Mônica Aparecida Rodrigues Barbosa

O PEQUENO TEOREMA DE FERMAT E AS DÍZIMAS PERIÓDICAS

Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas – Departamento de Matemática

ICEX

Belo Horizonte

2010

Mônica Aparecida Rodrigues Barbosa

O PEQUENO TEOREMA DE FERMAT E AS DÍZIMAS PERIÓDICAS

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática do Ensino Básico, do ICEX/UFMG, como requisito parcial a obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientador:
Professor Jorge Sabatucci

Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas – Departamento de Matemática

ICEX

Belo Horizonte

2010

ATA DA 101ª MONOGRAFIA DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES, APRESENTADA PELA ALUNA MÔNICA APARECIDA RODRIGUES BARBOSA.

Aos quinze dias do mês de dezembro de 2010, às 15h00, na Sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Matemática para Professores, para julgar a apresentação da monografia da aluna **Mônica Aparecida Rodrigues Barbosa**, intitulada: *"O pequeno Teorema de Fermat e as dízimas periódica"*, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática, na Ênfase Matemática do Ensino Básico. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Jorge Sabatucci, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da aluna. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença da aluna e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a aluna foi considerada aprovada, por unanimidade, com nota 90 e conceito A. O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 15 de dezembro de 2010.

Sabatucci

Prof. Jorge Sabatucci
Orientador

Prof. Helder Candido Rodrigues
Examinador

Prof. José Antônio Gonçalves Miranda
Examinador

Agradecimentos:

A Deus, pelo dom da vida, aos meus familiares, por tudo que sou, ao meu esposo Wender pelo apoio e motivação, a minha amada filha Larissa pela alegria de viver e ao orientador Professor Jorge Sabatucci, pelos ensinamentos e pelo apoio.

EDUCAR NOS TRÊS TEMPOS

"Eu educo hoje, com os valores que recebi ontem,
para as pessoas que são o amanhã.
Os valores de ontem os conheço.
Os de hoje, percebo alguns.
Dos de amanhã não sei.
Se só uso os de ontem, não educo:

COMPLICO

Se só uso os de hoje, não educo:

CONDICIONO

Se só uso os de amanhã, não educo:

FAÇO EXPERIÊNCIAS

Se só uso os três, sofro. Mas educo.

Por isso, educar é perder sempre sem perder-se. Educa quem for capaz de fundir ontens, hojes e amanhãs, transformando-os num presente. Onde o amor e o livre arbítrio sejam as bases".

Artur Távola

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo principal estudar as dízimas periódicas, da forma: $b,c_1 \ldots c_n \overline{d_1 \ldots d_h}$, em que $b, n, c_1, \ldots, c_n, h$ e $d_1, \ldots, d_h$ são números inteiros não negativos, e $d_1, \ldots, d_h$ é o período da dízima.

Nessa monografia mostraremos a partir de uma fração irredutível $\frac{a}{p}$ que é possível encontrar a quantidade de algarismos do período da dízima, antes mesmo de efertuarmos a divisão de a por p, bem como a ocorrência ou não de pré-período que seria $c_1 \ldots c_n$ como dito no parágrafo anterior.

Para tanto, estudei e fiz uso de uma importante ferramenta da matemática, que é o Pequeno Teorema de Fermat.

Palavras chave: Representação Decimal - Dízimas periódicas - Pequeno Teorema de Fermat.

ABSTRACT

This work has as main objective to study the periodic tithe, to the form: $b,c_1\ldots c_n\overline{d_1\ldots d_h}$, in that $b,n, c_1,\ldots,c_n, h$ and $d_1,\ldots,d_h$ are whole numbers no negatives, and $d_1,\ldots,d_h$ is the period of the tithe.

In this monograph we will show starting from an irreducible fraction $\frac{a}{p}$ that it is possible to find the digits amount to the period of tithe, before even we make the division of a by p, as well the occurrence or not of pre-period that would be $c_1\ldots c_n$ as started in the previous paragraph.

Therefore, I studied and made application of an important tool of Mathematics, which is Fermat's Little Theorem.

Keywords: Decimal representation - Periodic tithe - Fermat's Little Theorem

SUMÁRIO

Seções

Capítulos

SEÇÃO II.
NOTA HISTÓRICA

Pierre de Fermat nasceu em 20 de agosto de 1601, na cidade de Beaumont-de-Lomagne, na França, onde recebeu uma educação privilegiada no mosteiro franciscano e depois na Universidade de Toulouse.

Fermat ingressou no serviço público em 1631 quando foi nomeado conselheiro na câmara de requerimentos e em 1652 ele foi promovido para Juiz Supremo na Corte Criminal Soberana do Parlamento de Toulouse, e apesar de sua vida profissional não estar ligada à matematica, era essa a sua ocupação predileta nas horas de lazer e assim mesmo sem publicar seus estudos, suas descobertas foram conhecidas pelas cartas enviadas a outros matemáticos e até mesmos por anotações que fazia nas margens de livros em que estudava e assim ele é considerado o maior matemático Francês do século XVII.

Fermat deixou contribuições para a geometria analítica, para a teoria da probabilidade e para o cálculo, mas suas maiores realizações foram no campo da teoria dos números e o mesmo se imortalizou através de uma anotação na margem de seu livro de Arithmetica onde ele afirmava que era impossível para um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como a soma de dois números elevados a quatro, ou, generalizando, para qualquer número que seja elevado a uma potência maior que dois ser escrito como a soma de duas potências semelhantes, isto é, se $n \geq 3$, então nehum terno (a,b,c) de números inteiros positivos é solução da equação $x^n + y^n = z^n$ e ainda escreveu que possuia uma demonstração maravilhosa para esta proposição, mas que a margem do livro seria muito pequena para contê-la.

Esta proposição ficou conhecida como o "Último" ou o "Grande" Teorema de Fermat e só foi realmente demonstrada mais de 350 anos após sua formulação pelo inglês Andrew Wiles.

Entre suas contribuições está o Pequeno Teorema de Fermat, do qual trata este estudo. Nesse momento apenas enunciarei tal Teorema, para mais adiante o demonstrá-lo.

O Pequeno Teorema de Fermat: Se p é um número primo e a um número inteiro não divisível por p, então $a^{p-1} - 1$ é múltiplo de p.

CAPÍTULO 1.

REPRESENTAÇÃO DECIMAL

Utilizaremos os seguintes resultados ao longo do nosso estudo.

1.1. Teorema: A soma dos n termos da progressão geométrica $a_1, q\,a_1, q^2\,a_1, \dots, q^{n-1}\,a_1$ de razão $q \neq 1$ é dada por

$$S_n = a_1 + q\,a_1 + q^2\,a_1 + \dots + q^{n-1}\,a_1 = a_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Demonstração:

Seja $S_n = a_1 + q\,a_1 + q^2\,a_1 + \dots + q^{n-1}\,a_1 \quad (I)$

Vamos multiplicar os dois membros dessa igualdade pela razão q, obtendo:

$$q\,S_n = q\,a_1 + q^2\,a_1 + q^3\,a_1 + \dots + q^n\,a_1 \quad (II)$$

Subtraindo a expressão (*II*) da expressão (*I*), obtemos:

$$S_n - q\,S_n = a_1 - a_1\,q^n$$

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1\,q^n = a_1\left(1-q^n\right)$$

Portanto, $$\boxed{S_n = a_1.\frac{1-q^n}{1-q},\ \text{com } q \neq 1}$$

□

1.2. Teorema: Para 0< |q| < 1, tem-se $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Demonstração:

De fato, usaremos que para $0<|q|<1$, tem-se $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. *(III)*

Temos que $S_n = a_1 + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$ e de *(III)*, podemos escrever

$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \cdot \dfrac{a_1}{1-q}$, isto é,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q},\ 0<|q|<1} \quad \square$$

1.3. Representação decimal de um Número Real

1.3.1. **Teorema:** A série $a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \ldots = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{a_i}{10^i}$ em que a_0 pertence a N e $a_i = \{0,1,2,\ldots,9\}$ para $i = 1,2,\ldots$, converge.

Demonstração:

De fato,

$$S_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} \leq a_0 + \frac{9}{10}$$

$$S_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq a_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2}$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq a_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n}$$

Observemos que $S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n \leq \ldots$, isto é as somas parciais $S_1, \ldots, S_n, \ldots$ formam uma seqüência crescente.

Temos, então, $0 \leq S_n \leq a_0 + \underbrace{\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n}}_{\text{Progressão geométrica de razão } \frac{1}{10}} = a_0 + \frac{9}{10} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}}$, para todo n

O $\lim_{n \to \infty} \left(a_0 + \frac{9}{10} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \right) = a_0 + 1$. Portanto, a sequência S_n é limitada.

Da Análise Real concluímos que existe $\lim_{n \to \infty} S_n$. $\square$

Escreveremos então o número real $\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$ da seguinte forma $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, que chamaremos de uma representação decimal de α .

CAPÍTULO 2.

O PEQUENO TEOREMA DE FERMAT

Enunciado

Se p é um número primo e a um número inteiro não divisível por p, então $a^{p-1} - 1$ é múltiplo de p.

Para nos familiarizarmos com este Teorema consideraremos os dois exemplos a seguir:

Exemplo 1. Seja $a = 2$ e $p = 7$, que satisfazem às condições do Pequeno Teorema Fermat. Observamos que $2^{7-1} - 1 = 7 \times 9$, ou seja, é múltiplo de 7 conforme o Pequeno Teorema Fermat.

Exemplo 2. Seja $a = 4$ e $p = 13$, que satisfazem às condições do Pequeno Teorema Fermat. Observamos que $4^{13-1} - 1 = 13 \times 1\ 290\ 555$, que é múltiplo de 13, o que está de acordo com o Pequeno Teorema Fermat.

Demonstração do Pequeno Teorema de Fermat

Partindo-se do fato de que se um número primo não é divisor de nenhum de dois números inteiros dados, então também não é divisor do produto desses números. Aplicando-se a divisão euclidiana *p-1* vezes, com *a, 2a , 3a, ..., (p-1)a* como dividendos e p como divisor, obteremos:

$$a = p.q_1 + r_1 \qquad (0 < r_1 < p)$$

$$2a = p.q_2 + r_2 \qquad (0 < r_2 < p)$$

$$\vdots$$

$$(p-1)a = p.q_{p-1} + r_{p-1} \qquad (0 < r_{p-1} < p)$$

Vamos representar esse conjunto de relações por (*).

Afirmação. Os restos $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$ são dois a dois distintos.

De fato,

Sendo $i \neq j$, podemos escrever

$$\begin{cases} ia = pq_i + r_i\,, \, para \; i = 1, \dots, p-1 & (1) \\ ja = pq_j + r_j\,, \, para \; j = 1, \dots, p-1 & (2) \end{cases},$$ subtraindo-se 2 de 1, temos:

$ia - ja = p(q_i - q_j) + r_i - r_j$ ou

$a(i-j) = p(q_i - q_j) + r_i - r_j$

Se $r_i = r_j$, p seria divisor de $(i-j)$ já que é primo e não divide a. Mas como $|i-j| < p$, o número p não pode dividir $(i-j)$. Assim, concluímos que $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$ são dois a dois distintos e em número de $(p-1)$. Logo, esses restos são os números $1, 2, \dots, p-1$, não necessariamente nessa ordem.

Agora, multiplicando membro a membro as relações destacadas em (*), obtemos:

$$1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)a^{p-1} = (pq_1 + r_1) \times (pq_2 + r_2) \times \cdots \times (pq_{p-1} + r_{p-1})$$

$1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)a^{p-1} = \underbrace{r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_{p-1}}_{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p-1} + pA$, em que A é a soma dos fatores de p no segundo membro e, portanto, é um número inteiro.

Podemos escrever a expressão anterior da seguinte forma:

$1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)a^{p-1} = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (p-1) + pA$ ou

$1 \times 2 \times \cdots \times (p-1) \times (a^{p-1} - 1) = pA$.

Como vemos p é divisor do primeiro membro desta equação, porém p é primo e não divide nenhum dos $(p-1)$ fatores iniciais, pois é maior que cada um deles, então p é divisor de $a^{p-1} - 1$, isto é, $a^{p-1} - 1$ é múltiplo de p. $\square$

Observação: O expoente ($p - 1$) não é o único para o qual $a^{p-1} - 1$ é múltiplo de p, como veremos abaixo.

De fato,

$a^{p-1} - 1 = k\,p$, em que k é um número inteiro (Pequeno Teorema de Fermat).

$$\begin{aligned} a^{n(p-1)} - 1 &= \left(a^{p-1}\right)^n - 1, \ n \text{ inteiro.} \\ &= (1 + k\,p)^n - 1 \\ &= 1 + q\,p - 1, \text{ em que } q \text{ é a soma das } n \text{ parcelas que contém } p \text{ no desenvolvimento de } (1 + k\,p)^n. \\ &= q\,p \qquad \square \end{aligned}$$

Para ilustrar esse fato veja o exemplo a seguir:

Pelo Pequeno Teorema de Fermat temos que $4^{12} - 1 = 16777215 = 13 \times 1290555$, mas temos também que $4^6 - 1 = 4095 = 13 \times 315$.

Por outro lado há casos em que (p-1) é o menor expoente para o qual $a^{p-1} - 1$ é múltiplo de p. Veja o exemplo em que, $a = 2$ e $p = 3$, nesse caso temos:

$2^{3-1} - 1 = 3$, que é múltiplo de 3.

2.1. Teorema: Nas condições do Pequeno Teorema de Fermat, existe um menor inteiro h para o qual $a^h - 1$ é múltiplo de p.

Demonstração:

De acordo com o Pequeno Teorema de Fermat, isto é, sendo p um número primo e a um número inteiro não divisível por p, então $a^{p-1} - 1$ é múltiplo de p.

Vamos mostrar então que existe um menor inteiro positivo h para o qual $a^h - 1$ é múltiplo de p.

De fato, nessas condições, o conjunto dos números inteiros positivos x para os quais $a^x - 1$ é múltiplo de p não é vazio, pois o número primo *p-1* pertencerá a esse conjunto. Como esse conjunto é um subconjunto não vazio dos inteiros, pelo Principio da Boa Ordenação ele admite o menor elemento, que aqui chamamos de h.

$\square$

2.2. Teorema: Se h é o menor inteiro positivo para o qual $a^h - 1$ é múltiplo de p, então $a^t - 1$ é um múltiplo de p se e somente se, t é múltiplo de h.

Demonstração:

Primeiramente demonstraremos que:

Se $a^t - 1$ é um múltiplo de p, então t é múltiplo de h.

De fato, $a^h - 1 = p \times q$, para um inteiro positivo q, e $a^t - 1 = p \times q_1$ para algum inteiro positivo q_1. Utilizando-se a divisão Euclidiana com t como dividendo e h como divisor, temos: $t = hs + r$, em que s e r são inteiros positivos e $0 \leq r < h$.

Então, $a^t = \left(a^h\right)^s \times a^r = \underbrace{(1 + pq)^s}_{(a^h)^s} \times a^r$ (I)

Agora desenvolvemos $(1 + pq)^s$, pelo binômio de Newton, obteremos $(1 + pq)^s = 1 + pQ_1$ (II), em que Q_1 é a soma das parcelas que estão multiplicadas por p nos demais termos desse desenvolvimento.

Substituindo-se (I) em (II) temos:

$a^t = (1 + pQ_1) \times a^r = a^r + \underbrace{a^r \times pQ_1}_{a^r Q_1 \times p}$, chamando-se $a^r Q_1$ de Q, temos: $a^t = a^r + pQ$.

Como $a^t = 1 + pq_1$, então $a^r + pQ = 1 + pq_1$, desenvolvendo-se esta igualdade encontraremos $a^r - 1 = p(q_1 - Q)$, ou seja, $a^r - 1$ é múltiplo de p. Devemos considerar entanto, que h é o menor inteiro positivo para o qual $a^h - 1$ é múltiplo de p e que $0 \leq r < h$, então $r = 0$ e portanto t é múltiplo de h.

Agora mostraremos que se t é múltiplo de h então $a^t - 1$ é um múltiplo de p, como h o menor inteiro positivo para o qual $a^h - 1$ é múltiplo de p, temos que $a^h - 1 = pq$, para algum q inteiro e seja $t = hs$. Daí, $a^t = (a^h)^s = (1 + pq)^s = 1 + pQ$, em que Q é um múltiplo de p.

Dessa forma $a^t - 1 = (a^h)^s - 1 = pQ$, o que mostra que $a^t - 1$ é um múltiplo de p. $\square$

CAPÍTULO 3.

O PEQUENO TEOREMA DE FERMAT E AS DÍZIMAS PERIÓDICAS

Utilizaremos o fato que o Conjunto dos Números Racionais é composto pelos números reais que possuem representação decimal finita ou infinita periódica, como por exemplo em:

$$\frac{1}{4} = 0{,}25\,; \quad \frac{7}{5} = 1{,}4\,; \quad \frac{1}{9} = 0{,}1111\ldots; \quad \frac{10}{3} = 3{,}333\ldots; \quad \frac{61}{495} = 0{,}1232323\ldots$$

A representação decimal finita acontece quando na divisão do numerador pelo denominador um dos restos é igual a zero, é o caso do exemplo abaixo.

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \hline 20 & 0{,}25 \\ 0 & \end{array}$$

Quando na divisão do numerador pelo denominador de uma fração irredutível, não surgir resto zero em nenhuma das etapas,a representação decimal não será finita.

Nesse caso, devemos observar que a não existência de resto igual a zero garante que o processo de divisões sucessivas se repete indefinidamente e que, portanto, a representação decimal da fração é infinita.

Assim os possíveis restos da divisão de a por b são 1, 2, 3, ..., b-1, e podemos concluir que ao fim de no máximo, b divisões parciais, um dos restos já obtidos se repetirá. A partir daí, um novo ciclo de quocientes se inicia, formando o período.

Podemos ilustrar tal explicação com os exemplos:

$a)\ \dfrac{22}{7} = 3{,}\overline{142857}$

$$
\begin{array}{l|l}
22 & 7 \\ \cline{2-2}
10 & 3,1428571... \\
\;30 & \\
\;\;20 & \\
\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;\;50 & \\
\;\;\;\;\;\;10 & \\
\;\;\;\;\;\;\;3 &
\end{array}
$$

Neste caso o resto parcial 1 se repete ao fim de 7 divisões parciais e o período é formado por seis algarismos: 142857, quantidade que não supera b-1.

$b)\ \dfrac{1}{11} = 0,\overline{09}$

$$
\begin{array}{l|l}
100 & 11 \\ \cline{2-2}
\;100 & 0,090909... \\
\;\;100 & \\
\;1 &
\end{array}
$$

Neste caso o resto parcial 1 se repete a cada duas divisões parciais e o período é formado por dois algarimos: 0 e 9, quantidade que não supera b-1.

Como vimos, a representação decimal pode ser finita ou infinita, mas continuaremos o nosso estudo para podermos saber como será esta representação mesmo sem efetuar a divisão, e quando esta for infinita, podemos também determinar o número de algarismos do período e do pré-período. Para tal, continuaremos o nosso estudo com a representação decimal finita.

3.1. A representação decimal finita

3.1.1 Teorema: Toda representação decimal finita, pode ser escrita como uma fração cujo denominador é uma potência de 10. Vejamos os seguintes exemplos:

$$a)\, 0{,}162 = \frac{162}{1000} = \frac{162}{10^3} = \frac{162}{2^3 \times 5^3}$$

$$b)\, \frac{7}{20} = \frac{7}{2^2 \times 5} = \frac{7}{2^2 \times 5} \times \frac{5}{5} = \frac{35}{2^2 \times 5^2} = \frac{35}{100} = 0{,}35$$

$$c)\, \frac{17}{16} = \frac{17}{2^4} = \frac{17}{2^4} \times \frac{5^4}{5^4} = \frac{17 \times 625}{10^4} = \frac{10625}{10000} = 1{,}0625$$

$$d)\, \frac{49}{25} = \frac{49}{5^2} = \frac{49}{5^2} \times \frac{2^2}{2^2} = \frac{49 \times 4}{10^2} = \frac{196}{100} = 1{,}96$$

Um número racional $\frac{a}{b}$, na forma irredutível tem uma representação decimal finita se, e somente se, o denominador não apresenta nehum fator primo diferente de 2 e de 5, podendo ser um deles apenas, como visto nos exemplos acima.

Demonstração

1ª parte: Considere a seguinte decimal exata $c, a_1 a_2 \ldots a_n$, temos que $c, a_1 a_2 \ldots a_n = \frac{c\, a_1 a_2 \ldots a_n}{10^n}$

2ª parte: Considere $\frac{a}{b}$ uma fração, na forma irredutível, em que $b = 2^m \times 5^n$ com $m,n \geq 0$. Supondo $m \geq n$, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \times 5^n} = \frac{a \times 5^{m-n}}{2^m \times 5^n \times 5^{m-n}} = \frac{a \times 5^{m-n}}{2^m \times 5^{n+m-n}} = \frac{a \times 5^{m-n}}{2^m \times 5^m} = \frac{a \times 5^{m-n}}{10^m}$$

Portanto o número racional $\frac{a}{b}$ tem representação decimal finita.

Agora suponhamos que $m \leq n$. Neste caso, basta multiplicar ambos os termos da fração por 2^{n-m}.

Assim o Teorema fica estabelecido.

□

3.2. O Pequeno Teorema de Fermat e a Representação Decimal Infinita

A representação decimal dos números da forma $\dfrac{a}{p}$, sendo p um número primo positivo que não divide a e diferente de 2 e de 5 é infinita e por meio do Pequeno Teorema de Fermat, podemos justificar os seguintes fatos:

I) A representação decimal desses números é necessariamente periódica e não apresenta pré-período;

II) O número de algarismos do período pode ser obtido sem se efetuar a divisão de a por p;

Acompanhemos o exemplo:

$$\frac{12}{37} = 0,\overline{324}$$

Observações:

1) Sendo t um inteiro positivo, então o efeito de se multiplicar $\dfrac{12}{37}$, por 10^t é deslocar a vírgula, na representação decimal, t casas à direita.

2) Se t equivale ao mesmo número de casas do período ou a um múltiplo deste valor, então $10^t \times \dfrac{12}{37}$ e $\dfrac{12}{37}$ têm a mesma parte decimal, e portanto $10^t \times \dfrac{12}{37} - \dfrac{12}{37} = (10^t - 1) \times \dfrac{12}{37}$ é um número inteiro, como ilustrado no exemplo abaixo:

$$10^3 \times \frac{12}{37} = 324{,}324324324\ldots \; e$$
$$10^3 \times \frac{12}{37} - \frac{12}{37} = 324,\overline{324} - 0,\overline{324} = 324$$

Reciprocamente, se $10^t \times \dfrac{12}{37}$ e $\dfrac{12}{37}$ têm a mesma parte decimal, então $10^t \times \dfrac{12}{37} - \dfrac{12}{37} = (10^t - 1) \times \dfrac{12}{37}$ é um número inteiro e, portanto $(10^t - 1)$ é um múltiplo de 37.

3.2.1. Teorema: O número $\dfrac{a}{p}$, em que p é um número primo positivo que não divide o número inteiro positivo a e diferente de 2 e de 5, isto é, 10 não é divisível por p. Daí, de acordo com o Pequeno Teorema de Fermat, $(10^{p-1} - 1)$ é múltiplo de p.

Demonstração:

Sendo h o menor inteiro positivo tal que $(10^h - 1)$ é múltiplo de p e se t é múltiplo de h, então, $10^t - 1 = pq$ para algum inteiro q.

$10^t - 1 = pq \quad \times \left(\dfrac{a}{p}\right)$, multiplicando-se ambos os termos de $10^t - 1 = pq$ por $\left(\dfrac{a}{p}\right)$,

obtemos: $10^t \times \dfrac{a}{p} - \dfrac{a}{p} = \underbrace{a \times q}_{inteiro}$

$10^t \times \dfrac{a}{p}$ e $\dfrac{a}{p}$ têm a mesma parte decimal, então t é múltiplo de h (menor inteiro positivo).

Logo, $10^t \times \dfrac{a}{p}$ e $\dfrac{a}{p}$ têm a mesma parte decimal se, e somente se, t é múltiplo de h.

Após este estudo podemos concluir que o deslocamento da virgula t casas à direita na representação decimal $\dfrac{a}{p}$ faz com que se obtenha um número com a mesma parte decimal de $\frac{a}{p}$ se, e somente se, $t = h, 2h, 3h, \cdots$, em que h é o menor inteiro positivo tal que $(10^h - 1)$ é múltiplo de p.

Isto significa que a representação decimal de $\frac{a}{p}$ é do tipo $b,\overline{b_1 \ldots b_h}$, com $0 \le b_1, \ldots, b_h \le 9$, como vemos, ela é periódica, com período $b_1 \ldots b_h$ formado de h algarismos.

Assim ficam estabelecidos os fatos I e II, e voltando ao fato I, ressalto que sendo p diferente de 2 e de 5, isto é, 10 não é divisível por p, ao multiplicarmos o resultado da divisão de $\frac{a}{p}$ por 10^t, obteremos um número com a mesma parte decimal de $\frac{a}{p}$, o que comprova que este número é uma dízima periódica e que não possui pré-período, como visto no estudo acima. $\square$

Para ilustramos o tal estudo, acompanhemos os exemplos resolvidos a seguir em que encontraremos a quantidade de algarismos do período antes de efetuar a divisão de $\frac{a}{p}$, em que a e p são primos entre si e $p \neq 0$:

a) $\frac{16}{33}$

$$a = 16 \ e \ p = 33$$
$$10^2 - 1 = 99 = \underbrace{33 \times 3}_{\text{múltiplo de } 33}$$

Como 99 é múltiplo de 33, temos que a representação decimal da fração $\frac{16}{33}$ assim como qualquer uma do tipo $\frac{a}{33}$ terá o período composto por dois algarismos, como podemos comprovar a partir da conclusão obtida anteriormente, em que $h = 2$. De toda forma efetuemos a divisão:

$$\frac{16}{33} = 0,\overline{48}$$

b) $\frac{45}{37}$

$$a = 45 \text{ e } p = 37$$
$$10^2 - 1 = 99$$
$$10^3 - 1 = 999 = \underbrace{37 \times 27}_{\text{múltiplo de 37}}$$

Como 999 é múltiplo de 37, temos que a representação decimal da fração $\frac{45}{37}$ assim como qualquer uma do tipo $\frac{a}{37}$ terá o período composto por três algarismos, como podemos comprovar efetuando a divisão:

$$\frac{45}{37} = 1,\overline{216}$$

c) $\frac{22}{7}$

$$a = 22 \text{ e } p = 7$$
$$10^2 - 1 = 99$$
$$10^3 - 1 = 999$$
$$\vdots$$
$$10^6 - 1 = 999999 = \underbrace{7 \times 142857}_{\text{múltiplo de 7}}$$

Como 999999 é múltiplo de 7, temos que a representação decimal da fração $\frac{22}{7}$ assim como qualquer outra do tipo $\frac{a}{7}$ terá o período composto por seis algarismos, como podemos comprovar efetuando a divisão:

$$\frac{22}{7} = 3,\overline{142857}$$

3.3. Considerações Finais

Uma fração $\frac{a}{b}$ na sua forma irredutível, terá representação decimal infinita periódica se, e somente se, $b = b_o \times 2^m \times 5^n$, $com\ b_o > 1$; $m, n \geq 0\ e\ mdc\ (b_o, 10) = 1$.

Partindo da informação acima, podemos fazer as seguintes considerações:

a) A representação decimal de $\frac{a}{b}$ é periódica e pode apresentar ou não um pré-período.

b) Se $m > 0\ ou\ n > 0$, então há um pré-período formado de $r = \max\{m, n\}$ algarismos. Como no exemplo: $\frac{7}{150} = 0{,}04666...$, notar que $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ e que $\max\{1,2\} = 2$, assim o pré-período é formado por dois algarismos e o período é composto por um algarismo, pois 1 é o menor expoente para o qual $10^1 - 1$ é múltiplo de 3.

Para concluir esta informação, consideremos a fração $\frac{a}{b}$ na sua forma irredutível e sendo $b = b_o \times 2^m \times 5^n$, $com\ b_o > 1$ e sendo $m > n$, tereremos
$\frac{a}{b} = \frac{a}{b_o \times 2^m \times 5^n} = \alpha, \beta_1 \ldots \beta_m\ \overline{\delta_1 \ldots \delta_h}$, em que o $\text{pré} - \text{período}\ \beta_1 \cdots \beta_m$ é composto por $\max\{ m, n\} = m$ algarismos. Caso $n > m$, então o pré - período será composto por n algarismos. Já o período será composto por h algarismos, como lembraremos na próxima consideração.

c) O período é formado de h algarismos, sendo h o menor inteiro positivo tal que $10^h - 1$ é múltiplo de b_o. Como nos exemplos:

- $\frac{26}{45} = 0{,}5\overline{7}$, notar que o pré-período é composto por um único algarismo (5), pois, $45 = 3^2 \times 5$ ou seja $2^o \times 3^2 \times 5^1$ e, portanto $\max\{0,1\} = 1$. Também notar que o período é composto por um único algarismo (7), pois $10^1 - 1$ é múltiplo de 3^2.

- $\frac{25}{63} = 0{,}396825396825\ldots = 0{,}\overline{396825}$, notar que não possui pré-período porque $63 = 3^2 \times 7$ (ausência de 2 e 5) e o período é composto de seis algarismos, pois $10^6 - 1$ é múltiplo de 63.

CAPÍTULO 4.
CONCLUSÃO

Esta monografia foi um estudo sobre as Dízimas Periódicas, suas particularidades e a utilização do Pequeno Teorema de Fermat no estudo das mesmas.

Em se tratando de um tema tão importante no Ensino Básico, área em que atuo, ressalto que os conhecimentos adquiridos com este trabalho me foram de grande utilidade não só para a conclusão desta especialização, mas também para meu crescimento pessoal e profissional.

Enfim, gostei muito de realizar este trabalho, pois aprendi muito com meus estudos e com as orientações recebidas pelo meu professor orientador Jorge Sabatucci.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS:

[1] Artigo da Revista do Professor de Matemática, № 52, artigo de autoria de Higino H. Domingues. Dízimas Periódicas. Rio de Janeiro, SBM.

[2] FIGUEIREDO, D.G. Análise I, 2ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[3] BOYER, C.B. História da Matemática (Tradução Elza F. Gomide). São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

[4] SINGH, S. O último Teorema de Fermat, 13.ª Ed. (Tradução Jorge Luiz Calife). Rio de Janeiro: Record, 2008.