UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O PROBLEMA DE LUCAS

Luiz Gustavo Martins dos Santos

Professora orientadora: Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

Belo Horizonte
2011

Luiz Gustavo Martins dos Santos

O PROBLEMA DE LUCAS

Monografia apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da UFMG, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Especialista em Matemática para Professores do Ensino Básico.

Professora Orientadora: Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

Belo Horizonte
2011

Agradecimentos

À Deus por toda força dada diante das dificuldades.

À minha família, minha mãe Maria, meu pai Luiz e minha irmã Aline, obrigado por todo apoio a mim dispensado.

À Kelly por todo carinho, paciência e companheirismo durante essa caminhada.

Em especial à professora Viviane, minha orientadora, por toda sua dedicação, profissionalismo, paciência e pela imensa contribuição para o meu aprendizado.

Enfim a todos os meus colegas de classe e todas as pessoas que de alguma maneira me ajudaram na realização deste trabalho.

Índice

Introdução

Durante toda minha formação acadêmica e na minha prática docente, os problemas de contagem sempre se apresentaram de maneira interessante e desafiadora.

Nesta perspectiva, a escolha do Problema de Lucas como assunto deste trabalho possibilitou um intenso aprendizado, pois vários tópicos relevantes de combinatória serão tratados de forma detalhada culminando na sua demonstração. O enunciado do Problema de Lucas é o seguinte:

"De quantas maneiras n casais podem se sentar em $2n$ cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua mulher?"

Este problema foi formulado em 1891 pelo matemático Frances Édouard Lucas e posteriormente sua solução foi proposta por vários matemáticos. Neste trabalho vamos apresentar a solução utilizando o Princípio da Inclusão e Exclusão em sua forma alternativa e o Segundo Lema de Kaplansky.

O trabalho consta de três capítulos. O primeiro trata do Princípio da Inclusão e Exclusão onde vamos encontrar a cardinalidade da união de um número finito de conjuntos finitos e também sua demonstração, bem como a forma alternativa para o seu complementar. O primeiro capítulo consta ainda de aplicações importantes como o Crivo de Erastóstenes e as Permutações Caóticas.

O segundo capítulo trata dos Lemas de Kaplansky e suas aplicações. Esse capítulo trás uma particularidade interessante: a interação do trabalho acadêmico com a prática pedagógica. De fato, durante a resolução de problemas combinatórios em sala de aula tive oportunidades de encontrar algumas aplicações dos Lemas de Kaplansky, que serão tratados neste capítulo.

O terceiro capítulo vai trazer o Problema de Lucas com sua demonstração. Para facilitar o entendimento do mesmo, o capítulo trás um tópico sobre permutação circular e a resolução de um caso mais simples. A demonstração do Problema de Lucas será feita de forma detalhada, começando com a solução de um caso específico.

O texto termina com algumas considerações finais nas quais fazemos um breve resumo das questões mais importantes abordadas neste trabalho, relatando a importância deste para o aprendizado e ensino de combinatória.

1. O Princípio da Inclusão e Exclusão e algumas aplicações

1.1. O Princípio da Inclusão e Exclusão

Nesta seção estamos interessados em obter uma fórmula para a cardinalidade da união de um número finito de conjuntos finitos. Representaremos por $|A|$ o número de elementos de um dado conjunto A, ou seja, sua cardinalidade. Como motivação, vamos analisar uma situação problema bem simples.

Exemplo 1.1.1 Numa pesquisa com jovens, foram feitas as seguintes perguntas para que respondessem sim ou não: Gosta de música? Gosta de esportes? Responderam sim à primeira pergunta 90 jovens; 70 responderam sim à segunda; 25 responderam sim a ambas. Supondo que todos eles tenham respondido sim a pelo menos uma das opções, quantos jovens foram entrevistados?

Solução:

- A: conjunto dos que gostam de música. Sua cardinalidade será dada por:
$$|A| = 90$$
- B: conjunto dos que gostam de esporte. Sua cardinalidade será:
$$|\mathrm{B}| = 70$$
- $A \cap B$: conjunto dos que gostam de ambos. Sua cardinalidade será:
$$|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| = 25.$$

É claro que se somarmos $|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}|$ teremos contado duas vezes aqueles que se encontram na interseção de A e B. Portanto para descobrir o número de entrevistados devemos fazer:

$$|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}|.$$

Desta forma,

$$|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = |A| + |\mathrm{B}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| = 90 + 70 - 25 = 135.$$

Teorema 1.1.2 (Princípio da Inclusão e Exclusão): O número de elementos na união de n conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ é dado por:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \le i_1 \le n} |A_{i_1}| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| -$$
$$+ \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n|.$$

Demonstração: Basta mostrar que, dado $p = 1,2,3, \dots, n$, temos que cada elemento que pertence a p dos conjuntos $A_i's$ é contado exatamente uma vez na soma acima. De fato, pertencendo a p dos conjuntos $A_i's$ ele será contado:

- $\binom{p}{1}$ vezes[1] em $\sum_{1 \le i_1 \le n} |A_i|$
- $\binom{p}{2}$ vezes em $\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$
- $\binom{p}{3}$ vezes em $\sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}|$

.

.

.

- $\binom{p}{p}$ vezes em $\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_p}|$.

É claro que a interseção de mais que p conjuntos não fornecerá nenhuma contribuição, uma vez que o elemento em questão pertence a exatamente p dos conjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.

Somando todas as contribuições acima com seus respectivos sinais, obtemos:

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \cdots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p}.$$

[1] O número de maneiras de escolher j elementos de um conjunto com n elementos será aqui denotado por $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}, n \ge j \ge 0$

Queremos provar que a soma acima é igual a um. Para tanto vamos demonstrar primeiramente a seguinte igualdade:

$$\binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \cdots + (-1)^p \binom{p}{p} = 0.$$

Temos pelo Binômio de Newton[2] que:

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (-1)^i . 1^{p-i} = (-1+1)^p = 0.$$

Desta forma,

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \cdots (-1)^{p-1} \binom{p}{p} = 0 + \binom{p}{0} = 1.$$

Exemplo 1.1.3 Quantos são os anagramas da palavra PERDÃO em que P ocupa o primeiro lugar ou o R ocupa o segundo lugar ou o D ocupa o sexto lugar.

<u>Estratégia:</u> Usar o Princípio da Inclusão e Exclusão, pois se trata de um problema de contagem da cardinalidade da união de um número finito de conjuntos finitos.

Definimos:

- A_1 o conjunto de todos os anagramas da palavra PERDÃO tendo o P como a primeira letra.
- A_2 o conjunto de todos os anagramas da palavra PERDÃO tendo o R como a segunda letra.
- A_3 o conjunto de todos os anagramas da palavra PERDÃO tendo o D como a sexta letra.

A resposta para nossos problemas é claramente dada por:

---

[2] Em geral, o Binômio de Newton é escrito da seguinte forma: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3|.$$

Note que, para cada $i = 1,2,3$, cada elemento de A_i é uma permutação de *6* letras com uma delas fixas. Desta forma, o número de elementos de A_i é dado por $5!$ e assim

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 5! = 120.$$

Vamos agora calcular $|A_{i_1} \cap A_{i_2}|$. Neste caso, estamos interessados em obter o número de permutações de 6 letras com 2 letras fixas, portanto

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 4! = 24.$$

Por último vamos contar a cardinalidade da interseção dos três conjuntos, ou seja, o número de permutações de 6 letras com as letras P, R e D fixas, temos:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3! = 6.$$

Usando o Princípio da Inclusão e Exclusão temos:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 3.5! - 3.4! + 3! = 294.\end{aligned}$$

Exemplo 1.1.4 Suponha que *n* cavalheiros foram a uma festa e deixaram seus chapéus com o porteiro. Como o porteiro estava muito distraído, trocou alguns chapéus de lugar.

a) De quantas maneiras distintas os chapéus podem estar dispostos de modo que o chapéu do primeiro ou do segundo cavalheiro estejam na posição correta?

b) De quantas maneiras distintas os chapéus podem estar dispostos de modo que o chapéu do primeiro e do segundo cavalheiro estejam na posição incorreta?

a) Estratégia: Definir conjuntos apropriados e aplicar o Princípio da Inclusão e Exclusão para determinar o número de elementos da união.

Solução:

Sejam A_1 o conjunto de todas as permutações em que o chapéu do primeiro cavalheiro esteja na posição correta e A_2 o conjunto de todas as permutações onde o chapéu do segundo cavalheiro esteja na posição correta.

Assim temos:

$|A_1| = |A_2| = (n-1)!$, pois, para $i = 1,2,$ fixando o chapéu do i-ésimo cavalheiro na posição correta, precisamos apenas permutar os $n-1$ restantes.

$|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$, pois fixando simultaneamente os chapéus do primeiro e do segundo cavaleiros nas posições corretas, precisamos apenas permutar os restantes.

Desta forma:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| &= 2(n-1)! - (n-2)! \\ &= 2(n-1)(n-2)! - (n-2)! = (2n-3)(n-2)!. \end{aligned}$$

b) Estratégia: Calcular o número total de maneiras em que os chapéus possam estar dispostos e retirar a quantidade referente ao item a.

Solução:

O total de maneiras em que os chapéus estão dispostos é dado por $n!,$ assim a solução procurada será:

$$n! - |A_1 \cup A_2| = n! - (2n-3)(n-2)!.$$

Neste texto estamos interessados em obter uma forma alternativa para o Princípio da Inclusão e Exclusão, que será utilizada para calcular a cardinalidade do complementar da união. O item b acima é um exemplo de problema no qual podemos utilizar a forma alternativa do Princípio da Inclusão e Exclusão que discutiremos a seguir.

1.2. Uma forma alternativa para o Princípio da Inclusão e Exclusão

Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são n subconjuntos de um conjunto A, desejamos contar o número de elementos do conjunto $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n)^C$ constituído pelos elementos de *A* que não pertencem a nenhum dos n conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$. Claramente:

$$|(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n)^C| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n|.$$

Utilizando o Princípio da Inclusão e Exclusão, concluímos:

$$|(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^C| = |A| - \sum_{1 \le i_1 \le n} |A_{i_1}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \cdots +$$
$$+(-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Provamos assim o seguinte teorema:

1.2.1. Teorema (Forma alternativa para o Princípio da Inclusão e Exclusão): Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são n subconjuntos de um conjunto A, então:

$$|(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^C| = |A| - \sum_{1 \le i_1 \le n} |A_{i_1}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \cdots +$$
$$+(-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

No próximo exemplo utilizaremos a notação $\lfloor x \rfloor$ para indicar o maior inteiro menor do que ou igual ao real x. *Exemplos:*

$$\lfloor 3{,}1 \rfloor = 3$$
$$\lfloor 5 \rfloor = 5$$
$$\lfloor \pi \rfloor = 3.$$

Exemplo 1.2.2 Dado um número inteiro m e sendo $p_1, p_2, \dots, p_r$ números menores ou iguais a m e primos entre si, encontrar a quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a m que não são divisíveis por nenhum dos números $p_1, p_2, \dots, p_r$.

Estratégia: Dos números inteiros de 1 até m vamos retirar todos aqueles que são divisíveis por p_1 ou p_2 ou, ..., ou p_r e assim teremos todos aqueles que não são divisíveis por nenhum destes números.

Definimos:

- $A = \{1,2,3, \dots, m\}$
- $A_1 = \{x \in A \mid x$ é divisível por $p_1\}$
- $A_2 = \{x \in A \mid x$ é divisível por $p_2\}$
- $A_3 = \{x \in A \mid x$ é divisível por $p_3\}$

.
.
.

- $A_r = \{x \in A \mid x$ é divisível por $p_r\}$.

Portanto a solução do nosso problema será dada por:

$$\left|(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r)^C\right| = |A| - \sum_{1 \le i_1 \le n} \left|A_{i_1}\right| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \left|A_{i_2} \cap A_{i_2}\right| - \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r|.$$

Vejamos a cardinalidade de cada termo:

- $|A| = m$
- $\left|A_{i_1}\right| = \left\lfloor \frac{m}{p_{i_1}} \right\rfloor$
- $\left|A_{i_2} \cap A_{i_2}\right| = \left\lfloor \frac{m}{p_{i_1} p_{i_2}} \right\rfloor$
- $\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\right| = \left\lfloor \frac{m}{p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3}} \right\rfloor$

.
.
.

- $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r| = \left\lfloor \frac{m}{p_1 p_2 \dots p_r} \right\rfloor$.

Sendo assim:

$$|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r)^C| = m - \sum_{1 \le i_1 \le n} \left\lfloor \frac{m}{p_{i_1}} \right\rfloor + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \left\lfloor \frac{m}{p_{i_1} p_{i_2}} \right\rfloor - \\ + \cdots + (-1)^r \left\lfloor \frac{m}{p_1 p_2 \ldots p_r} \right\rfloor.$$

O Princípio da Inclusão e Exclusão pode ser utilizado para encontrar a quantidade de primos não excedentes a determinado número inteiro positivo. Vamos resolver o exemplo abaixo, para tanto utilizaremos o conhecido fato que um número inteiro composto é divisível por um primo não excedente à sua raiz quadrada (Veja Proposição 4.4 de [6]).

Exemplo 1.2.3. Encontrar a quantidade de números primos não excedentes a 100.

Estratégia: Pelo que foi mencionado acima temos que os números compostos não excedentes a 100 devem ter um fator primo não excedente a 10. Desta forma, precisamos encontrar a quantidade de números inteiros positivos menores ou iguais a 100 e que não são divisíveis por nenhum dos primos $2,3,5,7$, e somar três a está quantidade (uma vez que o número 1 não é primo e $2,3,5,7$ também são primos).

Solução:

Pelo exemplo anterior, a quantidade de números que inteiros positivos menores ou iguais a 100 e que não são divisíveis por nenhum dos primos $2,3,5,7$ é:

$$100 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2.3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2.5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2.7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3.5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3.7} \right\rfloor + \\ + \left\lfloor \frac{100}{5.7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2.3.5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2.3.7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2.5.7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3.5.7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2.3.5.7} \right\rfloor = 22.$$

Desta forma há $3 + 22 = 25$ números primos não excedentes a 100.

É interessante mencionar que podemos encontrar todos os números primos não excedentes a determinado inteiro positivo n usando o conhecido Crivo de

Erastóstenes criado pelo matemático grego de mesmo nome. O algoritmo consiste em listar todos os números naturais de 2 até n, em seguida eliminam-se todos os inteiros compostos que são múltiplos dos primos p tais que $p \leq \sqrt{n}$. Assim os números que sobrarem na lista são todos os primos entre 2 e n. Pelo exemplo acima, se desenvolvermos este algoritmo, teremos 25 números primos os quais aparecem destacados na tabela abaixo.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

1.3. As Permutações Caóticas

Uma aplicação interessante da forma alternativa do Princípio da Inclusão e Exclusão se dá na obtenção da quantidade de permutações caóticas.

Definição 1.3.1: Uma permutação de $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ é dita caótica quando nenhum dos $a_i's$ se encontra na posição original, isto é, na i-ésima posição.

Note que no contexto do Exemplo 1.1.4 teríamos uma permutação caótica quando todos os chapéus estão fora da posição original.

Vamos definir A_i como o conjunto de todas as permutações de $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ tendo a_i na posição correta. Assim, a fim de obter o número de permutações caóticas, basta calcular o complementar de $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, ou seja, devemos calcular o número de elementos que não pertencem a nenhum dos $A_i's$.

Denotando por D_n o número de permutações caóticas a serem calculadas, temos:

$$D_n = \left|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^C\right|$$
$$= n! - \sum_{1 \le i_1 \le n} |A_{i_1}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Claramente,

- $\left|A_{i_1}\right| = (n-1)!$, para $1 \le i_1 \le n$
- $\left|A_{i_1} \cap A_{i_2}\right| = (n-2)!$, para $1 \le i_1 < i_2 \le n$
- $\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\right| = (n-3)!$, para $1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n$

.

.

.

- $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n| = 1$.

E, como existem,

- $\binom{n}{1}$ termos em $\sum_{1 \le i_1 \le n} \left|A_{i_1}\right|$
- $\binom{n}{2}$ termos em $\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2}\right|$

.

.

.

- $\binom{n}{n}$ termos em $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n|$

concluímos

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^n$$

Fazendo as simplificações,

$$D_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!}.$$

Finalmente colocando $n!$ em evidência obtemos que o número de permutações caóticas de n elementos é dado por

$$D_n = n!\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Exemplo 1.3.2 (Enem adaptada / Prova cancelada 2009 / Questão 79): Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se um real de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia dois reais de desconto. Determine o número de sequências que podem ser formadas de modo que o consumidor não ganhe nenhum desconto.

Estratégia: Usar a fórmula de permutação caótica, pois a situação problema acima contextualizada é uma clara aplicação da mesma.

Solução:

Devemos determinar o número de permutações de quatro objetos onde nenhum deles ocupe a posição original.

Assim:

$$D_4 = 4!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 9.$$

Por se tratar de um número pequeno de possibilidades vamos listar, a título de curiosidade, as sequências calculadas acima:

0125	*2015*	*5012*
0512	*2105*	*5021*
0521	*2501*	*5102*

Exemplo 1.3.3 Uma professora distribui nove livros diferentes para nove crianças. Um mês depois recolhe os livros e, novamente, distribui um livro para cada criança. De quantas maneiras os livros podem ser distribuídos de modo que somente três crianças recebam o mesmo livro desta vez?

Estratégia: Primeiramente devemos escolher as três crianças que vão receber o mesmo livro. Depois utilizar a fórmula de permutação caótica de 6 elementos para verificar o número de possibilidades onde nenhum dos elementos estará na posição original.

Solução:

- $\binom{\mathbf{9}}{\mathbf{3}}$ maneiras para escolher os alunos que vão ficar com o mesmo livro.
- D_6 modos para determinar o número de permutações onde nenhum dos seis livros volte para seu antigo dono.

Assim a solução do problema é:

$$\binom{\mathbf{9}}{\mathbf{3}}.6!\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}\right).$$

2. Os Lemas de Kaplansky

Neste capítulo, vamos enunciar e demonstrar os dois lemas de Kaplansky, sendo que o segundo deles será fundamental na solução do problema de Lucas.

2.1 Primeiro Lema de Kaplansky

O Primeiro Lema de Kaplansky nos fornecerá o número $F(n,p)$ de subconjuntos de p elementos de $\{1,2,3,\ldots,n\}$ nos quais não há números consecutivos. Vamos analisar um exemplo antes da demonstração.

Exemplo 2.1.1 Dados $A=\{1,2,3,4,5\}$ de quantos modos é possível formar um subconjunto de dois elementos nos quais não haja números consecutivos?

Solução:

Neste problema podemos ter apenas subconjuntos de dois algarismos não consecutivos. Como o exemplo tem poucas possibilidades podemos enumerar os casos:

$$\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,5\}.$$

Assim

$$F(5,2)=6.$$

Entretanto, desejamos uma solução combinatória para este caso. Para isto, vamos marcar com o sinal $(+)$ os elementos que farão parte do subconjunto e com o sinal $(-)$ os números que não estarão no subconjunto em questão. Podemos assim representar cada subconjunto de dois elementos como uma sequência de cinco símbolos sendo $2(+)\ e\ 3\ (-)$. No nosso exemplo teremos as seguintes sequências:

$$\{1,3\} \leftrightarrow + \ - + \ - -$$
$$\{1,4\} \leftrightarrow + \ - - + \ -$$

$$\{1,5\} \leftrightarrow + \; - - \; - +$$
$$\{2,4\} \leftrightarrow - \; + - + \; -$$
$$\{2,5\} \leftrightarrow - \; + - - \; +$$
$$\{3,5\} \leftrightarrow - \; - + \; - \; +$$

O nosso objetivo é escolher dois números não consecutivos que constituirão o subconjunto, então, na notação de sequência os sinais $(+)$ correspondem a estes números. Desta forma, basta fixar os sinais $(-)$ e colocar entre eles ou após os mesmos os dois sinais de $(+)$. Nesta configuração existem quatro posições entre os sinais $(-)$ onde os sinais $(+)$ podem ser colocados:

$$\blacksquare - \blacksquare - \blacksquare - \blacksquare$$

Portanto,

$$F(5,2) = \binom{4}{2} = 6.$$

Teorema 2.1.2.(Primeiro Lema de Kaplansky): O número de subconjuntos de p elementos de $\{1,2,3,\ldots,n\}$ nos quais não há números consecutivos é

$$F(n,p) = \binom{n-p+1}{p}, n \geq p \geq 0$$

Demonstração: Queremos formar subconjuntos de p elementos não consecutivos. De maneira análoga ao exemplo anterior, vamos representar os elementos desse subconjunto com o sinal $(+)$. Desta forma teremos $(n-p)$ elementos que representaremos com o símbolo $(-)$, que serão os números que não estarão no subconjunto. Entre os sinais $(-)$ vão existir $(n-p+1)$ espaços vazios disponíveis. Desta forma basta escolher entre os $(n-p+1)$ espaços vazios aqueles que serão ocupados pelos p sinais $(+)$. Logo,

$$F(n,p) = \binom{n-p+1}{p}.$$

Exemplo 2.1.3 João e Maria vão sentar-se na mesma fila de cinema. A fila tem 8 cadeiras, todas vazias. Como não querem sentar-se em cadeiras vizinhas, de quantas maneiras poderão sentar-se?

Estratégia: Utilizar o Primeiro Lema de Kaplansky para obter o número $F(8,2)$ de escolhas das duas cadeiras não consecutivas que João e Maria vão se sentar. Uma vez escolhidas as duas cadeiras a serem ocupadas devemos contar o número de maneiras de designar qual será a de João e qual será a de Maria.

Solução:

$$F(8,2) = \binom{8-2+1}{2} = \binom{7}{2} = 21.$$

Temos $2!$ maneiras de permutar João e Maria e assim a solução para este problema é

$$F(8,2).\,2! = 21.2 = 42.$$

Exemplo 2.1.4 (OBM 2010) Diamantino gosta de jogar futebol, mas se jogar dois dias seguidos ele fica com dores musculares. De quantas maneiras Diamantino pode escolher em quais de dez dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores musculares? Uma maneira é não jogar futebol em nenhum dos dias.

Solução:

Note que Diamantino pode jogar futebol no máximo 5 vezes; caso contrário ele necessariamente joga dois dias seguidos. Vamos supor que Diamantino joga futebol em p dias. Então os p dias em que ele joga devem ser imediatamente seguidos por dias em que ele não joga. Desta forma basta de um conjunto de dez dias possíveis formar subconjunto de p elementos não consecutivos, ou seja:

$$F(10,p) = \binom{10-p+1}{p}.$$

Como Diamantino pode jogar no máximo apenas 5 vezes temos que $0 \le p \le 5$. Assim teremos as seguintes possibilidades:

$$\binom{11-0}{0}+\binom{11-1}{1}+\binom{11-2}{2}+\binom{11-3}{3}+\binom{11-4}{4}+\binom{11-5}{5}=1+10+36+56+35+6=144.$$

2.2. Segundo Lema de Kaplansky

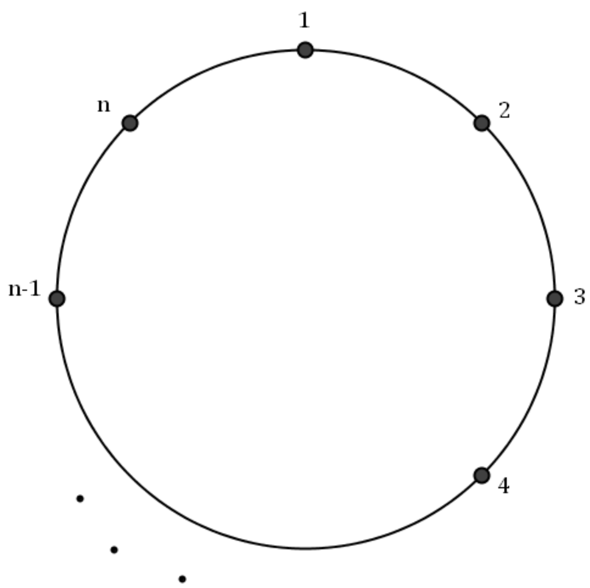
Determinamos agora o número $G(n,p)$ de subconjuntos de p elementos (aqui denotados simplesmente por p-subconjuntos) de $\{1,...n\}$ nos quais não há números consecutivos e, além disso, 1 e n são considerados como consecutivos.

Teorema 2.2.1 (Segundo Lema de Kaplansky): O número de p-subconjuntos de $\{1,2,\dots,n\}$ nos quais não há números consecutivos, considerando 1 e n como consecutivos, é igual a

$$G(n,p) = \frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}.$$

Demonstração:

Suponhamos agora que os elementos de $\{1,2,\dots,n\}$ estejam arrumados em um círculo como mostra a figura abaixo:



Estratégia: A quantidade total de subconjuntos será a soma da quantidade de subconjuntos nos quais o '1' figura somada com a quantidade de subconjuntos nos quais o '1' não figura.

Caso 1: Subconjuntos nos quais o elemento '1' figura. Para fazê-lo, devemos escolher $p-1$ elementos em $\{3,4\ldots,n-1\}$ (pois o *1* já está presente e o *'2'* e o *'n'* não podem ser escolhidos pois são consecutivos de 1), portanto, pelo Primeiro Lema de Kaplansky, o número de modos que isso pode ser feito é

$$F(n-3,p-1)=\binom{n-3-(p-1)+1}{p-1}=\binom{n-p-1}{p-1}.$$

Caso 2: Subconjuntos nos quais o '1' não figura. Para fazê-lo devemos escolher p elementos de $\{2,3,\ldots,n\}$ não podendo ser escolhidos elementos consecutivos. Pelo Primeiro Lema de Kaplansky, o número de maneiras que isto pode ser feito é

$$F(n-1,p)=\binom{n-1-p+1}{p}=\binom{n-p}{p}.$$

Portanto $G(n,p)$ é dado por

$$\begin{aligned}\binom{n-p-1}{p-1}+\binom{n-p}{p} &= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!\,(n-2p)!}+\frac{(n-p)!}{p!\,(n-2p)!}=\frac{(n-p-1)!\,p+(n-p)!}{p!\,(n-2p)!}\\ &=(n-p+1)!\,\frac{p+(n-p)}{p!\,(n-2p)!}=\frac{(n-p-1)!.\,n}{p!\,(n-2p)!}\\ &=\frac{n}{n-p}.\frac{(n-p)!}{p!\,(n-2p)!}\\ &=\frac{n}{n-p}.\binom{n-p}{p}.\end{aligned}$$

Assim

$$G(n,p)=\frac{n}{n-p}.\binom{n-p}{p}.$$

Exemplo 2.2.2 João pretende jogar futebol três vezes por semana, mas para melhorar seu desempenho ele não pretende praticar o esporte em dias consecutivos. De quantas maneiras João pode escolher os dias de aula, sendo sábado e domingo considerados dias consecutivos?

Estratégia: Devemos utilizar o Segundo Lema de Kaplansky neste exemplo, pois João precisa escolher três dias não consecutivos entre os sete dias da semana, sendo que o primeiro dia domingo é considerado consecutivo do sábado.

Solução:

$$G(7,3) = \frac{7}{7-3}\binom{7-3}{3} = \frac{7}{4}.4 = 7.$$

Exemplo 2.2.3 Pedro levou 5 alunos para uma excursão. Na hora do lanche os alunos devem se sentar em uma mesa circular contendo 15 cadeiras. De quantos modos isso pode ser feito de modo que não haja ocupação simultânea de duas cadeiras vizinhas?

Estratégia: Utilizar o Segundo Lema de Kaplansky para obter o número $G(15,5)$ de escolhas das cinco cadeiras não consecutivas que os alunos vão se sentar. Uma vez escolhidas as cinco cadeiras a serem ocupadas devemos designá-las para cada aluno.

Solução:

$$G(15,5) = \frac{15}{15-5}\binom{15-5}{5} = \frac{3}{2}.252 = 378$$

Temos $5!$ maneiras de permutar as cadeiras escolhidas entre os alunos, e assim a solução para este problema é

$$5!\,G(15,5) = 120.378 = 45360.$$

3. Resolvendo o Problema de Lucas

Neste capítulo, estamos interessados em apresentar a solução para o Problema de Lucas. Para tanto vamos abordar primeiramente um tópico sobre Permutações Circulares e como motivação resolver um problema parecido.

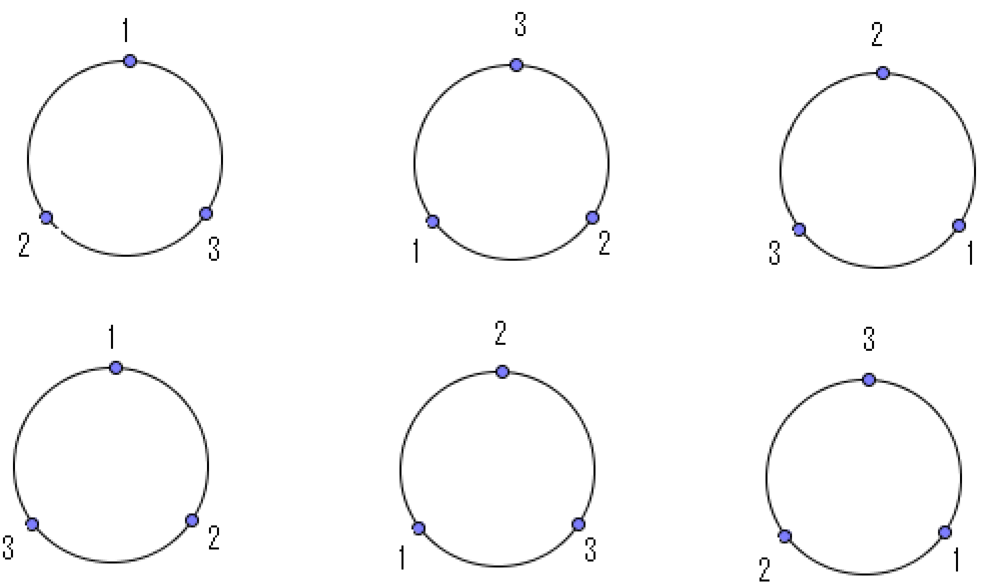
3.1. Permutações Circulares

Defini-se como permutação circular a permutação de n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, considerando equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação.

Teorema 3.1.1 O número de Permutações Circulares de n objetos é dado por:

$$(PC)_n = (n-1)!.$$

Antes da demonstração, vamos analisar a permutação de três objetos distintos em torno de um círculo.



Nota-se, que tanto na primeira linha como na segunda, qualquer uma das três figuras pode ser obtida a partir da outra por uma simples rotação. Contudo nenhuma das três primeiras podem ser obtidas, por rotação, a partir de nenhuma das três últimas, logo existem apenas duas permutações circulares de três objetos. Observe que nas três primeiras figuras considerando o sentido horário, 1 precede o 2 que precede o 3 que procede o 1. Nas outras três figuras temos que 1 precede o 3 que precede o 2 que procede o 1. Assim podemos dizer que nas permutações circulares o que importa é apenas a posição relativa dos objetos entre si.

Demonstração Como foi visto no exemplo acima o que importa é a posição relativa dos objetos, se dispomos de n objetos para colocá-los em torno de um círculo em exatamente n lugares, temos que:

- Há 1 modo de colocar o primeiro objeto no círculo, pois em qualquer lugar que seja colocado será o único objeto no círculo.
- Depois de escolhida a posição do primeiro objeto, basta ordenar os outros objetos ao seu redor através de uma permutação simples: $(n-1)!$ maneiras.

Dessa forma, temos:

$$(PC)_n = 1.(n-1)! = (n-1)!.$$

3.2. Problema parecido com o problema de Lucas

Nesta seção, trabalharemos com um problema parecido com o de Lucas, porém mais simples já que não exigimos que as pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas, mas apenas que o marido e a mulher de um mesmo casal não fiquem juntos. Além disso, se duas configurações diferem por uma permutação circular, elas são consideradas iguais.

Exemplo 3.2.1 De quantos modos 3 casais podem se sentar ao redor de uma mesa circular de tal forma que o marido e a mulher não fiquem juntos?

<u>Estratégia</u>: Vamos contar todas as possibilidades na qual podemos permutar as seis pessoas em um círculo, e utilizando a Forma Alternativa para o Princípio da Inclusão e Exclusão, vamos excluir todas aquelas permutações onde exista algum dos casais juntos.

Solução:

Sejam c_1, c_2, c_3, os três casais. Para cada $k = 1,2,3$, defina A_k como sendo o conjunto das permutações circulares das 6 pessoas nas quais os componentes do k-ésimo casal estejam juntos. Precisamos assim obter $|(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c|$. Temos:

- Como A_{i_1} é o conjunto no qual os componentes de c_{i_1} estão juntos, para obter a sua cardinalidade consideramos c_{i_1} como um único elemento, e assim procedemos a permutação circular dos 5 elementos formados pelo único elemento c_{i_1} mais as 4 pessoas que fazem parte dos demais casais. Note que isto pode ser feito de $4!$ maneiras. Finalmente consideramos as $2!$ permutações dos componentes do casal c_{i_1} entre si. Desta forma,

$$|A_{i_1}| = 2.4!.$$

- $A_{i_1} \cap A_{i_2}$ é o conjunto no qual os componentes de c_{i_1} e c_{i_2} estão juntos. Como foi feito no caso anterior, para obter sua cardinalidade, vamos considerar c_{i_1} e c_{i_2} cada qual como um único elemento e assim proceder a permutação circular dos 4 elementos. Finalmente consideramos, para $j = 1,2$, as $2!$ permutações dos componentes de cada casal c_{i_j} entre si. Desta forma:

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2}\right| = 2^2.3!.$$

- $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ é o conjunto no qual os componentes c_1, c_2 e c_3, estão juntos. Para obter sua cardinalidade, vamos considerar c_1, c_2 e c_3 cada qual como um único elemento e assim proceder a permutação circular dos 3 elementos.

Finalmente consideramos, para $i = 1,2,3$, as $2!$ permutações dos componentes do casal c_i entre si. Desta forma:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2^3.2!.$$

Agora, como para $k = 1,2,3,$ existem $\binom{3}{k}$ termos em

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right|$$

e o número de permutações circulares de 6 pessoas é $5!$, então usando a Forma Alternativa do Princípio da Inclusão e Exclusão temos:

$$|(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c| = 5! - \binom{3}{1} 2.4! + \binom{3}{2} 2^2.3! - \binom{3}{3} 2^3.2! = 32.$$

Note que o ponto chave da solução acima estava na contagem da cardinalidade $\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right|$, para $k = 1,2,3$. A fim de resolvermos o caso geral, utilizaremos o seguinte lema:

Lema 3.2.2 Dados n casais $c_1, c_2, \ldots, c_n$, defina, para cada $i = 1, \ldots, n,$ A_i como sendo o conjunto das permutações circulares das $2n$ pessoas nas quais os componentes do i-ésimo casal estão juntos. Então, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, temos:

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right| = 2^k(2n - 1 - k)!.$$

Demonstração: Como $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ é o conjunto no qual os componentes de cada casal c_{i_j}, com $j = 1, 2, \ldots, k$, estão juntos, então para para obter a sua cardinalidade consideramos cada um dos casais c_{i_j} como um único elemento, e assim procedemos a permutação circular dos $2n - k$ elementos formados por cada casal c_{i_j} visto como um único elemento mais as $2n - 2k$ pessoas que fazem parte dos demais casais. Note que isto pode ser feito de $(2n - k - 1)!$ maneiras.

Finalmente consideramos as 2 possíveis permutações de cada um dos componentes do casal c_{i_j} entre si, para $j = 1, 2, \dots, k$. Desta forma:

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\right| = 2^k(2n - k - 1)!.$$

Exemplo 3.2.3 De quantos modos n casais podem se sentar ao redor de uma mesa circular de tal forma que o marido e a mulher não fiquem juntos?

Estratégia: O problema sugerido é a generalização do Exemplo 3.2.1, portanto devemos contar todas as possibilidades de permutações circulares das n pessoas e utilizando a Forma Alternativa para o Princípio da Inclusão e Exclusão, vamos excluir todas aquelas permutações onde exista algum dos casais juntos.

Solução:

Sejam $c_1, c_2, c_3, c_4, .., c_n$ os n casais. Para cada $i = 1,2, \dots, n$ defina A_i como sendo o conjunto das permutações circulares das n pessoas nos quais os componentes do i-ésimo casal estejam juntos. Precisamos assim obter $|(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c|$.
Assim, pelo Lema 3.4, temos

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\right| = 2^k(2n - 1 - k)!, \text{ para } k = 1,2, \dots, n.$$

Além disso, para $k = 1, \dots, n$, existem $\binom{n}{k}$ termos em,

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\right|.$$

Finalmente, como o número de permutações circulares de $2n$ pessoas é $(2n - 1)!$, usando a Forma Alternativa do Princípio da Inclusão e Exclusão temos

$$|(A_1 \cup \dots \cup A_n)^c| = (2n - 1)! + \sum_{1 \le k \le n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^k (2n - 1 - k)!.$$

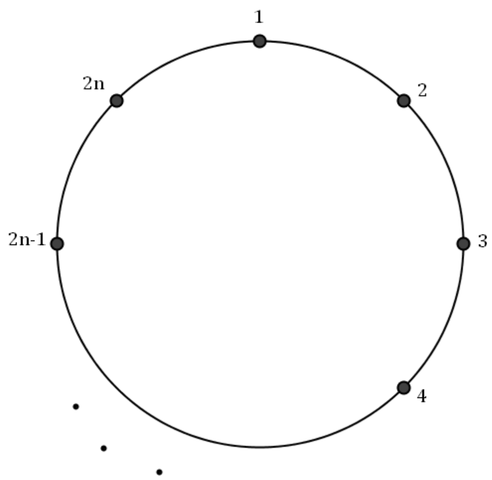
3.3 Problema de Lucas

Nesta seção resolveremos finalmente o Problema de Lucas.

Problema de Lucas: De quantas maneiras n casais podem sentar em $2n$ cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua mulher?

Solução:

Vamos numerar os lugares de 1 até $2n$:



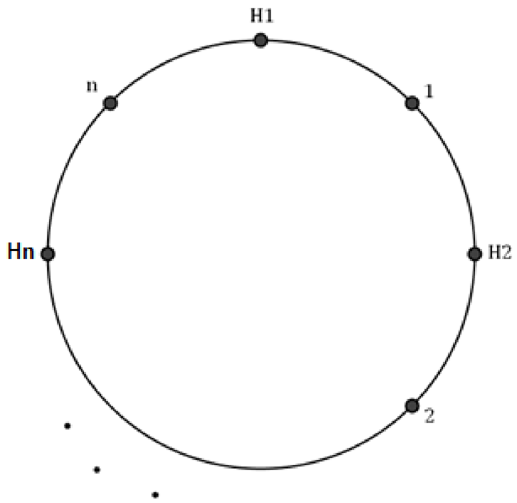
Como pessoas do mesmo sexo não podem se sentar juntas devemos colocar as mulheres nas posições pares e os homens nas posições ímpares ou vice versa. Desta forma podemos seguir a seguinte sequência:

- Escolhe-se a posição par ou ímpar para os homens, isso será feito de 2 modos.
- Uma vez determinado a posição para cada sexo devemos colocar os homens nos lugares a eles reservados, isso será feito de $n!$ modos.
- Basta agora colocar as mulheres nos lugares restantes com a restrição de que nenhuma delas se sente ao lado do seu marido. Vamos denotar como U_n o número de maneiras de colocar n mulheres nos n lugares vazios, não permitindo a colocação de nenhuma mulher ao lado de seu marido.

Assim a solução para o Problema de Lucas será

$$2n!\,U_n.$$

Para obtermos U_n, consideramos os espaços vazios $1,2,\dots,n$ e os homens $H_1, H_2, \dots, H_n$ com a seguinte notação:



Seja M_i a esposa de H_i, $1 \leq i \leq n$. Definimos, para cada $1 \leq i \leq n$,

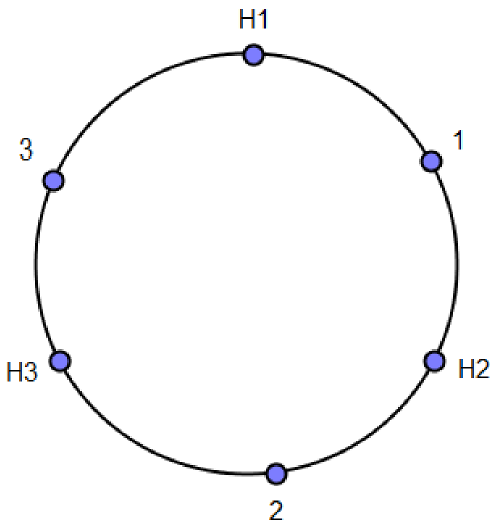
- $A =$ Conjunto das permutações das mulheres.
- $A'_i =$ Conjunto das permutações das mulheres em que M_i ocupa o $(i-1)$-ésimo lugar (sendo $1-1=n$).
- $A_i =$ Conjunto das permutações das mulheres em que M_i ocupa o i-ésimo lugar.

Como estamos interessados em determinar o número U_n de maneiras de colocar n mulheres nos n lugares vazios, não permitindo a colocação de nenhuma mulher ao lado de seu marido, então temos claramente

$$U_n = \left|(A'_1 \cup A_1 \cup A'_2 \cup A_2 \cup \dots \cup A'_n \cup A_n)^c\right|.$$

Assim, o nosso problema está em determinar a cardinalidade acima. Para ilustrar as idéias que serão usadas vamos primeiramente determinar o caso $n = 3$.

Determinando U_3: Neste caso, queremos determinar o número U_3 de maneiras de colocar as três mulheres nas posições $1, 2, 3$ abaixo, de tal modo que a mulher M_i não fique ao lado de seu marido H_i, para $1 \leq i \leq 3$.



Utilizando as notações definidas no caso geral, vemos que obter U_3 é equivalente à determinar a cardinalidade de $(A'_1 \cup A_1 \cup A'_2 \cup A_2 \cup A'_3 \cup A_3)^c$, isto é:

$$U_3 = \left|(A'_1 \cup A_1 \cup A'_2 \cup A_2 \cup A'_3 \cup A_3)^c\right|.$$

A fim de aplicar a Forma Alternativa do Princípio da Inclusão e Exclusão, notemos que:

$$|A| = 3! = 6.$$

Agora, para $1 \leq i \leq 3$, temos:

$$|A_i| = |A'_i| = (3-1)! = 2!,$$

já que a cardinalidade de cada um destes conjuntos é o número de permutações de três elementos tendo um deles fixo.

Desta forma, considerando os seis conjuntos:

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} |A_i| + \sum_{1 \leq i \leq 3} |A'_i| = 6.(3-1)! = 12.$$

Precisamos agora obter a cardinalidade da interseção dos conjuntos envolvidos (tomados dois a dois, três a três,...). Para facilitar o entendimento, vamos discriminar os conjuntos A'_i e A_i, para $1 \leq i \leq 3$, na seguinte tabela:

Conjunto	Mulher cuja posição está definida	Posição definida
A'_1	M_1	3
A_1	M_1	1
A'_2	M_2	1
A_2	M_2	2
A'_3	M_3	2
A_3	M_3	3

Observando o quadro vemos que:

- Como a mesma mulher não pode ocupar duas posições diferentes ao mesmo tempo, então:

$$|A'_1 \cap A_1| = |A'_2 \cap A_2| = |A'_3 \cap A_3| = 0.$$

- Como duas mulheres diferentes não podem ocupar a mesma posição ao mesmo tempo, então:

$$|A_1 \cap A'_2| = |A_2 \cap A'_3| = |A_3 \cap A'_1| = 0.$$

Desta forma, chegamos à importante conclusão que a interseção de dois conjuntos consecutivos escolhidos dentre $A'_1, A_1, A'_2, A_2, A'_3, A_3$ (considerando também A_3 e A'_1 consecutivos) é sempre vazia.

Note que se dois conjuntos não são consecutivos, então teremos em sua interseção dois elementos fixos e assim a cardinalidade de sua interseção será $(3-2)! = 1$. Em outras palavras, temos que:

$$|A'_1 \cap A'_2| = |A'_1 \cap A_2| = |A'_1 \cap A'_3| = 1$$
$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A'_3| = |A_1 \cap A_3| = 1$$
$$|A'_2 \cap A'_3| = |A'_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1.$$

Observe que a quantidade dos conjuntos listados acima poderia ter sido calculada pelo Segundo Lema de Kaplansky, já que consiste na quantidade de 2-subconjuntos de $\{1,2,\ldots,6\}$ (estabelecendo a bijeção $A'_1 \leftrightarrow 1, A_1 \leftrightarrow 2, A'_2 \leftrightarrow 3, A_2 \leftrightarrow 4, A'_3 \leftrightarrow 5, A_3 \leftrightarrow 6$) nos quais não há números consecutivos (considerando 1 e 6 como consecutivos):

$$G(6,2) = \frac{6}{6-2}\binom{6-2}{2} = 9.$$

Logo a soma das cardinalidades das interseções de dois conjuntos escolhidos dentre $A'_1, A_1, A'_2, A_2, A'_3, A_3$ é dada por:

$$G(6,2).\,1! = 9.1 = 9.$$

Do que foi discutido acima é claro que, se considerarmos agora a interseção de três conjuntos, então teremos que a mesma será não vazia apenas quando não tivermos nenhum deles consecutivos, isto é, apenas quando considerarmos as $G(6,3) = \frac{6}{6-3}\binom{6-3}{3} = 2$ interseções

$$A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3 \text{ e } A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

Como em ambos os casos as três mulheres estão fixas temos que:

$$|A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1.$$

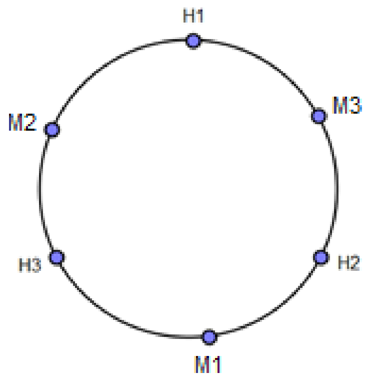
Logo, a soma das cardinalidades das interseções de três conjuntos escolhidos dentre $A'_1, A_1, A'_2, A_2, A'_3, A_3$ é dada por:

$$G(6,3).\,1 = 2.1 = 2.$$

Finalmente, se consideramos as interseções de mais que três conjuntos escolhidos dentre $A'_1, A_1, A'_2, A_2, A'_3, A_3$, então teremos obviamente que a cardinalidade da interseção é nula, já que teremos necessariamente pelo menos dois conjuntos consecutivos. Portanto, utilizando a Forma Alternativa do Princípio da Inclusão e Exclusão, temos:

$$U_3 = \left|(A'_1 \cup A_1 \cup A'_2 \cup A_2 \cup A'_3 \cup A_3)^c\right| = 3! - 6.2! + G(6,2).1! - G(6,3).0! = 1.$$

Note que, de fato,



é a única permutação em que cada mulher não está sentada junto com seu marido.

Determinando $\boldsymbol{U_n}$: Vamos agora retornar ao caso geral. Estamos interessados em achar a solução para U_n. Vale lembrar que

$$U_n = \left|(A'_1 \cup A_1 \cup A'_2 \cup A_2 \cup \ldots \cup A'_n \cup A_n)^c\right|.$$

Assim temos:

$$|A| = n!$$

Agora, para $1 \leq i \leq n$, temos:

$$|A_i| = |A'_i| = (n-1)!,$$

já que a cardinalidade de cada um destes conjuntos é o número de permutações de n elementos tendo um deles fixo.

Desta forma,

$$\sum_{1 \le i \le n} |A_i| + \sum_{1 \le i \le n} |A'_i| = 2n(n-1)!.$$

De maneira análoga ao exemplo anterior, uma vez que precisamos agora obter a cardinalidade da interseção dos conjuntos envolvidos (tomados dois a dois, três a três,...), vamos montar uma tabela relacionando os conjuntos A'_i e A_i para $1 \le i \le n$, a mulher cuja posição está definida e sua respectiva posição.

Conjunto	Mulher cuja posição está definida	Posição definida
A'_1	M_1	n
A_1	M_1	1
A'_2	M_2	1
A_2	M_2	2
A'_3	M_3	2
. . .	. . .	. . .
A'_{n-1}	M_{n-1}	$n-2$
A_{n-1}	M_{n-1}	$n-1$
A'_n	M_n	$n-1$
A_n	M_n	n

Vamos agora determinar a cardinalidade da interseção dos conjuntos envolvidos (tomados dois a dois, três a três,...). No caso geral, analogamente ao que ocorreu no caso $n = 3$, temos que a interseção de dois conjuntos consecutivos escolhidos dentre $A'_1, A_1, A'_2, A_2, \dots, A'_n, A_n$ (considerando também A_n e A'_1 consecutivos) é sempre vazia, pois:

- A mesma mulher não pode ocupar duas posições diferentes ao mesmo tempo e assim:

$$|A'_i \cap A_i| = 0.$$

- Duas mulheres diferentes não podem ocupar a mesma posição ao mesmo tempo e assim:

$$|A_i \cap A'_{i+1}| = 0.$$

Desta forma, para cada $k = 2,3, \dots, 2n$, podemos nos ater apenas à cardinalidade da interseção de k conjuntos escolhidos dentre $A'_1, A_1, A'_2, A_2, \dots, A'_n, A_n$ (considerando também A_n e A'_1 consecutivos) e satisfazendo a condição que nenhum dos conjuntos considerados na interseção sejam consecutivos. Note que, neste caso, pelo Segundo Lema de Kaplansky, temos que o número de interseções a serem consideradas é dada por

$$G(2n, k) = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}, \qquad k = 2,3, \dots, n,$$

e a cardinalidade da interseção de k conjuntos é dada por $(n-k)!$, $k = 2, \dots, n$.

Observe que se consideramos as interseções de mais que n conjuntos escolhidos dentre $A'_1, A_1, A'_2, A_2, \dots, A'_n, A_n$, ou seja, com $k = n+1, \dots, 2n$, teremos obviamente que a cardinalidade da interseção é nula, já que teremos necessariamente pelo menos dois conjuntos consecutivos.

Logo a soma das cardinalidades da interseção de k conjuntos escolhidos dentre $A'_1, A_1, A'_2, A_2, \dots, A'_n, A_n$ é dada por:

$$G(2n, k).(n-k)! = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}.(n-k)!, \qquad k = 2, \dots, n.$$

Utilizando a Forma Alternativa do Princípio da Inclusão e Exclusão temos:

$$U_n = \left|(A'_1 \cup A_1 \cup A'_2 \cup A_2 \cup \ldots \cup A'_n \cup A_n)^c\right|$$
$$= n! - 2n(n-1)! + \tfrac{2n}{2n-2}\binom{2n-2}{2}.(n-2)! - \cdots + (-1)^n \tfrac{2n}{2n-n}\binom{2n-n}{n}(n-n)!.$$

E assim:

$$U_n = \sum_{o \le k \le n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

Desta forma, a solução para o Problema de Lucas é dada por

$$2n!\,U_n = 2n! \sum_{o \le k \le n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!.$$

Vamos utilizar o resultado em alguns casos particulares:

Para $n = 1$, é obvio que o resultado será nulo, pois necessariamente o marido estará do lado de sua esposa.

Vamos então aplicar o resultado para $n = 2$:

$$4 \sum_{o \le k \le 2} (-1)^k \frac{4}{4-k}\binom{4-k}{k}(2-k)!.$$

Para $k = 0$:

$$4.\left[\binom{4-0}{0}(2-0)!\right] = 8$$

Para $k = 1$:

$$4.\left[-\frac{4}{4-1}\binom{4-1}{1}(2-1)!\right] = -16$$

Para $k = 2$:

$$4.\left[\frac{4}{4-2}\binom{4-2}{2}(2-2)!\right] = 8.$$

Dessa forma para $n = 2$, o a resposta para o problema de Lucas será:

$$8 - 16 + 8 = 0.$$

Note que o resultado já era esperado, uma vez que ao exigir que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas, teremos necessariamente que o marido estará ao lado de sua esposa.

Vamos então aplicar o resultado para $n = 3$. Como vimos $U_3 = 1$ e assim a resposta para o problema de Lucas será:

$$2.3!.U_3 = 2.3!.1 = 12.$$

De maneira análoga ao caso acima, podemos achar a solução para o Problema de Lucas (que denominaremos "número de Lucas") de acordo com a quantidade de casais. Veja a tabela abaixo:

Número de casais	Número de Lucas
1	0
2	0
3	12
4	96
5	3120
6	115200
7	5836320

Considerações finais

Na realização deste trabalho, tive oportunidade de aprimorar meus conhecimentos em análise combinatória, bem como aplicar alguns dos assuntos estudados na minha prática docente.

Afim de demonstrar o problema de Lucas, vários assuntos relevantes foram tratados, entre eles se destacam o Princípio da Inclusão e Exclusão que determina a cardinalidade da união de um número finito de conjuntos finitos, bem como sua Forma Alternativa que determina a cardinalidade do complementar desta união. Algumas de suas aplicações como o Crivo de Erastóstenes e as Permutações Caóticas também trouxeram um grande aprendizado.

É interessante que, durante a elaboração desta monografia, em diversos momentos na minha prática docente tive contato com vários problemas cuja solução utilizava as idéias presentes nos Lemas de Kaplansky. Tal fato ocorreu na resolução de uma lista de exercícios das Olimpíadas de Matemática para alguns alunos onde, para determinar a solução de alguns problemas, pude utilizar os Lemas de Kaplansky e suas ideias. Desta forma, além de sua importância para a solução do Problema de Lucas, os lemas foram determinantes para que eu desenvolvesse o raciocínio combinatório na solução de problemas.

Vale mencionar que, além de desenvolver várias habilidades na resolução de problemas, este trabalho permitiu um grande aperfeiçoamento na maneira correta de se escrever matemática, pois através das diversas demonstrações apresentadas, tive contato com a matemática dedutiva que exigiu a utilização de uma linguagem formal.

Desta forma, a solução do Problema de Lucas me proporcionou os mais diversos aprendizados, fundamentais na minha prática docente diária, ampliando de forma considerável a minha visão para resolução dos problemas combinatórios.

Referências Bibliográficas

[1] ENEM 2009 faça download da prova. Educação. Brasília, 29 de Agosto de 1999. Disponível em: http://portal.inep.gov.br. Acesso em 23/10/2011.

[2] MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios.** Coleção do Professor de Matemática. Nona edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[3] OBM, Olimpíada Brasileira de Matemática provas e Gabaritos. Rio de Janeiro . Disponível em: http://www.obm.org.br/opencms/provas_gabaritos Acesso em 23/10/2011

[4] ROSEN, Kenneth H. Matemática discreta e suas aplicações. Sexta edição. São Paulo: Mc-Graw-Hill, 2009.

[5] SANTOS, José Plínio Oliveira; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C.. **Introdução à Análise Combinatória.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. 2007.

[6] VIDIGAL, Ângela; AVRITZER, Dan; SOARES, Eliana Farias; BUENO, Hamilton Prado; FERREIRA, Maria Cristina Costa; FARIA, Marília Costa. **Fundamentos de Álgebra,** 1ª edição atualizada. Editora UFMG, 2009.