UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX

TELMA CRISTINA DE SOUZA ALBINO

POLIEDROS

PROFESSOR ORIENTADOR: ANTÔNIO ZUMPANO

Belo Horizonte

2011

POLIEDROS

Monografia apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da UFMG, como parte dos requisitos para a orientação do título em especialista em Matemática para Professores do Ensino Básico.

Professor Orientador: Antônio Zumpano

Belo Horizonte

2011

ATA DA 117ª MONOGRAFIA DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES, APRESENTADA PELA ALUNA TELMA CRISTINA DE SOUZA ALBINO.

Aos vinte e quatro dias do mês de novembro de 2011, às 17h30, na Sala 2076, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Matemática para Professores, para julgar a apresentação da monografia da aluna **Telma Cristina de Souza Albino**, intitulada: *"Poliedros"*, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática, na Ênfase em Matemática do Ensino Básico. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Antônio Zumpano Pereira Santos, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da aluna. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença da aluna e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a aluna foi considerada **Aprovada**, por unanimidade, com nota 80 e conceito B. O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 24 de novembro de 2011.

Prof. Antônio Zumpano Pereira Santos
Orientador

Prof. José Antônio Gonçalves Miranda
Examinador

Paul A. F. Machado

Prof. Paulo Antônio Fonseca Machado
Examinador

“A geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida!”

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A presente pesquisa corresponde a uma minuciosa análise dos conceitos de geometria espacial aplicadas e desenvolvidas em turmas do 6º ao 9º ano do ensino fundamental. Pretende avaliar as condições oferecidas pelos livros didáticos, bem como avaliar a encrementação da prática pedagógica com instrumentos concretos laboratoriais e de registro do conhecimento apropriado.

Inicialmente faz-se aqui, de caráter introdutório, a conceitualização básica da origem dos poliedros, objeto dessa pesquisa.

A palavra Geometria é proveniente do grego e significa “Medida da terra”. Diz a lenda que a origem se deu quando o Rei Sesóstris I (reinou de 1971 a.C. a 1928 a.C.) dividira o território do Egito entre todo o povo, dando para cada cidadão um lote de terra quadrado e de mesmo tamanho. Esta divisão foi para impor a cobrança de um tributo anual, porém qualquer homem que parte do seu terreno despojado pelo rio Nilo, poderia se dirigir ao Rei para que ele mandasse alguém medir novamente o terreno e refizesse os cálculos para a cobrança do novo tributo.

A geometria teve um amplo desenvolvimento, quando Euclides, filósofo e matemático, que viveu por volta de 300 a.C., conseguiu organizar a geometria em 13 volumes, que ficou conhecido como “Os elementos”.

Além de Euclides, grandes filósofos e matemáticos dedicaram a vida ao estudo da geometria. Enquanto a Escola Pitagórica tinha como lema "Tudo são números", a escola de Platão tinha escrito sobre a porta, "Não entre aqui ninguém que não seja geômetra".

O conhecimento destes sólidos parece ter sido desencadeado num encontro com Arquitas que, em viagem à Cecília, no sul de Itália, encontraria Platão. Para este, o Universo era formado por um corpo e uma alma, ou inteligência. Na matéria havia porções limitadas por triângulos ou quadrados, formando-se elementos que diferiam entre si pela natureza da forma das suas superfícies periféricas.

Euclides foi quem determinou posteriormente que existem cinco poliedros regulares: o cubo, o tetraedro o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro, no qual passaram a ser designados por sólidos platônicos.

I. Se fossem quadradas, teríamos *o* ***cubo*** - *elemento terra.*

II. *Se fossem triângulos equiláteros, teríamos o* **tetraedro** *- o elemento fogo.*

II.II *o* **octaedro***, - o elemento ar.*

II.III *o* ***icosaedro*** *- o elemento água.*

III. *Se fossem pentágonos, teríamos o* **dodecaedro** *- simbolizava o Universo.*

Embora os poliedros fossem chamados sólidos Platônicos, segundo a lenda, ***Próclus*** *(411-485), filósofo*, atribuiu a construção destes poliedros a Pitágoras*(569a.c. -475a.c.).* Isso porque este se deve ao teorema: “Existem apenas cinco poliedros regulares convexos”, sólidos que mais tarde passaram a ser conhecidos como os sólidos de Platônicos. Atualmente sabe-se que o teorema só é verdadeiro para os poliedros regulares convexos.

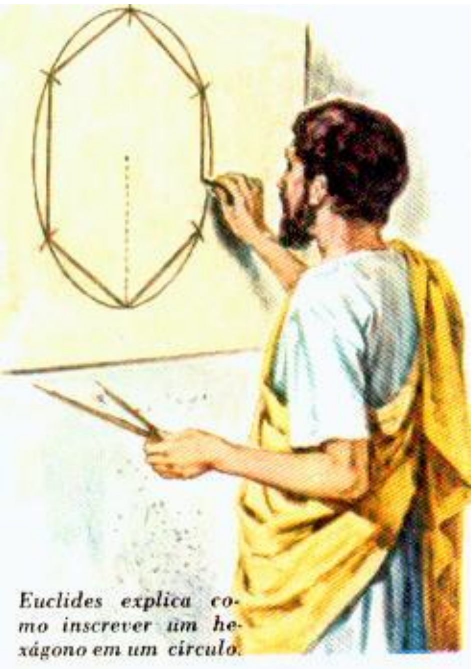
A monografia está organizada em dois capítulos: o primeiro trata de noções básicas da geometria e polígonos, o segundo poliedros.

Em Matemática, como em outras áreas do conhecimento, certos conceitos são ensinados, cuja utilidade só é vista mais tarde.

Nesse caso existem os poliedros, que para compreendê-los na sua totalidade, aspectos da geometria seguirão antecipando conceitos e proposições.

CAPÍTULO I

NOÇÕES BÁSICAS DE GEOMETRIA



Euclides explica como inscrever um hexágono em um círculo.

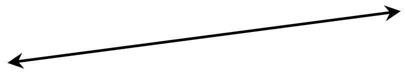
Geometria é entendida como a parte da matemática cujo objeto de estudo é o espaço e as figuras que podem ocupá-lo, denomina-se e faz-se necessário alguns conceitos básicos conhecidos como noções primitivas. De acordo com a modelagem do sistema axiomático de Euclides, os elementos fundamentais da geometria não possuem definição. São eles: ponto, reta e plano. Desta forma aceita-se cada um em sua modelagem.

- PONTO: é representado pelas letras do alfabeto maiúsculas.

• B

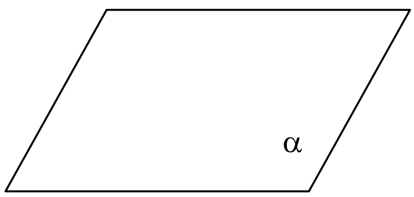
• A • C

- RETA: é infinita, e é representado pelas letras do alfabeto minúsculas.



r

- PLANO: é infinito, e é representado pelas letras gregas.



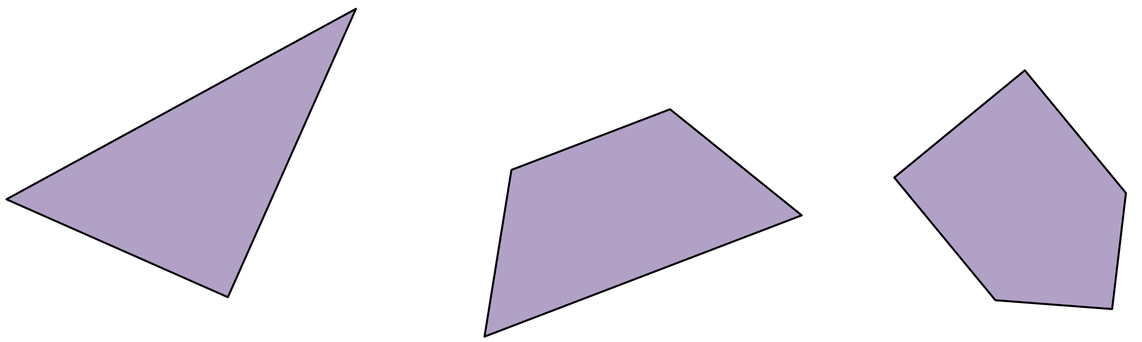
As noções primitivas são proposições admitidas sem demonstração, mas a partir delas que as mesmas são comprovadas em modelagem como polígonos. Os teoremas surgem com a necessidade de mostrar que uma afirmação pode ser demonstrada verdadeira por aceitar operações e argumentos matemáticos.

Com o desenvolvimento dos conceitos geométricos e estruturais, há hoje uma grande deficiência no ensino-aprendizagem e apropriação dos conceitos da geometria, em especial, os poliedros e portanto é importante conhecer a sua base estrutural: Os polígonos.

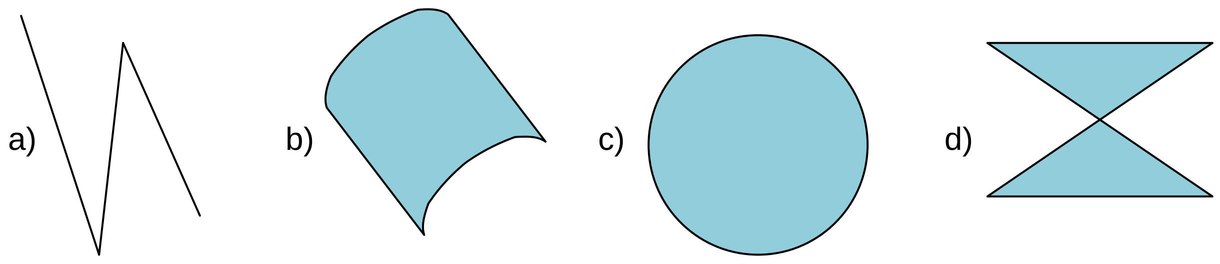
POLÍGONOS

A palavra polígonos vem do grego, em que poli significa muitos e gono significa ângulos. Ângulos é o nome que se dá à abertura formada por duas semi-retas que partem de um mesmo ponto.

Polígonos são formas geométricas planas, formada por segmentos de reta interligados entre si (linha poligonal fechada) e sua região interna.

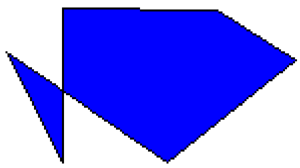


Não são polígonos quando as figuras possuem contorno aberto ou linhas curvas ou segmentos de retas que se cruzam.



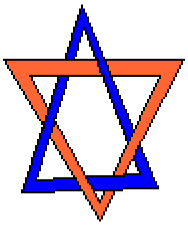
Para o (d) último existem explicações diferentes, apesar dos livros do ensino básico geralmente citarem que ele não é polígono, ao fazer o aprofundamento descobre-se que ele é sim um polígono, pois existem polígonos que apresentam seus lados cruzados. Veja a seguir alguns outros exemplos.

a) ENTRECRUZADO: polígono, cujo prolongamento dos lados, ajudam a formar outro polígono.



Polígono Entrecruzado

b) ENTRELAÇADO: formado por faixas de retas paralelas que se entrelaçam.

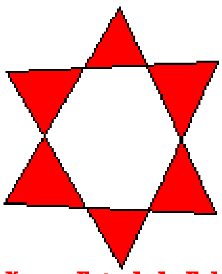


Polígono Entrelaçado

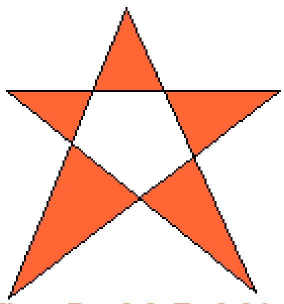
c) ESTRELADO: polígono formado por corda e ângulos iguais. Pode ser:

FALSO: pela sobreposiçãoW de polígonos.

VERDADEIRO: formado por linhas poligonais fechadas não-simples.

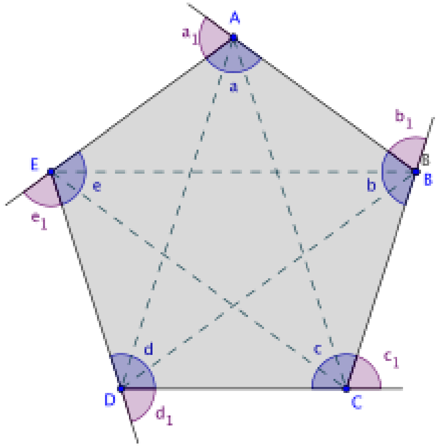


Polígono Estrelado Falso



Polígono Estrelado Verdadeiro

Nos polígonos destacam-se os seguintes elementos:

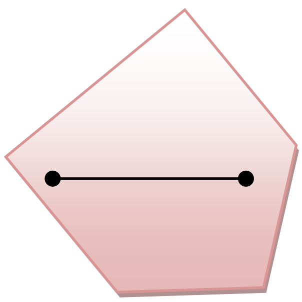


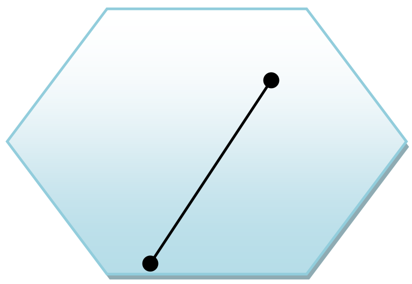
- **Arestas** ou **lados**: cada um dos segmentos de reta que unem vértices consecutivos: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$.
- **Vértices**: ponto de encontro (intersecção) de dois lados consecutivos: A, B, C, D, E.
- **Diagonais**: segmentos que unem dois vértices não consecutivos: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$.
- **Ângulos internos**: ângulos formados por dois lados consecutivos:$\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{e}$.
- **Ângulos externos**: ângulos formados por um lado e pelo prolongamento do lado a ele consecutivo: $\hat{a}_1$, $\hat{b}_1$, $\hat{c}_1$, $\hat{d}_1$, $\hat{e}_1$.

Os polígonos podem ser classificados quanto ao ângulos ou quanto aos número de lados:

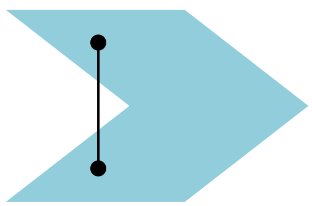
I - Quanto aos ângulos

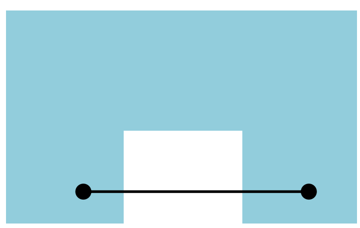
- **Convexo**: quando todas as diagonais estão contidas nele, ou seja, se possui todos os seus ângulos internos convexos (entre 0° e 180°);





- **Não Convexo**: se pelo menos uma diagonal estiver totalmente ou parcialmente na região exterior ao polígono, ou seja, se possui um ângulo interno côncavo (superior a 180°).





II - QUANTO AO NÚMERO DE LADOS

Não existem polígonos com um ou dois lados. Para os polígonos com três lados ou mais, não existe restrições quanto ao número de lados, embora apenas alguns polígonos tem nomenclatura própria. Segue abaixo uma tabela com alguns destes nomes.

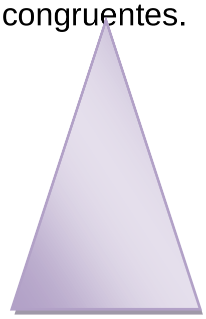
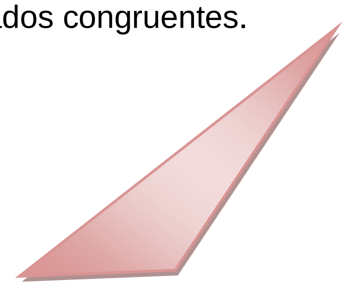
Nº de lados (n)	Nome	Significado do prefixo
3	**Tri**ângulos	Tri = três
4	**Quadri**láteros	Quadri = quatro
5	**Pentá**gono	Penta = cinco
6	**Hexá**gono	Hexa = seis
7	**Heptá**gono	Hepta = sete
8	**Octó**gono	Octo = oito
9	**Eneá**gono	Enea = nove
10	**Decá**gono	Deca = dez
11	**Undecá**gono	Undeca = onze
12	**Dodecá**gono	Dodeca = doze
15	**Pentadecá**gono	Pentadeca = quinze
20	**Icosá**gono	Icosa = vinte
100	**Hectágono**	Hecta = cem

Destacam-se entre os polígonos, os triângulos e os quadriláteros.

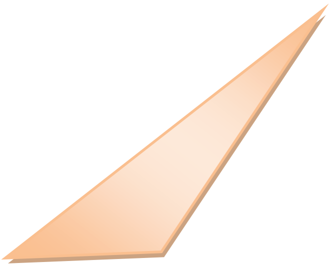
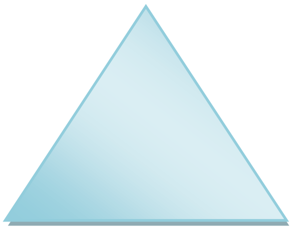
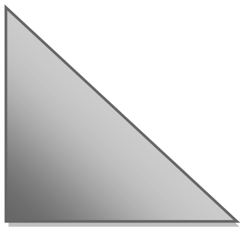
<u>TRIÂNGULOS</u>

Os triângulos podem ser classificados de duas maneiras:

- Com relação às medidas dos lados

Equilátero: possui os três lados congruentes.	Isósceles: possui dois lados congruentes. 	Escaleno: não possui lados congruentes. 

- Com relação às medidas dos ângulos

Obtusângulo: tem um ângulo obtuso, ou seja, maior que 90º. 	Acutângulo: tem os três ângulos agudos, ou seja, menor que 90º. 	Retângulo: tem um ângulo reto, ou seja, igual a 90º. 

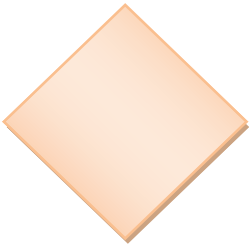
<u>**QUADRILÁTEROS**</u>

Os quadriláteros convexos recebem nomes especiais e são classificados em relação aos lados e aos ângulos:

1. Paralelogramo é o quadrilátero que possui os dois pares de lados iguais e ângulos opostos congruentes.

Dentre eles destacam-se:

1.1. **Retângulo** é um paralelogramo que tem os quatro ângulos congruentes e, portanto, retos.



1.2. **Losango** é um paralelogramo que tem os quatro lados congruentes.

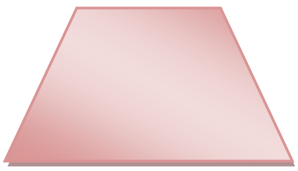
1.3. **Quadrado** é um paralelogramo com os quatro lados e os quatro ângulos congruentes. Por isso, o quadrado pode ser considerado um losango ou retângulo.

2. Trapézio: têm um par de lados paralelos.

Eles podem ser:

2.1. trapézio isósceles:

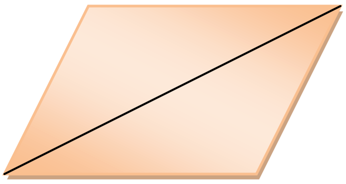
- tem os dois lados não paralelos congruentes
- os ângulos de mesma base e diagonais congruentes.



2.2. trapézio retângulo: tem dois ângulos retos.

OBSERVAÇÕES:

- Os quadriláteros têm duas diagonais.
- A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360º.



Traçando uma das diagonais temos dois triângulos

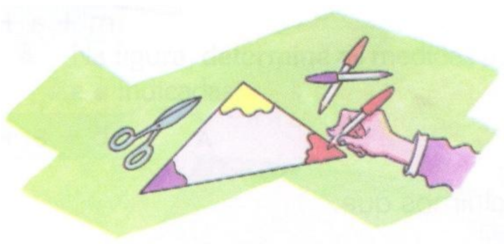
Ou seja:

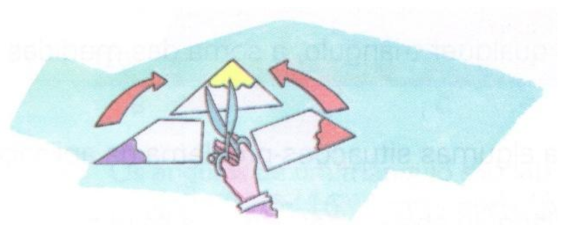
2 . 180º = 360º

No início desse capítulo já foi dito que a comprovação da geometria é através de conceitos. Inicialmente, lemos a proposição de um teorema e dela extraí-se a hipótese, conjunto de informações que utiliza-se para a demonstração da tese. A seguir um exemplo didático aplicável no ensino fundamental do teorema:

a) A soma dos ângulos internos de um triângulos é sempre 180º.

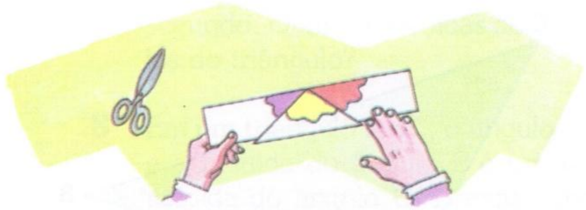
1º) Desenhe um triângulo qualquer numa folha e destaque os seus ângulos internos, cada um de uma cor.





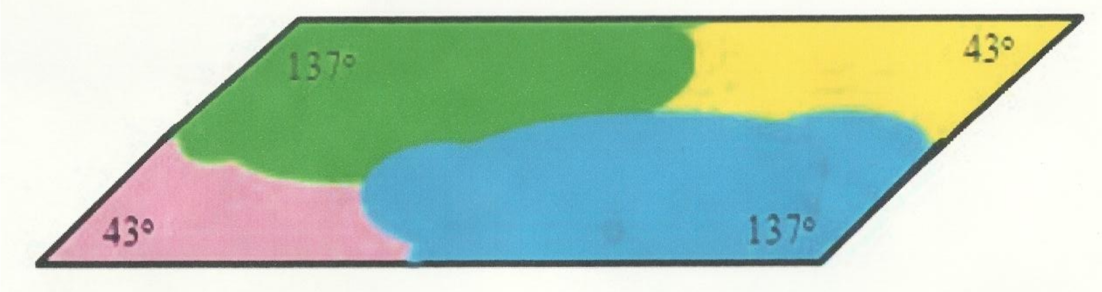
2º) Recorte o triângulo em três partes, de modo que cada ângulo interno fique em uma das partes.

3º) Junte os três vértices num único ponto.

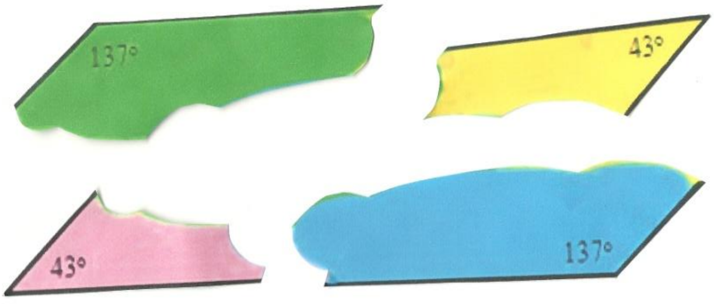


b) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre 360º.

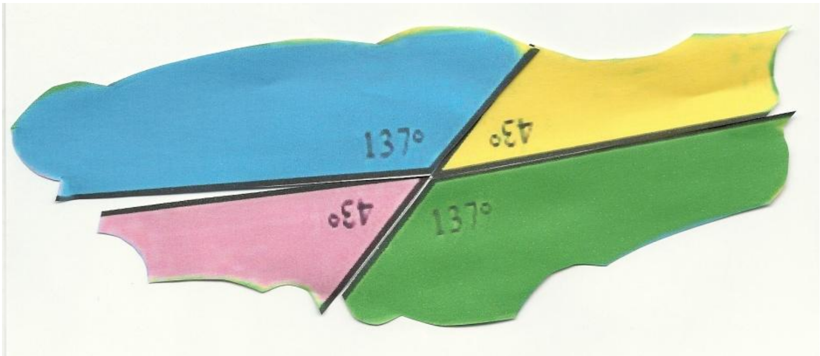
1º) Desenhe um quadrilátero qualquer numa folha e destaque os seus ângulos internos, cada um de uma cor.



2º) Recorte o quadrilátero em quatro partes, de modo que cada ângulo interno fique em uma das partes.



3º) Junte os quatros vértices num único ponto.

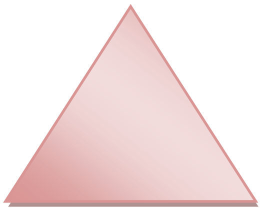


Dentro do tema Polígonos; os polígonos regulares possuem destaque e por isso, encontram-se abaixo conceitos, exemplos e apontamentos.

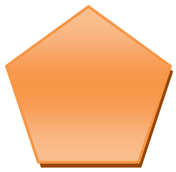
POLÍGONOS REGULARES

Os polígonos regulares possuem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

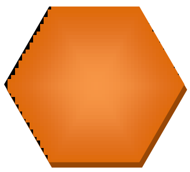
Desta forma, dos polígonos de três lados apenas o triângulo eqüilátero é regular. E dos quadriláteros somente o quadrado é regular.



Os polígonos regulares com cinco ou mais lados não tem nomes especiais, apenas acrescenta-se o adjetivo “regular” ao seu nome.



Pentágono regular



Hexágono regular

- Num polígono regular, o nº de lados, vértices, ângulos internos e externos são sempre o mesmo.

- A soma dos ângulos externos de qualquer polígono regular, independente, do nº de seus lados e é sempre 360º.

O ensino da geometria plana, no ensino fundamental, é favorecido pelo manuseio de figuras planas e atividades lúdicas para a comprovação de conjecturas, conceitos.

A seguir três exemplos de atividades expericiadas no processo de elaboração da pesquisa.

ATIVIDADE 01: CAÇA-PALAVRAS

Escreva o nome de cada polígono indicado no quadro. Depois, localize os nomes que você escreveu no caça-palavras. Veja o exemplo:

Polígono de 3 lados: ______________	Polígono de 9 lados: ______________
Polígono de 4 lados: ______________	Polígono de 10 lados: ______________
Polígono de 5 lados: _PENTÁGONO___	Polígono de 11 lados: ______________
Polígono de 6 lados: ______________	Polígono de 12 lados: ______________
Polígono de 7 lados: ______________	Polígono de 15 lados: ______________
Polígono de 8 lados: ______________	Polígono de 20 lados: ______________

No caça-palavras, os nomes podem estar na horizontal, vertical ou diagonal ou, ainda, escritos de trás para frente.

T	A	H	U	B	P	C	O	N	O	G	Á	C	E	D	O	D	U	O	R
R	N	E	N	U	G	H	Z	U	T	R	I	A	X	I	P	A	T	G	I
I	G	P	D	Z	M	Q	G	K	T	P	M	E	A	U	E	H	E	O	A
C	U	G	E	P	T	Á	U	Q	V	N	K	D	Q	A	H	E	P	N	D
O	T	U	C	L	A	N	L	A	U	W	E	R	U	H	N	P	N	P	E
S	E	L	A	N	G	U	O	G	D	T	C	P	A	C	A	T	O	E	C
Á	Q	U	G	X	E	H	P	C	I	R	D	O	D	E	N	A	C	N	O
G	V	X	O	U	F	T	R	C	A	I	I	V	F	B	O	G	A	T	A
O	U	P	N	T	A	C	O	H	N	A	L	L	P	M	G	O	U	A	D
N	Q	B	O	I	C	O	G	O	D	N	Q	U	A	J	A	N	Q	D	R
O	C	T	W	T	R	N	M	G	F	G	H	K	S	T	X	O	A	E	O
C	P	M	O	G	N	O	A	T	P	U	S	N	R	K	E	A	T	C	O
H	D	D	E	C	A	G	O	N	O	L	X	O	A	M	O	R	C	A	S
K	L	G	Q	D	N	A	B	D	H	O	I	P	N	J	C	R	O	G	A
T	R	I	O	M	F	X	Z	J	A	U	Q	Z	O	O	I	T	C	O	E
O	L	U	G	E	N	E	A	L	K	F	W	X	G	U	G	O	I	N	O
D	M	B	H	N	E	H	B	N	C	P	M	H	O	L	X	O	A	O	N
E	N	E	A	G	O	N	O	G	O	F	V	P	H	A	I	N	T	E	P
C	L	O	R	A	I	T	G	U	R	E	S	T	U	D	C	R	R	C	O
A	R	T	G	U	L	O	N	P	E	N	T	A	G	O	N	O	I	T	O

ATIVIDADE 02: CONFECÇÃO DE POLÍGONOS

Com palitos de picolé e percevejos é possível construir polígonos, todos eles serão eqüiláteros porque todos os palitos tem a mesma medida.

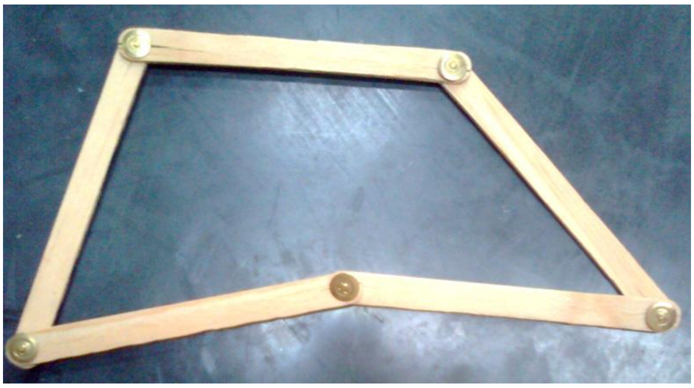
O Triângulo é o único polígono rígido construído, não é possível ver deformações, uma vez que existe um teorema que diz que três pontos formam um triângulo.

O triângulo é o único que possui também todos os ângulos iguais, já que todos os lados são iguais, tornando-o um triângulo eqüilátero.

A rigidez do triângulo tem muitas aplicações práticas. Ela explica a presença dos triângulos nas estruturas, de madeira ou ferro das construções.

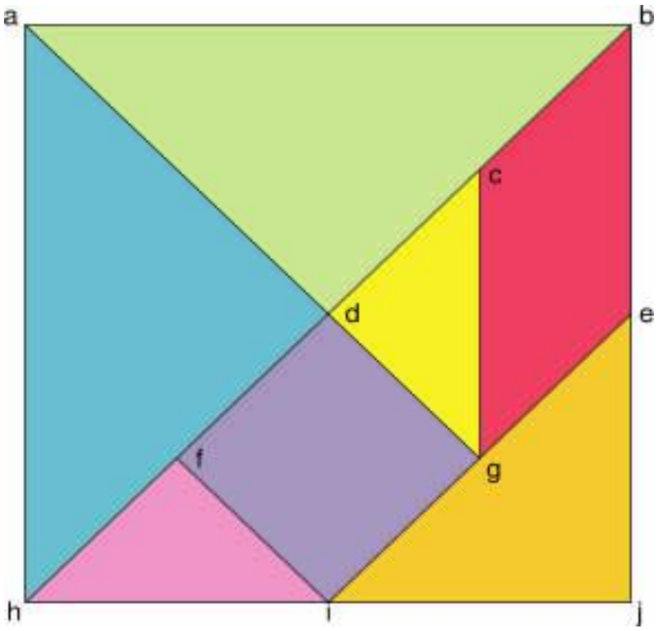
No quadrilátero pode-se levar os alunos a observar as suas deformações, podemos transformar o quadrado em losango, uma vez que apenas os seus lados não conseguem determinar o quadrado ou losango.

O pentágono pode deixar de ser regular, e se tornar um polígono não convexo



Através dessas transformação dos palitos no polígono pode-se observar que a medida dos lados e o perímetro não mudam com as suas deformações, mas a área se modifica.

ATIVIDADE 03: TANGRAN



Tangram é um quebra-cabeça chinês, também chamado de "Tábua das sete sabedorias", é um quebra-cabeça chinês, muito antigo. É composto de sete peças (chamadas de tans) que podem ser posicionadas de maneira a formar um quadrado: 5 triângulos de vários tamanhos, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Com essas peças podemos formar mais de 1700 figuras, utilizando todas elas sem sobrepô-las.

É utilizado pelos professores de matemática como instrumento facilitador da compreensão das formas geométricas, e por desenvolver a criatividade e o raciocínio lógico matemático.

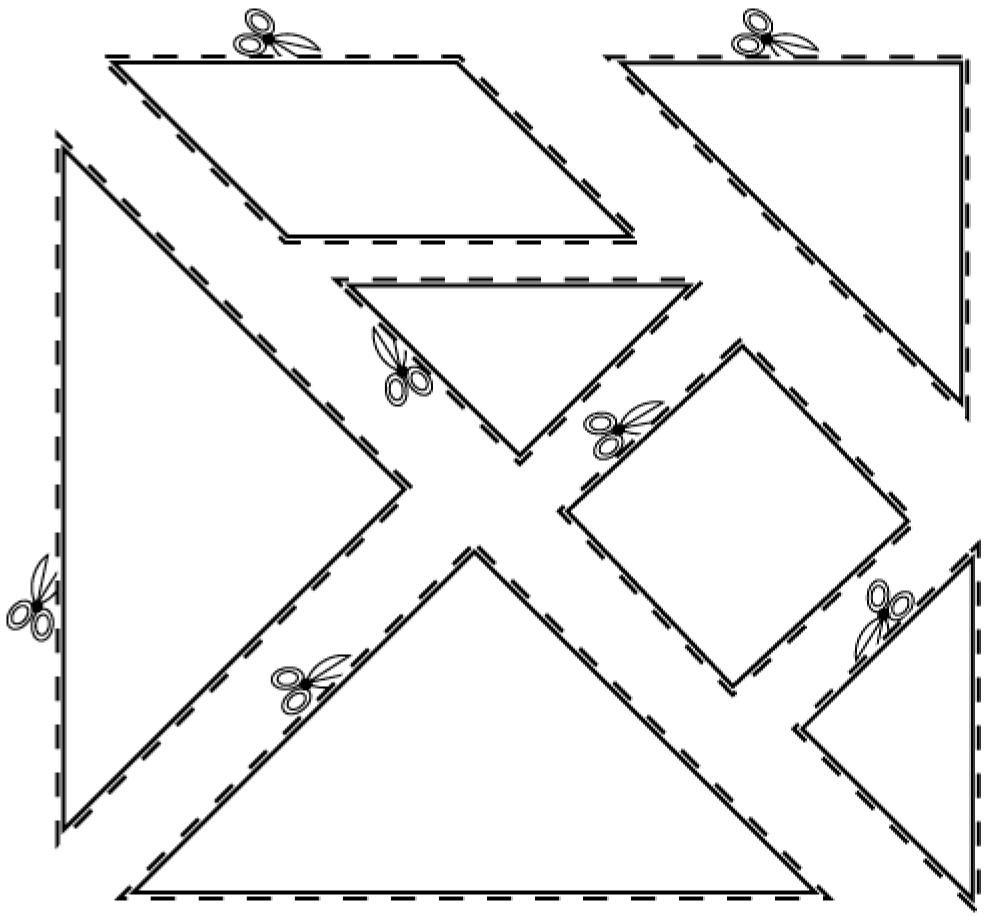
Não se sabe ao certo como surgiu o Tangram, apesar de haver várias lendas sobre sua origem. Uma diz que uma pedra preciosa se desfez em sete pedaços, e com elas era possível formar várias formas, tais como animais , plantas e pessoas. Outra diz que um imperador deixou um espelho quadrado cair, e este se desfez em 7 pedaços que poderiam ser usados para formar várias figuras. Segundo alguns, o nome Tangram vem da palavra inglesa "trangam", de significado "puzzle" ou "buginganga". Outros dizem que a palavra vem da dinastia chinesa Tang, ou até do barco cantonês "Tanka", onde mulheres entretiam os marinheiros americanos. Na Ásia o jogo é chamado de "Sete placas da Sabedoria".

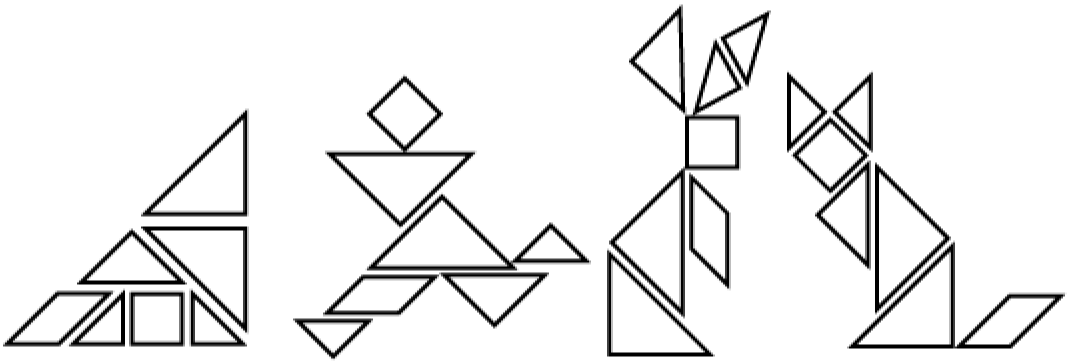
TANGRAM

www.smartkids.com.br

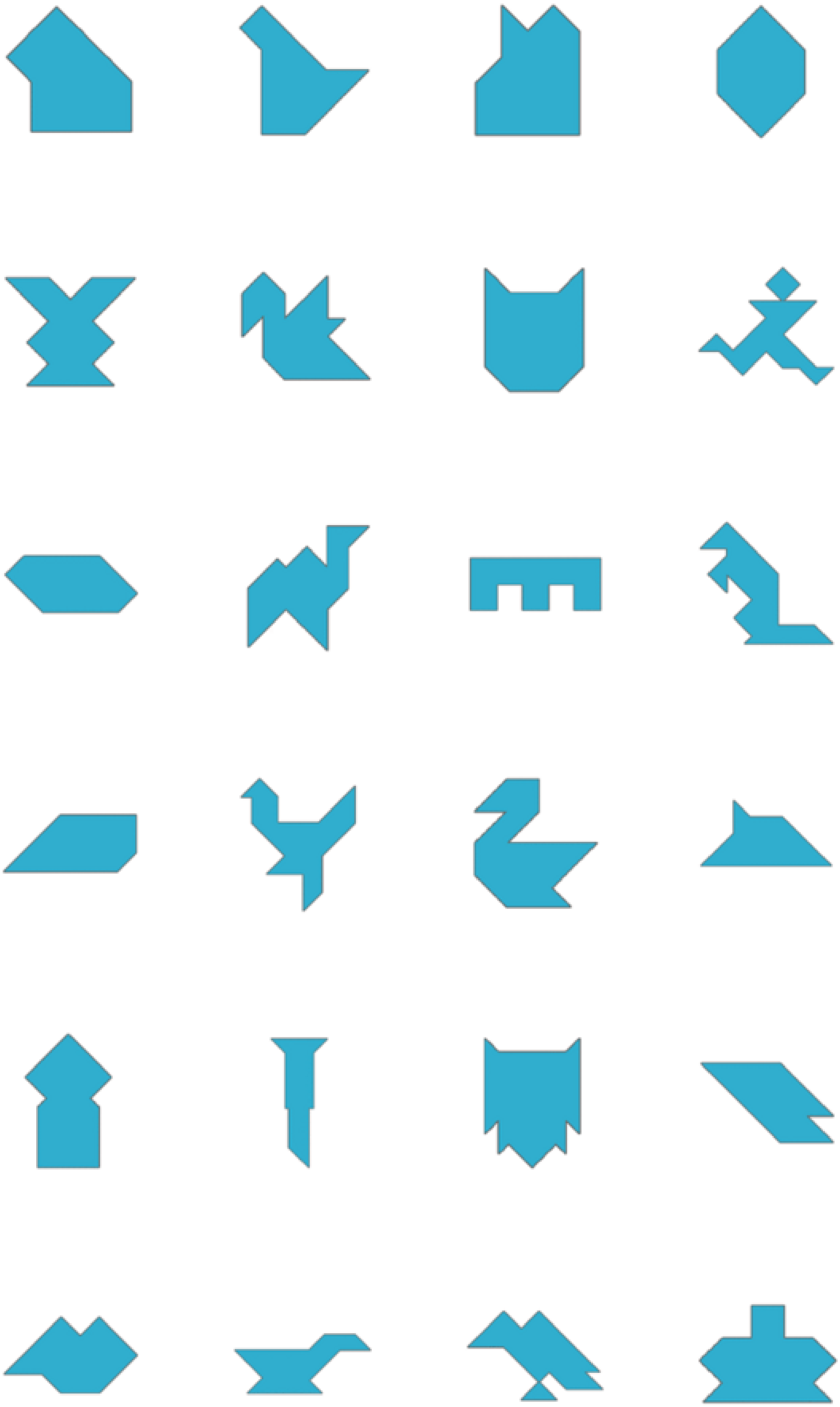
-Instruções:

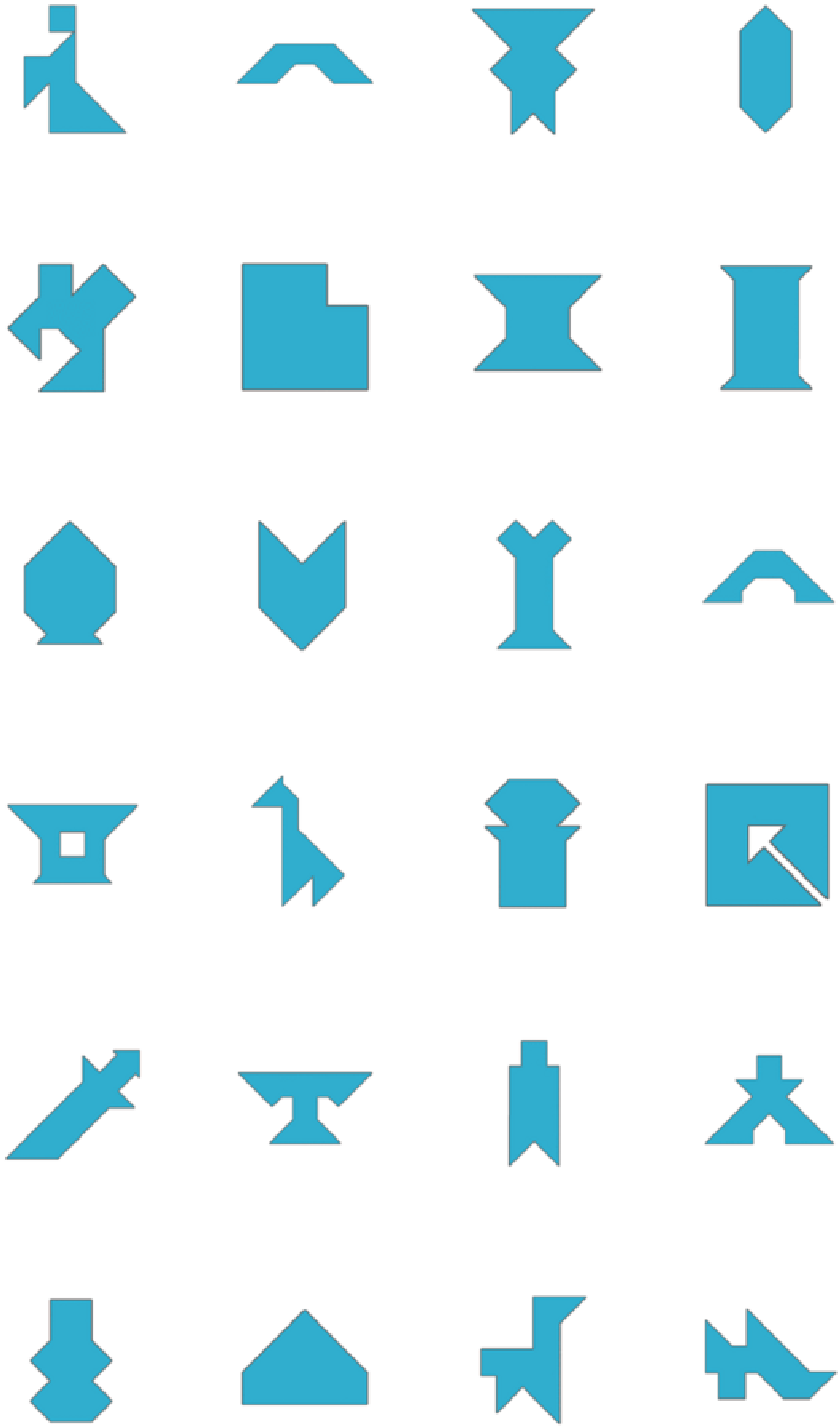
Recorte as formas geométricas e monte as figuras abaixo. Boa diversão!

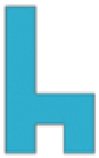


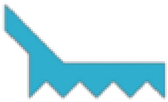


Outras figuras que podemos formar:



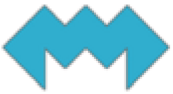


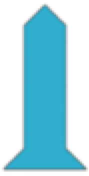


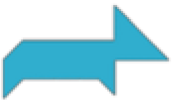


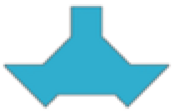
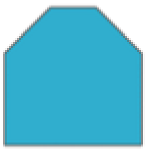




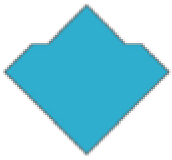








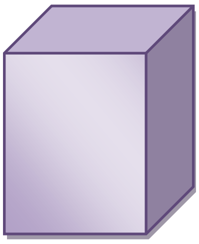
Geometria espacial é o estudo da geometria no espaço, em que estudamos as figuras que possuem mais de duas dimensões. Essas figuras recebem um nome de sólidos geométricos (figuras geométricas espaciais).

Poliedro é o sólido limitado por quatro ou mais polígonos planos pertencentes a planos diferentes e que tem dois a dois somente uma aresta em comum.

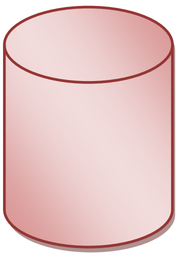
CAPÍTULO II

POLIEDROS

DEFINIÇÃO: “Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um desses polígonos é também lado de um, apenas um, outro polígono.”

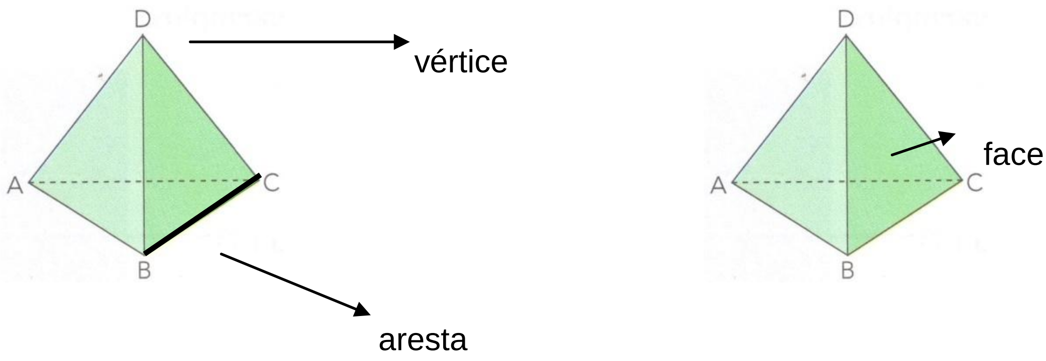


CORPOS REDONDOS: são formas geométricas espaciais que apresentam pelo menos uma parte arredondada em sua superfície.



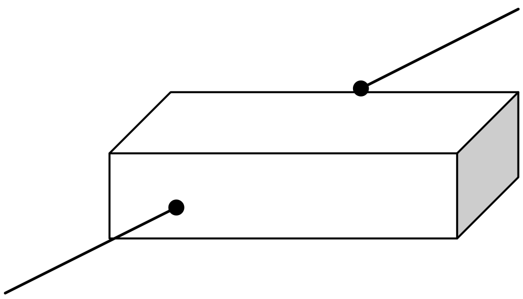
Em cada poliedro pode-se identificar:

- FACE: cada um desses polígonos do poliedro;
- ARESTA: cada lado comum a duas faces, ou seja, a intersecção das arestas dos polígonos;
- VÉRTICE: cada vértice de uma face é também vértice do poliedro.

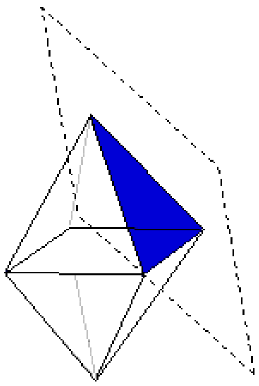


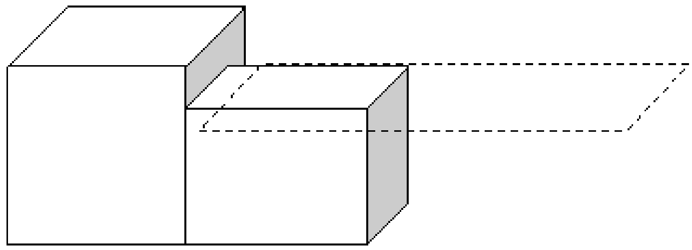
1. POLIEDROS CONVEXOS

Diz-se que um poliedro é convexo se o seu interior é convexo, ou seja, um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela e nenhuma de suas faces) o corta, no máximo, dois pontos.



Outra forma de verificar se um poliedro é convexo, é traçar um plano em uma das faces do poliedro, se todos os pontos desta face pertencerem ao plano ele é convexo.





Poliedro Convexos Poliedros não-convexo

2. POLIEDROS REGULARES

Poliedros regulares são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares iguais e que todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Um poliedro diz-se regular se é convexo, isto é, os ângulos de dois lados formados por duas faces consecutivas é menor que 180°, se todas as suas faces são formadas por polígonos regulares. Os poliedros que tem essas características são denominados Poliedros Platônicos.

Para os poliedros atribuem-se três estudos importantes:

a) Relação de Euler;
b) Poliedro de Platão;
c) Sólidos Arquimedianos.

a) RELAÇÃO DE EULER

Matemático Suíço Leonhard Euler (1707 – 1783)

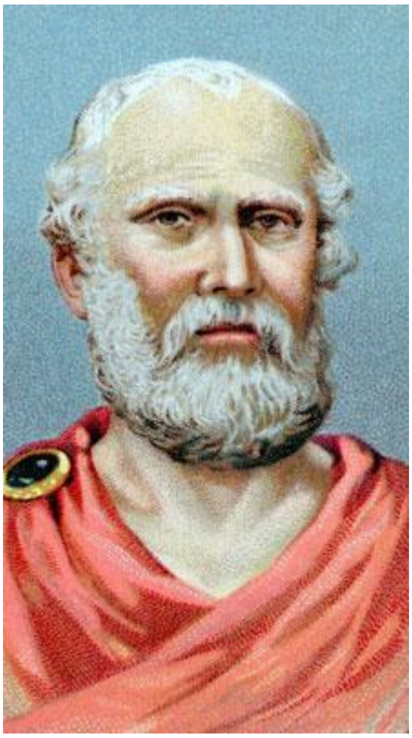
Leonhard Euler (15/04/1707 a 18/09/1783), suíço matemático, muito prolífico para sua época, destacou-se pela descoberta da “propriedade geral da estereometria”, que hoje conhecida como fórmula de Euler.

Ao estudarmos os poliedros convexos verifica-se uma importante relação existente entre o número de faces, arestas e vértices. Euler, dentre várias contribuições para matemática desenvolveu uma relação que calcula o número de aestas(A), faces(F) e vértices de um poliedro, desde que haja pelo menos dois valores.

$$V - A + F = 2$$

Todo poliedro convexo obedece à relação de Euler, mas nem todo poliedro que obedece à relação de Euler é convexo.

b) POLIEDRO DE PLATÃO



O poliedro convexo que possui todas as faces com o mesmo número de arestas e cada vértice parte o mesmo número de arestas, denomina-se “**Poliedro de Platão**”.

Denomina-se poliedro de Platão se e somente se:

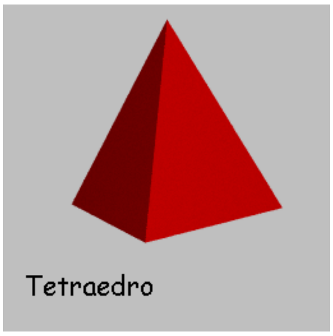
1) Todas as suas faces são polígonos com o mesmo número e lados;

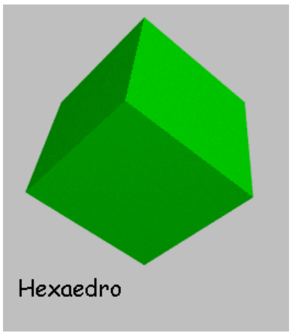
2) Todos os seus vértices de ângulos poliédricos com o mesmo número de arestas;

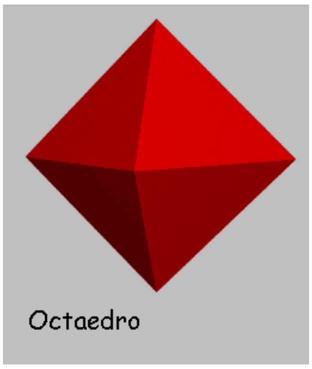
3) É Euleriano, ou seja, obedece à relação de Euler: V – A + F = 2.

TEOREMA: Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.

Verificando que só existem cinco Poliedros Platônicos :







Sabe-se que existem apenas cinco poliedros platônicos. Podemos verificar que isso é verdade através do seguinte argumento:

Em cada vértice de um poliedro teremos o encontro de pelo menos três de suas faces. O ângulo formado por essas faces deverá ser menor que 360° para que esse poliedro seja regular.

Analisando cada caso observa-se que, para o caso de 3 faces ligadas a um vértice:

a) Quando as faces do poliedro forem triângulos (ângulo interno 60°), têm-se

   3 * 60° = 180°.

b) Quando as faces do poliedro forem quadrados (ângulo interno 90°), têm-se

   3 * 90° = 270°.

c) Quando as faces do poliedro forem pentágonos (ângulo interno 108°), têm-se

   3 * 108° = 324°.

d) Quando as faces do poliedro forem hexágonos *(*ângulo interno 120°), têm-se

3 * 120° = 360°, o que contradiz a nossa hipótese.

Logo, verifica-se para esse caso que as faces dos poliedros regulares não podem ser formadas por polígono regulares com mais de cinco lados.

Para o caso de quatro faces ligadas a um vértice:

a) Quando as faces do poliedro forem triângulos, têm-se 4 * 60° = 240°.
b) Quando as faces do poliedro forem quadrados, têm-se 4 * 90° = 360°, o que contradiz a hipótese.

Logo, verifica-se que para esse caso que um poliedro regular construído com quatro faces a partir de um vértice, poderá ter apenas faces triangulares.

Para o caso de 5 faces ligadas ao mesmo vértice:

a) Quando as faces do poliedro forem triângulos, têm-se 5 * 360° = 300°.

Do mesmo modo que foi verificado no caso anterior, concluímos que não poderemos ter polígonos com mais de 3 lados, com cinco faces ligadas ao mesmo vértice.

<u>Demonstração:</u>

Seja n o número de lados de cada face e p o número de arestas que concorrem em cada vértice. Temos:

2A = nF = pV

Logo:

I. 2A = nF $\therefore$ $A = \frac{nF}{2}$ e

II. pV = nF $\therefore$ $V = \frac{nF}{p}$

Substituindo I e II na equação de Euler:

$$V - A + F = 2$$

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2$$

$$\frac{2nF}{2p} - \frac{pnF}{2p} + \frac{2pF}{2p} = 2$$

$$2nF - pnF + 2pF = 4p$$

$$F(2n - pn + 2p) = 4p$$

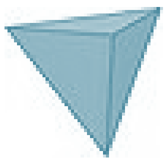
$$F = \frac{4p}{2n - pn + 2p}$$

Pelo domínio temos que ter $2n - pn + 2p > 0$, ou seja, $\frac{2n}{n-2} > p$

Como $p \geq 3$, chegamos a conclusão que p<6.

- Se n = 3 → $F = \frac{4p}{2.3-3.p+2p}$ $\therefore$ $F = \frac{4p}{6-p}$

  Para p = 3 → $F = \frac{4.3}{6-3} = \frac{12}{3}$ $\therefore$ $F = 4$ (Tetraedro)

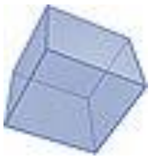


  Para p = 4 → $F = \frac{4.4}{6-4} = \frac{16}{2}$ $\therefore$ $F = 8$ (Octaedro)

- Para p = 5 → $F = \frac{4.5}{6-5} = \frac{20}{1} \therefore F = 20$ (Icosaedro)

- Se n = 4 → $F = \frac{4p}{2.4-4.p+2p} \therefore F = \frac{4p}{8-2p}$

  Para p = 3 → $F = \frac{4.3}{8-2.3} = \frac{12}{2} \therefore F = 6$ (Hexaedro)



- Se n = 5 → $F = \frac{4p}{2.5-5.p+2p} \therefore F = \frac{4p}{10-3p}$

  Para p = 3 → $F = \frac{4.3}{10-3.3} = \frac{12}{1} \therefore F = 12$ (Dodecaedro)

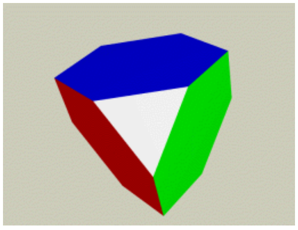
CONSTRUÇÃO DE POLIEDROS QUASE-REGULARES OU SEMI-REGULARES.

c) SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS

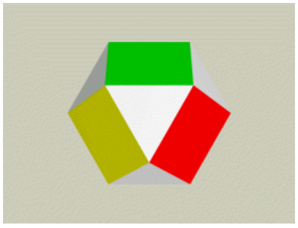
Arquimedes (287a.c.-212a.c.), nascido em Siracusa, é sem dúvida um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Os Poliedros Arquimedianos foram estudados, por Arquimedes no séc. III a. C.. O tratado em que a sua teoria foi exposta encontra-se perdido tal como grande parte das obras dos matemáticos gregos. E de novo, dois mil anos mais tarde, Kepler demonstrou a existência de treze sólidos de Arquimedes.

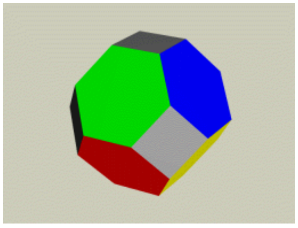
Existem ligações íntimas entre a família dos sólidos platónicos e a família dos arquimedianos. Por exemplo, efectuando cortes cada vez mais profundos (também chamados truncaturas) nos vértices de um cubo, podemos obter alguns sólidos arquimedianos. As faces dos poliedros arquimedianos são polígonos regulares, não tendo que ser, como no caso dos platónicos, todos iguais. Os treze sólidos Arquimedianos são os seguintes:



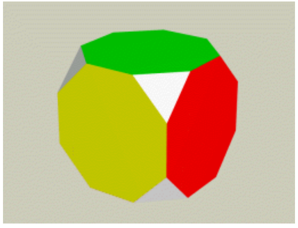
Tetraedro Truncado



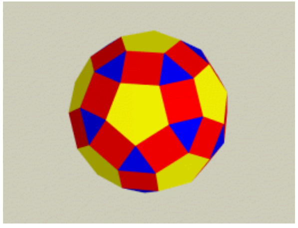
Cuboctaedro



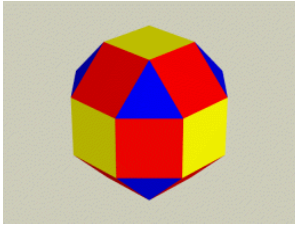
Octaedro Truncado



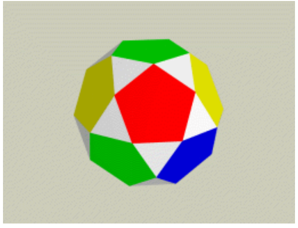
Cubo Truncado



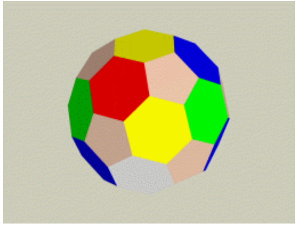
Grande Rombicuboctaedro



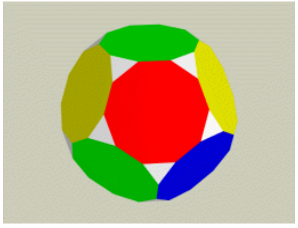
Pequeno Rombicuboctaedro



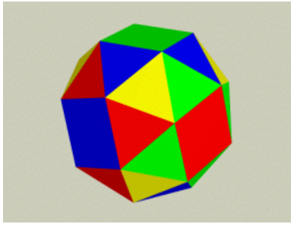
Icosidodecaedro



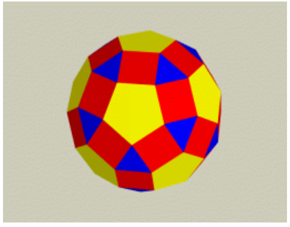
Icosaedro Truncado



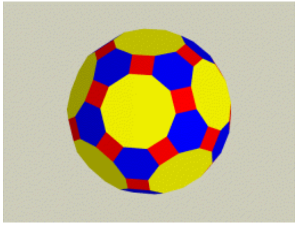
Dodecaedro Truncado

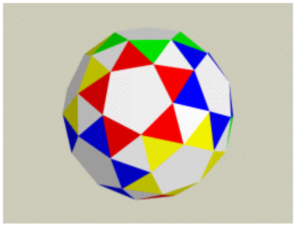


Cubo Achatado



Pequeno Rombicosidodecaedro





Grande Rombicosidodecaedro

Dodecaedro Achatado

Observação: Estes modelos de poliedros foram construídos por Tom Gettys do departamento de Matemática da California State University.

Na seguinte tabela poderá consultar o número de faces, arestas e vértices de cada um dos sólidos Arquimedianos e ainda quais os polígonos regulares que compõem as suas faces.

Poliedro	**F**	**A**	**V**	**Composição**
Tetraedro Truncado	8	18	12	4 Triângulos 4 Hexágonos
Cuboctaedro	14	24	12	8 Triângulos 6 Quadrados
Octaedro Truncado	14	36	24	6 Quadrados 8 Hexágonos
Cubo Truncado	14	36	24	8 Triângulos 6 Octógonos
Grande Rombicuboctaedro	26	72	48	12 Quadrados 8 Hexágonos 6 Octógonos
Pequeno Rombicuboctaedro	26	42	24	8 Triângulos 18 Quadrados

Poliedro	F	A	V	Composição
Icosidodecaedro	26	60	30	20 Triângulos 6 Pentágonos
Icosaedro Truncado	32	90	60	12 Pentágonos 20 Hexágonos
DodecaedroTruncado	32	90	60	20 Triângulos 12 Decágonos
Cubo Achatado	38	60	24	32 Triângulos 6 Quadrados
Pequeno Rombicosidodecaedro	62	120	60	20 Triângulos 30 Quadrados 12 Pentágonos
Grande Rombicosidodecaedro	62	180	120	30 Quadrados 20 Hexágonos 12 Decágonos
Dodecaedro Achatado	92	150	60	80 Triângulos 12 pentágonos

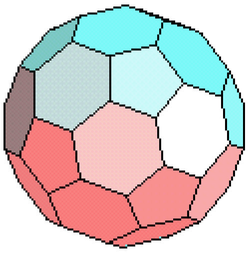
Repare que estes sólidos, à excepção do Pequeno Rombicuboctaedro e do Icosidodecaedro, também satisfazem a relação de Euler.

Dentre esses poliedros arquimedianos se destaca o icosaedro trucado por ser o formato da bola de futebol, torna-se o mais conhecido. Vamos conhecer um pouco sobre ele.

A BOLA DE FUTEBOL E SUA ESTRUTURA POLIÉDRICA

Na copa mundial de 1970 o mundo do futebol começou a utilizar uma bola confeccionada com pentágonos e hexágonos.

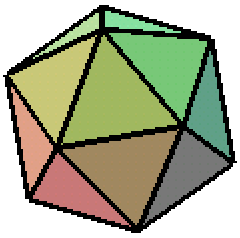
Esta estrutura poliédrica chama-se *icosaedro truncado*, e é constituída de 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais.



Bola de Futebol: icosaedro truncado

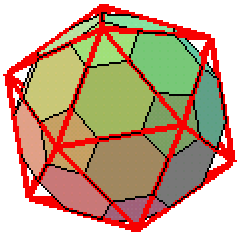
O icosaedro truncado é um dos treze poliedros conhecidos como *sólidos de Arquimedes.*

O icosaedro truncado pode ser obtido a partir do icosaedro. O *icosaedro*, conhecido como um dos *sólidos de Platão*, é formado por 20 faces triangulares regulares, com 12 vértices, sendo que em cada vértice incidem 5 arestas.



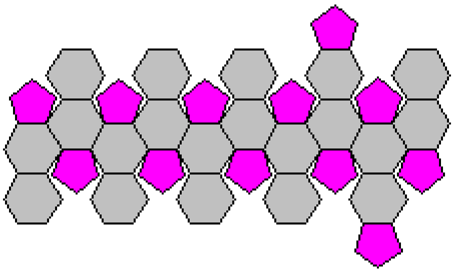
icosaedro

Para se obter o icosaedro truncado toma-se um icosaedro sólido e "cortamos" suas "pontas". Assim a cada vértice do icosaedro corresponde uma pequena pirâmide regular de base pentagonal que é retirada do icosaedro. Veja a seguir o icosaedro truncado inserido no esqueleto do icosaedro:



No lugar de cada pirâmide retirada fica sua base pentagonal. Como o icosaedro tem 12 vértices, o poliedro resultante tem 12 faces pentagonais. Se as arestas laterais de cada pirâmide retirada tem comprimento igual a $\frac{1}{3}$ da aresta do icosaedro, resulta que cada face triangular do icosaedro original se transforma em uma face hexagonal regular do icosaedro truncado. Como o icosaedro original tem 20 faces triangulares, o icosaedro truncado fica com 20 faces hexagonais. Observe que nessa estrutura os vértices têm incidência de apenas 3 arestas. Isto influi na confecção da bola de futebol, facilitando a costura dos gomos.

Uma forma de construir um icosaedro truncado de cartolina consiste em considerar a planificação abaixo:



A visão espacial é uma habilidade mental que tem seus mecanismos localizados do lado direito do cérebro cujo aprendizado se dá por caminhos diferentes, quanto mais lúdica for esta aprendizagem, mais rapidamente é apreendida e assimilada.

KOPKE (2001)

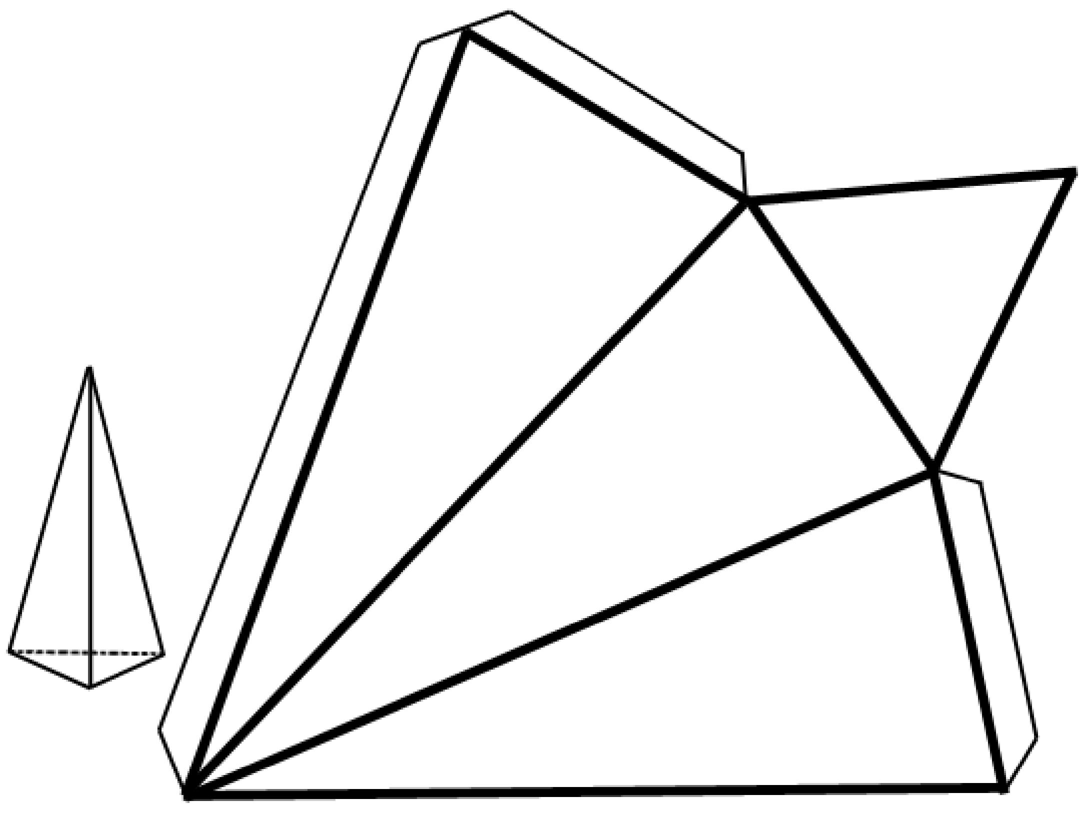
POLIEDRO X SALA DE AULA

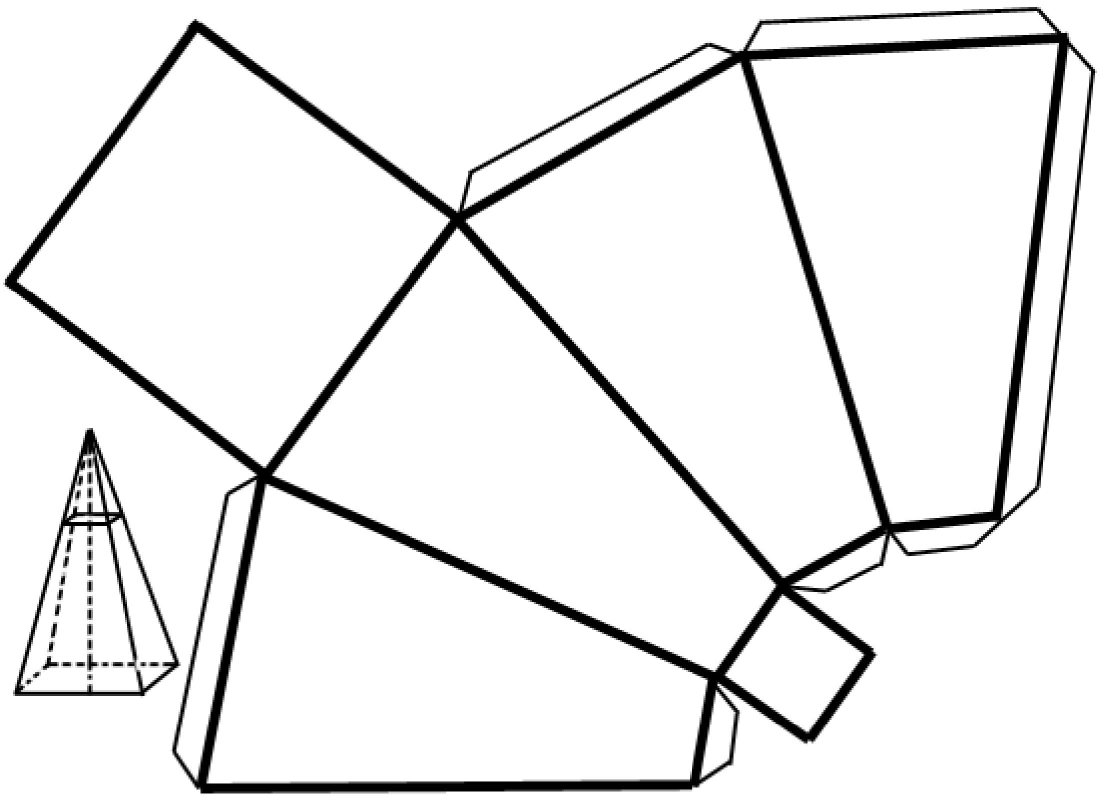
A geometria espacial, atrelada aqui ao estudo de poliedros, teve uma sequência didática, passo-a-passo, que respeita o conhecimento que os alunos já têm e planeja atividades capazes de construir no imaginário do aluno figuras espaciais.
A formulação de hipóteses e a necessidade de aplicação de conhecimentos básicos da gemometria (polígonos, por exemplo), estão aqui comprovadas nas experiências a seguir.

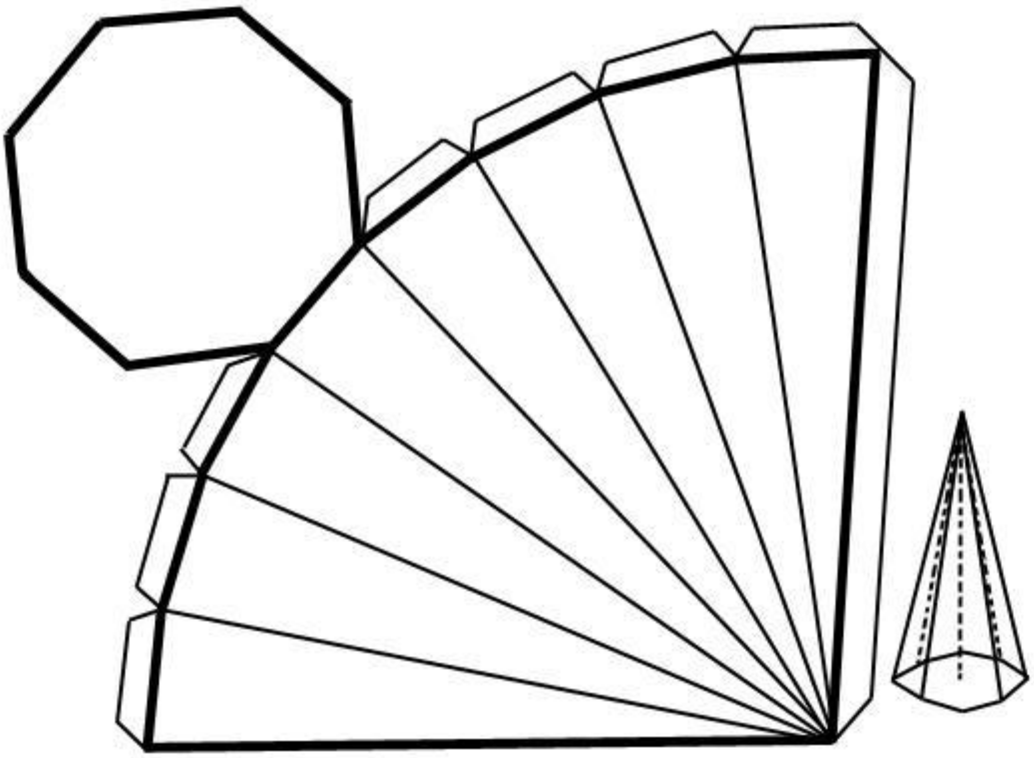
ATIVIDADE 01

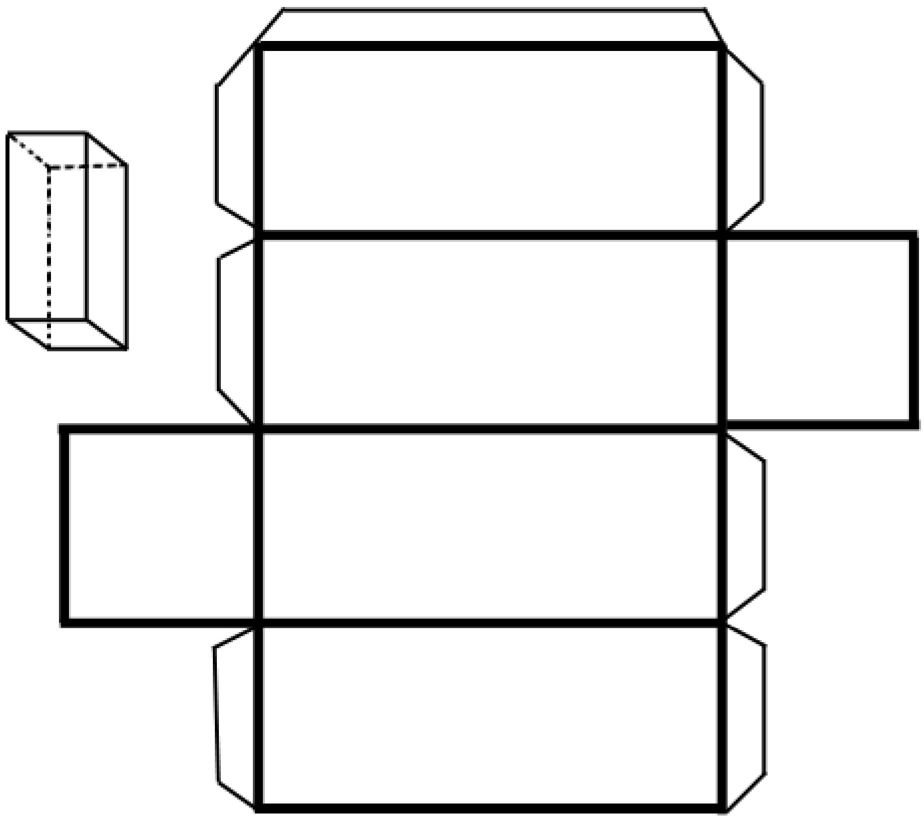
CONSTRUÇÃO DE POLIEDROS COM CARTOLINA

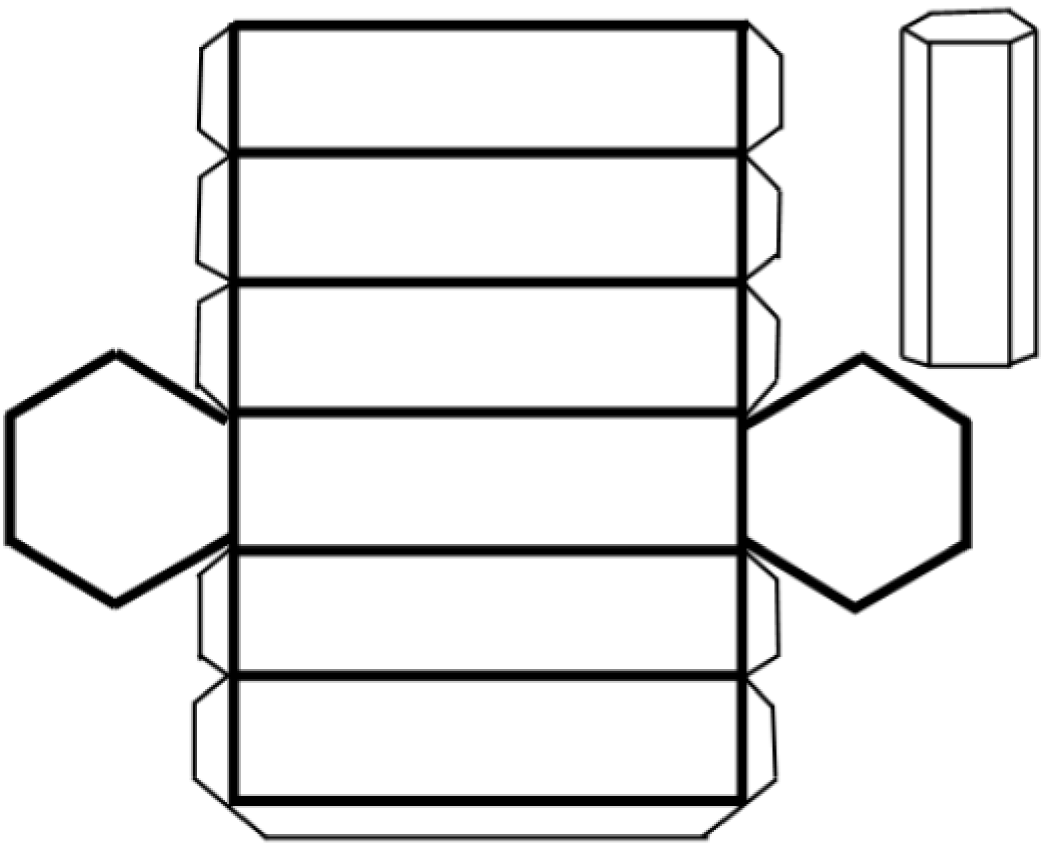
.





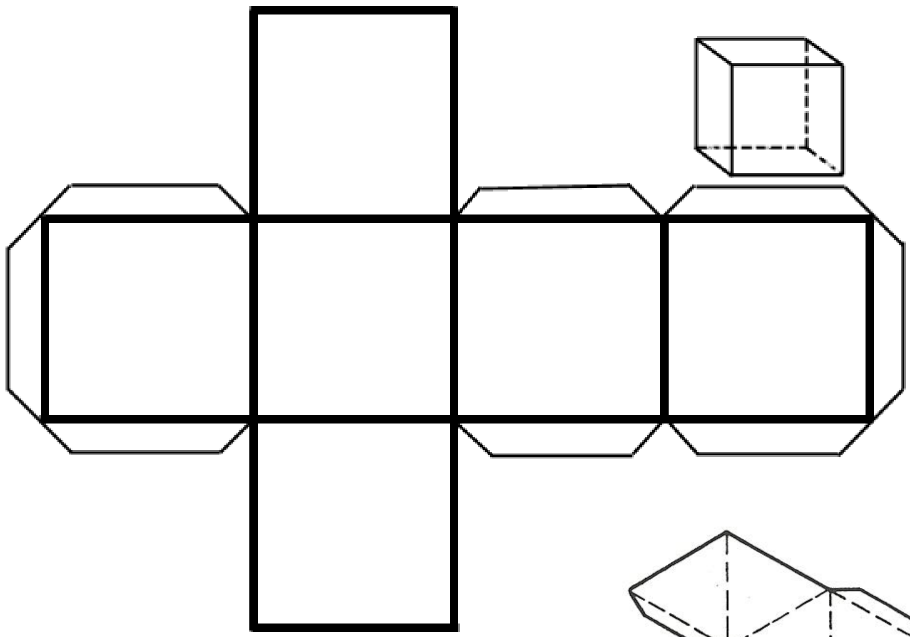


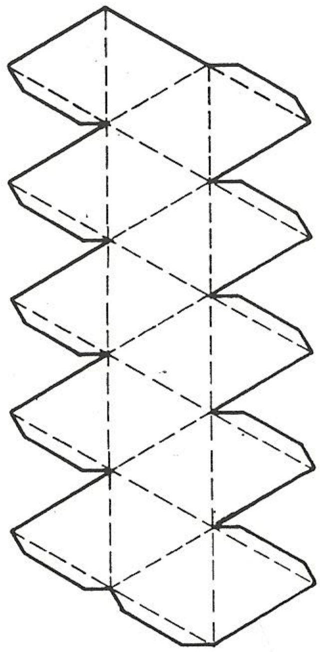


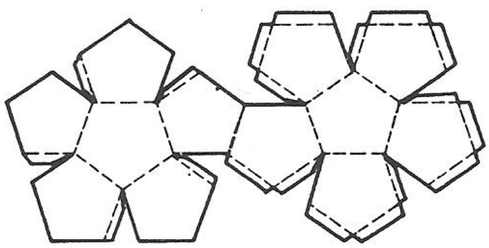


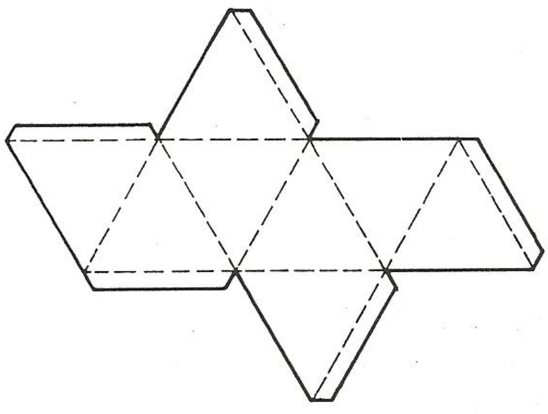
ATIVIDADE 02:

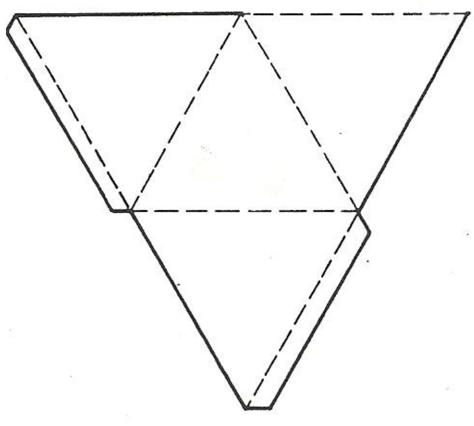
CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO COM CARTOLINA







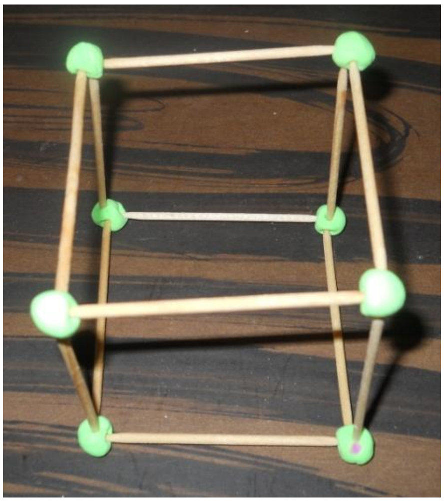


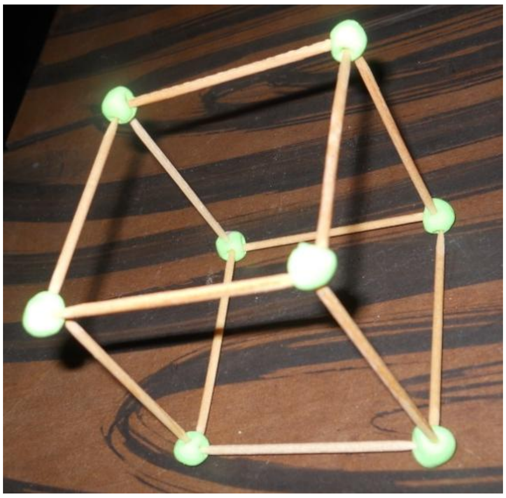


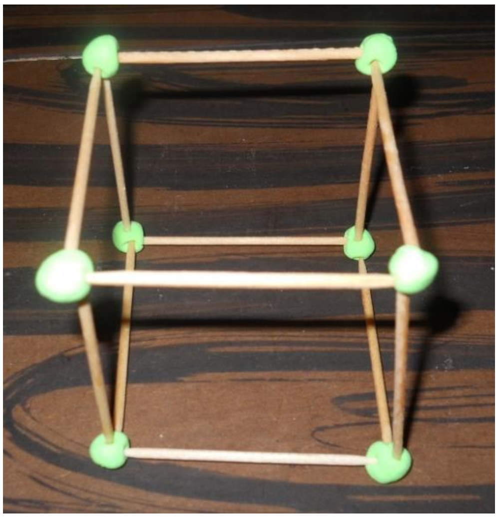
ATIVIDADE 03

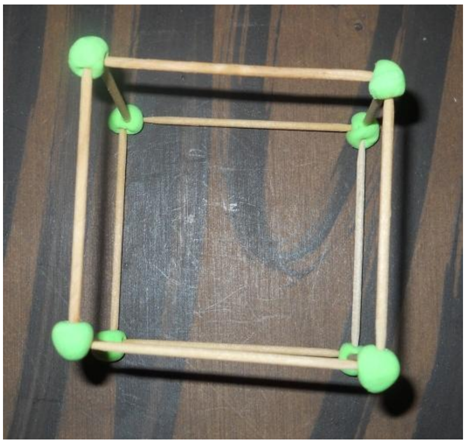
CONSTRUÇÃO DE POLIEDROS REGULARES COM PALITOS E MASSA PULA-PULA OU IMANTEC

Cubo

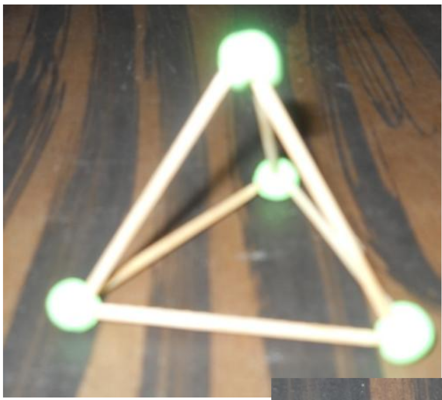
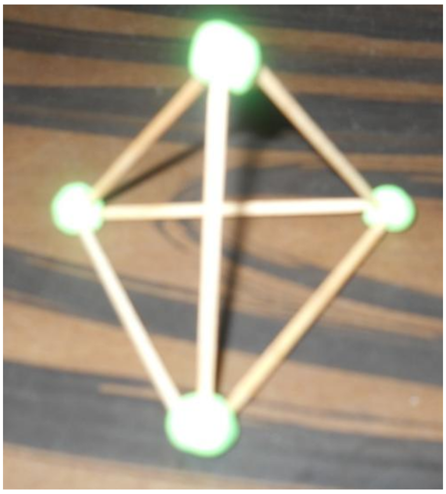
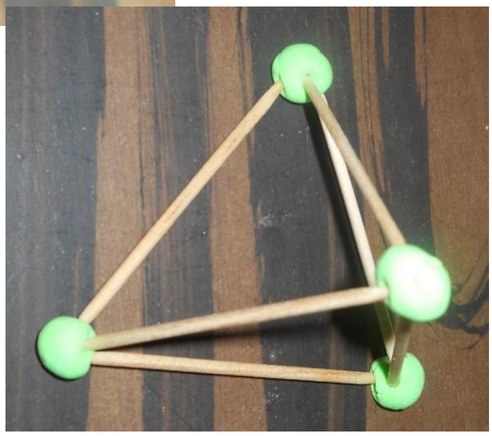




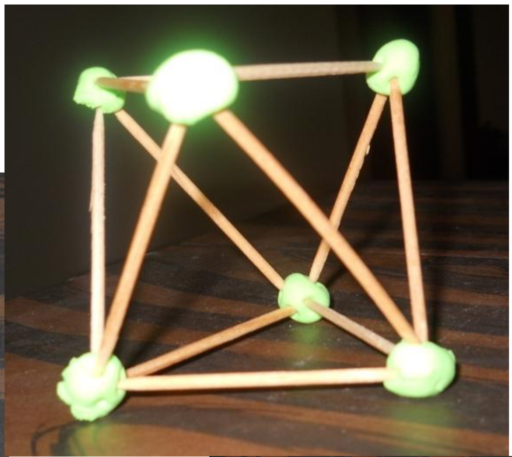
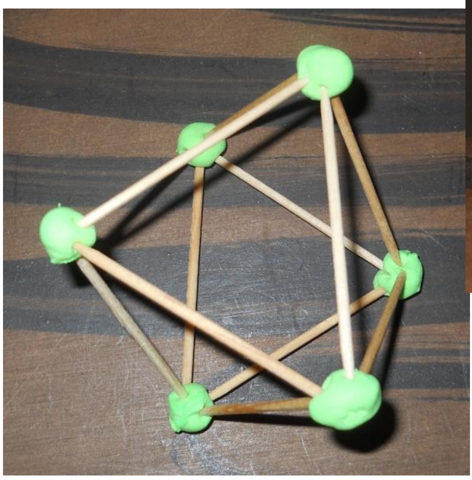
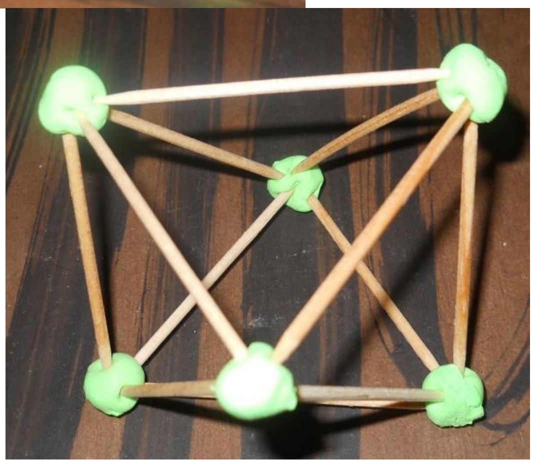




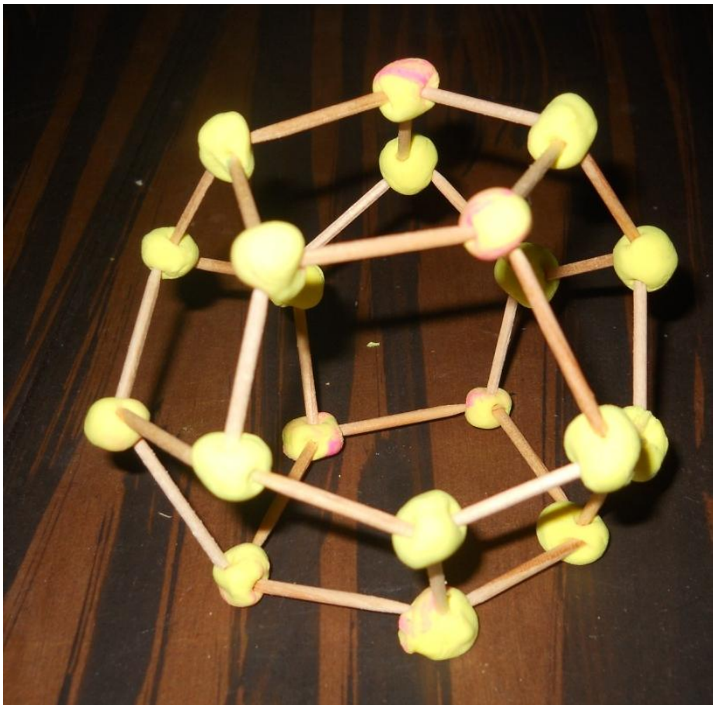
Tetraedro

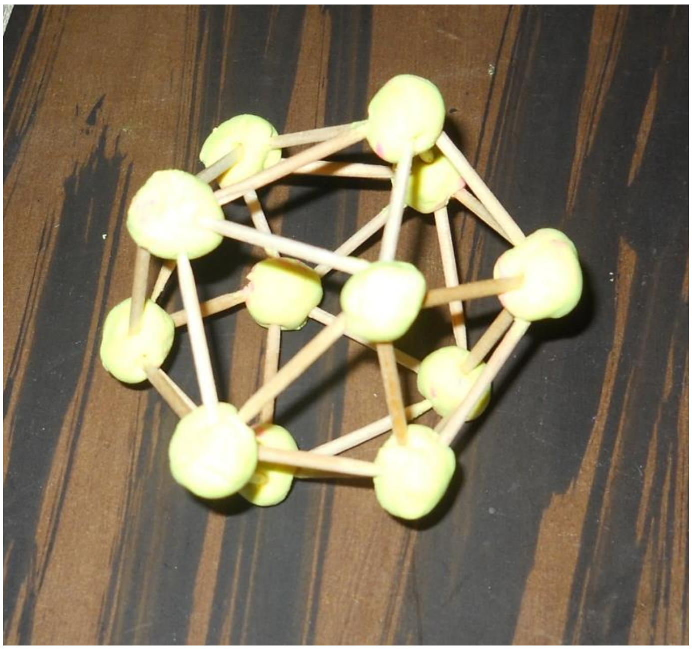
Octaedro

Dodecaedro



icosaedro



Conclusão

Conforme verificação da pesquisa foi possível fazer as três segmentos:

1. MATERIAL DIDÁTICO E SUA IMPORTÂNCIA

É possível descrever que matemática não é forte da maioria dos alunos, em especial a parte da geometria se torna um verdadeiro bicho de sete cabeças. Na grande maioria das vezes, pela forma com que o professor introduziu o conteúdo e o aluno tem dificuldade em imaginar uma figura espacial.

É preciso destacar a necessidade de ter uma aula bem preparada e com material didático bem elaborado para melhor fixação do conteúdo.

Destaco a minha própria experiência, que ao levar para sala de aula material figuras planificadas para que eles pudessem construir os seus poliedros, após colori-los para personalizá-los.

Formei grupos de 5 alunos, cada grupo com dez figuras diferentes de modo que cada aluno observasse os dois poliedros que estavam na sua mão e comparasse com os poliedros dos seus colegas do grupo.

Percebi maior interesse dos alunos e conseguiram memorizar melhor os nomes e elementos, uma vez que visualizaram, construíram e puderam manusear cada poliedro com as suas características.

2. LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA.

Atualmente é visível a necessidade de se ensinar matemática através de uma maneira mais lúdica, pois desta forma consegue-se uma atenção maior e melhor memorização do conteúdo.

É viável que cada escola pesquise e programe um laboratório de matemática onde ele possa não só fazer as pesquisas que necessita para fazer suas atividades, como torne este ambiente prazeroso para atividades lúdicas do conteúdo que está sendo fixado.

Com isto pode-se entender ver o laboratório de matemática como um espaço com diversos recursos pedagógicos, equipado com materiais didáticos que estimulam e facilitam a compreensão do conteúdo. Montado em um ambiente amplo, e com mesas especiais dispostas de forma que incentivem a cooperação e a integração, o aluno tem a possibilidade de trabalhar de maneira concreta o conteúdo que aprende em sala de aula, sendo apresentado a situações-problemas e a novos desafios.

Entre os recursos podem ser disponibilizado:

- Ábacos
- Tangrans
- Dobraduras
- Jogos matemáticos
- Geoplanos
- Esquadros e réguas
- Compassos
- Blocos lógicos
- Fitas métricas
- Quadro de pinos
- Balança
- Quebra-cabeças,
- Mini-biblioteca
- Figuras espaciais, dentre outros.

3. CONCLUSÃO

Ensinar matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas.

Segundo Vygotsky é através do brinquedo a criança proporciona o desenvolvimento da linguagem, do pensamento, da concentração e da atenção.

Com este intuito de ajudar na fixação do conteúdo, foi fazer com que o aluno possa manusear e visualizar os polígonos e poliedros.

A necessidade de iniciar com polígonos, foi ao perceber que os alunos também não tinham prévio conhecimento ou não lembravam deles.

De uma forma descontraída os alunos puderam conhecê-los, através do tangran e de construção de polígonos com os palitos de picolé.

Após este domínio pode-se construir sólidos através de figuras planificadas. E com isto tem-se o efeito de colorir e construir para ver no que vai dar... De forma a fazer o aluno pesquisar o nome dos polígonos das faces e da figura espacial formada, e qual a diferença entre as figuras planas e espaciais.

A partir deste conhecimento, começamos a trabalhar com os poliedros e suas características com a massa pula-pula e palitos, ficou muito mais divertido...

Sendo assim o meu objetivo é fazer com que o aluno passasse a conhecer e dominar a Geometria de forma lúdica. Brincando com a geometria para melhor memorização e aprendizado.

Lembrando que deve-se utilizá-los, não como instrumentos recreativos na aprendizagem, mas como facilitadores, colaborando para trabalhar os bloqueios que os alunos apresentam em relação a alguns conteúdos matemáticos.

BIBLIOGRAFIA

LIVROS:

SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Rosana Moreno. VONTADE DE SABER MATEMÁTICA – 6º e 7º ANO. São Paulo: FTD, 2009.

BUCCHI, Paulo. MATEMÁTICA – VOLUME ÚNICO. São Paulo: Moderna, 1994.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Morgado. A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO. Volume 2. Coleção Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1998

JUNIOR, Oscar Gonçalves. MATEMÁTICA POR ASSUNTO – VOLUME 06. São Paulo: Scipione, 1989.

MACHADO, Antonio dos Santos. MATEMÁTICA – TEMAS E METAS. Volume 04. São Paulo: ATUAL, 1993.

IMAGENS:

Euclides: http://www.somatematica.com.br/biograf/euclides.php Acesso: 03/03/2011

Euler: http://www.therichest.org/most-influential/greatest-mathematicians/ acesso: 15/03/2011

Tangran: http://www.brasilescola.com/upload/e/tangram1.jpg acesso: 17/08/2011

Planificação do Cubo: http://www.somatematica.com.br/emedio/espacial/Image73.gif acesso: 17/08/2011

Platão: http://ordemjuvenil.amorc.org.br/imagens/conheca/platao.jpg acesso: 17/08/2011

Planificações:

http://4.bp.blogspot.com/_jY-qUMgZkPE/TA0n71FNZ2I/AAAAAAAAAEw/hq1ejtwA2Zo/s1600/PIRAMIDE3.JPG

http://lh3.ggpht.com/_c8-jKIoktjg/SY25oamw50I/AAAAAAAAAS4/pB8I5j6oCJc/Pir%C3%A1mide%20Truncada.png

Prisma triangular: http://mmpchile.c5.cl/pag/productos/geo/imagenes/prismatrian.gif

Cilindro: http://4.bp.blogspot.com/_jY-qUMgZkPE/TA0nk7SdYgI/AAAAAAAAAEQ/r3otdfTZWf8/s1600/PRISMA+3.JPG

Prisma Hexagonal: http://4.bp.blogspot.com/_yRuRvYqNxWc/TBC5UhyTwCI/AAAAAAAAAD0/o7qxsuS9sAI/s1600/Pantallazo-1.png

Pirâmide octogonal: http://4.bp.blogspot.com/_jY-qUMgZkPE/TA0n71FNZ2I/AAAAAAAAAEw/hq1ejtwA2Zo/s1600/PIRAMIDE3.JPG

Piramide triangular: http://lh3.ggpht.com/_c8-jKIoktjg/SY25lWJ88gI/AAAAAAAAASQ/hNGZztnZ2No/Pir%C3%A1mide%20Triangular.png

Paralelepípedo: http://mmpchile.c5.cl/pag/productos/geo/imagenes/prisrectangular.gif

Cubo: http://www.sectormatematica.cl/gifs/redes/cubo.gif

http://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_elementar/Geometria_plana/Pol%C3%ADgonos acesso: 05/03/2011

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_iicap3.pdf acesso: 05/03/2011

http://educacao.uol.com.br/matematica/poliedro.jhtm acesso: 11/03/2011

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm205/historia.htm acesso: 03/07/2011

http://pt.wikipedia.org/wiki/Poliedro acesso: 05/07/2011

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm21/solidos_platonicos.htm

http://clavedepi.blogspot.com/2010/04/os-poliedros-de-platao.html

ANEXO I - CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS FEITO PELOS ALUNOS DA E. E. JOSÉ MAURO DE VASCONCELLOS