UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Andréa Costa Nascimento

Duas maneiras diferentes de demonstrar a Relação de Euler para poliedros convexos, vista no ensino médio

Belo Horizonte

2012

Duas maneiras diferentes de demonstrar a Relação de Euler para poliedros convexos, vista no ensino médio

Andréa Costa Nascimento

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de **Especialista em Educação Básica.**

Professor Orientador: Jorge Sabatucci

Belo Horizonte

2012

Duas maneiras diferentes de demonstrar a Relação de Euler para poliedros convexos, vista no ensino médio

Andréa Costa Nascimento

BANCA EXAMINADORA

Prof. Jorge Sabatucci (Orientador)
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Profª. Carmen Rosa Giraldo Vergara
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Prof. Francisco Dutenhefner
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Belo Horizonte, 2012.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é o de apresentar de duas maneiras diferentes a relação de Euler, estudada no ensino médio.

Apresentaremos condições necessárias e suficientes para que um poliedro que satisfaça a relação de Euler seja convexo.

Mostraremos também a existência de cinco tipos de poliedros de Platão.

Palavras-chave: Poliedros, Relação de Euler, Poliedros de Platão.

ABSTRACT

The objective of this work is to present in two different ways the relation of Euler, studied in high school.

We will present necessary and sufficient conditions for a polyhedron that satisfies the Euler relation to be convex.

We will also show the existence of five types of polyhedra of Platão.

Keywords: Polyhedra, Relation’s Euler, Polyhedra of Platão.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de demonstrar de duas maneiras diferentes que em um poliedro convexo com F faces, A arestas e V vértices vale a relação $F - A + V = 2$, conhecida no ensino médio como a relação de Euler.

Inicialmente apresentamos um resumo da monografia.

No capítulo 1 são apresentados conceitos e definições que serão utilizados nos capítulos posteriores.

No capítulo 2 apresentamos duas demonstrações da relação de Euler. Na primeira seção apresentamos uma demonstração através da soma dos ângulos internos das faces trianguladas de um poliedro convexo. Na segunda seção apresentamos uma demonstração utilizando o método da indução finita sobre o número de faces de uma superfície poliédrica convexa limitada aberta e sobre o número de faces de uma superfície poliédrica convexa limitada fechada.

No capítulo 3 apresentamos condições necessárias e suficientes para que um poliedro convexo exista. Na primeira seção apresentamos as condições necessárias e na segunda seção as condições suficientes para a existência de um poliedro convexo.

O capítulo 4 apresenta uma demonstração da existência de cinco e, somente cinco, poliedros de Platão.

No apêndice apresentamos poliedros não convexos que satisfazem a relação de Euler e outros que não a satisfazem.

Por último, apresento uma conclusão.

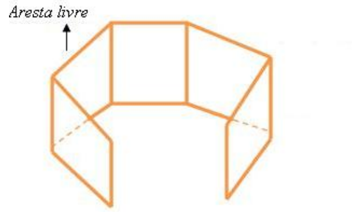
Capítulo 1 – Preliminares

A seguir serão apresentadas algumas definições que usaremos ao longo deste trabalho.

Definição 1.1 Uma superfície poliédrica limitada convexa é a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos, tais que:

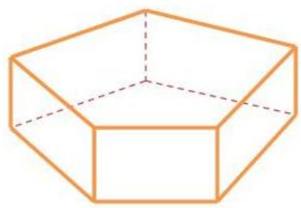
- Dois desses polígonos nunca estejam num mesmo plano;
- Cada lado de um polígono não está em mais que dois polígonos;
- O plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espaço.

Definição 1.2 A superfície poliédrica que possui aresta livre, ou seja, lados de polígonos que estão em somente uma face, formam uma linha poligonal fechada, plana ou não, chamadas de contorno. Estas superfícies são as superfícies que possuem contorno são denominadas poliédricas limitadas convexas abertas.



Superfície poliédrica limitada convexa aberta

Definição 1.3 A superfície poliédrica limitada convexa que não possui aresta livre, ou seja, não possuem contorno são denominadas de Superfícies poliédricas limitadas convexas fechadas.



Superfície poliédrica limitada convexa fechada

Definição 1.4 Um poliedro é uma superfície poliédrica limitada fechada formada pela reunião de um número limitado n $(n \geq 4)$ de polígonos. Em um poliedro temos que suas faces são os polígonos que formam sua superfície, as arestas são as arestas dos polígonos e seus vértices são os vértices dos polígonos.

Definição 1.5 Poliedro convexo é uma superfície poliédrica limitada fechada convexa formada pela reunião de um número limitado de n polígonos convexos, com $n \geq 4$, tais que:

- dois polígonos não pertençam a um mesmo plano;
- cada lado do polígono seja comum a somente dois polígonos;
- cada plano que contenha um polígono, deixa os demais num mesmo semi-espaço.

Definição 1.6 Um poliedro convexo é regular quando ele apresenta as seguintes características:

- suas faces são polígonos regulares e congruentes,
- os ângulos poliédricos são congruentes

Definição 1.7 Um poliedro convexo é chamado poliedro de Platão, se satisfaz as seguintes condições:

a) Todas as suas faces apresentam o mesmo número (n) de arestas;

b) Todos os ângulos poliédricos possuem o mesmo número (m) de arestas;

Capítulo 2 – Demonstrações da Relação de Euler para Poliedros convexos.

A Relação de Euler para poliedros convexos diz que:

Para todo poliedro convexo, vale a relação $F - A + V = 2$ *em que* V *é o número de vértices,* A *é o número de arestas e* F *é o número de faces do poliedro*.

2.1 A demonstração a seguir foi apresentada pelo Professor Zoroastro Azambuja Filho, em [1].

Esta demonstração é feita a partir da triangulação das faces do poliedro, calculando a soma dos respectivos ângulos das “faces” triangulares assim obtidas, e será apresentada em duas etapas:

Na **primeira etapa** será calculada a soma dos ângulos internos dos triângulos que compõem a triangulação escolhida; e na **segunda etapa**, será calculada a soma dos ângulos de cada vértice do poliedro a partir de sua projeção em um plano. Estas etapas ficarão mais claras no desenvolvimento desta seção.

Para ilustrar essa demonstração, utilizaremos um cubo, tomando o cuidado para que essa demonstração não fique particularizada por este poliedro.

Seja P um poliedro convexo, e por r uma reta que não seja paralela a nenhuma das faces de P. Consideremos agora um plano H, perpendicular à reta r, tal que não tenha pontos em comum com P e deixa este em um dos semi-espaços determinados por H. O plano H será chamado plano horizontal e o semi-espaço que contém P chamaremos de semi-espaço superior.

Considerando as retas paralelas a r, que serão chamadas de retas verticais, temos que, uma reta vertical arbitrária poderá intersectar o poliedro convexo P em, no máximo, dois pontos.

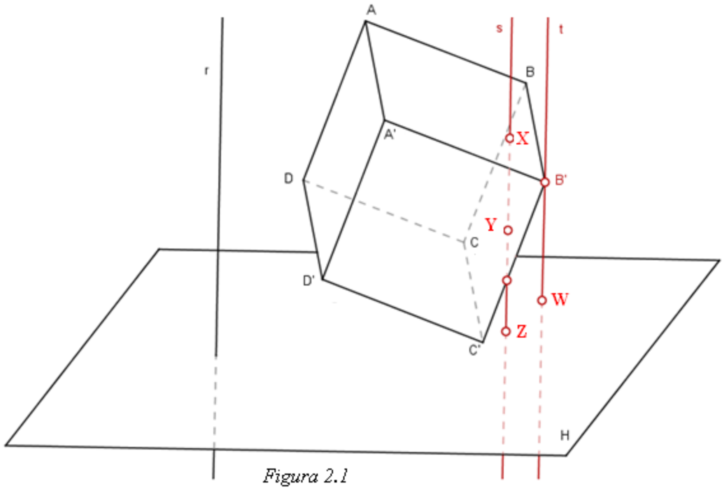


Figura 2.1

Nesta figura, o ponto Z representa a sombra dos pontos X e Y, e o ponto W, representa a sombra do vértice B'.

Cada reta vertical que intersecta o poliedro convexo P, intersecta o plano H em um único ponto. Este ponto será chamado de sombra do ponto de interseção ou dos pontos de interseção da vertical com P. Representaremos por P' o conjunto das sombras dos pontos de P.

O conjunto dessas sombras forma um polígono convexo em H. Os pontos que formam o contorno deste polígono serão representados por γ', que é a sombra de uma poligonal fechada γ formada por arestas de P, que é chamada de contorno aparente. Cada ponto de γ' é sombra de um único ponto de P e cada ponto interior a P' é sombra de dois pontos de P, os pontos mais distantes de H serão chamados de pontos iluminados e os pontos mais próximos a H serão chamados de pontos sombrios.

Dentre as diversas possibilidades de posição para o cubo, com o objetivo de obtermos uma melhor visualização desta demonstração, escolhemos uma na qual ele seja colocado de modo que o vértice A e o vértice C' estejam em uma mesma reta vertical, que não seja paralela a nenhuma das faces. Lembrando que esta escolha não particulariza a demonstração.

Dessa forma teremos:

- A poligonal $A'B'BCDD'A'$ forma o contorno aparente;

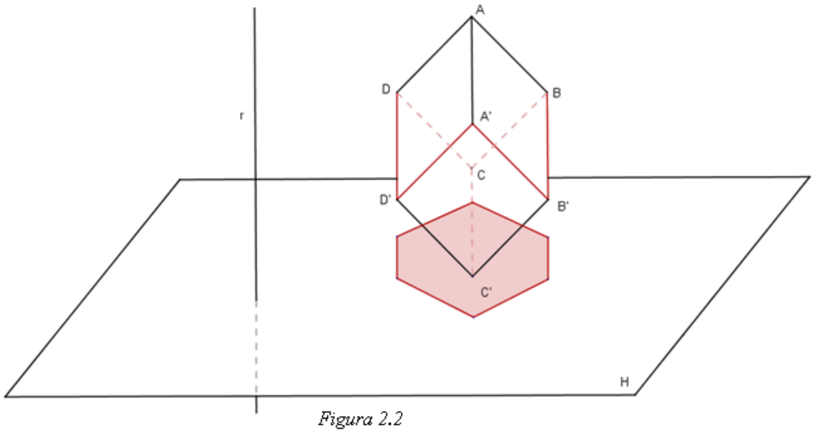


Figura 2.2

- As faces $AA'B'B$, $AA'D'D$ e $ABCD$ ficam iluminadas;

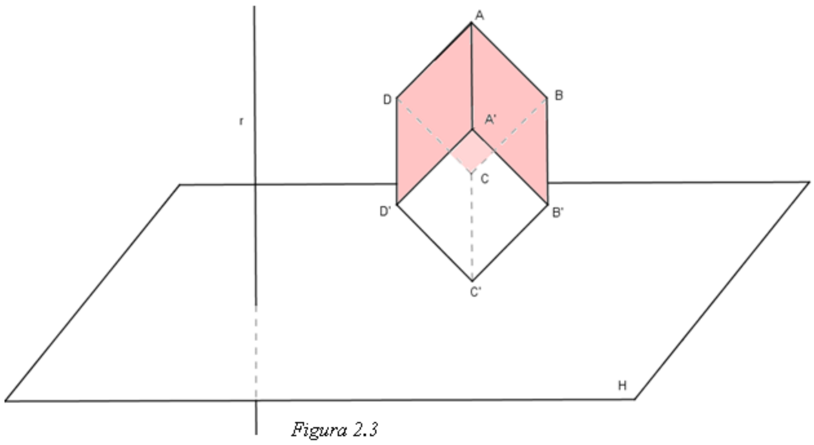


Figura 2.3

- As faces $DD'C'C$, $CC'B'B$ e $A'B'C'D$ ficam sombrias.

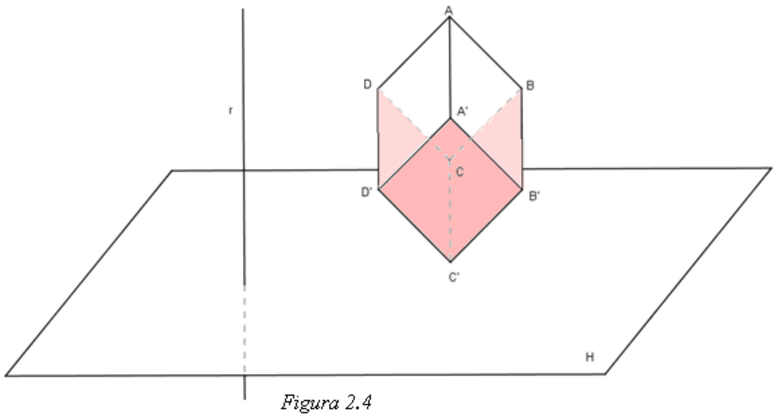


Figura 2.4

Temos então três conjuntos distintos de pontos de P que são os pontos iluminados, os pontos sombrios e os pontos do contorno aparente γ .

Consideremos P_1 a união do conjunto dos pontos iluminados de P com o contorno aparente γ. Dessa forma, temos que, cada ponto de P' é sombra de um único ponto de P_1, caracterizando uma correspondência biunívoca entre P_1 e P'.

Seja P_2 a união do conjunto dos pontos sombrios de P com o contorno aparente γ. Dessa forma, temos que, cada ponto de P' é sombra de um único ponto de P_2, caracterizando uma correspondência biunívoca entre P_2 e P'.

Para a nossa demonstração, vamos decompor cada face do poliedro em faces trianguladas traçando diagonais em cada uma delas, a partir de um vértice, e chamaremos cada um desses triângulos de "faces". Ao traçarmos uma diagonal em uma face, alteramos os números de F e de A, pois cada um destes aumentam em uma unidade, e o número de V permanece constante. Após a triangulação de todas as faces temos que os aumentos do número de faces (F) e número de arestas (A) se cancelam e a relação $F - A + V$ se mantém.

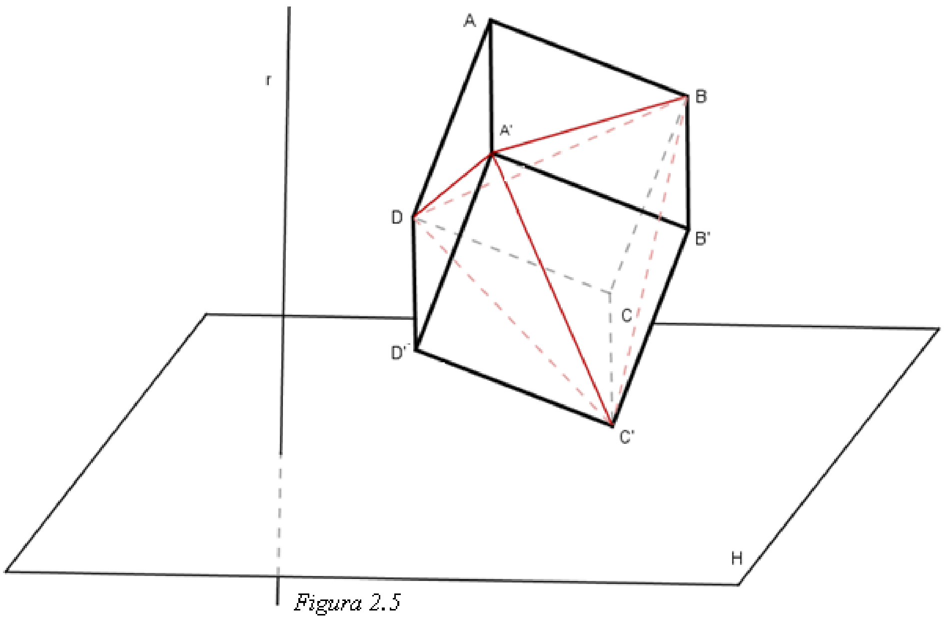


Figura 2.5
Nesta figura está ilustrada uma possibilidade para a triangularização das faces do cubo.

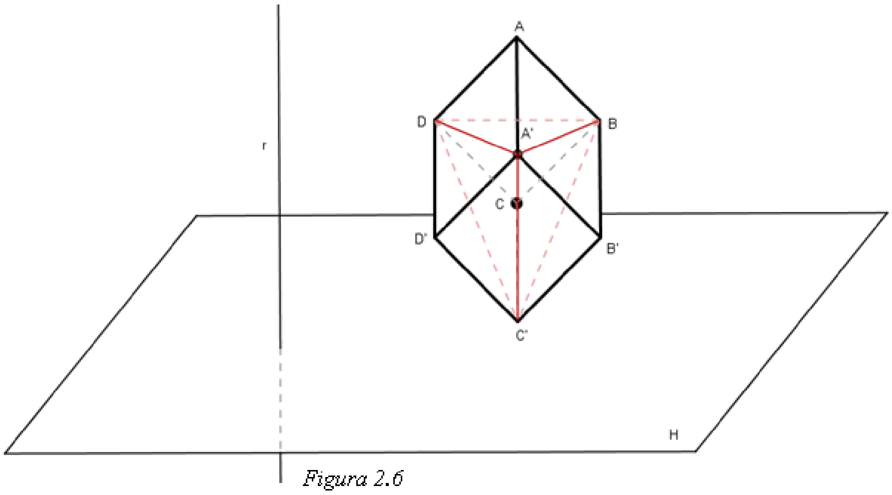


Figura 2.6

Esta figura representa o cubo, com a triangularização, na posição escolhida para a demonstração, de modo que o vértice A esteja na mesma reta vertical que o vértice C'. Os vértices A' e C não pertencem a esta reta vertical.

Para a **primeira etapa** da demonstração, usaremos que o poliedro P possui então F faces trianguladas, como as definidas anteriormente. Como cada face possui três arestas e cada aresta é comum a duas faces temos que $3F = 2A$. Como a soma dos ângulos internos de um triangulo é igual a 180^o ou π radianos, a soma S das faces de P será $S = \pi F$. Dessa forma, como $F = 3F - 2F$ e $3F = 2A$, obtemos

$F = 3F - 2F = 2A - 2F$, então, $F = 2A - 2F$ e assim:

$S = \pi(2A - 2F)$

$S = 2\pi A - 2\pi F$

Agora, para a **segunda etapa** da demonstração vamos considerar as regiões iluminadas, as sombrias e o contorno aparente projetados em H.

Vamos utilizar que a soma dos ângulos internos da sombra de um polígono, como foi projetado, é igual à soma dos ângulos internos deste polígono. Nesta segunda etapa da demonstração consideramos as faces trianguladas.

Representaremos por:

- S_1 a soma dos ângulos internos das faces trianguladas iluminadas, projetadas em H;

- S_2 a soma dos ângulos internos das faces trianguladas sombrias, projetadas em H; e

- S a soma $S_1 + S_2$.

Para o cálculo de S_1 e S_2, vamos utilizar a soma dos ângulos vértice a vértice das faces trianguladas projetadas em H, ou seja, serão consideradas as sombras dos vértices que estão projetados no interior de P' e as sombras dos vértices projetados que estão no contorno. Consideremos por V_0, o número de vértices do contorno projetados em H; por V_1, o número de vértices iluminados projetados em H; e por V_2 o número de vértices sombrios projetados em H e $V = V_0 + V_1 + V_2$.

Consideremos os vértices de P que estão projetados no interior de P'. A soma desses ângulos é igual a 2π radianos. Consideremos os vértices de P que estão projetados no contorno de P', a soma desses ângulos é igual a $\pi(V_0 - 2)$, pois o número de vértices projetados no contorno é igual ao número de lados do polígono formado pelas sombras.

Na figura ao lado apresentamos uma ilustração das faces trianguladas iluminadas de P e o contorno aparente γ projetados em H. A sombra do vértice A, é um ponto iluminado interior a P' e está sendo representado por A_1. Representados por A'_1, B'_1, B_1, C_1, D_1 e D'_1, as sombras dos vértices A', B', B, C, D e D', pontos do contorno de P'. Nesta figura apresentamos uma ilustração das faces trianguladas sombrias de P e o contorno

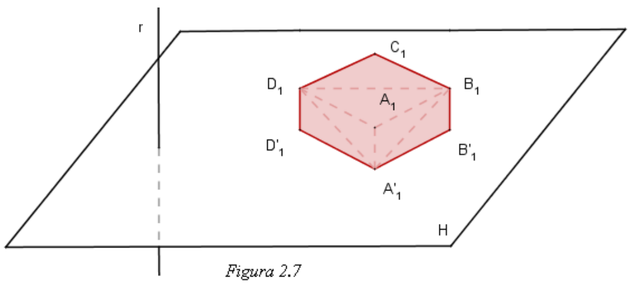


Figura 2.7

aparente γ projetados em H. Representamos por C'_2, a sombra de vértice C', ponto sombrio interior a P' e representamos por A_2, B'_2, B_2, C_2, D_2 e D'_2, as sombras dos vértices A', B', B, C, D e D', pontos do contorno de P'.

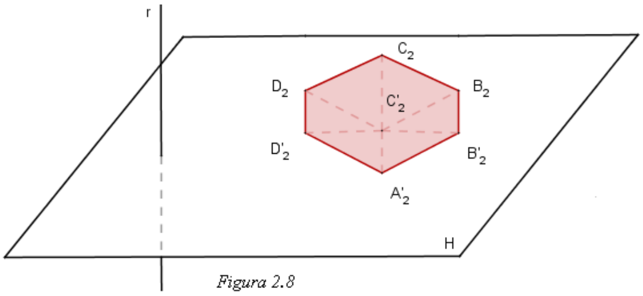


Figura 2.8

Podemos, então, escrever que $S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2)$.

De maneira semelhante obtemos que $S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2)$.

Teremos, então:

$S_1 + S_2 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2) + 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2)$

$S_1 + S_2 = 2\pi(V_1 + V_2) + 2\pi(V_0 - 2)$

$S_1 + S_2 = 2\pi(V_1 + V_2 + V_0) - 4\pi$

$S_1 + S_2 = 2\pi V - 4\pi$.

Logo, $S = S_1 + S_2$ e $S_1 + S_2 = 2\pi V - 4\pi$, ou seja, $S = 2\pi V - 4\pi$.

Da primeira etapa temos que $S = 2\pi A - 2\pi F$ e desta sabemos que $S = 2\pi V - 4\pi$.

Portanto, $2\pi V - 4\pi = 2\pi A - 2\pi F$.

Donde, $V - 2 = A - F$ e, consequentemente, $F - A + V = 2$.

Concluímos assim, a primeira demonstração do Teorema de Euler, segundo o Professor Zoroastro, [1].

2.2 Nesta seção apresentaremos uma demonstração do Teorema de Euler em que utilizaremos o método de indução finita sobre o número de faces de uma superfície poliédrica convexa limitada.

2.2.1 Nesta subseção apresentaremos a demonstração em uma superfície poliédrica limitada convexa aberta.

Teorema 1. Em toda superfície poliédrica limitada convexa aberta, S, em que F_a, A_a e V_a são respectivamente o número de faces, o número de arestas e o número de vértices dessa superfície tem-se a relação $F_a - A_a + V_a = 1$.

Nesta demonstração, utilizaremos o método de indução finita sobre o número de faces da superfície.

Seja $F_a = 1$. Neste caso teremos um polígono plano convexo, digamos de n lados.

Sabemos que em um polígono o número de lados coincide com o número de vértices, ou seja, $A_a = V_a = n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Substituindo estes valores na relação acima teremos:

$$F_a - A_a + V_a = 1 - n + n = 1$$

$$F_a - A_a + V_a = 1$$

Logo, verificamos que a relação é verdadeira para $F_a = 1$.

Vamos supor que a relação seja verdadeira para uma superfície poliédrica limitada convexa aberta que tenha F' faces, A' arestas e V' vértices, ou seja, $F' - A' + V' = 1$, vamos então mostrar que esta relação também é verdadeira para uma superfície poliédrica convexa aberta de $F' + 1$ faces.

Admitindo que acrescentando uma nova face à superfície S esta permaneça aberta, neste caso temos que os números de arestas e vértices também serão alterados e deverão ser considerados os seus acréscimos.

Devemos considerar os números de arestas e de vértices coincidentes com as já existentes nesta superfície S.

Seja p o número de arestas da face que acrescentamos e q o número de arestas coincidentes com a face já existente. Teremos então uma nova superfície com F_a faces, A_a arestas e V_a vértices, de modo que nossa nova relação será:

$F_a = F'+1$

$A_a = A'+p-q$

$V_a = V'+p-(q+1)$

Substituindo esses novos valores na relação $F_a - A_a + V_a$, temos:

$$\begin{aligned} F_a - A_a + V_a &= F'+1-(A'+p-q)+V'+p-(q+1) \\ &= F'+1-A'-p+q+V'+p-q-1 \\ &= F'-A'+V' \end{aligned}$$

Como $F_a - A_a + V_a = F'-A'+V'$, e por hipótese de indução $F'-A'+V'=1$, concluímos que a relação não se altera ao acrescentarmos uma nova face. Então fica estabelecida que a relação $F_a - A_a + V_a = 1$ é verdadeira.

Se ao acrescentarmos uma nova face à superfície S, de modo que esta fique fechada, neste caso teremos a relação $F - A + V = 2$, como veremos na seção a seguir.

2.2.2 Nesta subseção apresentaremos a demonstração em uma superfície poliédrica limitada convexa fechada.

Consideremos agora uma superfície poliédrica convexa fechada, P, em que F, A e V, sejam respectivamente, os números de faces, arestas e vértices dessa superfície temos o:

Teorema 2: Em uma superfície poliédrica convexa fechada , P, a seguinte relação é satisfeita: $F - A + V = 2$.

Ao retirarmos uma face dessa superfície P obtemos $F - 1$ faces, tornando-a uma superfície poliédrica aberta. Os números de arestas e de vértices não serão alterados, pois, a face retirada da superfície fechada contém as mesmas arestas e vértices da superfície aberta. Então nesta superfície aberta, que tem com F_a faces, A_a arestas e V_a vértices tem-se $F_a - A_a + V_a = 1$, de acordo com o teorema 1.

Do citado anteriormente temos que:
$F_a = F - 1$, $A_a = A$ e $V_a = V$.

Dessa forma, teremos: $F - 1 - A + V = 1$ e, consequentemente, $F - A + V = 2$.

Então, concluímos que a relação $F - A + V = 2$, se verifica para uma superfície poliédrica convexa fechada .

Capítulo 3 – Condições necessárias e suficientes para a existência de um poliedro convexo.

Nos capítulos anteriores foram apresentadas duas demonstrações do Teorema de Euler para poliedros convexos. Mostraremos nesta seção que dados três números naturais para F , A e V tais que a relação $F-A+V=2$ seja satisfeita, não é suficiente para garantir que exista um poliedro convexo com estes valores.

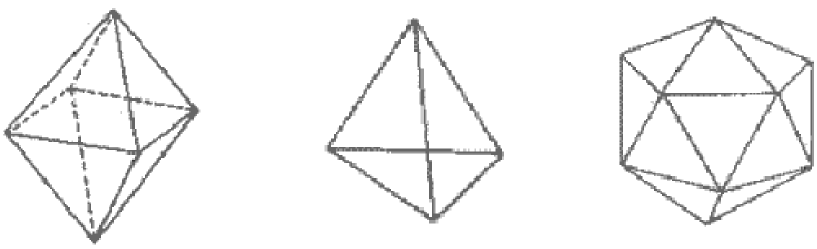
Por exemplo, consideremos um poliedro que tenha 6 vértices, 4 faces e 8 arestas. Ao substituirmos esses valores na relação obtemos $4-8+6=2$, temos que a relação é satisfeita, porém não existe poliedro convexo com os valores dados. Isso será mostrado mais adiante, na página 25.

Apresentaremos então condições necessárias e suficientes para a sua existência.

3.1 Primeiramente vamos apresentar as condições necessárias para a existência de um poliedro convexo, para tanto devemos considerar as seguintes relações:

a) Relação entre o número de faces e número de arestas de um poliedro convexo

Inicialmente consideraremos um poliedro cujas faces apresentam menores números de arestas possíveis. Isto é, faces triangulares. Então seja P um poliedro convexo como, por exemplo:



Octaedro *Tetraedro* *Icosaedro*

Vale observar que em qualquer poliedro convexo cada aresta pertence a exatamente duas faces e, em particular para faces triangulares, somando-se todas as arestas, teremos que estas serão contadas duas vezes e nesse caso temos que $2A = 3F$, onde F é o número total de faces e A é o número total de arestas deste poliedro.

Se o poliedro P apresentar uma face não triangular, como por exemplo, em uma pirâmide de base quadrangular, neste caso, o poliedro apresenta uma face com 4 arestas, e teremos a relação:

$2A = 3F_3 + 4F_4$, em que F_3 representa faces com 3 arestas e F_4 representa faces com quatro arestas.

$$2A = 3F_3 + 3F_4 + 1F_4$$

$$2A = 3(F_3 + F_4) + F_4$$

$2A = 3F + F_4$, em que F representa o número de faces nas quais foram contadas 3 arestas.

Assim $2A > 3F$.

Se o poliedro convexo apresentar mais de uma face não triangular, a relação será:

$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ... + nF_n$, em que F_n representa o número de faces com número n de arestas.

$$2A = 3(F_3 + F_4 + F_5 + ... + F_n) + F_4 + 2F_5 + ... + (n-3)F_n$$

$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + ... + (n-3)F_n$, em que F representa o número de faces nas quais foram contadas 3 arestas.

Assim $2A > 3F$.

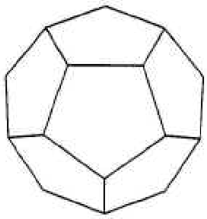
Então, dado um poliedro convexo com uma ou mais faces não triangulares, temos que o dobro do número de arestas deste poliedro será maior que o triplo do número de faces.

Como mostrado anteriormente, em um poliedro de faces triangulares vale a relação $2A = 3F$ e de faces não triangulares vale a relação $2A > 3F$, temos como condição necessária para que o poliedro convexo exista a relação $3F \leq 2A$. (I)

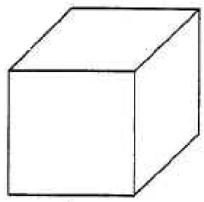
b) Relação entre o número de arestas e o número de vértices de um poliedro convexo.

Inicialmente considerando um poliedro P em que cada vértice seja ponto comum a três arestas.

Exemplo:



Dodecaedro



Cubo

Vale observar que em qualquer poliedro convexo cada aresta é comum a dois vértices e, somando-se todas as arestas, estas serão contadas duas vezes e teremos que $2A = 3V$.

Se o poliedro P possuir algum vértice no qual incida mais de três arestas, como por exemplo, em uma pirâmide de base hexagonal teremos:

$2A = 3V_3 + V_6$, em que V_3 representa vértices nos quais incidam três arestas e, V_6 vértice no qual incidam seis arestas.

$$2A = 3V_3 + 3V_6 + 3V_6$$

$$2A = 3(V_3 + V_6) + 3V_6$$

$2A = 3V + 3V_6$, em que V representa o total de vértices nos quais incidam três arestas.

Assim $2A > 3V$.

Se o poliedro convexo apresentar mais de um vértice no qual incidam um número de arestas maior que 3, a relação será:

$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ... + nV_n$, em que V_n representa o número de vértice com n números de arestas.

$2A = 3(V_3 + V_4 + V_5 + ... + V_n) + V_4 + 2V_5 + ... + (n-3)V_n$

$2A = 3V + V_4 + 2V_5 + ... + (n-3)V_n$, em que V representa o número total de vértices nos quais incidam 3 arestas.

Logo, $2A > 3V$. Ou seja, dado um poliedro convexo com um ou mais vértices nos quais incidam mais de três arestas, temos que o dobro do número de arestas deste poliedro será maior que o triplo do número de vértices.

Como mostrado anteriormente, em um poliedro no qual em todos os vértices incidam 3 arestas vale a relação $2A = 3V$ e com vértices nos quais incidam mais de 3 arestas vale a relação $2A > 3V$, temos como condição necessária que o poliedro convexo exista a relação $3V \leq 2A$. (II)

c) Agora vamos utilizar as relações obtidas em (I) e (II) e a relação de Euler

Como em um poliedro convexo, vale a relação $F - A + V = 2$ ou $3F - 3A + 3V = 6$, usando esta e a relação (I), obtemos:

$6 = 3V - 3A + 3F \leq 3V - 3A + 2A$

$6 = 3V - 3A + 3F \leq 3V - A$

$6 \leq 3V - A$, ou seja, $A + 6 \leq 3V$. (III)

Analogamente, usando a Relação de Euler e a relação (II), obtemos $A + 6 \leq 3F$. (IV)

Com as relações (II) e (III), temos que:

$A + 6 \leq 3V \leq 2A$

$A + 6 \leq 2A$, donde, $A \geq 6$.

Então para que um poliedro convexo com F faces, A arestas e V vértices exista, concluímos que é necessário que seja satisfeita a Relação de Euler, que o poliedro apresente o número de arestas tal que $A \geq 6$, e que sejam satisfeitas as seguintes relações:

$A+6 \leq 3V \leq 2A$ e $A+6 \leq 3F \leq 2A$.

Temos então o seguinte teorema: Existe um poliedro convexo com V vértices, com A arestas e F faces se,

(i) $A \geq 6$

(ii) $F - A + V = 2$

(iii) $A+6 \leq 3F \leq 2A$

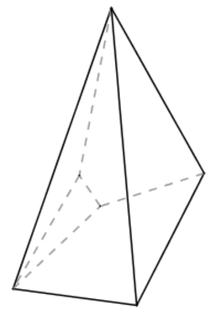
(iv) $A+6 \leq 3V \leq 2A$

De acordo com estas condições podemos verificar que retomando ao exemplo citado na página 20, podemos verificar que os valores de F, de A e de V satisfazem a condição (i), pois $A \geq 6$, porém não satisfazem as condições (iii) e (iv). Substituindo, nas condições, o valor de $A = 8$, obtemos que $4{,}67 \leq F \leq 5{,}33$ e $4{,}67 \leq V \leq 5{,}33$, ou seja, os valores possíveis para os números de faces e vértices seriam $F = 5$ e $V = 5$, o que não condiz com os valores dados no exemplo.

Vamos considerar um poliedro com 10 arestas e utilizando as relações (i), (ii), (iii) e (iv) podemos verificar então os possíveis valores para os números de faces e vértices deste poliedro.

$A+6 \leq 3V \leq 2A$	$A+6 \leq 3F \leq 2A$
$10+6 \leq 3V \leq 2.10$	$10+6 \leq 3F \leq 2.10$
$16 \leq 3V \leq 20$	$16 \leq 3F \leq 20$
$\frac{16}{3} \leq V \leq \frac{20}{3}$	$\frac{16}{3} \leq F \leq \frac{20}{3}$
$V = 6$	$F = 6$

Com os valores obtidos para os números de faces e de vértices podemos encontrar, por exemplo, o seguinte poliedro:



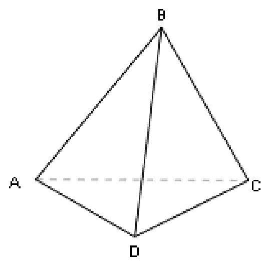
Como já apresentamos as condições necessárias para a existência do poliedro convexo, vamos obter a suficiência das mesmas.

3.2 Nesta seção vamos apresentar condições suficientes para a existência de um poliedro convexo.

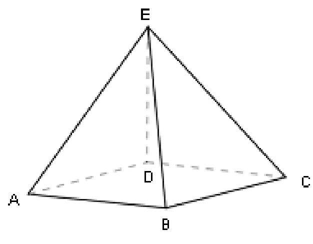
Mostraremos que dados valores para V, A e F, tais que satisfaçam as relações de (i) a (iv) da seção 3.1, já citadas anteriormente, podemos afirmar que existe um poliedro convexo com tais valores, que poderá ser obtido através de certas transformações aplicadas a outros poliedros que chamaremos de primitivos.

Representaremos qualquer poliedro por (V, A, F), em que V é o seu número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces.

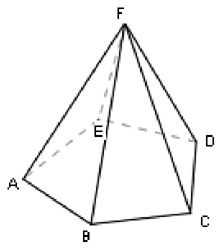
Vamos considerar os seguintes poliedros convexos:



(4, 6, 4)
Vértices: A, B, C e D.
Faces: ABC, BCD, ABD e ADC.



(5, 8, 5)
Vértices: A, B, C, D e E.
Faces: ABCD, AEB, BEC, CED e EDA.



(6, 10, 6)
Vértices: A, B, C, D, E e F.
Faces: ABCDE, AFB, BFC, CFD, FDE e FEA.

Estes poliedros satisfazem às relações de (i) a (iv) e serão chamados de primitivos.

Mostraremos que a partir deles podemos efetuar acréscimos nos números de faces, de vértices e de arestas, que representaremos por $[V, A, F]$, e obter o poliedro (V, A, F) tal que,

$(V, A, F) = (V', A', F') + x\,[V_1, A_1, F_1] + y\,[V_2, A_2, F_2]$

$= (V' + xV_1 + yV_2,\ A' + xA_1 + yA_2,\ F' + xF_1 + yF_2)$, em que x e y representam números inteiros não negativos, satisfaça as relações de (i) a (iv), e seja convexo.

Vamos aplicar o acréscimo $[1,3,2]$ nos poliedros primitivos de forma que as arestas a serem acrescentadas incidam com os vértices já existentes e com o vértice acrescentado. Sendo acrescentadas ao poliedro duas faces triangulares.

Dessa forma, aplicando uma vez este acréscimo aos poliedros primitivos iremos obter:

- Com o primitivo $(4,6,4)$, temos:

$(V, A, F) = (4,6,4) + [1,3,2] = (4+1, 6+3, 4+2) = (5,9,6)$;

Substituindo estes valores nas relações de (i) a (iv), temos que:

(i) $9 \geq 6$

(ii) $6 - 9 + 5 = 2$

(iii) $9 + 6 \leq 3.6 \leq 2.9$. Portanto, $15 \leq 16 \leq 18$.

(iv) $9 + 6 \leq 3.5 \leq 2.9$. Portanto, $15 \leq 15 \leq 18$.

Então podemos verificar que este poliedro satisfaz às relações, portanto, é convexo.

- Com o primitivo $(5,8,5)$, temos:

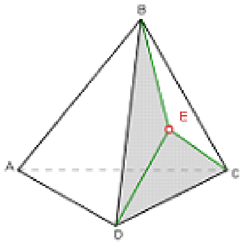
$(V, A, F) = (5,8,5) + [1,3,2] = (6,11,7)$.

- E com o primitivo $(6,10,6)$, temos;

$(V, A, F) = (6,10,6) + [1,3,2] = (7,13,8)$.

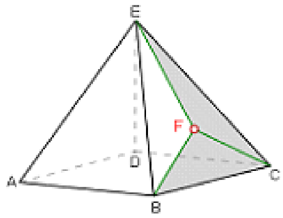
De maneira análoga ao realizado no poliedro $(5,9,6)$, podemos provar que os poliedros $(6,11,7)$ e $(7,13,8)$ também são convexos.

Um esboço dos poliedros obtidos é:



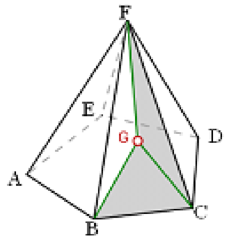
(5, 9, 6)

Vértices:A, B, C, D e E.
Faces: ABD, BED, EDC, BEC, BAC e ADC.



(6, 11, 7)

Vértices: A, B, C, D, E e F.
Faces:ABCD, AEB, EFB, EFC, BFC, ECD e EAD.



(7, 13, 8)

Vértices: A, B, C, D, E, F e G.
Faces:ABCDE, AFB, BFG, FGC, BGC, CDF, DFE e FEA.

Com os novos valores nos números de arestas, faces e vértices, observamos que são satisfeitas as relações de (i) a (iv).

Se efetuarmos uma segunda vez este acréscimo aos primitivos, obtemos:

- Com o primitivo $(4,6,4)$, temos:

$(V, A, F) = (4,6,4) + 2\,[1,3,2] = (4+2, 6+6, 4+4) = (6,12,8)$;

Substituindo estes valores nas relações de (i) a (iv), temos que:

(i) $12 \geq 6$

(ii) $8 - 12 + 6 = 2$

(iii) $12 + 6 \leq 3.8 \leq 2.12$. Portanto, $18 \leq 24 \leq 24$.

(iv) $12 + 6 \leq 3.6 \leq 2.12$. Portanto, $18 \leq 18 \leq 24$.

Então podemos verificar que este poliedro satisfaz às relações de (i) a (iv), portanto, é convexo.

- Com o primitivo $(5,8,5)$, temos:

$(V, A, F) = (5,8,5) + 2[1,3,2] = (7,14,9)$.

- E com o primitivo $(6,10,6)$, temos:

$(V, A, F) = (6,10,6) + 2[1,3,2] = (8,16,10)$.

De maneira análoga ao realizado no poliedro $(5,9,6)$, podemos provar que os poliedros $(7,14,9)$ e $(8,16,10)$ também são convexos.

Podemos realizar o acréscimo $[1,3,2]$ a qualquer poliedro primitivo, inúmeras vezes. Observamos que os novos valores encontrados para o número de vértices, de arestas e de faces também satisfazem à relação.

Consideremos, por exemplo, uma transformação obtida através deste acréscimo aplicado x vezes ao poliedro primitivo $(4,6,4)$, teremos então o poliedro $(4+x, 6+3x, 4+2x)$, e podemos observar que os novos valores para os números de vértices, de arestas e de faces satisfazem às relações, pois,

(i) $6+3x \geq 6$

(ii) $4+x-6-3x+4+2x = 2$

(iii) $6+3x+6 \leq 3(4+2x) \leq 2(6+3x)$. E portanto, $12+3x \leq 12+6x \leq 12+6x$.

(iv) $6+3x+6 \leq 3(4+x) \leq 2(6+3x)$. Portanto, $12+3x \leq 12+3x \leq 12+6x$.

Outra possível transformação pode ser realizada efetuando o acréscimo que denotaremos por $[2,3,1]$. Nesta, acrescentaremos aos poliedros primitivos dois vértices, três arestas e uma face. E será realizada de modo que as duas arestas a serem acrescentadas incidam com um vértice já existente e os vértices a serem acrescentados estejam nas extremidades de arestas também já existentes, acrescentando assim ao poliedro uma nova face triangular.

Dessa forma, aplicando uma vez este acréscimo aos poliedros primitivos, iremos obter:

- Com o primitivo $(4,6,4)$, temos:

$(V, A, F) = (4,6,4) + [2,3,1] = (4+2, 6+3, 4+1) = (6,9,5)$;

Substituindo estes valores nas relações de (i) a (iv), temos que:

(i) $9 \geq 6$

(ii) $5 - 9 + 6 = 2$

(iii) $9 + 6 \leq 3.5 \leq 2.9$. Portanto, $15 \leq 15 \leq 18$.

(iv) $9 + 6 \leq 3.6 \leq 2.9$. Portanto, $15 \leq 18 \leq 18$.

Então podemos verificar que este poliedro satisfaz às relações de (i) a (iv), portanto, é convexo.

- Com o primitivo $(5,8,5)$, temos:

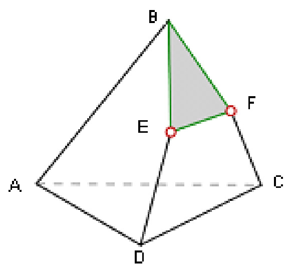
$(V, A, F) = (5,8,5) + [2,3,1] = (7,11,6)$.

- E com o primitivo $(6,10,6)$, temos:

$(V, A, F) = (6,10,6) + [2,3,1] = (8,13,7)$.

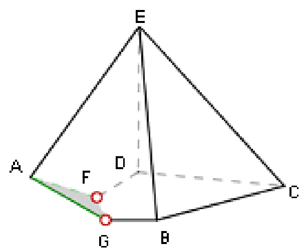
De maneira análoga ao realizado no poliedro $(6,9,5)$, podemos provar que os poliedros $(7,11,6)$ e $(8,13,7)$ também são convexos.

Um esboço dos poliedros obtidos é:



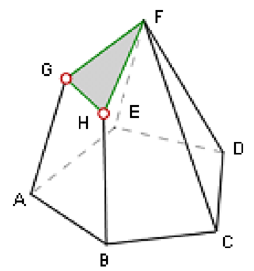
(6, 9, 5)

Vértices: A, B, C, D, E e F.
Faces: ABC, ACD, BEF, EFCD e ABED.



(7, 11, 6)

Vértices: A, B, C, D, E, F e G.
Faces: BCE, CED, EDFA, EAGB, AFG e BCDFG.



(8, 13, 7)

Vértices: A, B, C, D, E, F, G e H.
Faces: ABCDE, ABHG, HGF, BCFH, CDF, DFE e EFGA.

Estes novos poliedros apresentam números de vértices, arestas e faces tais que satisfazem às relações de (i) a (iv).

Aplicando-se uma segunda vez este acréscimo aos primitivos, iremos obter:

- Com o primitivo $(4,6,4)$, temos:

$(V,A,F)=(4,6,4)+2[2,3,1]=(4+4,6+6,4+2)=(8,12,6)$;

Substituindo estes valores nas relações de (i) a (iv), temos que:

(i) $12 \geq 6$

(ii) $6-12+8=2$

(iii) $12+6 \leq 3.6 \leq 2.12$. Portanto, $18 \leq 18 \leq 24$.

(iv) $12+6 \leq 3.8 \leq 2.12$. Portanto, $18 \leq 24 \leq 24$.

Então podemos verificar que este poliedro satisfaz às relações de (i) a (iv), portanto, é convexo.

- Com o primitivo $(5,8,5)$, temos:

$(V,A,F)=(5,8,5)+2[2,3,1]=(9,14,7)$.

- E com o primitivo $(6,10,6)$, temos:

$(V,A,F)=(6,10,6)+2[2,3,1]=(10,16,8)$.

De maneira análoga ao realizado no poliedro $(8,12,6)$, podemos provar que os poliedros $(9,14,7)$ e $(10,16,8)$ também são convexos.

Podemos realizar o acréscimo $[2,3,1]$ a qualquer um dos poliedros primitivos inúmeras vezes, observamos que os novos valores encontrados para o número de vértices, de arestas e de faces também satisfazem à relação.

Consideremos, por exemplo, este acréscimo sendo aplicado y vezes ao poliedro primitivo $(4,6,4)$, teremos então os novos valores $(4+2y, 6+3y, 4+y)$, e podemos observar que satisfaz as relações, pois,

(i) $6+3y \geq 6$

(ii) $4+y-6-3y+4+2y=2$

(iii) $6+3y+6 \leq 3(4+y) \leq 2(6+3y)$. Portanto, $12+3y \leq 12+3y \leq 12+6y$.

(iv) $6+3y+6 \leq 3(4+2y) \leq 2(6+3y)$. Portanto, $12+3y \leq 12+6y \leq 12+6y$.

Apresentaremos a seguir uma transformação obtida através da combinação linear entre estes dois acréscimos apresentados anteriormente, a qualquer um dos poliedros primitivos.

Aplicando uma vez esta transformação aos poliedros primitivos, iremos obter:

- Com o primitivo $(4,6,4)$, temos:

$(V, A, F) = (4,6,4) + [1,3,2] + [2,3,1] = (4+1+2, 6+3+3, 4+2+1) = (7, 12, 7)$;

Substituindo estes valores nas relações de (i) a (iv), temos que:

(i) $12 \geq 6$

(ii) $7-12+7=2$

(iii) $12+6 \leq 3.7 \leq 2.12$. Portanto, $18 \leq 21 \leq 24$.

(iv) $12+6 \leq 3.7 \leq 2.12$. Portanto, $18 \leq 21 \leq 24$.

Então podemos verificar que este poliedro satisfaz às relações de (i) a (iv), portanto, é convexo.

- Com o primitivo $(5,9,5)$, temos:

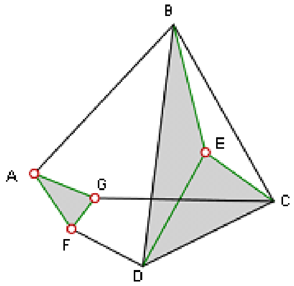
$(V, A, F) = (5,9,5) + [1,3,2] + [2,3,1] = (8,14,8)$.

- E com o primitivo $(6,10,6)$, temos:

$(V, A, F) = (6,10,6) + [1,3,2] + [2,3,1] = (9,16,9)$.

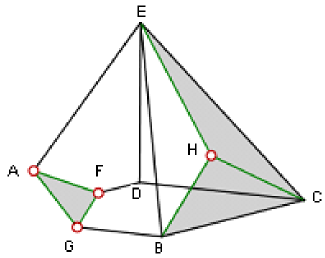
De maneira análoga ao realizado no poliedro $(7,12,7)$, podemos provar que os poliedros $(8,14,8)$ e $(9,16,9)$ também são convexos.

Com esta transformação, obtemos novos poliedros conforme figuras abaixo.



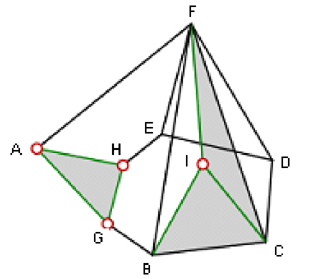
(7,12, 7)

Vértices: A, B, C, D, E, F e G.
Faces: AFG, FGCD, DEC, DEB, CEB, CBAG e ABDF.



(8, 14, 8)

Vértices: A, B, C, D, E, F, G e H.
Faces: AFG, FGBCD, EHB, BHC, CHE, CED, EAFD e EAGB.



(9, 16, 9)

Vértices: A, B, C, D, E, F, G, H e I.
Faces: AHG, HGBCDE, BIF, BIC, CIF, CFD, DEF, EFAH e AFBG.

Podemos observar que os novos valores encontrados para os números de vértices, de arestas e de faces satisfazem às relações de (i) a (iv).

Consideremos então os acréscimos $[1,3,2]$ sendo aplicado x vezes e $[2,3,1]$ sendo aplicado y ao poliedro primitivo $(4,6,4)$ teremos então um novo poliedro com os seguintes valores $(4+x+2y, 6+3x+3y, 4+2x+y)$ e podemos observar que estes valores satisfazem às relações.

(i) $6+3x+3y \geq 6$

(ii) $4+2x+y-6-3x-3y+4+x+2y = 2$

(iii) $6+3x+3y+6 \leq 3(4+2x+y) \leq 2(6+3x+3y)$, logo

$12+3x+3y \leq 12+6x+3y \leq 12+6x+6y$

(iv) $6+3x+3y+6 \leq 3(4+x+2y) \leq 2(6+3x+3y)$, logo

$12+3x+3y \leq 12+3x+6y \leq 12+6x+6y$

Iremos demonstrar agora que dados valores para V, A e F, tais que satisfaçam as relações de (i) a (iv), podemos afirmar que este poliedro foi obtido através da combinação linear dos dois acréscimos apresentados. Representaremos este poliedro por:

$(V,A,F)=(V',A',F')+x[1,3,2]+y[2,3,1]$, onde V', A' e F' representam os números de vértices, de arestas e de faces de um poliedro primitivo.

Para uma demonstração vamos considerar $(V,A,F)=(4,6,4)+x[1,3,2]+y[2,3,1]$, em que x e y são números inteiros não negativos que satisfazem ao sistema.

$$\begin{cases} V=4+x+2y \\ A=6+3x+3y \\ F=4+2x+y \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x+2y=V-4 & (I) \\ 3x+3y=A-6 & (II) \\ 2x+y=F-4 & (III) \end{cases}$$

Podemos perceber que a equação (II) pode ser obtida a partir da soma entre as equações (I) e (III), pois

$$x+2y+2x+y=V-4+F-4$$
$$3x+3y=V+F-8=A+2-8=A-6 \quad (IV)$$

Então consideraremos um sistema com as equações (I) e (III).

Resolvendo o sistema acima, obtemos $x=\dfrac{2F-V-4}{3}$ e $y=\dfrac{2V-F-4}{3}$.

Vamos mostrar que x e y são realmente números inteiros e positivos. De (IV), observemos que o número de arestas do poliedro primitivo é um número divisível por três, ou seja, teremos que $A=3k$, $k\in \mathbb{N}$.

Primeiramente vamos mostrar que x é um número inteiro.

$2F - V - 4 = 2F + 2V - 3V - 4$

$= 2(F+V) - 3V - 4$, usando a relação de Euler, obtemos

$= 2(A+2) - 3V - 4$, como $A = 3k$, então

$= 6k + 4 - 3V - 4$

$= 6k - 3V = 3(2k - V)$, que é um múltiplo de 3, logo x é inteiro.

Mostraremos agora que x e um número não negativo. Utilizando a relação de Euler em que $V = 2 + A - F$, temos:

$2F - V - 4 = 2F - (A - F + 2) - 4$

$= 3F - (A+2) - 4$

$= 3F - (A+6)$, mas pela relação (iii) temos que $A + 6 \leq 3F$, então

$= 3F - (A+6) \geq 0$, logo x é não negativo.

De maneira análoga, mostraremos que y é um número inteiro e em seguida que é um número não negativo.

$2V - F - 4 = 2V + 2F - 3F - 4$

$= 2(V+F) - 3F - 4$

$= 2(A+2) - 3F - 4$

$= 2A + 4 - 3F - 4$

$= 6k - 3F = 3(2k - F)$, que é um múltiplo de 3, logo y é inteiro.

Mostraremos agora que y e um número não negativo. Para tanto vamos utilizar a relação de Euler em que $F = 2 + A - V$, então:

$2V - F - 4 = 2V - (2 + A - V) - 4$

$= 3V - (A+2) - 4$

$= 3V - (A+6)$, como pela relação (iv), temos que $A + 6 \leq 3V$, então

$= 3V - (A+6) \geq 0$, logo y é não negativo.

Para um outro exemplo da demonstração vamos considerar agora

$(V, A, F) = (6,10,6) + x[1,3,2] + y[2,3,1]$, em que x e y são números inteiros e não negativos que satisfazem ao sistema.

$$\begin{cases} V = 6 + x + 2y \\ A = 10 + 3x + 3y \\ F = 6 + 2x + y \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x + 2y = V - 6 & (I) \\ 3x + 3y = A - 10 & (II) \\ 2x + y = F - 6 & (III) \end{cases}$$

Podemos perceber que a equação (II) pode ser obtida a partir da soma entre as equações (I) e (III), pois

$$x + 2y + 2x + y = V - 6 + F - 6$$
$$3x + 3y = V + F - 12 = A + 2 - 12 = A - 10 \ (V)$$

Então consideraremos um sistema com as equações (I) e (III).

Resolvendo o sistema acima, obtemos $x = \dfrac{2F - V - 6}{3}$ e $y = \dfrac{2V - F - 6}{3}$.

Vamos mostrar que x e y são realmente números inteiros e positivos. De (V), vamos observar que nesta demonstração, o número de arestas do poliedro primitivo deixa resto 1 quando divido por três, ou seja, teremos que $A = 3k + 1$, $k \in \mathrm{N}$.

Vamos mostrar que x é um número inteiro.

$2F - V - 6 = 2F + 2V - 3V - 6$

$= 2(F + V) - 3V - 6$, usando a relação de Euler, obtemos

$= 2(A + 2) - 3V - 6$, como $A = 3k + 1$, então

$= 6k + 6 - 3V - 6$

$= 6k - 3V = 3(2k - V)$, que é um múltiplo de 3, logo x é inteiro.

Mostraremos agora que x e um número não negativo. Para tanto vamos utilizar a relação de Euler em que $V = 2 + A - F$, então:

$3x = 2F - V - 6 = 2F - (2 + A - F) - 6$

$= 3F - A - 8$, como pela relação (iii) temos que $A + 6 \leq 3F$, segue que

$= 3F - A - 8 \geq -2$

Então $3x \geq -2$, o que implica que $x \geq -\frac{2}{3} = -0,\bar{6}$.

Mas x é inteiro, como provamos anteriormente, então o inteiro mais próximo e maior que $-\frac{2}{3}$ é 0, logo $x \geq 0$.

De maneira análoga, mostraremos que y é um número inteiro e em seguida que é um número não negativo.

$2V - F - 6 = 2V + 2F - 3F - 6$

$= 2(V + F) - 3F - 6$

$= 2(A + 2) - 3F - 6$

$= 6k + 6 - 3F - 6$

$= 6k - 3F = 3(2k - F)$, que é um múltiplo de 3, logo y é inteiro.

Mostraremos agora que y e um número não negativo. Para tanto vamos utilizar a relação de Euler em que $F = 2 + A - V$, então:

$3y = 2V - F - 6 = 2V - (2 + A - V) - 6$

$= 3V - A - 8$

$= 3V - (A + 6) - 2$, pela relação (iv), temos que $A + 6 \leq 3V$, então

$= 3V - A - 8 \geq -2$

Logo, $3y \geq -2$, o que implica que $y = -\frac{2}{3} = -0,\bar{6}$.

Mas y é inteiro, como provamos anteriormente, então o inteiro mais próximo e maior que $-\frac{2}{3}$ é 0, logo $y \geq 0$.

Vamos considerar agora
$(V, A, F) = (5,8,5) + x[1,3,2] + y[2,3,1]$, em que x e y são números inteiros e não negativos que satisfazem ao sistema.

$$\begin{cases} V = 5 + x + 2y \\ A = 8 + 3x + 3y \\ F = 5 + 2x + y \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x + 2y = V - 5 & (I) \\ 3x + 3y = A - 8 & (II) \\ 2x + y = F - 5 & (III) \end{cases}$$

Podemos perceber que a equação (II) pode ser obtida a partir da soma entre as equações (I) e (III), pois

$$x + 2y + 2x + y = V - 5 + F - 5$$
$$3x + 3y = V + F - 10 = A + 2 - 10 = A - 8 \quad (VI)$$

Então consideraremos um sistema com as equações (I) e (III).

Resolvendo o sistema acima, obtemos $x = \dfrac{2F - V - 5}{3}$ e $y = \dfrac{2V - F - 5}{3}$.

Vamos mostrar que x e y são realmente números inteiros e positivos. De (VI), vamos observar que nesta demonstração, o número de arestas do poliedro primitivo deixa resto 2 quando divido por três, ou seja,teremos que $A = 3k + 2$, $k \in \mathrm{N}$.

Vamos mostrar que x é um número inteiro.

$2F - V - 5 = 2F + 2V - 3V - 5$

$= 2(F + V) - 3V - 5$, usando a relação de Euler, obtemos

$= 2(A + 2) - 3V - 5$, como $A = 3k + 2$, então

$= 6k + 8 - 3V - 5$

$= 6k - 3V + 3 = 3(2k - V + 1)$, que é um múltiplo de 3, logo x é inteiro.

Mostraremos agora que x e um número não negativo. Vamos utilizar a relação de Euler em que $V = 2 + A - F$, então:

$$3x = 2F - V - 5 = 2F - (2 + A - F) - 5$$

$= 3F - A - 7$,

$= 3F - (A + 6) - 1$, pela relação (iii) temos que $A + 6 \leq 3F$, segue que

$= 3F - A - 7 \geq -1$

Então $3x \geq -1$, o que implica que $x \geq -\frac{1}{3} = -0,\bar{3}$.

Mas x é inteiro, como provamos anteriormente, então o inteiro mais próximo e maior que $-\frac{1}{3}$ é 0, logo $x \geq 0$.

De maneira análoga, mostraremos que y é um número inteiro e em seguida que é um número não negativo.

$$2V - F - 5 = 2V + 2F - 3F - 5$$

$= 2(V + F) - 3F - 5$, usando a relação de Euler, teremos

$= 2(A + 2) - 3F - 5$, como $A = 3k + 2$, então

$= 6k + 8 - 3F - 5$

$= 6k - 3F + 3 = 3(2k - F + 1)$, que é um múltiplo de 3, logo y é inteiro.

Mostraremos agora que y e um número não negativo. Para tanto vamos utilizar a relação de Euler em que $F = 2 + A - V$, então:

$$3y = 2V - F - 5 = 2V - (2 + A - V) - 5$$

$= 3V - A - 7$

$= 3V - (A + 6) - 1$, como pela relação (iv), temos que $A + 6 \leq 3V$, então

$= 3V - A - 7 \geq -1$

Logo, $3y \geq -1$, o que implica que $y = -\frac{1}{3} = -0,\bar{3}$.

Mas y é inteiro, como provamos anteriormente, então o inteiro mais próximo e maior que $-\frac{1}{3}$ é 0, logo $y \geq 0$.

Concluímos então que dados V, A e F então existe um poliedro convexo com estes valores se, e somente se, forem satisfeitas às relações de (i) a (iv), e este poliedro obtido a partir de uma combinação linear de acréscimos nos números de faces, de arestas e de vértices aplicadas aos poliedros primitivos será representado por:

$(V, A, F) = (V', A', F') + x[1,3,2] + y[2,3,1]$, onde V', A' e F' representam os números de vértices, de arestas e de faces de um poliedro primitivo e x e y são números inteiros e não negativos.

Capítulo 4 – Os cinco poliedros de Platão

A seguir demonstraremos que existem cinco, e somente cinco, poliedros de Platão.

Para isto, consideraremos a definição de poliedros de Platão citada no Capítulo 1. Relembramos que V é o seu número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces, sendo assim:

a) Como o número F face do poliedro possui n arestas $(n \geq 3)$ e cada aresta é comum a apenas duas faces, temos então que:

$n.F = 2A$, o que implica que $F = \dfrac{2A}{n}$. (I)

b) Como o número V vértice possui m arestas $(m \geq 3)$ e cada aresta é comum a apenas 2 vértices,

$m.V = 2A$, o que implica que $V = \dfrac{2A}{m}$. (II)

c) $F - A + V = 2$. (III)

Substituindo as relações (I) e (II) na relação (III), obtemos:

$$\frac{2A}{n} - A + \frac{2A}{m} = 2$$

Dividindo-se por $2A$, obtemos:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{m} = \frac{1}{A}. \ (IV)$$

Como sabemos que $n \geq 3$ e $m \geq 3$, podemos escrever as seguintes relações, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{3}$. Substituindo na relação (IV), obtemos:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \leq \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{A} \leq \frac{1}{6}$$

Portanto $A \geq 6$.

Analisando os valores possíveis para n (número de arestas de cada face) e m (número de arestas coincidentes em cada vértice), temos que, se $n > 3$ e $m > 3$, ou seja, $n \geq 4$ e $m \geq 4$, simultaneamente, teríamos $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{4}$, substituindo na relação (IV), obtemos:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \leq 0$$

$$\frac{1}{A} \leq 0$$

Portanto, $A < 0$, o que contradiz a relação (IV), pois, A é um número positivo.

Baseando-se na relação (IV) e substituindo os valores de n podemos encontrar os seguintes valores para m:

Para $n = 3$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{m} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$$

Temos $\frac{1}{m} > \frac{1}{6}$, o que implica $m < 6$. Portanto, teremos que os possíveis valores para m serão $m = 5$, $m = 4$ ou $m = 3$.

Para $n = 4$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{m} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{4}=\frac{1}{A}$$

Temos $\frac{1}{m}>\frac{1}{4}$, o que implica $m<4$. Portanto, o valor possível para m será $m=3$.

Para $n=5$

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{m}=\frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{m}-\frac{3}{10}=\frac{1}{A}$$

Temos então, $\frac{1}{m}>\frac{3}{10}$, o que implica $m<3{,}\bar{3}$. Portanto, o valor possível para m será $m=3$.

Para $n=6$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{m}=\frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{6}=\frac{1}{A}$$

Neste caso, teremos como resultado, $\frac{1}{m}>\frac{1}{3}$, o que implica em $m<3$, porém este resultado não condiz com a condição de que $m\geq 3$.

Temos então que os possíveis valores de n são: 3, 4 ou 5. E com isso, os possíveis valores para m são: 3, 4 ou 5.

Com os valores de n e m obtidos acima, podemos encontrar os possíveis valores de arestas A, de faces F e de vértices V.
Para encontrarmos os valores de A, basta substituirmos os valores de n e m na relação (IV):

Para $n=3$ e $m=3$, teremos:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{A}$$

$\frac{1}{6}=\frac{1}{A}$, logo $A=6$.

Para $n=3$ e $m=4$, teremos:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{A}$$

$\frac{1}{12}=\frac{1}{A}$, logo $A=12$.

Para $n=3$ e $m=5$, teremos:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{A}$$

$\frac{1}{30}=\frac{1}{A}$, logo $A=30$.

Para $n=4$ e $m=3$, teremos

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{A}$$

$\frac{1}{12}=\frac{1}{A}$, logo $A=12$.

Para $n=5$ e $m=3$, teremos

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{A}$$

$\frac{1}{30}=\frac{1}{A}$, logo $A=30$.

Com estes valores podemos construir a seguinte tabela:

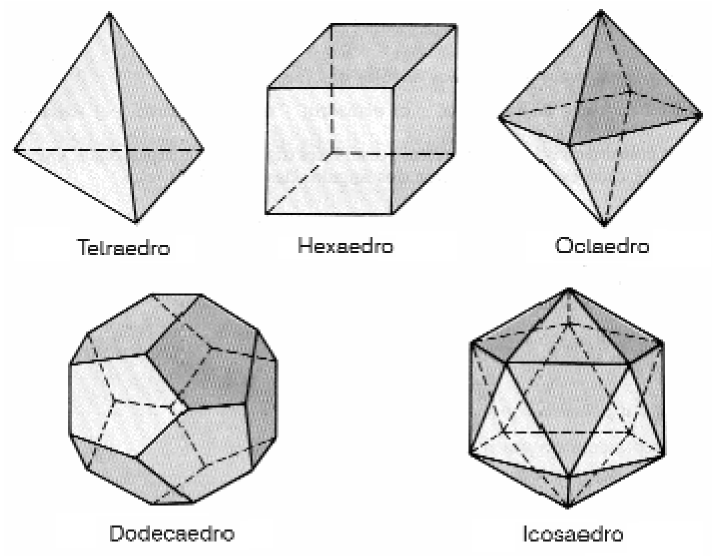
n	m	A
3	3	6
3	4	12
3	5	30
4	3	12
5	3	30

Tabela 4.1

Utilizando os valores de m, n e A apresentados na *tabela 4.1* e as relações (I) e (II), podemos encontrar os valores de F e V e assim determinar os poliedros de Platão.

n	m	A	F	V	Nome
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	Octaedro
3	5	30	20	12	Icosaedro
4	3	12	6	8	Hexaedro
5	3	30	12	20	Dodecaedro

Tabela 4.2



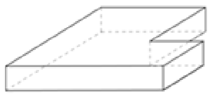
Podemos concluir então, que são cinco e apenas cinco tipos de poliedros de Platão.

Apêndice: Poliedros não convexos que satisfazem ou não a relação de Euler.

Dado um poliedro qualquer com F faces, A arestas e V vértices podemos verificar se os números de faces, de arestas e de vértices satisfazem a relação $F - A + V = 2$. Observamos que, para alguns poliedros esta relação se mostra verdadeira, mas, para outros poliedros não. Os poliedros nos quais esta relação se verifica verdadeira são chamados de poliedros Eulerianos.

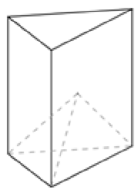
Neste trabalho apresentamos demonstrações em que dado um poliedro convexo vale a relação $F - A + V = 2$. Sendo então todo poliedro convexo um poliedro Euleriano.

Porém podemos encontrar poliedros nos quais seus respectivos números de face, arestas e vértices sejam tais que satisfaçam a relação, mas não são poliedros convexos. Observem os poliedros abaixo:



$V = 12$ $A = 18$ $F = 8$

Figura 1



$V = 7$ $A = 12$ $F = 7$

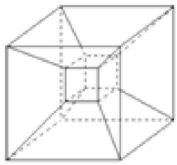
Figura 2

Temos que estes poliedros não são convexos, mas satisfazem à relação de Euler. Estes são então poliedros Eulerianos.

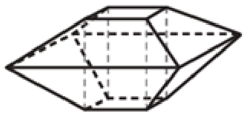
Um simples comentário. Suponha que nestes poliedros suas faces sejam de borracha. Ao injetarmos ar no seu interior seu formato se assemelha a uma esfera. Como exemplo, temos as figuras 1 e 2.

Temos também poliedros nos quais a relação de Euler não se verifica. São poliedros não Eulerianos e podemos observar que considerando seus números de face, de vértices e de arestas, temos que $F - A + V \neq 0$ (figuras 5 e 7) ou $F - A + V = 0$ (figuras 3, 4 e 6).

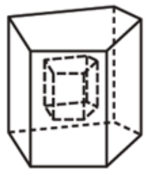
Consideremos os poliedros nos quais $F - A + V = 0$, e vamos imaginar que suas faces sejam de borracha. Ao injetarmos ar no seu interior seu formato se assemelha a um toro, ou seja, se assemelha a uma câmara de ar de um pneu.



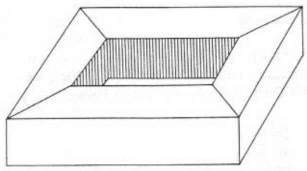
$V = 16$ $A = 32$ $F = 16$
Figura 3



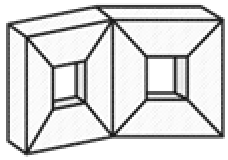
$V = 12$ $A = 20$ $F = 12$
Figura 4



$V = 20$ $A = 30$ $F = 14$
Figura 5



$V=16$ $A= 32$ $F= 16$
Figura 6



$V= 28$ $A=60$ $F=30$
Figura 7

CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo demonstrar de duas maneiras a relação de Euler para poliedros convexos. Além disso, apresenta condições necessárias e suficientes para que um poliedro que satisfaça a relação de Euler seja convexo. Demonstração que, até então, eu desconhecia.

Algumas dificuldades surgiram no decorrer do trabalho. Tive dificuldades em compreender parte da demonstração apresentada pelo Professor Wagner [1].

A elaboração deste trabalho foi muito importante. Foi a primeira vez que realizei um trabalho que exigisse tanta dedicação e isto me permitiu rever e consolidar certos conteúdos, organizar e escrever um trabalho deste nível.

Meu orientador teve grande importância para que eu atingisse meu objetivo, estando sempre presente. Com muita paciência, incentivo e conselhos, me ajudou a enfrentar os obstáculos encontrados.

Acredito que este trabalho sirva de apoio a estudantes do ensino médio, à formação de estudantes do curso de graduação e ou de especialização que gostem de matemática, e especialmente geometria, e auxilie a melhor compreensão da relação de Euler apresentada no ensino médio, mas não demonstrada ou justificada a sua veracidade.

BIBLIOGRAFIA

[1] Filho, Zoroastro Azambuja; Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros convexos. Revista do Professor de Matemática; n. 03, 1983.

[2] Dolce, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau; Fundamentos de Matemática Elementar, Capítulo 7, vol. 10, 6ª edição, Editora Saraiva S.A. Livreiros Editores, São Paulo, 2006.

[3] Wagner, Eduardo; $F - A + V = 2$. Existe o Poliedro?; Revista do Professor de Matemática, n. 47, 2001.

[4] Lima, Elon Lages; Meu Professor de Matemática e outras histórias, 1991.

[5] Oliveira, Mário de; Matemática Moderna, vol. 2, Livraria Cultura Brasileira Editora, 1971.

[6] Wagner, Eduardo, Poliedros. Julho. 2010. Disponível em: http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2010-2. Acesso em: 09 de julho de 2012.