

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas - ICEX
Departamento de Matemática

Stefânia Moura Lima

Matemática Financeira: uma abordagem prática

BELO HORIZONTE

2011

Stefânia Moura Lima

Matemática financeira: uma abordagem prática

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da UFMG, como parte dos requisitos para a orientação do título de Especialista em Matemática para Professores do Ensino Básico.

Orientador: **Antônio Zumpano Pereira Santos**

BELO HORIZONTE

2011

Dedicatória

A Deus, pelo dom da vida.

A minha mãe Eliete, principal incentivadora.

A meus alunos, estímulo para que eu busque permanentemente o conhecimento.

Aos Professores Antônio Zumpano Pereira Santos e Paulo Antônio Fonseca Machado, pela confiança, paciência e imensa contribuição neste trabalho.

Epígrafe

As leis da natureza nada mais são que pensamentos matemáticos de Deus. (Kepler)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é abordar a matemática financeira tanto em seu aspecto formal, através da fundamentação teórica, correlacionando com aplicação de progressões aritméticas e geométricas, quanto mostrá-la em sua forma prática, através de exemplos reais, com o uso de ferramentas como a calculadora HP 12C e de planilhas eletrônicas do Excel. Cabe ressaltar que não se pretende oferecer um manual completo para uso do Excel e da calculadora HP 12C, uma vez que essa abordagem será aplicada somente na resolução de exercícios, para aqueles que são mais usuais essas ferramentas.

Além disso, pretende-se mostrar a Matemática Financeira de forma clara e objetiva para alunos do ensino médio, cujo tema é obrigatório e para alunos de cursos técnicos e de ensino superior, principalmente nas áreas de Administração, Contabilidade, Economia, Engenharia, Comércio Exterior, etc.

Palavras-chave: Matemática Financeira, aspectos formais, aplicação prática.

ABSTRACT

The objective of this study is to broach the financial mathematics both in its formal aspect, through the theoretical basis, correlating with the application of arithmetic and geometric progressions, and show it in his practical way, through real examples, using tools such as HP 12C calculator and Excel spreadsheets. It's important to emphasize, though, that the purpose isn't offering a complete manual for using Excel and the HP 12C calculator, once this approach will be applied only in problem solving, for those which are more usual these tools.. Furthermore, it is intended to show clearly Financial Mathematics for high school students, whose subject is mandatory for technical courses students and higher education, especially in the areas of Administration, Accounting, Economics, Engineering, International Trade and so on.

Keywords: Financial Mathematics, formal aspects, practical application.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	7
2. PORCENTAGEM.....	8
3. REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO	10
3.1 Regime de Juros Simples.....	11
3.1.1 Aplicações práticas para regime de capitalização simples	12
3.2 Regime de Juros Compostos	16
3.2.1 Aplicações práticas para regime de capitalização composto	17
Cálculo dos juros.....	18
Cálculo do capital empregado	18
Cálculo do montante.....	19
Cálculo do tempo	19
Cálculo da taxa de juros empregada.....	20
3.3 Comparação e comportamento gráfico dos dois regimes de capitalização – Simples e Composto	21
4. DESCONTO.....	23
4.1 Desconto Simples	23
4.1.1 Desconto Simples por Dentro (Desconto Racional).....	24
4.1.2 Desconto Simples por Fora (Bancário ou Comercial).....	25
4.2 Desconto Composto	26
5. TAXAS EQUIVALENTES.....	29
6. CLASSIFICAÇÃO DAS TAXAS DE JUROS	31
7. FLUXO DE CAIXA.....	34
7.1 Valor Presente e Valor futuro.....	34
8. SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO.....	40
8.1 Sistema de Amortização Constante (SAC)	40
8.1.1 SAC com carência	51
8.2 Sistema de Amortização Francês, usando a tabela Price	53
8.2.1 Price com carência	56
9. CONCLUSÃO.....	59
10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	59

1. INTRODUÇÃO

Cotidianamente as pessoas se deparam com situações onde devem decidir sobre um melhor tipo de financiamento, compra de um produto, cálculo de pagamento de um boleto com atraso, etc.

A Matemática Financeira é por sua vez, uma ferramenta para tomada de decisão, pois estuda as relações que ligam quantidades monetárias que são trocadas em tempos diferentes e tal prática é universal nas transações correntes. Receber uma quantia hoje ou no futuro não é a mesma coisa, haja que uma unidade monetária hoje é preferível a mesma unidade monetária disponível amanhã, visto que quando se recebe uma quantia futura envolve sacrifício, o que exige uma recompensa. O objetivo da Matemática Financeira é estudar a evolução do dinheiro ao longo do tempo.

Neste trabalho serão abordados os aspectos formais da matemática financeira além de exercícios resolvidos, que poderão ser reproduzidos com o simples uso de uma calculadora científica, através de uma calculadora HP 12C ou por planilhas eletrônicas, visto que todos os recursos foram utilizados para explicitar as ideias.

2. PORCENTAGEM

No dia a dia surgem expressões, tais como:

“Desconto de 10%”;

“A inflação registrada no período foi de 8%”;

“O rendimento da caderneta de poupança no período foi de 0,6%”.

Porcentagem não é nada mais do que razões especiais de denominador igual a cem. É uma comparação entre duas grandezas, na razão direta, em que uma das razões tem denominador igual a 100.

Dessa forma, considerando as grandezas z e y , tem-se:

$$\frac{y}{z} = \frac{x}{100}$$

e ainda

$$y = \frac{x}{100} \cdot z$$

Diz-se que y é $x\%$ de z

As porcentagens podem ser representadas na forma percentual, fracionária ou decimal, a saber:

$$12\% \text{ são equivalentes a } \frac{12}{100} = 0,12$$

Considere os seguintes exemplos:

- 1) Numa prova de vestibular foram dadas 40 questões. Ângela acertou 34 dessas questões. O número de acertos de Ângela representa quantos por cento do número total de questões?

$$\frac{34}{40} = 0,85 = 85\%$$

Na calculadora HP 12C deverão ser seguidos os passos:

Teclas	Mostrador/Função
f CLX	Zerar o Mostrador
f CLEAR fin	Zerar os registros financeiros
40 ENTER	Entrar com o valor total
34 <input type="text" value="%T"/>	É apresentado o valor 85% no visor

Tabela 1

- 2) No primeiro semestre de um determinado ano, uma indústria produziu 150 unidades de um artigo. No segundo semestre do mesmo ano, a indústria

produziu 162 unidades do mesmo artigo. Nessas condições, que taxa de porcentagem esse aumento representou em relação ao 1º semestre?

$$\frac{162 - 150}{150} = 0,08 = 8\%$$

Na HP 12C:


Teclas	Mostrador/Função
f CLX	Zerar o Mostrador
f CLEAR fin	Zerar os registros financeiros
150 ENTER	Entrar com o primeiro número
162	Entrar com o segundo número
	É apresentado o valor de 8% no visor

Tabela 2

- 3) O preço de uma garrafa de refrigerante teve um aumento de 25 centavos, o que representou uma taxa de 20%. Qual era o preço anterior e qual o novo preço da garrafa desse refrigerante?

$$0,25 = \frac{20}{100} x$$

$$0,25 = 0,20x$$

$$x = \frac{0,25}{0,20} = 1,25$$

R\$1,25 era o preço anterior e o novo preço passou a ser R\$1,50

Na HP 12C:

Teclas	Mostrador/Função
f CLX	Zerar o Mostrador
f CLEAR fin	Zerar os registros financeiros
0,25 ENTER	Entrar com o aumento
0,20 ÷	Entrar com o segundo valor – Será apresentado o valor 1,25, o que representa o valor anterior
0,25 +	É apresentado o valor 1,50, que corresponde ao preço atual

Tabela 3

3. REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO

Para cálculo de qual melhor tipo de investimento financeiro ou a melhor forma de pagamento de uma dívida é necessário saber calcular o quanto de juros se receberá ou pagará.

Para tanto, precisa-se estudar a evolução dos juros ao longo do tempo por mais de uma unidade de tempo e também a qual regime de capitalização a operação será empregada.

Os regimes de capitalização demonstram como os juros são formados e incorporados ao principal, no decorrer do tempo. São conhecidos dois tipos, o regime de capitalização simples e o composto.

Para conhecê-los, primeiramente denotar-se-ão alguns conceitos:

Valor presente (Present Value), representado pela sigla PV – Valor no instante inicial do processo financeiro, valor captado ou emprestado, principal, capital.

Valor futuro (Future Value), representado pela sigla FV – Valor no instante final do processo financeiro. Valor pago ou recebido ao final do empréstimo, que representa o montante acumulado ao final de n períodos, correspondente ao valor presente mais os juros.

Taxa de juros (Interest), representada pela letra minúscula i – é o coeficiente que determina o valor do juro, ou seja, percentual de remuneração sobre o capital. As taxas de juros devem remunerar o risco envolvido na operação diante da incerteza com relação ao futuro, a perda de poder de compra do capital, motivada pela inflação e o capital emprestado/aplicado, que deve gerar um lucro (ou ganho) mediante recompensa por privação do tempo emprestado.

Juros, representado pela letra maiúscula J - É a quantia que se paga a mais (ou se recebe) por captação de um empréstimo, em função de uma taxa (percentual de remuneração) e do tempo. Receber uma quantia hoje ou no futuro não é a mesma coisa, haja que uma unidade monetária hoje é preferível a mesma unidade monetária de amanhã, visto que quando se recebe uma quantia futura envolve sacrifício, o que exige uma recompensa, definida pelos juros.

Número de períodos, representado pela letra n minúscula – número de períodos de capitalização de juros.

Por exemplo, admita um empréstimo de R\$3.500,00 a ser liquidado no final do

período, à taxa de 1,5% ao mês, após 24 parcelas iguais, pagar-se-á o valor de R\$5003,26. Assim o valor presente, taxa, tempo, valor futuro e juros, serão:

$$PV = R\$3.500,00$$

$$i = 1,5\% \text{ a.m.}$$

$$n = 24$$

$$FV = R\$5003,26$$

$$J = 5003,26 - 3.500,00 = R\$1.503,26$$

O processo financeiro é constituído por três grandezas conceituais: Capital, Tempo e Juros.

Capital e Tempo são duas grandezas dependentes, o valor do capital varia com o tempo. A relação entre capital e tempo é dada pelo Juro.

3.1 Regime de Juros Simples

No regime de juros simples, os juros são calculados, para cada período, sempre sobre o capital. Por exemplo, considere uma taxa de 10% e um valor inicial de 500.

Em um mês:

$$i = \frac{10}{100} = 0,10^1$$

$$J = 500 \times 0,10 = 50$$

$$FV = 500 + 50 = 550$$

Em dois meses:

$$J = 500 \times 0,10 = 50$$

$$FV = 550 + 50 = 600$$

Generalizando:

Em um período:

$$J = i \times PV$$

$$FV = PV + i \times PV = (1 + i) \times PV$$

¹ Para cálculo de juros, a taxa deverá estar sempre representada na forma decimal.

Em dois períodos:

$$J = PV \times 2 \times i$$

Em n períodos:

$$J = PV \times n \times i$$

$$FV = PV + PV \times i \times n = PV(1 + i \times n)$$

Pode-se concluir que o regime de capitalização simples comporta-se como uma Progressão Aritmética de razão $J = PV \times i$, crescendo de forma linear ao longo do tempo.

3.1.1 Aplicações práticas para regime de capitalização simples

Juros de Mora

Quando alguém está obrigado, por um contrato ou pela lei, a realizar um pagamento dentro de um prazo determinado e por sua exclusiva culpa, não o faz, diz-se que essa pessoa se encontra em mora.

Ao encontrar-se em mora, o devedor fica legalmente obrigado a indenizar o credor pelos eventuais danos por este sofrido, decorrente do não pagamento em tempo devido.

Esta indenização traduz no pagamento de juros de mora.

Os juros de mora são calculados em boletos bancários ou contratos, através do regime de capitalização simples, quando ocorre atraso de pagamento inferior ao período da taxa referenciada.

Por exemplo, admita uma conta no valor de R\$129,00 que foi paga com atraso de 5 dias. O montante pago, com juros de mora de 1% ao mês e multa por atraso de 2% foi de:

Multa por atraso:

$$129 \times 0,02 = 2,58$$

Juros de Mora:

$$J = 129 \times 5 \times \frac{0,01}{30} = 0,22$$

$$\text{Montante} = 129 + 0,22 + 2,58 = 131,80$$

Na HP 12C:

Teclas	Mostrador/Função
f CLX	Zerar o Mostrador
f CLEAR fin	Zerar os registros financeiros
129 CHS ² PV	Entrar com o valor presente
1 i	Entrar com a taxa
5 n	Entrar com o tempo
f INT	É apresentado o valor de 0,22 referente aos juros
+	É apresentado o valor dos juros mais o principal
2,58 +	É apresentado o valor total 131,80 correspondente ao principal, juros mais a multa

Tabela 4

Método Hamburgoês

Desde os primórdios o homem preocupava-se com a amortização (abatimento) de dívidas. Inicialmente, por volta de 1500 a 1530, havia o hábito do escambo, troca de mercadorias, sem se preocupar com o tempo e encargos da operação.

À medida que a civilização evoluiu, passou-se a preocupar com a devolução de capital e juros nas operações mercantis. Na civilização ocidental, durante a Idade Média, na cidade de Hamburgo (norte da atual Alemanha), os comerciantes da área do porto, que negociavam com vários povos e países, desenvolveram um sistema de amortização que, depois de um determinado período de tempo, os encargos (juros) eram cobrados sobre o saldo devedor do tomador dos recursos. Este método, em homenagem àqueles homens, denominou-se Método Hamburgoês.

Empregado largamente pelas instituições financeiras, o Método Hamburgoês envolve o regime de capitalização simples e determina os encargos financeiros sobre os valores devedores em contas garantidas.

² A tecla CHS é pressionada primeiro para trocar o sinal do principal antes de armazená-lo no registro. Isso é necessário devido à convenção para saída de caixa, que se aplica principalmente a cálculos de juros compostos.

As contas garantidas são créditos rotativos estabelecidos por bancos para serem utilizados de acordo com a necessidade pessoal ou da empresa, oferecendo a possibilidade de amortização do capital em qualquer dia útil do mês. Para tanto, é cobrado uma taxa de juros, capitalizada mensalmente, que é calculada sobre o saldo devedor e pelo período (em dias) de uso do capital, para períodos menores ou iguais a um mês. Como o período de empréstimo é menor que a taxa referenciada, expressa ao mês, para a instituição financeira é mais vantajoso cobrar juros simples na operação, sendo que o valor dos juros é debitado no primeiro dia útil subsequente ao mês vencido.

Além da taxa de juros cobrada na operação, também é debitado na conta o IOF - Imposto sobre Operações de Crédito, Câmbio e Seguros, que incide sobre operações de crédito, de câmbio e seguro e operações relativas a títulos e valores mobiliários. Ele é um imposto brasileiro federal, regulatório, intituído pela União e tem como finalidade a arrecadação e a regulação da atividade econômica. Sua alíquota pode ser alterada a qualquer momento, por meio de decreto, sem ter de passar por longos processos de aprovação no Congresso Nacional.

Por meio da arrecadação do IOF, o Governo tem como saber como está a demanda e oferta de crédito no País. Por ser fácil de alterar e por permitir a regulação do mercado financeiro, o IOF se tornou um bom instrumento para que o Governo controle o crédito e conseqüentemente a inflação.

Ele surgiu com a reforma tributária de 1966 [Lei 4.143/66] para substituir o Imposto sobre Transferências para o Exterior. Enquanto o antigo imposto tributava apenas as transferências bancárias realizadas para outros países, o IOF veio para abarcar qualquer transferência realizada em instituições, considerando não só bancos, mas também financeiras. Em 1980, o Governo editou o Decreto 1.783 regulamentando o imposto e determinando que ele incida sobre operações de crédito, câmbio e seguro, e sobre operações relativas a títulos e valores mobiliários.

Para cada operação, existia uma alíquota diferente. Para empréstimos de maneira geral, o IOF encarecia em 0,5% ao mês o valor contratado. Para operações de câmbio, por sua vez, a alíquota era de 15% ao mês e para operações de títulos e valores, o contribuinte pagava 10% ao mês por operação. Ao longo dos anos, a alíquota do imposto sofreu variações, de acordo com as necessidades econômicas

do País.

Atualmente as alíquotas são reguladas através do Decreto nº 6.306/07, alterado, por último, pelo Decreto e 7.751/12. Tanto para pessoas físicas quanto para pessoas jurídicas, a alíquota do IOF é de 0,0041% ao dia, limitada a 365 dias, isto é, a 1,5% ao ano do valor contratado, aplicada sobre o somatório dos saldos devedores diários, que inclui sábado, domingo e feriado. Além deste percentual diário, há uma incidência adicional de IOF de 0,38% sobre o valor contratado, independente do prazo da operação.

Tanto para cálculo dos juros quanto para o IOF, pode-se utilizar a seguinte equação:

$$J = i \times \sum_{j=1}^k SD_j \times n_j$$

Equação 1

Onde:

i = taxa de juro proporcional diária;

SD = saldo devedor;

n = número de dias que o saldo permanece inalterado.

O exemplo ilustrativo a seguir permite o entendimento do funcionamento do “Método Hamburguês” e do IOF.

Assim, admita que ocorra a seguinte movimentação em uma conta garantida de uma pessoa física:

Conta corrente da empresa

Data	Histórico	Débito	Crédito	Saldo
01/10	Saldo			R\$ 200,00
02/10	Cheque 0100	R\$ 500,00		-R\$ 300,00
08/10	Cheque 0101	R\$ 1.000,00		-R\$ 1.300,00
15/10	Depósito em dinheiro		R\$ 2.000,00	R\$ 700,00
20/10	Cheque 0108	R\$ 2.500,00		-R\$ 1.800,00

Tabela 5

De posse dos dados da tabela anterior, o valor dos juros que será debitado no primeiro dia útil do mês subsequente ao vencido, utilizando o Método Hamburguês,

a uma taxa de juros de 9% ao mês, será:

$$J = \frac{0,09}{30} (300 \times 6 + 1300 \times 7 + 1800 \times 11) = 92,10^3$$

Juros = R\$92,10

Para cálculo do IOF, tem-se:

Nº dias do saldo inalterado	Saldo devedor	Cálculo do IOF para alíquota de 0,0041% (Nº dias x saldo devedor x alíquota 0,0041%)	Acréscimo no saldo devedor	Cálculo do IOF para alíquota de 0,38% (Alíquota 0,38% x acréscimo saldo devedor)	Soma do IOF referente às duas alíquotas
6	300	0,07	300	1,14	1,21
7	1300	0,37	1000	3,8	4,17
12	1800	0,89	1800	6,84	7,73
Valor total do IOF					13,11

Tabela 6

IOF = 13,11

Valor total dos juros + IOF = 92,10 + 13,11 = 105,21

Assim, no primeiro dia útil do mês subsequente ao vencido será debitado o valor R\$105,21 na conta dessa pessoa, sendo que ela iniciará o mês com um saldo negativo de R\$1800,00 + 105,21 = 1.905,21.

3.2 Regime de Juros Compostos

No regime de juros compostos, os juros de cada período são incorporados ao capital para o cálculo dos juros seguinte, ou seja, o juro incide sobre o montante do período anterior. Por exemplo, considere uma taxa de 10% e um valor inicial de 500.

Em um mês:

$$i = \frac{10}{100} = 0,10$$

$$J = 500 \times 0,10 = 50$$

³ Nota-se que a taxa mensal foi convertida |

$$FV = 500 + 50 = 550$$

Em dois meses:

$$J = 550 \times 0,10 = 55$$

$$FV = 550 + 55 = 605$$

Generalizando:

PV = capital inicial

Em um mês

$$FV = PV + i \times PV = (1+i)PV$$

Em dois meses:

$$FV = (1+i)PV + i[(1+i)PV] = (1+i)PV[(1+i)] = PV(1+i)^2$$

Em n períodos:

$$FV = PV(1+i)^{n-1} + i[PV(1+i)^{n-1}] = PV(1+i)^n$$

Conclui-se que o regime de juros compostos comporta-se como uma Progressão Geométrica de razão $(1+i)$, crescendo de forma exponencial ao longo do tempo.

3.2.1 Aplicações práticas para regime de capitalização composto

Para melhor entender o regime de juros compostos, admitam-se os seguintes exemplos.

Cálculo dos juros

Determine quanto renderá um capital de R\$30.000,00, aplicado à taxa de 8% ao ano, durante 5 anos.

$$PV = 30.000$$

$$i = 0,08$$

$$n = 5$$

$$FV = PV(1+i)^n$$

$$FV = 30.000(1,08)^5$$

$$FV = 44.079,84$$

$$J = FV - PV$$

$$J = 44.079,84 - 30.000$$

$$J = 14.079,84$$

Na HP 12C:

Teclas	Mostrador/Função
f CLX	Zerar o Mostrador
f CLEAR fin	Zerar os registros financeiros
30000CHS PV	Entrar com o valor presente
8 i	Entrar com a taxa
5 n	Entrar com o tempo
FV	É apresentado o valor futuro de 44.079,84
30000 -	É apresentado o valor de 14.079,84 referente aos juros

Tabela 7

Cálculo do capital empregado

Qual o capital que aplicado a 1,2% ao mês produzirá um montante de R\$1.500,00, em 75 dias?

$$75\text{dias} = 2,5\text{meses}$$

$$FV = PV(1+i)^n$$

$$FV = PV + J$$

$$1500 = PV(1,012)^{2,5}$$

$$1500 = 1,03PV$$

$$PV = \frac{1500}{1,03}$$

$$PV = 1456,31$$

Na HP 12C:

Teclas	Mostrador/Função
f CLX	Zerar o Mostrador
f CLEAR fin	Zerar os registros financeiros
1,2 i	Entrar com a taxa
2,5 n	Entrar com o tempo
1500 FV	Entrar com o valor futuro
PV	É apresentado o valor de 1456,31 referente ao capital

Tabela 8

Cálculo do montante

Calcular o montante de uma aplicação financeira de R\$3.500,00, a uma taxa de 12% ao ano, em um prazo de 18 meses.

$$PV = 3.500$$

$$i = 0,12$$

$$n = 18\text{meses} = 1,5\text{ano}$$

$$FV = PV(1+i)^n$$

$$FV = 3500 \times 1,12^{1,5}$$

$$FV = 4.148,54$$

Na HP 12C:

Teclas	Mostrador/Função
f CLX	Zerar o Mostrador
f CLEAR fin	Zerar os registros financeiros
3500CHS PV	Entrar com o valor presente
12 i	Entrar com a taxa
1,5n	Entrar com o tempo
FV	É apresentado o valor de 4.148,54 no visor

Tabela 9

Cálculo do tempo

No fim de quanto tempo um capital aplicado à taxa de 4% ao mês, quadruplicará seu valor, no regime de capitalização composta?

No período de capitalização o capital passou a valer 4 (quatro) vezes mais. Assim:

$$FV = 4PV$$

$$i = 0,04$$

$$FV = PV(1+i)^n$$

$$4PV = PV(1+0,04)^n$$

$$4 = 1,04^n$$

$$\ln 4 = \ln 1,04^n$$

$$n = \frac{\ln 4}{\ln 1,04}$$

$$n = 35,35 \text{ meses}$$

$n \cong 35$ meses e 11 dias

Na HP 12C:

Teclas	Mostrador/Função
f CLX	Zerar o Mostrador
f CLEAR fin	Zerar os registros financeiros
1 ⁴ CHS PV	Entrar com o valor presente
4 ⁵ i	Entrar com a taxa
4FV	Entrar com o valor futuro
N	É apresentado o 36 ⁶ no visor

Tabela 10

Cálculo da taxa de juros empregada

Determinar a taxa mensal de juros de uma aplicação financeira de R\$32.000,00 que produz um montante de R\$40.000,00 ao final de um quadrimestre.

⁴ Poderá ser atribuído qualquer valor para o capital.

⁵ Como depois de um determinado período o capital quadruplicará, daí o valor do montante deverá ser quatro vezes o valor do capital.

⁶ A calculadora arredonda o valor de n para o próximo número inteiro acima.

$$\begin{aligned}
 PV &= 32.000 \\
 FV &= 40.000 \\
 n &= 1\text{quadrimestre} = 4\text{meses} \\
 FV &= PV(1+i)^n \\
 40.000 &= 32.000(1+i)^4 \\
 \frac{40.000}{32.000} &= (1+i)^4 \\
 1,25 &= (1+i)^4 \\
 \sqrt[4]{1,25} &= \sqrt[4]{(1+i)^4} \\
 1,0573 &= 1+i \\
 i &= 0,0573 = 5,73\%
 \end{aligned}$$

Na HP 12C:

Teclas	Mostrador/Função
f CLX	Zerar o Mostrador
f CLEAR fin	Zerar os registros financeiros
32000 CHS PV	Entrar com o valor presente
40000 FV	Entrar com o valor futuro
4 n	Entrar com o tempo
i	É apresentado o valor de 5,73 referente à taxa de juros

Tabela 11

3.3 Comparação e comportamento gráfico dos dois regimes de capitalização – Simples e Composto

As seguintes observações podem ser extraídas, comparando os regimes de capitalização simples e composto:

- No primeiro período do prazo, os juros simples e compostos se igualam , tornando também idêntico o montante de cada regime de capitalização. Isso ocorre para o primeiro período de incidência de juros e é indiferente o uso do regime de capitalização simples ou composto, pois ambos produzem os mesmos resultados.
- A diferença entre os dois regimes ocorre quando há operações com mais de um período de capitalização, que em particular, pelo regime de capitalização

composto os juros são maiores, pois os juros são incorporados ao saldo do período anterior e passam assim a gerar juros. Quanto maior o número de períodos de incidência de juros, maior será a diferença em relação à capitalização simples. Já para períodos menores que um período de capitalização, juros simples rendem mais do que juros compostos, em função do comportamento gráfico, esboçado abaixo.

- c) Como foi dito anteriormente, no regime de capitalização simples os juros são calculados sempre sobre o capital e no regime de capitalização composto, os juros de cada período são incorporados ao capital para cálculo dos juros seguinte. Tal comportamento é explicado porque o regime de capitalização simples é uma Progressão Aritmética de razão $J = PV.i$, crescendo de forma linear ao longo do tempo, expressado por uma função linear. O regime de capitalização composto é uma Progressão Geométrica de razão $(1+i)$, aumentando de forma exponencial ao longo do tempo. Ele é chamado, de acordo com o dito popular, de “juros sobre juros”, expressado por uma função exponencial. Comparando graficamente estes dois regimes de capitalização, tem-se:

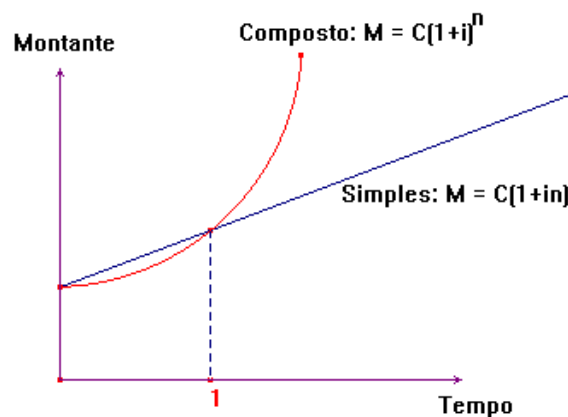


Gráfico 1

4.DESCONTO

Para comprovação de uma dívida para pagamento futuro, o credor emite um título (duplicata, nota promissória, etc.) que será cobrado do devedor na data do vencimento. Porém, caso ele necessite capitalizar-se, tem a opção de transferir o documento a outrem, como bancos, pessoas físicas ou instituições financeiras. Essa operação é chamada de endosso.

Para tanto, é cobrado uma taxa de desconto por antecipação dessa dívida e o valor resgatado será inferior ao valor de vencimento do título.

Para entendimento do que é desconto, serão abordados alguns conceitos:

Valor nominal (N)- valor do título na data de seu vencimento, também chamado de Valor de Face, Valor Futuro;

Desconto (D) - abatimento sobre o valor nominal;

Taxa de desconto (i) – percentual aplicado por antecipar a dívida;

Prazo (n) – prazo de antecipação da dívida;

Valor atual (A)–valor a ser recebido antecipadamente, também chamado de Valor Atual, Valor Presente.

O desconto pode ser concedido sob o Valor nominal – operação chamada de desconto comercial ou bancário, também chamado de desconto “por fora”, ou sob o Valor Atual – chamado de desconto racional ou desconto “por dentro”.

Além disso, pode ser:

- a) simples, usado amplamente em operações de curto prazo (até um ano), a uma taxa linear;
- b) composto, para as operações de longos prazos (superiores a um ano), a uma taxa exponencial.

4.1 Desconto Simples

São conhecidos dois tipos:

- a) Desconto “por dentro” (racional) – o abatimento é concedido sob o valor de resgate do título
- b) Desconto “por fora” (bancário ou comercial) – o abatimento é concedido sob o valor nominal do título.

4.1.1 Desconto Simples por Dentro (Desconto Racional)

O Desconto é calculado sobre o Valor Atual do título. Para cálculo, consideram-se as seguintes fórmulas:

$$D = A \times i \times n$$

Como o Desconto é a diferença entre o Valor Nominal e o Valor Atual:

$$D = N - A$$

Admita ilustrativamente os seguintes exemplos:

- 1) Um título de valor nominal de R\$6.000,00, a vencer em 01 ano, será descontado com 8 meses de antecedência. Sendo a taxa de 24% ao ano, calcule o desconto e o valor líquido da operação.

$$D = A \times i \times n$$

$$D = N - A$$

$$N - A = A \cdot i \cdot n$$

$$6.000,00 - A = A \times 0,24 \times \frac{8}{12}$$

$$6.000,00 - A = 0,16A$$

$$1,6A = 6.000,00$$

$$A = 5.172,41$$

$$D = 6.000,00 - 5.172,41 = 827,59$$

- 2) Determine a taxa racional praticada, em uma operação de desconto de uma promissória de valor R\$40.000,00, com prazo de antecipação de 5 meses, que resultou em um valor atual de R\$36.000,00

$$D = 40.000,00 - 36.000,00 = 4.000,00$$

$$D = A \times i \times n$$

$$4.000,00 = 36.000,00 \times i \times 5$$

$$\frac{4.000,00}{180.000,00} = i$$

$$i = 0,0222 = 2,22\% a.m$$

4.1.2 Desconto Simples por Fora (Bancário ou Comercial)

Para cálculo, considerar-se-ão as seguintes fórmulas.

$$D = N \times i \times n$$

Como o Desconto é a diferença entre o Valor Nominal e o Valor Atual:

$$D = N - A$$

Admita ilustrativamente os seguintes exemplos:

- 1) Um título com valor de face de R\$2.000,00 foi descontado com 02 meses de antecedência, à taxa de 1% ao mês. Quais foram o desconto concedido e o valor de resgate?

$$D = N \times i \times n$$

$$D = 2.000 \times 2 \times 0,01$$

$$D = 40$$

$$A = N - D$$

$$A = 2.000 - 40 = 1.960$$

- 2) Uma empresa oferece a seguinte relação de duplicatas, para serem descontadas em um banco comercial:

Nº. de Duplicatas	Prazo (dias)	Soma dos Valores
40	30	200.000,00
20	60	200.000,00
50	90	300.000,00
10	120	100.000,00
Valor Total da Operação		800.000,00

Tabela 12

Que valor deverá ser creditado na conta dessa empresa, considerando o mês comercial e sabendo que a taxa de desconto será de 3% ao mês?

Como aplicado em juros simples, o método hamburguês também poderá ser utilizado para desconto simples de títulos que serão descontados em uma mesma data, a uma mesma taxa de desconto através de um documento chamado de Borderô - nota discriminativa de quaisquer mercadorias ou valores entregues, sob a forma de extrato recapitulativo do débito e do crédito de uma conta, ou dos movimentos de uma operação comercial.

Assim:

$$D = \frac{(200.000,00 \times 30 + 200.000,00 \times 60 + 300.000,00 \times 90 + 100.000,00 \times 120) \times 3}{3000} = 57.000,00$$

$$A = 800.000,00 - 57.000,00 = 743.000,00$$

- 3) Uma promissória é descontada por uma instituição financeira 04 meses antes do seu vencimento. Sabendo que o valor de face é R\$5.000,00, taxa de desconto de 2% ao mês e que, além da taxa de desconto, é cobrado 1% sobre o valor do título, descontados no momento da liberação dos recursos, como despesas administrativas, calcule o valor atual deste título.

$$D = N \times i \times n$$

$$D = 5000,00 \times 4 \times 0,02 = 40,00$$

Despesas administrativas

$$5000,00 \times 0,01 = 50,00$$

$$A = 5000,00 - 40,00 - 50,00 = 4910,00$$

4.2 Desconto Composto

O desconto composto é obtido através da capitalização composta, por cálculos exponenciais e é utilizado basicamente em operações de longo prazo, podendo ser identificado igualmente ao desconto simples, em dois tipos:

a) Desconto por fora (bancário ou comercial) – o abatimento é concedido sob o Valor Nominal. É raramente empregado no Brasil, não apresentando uso prático. Sua importância é meramente teórica.

b) Desconto por dentro (racional) – o desconto é concedido sobre o Valor Atual, e é calculado multiplicando o Valor Nominal pela taxa de juros composta antecipada. Será o objeto de estudo o Desconto por dentro. Assim, serão expostas algumas fórmulas:

$$D = N - A$$

$$D = N \times \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

$$A = \frac{N}{(1+i)^n}$$

Considere os seguintes exemplos:

1) Um título de R\$15.000,00 será descontado à taxa de 2% ao mês. Faltando 45 dias para seu vencimento, determine:

a) o valor do desconto racional

$$i = 0,02$$

$$n = 45 \text{ dias} = 1,5 \text{ mês}$$

$$D = N \times \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

$$D = 15.000 \left[1 - \frac{1}{(1+0,02)^{1,5}} \right]$$

$$D = 15.000 \left[1 - \frac{1}{1,030} \right]$$

$$D = 436,89$$

b) o valor atual racional

$$D = N - A$$

$$A = N - D$$

$$A = 15.000,00 - 436,89$$

$$A = 14.563,11$$

- 2) Um título foi descontado 120 dias antes de seu vencimento, à taxa de 12% ao ano, e seu valor de resgate foi de R\$18.266,67. Qual seu valor nominal?

$$A = \frac{N}{(1+i)^n}$$

$$18.266,67 = \frac{N}{1,12^{\frac{120}{360}}}$$

$$N = 18.266,67 \times 1,0385$$

$$N = 18969,94$$

5. TAXAS EQUIVALENTES

Extraindo do dicionário Michaelis, o significado da palavra equivalente é “que tem valor ou preço igual”. Duas ou mais taxas, referenciadas a períodos diferentes são ditas equivalentes quando aplicadas a um mesmo capital, por um mesmo período de tempo, produzem o mesmo montante.

A seguir serão apresentados exemplos de taxas equivalentes, na capitalização composta:

Para uma taxa de juros de 1% ao mês, quais serão as taxas equivalentes, para os seguintes períodos:

a) um ano

Como dito anteriormente, os montantes obtidos pela aplicação de um capital, por um período de um ano a uma taxa i e, por 12 meses a taxa de 1% ao mês são iguais, ou seja:

$$\begin{aligned}PV(1 + i_a) &= PV(1 + i_m)^n \\PV(1 + i_a) &= PV(1 + 0,01)^{12} \\i_a &= 1,01^{12} - 1 \\i_a &= 0,1268 \\i_a &= 12,68\%\end{aligned}$$

b) um semestre

$$\begin{aligned}PV(1 + i_s) &= PV(1 + i_m)^n \\PV(1 + i_s) &= PV(1 + 0,01)^6 \\i_s &= 1,01^6 - 1 \\i_s &= 0,0615 \\i_s &= 6,15\%\end{aligned}$$

c) um quadrimestre

$$\begin{aligned}PV(1 + i_q) &= PV(1 + i_m)^n \\PV(1 + i_q) &= PV(1 + 0,01)^4 \\i_q &= 1,01^4 - 1 \\i_q &= 0,04060 \\i_s &= 4,06\%\end{aligned}$$

d) 10 dias - Considerando que o mês comercial tenha 30 dias, teremos:

$$PV(1+i) = PV(1+i_m)^n$$

$$PV(1+i) = PV(1+0,01)^{\frac{10}{30}}$$

$$i_q = 1,01^{\frac{10}{30}} - 1$$

$$i_q = 0,0033$$

$$i_s = 0,33\%$$

e) 01 semana – Considerando que o mês comercial tenha quatro semanas, teremos:

$$PV(1+i) = PV(1+i_m)^n$$

$$PV(1+i) = PV(1+0,01)^{\frac{1}{4}}$$

$$i_q = 1,01^{0,25} - 1$$

$$i_q = 0,0025$$

$$i_s = 0,25\%$$

Na capitalização simples as taxas equivalentes também são chamadas de taxas proporcionais ou lineares. Para uma taxa de 1% ao mês, a taxa anual equivalente será de 12%, a taxa semestral de 6%, a taxa quadrimestral de 4% e a taxa de uma semana 0,25%.

6. CLASSIFICAÇÃO DAS TAXAS DE JUROS

Nas operações com taxas de juros normalmente ocorrem dois prazos; o que se refere à taxa de juros e do prazo de ocorrência dos juros.

Considere o seguinte anúncio: “Empréstimo a 12% ao ano com capitalização mensal”. O prazo que se refere a taxa é de 12% ao ano e a periodicidade de ocorrência dos juros é a taxa proporcional mensal, também chamada de taxa linear, ou seja:

$$\frac{12\%}{12} = 1\% a.m.$$

A taxa anunciada, 12% ao ano, é chamada de taxa nominal;

A taxa mensal é proporcional à taxa nominal, ou seja, 1% ao mês;

A taxa efetiva, que realmente é cobrada, é a taxa equivalente anual, no regime de juros compostos.

$$\begin{aligned} PV(1+i_a) &= PV(1+i_m)^n \\ PV(1+i_a) &= PV(1+0,01)^{12} \\ i_a &= 1,01^{12} - 1 \\ i_a &= 0,1268 \\ i_a &= 12,68\% \end{aligned}$$

Outro exemplo é quando é exigido o pagamento antecipado de juros. Considerando que uma pessoa toma emprestado o valor de R\$100,00 e é exigido o pagamento antecipado de juros, a um custo de 10%, qual será o valor resgatado?

Para um capital de R\$100,00 a uma taxa de 10%, os juros exigidos são:

$$\begin{aligned} J &= PV \times i \\ J &= 100,00 \times 0,10 = 10,00 \end{aligned}$$

Como o pagamento dos juros é efetuado no ato do empréstimo, a pessoa resgatará o valor de R\$90,00.

Dessa forma, os juros cobrados na operação são de:

$$i = \frac{100-90}{90} = 0,1111 = 11,11\%$$

A taxa de 10% é a taxa nominal;

A taxa de 11,11% é a taxa efetiva.

Para maior esclarecimento, são apresentados alguns exemplos:

1) Um financiamento está sendo negociado a uma taxa nominal de 72% ao ano. Determinar o custo efetivo anual da operação, uma vez que os juros sejam capitalizados mensalmente.

$$\frac{72\%}{12\text{meses}} = 6\% a.m$$

$$PV(1+i_a) = PV(1+i_m)^n$$

$$PV(1+i_a) = PV(1+0,06)^{12}$$

$$i_a = 1,06^{12} - 1$$

$$i_a = 1,0122$$

$$i_a = 101,22\% a.a$$

2) Uma taxa efetiva de juros com capitalização trimestral é aplicada a um capital gerando um total de juros, ao final de 01 ano, igual a 170% do valor do capital aplicado. Determinar o valor desta taxa de juros.

$$PV(1+i_t) = PV(1+i_a)^n$$

$$PV(1+i_t) = PV(1+1,7)^{\frac{1}{4}}$$

$$i_a = 2,7^{0,25} - 1$$

$$i_a = 0,2819$$

$$i_a = 28,19\% at$$

3) Duas pessoas fizeram uma aplicação financeira. A pessoa "A" aplicou R\$100.000,00, à taxa efetiva de juros de 0,5% ao mês e a pessoa "B" aplicou R\$50.000,00 à taxa nominal de 6% ao ano. Em ambos os casos as capitalizações são mensais e os juros serão pagos junto com o principal. Ao final de 1(um) ano poderemos afirmar que:

a) O juro recebido pela pessoa "A" é maior do que o juro recebido pela pessoa "B".

Verdadeiro.

Pessoa "A"

$$FV = PV(1+i)^n$$

$$FV = 100.000(1+0,005)^{12}$$

$$FV = 106.167,78$$

$$J = FV - PV = 6,167,78$$

Pessoa "B"

$$\frac{6\%aa}{12} = 0,5\%am$$

$$FV = PV(1+i)^n$$

$$FV = 50.000(1+0,005)^{12}$$

$$FV = 53.083,89$$

$$J = FV - PV = 3.083,39$$

b) Não há proporcionalidade entre juros de "A" e "B".

Falso, uma vez que

$$0,5\% \times 12meses = 6\%aa$$

c) A taxa efetiva de juros de "A" é maior do que a taxa efetiva de "B"

Falso, pois ambas são iguais 0,5% ao mês

d) A taxa nominal de "B" é maior do que a taxa nominal de "A"

Falso, conforme demonstrado na alternativa b.

4) Aplicando R\$800,00 à taxa de juros de 12% ao ano, com capitalização bimestral, durante um ano e meio, qual será o valor do Montante?

$$\frac{12\%a.a}{6bimestres} = 2\%a.b$$

$$FV = PV(1+i)^n$$

$$FV = 800(1+0,02)^6$$

$$FV = 900,93$$

7. FLUXO DE CAIXA

Um fluxo de caixa representa uma série de pagamentos ou de recebimentos que ocorrem em determinado intervalo de tempo. Eles podem ser classificados de acordo com o período de ocorrência (antecipados, postecipados ou diferidos), pela periodicidade (períodos iguais ou diferentes), de acordo com a duração (limitados ou indeterminados) e pelos valores (constantes ou variáveis).

7.1 Valor Presente e Valor futuro

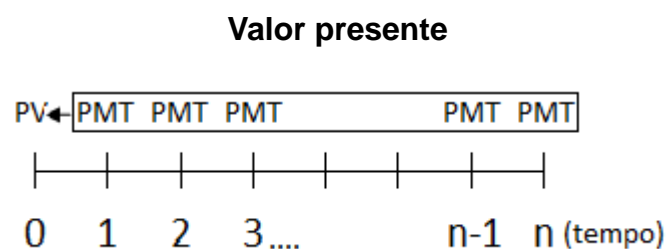
A idéia de Valor Presente e Valor Futuro farão sentido quando for percebido que o valor do dinheiro muda com o tempo. Mais vale 100 reais hoje do que 100 reais daqui a um ano, mesmo que os preços não variassem.

Uma consequência disso é que não se podem somar quantias em tempos distintos. Para comparar valores em dinheiro, deve-se compará-los em uma mesma data.

O Valor presente de um fluxo de caixa é determinado pelo somatório dos valores presentes de cada um de seus valores.

Já o Valor Futuro, para determinada taxa de juros por período, é a soma dos montantes de cada um dos termos da série de pagamentos/recebimentos.

Graficamente, têm-se as seguintes representações:



Logo:

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \dots + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}} + \frac{PMT}{(1+i)^n}$$

Colocando PMT em evidência:

$$PV = PMT \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

$$PV = PMT \left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-n+1} + (1+i)^{-n} \right]$$

A expressão entre colchetes é denominada Fator de Valor Presente, sendo representada da seguinte maneira:

$$FPV(i,n)$$

Com isso, a formulação genérica do valor presente assume a expressão:

$$PV = PMT \times FPV(i,n)$$

FPV equipara-se à soma de uma Progressão Geométrica de razão igual a $(1+i)^{-1}$ e n termos, sendo o primeiro $(1+i)^{-1}$ e o n -ésimo termo igual a $(1+i)^{-n}$.

Assim, pela soma de n termos de uma PG:

$$FPV(i,n) = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n} \cdot (1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}}$$

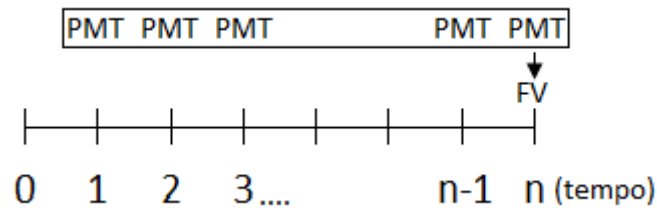
Multiplicando numerador e denominador por $(1+i)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} FPV(i,n) &= \frac{[(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n} \cdot (1+i)^{-1}] \times (1+i)}{[1 - (1+i)^{-1}] \times (1+i)} \\ FPV(i,n) &= \frac{(1+i)^{-1} \times (1+i) - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1} \times (1+i)}{(1+i) - (1+i)^{-1} \times (1+i)} \\ FPV(i,n) &= \frac{(1+i)^{-1+1} - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1+1}}{(1+i) - (1+i)^{-1+1}} \\ FPV(i,n) &= \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1+i-1} \\ FPV(i,n) &= \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \end{aligned}$$

Assim, o valor presente será representado por:

$$PV = PMT \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Valor futuro



O valor futuro ocorre junto com a última prestação. “Carregando” as prestações, capitalizadas, apura-se a seguinte expressão:

$$FV = PMT + PMT \times (1+i) + PMT \times (1+i)^2 + PMT \times (1+i)^3 + \dots + PMT \times (1+i)^{n-1}$$

Colocando PMT em evidência:

$$FV = PMT [1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-1}]$$

A expressão entre colchetes é denominada Fator de Valor Futuro, sendo representada da seguinte maneira:

$$FFV(i,n)$$

A formulação genérica do valor futuro de um fluxo de caixa uniforme é expressa da seguinte forma:

$$FV = PMT \times FFV(i,n)$$

Observe que a expressão FFV representa a soma dos termos de uma progressão geométrica, de primeiro termo igual a 1; razão $(1+i)$ e e-nésimo termo igual a $(1+i)^{n-1}$

Assim, pela soma de n termos de uma PG, e como explicitado para o Fator de Valor Presente:

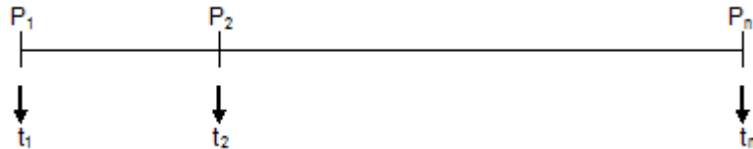
$$FFV(i,n) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Então:

$$FV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

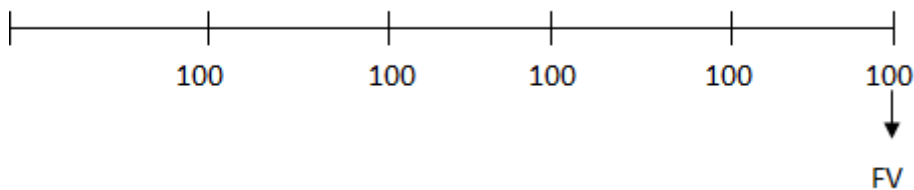
Séries de Pagamentos

Uma sucessão de pagamentos (ou recebimentos) P_1, P_2, \dots, P_n com vencimentos sucessivos t_1, t_2, \dots, t_n é chamada de **série de pagamentos**.



Admita-se o seguinte exemplo:

Determine o valor futuro, no final do 5º mês, de uma série de 5 prestações mensais iguais e consecutivas, no valor de 100 reais cada, à taxa de 4% ao mês, sabendo que a primeira é paga no final do primeiro mês e a última, no final do quinto mês.



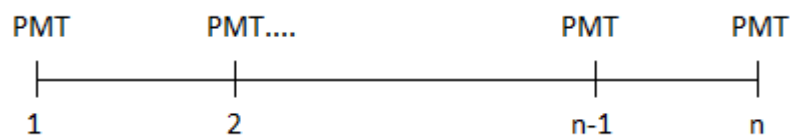
$$FV = 100 \times 1,04^4 + 100 \times 1,04^3 + 100 \times 1,04^2 + 100 \times 1,04 + 100 = 100(1,04^4 + 1,04^3 + 1,04^2 + 1,04 + 1) = 100 \times \frac{1,04^5 - 1}{0,04} = 541,63$$

Se os pagamentos são iguais e igualmente espaçados a **série é uniforme**.

Se os vencimentos dos termos de uma série podem ocorrer no final de cada período ou no início de cada período, a série tem termos **postecipados** ou **antecipados**, respectivamente.

Representações de séries de n pagamentos

a) postecipados:



b) antecipados:



Considere agora exemplos de séries com n pagamentos:

1) Quanto terá, ao final de 4 anos, uma pessoa que aplicar 500 reais por mês, durante esse prazo, em um “Fundo de Renda Fixa”, à taxa de 3% ao mês?

Solução:

Trata-se de determinar o valor futuro de uma série uniforme de 48 prestações de 500

reais a 3% por período. Daí $FV = 500 \frac{1,03^{48} - 1}{0,03} = 52.204,20$

Na HP 12C:

Teclas	Mostrador/Função
f CLX	Zerar o Mostrador
f CLEAR fin	Zerar os registros financeiros
500 CHS PMT	Entrar com o valor da prestação
3 i	Entrar com a taxa
48 n	Entrar com o período
FV	É apresentado o valor 52.204,20 no visor, correspondente ao Valor Futuro

Tabela 13

2) Quanto uma pessoa terá que aplicar mensalmente, num “Fundo de Renda Fixa”, durante 5 anos, para que possa resgatar 200.000 reais, sabendo que o “fundo” proporciona um rendimento de 2% ao mês?

Solução:

$$FV=200.000, n=60 \text{ e } i = 0,02 \Rightarrow 200.000 = PMT \frac{1,02^{60} - 1}{0,02} \Rightarrow PMT = 1.753,59$$

Na HP 12C:

Teclas	Mostrador/Função
f CLX	Zerar o Mostrador
f CLEAR fin	Zerar os registros financeiros
20000 CHS FV	Entrar com o valor futuro
2 i	Entrar com a taxa
60 n	Entrar com o período
PMT	É apresentado o valor 1.753,59 no visor, correspondente ao valor da prestação

Tabela 14

3) O preço a vista de um bem é 950 reais. Ele é vendido em doze prestações mensais iguais. Determine o valor da prestação para uma taxa mensal de juros de 15% se:

a) a primeira prestação é paga um mês após a compra

b) a primeira prestação é paga no ato da compra.

Solução:

a) trata-se de uma série uniforme postecipada. Igualando o valor futuro da série na data 12 (data do último pagamento) ao valor do preço à vista nessa data, obtém-se:

$$PMT(1,15^{11} + 1,15^{10} + \dots + 1,15 + 1) = 950 \times 1,15^{12} \Rightarrow PMT \frac{1,15^{12} - 1}{0,15} = 950 \times 1,15^{12} \Rightarrow$$

$$PMT = \frac{950 \times 1,15^{12} \times 0,15}{1,15^{12} - 1} = 175,26$$

Na calculadora HP 12C:

Teclas	Mostrador/Função
f CLX	Zerar o Mostrador
G END	Programar a série para pagamento postecipado
f CLEAR fin	Zerar os registros financeiros
950 CHS PV	Entrar com o valor presente
15 i	Entrar com a taxa
12 n	Entrar com o período
PMT	É apresentado o valor 175,26 no visor, correspondente ao valor da prestação

Tabela 15

b) todas as prestações são antecipadas em um mês. Logo seu valor será

$$PMT = \frac{PV}{1+i} = \frac{175,26}{1,15} = 152,40$$

Na calculadora HP 12C:

Teclas	Mostrador/Função
f CLX	Zerar o Mostrador
G BEGIN	Programar a série para pagamento antecipado
f CLEAR fin	Zerar os registros financeiros
950 CHS PV	Entrar com o valor presente
15 i	Entrar com a taxa
12 n	Entrar com o período
PMT	É apresentado o valor 152,40 no visor, correspondente ao valor da prestação

Tabela 16

8. SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Os sistemas de amortização são utilizados para operações de empréstimos e financiamento de longo prazo, quando há pagamentos periódicos da amortização da dívida mais os juros da operação, este último calculado sobre o saldo devedor do período anterior, sendo assim operados no regime de capitalização composto.

Os sistemas de amortização dependerão de como o capital emprestado e os juros da operação serão restituídos ao credor. Dessa forma, são apresentadas diversas planilhas financeiras, mas serão abordados os principais sistemas de amortização utilizados no Brasil, quais sejam:

- a) Sistema de Amortização Constante (SAC)
- b) Sistema de Amortização Francês, pela tabela Price

Para tanto, os termos usualmente empregados são:

Juros (J) – é retorno ao credor por ter emprestado o capital;

Amortização (A) – é o abatimento do capital emprestado, mediante parcelas periódicas ou de uma única vez.

Saldo Devedor (PV) – é o valor da dívida em um determinado momento, excluído o valor da amortização, no mesmo momento.

Prestação (PMT) – é composta pela amortização mais os juros da operação, em um determinado período de tempo

Carência – quando é protelado o primeiro pagamento da amortização do capital.

A seguir serão apresentados exemplos dos principais tipos de financiamentos, explicitados também através de planilhas e fórmulas do Excel. Ainda, caso o leitor tenha interesse em calcular outros financiamentos com prazos, taxas e valores diferentes, poderá também acessar o site <http://www.mat.ufmg.br/~regi/> nos links Páginas Interativas, seguido de Matemática Financeira (28/8/2002).

8.1 Sistema de Amortização Constante (SAC)

Como o próprio nome já diz, o Sistema de Amortização Constante ocorre quando o valor do financiamento é amortizado constantemente a mesma quantia, em todo o período da operação, sendo calculada a amortização pela divisão do capital pelo

número de pagamentos das prestações. Este tipo de amortização é muito utilizado no Brasil, principalmente para financiamento habitacional.

Como a amortização é constante e os juros são calculados sobre a dívida do momento anterior, este último decresce em progressão aritmética, a uma razão $\left(\frac{PV}{n}\right) \times i$, sendo i a taxa de juros empregada na operação. Da mesma forma, como a prestação é composta pela amortização (que é constante) mais os juros (que decresce em PA), ela também decresce em progressão aritmética de razão $\left(\frac{PV}{n}\right) \times i$ e o saldo devedor decresce a uma progressão aritmética de razão igual a amortização.

Para exemplificar, considere um empréstimo de R\$150.000,00, a taxa de 12% ao ano, capitalizada mensalmente, pelo prazo de 10 meses.

Tem-se:

$$\text{Amortização}(A) = \frac{PV}{n} = \frac{150.000}{10} = 15.000$$

$$i = \frac{12\%}{12} = 1\% \text{ am}$$

$$J_1 = 150000 \times 0,01 = 1500;$$

$$J_2 = 135000 \times 0,01 = 1350$$

...

$$J_{10} = 15000 \times 0,01 = 150$$

$$PMT_1 = J + A = 1500 + 15000 = 16500;$$

$$PMT_2 = 1350 + 15000 = 16350$$

...

$$PMT_{10} = 150 + 15000 = 15150$$

$$PV_1 = PV_0 - A_1 = 135000;$$

$$PV_2 = PV_1 - A_2 = 120000$$

...

$$PV_{10} = 0$$

De modo análogo, procedem-se os cálculos para os valores dos juros, prestação e

amortização para os demais períodos.

n	J	A	PMT	PV
0				150000
1	1500	15000	16500	135000
2	1350	15000	16350	120000
3	1200	15000	16200	105000
4	1050	15000	16050	90000
5	900	15000	15900	75000
6	750	15000	15750	60000
7	600	15000	15600	45000
8	450	15000	15450	30000
9	300	15000	15300	15000
10	150	15000	15150	0

Tabela 17

Usando fórmulas para planilha do Excel:

Planilha do Excel	A	B	C	D	E	F
1	n	J	A	PMT	PV	I
2	0				150000	0,01
3	1	=F\$2*E2	=E\$2/10	=B3+C3	=E2-C3	
4	2	=F\$2*E3	=E\$2/10	=B4+C4	=E3-C4	
5	3	=F\$2*E4	=E\$2/10	=B5+C5	=E4-C5	
6	4	=F\$2*E5	=E\$2/10	=B6+C6	=E5-C6	
7	5	=F\$2*E6	=E\$2/10	=B7+C7	=E6-C7	
8	6	=F\$2*E7	=E\$2/10	=B8+C8	=E7-C8	
9	7	=F\$2*E8	=E\$2/10	=B9+C9	=E8-C9	
10	8	=F\$2*E9	=E\$2/10	=B10+C10	=E9-C10	
11	9	=F\$2*E10	=E\$2/10	=B11+C11	=E10-C11	
12	10	=F\$2*E11	=E\$2/10	=B12+C12	=E11-C12	

Tabela 18

Observação: No Excel utiliza-se \$ para travar células. Assim, quando utilizado F\$2 pretende-se que seja calculado somente para o valor de 0,01, na célula F2, pois caso contrário, calcular-se-ia para as células F3, F4, e assim sucessivamente.

Através de uma simulação no site da Caixa Econômica Federal, através do link <http://www8.caixa.gov.br/siopiinternet/simulaOperacaoInternet.do?method=inicializarCasoUso> pode-se obter várias tabelas de financiamento, de acordo com a renda bruta familiar da pessoa que pretende contratar o financiamento, sua idade, valor e

localidade do imóvel, etc.

Como ilustração, considere as seguintes condições:

- Valor do imóvel novo: R\$135.000,00
- Localidade: Sete Lagoas/MG
- Renda bruta familiar: três salários mínimos
- Data de nascimento da pessoa que irá contratar o empréstimo: 14/07/1981
- A pessoa que irá contratar o financiamento possui três anos de trabalho sob regime do FGTS

Nessas condições, a Caixa financiará somente parte do valor do imóvel, equivalente a R\$91.518,94, à taxa de 4,5% a. a., para pagamento em 360 meses (30 anos). Ainda será cobrado o valor de R\$12,78/mensal, referente o pagamento de seguro.

Como a taxa nominal é de 4,5% a. a., será cobrada a taxa de $\frac{4,5}{12} = 0,3750\% a.m$

A tabela de financiamento será:

mês	Juros	Amortização	Seguro	Prestação	Prestação+ Seguro	Dívida
0						91518,94
1	343,20	254,22	12,78	597,42	610,20	91264,72
2	342,24	254,22	12,78	596,46	609,24	91010,50
3	341,29	254,22	12,78	595,51	608,29	90756,28
4	340,34	254,22	12,78	594,56	607,34	90502,06
5	339,38	254,22	12,78	593,60	606,38	90247,84
6	338,43	254,22	12,78	592,65	605,43	89993,62
7	337,48	254,22	12,78	591,70	604,48	89739,41
8	336,52	254,22	12,78	590,74	603,52	89485,19
9	335,57	254,22	12,78	589,79	602,57	89230,97
10	334,62	254,22	12,78	588,84	601,62	88976,75
11	333,66	254,22	12,78	587,88	600,66	88722,53
12	332,71	254,22	12,78	586,93	599,71	88468,31
13	331,76	254,22	12,78	585,98	598,76	88214,09
14	330,80	254,22	12,78	585,02	597,80	87959,87
15	329,85	254,22	12,78	584,07	596,85	87705,65
16	328,90	254,22	12,78	583,12	595,90	87451,43
17	327,94	254,22	12,78	582,16	594,94	87197,21
18	326,99	254,22	12,78	581,21	593,99	86942,99
19	326,04	254,22	12,78	580,26	593,04	86688,77
20	325,08	254,22	12,78	579,30	592,08	86434,55

21	324,13	254,22	12,78	578,35	591,13	86180,34
22	323,18	254,22	12,78	577,40	590,18	85926,12
23	322,22	254,22	12,78	576,44	589,22	85671,90
24	321,27	254,22	12,78	575,49	588,27	85417,68
25	320,32	254,22	12,78	574,54	587,32	85163,46
26	319,36	254,22	12,78	573,58	586,36	84909,24
27	318,41	254,22	12,78	572,63	585,41	84655,02
28	317,46	254,22	12,78	571,68	584,46	84400,80
29	316,50	254,22	12,78	570,72	583,50	84146,58
30	315,55	254,22	12,78	569,77	582,55	83892,36
31	314,60	254,22	12,78	568,82	581,60	83638,14
32	313,64	254,22	12,78	567,86	580,64	83383,92
33	312,69	254,22	12,78	566,91	579,69	83129,70
34	311,74	254,22	12,78	565,96	578,74	82875,48
35	310,78	254,22	12,78	565,00	577,78	82621,27
36	309,83	254,22	12,78	564,05	576,83	82367,05
37	308,88	254,22	12,78	563,10	575,88	82112,83
38	307,92	254,22	12,78	562,14	574,92	81858,61
39	306,97	254,22	12,78	561,19	573,97	81604,39
40	306,02	254,22	12,78	560,24	573,02	81350,17
41	305,06	254,22	12,78	559,28	572,06	81095,95
42	304,11	254,22	12,78	558,33	571,11	80841,73
43	303,16	254,22	12,78	557,38	570,16	80587,51
44	302,20	254,22	12,78	556,42	569,20	80333,29
45	301,25	254,22	12,78	555,47	568,25	80079,07
46	300,30	254,22	12,78	554,52	567,30	79824,85
47	299,34	254,22	12,78	553,56	566,34	79570,63
48	298,39	254,22	12,78	552,61	565,39	79316,41
49	297,44	254,22	12,78	551,66	564,44	79062,20
50	296,48	254,22	12,78	550,70	563,48	78807,98
51	295,53	254,22	12,78	549,75	562,53	78553,76
52	294,58	254,22	12,78	548,80	561,58	78299,54
53	293,62	254,22	12,78	547,84	560,62	78045,32
54	292,67	254,22	12,78	546,89	559,67	77791,10
55	291,72	254,22	12,78	545,94	558,72	77536,88
56	290,76	254,22	12,78	544,98	557,76	77282,66
57	289,81	254,22	12,78	544,03	556,81	77028,44
58	288,86	254,22	12,78	543,08	555,86	76774,22
59	287,90	254,22	12,78	542,12	554,90	76520,00
60	286,95	254,22	12,78	541,17	553,95	76265,78
61	286,00	254,22	12,78	540,22	553,00	76011,56
62	285,04	254,22	12,78	539,26	552,04	75757,34
63	284,09	254,22	12,78	538,31	551,09	75503,13
64	283,14	254,22	12,78	537,36	550,14	75248,91
65	282,18	254,22	12,78	536,40	549,18	74994,69

66	281,23	254,22	12,78	535,45	548,23	74740,47
67	280,28	254,22	12,78	534,50	547,28	74486,25
68	279,32	254,22	12,78	533,54	546,32	74232,03
69	278,37	254,22	12,78	532,59	545,37	73977,81
70	277,42	254,22	12,78	531,64	544,42	73723,59
71	276,46	254,22	12,78	530,68	543,46	73469,37
72	275,51	254,22	12,78	529,73	542,51	73215,15
73	274,56	254,22	12,78	528,78	541,56	72960,93
74	273,60	254,22	12,78	527,82	540,60	72706,71
75	272,65	254,22	12,78	526,87	539,65	72452,49
76	271,70	254,22	12,78	525,92	538,70	72198,27
77	270,74	254,22	12,78	524,96	537,74	71944,06
78	269,79	254,22	12,78	524,01	536,79	71689,84
79	268,84	254,22	12,78	523,06	535,84	71435,62
80	267,88	254,22	12,78	522,10	534,88	71181,40
81	266,93	254,22	12,78	521,15	533,93	70927,18
82	265,98	254,22	12,78	520,20	532,98	70672,96
83	265,02	254,22	12,78	519,24	532,02	70418,74
84	264,07	254,22	12,78	518,29	531,07	70164,52
85	263,12	254,22	12,78	517,34	530,12	69910,30
86	262,16	254,22	12,78	516,38	529,16	69656,08
87	261,21	254,22	12,78	515,43	528,21	69401,86
88	260,26	254,22	12,78	514,48	527,26	69147,64
89	259,30	254,22	12,78	513,52	526,30	68893,42
90	258,35	254,22	12,78	512,57	525,35	68639,20
91	257,40	254,22	12,78	511,62	524,40	68384,99
92	256,44	254,22	12,78	510,66	523,44	68130,77
93	255,49	254,22	12,78	509,71	522,49	67876,55
94	254,54	254,22	12,78	508,76	521,54	67622,33
95	253,58	254,22	12,78	507,80	520,58	67368,11
96	252,63	254,22	12,78	506,85	519,63	67113,89
97	251,68	254,22	12,78	505,90	518,68	66859,67
98	250,72	254,22	12,78	504,94	517,72	66605,45
99	249,77	254,22	12,78	503,99	516,77	66351,23
100	248,82	254,22	12,78	503,04	515,82	66097,01
101	247,86	254,22	12,78	502,08	514,86	65842,79
102	246,91	254,22	12,78	501,13	513,91	65588,57
103	245,96	254,22	12,78	500,18	512,96	65334,35
104	245,00	254,22	12,78	499,22	512,00	65080,14
105	244,05	254,22	12,78	498,27	511,05	64825,92
106	243,10	254,22	12,78	497,32	510,10	64571,70
107	242,14	254,22	12,78	496,36	509,14	64317,48
108	241,19	254,22	12,78	495,41	508,19	64063,26
109	240,24	254,22	12,78	494,46	507,24	63809,04
110	239,28	254,22	12,78	493,50	506,28	63554,82

111	238,33	254,22	12,78	492,55	505,33	63300,60
112	237,38	254,22	12,78	491,60	504,38	63046,38
113	236,42	254,22	12,78	490,64	503,42	62792,16
114	235,47	254,22	12,78	489,69	502,47	62537,94
115	234,52	254,22	12,78	488,74	501,52	62283,72
116	233,56	254,22	12,78	487,78	500,56	62029,50
117	232,61	254,22	12,78	486,83	499,61	61775,28
118	231,66	254,22	12,78	485,88	498,66	61521,07
119	230,70	254,22	12,78	484,92	497,70	61266,85
120	229,75	254,22	12,78	483,97	496,75	61012,63
121	228,80	254,22	12,78	483,02	495,80	60758,41
122	227,84	254,22	12,78	482,06	494,84	60504,19
123	226,89	254,22	12,78	481,11	493,89	60249,97
124	225,94	254,22	12,78	480,16	492,94	59995,75
125	224,98	254,22	12,78	479,20	491,98	59741,53
126	224,03	254,22	12,78	478,25	491,03	59487,31
127	223,08	254,22	12,78	477,30	490,08	59233,09
128	222,12	254,22	12,78	476,34	489,12	58978,87
129	221,17	254,22	12,78	475,39	488,17	58724,65
130	220,22	254,22	12,78	474,44	487,22	58470,43
131	219,26	254,22	12,78	473,48	486,26	58216,21
132	218,31	254,22	12,78	472,53	485,31	57962,00
133	217,36	254,22	12,78	471,58	484,36	57707,78
134	216,40	254,22	12,78	470,62	483,40	57453,56
135	215,45	254,22	12,78	469,67	482,45	57199,34
136	214,50	254,22	12,78	468,72	481,50	56945,12
137	213,54	254,22	12,78	467,76	480,54	56690,90
138	212,59	254,22	12,78	466,81	479,59	56436,68
139	211,64	254,22	12,78	465,86	478,64	56182,46
140	210,68	254,22	12,78	464,90	477,68	55928,24
141	209,73	254,22	12,78	463,95	476,73	55674,02
142	208,78	254,22	12,78	463,00	475,78	55419,80
143	207,82	254,22	12,78	462,04	474,82	55165,58
144	206,87	254,22	12,78	461,09	473,87	54911,36
145	205,92	254,22	12,78	460,14	472,92	54657,14
146	204,96	254,22	12,78	459,18	471,96	54402,93
147	204,01	254,22	12,78	458,23	471,01	54148,71
148	203,06	254,22	12,78	457,28	470,06	53894,49
149	202,10	254,22	12,78	456,32	469,10	53640,27
150	201,15	254,22	12,78	455,37	468,15	53386,05
151	200,20	254,22	12,78	454,42	467,20	53131,83
152	199,24	254,22	12,78	453,46	466,24	52877,61
153	198,29	254,22	12,78	452,51	465,29	52623,39
154	197,34	254,22	12,78	451,56	464,34	52369,17
155	196,38	254,22	12,78	450,60	463,38	52114,95

156	195,43	254,22	12,78	449,65	462,43	51860,73
157	194,48	254,22	12,78	448,70	461,48	51606,51
158	193,52	254,22	12,78	447,74	460,52	51352,29
159	192,57	254,22	12,78	446,79	459,57	51098,07
160	191,62	254,22	12,78	445,84	458,62	50843,86
161	190,66	254,22	12,78	444,88	457,66	50589,64
162	189,71	254,22	12,78	443,93	456,71	50335,42
163	188,76	254,22	12,78	442,98	455,76	50081,20
164	187,80	254,22	12,78	442,02	454,80	49826,98
165	186,85	254,22	12,78	441,07	453,85	49572,76
166	185,90	254,22	12,78	440,12	452,90	49318,54
167	184,94	254,22	12,78	439,16	451,94	49064,32
168	183,99	254,22	12,78	438,21	450,99	48810,10
169	183,04	254,22	12,78	437,26	450,04	48555,88
170	182,08	254,22	12,78	436,30	449,08	48301,66
171	181,13	254,22	12,78	435,35	448,13	48047,44
172	180,18	254,22	12,78	434,40	447,18	47793,22
173	179,22	254,22	12,78	433,44	446,22	47539,00
174	178,27	254,22	12,78	432,49	445,27	47284,79
175	177,32	254,22	12,78	431,54	444,32	47030,57
176	176,36	254,22	12,78	430,58	443,36	46776,35
177	175,41	254,22	12,78	429,63	442,41	46522,13
178	174,46	254,22	12,78	428,68	441,46	46267,91
179	173,50	254,22	12,78	427,72	440,50	46013,69
180	172,55	254,22	12,78	426,77	439,55	45759,47
181	171,60	254,22	12,78	425,82	438,60	45505,25
182	170,64	254,22	12,78	424,86	437,64	45251,03
183	169,69	254,22	12,78	423,91	436,69	44996,81
184	168,74	254,22	12,78	422,96	435,74	44742,59
185	167,78	254,22	12,78	422,00	434,78	44488,37
186	166,83	254,22	12,78	421,05	433,83	44234,15
187	165,88	254,22	12,78	420,10	432,88	43979,94
188	164,92	254,22	12,78	419,14	431,92	43725,72
189	163,97	254,22	12,78	418,19	430,97	43471,50
190	163,02	254,22	12,78	417,24	430,02	43217,28
191	162,06	254,22	12,78	416,28	429,06	42963,06
192	161,11	254,22	12,78	415,33	428,11	42708,84
193	160,16	254,22	12,78	414,38	427,16	42454,62
194	159,20	254,22	12,78	413,42	426,20	42200,40
195	158,25	254,22	12,78	412,47	425,25	41946,18
196	157,30	254,22	12,78	411,52	424,30	41691,96
197	156,34	254,22	12,78	410,56	423,34	41437,74
198	155,39	254,22	12,78	409,61	422,39	41183,52
199	154,44	254,22	12,78	408,66	421,44	40929,30
200	153,48	254,22	12,78	407,70	420,48	40675,08

201	152,53	254,22	12,78	406,75	419,53	40420,87
202	151,58	254,22	12,78	405,80	418,58	40166,65
203	150,62	254,22	12,78	404,84	417,62	39912,43
204	149,67	254,22	12,78	403,89	416,67	39658,21
205	148,72	254,22	12,78	402,94	415,72	39403,99
206	147,76	254,22	12,78	401,98	414,76	39149,77
207	146,81	254,22	12,78	401,03	413,81	38895,55
208	145,86	254,22	12,78	400,08	412,86	38641,33
209	144,90	254,22	12,78	399,12	411,90	38387,11
210	143,95	254,22	12,78	398,17	410,95	38132,89
211	143,00	254,22	12,78	397,22	410,00	37878,67
212	142,05	254,22	12,78	396,26	409,04	37624,45
213	141,09	254,22	12,78	395,31	408,09	37370,23
214	140,14	254,22	12,78	394,36	407,14	37116,01
215	139,19	254,22	12,78	393,40	406,18	36861,80
216	138,23	254,22	12,78	392,45	405,23	36607,58
217	137,28	254,22	12,78	391,50	404,28	36353,36
218	136,33	254,22	12,78	390,54	403,32	36099,14
219	135,37	254,22	12,78	389,59	402,37	35844,92
220	134,42	254,22	12,78	388,64	401,42	35590,70
221	133,47	254,22	12,78	387,68	400,46	35336,48
222	132,51	254,22	12,78	386,73	399,51	35082,26
223	131,56	254,22	12,78	385,78	398,56	34828,04
224	130,61	254,22	12,78	384,82	397,60	34573,82
225	129,65	254,22	12,78	383,87	396,65	34319,60
226	128,70	254,22	12,78	382,92	395,70	34065,38
227	127,75	254,22	12,78	381,96	394,74	33811,16
228	126,79	254,22	12,78	381,01	393,79	33556,94
229	125,84	254,22	12,78	380,06	392,84	33302,73
230	124,89	254,22	12,78	379,10	391,88	33048,51
231	123,93	254,22	12,78	378,15	390,93	32794,29
232	122,98	254,22	12,78	377,20	389,98	32540,07
233	122,03	254,22	12,78	376,24	389,02	32285,85
234	121,07	254,22	12,78	375,29	388,07	32031,63
235	120,12	254,22	12,78	374,34	387,12	31777,41
236	119,17	254,22	12,78	373,38	386,16	31523,19
237	118,21	254,22	12,78	372,43	385,21	31268,97
238	117,26	254,22	12,78	371,48	384,26	31014,75
239	116,31	254,22	12,78	370,52	383,30	30760,53
240	115,35	254,22	12,78	369,57	382,35	30506,31
241	114,40	254,22	12,78	368,62	381,40	30252,09
242	113,45	254,22	12,78	367,66	380,44	29997,87
243	112,49	254,22	12,78	366,71	379,49	29743,66
244	111,54	254,22	12,78	365,76	378,54	29489,44
245	110,59	254,22	12,78	364,80	377,58	29235,22

246	109,63	254,22	12,78	363,85	376,63	28981,00
247	108,68	254,22	12,78	362,90	375,68	28726,78
248	107,73	254,22	12,78	361,94	374,72	28472,56
249	106,77	254,22	12,78	360,99	373,77	28218,34
250	105,82	254,22	12,78	360,04	372,82	27964,12
251	104,87	254,22	12,78	359,08	371,86	27709,90
252	103,91	254,22	12,78	358,13	370,91	27455,68
253	102,96	254,22	12,78	357,18	369,96	27201,46
254	102,01	254,22	12,78	356,22	369,00	26947,24
255	101,05	254,22	12,78	355,27	368,05	26693,02
256	100,10	254,22	12,78	354,32	367,10	26438,80
257	99,15	254,22	12,78	353,36	366,14	26184,59
258	98,19	254,22	12,78	352,41	365,19	25930,37
259	97,24	254,22	12,78	351,46	364,24	25676,15
260	96,29	254,22	12,78	350,50	363,28	25421,93
261	95,33	254,22	12,78	349,55	362,33	25167,71
262	94,38	254,22	12,78	348,60	361,38	24913,49
263	93,43	254,22	12,78	347,64	360,42	24659,27
264	92,47	254,22	12,78	346,69	359,47	24405,05
265	91,52	254,22	12,78	345,74	358,52	24150,83
266	90,57	254,22	12,78	344,78	357,56	23896,61
267	89,61	254,22	12,78	343,83	356,61	23642,39
268	88,66	254,22	12,78	342,88	355,66	23388,17
269	87,71	254,22	12,78	341,92	354,70	23133,95
270	86,75	254,22	12,78	340,97	353,75	22879,74
271	85,80	254,22	12,78	340,02	352,80	22625,52
272	84,85	254,22	12,78	339,06	351,84	22371,30
273	83,89	254,22	12,78	338,11	350,89	22117,08
274	82,94	254,22	12,78	337,16	349,94	21862,86
275	81,99	254,22	12,78	336,20	348,98	21608,64
276	81,03	254,22	12,78	335,25	348,03	21354,42
277	80,08	254,22	12,78	334,30	347,08	21100,20
278	79,13	254,22	12,78	333,35	346,13	20845,98
279	78,17	254,22	12,78	332,39	345,17	20591,76
280	77,22	254,22	12,78	331,44	344,22	20337,54
281	76,27	254,22	12,78	330,49	343,27	20083,32
282	75,31	254,22	12,78	329,53	342,31	19829,10
283	74,36	254,22	12,78	328,58	341,36	19574,88
284	73,41	254,22	12,78	327,63	340,41	19320,67
285	72,45	254,22	12,78	326,67	339,45	19066,45
286	71,50	254,22	12,78	325,72	338,50	18812,23
287	70,55	254,22	12,78	324,77	337,55	18558,01
288	69,59	254,22	12,78	323,81	336,59	18303,79
289	68,64	254,22	12,78	322,86	335,64	18049,57
290	67,69	254,22	12,78	321,91	334,69	17795,35

291	66,73	254,22	12,78	320,95	333,73	17541,13
292	65,78	254,22	12,78	320,00	332,78	17286,91
293	64,83	254,22	12,78	319,05	331,83	17032,69
294	63,87	254,22	12,78	318,09	330,87	16778,47
295	62,92	254,22	12,78	317,14	329,92	16524,25
296	61,97	254,22	12,78	316,19	328,97	16270,03
297	61,01	254,22	12,78	315,23	328,01	16015,81
298	60,06	254,22	12,78	314,28	327,06	15761,60
299	59,11	254,22	12,78	313,33	326,11	15507,38
300	58,15	254,22	12,78	312,37	325,15	15253,16
301	57,20	254,22	12,78	311,42	324,20	14998,94
302	56,25	254,22	12,78	310,47	323,25	14744,72
303	55,29	254,22	12,78	309,51	322,29	14490,50
304	54,34	254,22	12,78	308,56	321,34	14236,28
305	53,39	254,22	12,78	307,61	320,39	13982,06
306	52,43	254,22	12,78	306,65	319,43	13727,84
307	51,48	254,22	12,78	305,70	318,48	13473,62
308	50,53	254,22	12,78	304,75	317,53	13219,40
309	49,57	254,22	12,78	303,79	316,57	12965,18
310	48,62	254,22	12,78	302,84	315,62	12710,96
311	47,67	254,22	12,78	301,89	314,67	12456,74
312	46,71	254,22	12,78	300,93	313,71	12202,53
313	45,76	254,22	12,78	299,98	312,76	11948,31
314	44,81	254,22	12,78	299,03	311,81	11694,09
315	43,85	254,22	12,78	298,07	310,85	11439,87
316	42,90	254,22	12,78	297,12	309,90	11185,65
317	41,95	254,22	12,78	296,17	308,95	10931,43
318	40,99	254,22	12,78	295,21	307,99	10677,21
319	40,04	254,22	12,78	294,26	307,04	10422,99
320	39,09	254,22	12,78	293,31	306,09	10168,77
321	38,13	254,22	12,78	292,35	305,13	9914,55
322	37,18	254,22	12,78	291,40	304,18	9660,33
323	36,23	254,22	12,78	290,45	303,23	9406,11
324	35,27	254,22	12,78	289,49	302,27	9151,89
325	34,32	254,22	12,78	288,54	301,32	8897,67
326	33,37	254,22	12,78	287,59	300,37	8643,46
327	32,41	254,22	12,78	286,63	299,41	8389,24
328	31,46	254,22	12,78	285,68	298,46	8135,02
329	30,51	254,22	12,78	284,73	297,51	7880,80
330	29,55	254,22	12,78	283,77	296,55	7626,58
331	28,60	254,22	12,78	282,82	295,60	7372,36
332	27,65	254,22	12,78	281,87	294,65	7118,14
333	26,69	254,22	12,78	280,91	293,69	6863,92
334	25,74	254,22	12,78	279,96	292,74	6609,70
335	24,79	254,22	12,78	279,01	291,79	6355,48

336	23,83	254,22	12,78	278,05	290,83	6101,26
337	22,88	254,22	12,78	277,10	289,88	5847,04
338	21,93	254,22	12,78	276,15	288,93	5592,82
339	20,97	254,22	12,78	275,19	287,97	5338,60
340	20,02	254,22	12,78	274,24	287,02	5084,39
341	19,07	254,22	12,78	273,29	286,07	4830,17
342	18,11	254,22	12,78	272,33	285,11	4575,95
343	17,16	254,22	12,78	271,38	284,16	4321,73
344	16,21	254,22	12,78	270,43	283,21	4067,51
345	15,25	254,22	12,78	269,47	282,25	3813,29
346	14,30	254,22	12,78	268,52	281,30	3559,07
347	13,35	254,22	12,78	267,57	280,35	3304,85
348	12,39	254,22	12,78	266,61	279,39	3050,63
349	11,44	254,22	12,78	265,66	278,44	2796,41
350	10,49	254,22	12,78	264,71	277,49	2542,19
351	9,53	254,22	12,78	263,75	276,53	2287,97
352	8,58	254,22	12,78	262,80	275,58	2033,75
353	7,63	254,22	12,78	261,85	274,63	1779,53
354	6,67	254,22	12,78	260,89	273,67	1525,32
355	5,72	254,22	12,78	259,94	272,72	1271,10
356	4,77	254,22	12,78	258,99	271,77	1016,88
357	3,81	254,22	12,78	258,03	270,81	762,66
358	2,86	254,22	12,78	257,08	269,86	508,44
359	1,91	254,22	12,78	256,13	268,91	254,22
360	0,95	254,22	12,78	255,17	267,95	0,00

Tabela 19

8.1.1 SAC com carência

Diariamente as pessoas se deparam com anúncios tais como:

Compre agora e pague só depois do carnaval.

Compre agora e comece a pagar só no ano que vem.

Para financiamentos no Brasil é muito comum essa prática, que consiste no protelamento do primeiro pagamento da amortização do capital.

Exemplificando, considerar-se-á carência de 2 meses para pagamento da primeira amortização. Deverão ser analisadas duas possibilidades que são as mais usuais:

- a) Os juros serão pagos durante a carência;

N	J	A	PMT	D	I
0				150000	0,01
1	1500		1500	150000	
2	1500		1500	150000	
3	1500	15000	16500	135000	
4	1350	15000	16350	120000	
5	1200	15000	16200	105000	
6	1050	15000	16050	90000	
7	900	15000	15900	75000	
8	750	15000	15750	60000	
9	600	15000	15600	45000	
10	450	15000	15450	30000	
11	300	15000	15300	15000	
12	150	15000	15150	0	
TOTAL	11250	150000			

Tabela 20

No Excel:

Planilha do Excel	A	B	C	D	E	F
1	N	J	A	PMT	PV	I
2	0				150000	0,01
3	1	=E2*F\$2		=B3+C3	=E2-C3	
4	2	=E3*F\$2		=B4+C4	=E3-C4	
5	3	=F\$2*E2	=E\$4/10	=B5+C5	=E4-C5	
6	4	=F\$2*E5	=E\$4/10	=B6+C6	=E5-C6	
7	5	=F\$2*E6	=E\$4/10	=B7+C7	=E6-C7	
8	6	=F\$2*E7	=E\$4/10	=B8+C8	=E7-C8	
9	7	=F\$2*E8	=E\$4/10	=B9+C9	=E8-C9	
10	8	=F\$2*E9	=E\$4/10	=B10+C10	=E9-C10	
11	9	=F\$2*E10	=E\$4/10	=B11+C11	=E10-C11	
12	10	=F\$2*E11	=E\$4/10	=B12+C12	=E11-C12	
13	11	=F\$2*E12	=E\$4/10	=B13+C13	=E12-C13	
14	12	=F\$2*E13	=E\$4/10	=B14+C14	=E13-C14	
	TOTAL	=SOMA(B3:B14)	=SOMA(C5:C14)			

Tabela 21

b) Os juros serão calculados e incorporados ao saldo devedor.

N	J	A	PMT	PV	i
0				150000	0,01
1	1500			151500	

2	1515			153015	
3	6075,15	15302	21376,65	137714	
4	5922,14	15302	21223,635	122412	
5	5769,12	15302	21070,62	107111	
6	5616,11	15302	20917,605	91809	
7	5463,09	15302	20764,59	76508	
8	5310,08	15302	20611,575	61206	
9	5157,06	15302	20458,56	45905	
10	5004,05	15302	20305,545	30603	
11	4851,03	15302	20152,53	15302	
12	4698,02	15302	19999,515	0	
TOTAL	56880,8	153015			

Tabela 22

No Excel:

Planilha do Excel	A	B	C	D	E	F
1	n	J	A	PMT	PV	i
2	0				150000	0,01
3	1	=E2*F\$2			=E2+B3	
4	2	=E3*F\$2			=E3+B4	
5	3	=E4*F\$2+4545	=E\$4/10	=B5+C5	=E4-C5	
6	4	=E5*F\$2+4545	=E\$4/10	=B6+C6	=E5-C6	
7	5	=E6*F\$2+4545	=E\$4/10	=B7+C7	=E6-C7	
8	6	=E7*F\$2+4545	=E\$4/10	=B8+C8	=E7-C8	
9	7	=E8*F\$2+4545	=E\$4/10	=B9+C9	=E8-C9	
10	8	=E9*F\$2+4545	=E\$4/10	=B10+C10	=E9-C10	
11	9	=E10*F\$2+4545	=E\$4/10	=B11+C11	=E10-C11	
12	10	=E11*F\$2+4545	=E\$4/10	=B12+C12	=E11-C12	
13	11	=E12*F\$2+4545	=E\$4/10	=B13+C13	=E12-C13	
14	12	=E13*F\$2+4545	=E\$4/10	=B14+C14	=E13-C14	
15	TOTAL	=SOMA(B3:B14)	=SOMA(C5:C14)			

Tabela 23

8.2 Sistema de Amortização Francês, usando a tabela Price

O Sistema de Amortização Francês, muito utilizado no Brasil para financiamento de veículos, móveis, etc, difere do sistema SAC, pois ao invés da amortização ser igual para todos os períodos, é as prestações que são iguais, periódicas e sucessivas.

A tabela Price é uma variação do Sistema de Amortização Francês, desenvolvido originalmente pelo inglês Richard Price, que assumiu essa denominação por ser usada amplamente na França no século IX e também pela característica dos

períodos de capitalização ser menores que a taxa referenciada. Por exemplo, para uma taxa de 12% ao ano e capitalização mensal, a taxa cobrada mensalmente será proporcional à taxa anunciada, ou seja, $i = \frac{12\%}{12} = 1\% \text{ am}$.

Para este sistema de amortização, os juros são decrescentes, à medida que são calculados sobre o saldo devedor do mês anterior. Como as parcelas são iguais e os juros são decrescentes, a amortização assume valores crescentes.

Portanto, os juros mais a amortização equivalem à prestação.

Usando o mesmo exemplo do Sistema SAC, para um empréstimo de R\$150.000,00 que será emprestado à taxa de 12% ao ano, capitalizada mensalmente, pelo prazo de 10 meses, na tabela Price será apresentado da seguinte maneira:

As prestações são calculadas usando a fórmula de Valor Presente:

$$PV = PMT \times FPV(i, n)$$

$$PV = PMT \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$PMT = \frac{PV}{\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}} = \frac{150000}{\frac{1 - (1 + 0,01)^{-10}}{0,01}} = 15837,31$$

$$J_1 = 150000 \times 0,01 = 1500;$$

$$J_2 = 135662,69 \times 0,01 = 1356,63$$

...

$$J_{10} = 15.680,51 \times 0,01 = 156,81$$

$$A_1 = PMT - J_1 = 15837,31 - 1500 = 14337,31$$

$$A_2 = PMT - J_2 = 15837,31 - 1356,63 = 14480,68$$

...

$$A_{10} = PMT - J_{10} = 15837,31 - 156,81 = 15680,51$$

$$PV_1 = PV_0 - A_1 = 150000 - 14337,31 = 135662,69;$$

$$PV_2 = PV_1 - A_2 = 121182,00$$

...

$$PV_{10} = PV_9 - A_{10} = 15680,51 - 15680,51 = 0$$

De modo análogo, procedem-se os cálculos para os valores dos juros, prestação e

amortização para os demais períodos.

N	J	A	P	PV	I
0				150000	0,01
1	1500	R\$ 14.337,31	R\$ 15.837,31	R\$ 135.662,69	
2	1356,63	R\$ 14.480,68	R\$ 15.837,31	R\$ 121.182,00	
3	1211,82	R\$ 14.625,49	R\$ 15.837,31	R\$ 106.556,51	
4	1065,57	R\$ 14.771,75	R\$ 15.837,31	R\$ 91.784,77	
5	917,85	R\$ 14.919,46	R\$ 15.837,31	R\$ 76.865,30	
6	768,65	R\$ 15.068,66	R\$ 15.837,31	R\$ 61.796,64	
7	617,97	R\$ 15.219,35	R\$ 15.837,31	R\$ 46.577,30	
8	465,77	R\$ 15.371,54	R\$ 15.837,31	R\$ 31.205,76	
9	312,06	R\$ 15.525,25	R\$ 15.837,31	R\$ 15.680,51	
10	156,81	R\$ 15.680,51	R\$ 15.837,31	R\$ 0,00	

Tabela 24

Usando o Excel, o primeiro passo é calcular a prestação, pela função PGTO, na categoria Financeira:

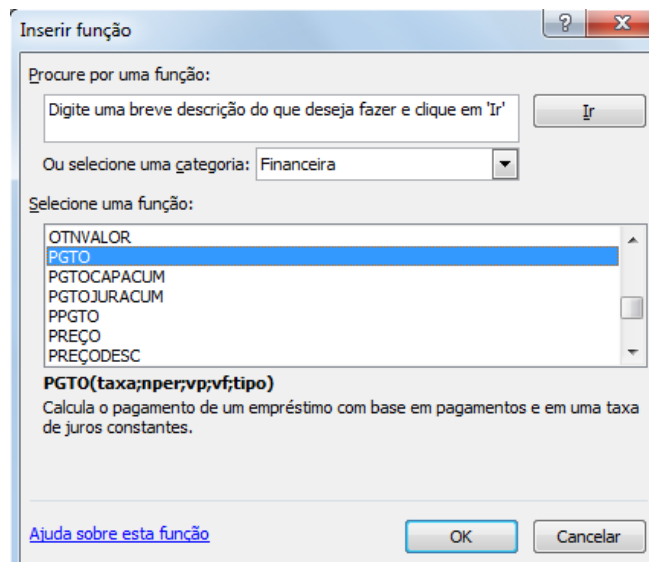


Figura 1

Para os argumentos da Função, deve-se utilizar:

Taxa – é a taxa de juros por período do empréstimo, deverá ser apresentada na forma decimal;

Nper – é o número total de pagamentos;

Vp – é o valor presente, deverá ser apresentado com valor negativo(Entende-se

como convenção de saída do fluxo de caixa)

Tipo – digita-se 1 para pagamento antecipado e 0 (ou não especificar) para pagamento postecipado.

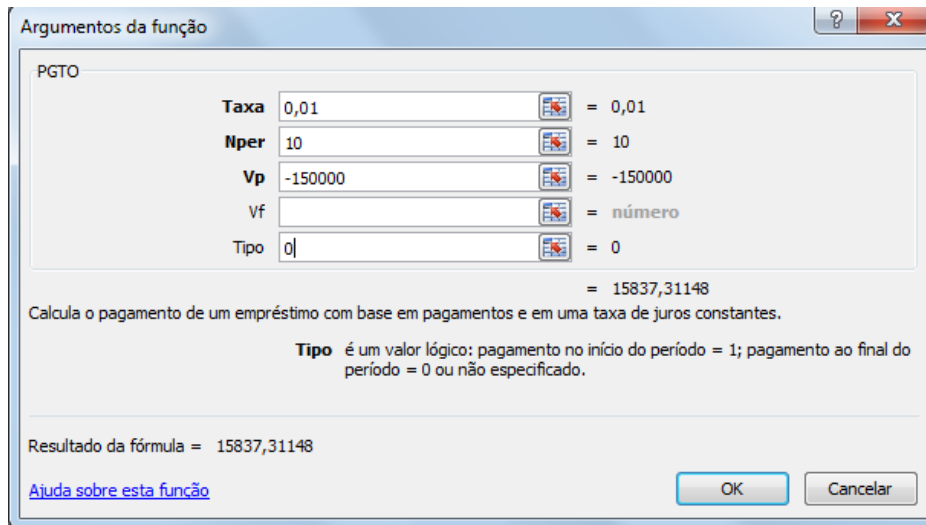


Figura 2

Reproduzindo a tabela, com as fórmulas:

Planilha do Excel	A	B	C	D	E	F
1	n	J	A	P	PV	i
2	0				150000	0,01
3	1	=E2*F\$2	=D3-B3	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E2-C3	
4	2	=E3*F\$2	=D4-B4	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E3-C4	
5	3	=E4*F\$2	=D5-B5	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E4-C5	
6	4	=E5*F\$2	=D6-B6	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E5-C6	
7	5	=E6*F\$2	=D7-B7	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E6-C7	
8	6	=E7*F\$2	=D8-B8	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E7-C8	
9	7	=E8*F\$2	=D9-B9	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E8-C9	
10	8	=E9*F\$2	=D10-B10	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E9-C10	
11	9	=E10*F\$2	=D11-B11	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E10-C11	
12	10	=E11*F\$2	=D12-B12	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E11-C12	

Tabela 25

8.2.1 Price com carência

No exemplo anterior foram calculados os valores sem considerar carência para amortização do empréstimo. Considerando carência de 2 meses para pagamento da primeira prestação, deverão ser analisadas duas possibilidades, que são as mais

usuais:

- a) Os juros serão pagos durante a carência;

n	J	A	P	PV	i
0				R\$ 150.000,00	0,01
1	R\$ 1.500,00		R\$ 1.500,00	R\$ 150.000,00	
2	R\$ 1.500,00		R\$ 1.500,00	R\$ 150.000,00	
3	R\$ 1.500,00	R\$ 14.337,31	R\$ 15.837,31	R\$ 135.662,69	
4	R\$ 1.356,63	R\$ 14.480,68	R\$ 15.837,31	R\$ 121.182,00	
5	R\$ 1.211,82	R\$ 14.625,49	R\$ 15.837,31	R\$ 106.556,51	
6	R\$ 1.065,57	R\$ 14.771,75	R\$ 15.837,31	R\$ 91.784,77	
7	R\$ 917,85	R\$ 14.919,46	R\$ 15.837,31	R\$ 76.865,30	
8	R\$ 768,65	R\$ 15.068,66	R\$ 15.837,31	R\$ 61.796,64	
9	R\$ 617,97	R\$ 15.219,35	R\$ 15.837,31	R\$ 46.577,30	
10	R\$ 465,77	R\$ 15.371,54	R\$ 15.837,31	R\$ 31.205,76	
11	R\$ 312,06	R\$ 15.525,25	R\$ 15.837,31	R\$ 15.680,51	
12	R\$ 156,81	R\$ 15.680,51	R\$ 15.837,31	R\$ 0,00	

Tabela 26

No Excel:

Planilha do Excel	A	B	C	D	E	F
1	n	J	A	P	PV	i
2	0				150000	0,01
3	1	=E2*F\$2		=B3	150000	
4	2	=E3*F\$2		=B4	150000	
5	3	=E4*F\$2	=D5-B5	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E4-C5	
6	4	=E5*F\$2	=D6-B6	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E5-C6	
7	5	=E6*F\$2	=D7-B7	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E6-C7	
8	6	=E7*F\$2	=D8-B8	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E7-C8	
9	7	=E8*F\$2	=D9-B9	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E8-C9	
10	8	=E9*F\$2	=D10-B10	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E9-C10	
11	9	=E10*F\$2	=D11-B11	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E10-C11	
12	10	=E11*F\$2	=D12-B12	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E11-C12	
13	11	=E12*F\$2	=D13-B13	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E12-C13	
14	12	=E13*F\$2	=D14-B14	=PGTO(0,01;10;-150000)	=E13-C14	

Tabela 27

- b) Os juros serão calculados e incorporados ao saldo devedor. O que difere neste tipo de amortização é que a prestação é calculada a partir do último saldo

devedor, com os juros incorporados.

N	J	A	P	PV	i
0				R\$ 150.000,00	0,01
1	R\$ 1.500,00			R\$ 151.500,00	
2	R\$ 1.515,00			R\$ 153.015,00	
3	R\$ 1.530,15	R\$ 14.625,49	R\$ 16.155,64	R\$ 138.389,51	
4	R\$ 1.383,90	R\$ 14.771,75	R\$ 16.155,64	R\$ 123.617,76	
5	R\$ 1.236,18	R\$ 14.919,46	R\$ 16.155,64	R\$ 108.698,30	
6	R\$ 1.086,98	R\$ 15.068,66	R\$ 16.155,64	R\$ 93.629,64	
7	R\$ 936,30	R\$ 15.219,35	R\$ 16.155,64	R\$ 78.410,29	
8	R\$ 784,10	R\$ 15.371,54	R\$ 16.155,64	R\$ 63.038,76	
9	R\$ 630,39	R\$ 15.525,25	R\$ 16.155,64	R\$ 47.513,50	
10	R\$ 475,14	R\$ 15.680,51	R\$ 16.155,64	R\$ 31.833,00	
11	R\$ 318,33	R\$ 15.837,31	R\$ 16.155,64	R\$ 15.995,68	
12	R\$ 159,96	R\$ 15.995,68	R\$ 16.155,64	R\$ 0,00	

Tabela 28

No Excel:

Planilha do Excel	A	B	C	D	E	F
1	n	J	A	P	PV	i
2	0				150000	0,01
3	1	=E2*F\$2			=E2+B3	
4	2	=E3*F\$2			=E3+B4	
5	3	=E4*F\$2	=D5-B5	=PGTO(0,01;10;-153015)	=E4-C5	
6	4	=E5*F\$2	=D6-B6	=PGTO(0,01;10;-153015)	=E5-C6	
7	5	=E6*F\$2	=D7-B7	=PGTO(0,01;10;-153015)	=E6-C7	
8	6	=E7*F\$2	=D8-B8	=PGTO(0,01;10;-153015)	=E7-C8	
9	7	=E8*F\$2	=D9-B9	=PGTO(0,01;10;-153015)	=E8-C9	
10	8	=E9*F\$2	=D10-B10	=PGTO(0,01;10;-153015)	=E9-C10	
11	9	=E10*F\$2	=D11-B11	=PGTO(0,01;10;-153015)	=E10-C11	
12	10	=E11*F\$2	=D12-B12	=PGTO(0,01;10;-153015)	=E11-C12	
13	11	=E12*F\$2	=D13-B13	=PGTO(0,01;10;-153015)	=E12-C13	
14	12	=E13*F\$2	=D14-B14	=PGTO(0,01;10;-153015)	=E13-C14	

Tabela 29

9. CONCLUSÃO

Diante de tudo que foi exposto, pode-se perceber que a Matemática Financeira pode ser abordada de forma natural, estabelecendo situações práticas do dia a dia, sem esquecer o seu aspecto formal. Tratada dessa forma, ela instiga o aluno, uma vez que ele consegue correlacionar o que aprendeu na sala de aula com sua prática pessoal.

Outro aspecto que merece destaque é que quando a Matemática Financeira é correlacionada a progressões e funções, ela permite que o aluno estabeleça relações entre conteúdos ensinados no Ensino Médio, não sendo percebidos de forma fragmentada, estabelecendo coesão entre as partes.

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática Financeira e suas aplicações**. São Paulo: Atlas, 2009.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C. **Progressões e Matemática Financeira**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

SENAC. DN. **Matemática financeira**. Rio de Janeiro: Senac Nacional, 2008

VEIGA, Rafael Paschoarelli. **Como usar a Calculadora HP 12C: Guia essencial das funções financeiras e estatísticas**. 1ª edição, Saint Paul Editora Ltda, 2006.

Apostila de Administração Financeira, Terezinha Márcia de Carvalho Lino, 2010

Apostila Matemática Financeira, Fundação Educacional Monsenhor Messias, 2º semestre de 2004

www.receita.fazenda.gov.br

<http://economia.uol.com.br>

<http://www.mat.ufmg.br/~regi/>

www.caixa.gov.br