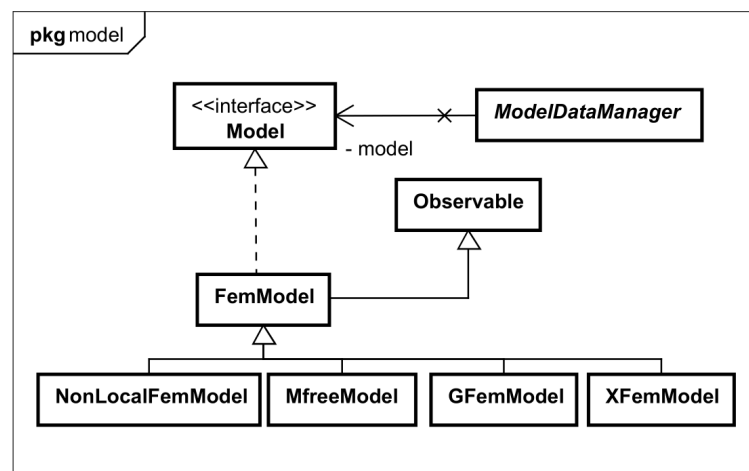


Figura 4.2: Organização de classes que implementam a interface `Model`

objeto da análise, fornecendo à classe que implementa `Assembler` as informações necessárias para a montagem do sistema de equações do modelo, que por sua vez será resolvido por alguma classe que implementa a interface `Solution`. A Fig. 4.3 ilustra a organização de classes que implementam a interface `Assembler`. A interface `Solution` é responsável pelo processo de

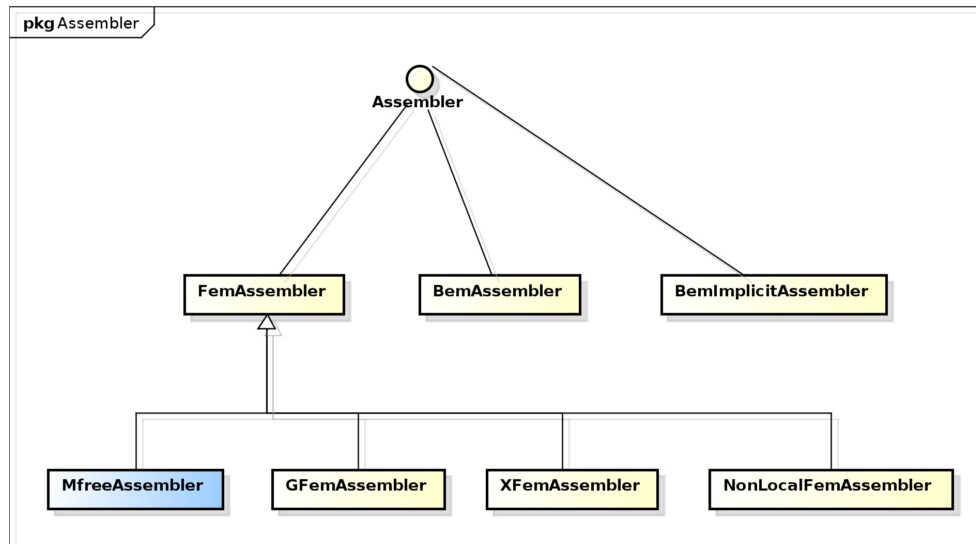


Figura 4.3: Classes que implementam a interface `Assembler`

solução do sistema de equações, seja ele linear ou não linear.

4.2 Análise Estática Fisicamente Não Linear

Para o caso específico de problemas estáticos em análise fisicamente não linear, a Eq. (4.1) simplifica-se no sistema de equações Eq. (4.2)

$$Cx = d \quad (4.2)$$

onde x é o vetor de deslocamentos nodais, C é a matriz de rigidez, e d é o vetor de forças nodais. Na análise fisicamente não linear, a matriz de rigidez depende do estado de deformações

corrente, e a solução do sistema da Eq. (4.2) requer a utilização de um processo incremental iterativo, conforme descrito em Yang e Kuo (1994).

Na análise não-linear de estruturas é necessário resolver um sistema de equações de ordem $(n + 1) \times (n + 1)$, sendo n equações de equilíbrio e uma equação de restrição, para a obtenção das $(n + 1)$ incógnitas, consistindo de um incremento no fator de carga e n deslocamentos incrementais.

Utiliza-se um processo incremental iterativo para a solução do problema acima mencionado, no qual se estabelece um sistema de equações de equilíbrio incremental para o passo de carga i na iteração j , como descrito na Eq. (4.3) abaixo

$$\mathbf{K}_{j-1}^i \delta \mathbf{U}_j^i = \delta \lambda_j^i \mathbf{P} + \mathbf{Q}_{j-1}^i \quad (4.3)$$

onde:

\mathbf{K}_{j-1}^i é a matriz de rigidez tangente, função do campo de deslocamentos \mathbf{U}_{j-1}^i ;

$\delta \mathbf{U}_j^i$ é o vetor de deslocamentos incrementais;

$\delta \lambda_j^i$ é o incremento do fator de cargas;

\mathbf{P} é o vetor de cargas de referência;

\mathbf{Q}_{j-1}^i é o vetor de forças residuais.

Em função do parâmetro de controle adotado, um incremento do fator de carga, $\delta \lambda_j^i$, correspondente é estabelecido, a partir do qual calcula-se o incremento de deslocamento, $\delta \mathbf{U}_j^i$, como indicado pela Eq. (4.4)

$$\delta \mathbf{U}_j^i = \delta \lambda_j^i \delta \mathbf{U}_j^{\mathbf{P}^i} + \delta \mathbf{U}_j^{\mathbf{Q}^i} \quad (4.4)$$

na qual é adotada uma decomposição consistindo de uma parcela dos deslocamentos incrementais devida à carga de referência, $\delta\mathbf{U}_j^{\text{P}^i}$, obtida pela Eq. (4.5), e outra parcela associada à carga residual, $\delta\mathbf{U}_j^{\text{Q}^i}$, calculada pela Eq. (4.6).

$$\mathbf{K}_{j-1}^i \delta\mathbf{U}_j^{\text{P}^i} = \mathbf{P} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{K}_{j-1}^i \delta\mathbf{U}_j^{\text{Q}^i} = \mathbf{Q}_{j-1}^i \quad (4.6)$$

A convergência do processo incremental iterativo é verificada, ao final de cada iteração, comparando-se um valor de tolerância previamente fornecido em relação ao valor da magnitude do vetor de forças residuais, Eq. (4.7), e/ou da magnitude do vetor de deslocamentos incrementais, Eq. (4.8). Alguns autores, como por exemplo Barros (2002), também utilizam o valor da energia residual, calculada pela Eq. (4.9), como critério de parada do processo iterativo.

$$\|\mathbf{Q}_j^i\| = \sqrt{\mathbf{Q}_j^i \cdot \mathbf{Q}_j^i} \quad (4.7)$$

$$\|\delta\mathbf{U}_j^i\| = \sqrt{\delta\mathbf{U}_j^i \cdot \delta\mathbf{U}_j^i} \quad (4.8)$$

$$\|\delta u_j^i\| = \sqrt{\delta\mathbf{U}_j^i \cdot \mathbf{Q}_j^i} \quad (4.9)$$

Após verificada a convergência e em caso de nova iteração fazer-se necessária, o valor do novo incremento de carga é calculado a partir da equação de restrição (dependente do método de controle adotado). A atualização das variáveis obedece às Eq. (4.10) e Eq. (4.11)

$$\lambda_j^i = \lambda_{j-1}^i + \delta\lambda_j^i \quad (4.10)$$

$$\mathbf{U}_j^i = \mathbf{U}_{j-1}^i + \delta\mathbf{U}_j^i \quad (4.11)$$

Por sua vez, o vetor de cargas residuais é avaliado pela expressão contida na Eq. (4.12)

$$\mathbf{Q}_j^i = \lambda_j^i \mathbf{P} - \mathbf{F}_j^i \quad (4.12)$$

Algoritmo 1 Método de Newton Raphson (versão em deslocamentos)Monte vetor de cargas de referência \mathbf{P} **repita****repita**Calcule matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_{j-1}^i (ver algoritmo 2 para \mathbf{K}_{j-1}^i)Resolva $\mathbf{K}_{j-1}^i \delta \mathbf{V}_j^{\mathbf{P}^i} = \mathbf{P}$ para $\delta \mathbf{V}_j^{\mathbf{P}^i}$ Calcule incremento de deslocamentos $\delta \mathbf{U}_j^{\mathbf{P}^i} = f(\delta \mathbf{V}_j^{\mathbf{P}^i})$ ver Eq. (4.13)Resolva $\mathbf{K}_{j-1}^i \delta \mathbf{V}_j^{\mathbf{Q}^i} = \mathbf{Q}_{j-1}^i$ para $\delta \mathbf{V}_j^{\mathbf{Q}^i}$ Calcule incremento de deslocamentos $\delta \mathbf{U}_j^{\mathbf{Q}^i} = f(\delta \mathbf{V}_j^{\mathbf{Q}^i})$ ver Eq. (4.13)Calcule incremento de fator de carga $\delta \lambda_j^i$ (depende do método de controle, vide Tabela 4.1)Atualize $\delta \mathbf{U}_j^i = \delta \lambda_j^i \delta \mathbf{U}_j^{\mathbf{P}^i} + \delta \mathbf{U}_j^{\mathbf{Q}^i}$ Eq. (4.4)Atualize $\lambda_j^i = \lambda_{j-1}^i + \delta \lambda_j^i$ Eq. (4.10)Atualize $\mathbf{U}_j^i = \mathbf{U}_{j-1}^i + \delta \mathbf{U}_j^i$ Eq. (4.11)Atualize $\mathbf{Q}_j^i = \lambda_j^i \mathbf{P} - \mathbf{F}_j^i$ Eq. (4.12)

Verifique convergência Eq. (4.7) e/ou Eq. (4.8), ou Eq. (4.9)

j++

até $j \leq$ número máximo de iterações e não convergiu

i++

até $i \leq$ número máximo de passos

onde \mathbf{F}_j^i é o vetor de forças equivalentes às tensões internas (definido adiante – Eq. (4.16)).

Note-se que para a primeira iteração, i.e. $j = 1$, o vetor de cargas residuais é nulo. O processo acima descrito está sintetizado no algoritmo 1.

Observa-se que, no caso dos métodos sem malha, a solução do sistema de equações resulta em parâmetros nodais, \mathbf{V} , a partir dos quais os deslocamentos nodais, \mathbf{U} , são calculados na forma da Eq. (4.14). Assim, define-se a Eq. (4.13)

$$\mathbf{U} = f(\mathbf{V}) \quad (4.13)$$

onde $f(\cdot)$ calcula o vetor de deslocamentos nodais, ou incrementos nodais, a partir do vetor de parâmetros nodais, ou incrementos destes.

$$u(\mathbf{x}) \simeq u^h(\mathbf{x}) + u^p(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I^h} u(\mathbf{x}_i) N_i^h(\mathbf{x}) + \sum_{j \in I^p} u(\mathbf{x}_j) \tilde{N}_j^p(\mathbf{x}) \quad (4.14)$$

Tabela 4.1: Métodos de controle utilizados no algoritmo 1

Método de Controle	$\delta\lambda_j$ para $j = 1$	$\delta\lambda_j$ para $j > 1$
de carga	$\delta\lambda_1 = \text{constante}$	$\delta\lambda_j = 0$
direto de deslocamento	$\delta\lambda_1 = \frac{\delta U_{k1}^i}{\delta U_{k1}^{P^i}}$	$\delta\lambda_j = -\frac{\delta U_{kj}^{Q^i}}{\delta U_{kj}^{P^i}}$
de deslocamento generalizado	$\delta\lambda_1 = \delta\lambda_1^1 \sqrt{\frac{\delta U_1^{P^1} \cdot \delta U_1^{P^1}}{\delta U_1^{P^{i-1}} \cdot \delta U_1^{P^i}}}$	$\delta\lambda_j = -\frac{\delta U_1^{P^{i-1}} \cdot \delta U_j^{Q^i}}{\delta U_1^{P^{i-1}} \cdot \delta U_j^{P^i}}$

A matriz de rigidez tangente é obtida utilizando-se a Eq. (4.15) e o algoritmo 2

$$\mathbf{K}_{j-1}^i = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\rho}^T \mathbf{E}_t \mathbf{B}_{\rho} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_h^T \mathbf{E}_t \mathbf{B}_{\rho} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\rho}^T \mathbf{E}_t \mathbf{B}_h d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_h^T \mathbf{E}_t \mathbf{B}_h d\Omega. \quad (4.15)$$

O vetor de forças nodais é calculado pela Eq. (4.16) abaixo, cuja implementação é ilustrada pelos algoritmos 3 e 4:

$$\mathbf{F}_j^i = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_{\rho} + \mathbf{B}_h)^T \boldsymbol{\sigma}_j^i d\Omega \quad (4.16)$$

Finalmente, as etapas para o cálculo das funções de forma do EFG acopladas ao MEF estão detalhadas no algoritmo 5.

Algoritmo 2 Cálculo da matriz de rigidez tangente

para cada célula de integração **faça**

$\mathbf{K}_t \leftarrow 0$

$elem \leftarrow$ busca elemento de acoplamento associado a esta célula

para para cada ponto de integração \mathbf{x}_Q **faça**

identifique domínio de suporte de \mathbf{x}_Q (I^ρ)

calcule funções de forma (e suas derivadas) de EFG ($\mathbf{N}^\rho, \mathbf{N}_{,k}^\rho$)

calcule \mathbf{B}^ρ na numeração local desta célula Eq. (2.96)

calcule $\mathbf{K}_t^{\rho\rho}$ Eq. (2.99)

$\mathbf{K}_t \leftarrow \mathbf{K}_t + \mathbf{K}_t^{\rho\rho}$

se $elem \neq \emptyset$ e $\mathbf{x}_Q \in elem$ **então**

calcule funções de forma do MEF ($\mathbf{N}^h, \mathbf{N}_{,k}^h$)

calcule \mathbf{B}^h mapeado na numeração local desta célula Eq. (2.94)

calcule $\mathbf{K}_t^{\rho h}$ e \mathbf{K}_t^{hh} Eq. (2.101) e Eq. (2.102)

$\mathbf{K}_t \leftarrow \mathbf{K}_t + \mathbf{K}_t^{\rho h} + (\mathbf{K}_t^{\rho h})^T + \mathbf{K}_t^{hh}$

fim se

fim para

$\mathbf{K}_t^{local} \leftarrow$ transfira \mathbf{K}_t da numeração local para a numeração global

$\mathbf{K}_t^{global} \leftarrow \mathbf{K}_t^{global} + \mathbf{K}_t^{local}$

fim para

Algoritmo 3 Cálculo do vetor de forças nodais equivalentes

Monte vetor de cargas nodais equivalentes $\mathbf{F}^{int} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV$

para cada célula de integração **faça**

$elem \leftarrow$ busca elemento de acoplamento associado a esta célula

$\mathbf{F} \leftarrow$ calcule \mathbf{F}^{cell}

$\mathbf{F}_{local} \leftarrow$ transfira \mathbf{F} da numeração local para a numeração global

$\mathbf{F}_{global} \leftarrow \mathbf{F}_{global} + \mathbf{F}_{local}$

fim para

Algoritmo 4 Montagem do vetor de forças nodais equivalentes para uma célula

Monte vetor de cargas nodais equivalentes para esta célula

$\mathbf{F}^{\text{cell}} \leftarrow 0$

para para cada ponto de integração \mathbf{x}_Q **faça**

identifique o conjunto de partículas que formam o domínio de suporte de \mathbf{x}_Q (I^ρ)

calcule funções de forma (e suas derivadas) de EFG ($\mathbf{N}^\rho, \mathbf{N}_{,k}^\rho$)

calcule \mathbf{B}^ρ na numeração local desta célula Eq. (2.96)

$\boldsymbol{\epsilon}^\rho \leftarrow \mathbf{B}^\rho \mathbf{u}^\rho$

se $elem \neq \emptyset$ e $\mathbf{x}_Q \in elem$ **então**

calcule funções de forma do MEF ($\mathbf{N}^h, \mathbf{N}_{,k}^h$)

calcule \mathbf{B}^h mapeado na numeração local desta célula Eq. (2.94)

$\boldsymbol{\epsilon}^h \leftarrow \mathbf{B}^h \mathbf{u}^h$

$\mathbf{B} \leftarrow \mathbf{B}^\rho + \mathbf{B}^h$

fim se

calcule $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}^\rho + \boldsymbol{\epsilon}^h)$

calcule $\mathbf{F}^{\text{cell}} \leftarrow \mathbf{F}^{\text{cell}} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \Delta V$

fim para

retorne \mathbf{F}^{cell}

Algoritmo 5 Cálculo das funções de forma de EFG

Entrada: $\mathbf{x}, I^\rho, elem$

se $elem \neq \emptyset$ e $\mathbf{x} \in elem$ **então**

calcule $\sum_{i \in I^h} \mathbf{P}(\mathbf{x}_i) N_i^h(\mathbf{x})$ (sendo N_i^h em coordenadas globais)

calcule $\sum_{i \in I^h} \mathbf{P}(\mathbf{x}_i) N_{i,k}^h(\mathbf{x})$ (sendo $N_{i,k}^h$ em coordenadas globais)

fim se

calcule $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in I^\rho} \mathbf{P}(\mathbf{x}_j) \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_j) \phi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_j}{\rho}\right)$

calcule $\mathbf{M}_{,k}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in I^\rho} \mathbf{P}(\mathbf{x}_j) \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_j) \frac{1}{\rho} \phi_{,k}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_j}{\rho}\right)$

resolva $\mathbf{M}(\mathbf{x}) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \sum_{i \in I^h} \mathbf{P}(\mathbf{x}_i) N_i^h(\mathbf{x})$

resolva $\mathbf{M}_{,k}(\mathbf{x}) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) + \mathbf{M}(\mathbf{x}) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{,k}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{,k}(\mathbf{x}) - \sum_{i \in I^h} \mathbf{P}(\mathbf{x}_i) N_{i,k}^h(\mathbf{x})$

calcule $\tilde{N}_j^\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_j) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) \phi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_j}{\rho}\right)$

calcule $\tilde{N}_{j,k}^\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_j) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{,k}(\mathbf{x}) \phi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_j}{\rho}\right) + \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_j) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) \frac{1}{\rho} \phi_{,k}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_j}{\rho}\right)$

retorne $\{\mathbf{N}^\rho, \mathbf{N}_{,k}^\rho\}$

4.3 Classes Implementadas

A implementação do EFG acoplado ao MEF parte do pressuposto de que uma malha de células de integração em segundo plano será usada para a integração das equações em analogia direta com o MEF. Assim, dentro do paradigma de POO, uma célula de integração é um tipo de elemento finito. Desta forma, a classe `MfreeModel`, que contém a estrutura de dados que descreve o modelo discreto, herda todos os métodos necessários da classe `FemModel`, conforme indica a Fig. 4.4.

Uma lista de células de integração e outra lista de elementos finitos (que fazem o acoplamento) são mantidas separadamente. Outros objetos ou lista de objetos foram acrescentados, ainda conforme a Fig. 4.4, os quais serão discutidos no que se segue. As células de integra-

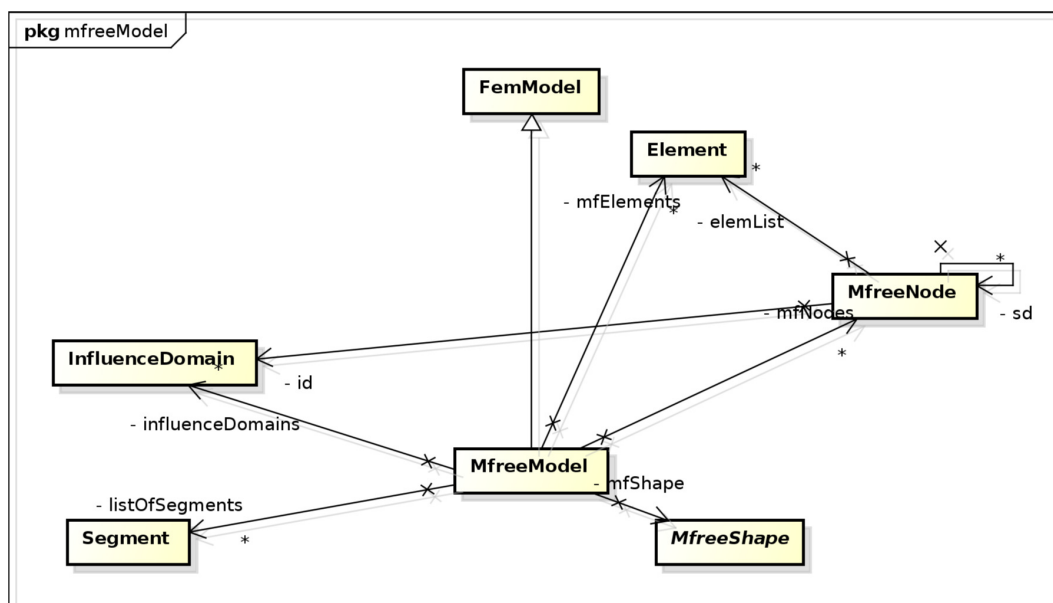


Figura 4.4: Classe `MfreeModel`

ção implementadas são um tipo de elemento finito `QuadrilateralCell` para análise 2D, e `HexahedralCell` para análise 3D, derivados, respectivamente, de `Quadrilateral` e `Hexahedral`, que são ambos derivados de `ParametricElement` (Fig. 4.5). Na célula de integração é

necessário sobrescrever alguns métodos específicos tais como o cálculo de deformações e tensões nos pontos de integração, o cálculo da rigidez e do vetor de forças nodais equivalentes.

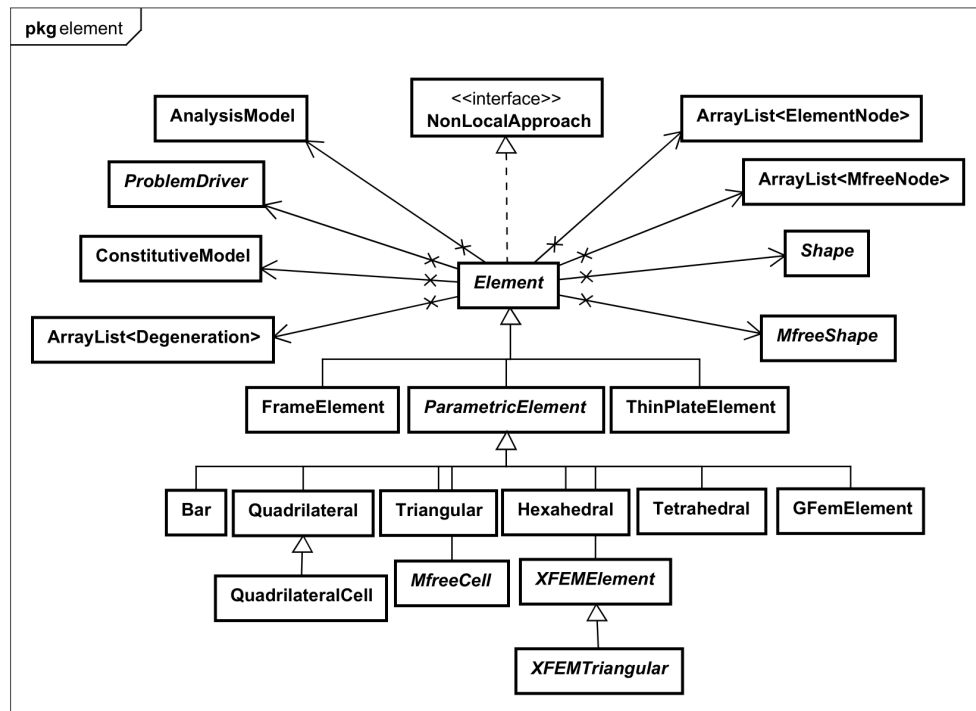


Figura 4.5: Classe Element

Uma decisão de projeto foi assumida neste ponto. Como o cálculo das funções de forma do EFG são computacionalmente muito exigentes, e considerando-se que em uma análise fisicamente não-linear deste processo repete-se à exaustão, optou-se por armazenar, para cada ponto de integração, o valor das funções de forma e suas respectivas derivadas, bem como uma lista dos nós pertencentes ao domínio de suporte de cada ponto de integração, o que é executado em tempo de inicialização de cada célula. Quando da inicialização da estrutura de dados, cada MfreeNode (Fig. 4.6) busca identificar seu próprio domínio de suporte. Posteriormente, cada célula de integração identifica seu próprio domínio de suporte utilizando-se do domínio de suporte de cada nó de sua incidência. Finalmente, cada ponto de integração pesquisa seu domínio de suporte a partir da lista específica da célula à qual pertence o mesmo. Adicional-

mente, cada célula de integração armazena uma referência para o elemento de acoplamento a ela associada.

A classe `MfreeNode` é derivada da classe `Node` utilizada no MEF, como mostrado na Fig. 4.6. Além dos atributos inerentes ao MEF como deslocamentos, restrições, entre outros, este novo tipo de nó também necessita de informações de seu domínio de influência, a função peso a ele associada, as funções de forma e suas respectivas derivadas, da lista de nós que formam seu domínio de suporte, além do elemento de acoplamento a ele associado. Um dos métodos implementados nesta classe é responsável pela busca pelo seu próprio domínio de suporte, que utiliza como argumentos de entrada a lista de nós do modelo discreto, além de uma lista de segmentos, aqui denominados segmentos protegidos, a serem testados segundo o critério de visibilidade.

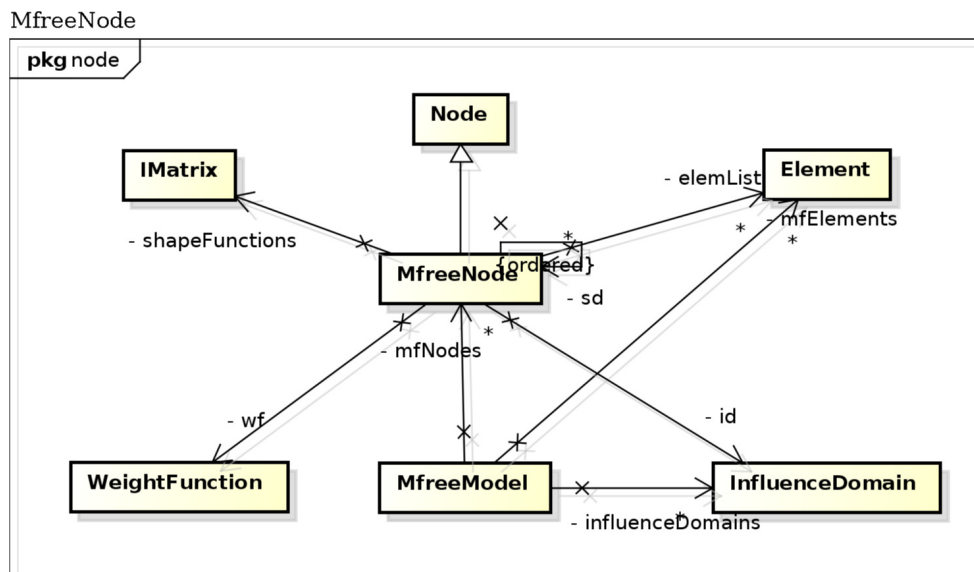


Figura 4.6: Classe `MfreeNode`

Para a implementação do domínio de influência é necessário caracterizar sua geometria, seja do tipo tensorial ou radial, além de associar ao mesmo uma função peso a ser utilizada. O domínio de influência, na verdade, é uma classe abstrata que especifica os métodos necessários

à obtenção do valor da função peso e sua derivada para determinado ponto. Conforme indica a Fig. 4.7, a geometria do tipo Tensorial é caracterizada por um retângulo no plano e por um paralelepípedo no espaço tridimensional. Por sua vez, a geometria Radial é representada por um círculo em 2D e uma esfera em 3D.

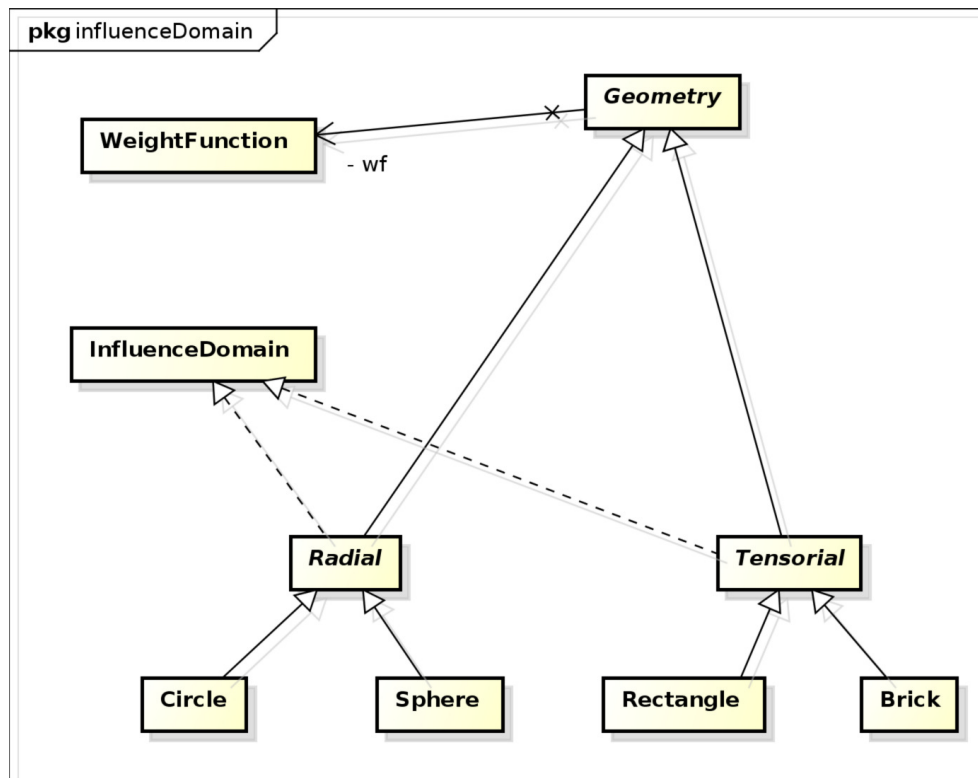


Figura 4.7: Classe Geometry

A classe `MfreeShape` (Fig. 4.8) responde pelo cálculo do valor da função de forma e suas respectivas derivadas. Na atual implementação, utiliza-se o MLS para este fim em 2D e 3D. Uma variação deste cálculo envolve fazer uma translação, deslocando o centro de referência para o próprio nó. A base polinomial utilizada pode ser do tipo Serendípeta ou hierárquica, aqui denotadas, respectivamente, `Poly2d`, `Poly3d` e `Lagrange2d`, `Lagrange3d`. Um monômio possui o formato geral $x^i y^j z^k$, sendo $i, j, k = 0 \dots p$, onde p denota o grau do polinômio. Para a formulação serendípeta $i + j + k \leq p$, e para a formulação hierárquica $i, j, k \leq p$.

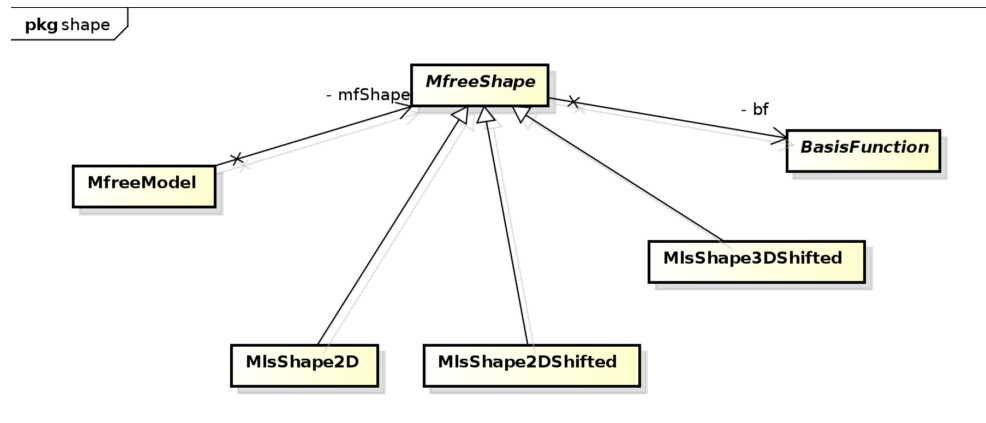


Figura 4.8: Classe MfreeShape

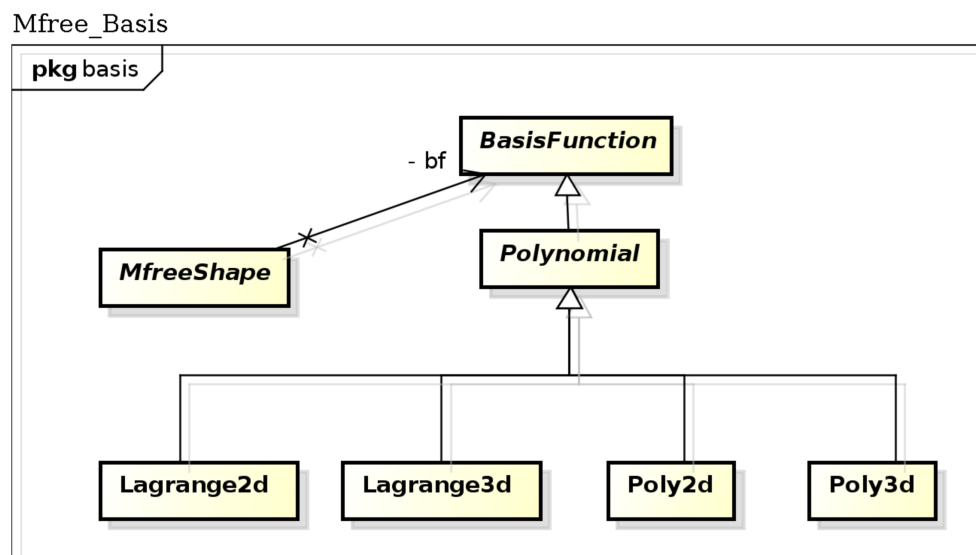


Figura 4.9: Classe Basis

4.4 Contribuições

No trabalho de Fernández-Méndez e Huerta (2004), ou a ele relacionado, não há qualquer menção de como esta formulação deve ser implementada para realizar o acoplamento entre o EFG e o MEF. Como já foi mencionado anteriormente, no EFG as células de integração não possuem qualquer relação direta de incidência com os nós do domínio a ser analisado. Por conseguinte, tal generalização facilita a construção da malha de células de integração. Toda-

via, quando se considera o acoplamento com elementos finitos, estas duas camadas de objetos geométricos levam à necessidade de uma descrição mais elaborada do modelo geométrico, exigindo-se, por exemplo, a manutenção de três diferentes listas de nós, a saber: um nó que define um ponto do domínio, um para descrever a incidência do elemento finito, e outro para descrever a incidência da célula de integração. Veja Fig. 4.10. Embora desejável, manter esta flexibilidade na descrição dos objetos geométricos que definem o modelo discreto levaria o trabalho na direção de geometria computacional, desfocando do objetivo da pesquisa. Por outro lado, para cada ponto de integração seria necessário responder a perguntas do tipo: a qual célula de integração tal elemento finito está acoplado? este ponto de integração coincide com o nó da incidência do elemento? está sobre uma aresta? Pensando também no aproveitamento

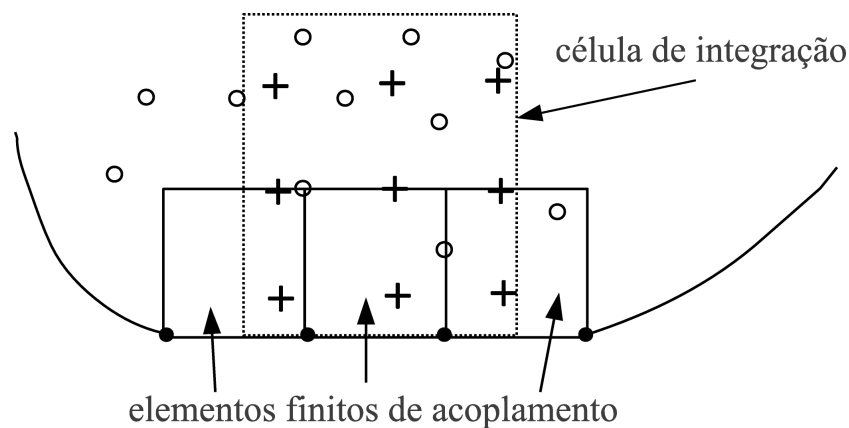


Figura 4.10: Elementos finitos acoplados (linha cheia) à célula de integração (linha pontilhada). Nós do domínio (\circ), nós de elementos finitos (\bullet), pontos de integração (+). Nós de incidência não destacados.

de código do **INSANE** para o pós-processamento, e tendo em vista estas considerações, outra decisão de projeto estabeleceu que a cada elemento finito de acoplamento corresponderia uma célula de integração, como ilustrado na Fig. 4.11. Optou-se também por unificar a implementação dos nós, tanto os nós de incidência de elementos finitos quanto aqueles das células, como nós pertencentes à discretização do domínio. Tal unificação redundou um efeito colateral positivo. Na formulação proposta por Fernández-Méndez e Huerta (2004), o tamanho do domínio de influência dos nós deveria ser maior que duas vezes a distância média entre os

mesmos, i.e., $\rho > 2h$. Ao adotarmos a estratégia de unificação do papel dos nós de incidência de elementos e células de integração, foi possível utilizar o tamanho do domínio de influência aproximadamente igual à distância média entre os nós do domínio ($\rho > h$). Desta forma a discretização sem malha é capaz de reproduzir uma discretização equivalente do MEF. A con-

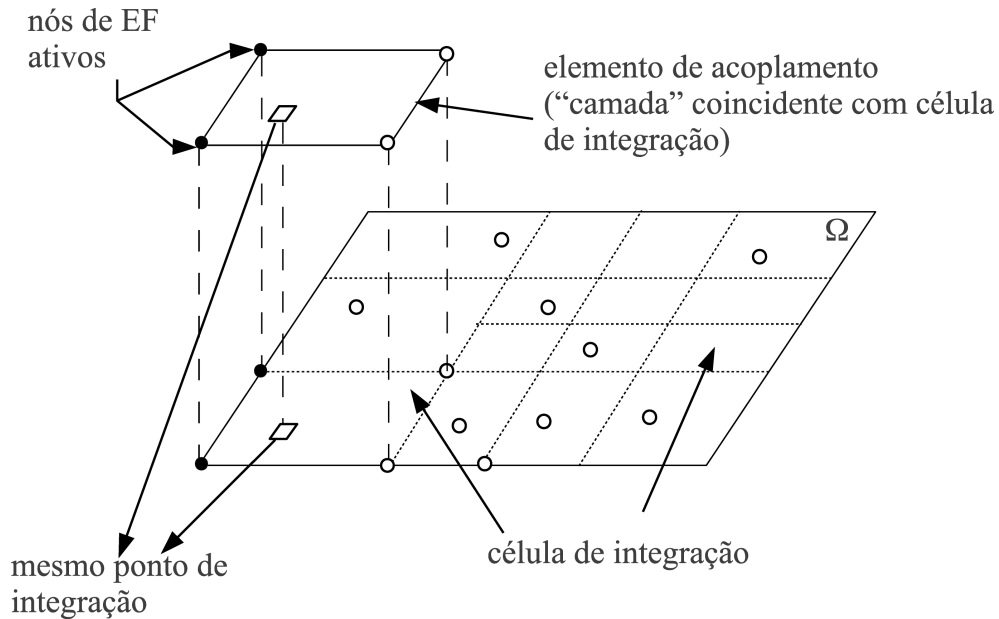


Figura 4.11: Camada contendo um elemento finito acoplado à malha de células de integração.

sideração da célula de integração como classe herdeira de elemento finito significou um grande aproveitamento do código existente para o MEF, em particular para o pós-processamento.

Utilização do Framework

O mais impactante neste aspecto de desenvolvimento foi a possibilidade de utilização do *framework* de modelos constitutivos desenvolvido por Penna (2011) com o propósito de ser independente do método de discretização utilizado, mas testado originalmente no contexto do MEF. A Fig. 4.12 ilustra o conceito de sua utilização, internamente apelidada de “caixa cinza”, em contraponto às chamadas “caixas pretas”. Por exemplo, considere o método `getIncre-`

mentalCuu() que calcula a matriz de rigidez incremental de um elemento finito. Para o caso de uma célula de integração, entretanto, a matriz de rigidez correspondente refere-se aos nós que pertencem ao domínio de suporte da referida célula, em contraposição à incidência nodal de um elemento finito.



Figura 4.12: *Framework* de modelos constitutivos do **INSANE**.

Construção do domínio de suporte

Na busca pelos nós que formam o domínio de suporte de determinado ponto utilizou-se o critério de visibilidade sugerido por Belytschko et al. (1996); Organ et al. (1996); Nguyen et al. (2008). Para ilustrar o conceito de visibilidade, considere um domínio plano tendo seu contorno descrito por um polígono P , como ilustra a Fig. 4.13. Segundo (O'Rourke, 1996, pp. 3) o ponto i pode enxergar o ponto j , ou j é visível para i , se e somente se o segmento \overline{ij} está totalmente contido no polígono, i.e., $\overline{ij} \subseteq P$. Uma das possíveis maneiras utilizadas para descrever a geometria do domínio discreto seria através de uma *PLC* (*Piecewise Linear Complex*) como descrito, por exemplo, em Shewchuk (1997). Assim, a verificação do critério de visibilidade para o par de nós $\{i, j\}$ seria executada através da detecção de interseção do segmento \overline{ij} em relação às arestas descritas no PLC.

Com uma abordagem mais pragmática, adotou-se o caminho inverso. Ao invés de montar um PLC, uma vez que nos métodos sem malha apenas os nós são de interesse, optou-se por criar

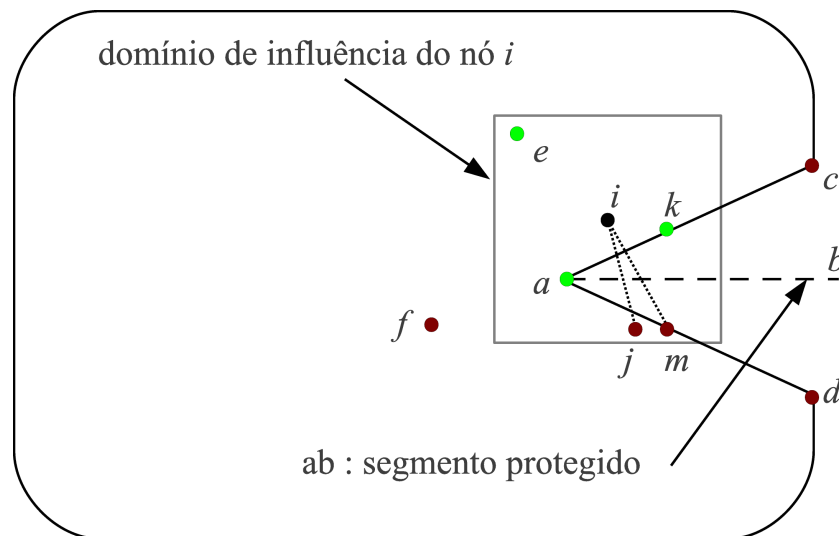


Figura 4.13: Busca com critério de visibilidade

a figura do “segmento protegido”, que funciona como obstáculo à visibilidade entre dois nós. Para exemplificar, observe-se a Fig. 4.13. As arestas (ou segmentos) \overline{ac} e \overline{ad} fariam parte da descrição contida no PLC.

Quando o domínio discreto não é convexo, há a necessidade de descartar os nós de suporte que violam o critério de visibilidade. Analisando-se o nó i na Fig. 4.13, pode-se observar que, embora os nós $\{a, e, k, j, m\}$ estejam dentro do domínio de influência de i , os nós $\{j, m\}$ violam o critério de visibilidade, pois os segmentos \overline{ij} e \overline{im} interceptam o segmento protegido \overline{ab} . A lista de nós de suporte de determinado ponto no domínio é formada pela inserção de uma referência de cada nó que (1) esteja dentro do domínio de influência e, (2) respeite o critério de visibilidade. Esta lista conta com o auxílio da estrutura de dados set de Java, a qual não permite a existência de duplicidade de objetos. Este algoritmo de busca não é o mais eficiente, possuindo ordem de complexidade $\mathcal{O}(n^2)$, uma vez que percorre-se toda a lista de nós do domínio para cada nó da mesma lista. Todavia, como esta busca é efetuada apenas uma vez, em tempo de inicialização da estrutura de dados, optou-se por este caminho.

Alternativamente poderia ter sido usado algoritmos mais eficientes como uma árvore de busca do tipo *kd-tree*, conforme Fonseca (2011).

Processo incremental iterativo: uma proposta

O processo incremental iterativo de solução do sistema de equações não-lineares empregado tradicionalmente no MEF utiliza os deslocamentos nodais na determinação do preditor e corretor do fator de carga. Salvo melhor juízo, na revisão bibliográfica realizada não foi encontrada nenhuma referência explícita à implementação do algoritmo de Newton Raphson para métodos sem malha. Considerando-se que a solução do sistema de equações são os parâmetros nodais, nossa primeira implementação consistiu na adição de uma etapa de cálculo dos deslocamentos e incrementos destes a cada iteração, antes de realizar o cálculo do fator de carga, através da Eq. (4.13).

Uma vez que se trata de uma formulação do EFG acoplada ao MEF para aplicação de condições de contorno em deslocamentos, considerou-se, inicialmente, a aplicação de carregamento em nós ou arestas de elementos finitos, permitindo a adoção do método de controle direto de deslocamentos, o qual considera o incremento fixo de um determinado grau de liberdade que se deseja controlar para a solução do problema. Neste caso, a solução do sistema de equações é um parâmetro nodal, para o grau de liberdade escolhido, exatamente igual ao deslocamento deste grau de liberdade, uma vez que a função de forma do EFG é nula para o nó ativo de elemento finito, como visto.

Todavia, o método de controle direto de deslocamentos em algumas situações não é capaz de obter a trajetória de equilíbrio completa ou, por exemplo, se mostra incapaz de detectar mudanças de comportamento na trajetória de equilíbrio de determinado grau de liberdade na

ocorrência de “snap-back”. Assim, é necessário recorrer a estratégias de controle mais robustas, como o método de controle de deslocamentos generalizado.

Em um segundo instante, entretanto, fez-se uma pergunta. Tendo em vista que a solução do sistema de equações consiste nos parâmetros do EFG, os quais são usados posteriormente para computar os deslocamentos nodais, e considerando uma analogia direta com o MEF, por que não usar tais parâmetros no cálculo do preditor e corretor ao invés dos deslocamentos nodais? Surgiu aí um resultado surpreendente. Para o método de controle generalizado de deslocamentos o fator de carga ao longo do processo incremental iterativo se difere muito pouco daquele calculado da forma tradicional, ou seja, via incremento de deslocamentos. Já para o método de controle direto de deslocamento, controlar parâmetro nodal correspondente a um grau de liberdade significa um incremento fixo no valor daquele parâmetro, obviamente resultando em fator de carga ligeiramente diferente, e conseqüentemente originando um deslocamento também ligeiramente diferente. Não obstante estas pequenas diferenças, o resultado importante é que a trajetória de equilíbrio de determinado grau de liberdade segue a mesma curva obtida com o método de controle direto de deslocamento tradicional. O mesmo resultado foi obtido para o método de controle de deslocamentos generalizado, bem como o método de controle do arco cilíndrico.

A proposta de modificação do algoritmo de Newton Raphson está descrita no algoritmo 6 a seguir. Neste caso, basta usar a implementação original, fazendo \mathbf{U} ser igual a \mathbf{V} , sendo que a única mudança é quando da atualização do cálculo dos deslocamentos nodais ao final de cada iteração, utilizando-se a Eq. (4.13). Os métodos de controle nesta proposta permanecem idênticos àqueles para o MEF, mas são apresentados apenas para clareza de notação.

Algoritmo 6 Método de Newton Raphson (versão proposta)Monte vetor de cargas de referência \mathbf{P} **repita****repita**Calcule matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_{j-1}^i (ver algoritmo 2 para \mathbf{K}_{j-1}^i)Resolva $\mathbf{K}_{j-1}^i \delta \mathbf{V}_j^{\mathbf{P}^i} = \mathbf{P}$ para $\delta \mathbf{V}_j^{\mathbf{P}^i}$ Resolva $\mathbf{K}_{j-1}^i \delta \mathbf{V}_j^{\mathbf{Q}^i} = \mathbf{Q}_{j-1}^i$ para $\delta \mathbf{V}_j^{\mathbf{Q}^i}$ Calcule incremento de fator de carga $\delta \lambda_j^i$ (depende do método de controle, vide tabela 4.2)Atualize $\delta \mathbf{V}_j^i = \delta \lambda_j^i \delta \mathbf{V}_j^{\mathbf{P}^i} + \delta \mathbf{V}_j^{\mathbf{Q}^i}$ Eq. (4.4)Atualize $\lambda_j^i = \lambda_{j-1}^i + \delta \lambda_j^i$ Eq. (4.10)Atualize $\mathbf{V}_j^i = \mathbf{V}_{j-1}^i + \delta \mathbf{V}_j^i$ Eq. (4.11)Calcule deslocamentos $\mathbf{U}_j^i = f(\mathbf{V}_j^i)$ Eq. (4.13)Atualize $\mathbf{Q}_j^i = \lambda_j^i \mathbf{P} - \mathbf{F}_j^i$ Eq. (4.12)

Verifique convergência Eq. (4.7) e/ou Eq. (4.8), ou Eq. (4.9)

j++

até $j \leq$ número máximo de iterações e não convergiu

i++

até $i \leq$ número máximo de passos

Tabela 4.2: Métodos de controle: proposta

Método de Controle	$\delta \lambda_j$ para $j = 1$	$\delta \lambda_j$ para $j > 1$
de carga	$\delta \lambda_1 = \text{constante}$	$\delta \lambda_j = 0$
direto de deslocamento	$\delta \lambda_1 = \frac{\delta V_{k1}^i}{\delta V_{k1}^{\mathbf{P}^i}}$	$\delta \lambda_j = -\frac{\delta V_{kj}^{\mathbf{Q}^i}}{\delta V_{kj}^{\mathbf{P}^i}}$
de deslocamento generalizado	$\delta \lambda_1 = \delta \lambda_1^1 \sqrt{\frac{\delta \mathbf{V}_1^{\mathbf{P}^1} \cdot \delta \mathbf{V}_1^{\mathbf{P}^1}}{\delta \mathbf{V}_1^{\mathbf{P}^{i-1}} \cdot \delta \mathbf{V}_1^{\mathbf{P}^i}}}$	$\delta \lambda_j = -\frac{\delta \mathbf{V}_1^{\mathbf{P}^{i-1}} \cdot \delta \mathbf{V}_j^{\mathbf{Q}^i}}{\delta \mathbf{V}_1^{\mathbf{P}^{i-1}} \cdot \delta \mathbf{V}_j^{\mathbf{P}^i}}$

Experimentos Numéricos

Diferentemente do MEF que está muito bem estabelecido no contexto de análise fisicamente não-linear, o EFG apresenta uma variedade de parâmetros que influenciam no resultado da análise. É objetivo deste capítulo identificar o impacto da escolha de alguns destes parâmetros, tais como: a geometria do domínio de influência dos nós, suas dimensões e o tipo de função peso usada, a integração numérica, a base polinomial adotada.

No contexto de análise fisicamente não-linear serão abordados a aproximação do tensor constitutivo, o processo iterativo incremental, o uso de diferentes modelos constitutivos, bem como alguns modelos de análise.

Estes aspectos serão discutidos nas seções seguintes através de alguns problemas exemplo. Ressalta-se, todavia, que alguns dos fatores acima mencionados influenciam uns nos outros, sendo que a forma de apresentação adotada visa apenas oferecer uma organização do texto.

5.1 Domínio de Suporte

O domínio de suporte em um determinado ponto no domínio, por exemplo, um ponto de integração, é construído de acordo com a geometria do domínio de influência dos nós do domínio, i.e., se tensorial ou radial, bem como da sua dimensão. Os domínios de influência dos nós não podem ser pequenos demais porque, além de eventualmente não cobrirem todo o domínio, não fornecem a quantidade mínima de nós para formar o domínio de suporte de determinado ponto de interesse, uma vez que a matriz momento (Eq. (2.16)) pode não ter inversa. Por outro lado, o domínio de influência não deve ser demasiado grande sob pena de redundar em uma análise global, bem como destruir a banda da matriz de rigidez.

Para análise fisicamente linear, vários trabalhos oferecem sugestões para a escolha destes parâmetros. Veja, por exemplo, Dolbow e Belytschko (1999), Liu (2003) e Zhuang et al. (2012). De maneira geral, a dimensão do domínio de influência é dada por $\rho = \alpha h$, onde α é um valor arbitrário adimensional, $\alpha \in [2, 4]$, e h é uma distância característica entre nós, i.e., $2h \leq \rho \leq 4h$. Esta faixa de valores para α é sugerida por resultar em menor erro entre a solução aproximada e a solução analítica. Todavia, não existe uma resposta única para a escolha de tais parâmetros, pois a variação da ordem da base polinomial, a precisão da integração numérica, entre outros fatores também têm impacto.

O que se pretende mostrar aqui é que sugestões e práticas que geralmente se aplicam em uma análise fisicamente linear, não implica, necessariamente, que funcionarão quando se realiza uma análise fisicamente não linear.

5.1.1 Painel L

Neste problema exemplo serão explorados alguns aspectos citados anteriormente. Posteriormente os resultados obtidos em laboratório serão comparados com aqueles da simulação numérica. A geometria do painel em forma de L está mostrada na Fig. 5.1. Tais ensaios em laboratório são devidos a Winkler et al. (2004). As propriedades do material são: $E_0 = 25850.0 \text{ N/mm}^2$, $f_t = 2.7 \text{ N/mm}^2$, $f_c = 31.0 \text{ N/mm}^2$, $G_f = 0.065 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0.18$, comprimento característico $h = 28 \text{ mm}$, carga distribuída $q = 28 \text{ N/mm}$. Modelo constitutivo escolhido é o de fissuração distribuída, cuja relação tensão-deformação para compressão é devida a Carreira e Chu (1985) e aquela para tração seguindo Boone et al. (1986), conforme descrito em Penna (2011). Foi adotado o método de controle de deslocamento generalizado com fator de carga inicial de 0.01, equilíbrio tangente e tolerância para convergência de 10^{-4} para a norma do vetor de forças residuais. Para a solução do EFG+MEF, a base polinomial hierárquica de 1º grau $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, xy\}$, e função peso spline cúbica foram adotadas. A

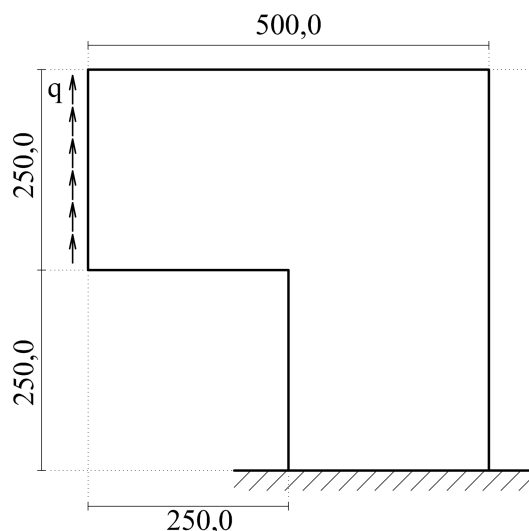


Figura 5.1: Geometria do painel L.

discretização e a malha de células de integração estão indicadas na Fig. 5.2. Esta discretização uniforme foi escolhida para facilitar a discussão pois, uma discretização ideal teria uma

configuração diferente, com uma densidade maior de nós na região de descontinuidade e uma densidade menor de nós nas regiões mais afastadas. Isto, porém, não invalida a discussão que se segue, pois a discretização usada é bastante refinada para esta análise. A Fig. 5.3 mostra as

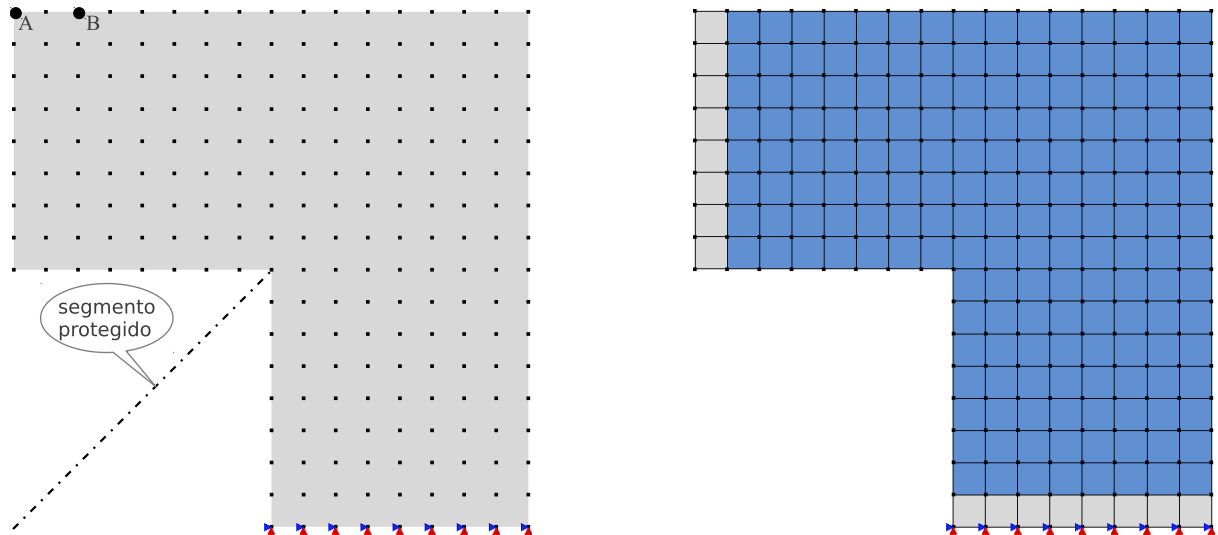


Figura 5.2: Painel L: discretização e malha de células de integração. Destacam-se na figura à direita os elementos de acoplamento em cor mais clara.

trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical do nó superior esquerdo da discretização para três valores distintos do tamanho do domínio de influência dos nós da discretização, i.e., $\rho_x = \rho_y = \rho = \{h, 2h, 3h\}$, onde $h = h_x = h_y$ considerando a geometria tensorial (ou retangular) do domínio de influência dos nós. No trecho de comportamento linear do material as curvas são muito próximas, sendo que para $\rho = 3h$ apresenta uma rigidez inicial ligeiramente inferior aos outros dois casos. Observa-se claramente que o valor da carga limite aumenta à medida que aumenta-se o tamanho da geometria do domínio de influência dos nós. Isto pode ser explicado pela natureza da aproximação não-local implícita no EFG, i.e., à medida que os nós em regiões pouco danificadas influenciam na resposta de pontos distantes localizados em regiões do domínio já danificadas, resulta em um comportamento pós-crítico mais flexível.

Com relação aos resultados experimentais, observa-se na Fig. 5.4 um comportamento um pouco mais rígido antes de atingir a carga crítica no modelo numérico. Entretanto, já no

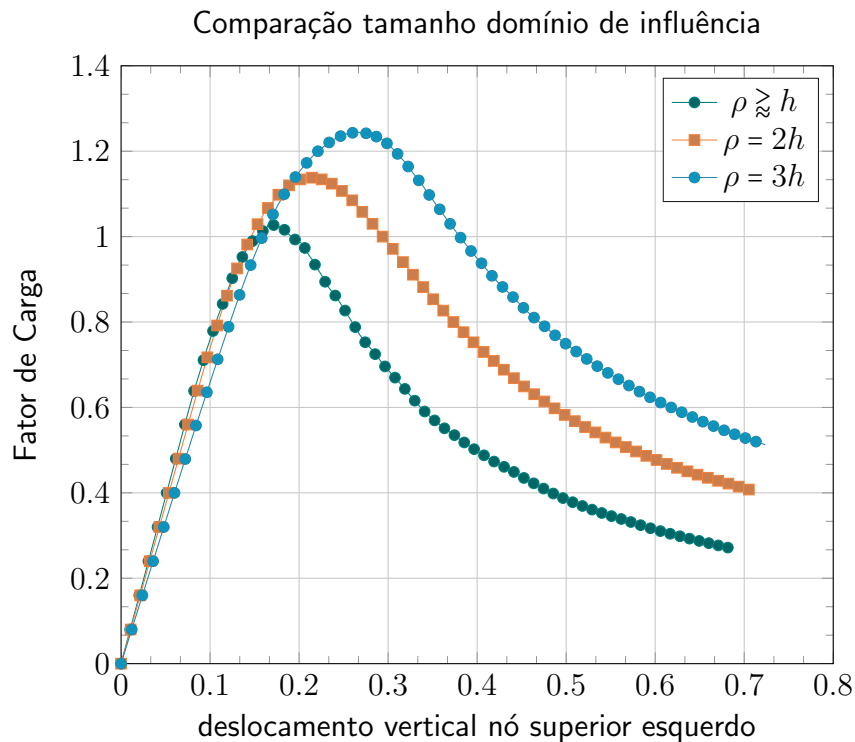


Figura 5.3: Compara tamanho domínio de influência

regime pós-crítico, a simulação numérica mostra um comportamento mais flexível para o tamanho de domínio de influência $\rho = 2h$.

A Fig. 5.5 mostra o aspecto do dano após 500 passos incrementais. À esquerda, utiliza-se o domínio de influência de todos os nós da discretização adotando-se o parâmetro $\rho_x = \rho_y = 2h$, onde h é a distância entre nós, e integração numérica com 5×5 pontos de Gauss. Ao centro, na mesma figura, adota-se $\rho_x = \rho_y = h$ e uma quadratura contendo 2×2 pontos de Gauss para a integração numérica. Neste último caso, a ordem da integração numérica foi reduzida devido ao fato de que para $\rho_x = \rho_y = h$, as funções de forma do EFG são idênticas àsquelas do MEF, portanto, bilineares. Finalmente, observe na mesma Fig. 5.5, à direita, o padrão de dano para a solução do MEF com elementos Q4, no qual nota-se a localização do dano em uma faixa única de elementos. Fica evidente que, mesmo no caso onde as funções de forma

Painel L

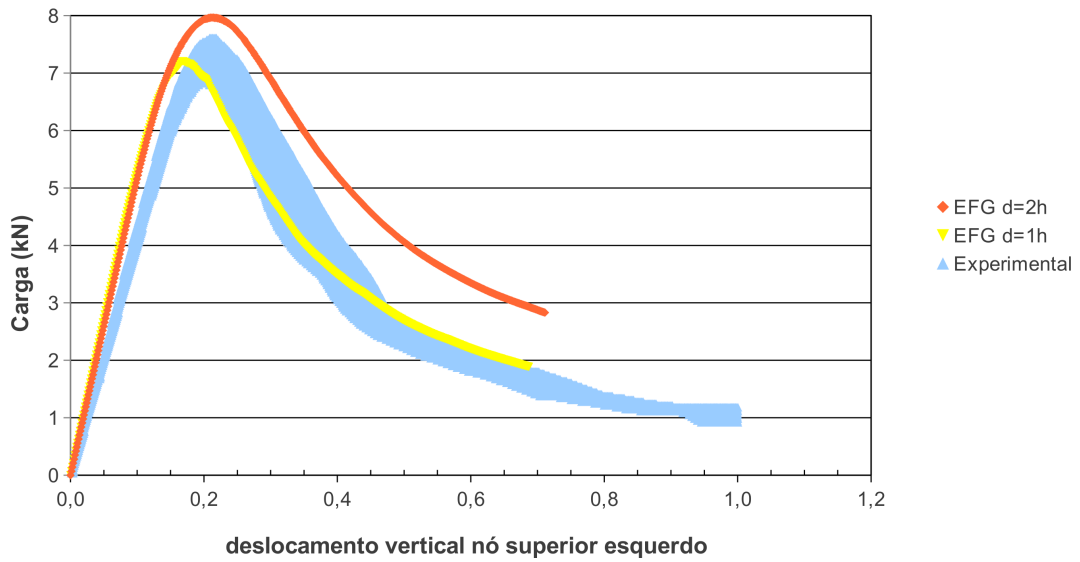


Figura 5.4: Trajetória de equilíbrio comparada aos resultados experimentais

do EFG são bilineares, portanto capazes de conter a solução do MEF, a distribuição do dano é mais espalhada, indicando, novamente, a aproximação não-local intrínseca do EFG.

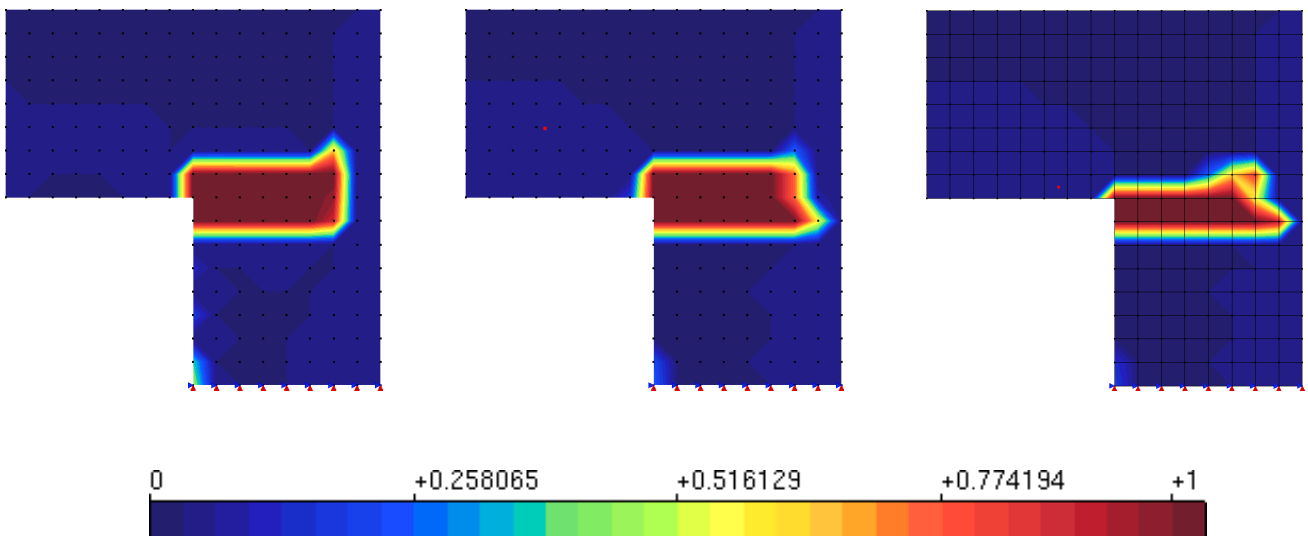


Figura 5.5: Padrão dano: esquerda, $\rho_x = \rho_y = 2h$ com 5×5 pontos de Gauss. Ao centro, $\rho_x = \rho_y = h$ com 2×2 pontos de Gauss. À direita MEF Q4 com 2×2 pontos de Gauss.

Já a Fig. 5.6 ilustra o padrão de dano experimental obtido por Winkler et al. (2004). Note que o padrão de dano na simulação numérica pelo EFG+MEF é compatível com padrão de dano observado experimentalmente.

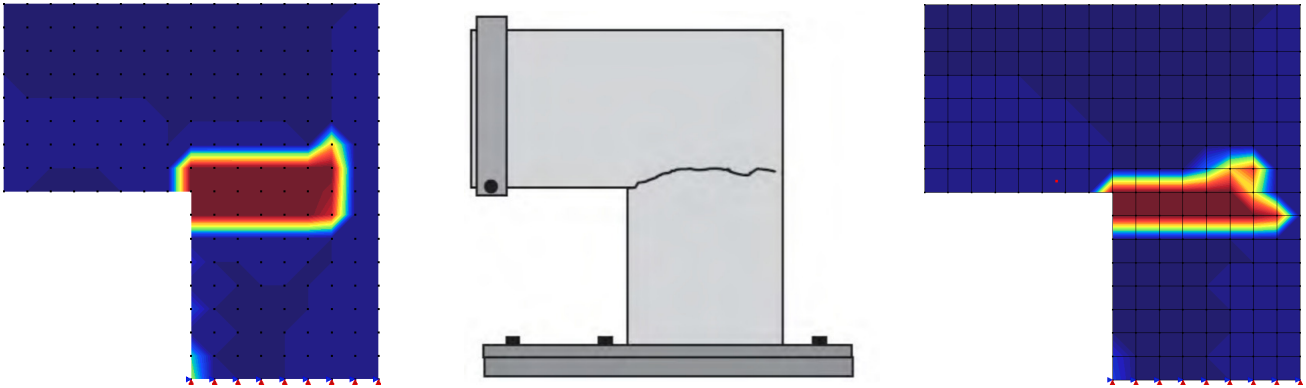


Figura 5.6: Aspecto de dano: à esquerda, EFG+MEF $\rho_x = \rho_y = 2h$ com 5×5 pontos de Gauss, ao centro padrão experimental, à direita MEF Q4 com 2×2 pontos de Gauss. Imagem central adaptada de Penna (2011).

5.2 Integração Numérica

A Fig. 5.7 ilustra resultado paradoxal encontrado quando utiliza-se a mesma distribuição de nós, fixando-se agora para o EFG+MEF o tamanho do domínio de influência de cada nó para $\rho_x = \rho_y = 2h$, e variando-se a densidade de pontos de Gauss para 2×2 , 5×5 e 8×8 . Para este caso, os resultados obtidos diferem pouco entre si quanto à variação da ordem de integração e obtenção da carga crítica. Note que, fixando-se o tamanho do domínio de influência, neste

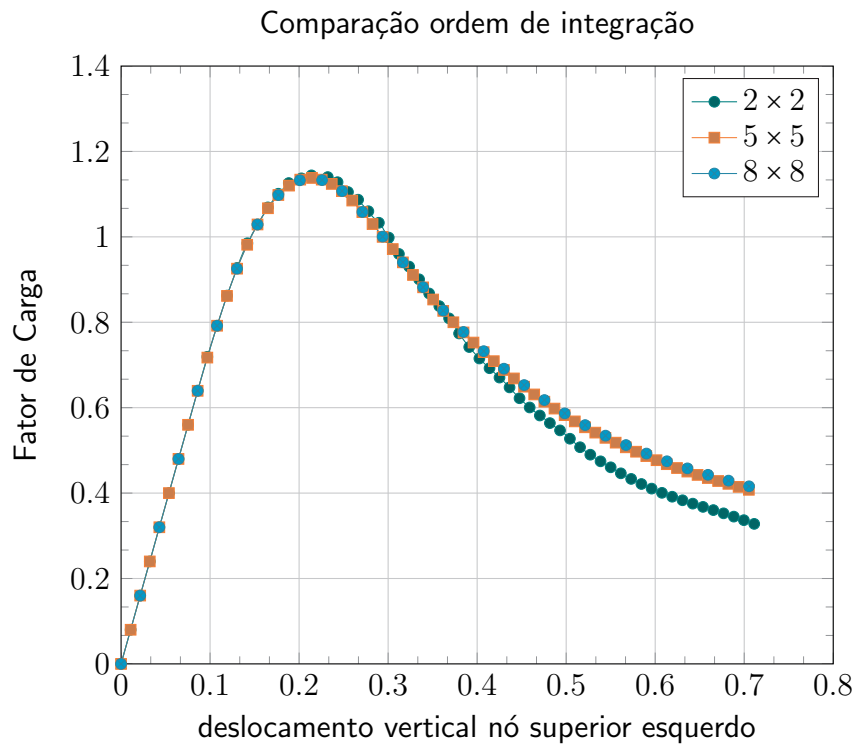


Figura 5.7: Compara ordem de integração com $\rho = 2h$

caso em $\rho = 2h$, e variando-se a quantidade de pontos de integração, verifica-se a tendência de convergência da solução. Este é um fator importante que indica a necessidade, assim como no MEF, da realização de um estudo prévio de convergência antes da definição dos parâmetros do EFG para análise fisicamente não linear.

5.3 Base Polinomial

O mesmo painel em forma de L é agora analisado com a mesma distribuição de nós. Todavia, adota-se neste caso uma aproximação polinomial de grau 2, sendo $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, xy, x^2, x^2y, y^2, yx^2, x^2y^2\}$. A ordem de integração adotada é 6×6 e $\rho_x = \rho_y = \{2h, 3h\}$. A discretização e a malha de células de integração estão indicadas na Fig. 5.8. Ressalta-se

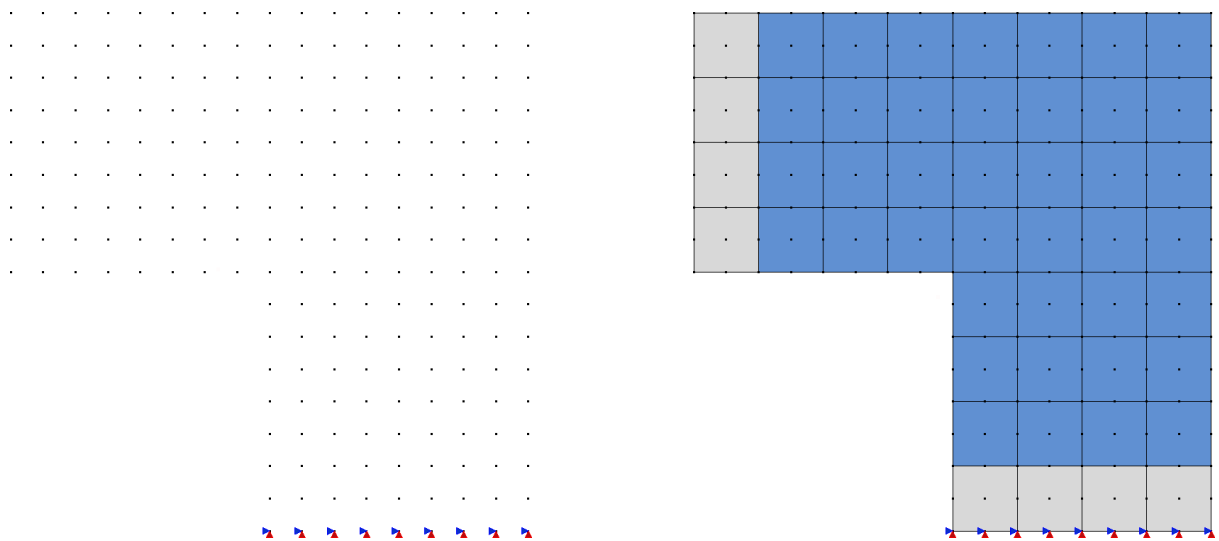


Figura 5.8: Painel L: discretização e malha de células de integração. Destacam-se na figura à direita os elementos de acoplamento em cor mais clara.

neste caso que, como a aproximação adotada é quadrática, é necessário que o elemento de acoplamento seja capaz de reproduzir o mesmo espaço de funções do EFG. Então, o elemento finito de acoplamento usado aqui é do tipo Q9. Outra observação importante é relativa à quantidade de nós dentro do domínio de suporte de um ponto no domínio do problema. Para a aproximação quadrática usada, são necessários no mínimo 9 nós para o cálculo da matriz momento ou, equivalentemente, para a definição dos coeficientes do polinômio considerado. Assim, o tamanho mínimo do domínio de influência dos nós é equivalente a $\rho = 2h$ para a distribuição nodal indicada na Fig. 5.8.

A trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do nó superior esquerdo está mostrada na Fig. 5.9. A título de comparação, incluiu-se também a solução do mesmo problema utilizando-se uma malha de elementos finitos Q9, e ordem de integração 6×6 , a mesma usada no EFG. Novamente observa-se uma mudança de comportamento quando o tamanho do domínio de influência é aumentado. Todavia, a variação do valor da carga limite é menor. Note que as curvas para o MEF e para o EFG com $\rho = 2h$ são bem próximas, como esperado, pois o tamanho do domínio de influência é o mínimo necessário para a obtenção da inversa da matriz momento. Observa-se também que a solução do EFG é um pouco mais flexível à medida que aumenta-se o tamanho do domínio de influência.

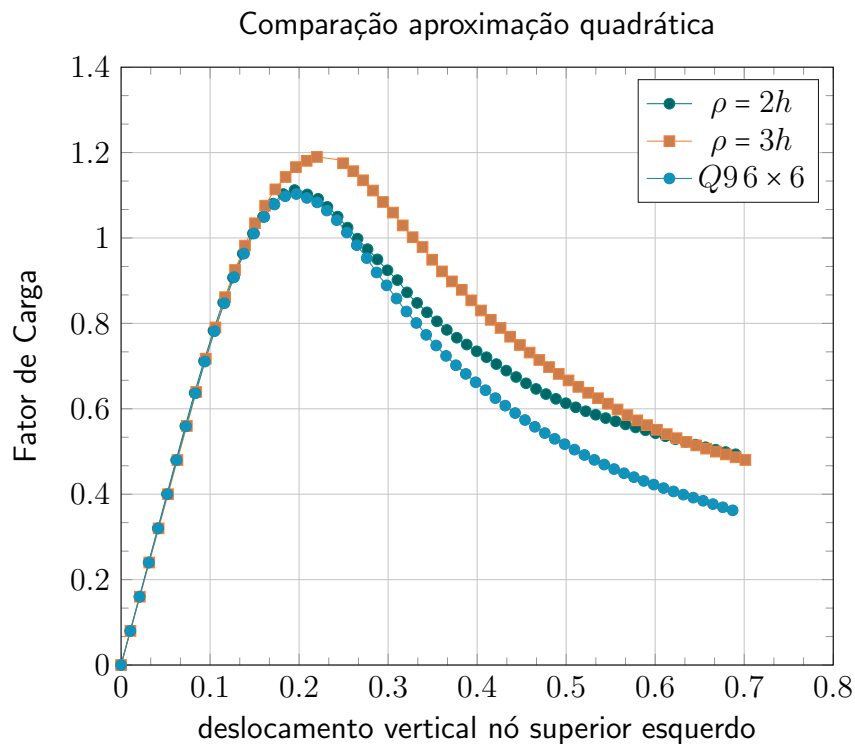
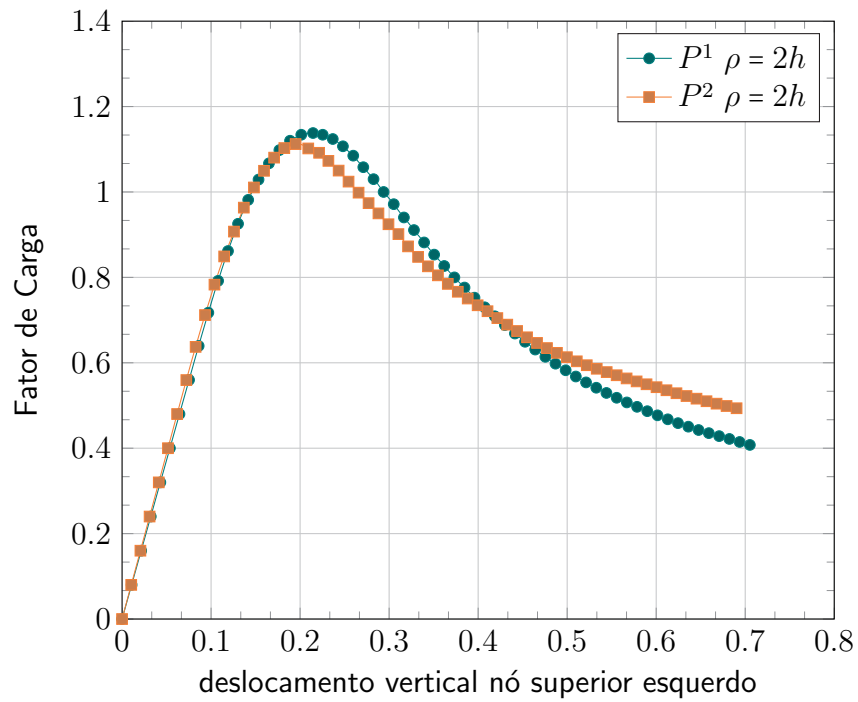
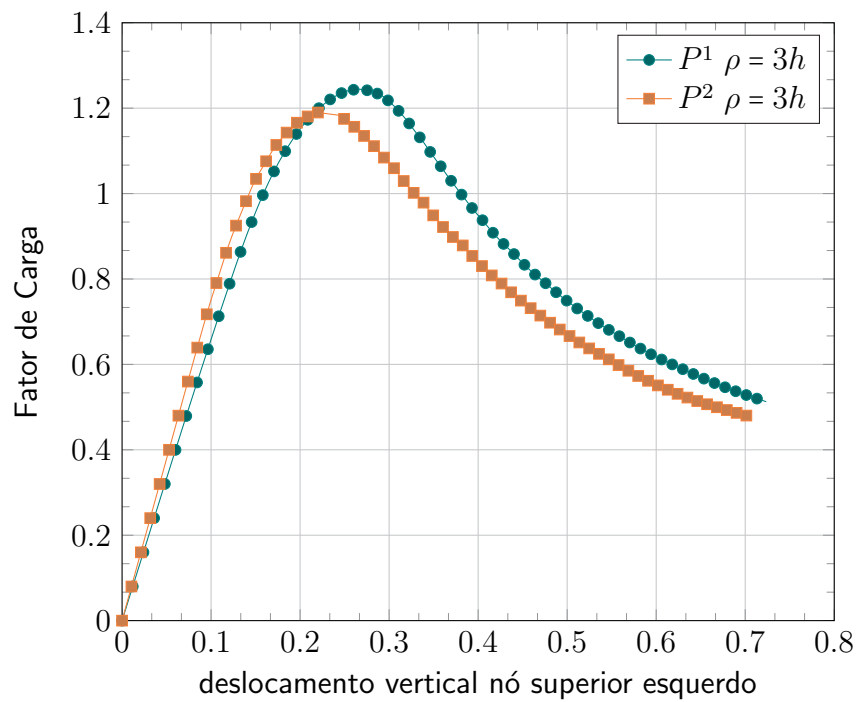


Figura 5.9: Compara aproximação quadrática

Analisando-se os gráficos nas figuras 5.10 e 5.11, constata-se que, para o exemplo em tela, a mudança da base de polinômios usada teve menor influência do que a variação do tamanho do domínio de influência.

Figura 5.10: Comparação da aproximação linear e quadrática para $\rho = 2h$ Figura 5.11: Comparação da aproximação linear e quadrática $\rho = 3h$

5.4 Processo Iterativo Incremental

Esta seção visa comparar os resultados de trajetória de equilíbrio obtidas a partir do cálculo do preditor e corretor da forma tradicional, i.e, baseado em deslocamentos, e da forma proposta neste trabalho. Ver seções 4.2 e 4.4.

O primeiro exemplo a ser estudado é o painel em forma de L, para o qual a trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do nó superior esquerdo (nó *A* indicado na Fig. 5.2) será obtida através de diferentes métodos de controle, i.e., controle direto de deslocamento (CDD), controle de deslocamento generalizado (CDG) e controle do comprimento do arco cilíndrico (CAC). O fator de carga inicial de 0.01 foi utilizado para os métodos CDG e CAC, e para o método CDD optou-se por controlar o deslocamento vertical/parâmetro correspondente do nó *B* (mostrado na Fig. 5.2), com incrementos constantes de valor 1.2×10^{-3} mm.

A escolha do nó *B* para o controle direto de deslocamento/parâmetro se justifica para possibilitar a comparação entre as formas de cálculo do preditor e corretor, uma vez que o referido nó não está associado a qualquer elemento finito de acoplamento. Assim, os valores (\mathbf{V}) da solução do sistema de equações correspondentes a este nó não serão iguais aos valores dos deslocamentos nodais (\mathbf{U}) associados ao mesmo. A única exceção seria no caso de $\rho = h$, quando coincidiria com a solução do MEF, como já visto.

Em todos os casos foi adotado equilíbrio tangente e tolerância para convergência de 10^{-4} para a norma do vetor de forças residuais. Para a solução do EFG+MEF utilizou-se base polinomial hierárquica de 1º grau $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, xy\}$, 5×5 pontos de integração e função peso spline cúbica.

A Fig. 5.12 ilustra a trajetória de equilíbrio já citada considerando-se o tamanho do domínio de influência $\rho = 3h$, e utilizando-se a forma em deslocamentos do cálculo do preditor e do corretor. Este valor para ρ foi escolhido como forma de realçar a diferença entre o parâmetro (\mathbf{V}), solução do sistema de equações, e o deslocamento (\mathbf{U}).

Como pode ser notado, os vários métodos de controle resultam em curvas praticamente idênticas, embora os pontos não sejam os mesmos. A Fig. 5.13 considera as mesmas trajetórias

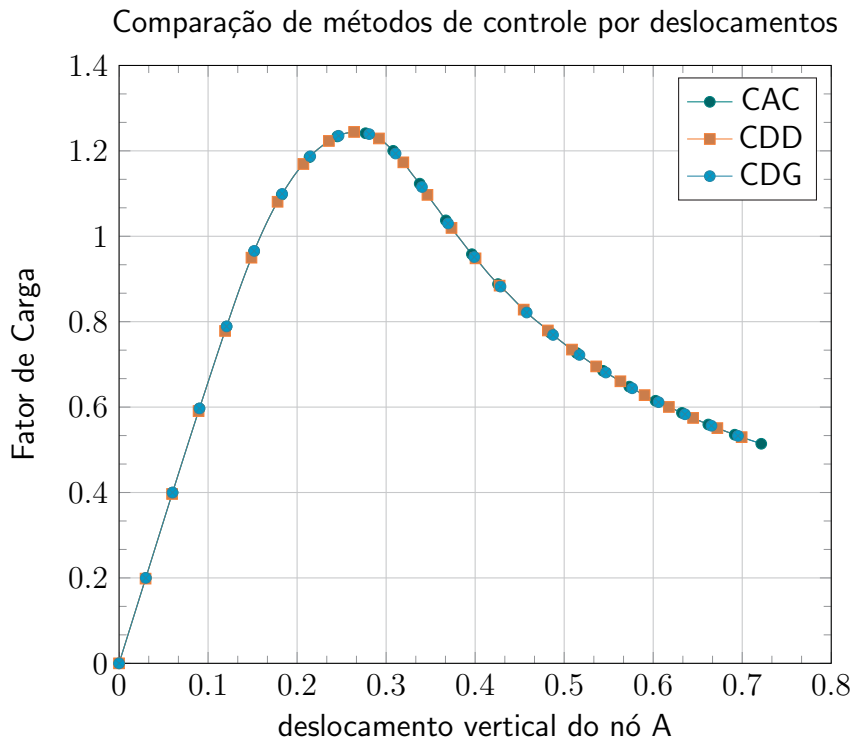


Figura 5.12: Compara métodos de controle tradicional (por deslocamentos)

obtidas via controle de parâmetros. Novamente as trajetórias têm a mesma forma, embora formada por pontos distintos.

A Fig. 5.14 compara as trajetórias de equilíbrio obtidas pelo método de controle direto de deslocamento (CDD) utilizando-se controle por deslocamento e controle por parâmetros. Ressalta-se que o controle do deslocamento ou parâmetro é feito pelo nó B , e as trajetórias de equilíbrio

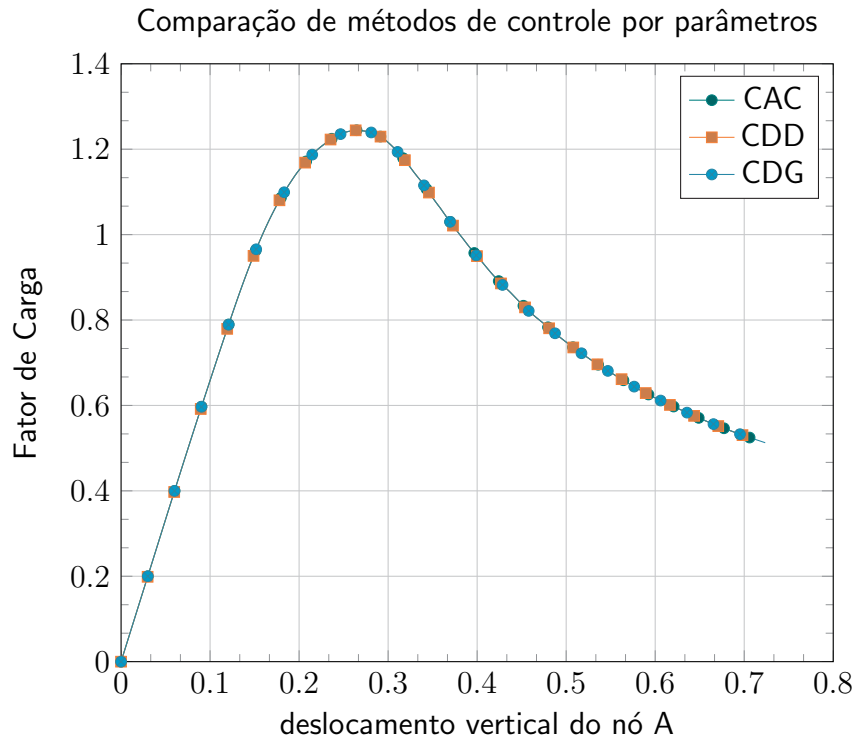


Figura 5.13: Compara métodos de controle utilizando-se parâmetros

referem-se ao nó A na Fig. 5.14 e ao nó B na Fig. 5.15. As trajetórias têm a mesma forma, como pode ser notado, embora não tenham os mesmos pontos. Entretanto, não é possível perceber esta diferença visualmente, pois os valores de deslocamentos obtidos são muito próximos uns dos outros, mesmo sendo resultado de duas formas de cálculo distintas.

A Tabela 5.1 mais adiante mostra claramente que, sendo o nó A um nó ativo de elementos finitos, a função de forma do EFG é nula neste ponto e, portanto, a solução do sistema de equações é um parâmetro (v_y) cujo valor é o próprio deslocamento nodal (u_y). Outro aspecto a ser ressaltado é a distinção entre controle por deslocamento e controle por parâmetro. Para facilitar a exposição, usar-se-á o método de controle direto de deslocamentos, no qual incrementos constantes de deslocamentos são impostos a cada passo j de carregamento. A Tabela 5.2 ilustra, para alguns passos de carga, j , os valores obtidos para o deslocamento vertical do nó B (u_y), assim como o parâmetro (v_y) de EFG associado ao mesmo. Na

Comparação controle por deslocamento × controle por parâmetro (CDD)

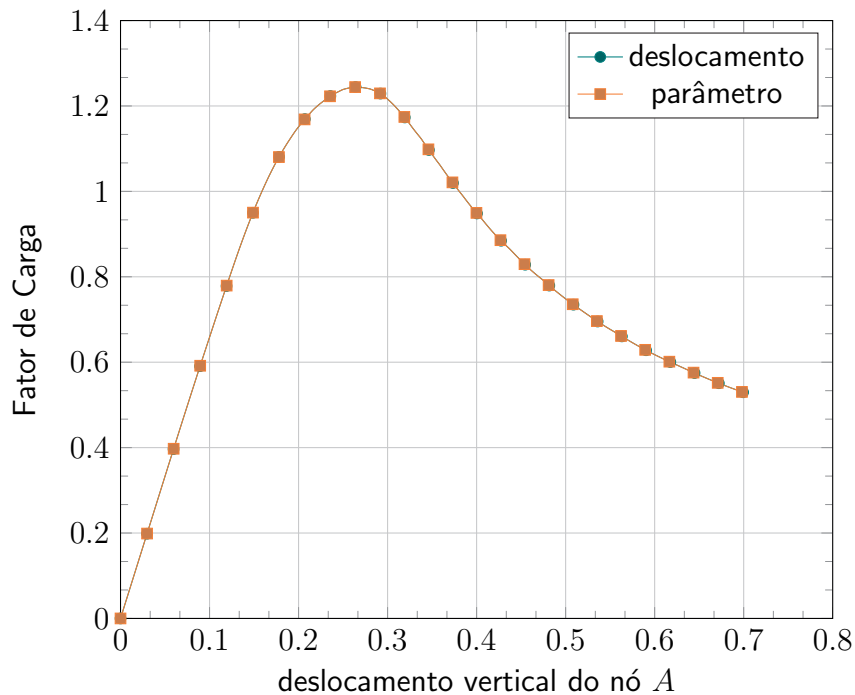


Figura 5.14: Compara controle por deslocamento × controle por parâmetro (CDD) nó A

segunda coluna nota-se a variação constante de v_y e o valor de deslocamento correspondente a esta solução imposta. Por outro lado, a quarta coluna da mesma tabela mostra a variação constante imposta ao deslocamento u_y , e o parâmetro v_y obtido para atender a esta restrição.

A Fig. 5.16 ilustra a comparação da trajetória de equilíbrio para o nó A, obtida pelo método de controle comprimento do arco cilíndrico (CAC), via controle por deslocamento e controle por parâmetro. Novamente observa-se trajetórias com a mesma forma, entretanto formada por pontos distintos. A Fig. 5.17 ilustra a comparação da trajetória de equilíbrio para o nó B, obtida da mesma forma que no caso ilustrado na figura anterior.

Os resultados mostrados nesta seção indicam claramente a equivalência na obtenção das trajetórias de equilíbrio através de 3 métodos de controle diferentes, quer usando o controle por

Tabela 5.1: Comparação da trajetória de deslocamentos do nó A (CDD)

passo	controle por parâmetro		controle por deslocamento	
	v_y	λ_j	v_y	λ_j
j	u_y		u_y	
1	0.001492314577	0.009938574690	0.001489249168	0.009918159557
	0.001492314577		0.001489249168	
2	0.002984629155	0.019877149389	0.002978498336	0.019836319121
	0.002984629155		0.002978498336	
3	0.004476943732	0.029815724114	0.004467747503	0.029754478712
	0.004476943732		0.004467747503	
4	0.005969258309	0.039754298893	0.005956996671	0.039672638357
	0.005969258309		0.005956996671	
...	
499	0.696690763300	0.531469680817	0.697991480100	0.530614519466
	0.696690763300		0.697991480100	
500	0.698051942600	0.530463765696	0.699355910100	0.529608641822
	0.698051942600		0.699355910100	

Tabela 5.2: Comparação da trajetória de deslocamentos do nó B (CDD)

passo	controle por parâmetro		controle por deslocamento	
	v_y	λ_j	v_y	λ_j
j	u_y		u_y	
1	0.0012	0.009938574690	0.001197535043	0.009918159557
	0.001202470031		0.0012	
2	0.0024	0.019877149389	0.002395070086	0.019836319121
	0.002404940062		0.0024	
3	0.0036	0.029815724114	0.003592605129	0.029754478712
	0.003607410093		0.0036	
4	0.0048	0.039754298893	0.004790140172	0.039672638357
	0.004809880124		0.0048	
...	
499	0.5980	0.531469680817	0.599943878000	0.530614519466
	0.597657561600		0.5980	
500	0.6000	0.530463765696	0.601146739000	0.529608641822
	0.598854714600		0.6000	

deslocamentos, quer usando o controle por parâmetros, como proposto nesta tese (vide seção 4.4).

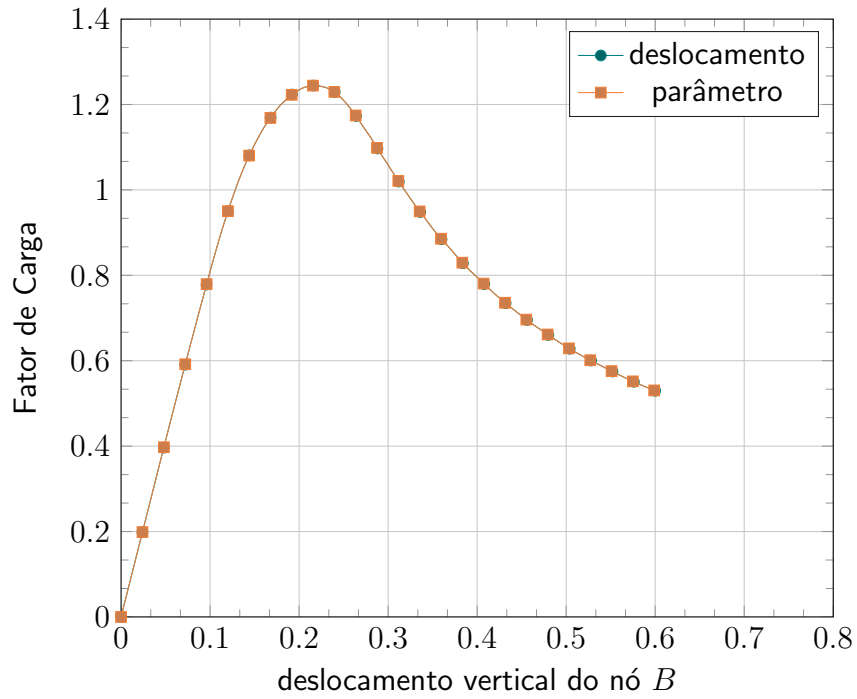


Figura 5.15: Comparação do controle de deslocamento × controle por parâmetro (CDD) nó *B*

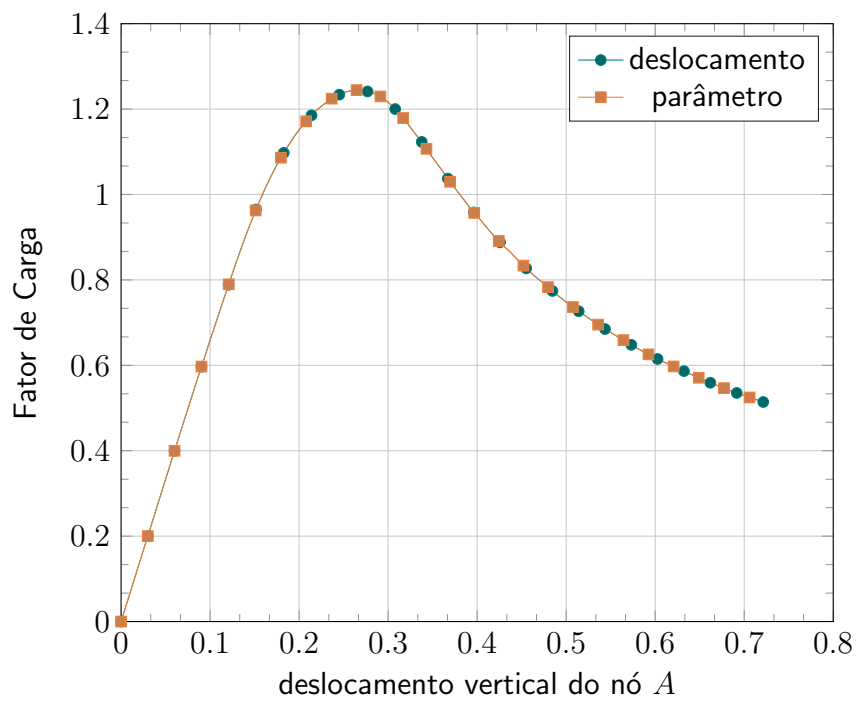


Figura 5.16: Comparação do controle por deslocamento × controle por parâmetro (CAC) nó *A*

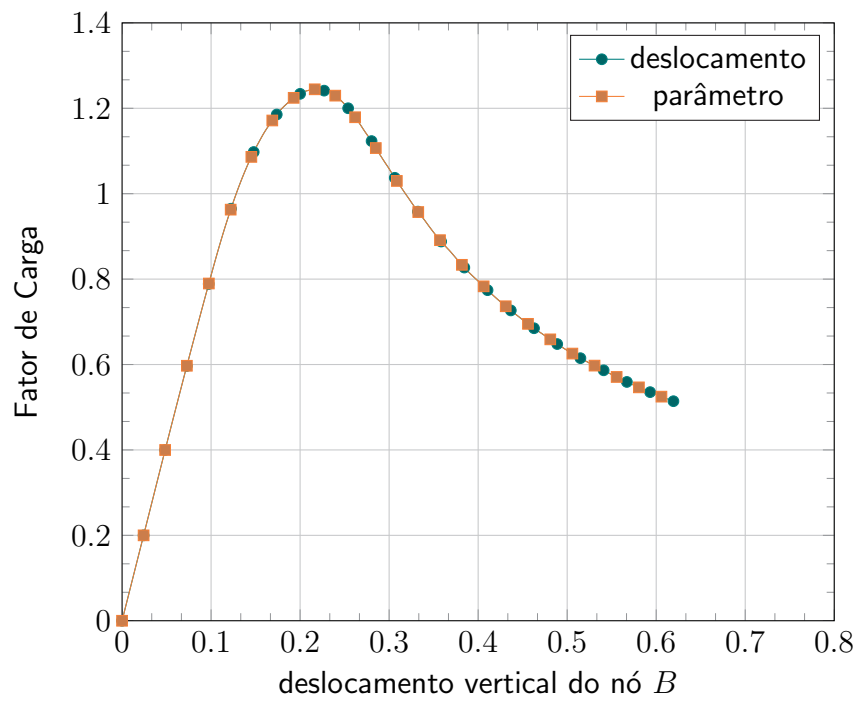


Figura 5.17: Comparação do controle por deslocamento \times controle por parâmetro (CAC) no nó B

5.5 Aproximação do Tensor Constitutivo

Muitos modelos constitutivos para o concreto, como por exemplo o modelo de dano isotrópico de Mazars (1984), são formulados utilizando-se o tensor constitutivo secante E_{ijkl}^s para a análise fisicamente não linear. O *framework* proposto por Penna (2011) fornece tanto o tensor constitutivo tangente E_{ijkl}^t , quanto o secante E_{ijkl}^s . O exemplo a seguir ilustra a utilização de ambos.

5.5.1 Chapa Tracionada

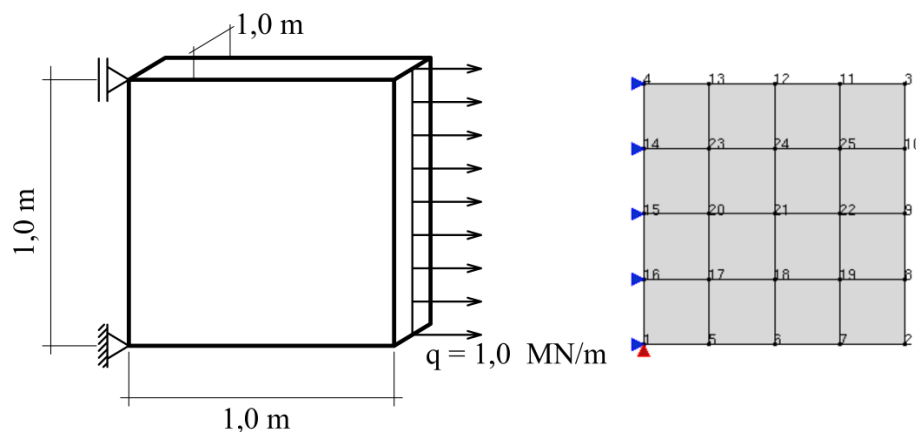


Figura 5.18: Geometria chapa tracionada, discretização com 16 células de integração / 25 nós

Propriedades do material: $E = 2 \times 10^4$ MPa, Poisson $\nu = 0,2$. Modelo de dano de Mazars Mazars (1984): $\alpha_t = 0,95$; $\beta_t = 10^4$; $\alpha_c = 1,0$; $\beta_c = 3 \times 10^3$; $\kappa_0 = 1 \times 10^{-4}$; Controle de deslocamento generalizado fator de carga inicial de 0.1, com tolerância para convergência no valor de 10^{-4} na norma do vetor de forças residuais. Base polinomial do tipo hierárquica de grau 1, $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, xy\}$, e função peso spline cúbica foi usada. O tamanho do domínio de influência é igual a $\rho = 2h$.

Foi considerado um modelo discreto consistindo de 64 células de integração e 81 nós, para os quais obteve-se a trajetória de equilíbrio para três situações nas quais variou-se a ordem da integração numérica (5×5 e 10×10), bem como utilizou-se equilíbrio tangente e secante. As referidas trajetórias são mostradas na Fig. 5.19.

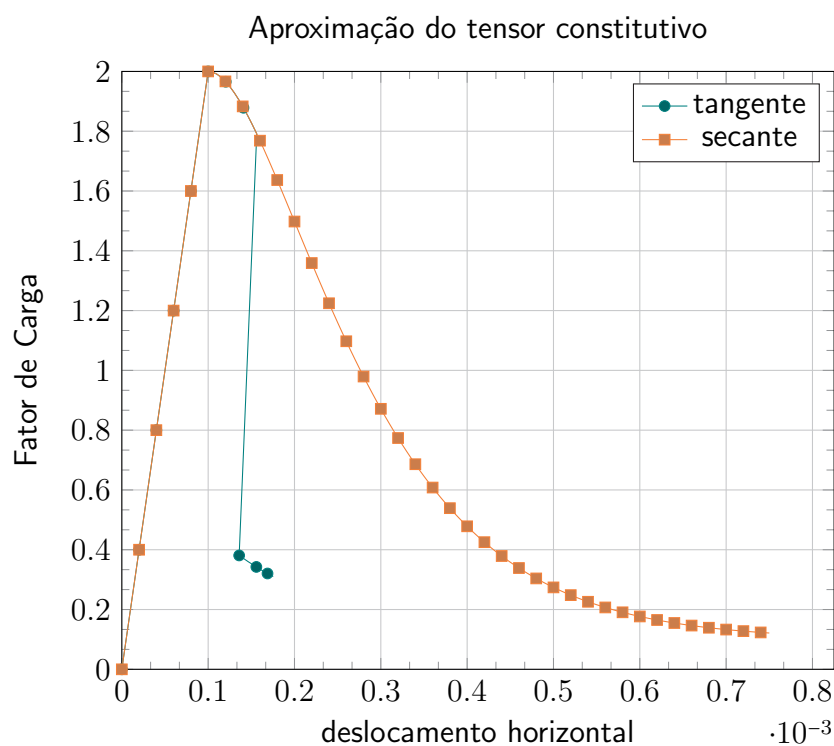


Figura 5.19: Aproximação do tensor constitutivo

Era de se esperar que quanto maior fosse a ordem de integração, mais preciso seria o resultado e, em princípio, a obtenção completa da trajetória de equilíbrio seria natural. Todavia, com o modelo constitutivo de Mazars utilizado nesta simulação não foi possível obter convergência para equilíbrio tangente, indicando localização de deformações numericamente induzidas, o que fica evidenciado analisando-se na Fig. 5.19 as curvas para equilíbrio secante e tangente, usando para ambas o mesmo esquema de integração numérica, i.e., 10×10 pontos de Gauss.

Com relação à precisão dos resultados em função da ordem de integração numérica, aquela de menor ordem não convergiu dentro do limite de 200 iterações em cada passo de carga, não ultrapassando o ponto limite de carga. A Fig. 5.20 mostra a distribuição de deformação normal ϵ_{xx} nos passos de carga anterior e imediatamente posterior à ocorrência de localização de deformações numericamente induzidas. A Fig. 5.21 mostra a distribuição da variável de

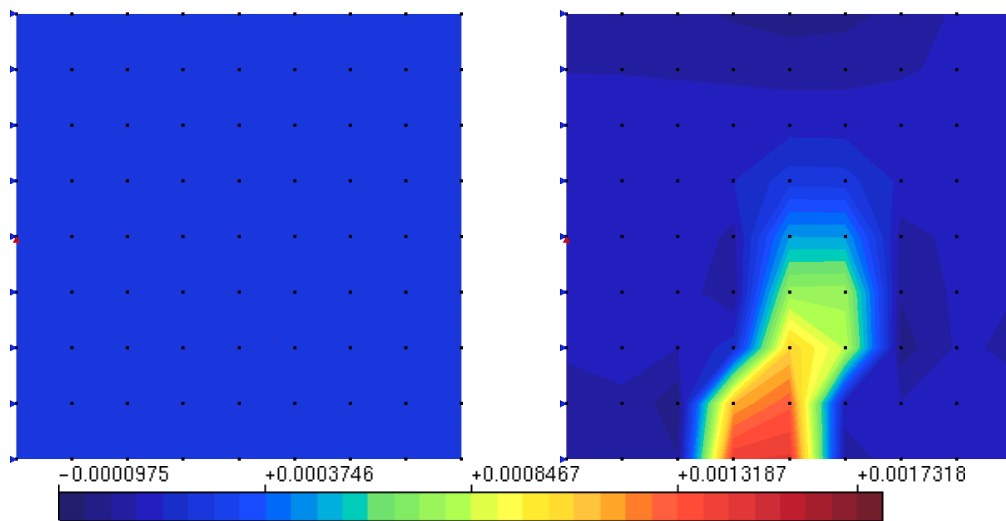


Figura 5.20: Distribuição da deformação normal ϵ_{xx} nos passos de carga anterior e imediatamente seguinte à ocorrência de localização de deformações numericamente induzida.

dano, segundo o modelo constitutivo usado, correspondente ao estado de deformação normal ϵ_{xx} mostrado na Fig. 5.20.

Para este modelo constitutivo o EFG mostrou os mesmos problemas de localização de deformações numericamente induzidas que ocorre no MEF, quando utiliza-se o tensor constitutivo tangente. Todavia, esta é uma característica deste modelo constitutivo em particular, como é ressaltado pelo autor Mazars (1984).

Para este problema, que tem resposta linear em deslocamentos, foi necessário recorrer a integração numérica com muitos pontos de Gauss, mesmo com equilíbrio secante. Uma vez que, mesmo com a base polinomial usada contendo os termos para a solução exata do problema,

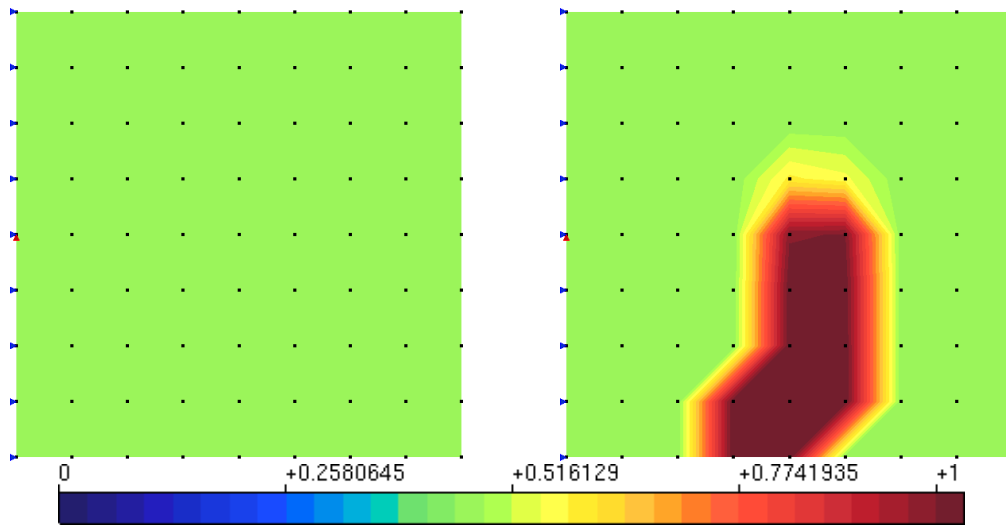


Figura 5.21: Distribuição do dano nos passos de carga anterior e imediatamente após a ocorrência de localização de deformações numericamente induzida.

o EFG não foi capaz de representar toda a trajetória de equilíbrio esperada, que só foi obtida recorrendo-se a esquema de integração numérica de ordem mais elevada.

5.6 Diferentes Modelos de Análise

A fim de ilustrar a possibilidade de utilização de outros modelos de análise, nesta seção alguns problemas exemplo como análise 3D e problemas em estado plano de tensão (EPT) são apresentados. Outro objetivo é validar o *framework* de modelos constitutivos para concreto.

5.6.1 Barra 3D

Este exemplo objetiva obter a trajetória de equilíbrio do nó *A* indicado na Fig. 5.22. A barra tem 3 m de comprimento, seção transversal quadrada de lados unitários, estando submetida a uma carga de tração uniformemente distribuída sobre a extremidade direita de valor 2 MPa. O modelo constitutivo adotado é aquele proposto por Mazars (1984) sendo o módulo de elasticidade longitudinal $E_0 = 2 \times 10^4$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$, $\alpha_t = 0.7$, $\beta_t = 10^4$, $\alpha_c = 1.0$, $\beta_c = 3 \times 10^3$, $\kappa_0 = 1 \times 10^{-4}$. A tolerância para verificação da convergência é de 1×10^{-4} para a norma do vetor de forças residuais, considerando a aproximação secante do tensor constitutivo. A base polinomial do tipo hierárquica de grau 1, $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, z, xy, xz, yz, xyz\}$, e função peso spline cúbica foram usadas. O número máximo de passos de carga é 200, e o método de controle de deslocamentos generalizado com fator de carga inicial de 2×10^{-2} são escolhidos. A integração numérica considerada de $5 \times 5 \times 5$ pontos de Gauss e tamanho do domínio de influência igual a $\rho_x = 2h$, $\rho_y = \rho_z = h$. A Fig. 5.23 mostra a trajetória de equilíbrio desejada.

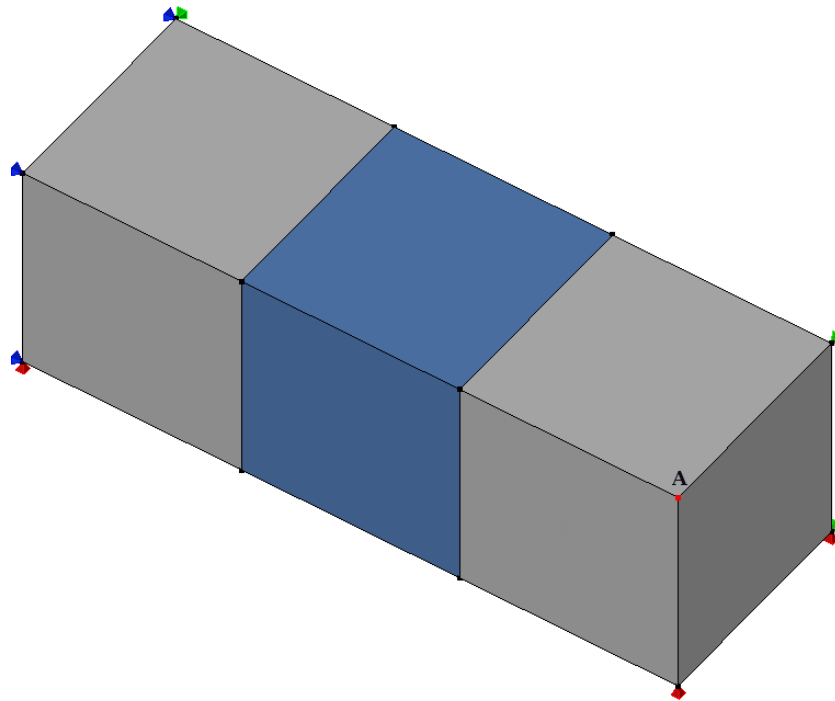


Figura 5.22: Discretização barra 3D. Note as células de integração nas extremidades.

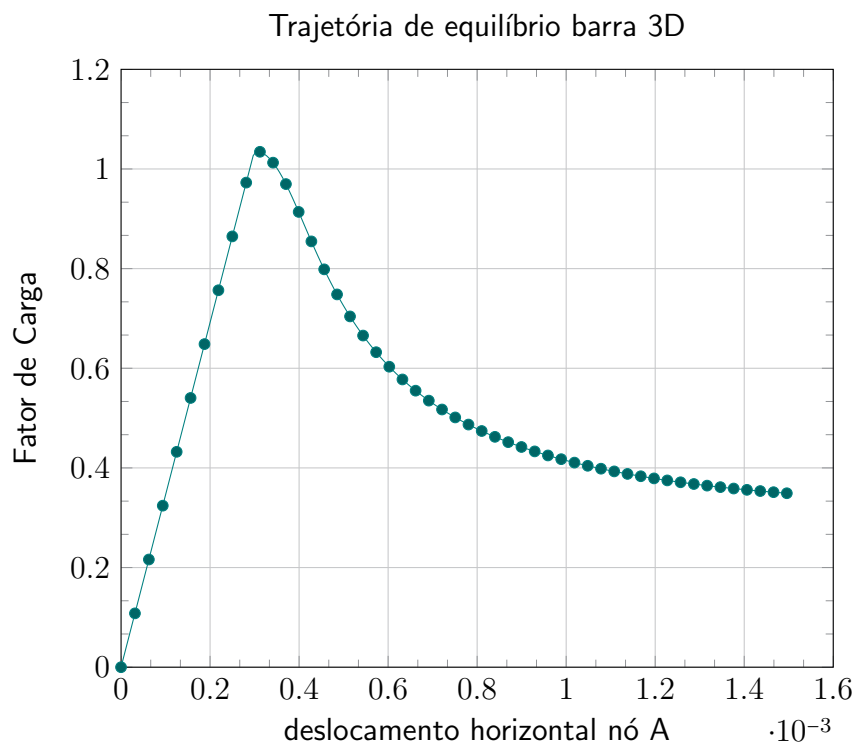


Figura 5.23: Trajetória de equilíbrio do deslocamento horizontal do nó A.

5.6.2 Viga Alta

Neste exemplo, a viga de 30 cm de espessura ilustrada na figura 5.24 foi analisada considerando-se estado plano de tensão (EPT). Aproximação linear e quadrática foram consideradas. O comportamento do material segue as leis de Carreira e Chu (1985, 1986), para tração e para compressão com: $E_0 = 20000$ MPa, $f_c = 20$ MPa, $f_t = 2.0$ MPa, $\varepsilon_c = 0.0011$ e $\varepsilon_t = 0.0002$. Para a análise não linear, foi utilizado o método de controle de comprimento de arco cilíndrico para o modelo de análise com fator de carga inicial de 0.005 e tolerância para a convergência de 1×10^{-4} para a norma do vetor de cargas residuais. Para a base polinomial linear ($P^1 = \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, xy\}$), o domínio de influência $\rho = 2h$ e integração numérica com 5×5 pontos de Gauss foram adotados. No caso da base polinomial quadrática ($P^2 = \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2\}$) foram escolhidos 8×8 pontos de Gauss para integração numérica e $\rho = 3h$ para o tamanho do domínio de influência. Em todos os casos função peso spline cúbica foi adotada. A Fig. 5.25 ilustra a discretização, as condições de apoio e o nó

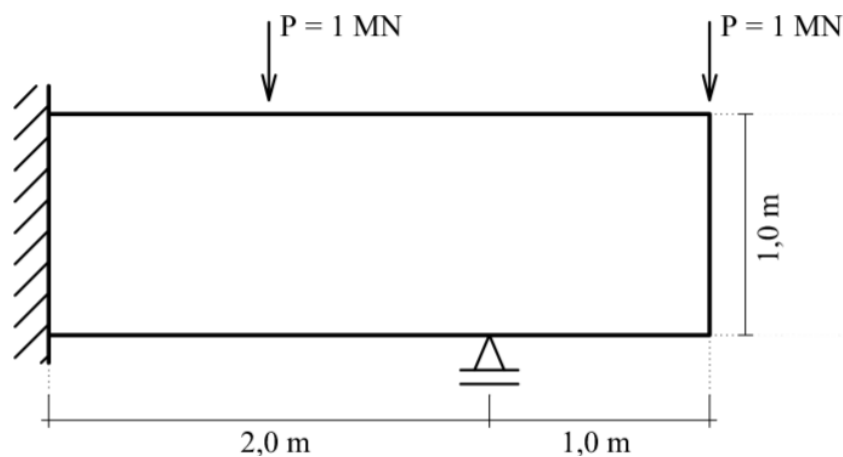


Figura 5.24: Geometria viga alta com balanço

A para o qual a trajetória de equilíbrio será obtida. A malha de células de integração para a aproximação quadrática está mostrada na Fig. 5.26. Note os elementos de acoplamento (mais claros) nos locais onde cargas e condições de apoio são aplicadas. Ressalta-se que o carregamento na extremidade livre foi aplicado sobre as arestas dos elementos finitos de aco-

plamento considerando uma variação parabólica na altura da viga, e cuja resultante é 1 MN. A outra carga concentrada foi modelada como uma carga distribuída triangular. A figura

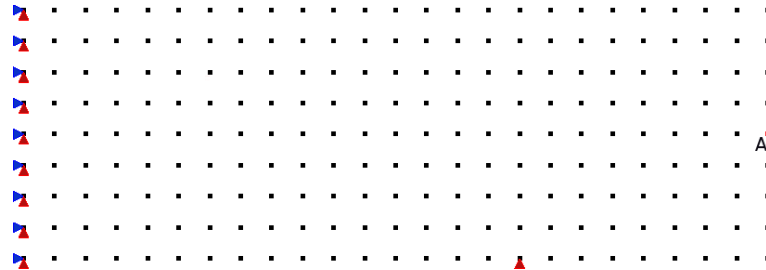


Figura 5.25: Discretização viga alta

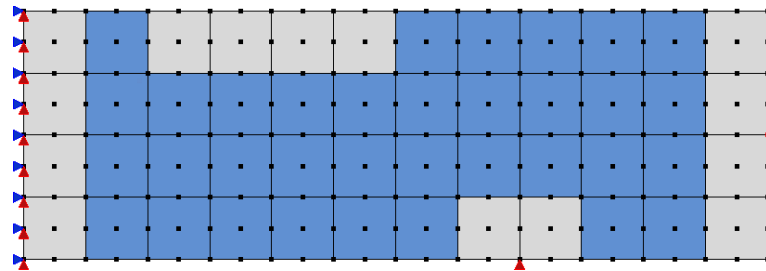


Figura 5.26: Malha de células de integração viga alta

5.27 apresenta as trajetórias de equilíbrio do nó *A* na extremidade livre do balanço.

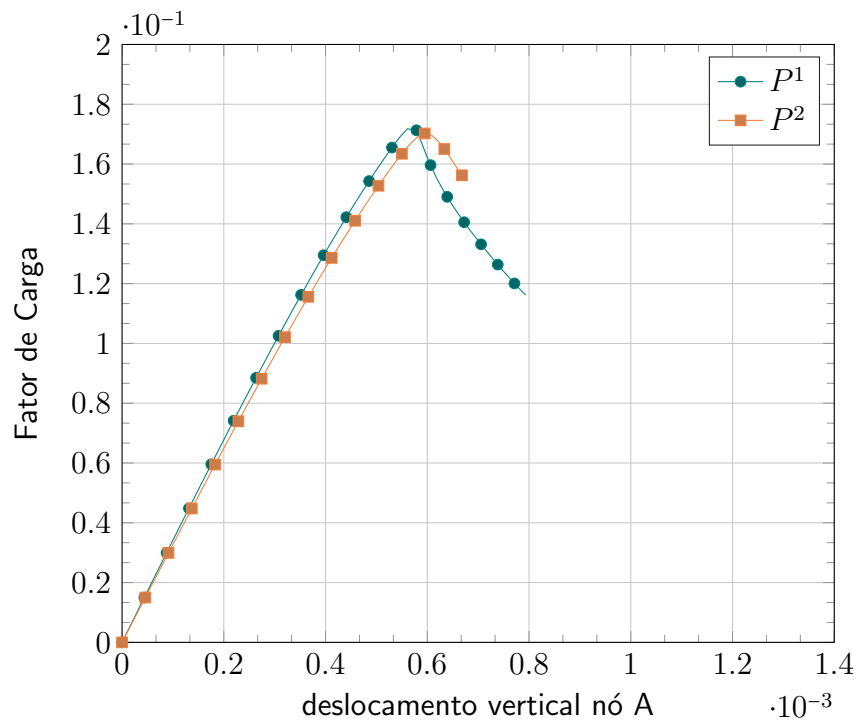


Figura 5.27: Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do nó A (EPT).

5.6.3 Viga Com Defeito Inicial

Neste exemplo, uma viga biapoiada é modelada com uma discretização correspondente a uma malha de elementos finitos Q8. A configuração geométrica, o carregamento, as condições de contorno e a malha de células de integração são mostradas na Fig. 5.28. Foi adotado o modelo

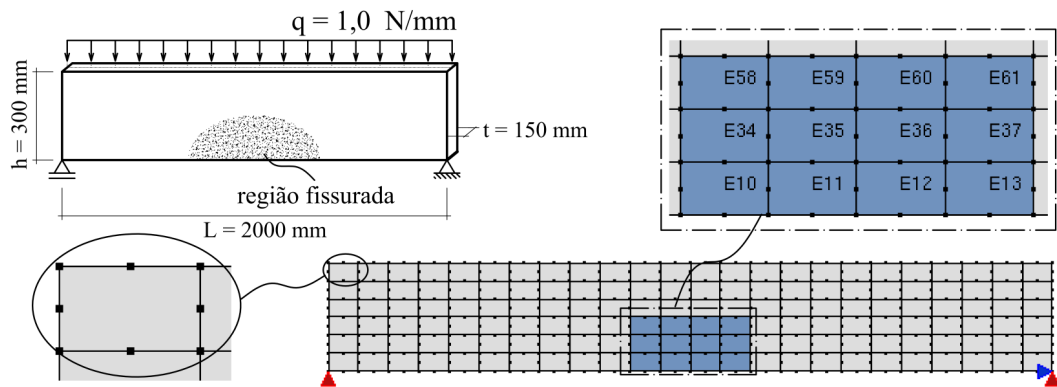


Figura 5.28: Viga com defeito: Geometria e discretização

de dano isotrópico com deformação equivalente de Mazars (1984) e variação exponencial do dano. A fim de simular uma região fissurada no centro do vão, como mostrado na Fig. 5.28, foi utilizada uma propriedade do material diferente, correspondente à região fissurada, assumindo a perda de resistência devido à degradação do material. Considerou-se módulo de elasticidade de $2 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson de 0.2 e função de dano com $\alpha = 1$, $\beta = 1500$ e $\kappa_0 = 10^{-4}$, e na região fissurada assumiu-se o valor de κ_0 reduzido para 8×10^{-5} . Função peso spline cúbica foi usada e tamanho do domínio de influência $\rho = 2.1h$ foi escolhido. Base polinomial quadrática ($P^2 = \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2\}$), foi adotada. Integração numérica com 6×6 pontos de Gauss. O método de controle de deslocamentos generalizado com fator de carga inicial no valor de 0.25, e tolerância para a convergência de 1×10^{-4} para a norma do vetor de cargas residuais.

A Fig. 5.29 ilustra a trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do nó central inferior. Note a mudança da trajetória de equilíbrio devida à localização de deformações numericamente induzida.

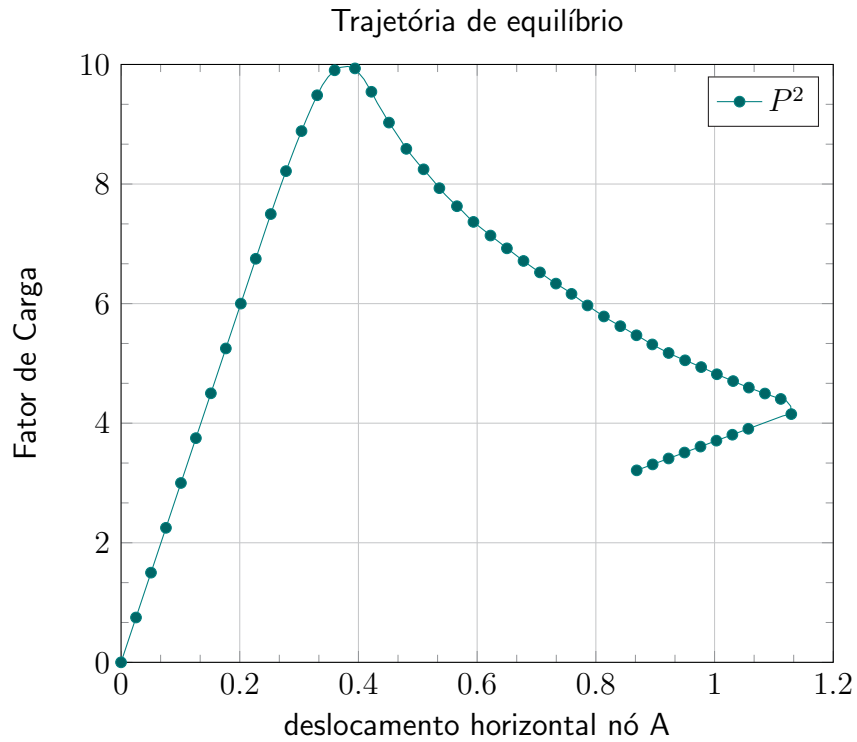


Figura 5.29: Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do nó A.

Considerações Finais

Este trabalho teve por objetivos a implementação de um método sem malha (EFG) acoplado ao MEF para análise fisicamente não linear, cuja principal motivação foi aproveitar a flexibilidade dos métodos sem malha evitando as dificuldades inerentes da utilização do MEF.

Uma das contribuições deste trabalho foi apresentar um projeto de implementação de um método sem malha tirando o máximo proveito em termos de aproveitamento de código legado da plataforma **INSANE**, originalmente preparada para o MEF. Em particular, foi possível validar a utilização do *framework* de modelos constitutivos para o concreto (Penna (2011)) também no contexto de um método sem malha acoplado ao MEF, mostrando a independência entre o método de discretização e do modelo constitutivo. Muitos trabalhos na literatura consultada mostram resultados para alguns modelos constitutivos. O arcabouço teórico-computacional disponibilizado pelo **INSANE**, contendo inúmeros modelos constitutivos para o concreto, pôde ser usado integralmente pelo método sem malha implementado. Também foi possível implementar diferentes modelos de análise com muito pouca alteração de código legado.

Outra contribuição desta tese foi a proposta de cálculo do preditor e do corretor nos métodos de controle utilizando-se controle por parâmetros no processo iterativo incremental, como alternativa ao processo tradicional que utiliza controle por deslocamentos.

Os experimentos numéricos realizados indicam que os mesmos cuidados tomados para realização de análise fisicamente não linear via MEF devem ser também observados para o caso do EFG, tais como, por exemplo, a aproximação polinomial, a integração numérica e a aproximação do tensor constitutivo por rigidez tangente ou secante.

Nesta investigação detectou-se que, dos vários parâmetros necessários ao EFG, a escolha do tamanho do domínio de influência, da integração numérica e da base polinomial usada, são determinantes para a realização de análise fisicamente não linear. Muitos trabalhos tais como Dolbow e Belytschko (1999), Liu (2003) e Zhuang et al. (2012), oferecem sugestões para a escolha dos referidos parâmetros, porém, dentro do contexto de análise linear.

Com este trabalho foi possível identificar que, para cada valor fixo do tamanho do domínio de influência, ρ , um estudo de convergência prévio deve ser realizado, variando-se a quantidade de pontos de integração.

Resumidamente, para análise fisicamente não linear, na ponderação entre fatores como o tamanho do domínio de influência, o esquema de integração numérica e da base polinomial usada, o tamanho do domínio de influência tem destaque. Em particular porque este estudo indica, através dos exemplos estudados, a natureza não-local implícita na aproximação realizada pelo EFG+MEF. Observe a Fig. 6.1 que ilustra três domínios de influência de tamanhos distintos, D_1 , D_2 e D_3 , para um mesmo ponto de interesse de determinado corpo submetido a certo carregamento, e cujo comportamento do material está descrito na Fig. 6.2. Pontos de interesse submetidos a estado de deformação característicos de regime pós-crítico (pontos

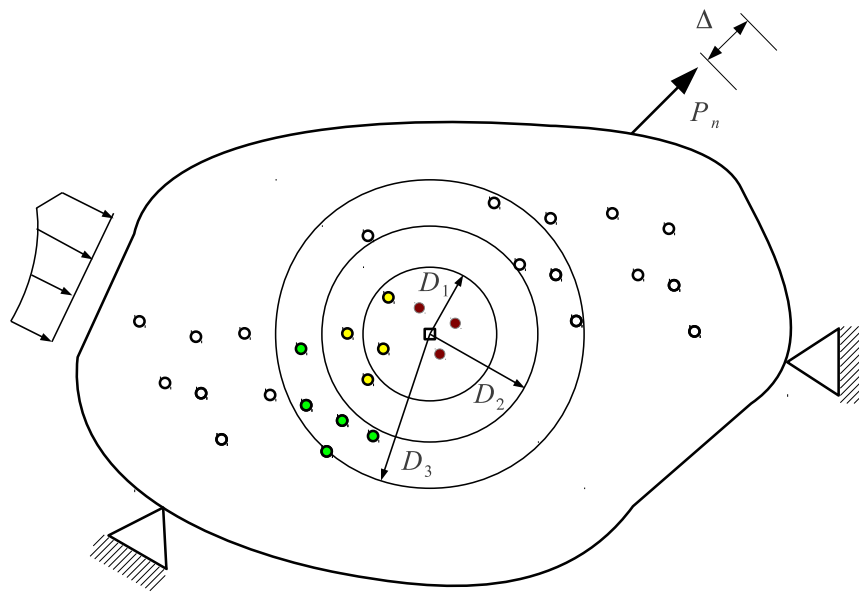


Figura 6.1: Corpo e seu carregamento

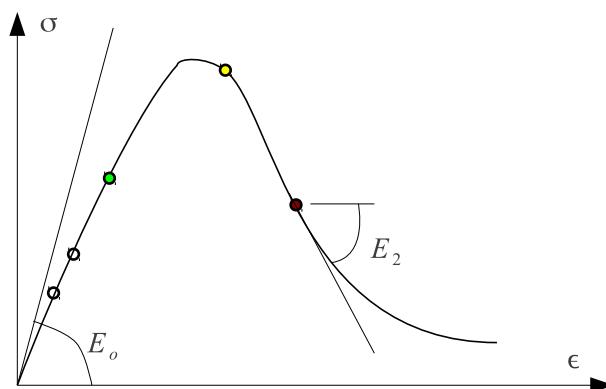


Figura 6.2: Comportamento do material

em vermelho nas referidas figuras) são influenciados por nós, deles distantes (pontos verdes e brancos), e estão submetidos a regime de deformação eminentemente característico de estágio inicial. Tal combinação de comportamentos, leva a resposta global da estrutura mais ou menos resistente, ou mais ou menos dúctil, dependendo da relação entre as dimensões do domínio de influência (D_1 , D_2 e D_3) dos nós do domínio do problema, bem como da distribuição espacial da degradação do meio, como ilustra, qualitativamente, a Fig. 6.3. Em outras palavras, os nós em regiões pouco degradadas influenciam na resposta de pontos distantes localizados

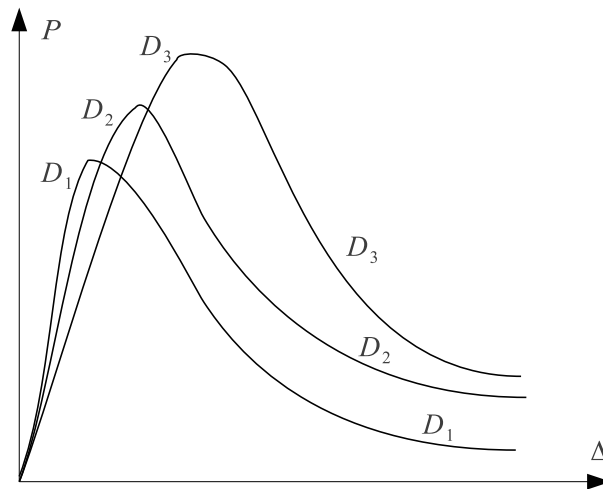


Figura 6.3: Resposta estrutural global

em regiões do domínio em avançado estágio de degradação, possibilitando uma forma de regularização ou atenuação dos efeitos localizados de degradação do material.

Os resultados obtidos nos fazem acreditar que novas vertentes de trabalho podem ser abraçadas, as quais são a seguir sucintamente delineadas.

Um ponto que precisa de atenção imediata é a questão da integração numérica. Como as funções de forma dos métodos sem malha não são polinomiais, há obviamente a necessidade de utilização de uma quadratura mais densa, como sugerem os exemplos estudados, bem como os trabalhos de Lu et al. (1994), Dolbow e Belytschko (1999), Liu (2003), Zhuang et al. (2012), Elmer et al. (2012) e Breitkopf et al. (2004). Adicionalmente, os resultados dos métodos sem malha são, em geral, uma aproximação da solução analítica, em contraste à interpolação que ocorre com o MEF. Em particular, note-se, quando a solução exata de um modelo matemático é polinomial, a solução do método sem malha é apenas uma aproximação desta, mesmo para polinômios de baixa ordem. Todavia, durante o desenvolvimento da pesquisa, percebeu-se que as sugestões contidas nos trabalhos acima citados contemplavam apenas casos de análise fisicamente linear. Em análise fisicamente não linear, uma solução aproximada muitas

vezes impede, por exemplo, a obtenção completa das trajetórias de equilíbrio, seja devido à localização numericamente induzida, problema comum ao MEF e ao EFG+MEF, seja devido ao erro induzido por conta de uma integração numericamente deficiente.

A utilização de modelos não-locais e a correspondente comparação, tanto para o MEF quanto para o EFG merece uma atenção, tendo em vista os resultados obtidos e observação da natureza não-local intrínseca da aproximação do EFG, variando-se o domínio de influência.

Outro ponto é o enriquecimento da aproximação de forma extrínseca como é feito no hp-Cloud (Duarte e Oden (1996)) e no MEFG (Barros (2002)). Em tal abordagem, as funções do EFG são enriquecidas sem a alteração da base de polinômios usadas. Esta estratégia torna desnecessária a inclusão de novos pontos para se calcular a aproximação e, conseqüentemente, a alteração dos domínios de influência. Sendo assim, novas perspectivas para a análise não linear são criadas, na medida que se tem mais liberdade para a definição do domínio de influência e assim para a investigação do impacto do mesmo sob a solução numérica.

Em análise fisicamente não linear a montagem e solução do sistema de equações é a parte que mais consome tempo de processamento. Então, a utilização de técnicas de processamento paralelo utilizando-se, por exemplo, os núcleos de processamento das CPUs atuais, é um campo a ser investigado.

Referências Bibliográficas

- Alves, M., Yu, J., e Jones, N. (2000). On the elastic modulus degradation in continuum damage mechanics. Computers & Structures, 76:703–712. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49]
- Armero, F. e Oller, S. (2000a). A general framework for continuum damage models. I. infinitesimal plastic damage models in stress space. International Journal of Solids and Structures, 37:7409–7436. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 53]
- Armero, F. e Oller, S. (2000b). A general framework for continuum damage models. II. integration algorithms, with applications to the numerical simulation of porous metals. International Journal of Solids and Structures, 37:7437–7464. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 53]
- Barros, F. B. (2002). Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas. Tese de Doutorado, USP-São Carlos. [citado na(s) páginas(s) 62, 112]
- Bažant, Z. P. (1976). Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete. Journal Engineering Mechanics ASCE, 102:331–344. citado por Penna (2011).

[citado na(s) páginas(s) 47]

Bažant, Z. P. e Cedolin, L. (1979). Blunt crack band propagation in finite element analysis. Journal of the Engineering Mechanics Division, 105:297–315. citado por Penna (2011).

[citado na(s) páginas(s) 47]

Bažant, Z. P. e Cedolin, L. (1980). Fracture mechanics of reinforced concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, 106:1287–1306. citado por Penna (2011).

[citado na(s) páginas(s) 47]

Bažant, Z. P. e Cedolin, L. (1983). Finite element modeling of crack band propagation. Journal of Structural Engineering, 109(1):69–92. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 47]

Bažant, Z. P. e Gambarova, P. G. (1984). Crack shear in concrete: crack band microplane model. Journal of Structural Engineering, 110(9):2015–2035. citado por Penna (2011).

[citado na(s) páginas(s) 49]

Bažant, Z. P. e Oh, B. H. (1983). Crack band for fracture of concrete. Matériaux et Constructions, 16(93):155–177. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 48]

Bažant, Z. P. e Oh, B. H. (1985). Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. Journal of Engineering Mechanics, 111(4):559–582. citado por Penna (2011).

[citado na(s) páginas(s) 49]

Bažant, Z. P. e Pijaudier-Cabot, G. (1987). Softening in reinforced concrete beams and frames. Journal of Structural Engineering, ASCE, 113(12):2333–2347. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49]

Bažant, Z. P. e Pijaudier-Cabot, G. (1988). Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. Journal of Applied Mechanics, 55(2):287–293. citado por Fuina (2009). [citado na(s) páginas(s) 49]

- Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., e Krysl, P. (1996). Meshless methods: An overview and recent developments. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139(174):3 – 47. [citado na(s) páginas(s) 74]
- Belytschko, T., Lu, Y. Y., e Gu, L. (1994). Element-free galerkin methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37(2):229–256. [citado na(s) páginas(s) 27, 34]
- Belytschko, T., Organ, D., e Krongauz, Y. (1995). A coupled finite element–element-free galerkin method. Computational Mechanics, 17(3):186–195. [citado na(s) páginas(s) 34, 37, 38]
- Blaauwendraad, J. (1972). Realistic analysis of reinforced concrete framed structures. HERON, 18(4):1–23. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 47]
- Booch, G., Rumbaugh, J., e Jacobson, I. (2000). UML - Guia do Usuário. Editora Campus. [citado na(s) páginas(s) -]
- Boone, T., Wawrzynek, P. A., e Ingraffea, A. R. (1986). Simulation of the fracture process in rock with application to hydrofracturing. International Journal of Rock Mechanics and Minig Science, 23(3):255–265. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 48, 56, 81]
- Boone, T. J. e Ingraffea, A. R. (1987). Simulation of the fracture process at rock interfaces. In Proceedings of the fourth international conference in Numerical Methods in fracture Mechanics, pp. 519–531. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 48, 56]
- Breitkopf, P., Rassineux, A., Savignat, J.-M., e Villon, P. (2004). Integration constraint in diffuse element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193(12?14):1203 – 1220. <ce:title>Meshfree Methods: Recent Advances and New Applications</ce:title>. [citado na(s) páginas(s) 111]
- Brekelmans, W. A. M., Scheurs, P. J. G., e de Vree, J. H. P. (1992). Continuum damage mechanics for softening of brittle materials. Acta Mechanica, 93:133–143. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49, 56]

- Carol, I. (1996). Elastic degradation and damage: plasticity-like formulation, stiffness recovery and localization. In Mecánica Computacional vol. XVII, pp. 243–252, Tucumán, Argentina. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 52]
- Carol, I. (1999). New developments in elastic degradation and damage: anisotropic formulations and evolution laws in pseudo-log space. In MECOM 99, pp. 3–16, Mendoza, Argentina. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 52]
- Carol, I., Jirasek, M., e Bažant, Z. (2001a). A thermodynamically consistent approach to microplane theory. part i. free energy and consistent microplane stresses. International Journal of Solids and Structures, 38:2921–2931. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 50]
- Carol, I., Prat, C., e Bažant, Z. P. (1992). New explicit microplane model for concrete: Theoretical aspects and numerical implementation. International Journal of Solids Structures, 29(9):1173–1191. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 50]
- Carol, I., Rizzi, E., e Willam, K. (1994). A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface. International Journal of Solids and Structures, 31(20):2835–2865. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 52, 53, 54]
- Carol, I., Rizzi, E., e Willam, K. (2001b). On the formulation of anisotropic elastic degradation. i. theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate. International Journal of Solids and Structures, 38:491–518. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 53]
- Carol, I., Rizzi, E., e Willam, K. (2001c). On the formulation of anisotropic elastic degradation. ii. generalized pseudo-rankiner model for tensile damage. International Journal of Solids and Structures, 38:519–546. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 53]
- Carol, I. e Willam, K. (1996). Spurious energy dissipation/generation and stiffness recovery models for elastic degradation and damage. International Journal of Solids Structures, 33(20-22):2939–2957. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 52]

- Carreira, D. J. e Chu, K.-H. (1985). Stress-strain relationship for plain concrete in compression. American Concrete Institute Journal, 82(6):797–804. citado por Penna (2011).
[citado na(s) páginas(s) 48, 56, 81, 103]
- Carreira, D. J. e Chu, K.-H. (1986). Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension. American Concrete Institute Journal, 83(1):21–28. citado por Penna (2011).
[citado na(s) páginas(s) 48, 56, 103]
- Cauvin, A. e Testa, R. B. (1999). Damage mechanics: basic variables in continuum theory. International Journal of Solids and Structures, 36:747–761. citado por Penna (2011).
[citado na(s) páginas(s) 49]
- Chen, W. F. (1982). Plasticity in Reinforced Concrete. McGraw-Hill Book Company, Nova York, EUA. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 50]
- Chow, C. L. e Wang, J. (1987). An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture. Engineering Fracture Mechanics, 27(5):547–558. citado por Penna (2011).
[citado na(s) páginas(s) 49]
- Crisfield, M. A. (1983). An Arc Length Method Including Line Searches and Accelerations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19:1269–1289.
[citado na(s) páginas(s) -]
- Crisfield, M. A. (1986). Finite Element and Solution Procedures for Structural Analysis. Pineridge Press. [citado na(s) páginas(s) -]
- Darwin, D. e Pecknold, D. A. (1976). Analysis of rc shear panels under cyclic loading. In Journal of the structural division, ASCE, pp. 355–369. citado por Penna (2011).
[citado na(s) páginas(s) 47]

- de Borst, R. (1990). Simulation of Localization using Cosserat Theory. In Bicanic e Mang, eds., Proceedings of the 2nd International Conference Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, pp. 931–943. Pineridge. [citado na(s) páginas(s) -]
- de Borst, R. (2002). Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches. Engineering Fracture Mechanics, 69:95–112. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49, 52]
- de Borst, R. e Blaauwendraad, J. (1988). Stability and Spurious Kinematic Models in Strain-Softening Concrete. In Proceedings of the International Conference on Computational Engineering Science, vol. 1, pp. 1–4. [citado na(s) páginas(s) -]
- de Borst, R. e Gutiérrez, M. A. (1999). A unified framework for concrete damage and fracture models including size effects. International Journal of Fracture, 95:261–277. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49, 52, 56]
- de Borst, R. e Nauta, P. (1985). Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. Engineering Computations, 2:35–46. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 48, 56]
- de Vree, J. H., Brekelmans, W. A. M., e van Gils, M. A. J. (1995). Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. Computers & Structures, 55(4):581–588. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49]
- Dolbow, J. e Belytschko, T. (1999). Numerical integration of the galerkin weak form in meshfree methods. Computational Mechanics, 23:219–230. 10.1007/s004660050403. [citado na(s) páginas(s) 80, 109, 111]
- Duarte, C. A. e Oden, J. T. (1996). H-p clouds?an h-p meshless method. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 12(6):673–705. [citado na(s) páginas(s) 112]

- Elmer, W., Chen, J., Puso, M., e Tacioglu, E. (2012). A stable, meshfree, nodal integration method for nearly incompressible solids. Finite Elements in Analysis and Design, 51(0):81 – 85. [citado na(s) páginas(s) 111]
- Fernández-Méndez, S. (2001). Mesh-Free Methods and Finite Elements: Friend or Foe? Tese de Doutorado, Universitat Politècnica de Catalunya. [citado na(s) páginas(s) 19]
- Fernández-Méndez, S. e Huerta, A. (2004). Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193(12-14):1257–1275. [citado na(s) páginas(s) xi, 2, 10, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 71, 72]
- Fonseca, A. R. (2011). Algoritmos Eficientes em Métodos Sem Malha. Tese de Doutorado, UFMG. [citado na(s) páginas(s) 76]
- Fonseca, F. T. (2008). Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil. [citado na(s) páginas(s) 58]
- Fonseca, M. T. (2006). Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil. [citado na(s) páginas(s) 58]
- Fries, T.-P. e Matthies, H.-G. (2004). Classification and overview of meshfree methods. Relatório Técnico 2003-3, Institute of Scientific Computing, Technical University Braunschweig, Germany. [citado na(s) páginas(s) 4, 5, 13]
- Fuina, J. S. (2009). Formulações de Modelos Constitutivos de Microplanos para Contínuos Generalizados. Tese de Doutorado, UFMG. [citado na(s) páginas(s) 58, 114, 124]
- Ghrib, F. e Tinawi, R. (1995). Nonlinear behavior of concrete dams using damage mechanics. Journal of Engineering Mechanics, 121(4):513–527. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49]

- Gosz, J. e Liu, W. K. (1996). Admissible approximations for essential boundary conditions in the reproducing kernel particle method. Computational Mechanics, 19(2):120–135. [citado na(s) páginas(s) 34]
- Hansen, E., Willam, K., e Carol, I. (2001). A two-surface anisotropic damage/plasticity model for plain concrete. In Proceedings of Fracture Mechanics of Concrete Materials - Framcos-4 Conferece, pp. 1–8, Paris, França. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 52]
- Hillerborg, A., Modéer, M., e Petersson, P. E. (1976). Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements. Cement and Concrete Research, 6(6):773–782. [citado na(s) páginas(s) 47, 48]
- Huerta, A., Belytschko, T., Fernández-Méndez, S., e Rabczuk, T. (2004a). Meshless Methods. In Stein, E., de Borst, R., e Hughes, T. J. R., eds., Encyclopedia of Computational Mechanics, vol. 1: Fundamentals, Cap. 10, pp. 279–309. John Wiley & Sons. [citado na(s) páginas(s) 2, 10]
- Huerta, A. e Fernández-Méndez, S. (2000). Enrichment and coupling of the finite element and meshless methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 48(11):1615–1636. [citado na(s) páginas(s) 34, 38]
- Huerta, A., Fernández-Méndez, S., e Liu, W. (2004b). A comparison of two formulations to blend finite elements and mesh-free methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193(12-14):1105–1117. [citado na(s) páginas(s) 38]
- Jirásek, M. e Patzák, B. (2002). Consistent tangent stiffness for nonlocal damage models. Computers & Structures, 80:1279–1293. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49]
- Jirásek, M. e Zimmermann, T. (1998). Rotating crack model with transition to scalar damage. Journal of Engineering Mechanics, 124:277–284. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49]

- Ju, J. W. (1989). On energy-based coupled elastoplasticity damage theories: constitutive modeling and computational aspects. International Journal of Solids and Structures, 25(7):803–833. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 56]
- Junior, F. S. e Venturini, W. S. (2007). Damage modelling of reinforced concrete beams. Advances in Engineering Software, 38:538–546. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49]
- Kaplan, M. F. (1961). Crack Propagation and the Fracture of Concrete. Journal of the American Concrete Institute, 58(11):591–609. [citado na(s) páginas(s) -]
- Kuhl, E., Steinmann, P., e Carol, I. (2001). A thermodynamically consistent approach to microplane theory. part ii. dissipation and inelastic constitutive modeling. International Journal of Solids and Structures, 38:2933–2952. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 50]
- Lee, J. S., Choi, I.-Y., e Cho, H.-N. (2004). Modeling and detection of damage using smeared crack model. Engineering Structures, 26:267–278. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49]
- Lee, U., Lesieutre, G. A., e Fang, L. (1997). Anisotropic damage mechanics based on strain energy equivalence and equivalent elliptical microcracks. International Journal of Solids Structures, 34:4377–4397. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49]
- Lemaitre, J. e Chaboche, J. L. (1990). Mechanics of Solid Materials. Cambridge University Press, Cambridge. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 56]
- Lemaitre, J. e Desmorat, R. (2005). Engineering Damage Mechanics - Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures. Springer, Berlim. [citado na(s) páginas(s) 48, 51]
- Lemaitre, J. e Dufailly, J. (1987). Damage measurements. Engineering Fracture Mechanics, 28(5/6):643–661. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 48]

- Lemaitre, J. A. (1992). Course on Damage Mechanics. Springer-Verlag. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 48, 122]
- Leukart, M. e Ramm, E. (2002). An alternative split within the microplane material model. In H.A. Mang, F. R. e. J. E., ed., Fifth World Congress on Computational Mechanics, Viena, Austria. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 50]
- Leukart, M. e Ramm, E. (2006). Identification and interpretation of microplane material laws. Journal of Engineering Mechanics, 132(3):295–305. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 50]
- Li, S. e Liu, W. K. (1996). Moving least-squares reproducing kernel method. part ii: Fourier analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139:150–193. [citado na(s) páginas(s) 5]
- Liu, G. R. (2003). Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method. CRC Press. [citado na(s) páginas(s) xi, 2, 8, 11, 12, 13, 15, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 33, 36, 37, 80, 109, 111]
- Lu, Y., Belytschko, T., e Gu, L. (1994). A new implementation of the element free galerkin method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 113(3–4):397 – 414. [citado na(s) páginas(s) 34, 111]
- Lucy, L. B. (1977). A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. The Astronomical Journal, 12(82):1013–1024. [citado na(s) páginas(s) 10]
- Matallah, M. e LaBorderie, C. (2009). Inelasticity-damage-based model for numerical modeling of concrete cracking. Engineering Fracture Mechanics, 76(8):1087–1108. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 53]
- Mazars, J. (1984). Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure. Tese de Doutorado, Université Paris, Paris. Citado por Lemaitre (1992). [citado na(s) páginas(s) 49, 56, 97, 99, 101, 106]

- Mazars, J. e Lemaitre, J. (1984). Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete. In Shah, S. P., ed., Application Of Fracture Mechanics to Cementitious Composites. NATO Advanced Research Workshop, 4-7 Setembro, pp. 375–378, Northwestern University. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 56]
- Mazars, J. e Pijaudier-Cabot, G. (1994). Damage Localization Analyzed as a Crack Propagation. In et al., Z. P. B., ed., Fracture and Damage in Quasibrittle Structures: Experiment, Modelling and Computer Analysis, vol. 58, pp. 145–157. E&FN Spon. [citado na(s) páginas(s) -]
- Monaghan, J. J. (1982). Why particle methods work. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 3(4):422–433. [citado na(s) páginas(s) 11]
- Monnier, T. (1970). The moment-curvature relation of reinforced concrete. HERON, 18(2):1–101. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 47]
- Mosler, J. e Meschke, G. (2004). Embedded crack vs. smeared crack models: a comparison of elementwise discontinuous crack path approaches with emphasis on mesh bias. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193(30-32):3351. [citado na(s) páginas(s) -]
- Nayroles, B., Touzot, G., e Villon, P. (1992). Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. Computational Mechanics, 10(5):307–318. [citado na(s) páginas(s) 13, 28]
- Neto, E. A. S., Perić, D., e Owen, D. R. J. (2006). Computational Methods For Plasticity: Theory and Application. Wiley. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 51]
- Ngo, D. e Scordelis, A. C. (1967). Finite element analysis of reinforced concrete beams. American Concrete Institute Journal, 67:152–163. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 46]

- Nguyen, V. P., Rabczuk, T., Bordas, S., e Duflot, M. (2008). Meshless methods: A review and computer implementation aspects. Mathematics and Computers in Simulation, 79(3):763 – 813. [citado na(s) páginas(s) 2, 27, 74]
- Nilson, A. H. (1968). Nonlinear analysis of concrete by the finite element method. Journal of American Concrete Institute, 65:757–766. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 46]
- Organ, D., Fleming, M., Terry, T., e Belytschko, T. (1996). Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency. Computational Mechanics, 18:225–235. 10.1007/BF00369940. [citado na(s) páginas(s) 74]
- O’Rourke, J. (1996). Computational Geometry in C. Cambridge University Press. [citado na(s) páginas(s) 74]
- Ožbolt, J., Li, Y., e Kožar, I. (2001). Microplane model for concrete with relaxed kinematic constraint. International Journal of Solids and Structures, 38:2683–2711. citado por Fuina (2009). [citado na(s) páginas(s) 50]
- Penna, S. S. (2011). Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica: unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto. Tese de Doutorado, DEEs-UFMG. [citado na(s) páginas(s) xii, 45, 54, 56, 58, 73, 81, 85, 97, 108, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128]
- Petrangeli, M. e Ožbolt, J. (1996). Smearred crack approaches - material modeling. Journal of Engineering Mechanics, 122(6):545–554. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49]
- Pitangueira, R. L. S. (1998). Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade. Tese de Doutorado, PUC-Rio. [citado na(s) páginas(s) 45]
- Pituba, J. J. C. (1998). Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49]

- Pituba, J. J. C. (2003). Sobre a Formulação de um Modelo de dano para o Concreto. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49]
- Pröchtel, P. e Häußler-Combe, U. (2008). On the dissipative zone in anisotropic damage models for concrete. International Journal of Solids and Structures, 45:4384–4406. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 53]
- Proença, S. P. B. (1988). Sobre Modelos Matemáticos do Comportamento Não-Linear do Concreto: Análise Crítica e Contribuições. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 48]
- Ramm, E. (1981). Strategies for Tracing the Nonlinear Response near Limit Points. In Wunderlich, W., Stein, E., e Bathe, K. J., eds., Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, pp. 63–83. Springer. [citado na(s) páginas(s) -]
- Rashid, Y. R. (1968). Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. Nuclear Engineering and Design, 7:334–344. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 46]
- Rizzi, E. (1995). Sulla Localizzazione Delle Deformation in Materiali e Structure. Tese de Doutorado, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano, Milão, Itália. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 52]
- Rizzi, E., Carol, I., e Willam, K. (1995). Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage. Journal of Engineering Mechanics, 121(4):541–554. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 52]
- Rots, J. G. (1988). Computational Modeling of Concrete Fracture. Tese de Doutorado, Delft University of Technology, Delft, Holanda. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 48]

- Rots, J. G. e de Borst, R. (1987). Analysis of mixed-mode fracture in concrete. Journal of Engineering Mechanics, 113(11):1739–1758. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 48, 52]
- Rots, J. G., Nauta, P., Kusters, G. M. A., e Blaauwendraad, J. (1985). Smearred crack approach and fracture localization in concrete. HERON, 30(1):3–48. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 48]
- Scotta, R., Vitaliani, R., Saetta, A., nate, E. O., e Hanganu, A. (2002). A scalar damage model with a shear retention factor for the analysis of reinforced concrete structures: theory and validation. Computers & Structures, 79:737–755. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49]
- Shewchuk, J. R. (1997). Delaunay Refinement Mesh Generation. Ph.D. thesis, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213. Technical Report CMU-CS-97-137. [citado na(s) páginas(s) 74]
- Silva, R. P., Pitangueira, R. L. S., e Barros, F. B. (2012a). Material nonlinear analysis using EFG. In WCCM 2012 – 10th World Congress in Computational Mechanics, p. 1. [citado na(s) páginas(s) -]
- Silva, R. P., Pitangueira, R. L. S., e Barros, F. B. (2012b). Métodos sem malha para modelagem de meios parcialmente frágeis. In SIMMEC 2012 – X Simpósio de Mecânica Computacional, pp. 1–14. [citado na(s) páginas(s) -]
- Silva, R. P., Pitangueira, R. L. S., e Barros, F. B. (2012c). Uma implementação orientada a objetos de método sem malha acoplado ao MEF para modelagem fisicamente não linear. In WCCM 2012 – 10th World Congress in Computational Mechanics, p. 1. [citado na(s) páginas(s) -]
- Simo, J. C. e Hughes, T. J. R. (1998). Computational Inelasticity. Springer-Verlag New York, Inc., EUA, 2a edição. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 52]

- Simo, J. C. e Ju, J. W. (1987). Strain- and stress-based continuum damage models – I. Formulation. International Journal of Solids and Structures, 23(7):821–840. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 56]
- Suidan, M. e Schnobrich, W. C. (1973). Finite element analysis of reinforced concrete. In Journal of the structural division, ASCE, pp. 2109–2121. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 46]
- Swartz, S. E., Hu, K.-K., e Jones, G. L. (1978). Compliance monitoring of crack growth in concrete. In Journal of the engineering mechanics division, ASCE, pp. 789–800. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 47]
- Taylor, G. I. (1938). Plastic strains in metals. Journal of the Institute of Metals, 62:307–324. Citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49]
- Wang, J. G. e Liu, G. R. (2002). A point interpolation meshless method based on radial basis functions. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 54(11):1623–1648. [citado na(s) páginas(s) 25]
- Winkler, B., Hofstetter, G., e Lehar, H. (2004). Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 28:797–819. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 81, 85]
- Wu, J. Y. (2007a). On isotropic and anisotropic unilateral damage model for concrete. In Proceedings of International Symposium on Innovation & Sustainability of Structures in Civil Engineering, pp. 360–371, Tongji University, China. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 53]
- Wu, J. Y. (2007b). Stress-based elastic anisotropic unilateral degradation model for concrete. In Proceedings of Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures - New Trends

- in Fracture Mechanics of Concrete, pp. 385–392, Catania, Itália. citado por Penna (2011).
[citado na(s) páginas(s) 53]
- Wu, J. Y. e Li, J. (2006a). On a new framework for anisotropic damage model. In Proceedings of III European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, Lisboa, Portugal. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 53]
- Wu, J. Y. e Li, J. (2006b). Stress-based effective space anisotropic damage model for concrete. In Proceedings of Enhancement and Promotion of Computational Methods in Engineering and Science X, pp. 1–8, Sanya, Hainan, China. citado por Penna (2011).
[citado na(s) páginas(s) 53]
- Wu, J. Y., Li, J., e Faria, R. (2006). An energy release rate-based plastic-damage model for concrete. International Journal of Solids and Structures, 43:583–612. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 53]
- Xiang, Z., Swoboda, G., e Cen, Z. (2002). Identification of damage parameters for jointed rock. Computers & Structures, 80:1429–1440. citado por Penna (2011). [citado na(s) páginas(s) 49]
- Yang, Y. B. e Kuo, S. R. (1994). Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures. Prentice-Hall, Singapore. [citado na(s) páginas(s) 61]
- Zhu, T. e Atluri, S. N. (1998). A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free galerkin method. Computational Mechanics, 21(3):211–222. [citado na(s) páginas(s) 34]
- Zhuang, X., Heaney, C., e Augarde, C. (2012). On error control in the element-free galerkin method. Engineering Analysis with Boundary Elements, 36(3):351 – 360.
[citado na(s) páginas(s) 80, 109, 111]