

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICEX
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

**“COMPARAÇÃO DO PODER ENTRE ESTATÍSTICAS DE TESTE
PARA MONITORAMENTO DA VARIABILIDADE DE UM
PROCESSO BI-VARIADO VIA SIMULAÇÃO DE MONTE
CARLO”**

Rafael Gonçalves Monteiro

Belo Horizonte

2011

RAFAEL GONÇALVES MONTEIRO

**“COMPARAÇÃO DO PODER ENTRE ESTATÍSTICAS DE TESTE
PARA MONITORAMENTO DA VARIABILIDADE DE UM
PROCESSO BI-VARIADO VIA SIMULAÇÃO DE MONTE
CARLO”**

Trabalho de pós-graduação apresentado ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais para obtenção do título de Especialista em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Roberto da Costa Quinino

Belo Horizonte

2011

RESUMO

A qualidade sempre foi parte inerente de praticamente todos os produtos e serviços, entretanto a conscientização de sua importância e a introdução de métodos formais para o controle e melhoria da qualidade têm tido um desenvolvimento positivamente evolutivo (Montgomery, 2004).

Em 2011 o governo brasileiro divulgou o plano de crescimento econômico Brasil Maior com o lema “Inovar para competir. Competir para crescer.”. O plano é sustentado no pilar inovação, no entanto, apresenta um escopo mais abrangente no qual é possibilitar um país mais competitivo no acirrado e global mercado consumidor. Neste ponto, destaca-se a produtividade, ou seja, minimizar cientificamente o uso de recursos (materiais, mão-de-obra, máquinas e outros) para reduzir o custo de produção, porém, atendendo aos requisitos esperados ou solicitados pelo cliente, i.e. sempre buscar a melhoria contínua. Note que a qualidade está intrinsecamente ligada a este conceito.

Assim sendo, responder a questão “o que é qualidade?” não é simples, mas, com a certeza de que sua melhor compreensão pelas empresas nacionais será um fator-chave para conduzir ao sucesso, crescimento e a uma melhor posição de competitividade de um negócio, fatores estes alinhados com o objetivo do plano Brasil Maior.

Foi a partir da década de 30 que o fenômeno controle da qualidade passou a se tornar mais relevante no cenário global, principalmente, no pós 2ª Guerra Mundial. A partir daí surgiram várias ferramentas de controle da qualidade, nas quais se destacam o controle estatístico do processo (CEP), planejamento de experimentos (DoE) e plano de amostragem. O foco deste estudo será o CEP.

Este trabalho, portanto, objetiva, através da simulação de Monte Carlo (MCS), comparar quatro estatísticas de teste para o monitoramento da variância em cartas de controle de um processo bi-variado que são VMAX, VMIX, VMD e VSR, sendo as duas primeiras recentemente publicadas e as duas últimas, VMD e VSR, como uma nova proposta para o cálculo do monitoramento da variabilidade de um processo bi-variado positivamente correlacionado.

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

Figura 1: Sete ferramentas do CEP.....	5
Figura 2: Esboço das principais variáveis de entrada e o produto de saída de um processo.	8
Figura 3: Similaridade entre carta de controle e teste de hipóteses.	9
Figura 4: Três processos distintos com o mesmo CP_K	10
Figura 5: Gráfico de controle para os diâmetros de mancais.	11
Figura 6: Regiões de controle usando os limites de controle independentes.	12
Figura 7: Distribuição normal padronizada bi-variada $ \rho = \frac{1}{2}$	12
Figura 8: Gráfico de controle para estatística VSR com ARL_1 igual a, aproximadamente, 5.....	16
Figura 9: Gráfico de controle para estatística VMD com ARL_1 igual a, aproximadamente, 5.....	17
Figura 10: Distribuição geométrica para $p = 0,5$	18
Figura 11: Histograma da distribuição VSR operando sob controle (SSC) e operando fora de controle (SFC) quando $k_x = k_y = 2$ para um p igual a 0,5.	27
Figura 12: Histograma da distribuição VMD operando sob controle (SSC) e operando fora de controle (SFC) quando $k_x = k_y = 2$ para um p igual a 0,5.	28
Figura 13: Histograma da distribuição VMAX operando sob controle (SSC) e operando fora de controle (SFC) quando $k_x = k_y = 2$ para um p igual a 0,5.	29
Figura 14: Histograma da distribuição VMIX operando sob controle (SSC) e operando fora de controle (SFC) quando $k_x = k_y = 2$ para um p igual a 0,5.	29
<hr/>	
Tabela 1: Desempenho comparativo entre as estatísticas de teste.....	20
Tabela 2: Limites de Controle (LC) em função da estatística de teste e da correlação..	21
Tabela 3: Valores de ARL_1 em função da estatística de teste para $\rho = 0$	22
Tabela 4: Valores de ARL_1 em função da estatística de teste para $\rho = 0,1$	22
Tabela 5: Valores de ARL_1 em função da estatística de teste para $\rho = 0,3$	23
Tabela 6: Valores de ARL_1 em função da estatística de teste para $\rho = 0,5$	23
Tabela 7: Valores de ARL_1 em função da estatística de teste para $\rho = 0,7$	24
Tabela 8: Desempenho geral das estatísticas de teste.....	24
Tabela 9: Desempenho geral das estatísticas de teste agrupadas em função da correlação.....	25
Tabela 10: Desempenho geral das estatísticas de teste agrupadas em função dos <i>shifts</i> .26	26
Tabela 11: Desempenho geral das estatísticas de teste em comparações par-a-par.	26
Tabela 12: Desempenho geral das estatísticas de teste independentemente padronizadas em comparações par-a-par.....	30

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	4
2. OBJETIVOS.....	7
3. REVISÃO DA LITERATURA.....	7
3.1. Controle estatístico do processo.....	7
3.2. Simulação de Monte Carlo.....	14
4. O GRÁFICO DE CONTROLE VSR E VMD.....	14
5. ESTATÍSTICAS DE MONITORAMENTO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA ...	18
6. VSR E VMD E SEUS COMPETIDORES.....	21
7. CONCLUSÕES E PESQUISA FUTURA.....	31
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	34
ANEXO A.....	36

1. INTRODUÇÃO

Pode-se dizer que o controle estatístico da qualidade moderno, ou pelo menos formal, iniciou-se em 1924 com os estudos de Walter Shewhart dos Laboratórios Bell, entretanto, foi nas décadas de 50 e 60 que se testemunhou o surgimento da engenharia da confiabilidade e o ponto de vista de que a qualidade é um caminho para gerenciar as organizações (Montgomery, 2004). No Brasil esse fenômeno se iniciou na década de 70, principalmente, com as empresas fornecedoras do programa nuclear.

Logo que a qualidade se difundiu com uma maior intensidade, rapidamente empresários perceberam o elo que havia entre produtividade e qualidade. Garvin (1987) fornece oito dimensões ou abrangências da qualidade, que são:

1. Desempenho

O produto realizará a tarefa pretendida?

2. Confiabilidade

Qual a frequência de falhas do produto?

3. Durabilidade

Quanto tempo o produto durará?

4. Assistência técnica

Qual a facilidade para se consertar o produto?

5. Estética

Qual a aparência do produto?

6. Características

O que o produto faz?

7. Qualidade Percebida

Qual a reputação da companhia ou de seu produto?

8. Conformidade com Especificações

O produto é feito como o projetista pretendia?

Responder essas perguntas ou atendê-las em um determinado negócio é ponto-chave para o sucesso. Em consequência do recente plano econômico do governo, as indústrias brasileiras, muito provavelmente, passarão a adotar cada vez mais o controle da qualidade adotando, principalmente, o controle estatístico do processo (CEP).

O CEP é uma poderosa coleção de ferramentas de resolução de problemas útil na obtenção da estabilidade do processo e na melhoria da capacidade através da redução da variabilidade. Suas setes principais ferramentas estão resumidas na Figura 1.

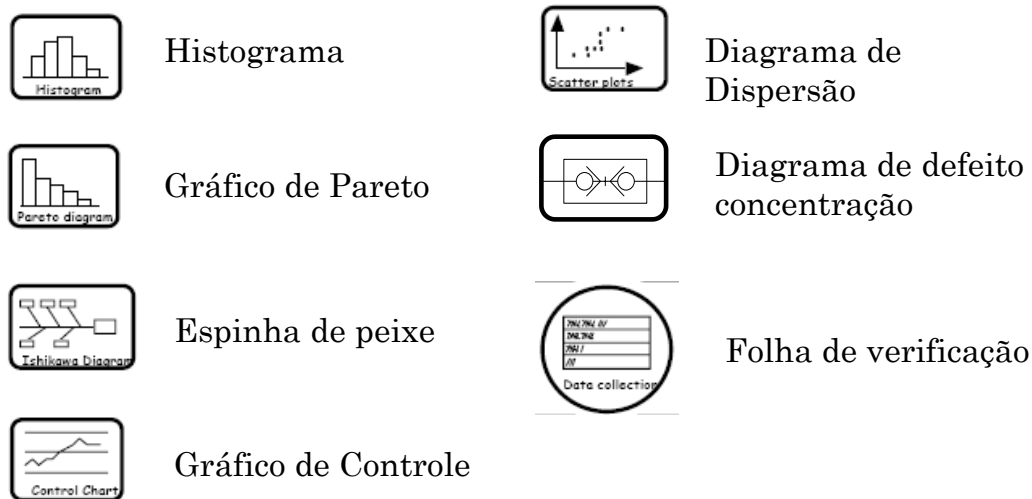


Figura 1: Sete ferramentas do CEP.

É relevante ressaltar que, embora estas ferramentas sejam parte importante do CEP, elas tratam apenas dos aspectos técnicos, sendo, portanto, necessário complementar com procedimentos gerências, tais como ISO 9000, ISO/IEC 17025 e ISO/TS 16949, norma que alinha os sistemas de qualidade automotivo existentes, ou outros procedimentos internos de cada organização.

Das ferramentas do CEP, o gráfico de controle de Shewhart ou simplesmente carta de controle é, provavelmente, a mais utilizada. A operação dos gráficos de controle consiste na coleta periódica de itens produzidos, analisando-os de acordo com alguma característica de interesse.

Os valores observados em cada amostra são registrados graficamente em função do instante da amostragem, dessa forma, uma quantidade de variabilidade inerente ao processo de produção sempre estará presente como o efeito acumulado de pequenas causas ou ruídos, e diz-se que um processo está sob controle quando apresenta apenas essa variabilidade natural (Bessegato, 2009).

Como variabilidades não naturais (erros sistemáticos) implicam em um processo fora de controle ou em última análise baixa produtividade, cartas e técnicas estatísticas para seu

monitoramento se fazem necessárias. Existem diversos métodos de controle tanto para média como da variabilidade, principalmente para variáveis independentes. Entretanto, com o advento das modernas linhas de produção e os recursos computacionais, não raro, as indústrias passam a controlar mais de um parâmetro por vez em um único elemento amostral, como por exemplo, as três dimensões de um bloco, ou ainda a rugosidade e a dureza de um componente, ou ainda a resistência elétrica e a queda de tensão em um circuito elétrico. Note que, muito provavelmente, os parâmetros de controle se correlacionarão entre si, como ocorre sabidamente em um circuito elétrico entre corrente e tensão, conforme lei de Ohm.

Para os processos de controle em que mais de um parâmetro é monitorado simultaneamente, dá-se o nome de controle de processo multivariado. Técnicas estatísticas recentes têm sido estudadas por diversos pesquisadores para melhor detectar mudança na variabilidade de um processo multivariado, situação fora de controle, de forma mais rápida, ou seja, um teste com melhor poder e sensibilidade quando um parâmetro sai de controle.

A fim de avaliar algumas estatísticas de teste, fizeram-se simulações de Monte Carlo tomando como exemplo a produção de sólidos catalíticos granulados utilizados em reatores de leito fluidizado em uma planta química. Para o modelamento da cinética de reação e transferência de massa, o diâmetro médio e a esfericidade das partículas são itens de controle para otimizar a reação química. Assim sendo, este trabalho compara as estatísticas de controle considerando um processo com uma amostragem de tamanho 10. A média populacional histórica e desvio-padrão do diâmetro da característica X é igual a 150,0 e 5,3, respectivamente, enquanto que média populacional histórica e desvio-padrão da esfericidade da característica Y é igual a 1,10 e 0,04, respectivamente.

A avaliação das medidas se baseou no poder do teste, ou seja, quanto maior o poder ou equivalentemente menor o erro tipo II (β) melhor é o teste para detectar rapidamente mudanças na variabilidade do processo. O parâmetro de análise é o comprimento médio da rodada ou $ARL_1 = 1/(1-\beta)$.

2. OBJETIVOS

Este estudo propõe duas novas estatísticas de teste, doravante denominadas VSR e VMD, para o monitoramento da matriz de covariância de um processo bi-variado normalmente distribuído. O objetivo principal é construir uma medida de variabilidade a partir de n observações de duas características de qualidade. O gráfico de controle VSR ou VMD apresenta aplicações práticas devido a sua similaridade às cartas de controle S^2 , além dos bons resultados apresentados.

No capítulo 3 é apresentado um breve resumo de conceitos do controle estatístico do processo (CEP), além de uma introdução à simulação de Monte Carlo.

O Capítulo 4 apresenta a carta de controle VSR e VMD e os critérios utilizados para avaliar suas performances, bem como um exemplo numérico (e prático) de sua aplicação.

O capítulo 5 apresenta seus principais competidores, ou seja, as estatísticas já em uso e consolidadas.

O Capítulo 6 apresenta os resultados de comparação entre a estatística de teste proposta e as estatísticas da literatura.

Por fim, o capítulo 7 apresenta as conclusões do trabalho e indica algumas sugestões para a continuidade desta pesquisa.

3. REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo apresenta breves conceitos do controle estatístico do processo e simulação de Monte Carlo.

3.1. Controle estatístico do processo

Qualquer processo produtivo está sujeito a variabilidades inerentes da operação, matéria prima, operador, etc., não importa quão bem controlado ou planejado é o processo. As variabilidades naturais, ou ruídos, é a soma das mais diversas pequenas causas inevitáveis na produção. Caso o processo esteja sujeito a somente causas naturais, diz-se que está sob controle estatístico. Quando o processo passa a operar por causas não

controláveis ou ruídos, ou seja, erros sistemáticos, o processo passa a operar fora do controle, a Figura 2 ilustra um fluxograma comum de qualquer processo.

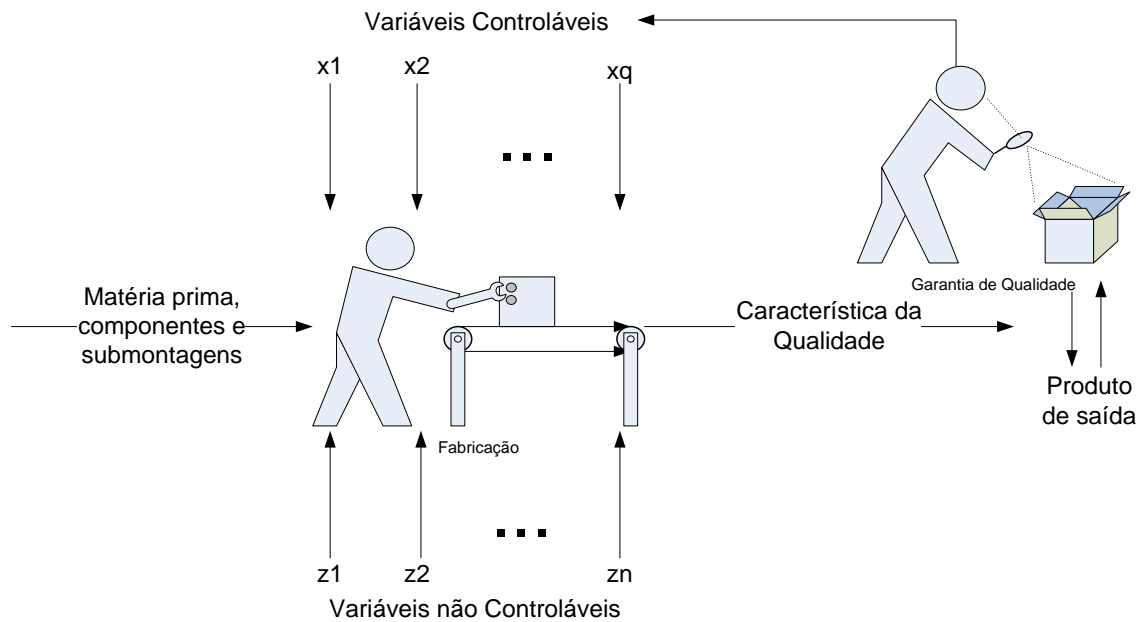


Figura 2: Esboço das principais variáveis de entrada e o produto de saída de um processo.

Note que os ruídos podem, em geral, sofrer intervenção e serem ajustados, enquanto que as causas naturais, que são aleatórias, não devem sofrer intervenção, como didaticamente demonstrado no famigerado experimento conhecido como funil de Deming.

Um típico gráfico de controle é uma representação gráfica de um parâmetro de interesse, mensurado, ou calculado, a partir de uma amostra em função do tempo ou número da amostra. O parâmetro de qualidade de interesse pode ser uma característica mensurável (variável) ou não mensurável (atributo). A carta de controle contém uma linha central (LC) que representa o valor médio da característica e outras duas linhas que delimitam o espaço de controle conhecidas como limite inferior (LIC) e limite superior (LSC), escolhem-se os limites de modo tal que durante uma operação todos os pontos amostrais estejam entre os limites.

Na prática, o gráfico de controle pode ser entendido como um teste de hipótese, ou seja, enquanto os dados amostrados estiverem dentro dos limites de controle não há evidências para se rejeitar a hipótese nula de que o processo esteja sob controle. Um ponto localizado fora dos limites é a evidência estatística de que o processo esteja operando fora de controle, esse processo é ilustrado na Figura 3.

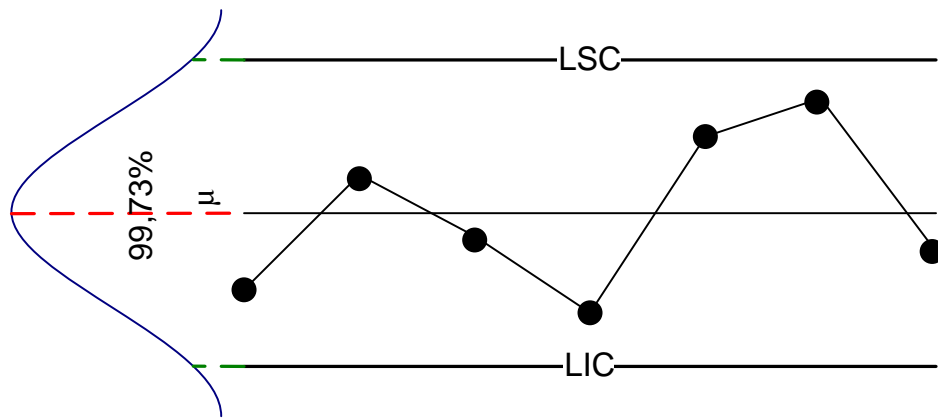


Figura 3: Similaridade entre carta de controle e teste de hipóteses.

Os gráficos de controle para variáveis mais usuais são o gráfico de controle para média amostral (\bar{X}) e para amplitude amostral (R) ou para o desvio padrão amostral (S). Nos casos em que as medidas são qualitativas, em geral conforme ou não-conforme, o gráfico de controle é denominado controle por atributos.

O planejamento e a seleção do tamanho da amostra são fatores importantes para o uso dos gráficos de controle. Deve-se considerar a probabilidade de concluir que o processo esteja fora do controle, quando de fato não está (Erro Tipo I), bem como a probabilidade de julgar o processo sob controle quando na verdade está fora de controle (Erro tipo II), além da sensibilidade de o gráfico detectar mudanças quando processo estiver saindo do controle.

Quando se diz que o processo está sob controle, é relevante definir como a variabilidade inerente a um processo se compara com as especificações ou exigências para o produto, a este conceito dá-se o nome de capacidade do processo, ou seja, o desempenho do processo quando estiver operando sob controle. Dos diversos indicadores de capacidade de processo, os mais usuais são o C_{pk} e o C_{pm} . O C_{pm} é um melhor indicador da capacidade média do processo, pois, mede o desempenho e a centralização de um processo, conforme se pode ver visualizar na Figura 4. O C_{pk} é definido conforme equação 1 e o C_{pm} conforme equação 2.

$$RCP_k = \min \left[\frac{LSE - \bar{\bar{x}}}{3\hat{\sigma}}, \frac{\bar{\bar{x}} - LIE}{3\hat{\sigma}} \right] \quad (Eq. 1)$$

$$\widehat{C}_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{s^2 + (\bar{\bar{x}} - T)^2}} \quad (Eq. 2)$$

em que,

LSE é o limite superior de engenharia

LIE é o limite inferior de engenharia

T é a especificação da variável

\bar{x} é a média amostral da variável

$\bar{\bar{x}}$ é a média de controle

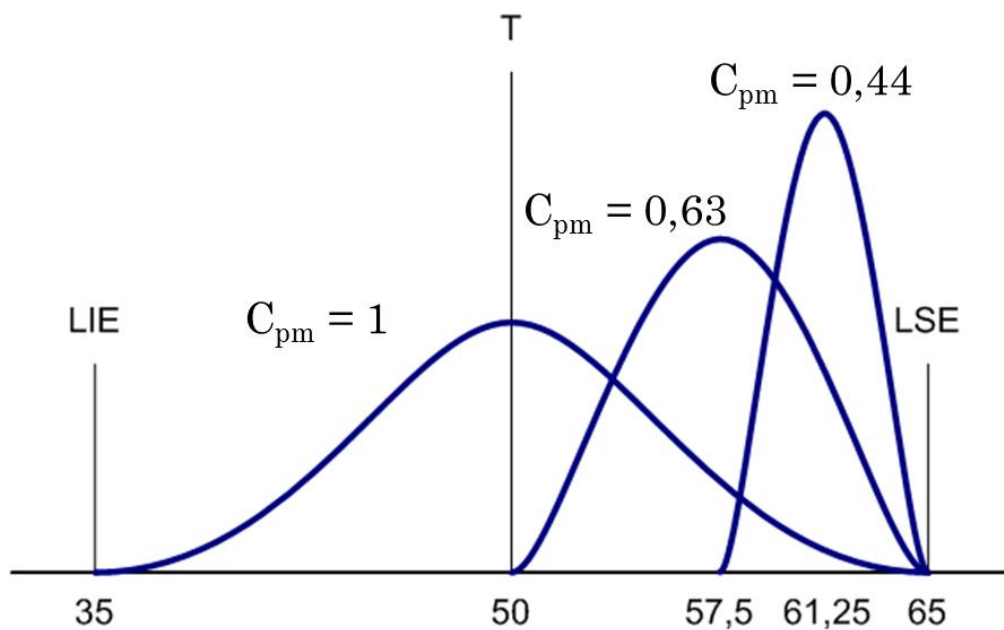


Figura 4: Três processos distintos com o mesmo CP_K .

Outras cartas de controle que detectam mudanças no processo de forma mais sensível e rápida são igualmente disseminadas, como o CUSUM (cumulative sum) ou o EWMA (exponentially weighted moving average), para maiores detalhes veja Montgomery (2004).

Note que o apresentado até o momento refere-se a processos uni-variados, entretanto, não raro, o monitoramento simultâneo ou controle de duas ou mais características de qualidade se faz necessário. Montgomery (2004) cita um exemplo comum na indústria em que em um processo produtivo de mancais, os diâmetros interno (x_1) e externo (x_2) determinam o aproveitamento de uma peça. Suponha que x_1 e x_2 tenham distribuições normais independentes. Como ambas as características são medidas, podem ser monitoradas pela aplicação do gráfico de controle \bar{x} , conforme Figura 5.

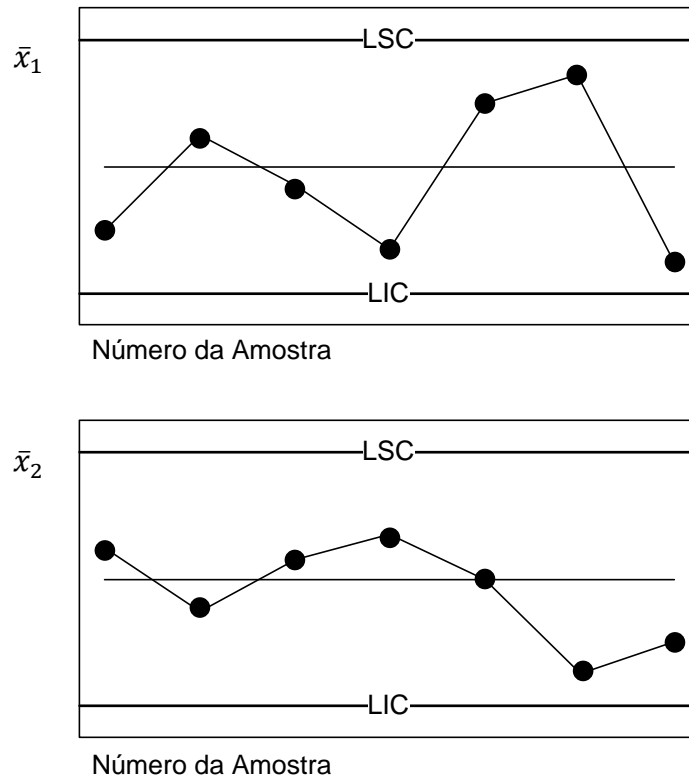


Figura 5: Gráfico de controle para os diâmetros de mancais.

Note que o processo, aparentemente, está sob controle, i.e. as características monitoradas localizam dentro dos limites de controle. Porém, monitorar essas características independentemente pode ser enganoso. Por exemplo, note, pela Figura 6, que uma observação parece destoar das demais e pode ser um indício que algo esteja errado. Este ponto estaria dentro dos limites de controle dos gráficos uni-variados, contudo, quando se examinam as variáveis simultaneamente, o comportamento incomum do ponto se torna óbvio.

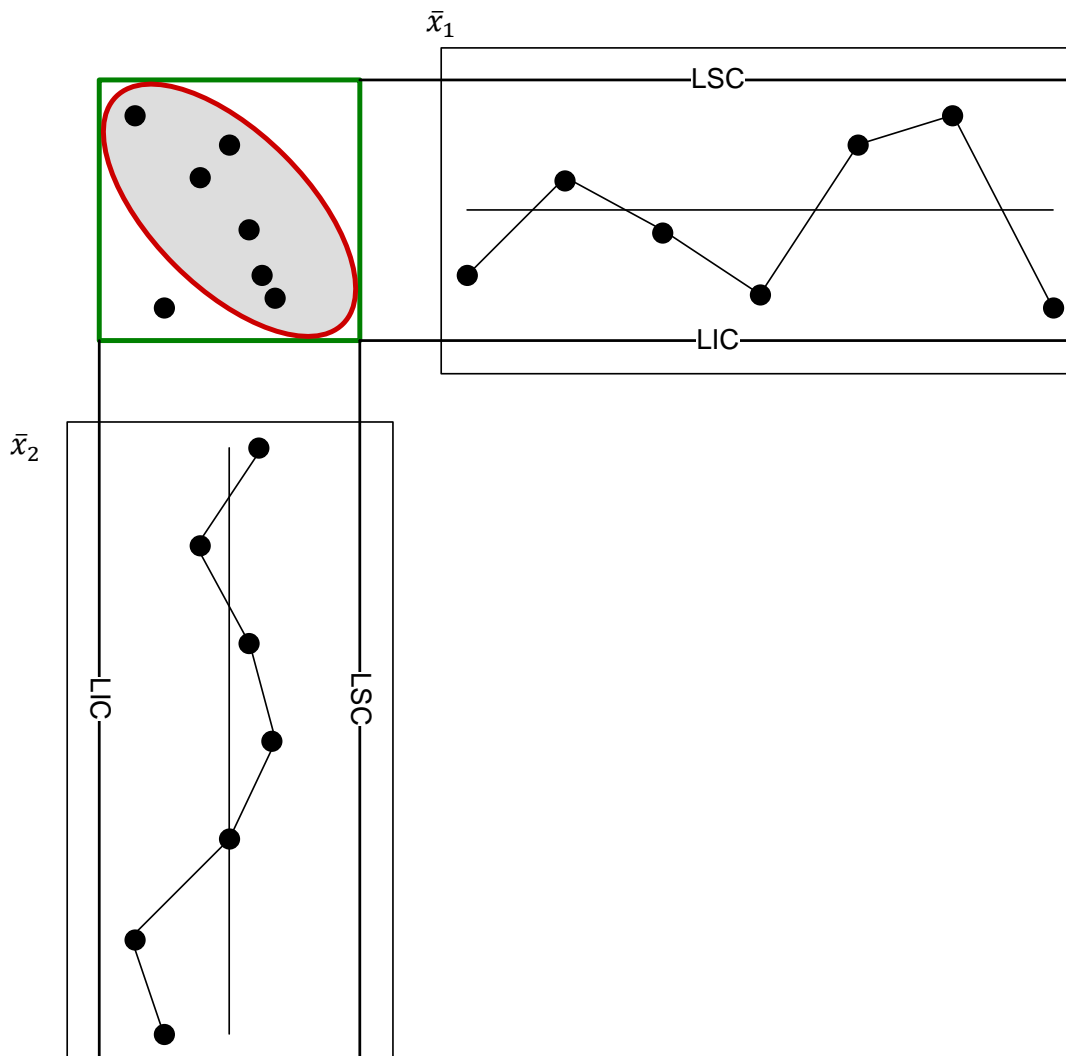


Figura 6: Regiões de controle usando os limites de controle independentes.

O procedimento mais familiar para o monitoramento e controle de um processo multivariado é o gráfico de controle T^2 de Hotelling para o monitoramento das médias (Montgomery, 2004).

Para uma distribuição normal padronizada bi-variada com um coeficiente de correlação igual a $1/2$, a distribuição é conforme exibido na Figura 7.

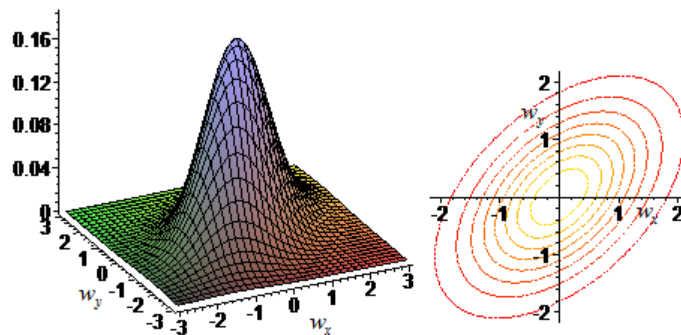


Figura 7: Distribuição normal padronizada bi-variada | $\rho = 1/2$.

As curvas de nível da distribuição são as elipses de probabilidade.

O gráfico de controle T^2 de Hotelling apresenta dois inconvenientes principais. O primeiro diz respeito à ordem da amostragem, pois, quando se junta dois gráficos de controle uni-variados a sequência em que as amostras foram retiradas para controle se perde, entretanto, essa perda poderia ser resolvida numerando-se os pontos no gráfico por ordem cronológica, ficando inviável com o aumento da amostragem. O segundo inconveniente é que para processos multi-variados com mais de 2 características de controle, torna-se impraticável a construção de cartas de controle.

Esses problemas podem ser resolvidos sabendo que a estatística de teste da equação 3 apresenta uma distribuição qui-quadrado. A partir de um LSC para essa distribuição qui-quadrado pode-se construir cartas de controle similares aos gráficos de controle de Shewhart, lembrando que o LIC é igual à zero.

$$\chi_0^2 = n(\bar{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu) \quad (\text{Eq. 3})$$

Dessa forma, a sequência temporal dos pontos plotados não serão perdidas e para qualquer dimensão dos processos multivariados a visualização das cartas de controle será bidimensional.

Assim como no caso uni-variado, é igualmente importante monitorar a variabilidade do processo no controle de processo multivariado. A variabilidade é resumida pela matriz de covariância $p \times p$, Σ . Os elementos da diagonal principal referem-se às variâncias das variáveis a serem medidas e os elementos fora da diagonal principal representam as covariâncias entre os pares das variáveis de controle, sendo Σ , portanto, uma matriz simétrica.

Costa e Machado (2009) propuseram um gráfico de controle para detecção de mudanças na matriz de covariâncias. O monitoramento estatístico, chamado de VMAX, é baseado nas variâncias amostrais padronizadas de p características de qualidade. Os pontos plotados nos gráficos de controle correspondem ao valor máximo das p variâncias. Outros métodos foram propostos, como amostragem por esquema duplo (Machado, Costa & Rhaim, 2009), cartas de controle EWMA (Machado & Costa, 2008), além dos métodos consolidados pelo determinante da matriz de covariância amostral $|S|$ e pela estatística W , obtida a partir do traço da matriz de covariância amostral (Montgomery, 2004). Maiores detalhes serão discutidos no capítulo 5.

3.2. Simulação de Monte Carlo

A palavra simulação refere-se a qualquer método analítico cuja intenção é imitar algum sistema real, principalmente quando outras análises são matematicamente complexas.

Dessa forma, o objetivo da simulação é descrever a distribuição e características dos possíveis valores de uma variável dependente, depois de determinados os possíveis valores e comportamentos das variáveis independentes a ela relacionadas.

Não é raro no mundo real se ter cálculos específicos possíveis na teoria, porém, de extrema dificuldade prática, geralmente, limitados na velocidade de computação e no tamanho de memória disponível dos computadores. A simulação pode prover meios para solucionar tais problemas. Métodos de análise de risco de empreendimentos/investimentos são exemplos clássicos no uso de simulações.

O grande perigo da simulação remanesce em dois empecilhos. O primeiro é que qualquer computação é limitada nos geradores dos famigerados números pseudoaleatórios. Estes números são gerados em complexos algoritmos numéricos, que apesar de determinísticos, são aparentemente imprevisíveis, exceto pela repetição exata dos cálculos executados pelo algoritmo. Segundo, para uma determinada circunstância é difícil se ter ideia de quantas repetições são necessárias para estimar os dados com uma exatidão dentro de um limite desejado (Grimmett e Stirzaker, 2001). Neste estudo utilizou-se 500.000 repetições para cada cálculo executado.

As técnicas de simulação foram nomeadas como Monte Carlo, por Metropolis, von Neumann e Ulam, na década de 40 enquanto estavam trabalhando no projeto Manhattan em Los Alamos. Entretanto, 60 anos antes, Lord Kelvin introduziu modernas técnicas de Monte Carlo nas discussões da equação de Boltzmann. Infelizmente, Kelvin estava mais interessado nos resultados da técnica do que nela própria (Hammersley e Handscomb, 1964).

4. O GRÁFICO DE CONTROLE VSR E VMD

A fim de controlar qualquer mudança na matriz de covariâncias de processos bivariados, amostras de tamanho n de X_i e Y_i , $i=1, 2, \dots, n$, são retiradas periodicamente de uma linha de produção. Assume-se que X e Y , as duas características de controle,

seguem uma distribuição normal bi-variada com médias μ_X e μ_Y e variâncias σ_X^2 e σ_Y^2 conhecidas. A matriz de covariâncias é dada por $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$, em que $\sigma_{XY} = \rho\sigma_X\sigma_Y$ é a covariância entre X e Y e ρ a correlação.

Considerando que todos os parâmetros (médias, desvios-padrão e correlação) sob controle são conhecidos no processo, as novas variáveis de controle podem ser definidas como:

$$X_i^* = \frac{(X_i - \mu_X)}{\sigma_X} \text{ e } Y_i^* = \frac{(Y_i - \mu_Y)}{\sigma_Y} \quad (\text{Eq. 3})$$

Dessa forma, torna-se mais intuitivo analisar X^* e Y^* .

Quando alguma ocorrência se dá no processo, pelo menos uma das variâncias σ_X^2 ou σ_Y^2 aumenta sem alterar o vetor das médias $\boldsymbol{\mu} = (\mu_X, \mu_Y)$. Operando sob controle, tem-se que $\sigma_{X^*}^2 = \sigma_{Y^*}^2 = 1$.

A estatística VSR é dada como se segue:

$$VSR = \left(1 - \frac{\rho_A}{10}\right) \cdot \left(\left| \left(\sum_{i=1}^n X_i^{*2} \right) / n - 1 \right|^3 + \left| \left(\sum_{i=1}^n Y_i^{*2} \right) / n - 1 \right|^3 \right) \quad (\text{Eq. 4})$$

em que

ρ_A é a correlação amostral

Enquanto que a estatística VMD é dada por

$$VMD = \left(1 - \frac{\rho_A}{10}\right) \cdot \left[\frac{\left(\frac{1}{V_X} + \frac{1}{V_Y} \right) (V_X + V_Y)^2}{4 + \left(\frac{1}{V_X} + \frac{1}{V_Y} \right) (V_X + V_Y)} \right] \quad (\text{Eq. 5})$$

em que

ρ_A é a correlação amostral

$$V_X = \left(\sum_{i=1}^n X_i^{*2} \right) / n$$

$$V_Y = \left(\sum_{i=1}^n Y_i^{*2} \right) / n$$

A fim de se avaliar o desempenho do VSR e VMD, é necessário determinar o limite de controle que satisfaça a equação 6 quando o processo opera sob controle e posteriormente determinar o ARL_1 .

$$P(VSR \text{ ou } VMD \leq LC) = 1 - \alpha \quad (Eq. 6)$$

Define-se o ARL_1 como o comprimento médio da sequência do processo fora de controle, ou em outras palavras, é o número médio de amostras (peças, componentes, lotes, etc.) que devem ser marcadas como sob controle antes que uma amostra seja de fato marcada como uma condição fora de controle.

Como exemplo, a Figura 8 e a Figura 9 demonstram qual o comprimento médio L que é necessário para a carta de controle detectar que o processo esteja realmente fora de controle, quando as estatísticas de teste são VSR e VMD. Em ambos os casos tem-se uma distribuição normal bi-variada e com coeficiente de correlação igual a 0,5. O processo sob controle apresenta $\sigma_X^2 = 5,3$ e $\sigma_Y^2 = 0,040$ e, neste exemplo, quando passa a operar fora de controle tem-se que $\sigma_X^2 = 5,3$ e $\sigma_Y^2 = 0,057$.

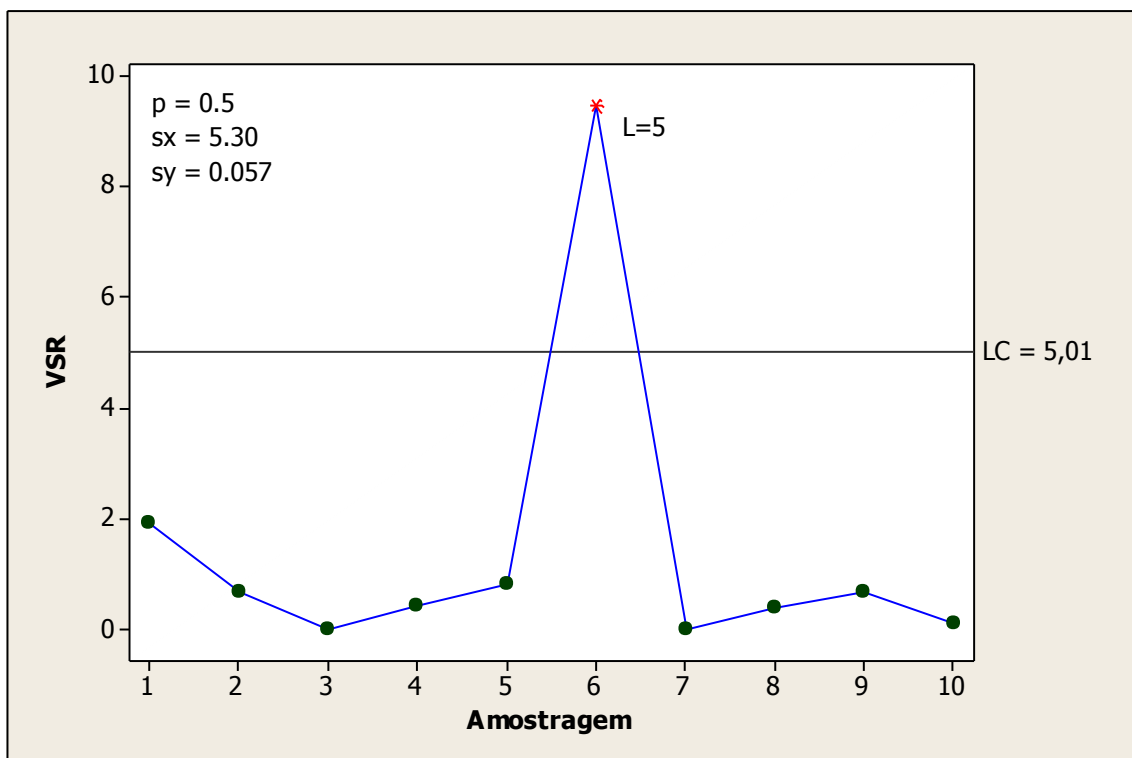


Figura 8: Gráfico de controle para estatística VSR com ARL_1 igual a, aproximadamente, 5.

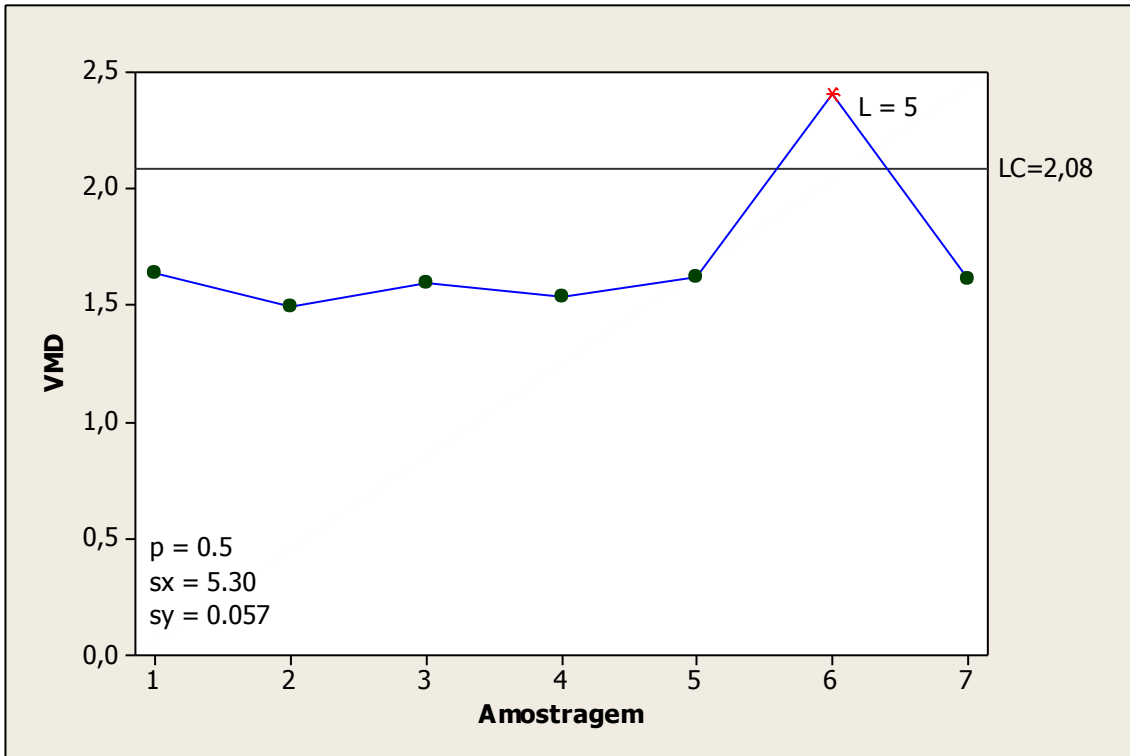


Figura 9: Gráfico de controle para estatística VMD com ARL_1 igual a, aproximadamente, 5.

Ocasionalmente, é conveniente expressar o desempenho das estatísticas de teste em função do tempo médio para alerta (TMA), ou seja, se as amostras são tomadas a intervalos regulares de tempo (t), pode-se definir $TMA = ARL_1 \cdot t$.

Uma crítica ao comprimento médio da sequência para descrever o desempenho das estatísticas de teste reside no fato de que o ARL apresenta distribuição geométrica e, por isso, o desvio-padrão do comprimento de sequências é muito grande além de, por ser assimétrica, a média da distribuição ($1/\text{Poder}$) não é necessariamente um valor típico para o ARL_1 (Montgomery, 2004). No exemplo supracitado temos que a média do $ARL_1 = 5$ e o desvio-padrão igual a $\sqrt{1 - 1/ARL_1} / (1/ARL_1) \cong 4,5$, ou seja, temos para este exemplo um coeficiente de variação (CV) igual a 90%.

A Figura 10 apresenta uma distribuição geométrica com probabilidade igual a 0,5. Note a forte assimetria desta distribuição, o que consequentemente leva a altos valores de CV.

Apesar dessas ressalvas, neste estudo se considera o ALR_1 como o indicador de desempenho entre as estatísticas para monitoramento da variabilidade apresentadas, pois, para efeitos comparativos este indicador é suficiente.

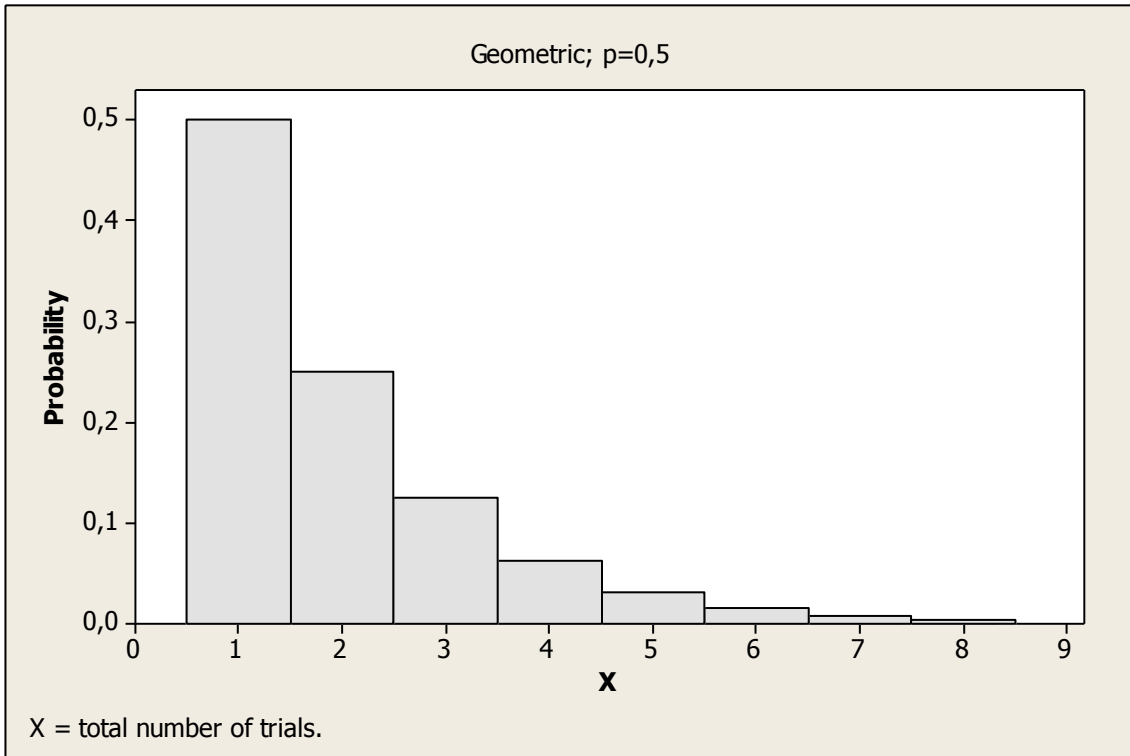


Figura 10: Distribuição geométrica para p = 0,5.

5. ESTATÍSTICAS DE MONITORAMENTO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA

As estatísticas de teste VMAX (Costa & Machado, 2008), VMIX (Quinino et al., 2011), teste da razão de verossimilhança (Alt, 1985) e o teste da variância amostral generalizada ou |S| (Montgomery, 2004) foram selecionadas dado seu uso tradicional em cartas de controle de processo bi-variado ou por apresentar bom desempenho conforme a literatura.

A estatística VMAX é definida como o máximo das variâncias amostrais das variáveis X e Y é expressa como:

$$VMAX = \max \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i^{*2}}{n}; \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^{*2}}{n} \right\} \quad (Eq. 7)$$

Como se usa a variável transformada, conforme (Eq. 3), a estatística VMAX é equivalente a monitorar dois gráficos de controle S^2 separadamente. O desempenho do teste, medido pelo ARL1, pode ser obtido baseando-se na distribuição χ_n^2 , com n graus de liberdade.

O teste VMIX é definido como a variância das características de qualidade X^* e Y^* em conjunto, ou seja:

$$VMIX = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^{*2} + \sum_{i=1}^n Y_i^{*2}}{2n} \quad (Eq. 8)$$

O teste da razão de verossimilhança é definido como:

$$W = -pn + pn \ln(n) - n \ln \left(\frac{|A|}{|\Sigma_0|} \right) + \text{tr}(\Sigma_0^{-1}A) \quad (Eq. 9)$$

em que

$A = (n - 1)S$, S é a matriz de covariância amostral,

tr é o operador traço da matriz

p é a dimensão do processo multivariado (neste estudo p será sempre igual a 2)

Σ_0 é a matriz de covariância quando o processo opera sob controle.

O teste da variância amostral generalizada é obtido pelo determinante da matriz de covariância amostra $|S|$, e os limites de controle dados por:

$$LSC = \frac{|S|}{b_1} \cdot (b_1 + 3b_2^{1/2})$$

$$LC = |S| \quad (Eq. 10)$$

$$LIC = \max \left\{ \frac{|S|}{b_1} \cdot (b_1 - 3b_2^{1/2}); 0 \right\}$$

onde

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{i=1}^p (n-i)$$

e

$$b_2 = \frac{1}{(n-1)^{2p}} \prod_{i=1}^p (n-i) \left[\prod_{j=1}^p (n-j+2) - \prod_{j=1}^p (n-j) \right]$$

Em todos os casos, a matriz de covariâncias Σ deve ser conhecida. Entretanto, em indústrias em que se opera um processo sob controle a um tempo razoável, não é difícil estimar Σ , basta realizar um experimento de k rodadas de tamanho n com o processo operando sob controle.

Para o cálculo de desempenho dessas estatísticas, deve-se fixar o nível de significância, neste estudo $\alpha=0,005$, ou equivalentemente o ARL_0 , que será igual a 200. Os valores de ARL_1 foram calculados quando o processo estava sob controle ($\sigma_{X^*,sc}^2 = \sigma_{Y^*,sc}^2 = 1$) e passaram a operar fora de controle ($k_X \sigma_{X^*,sc}^2; k_Y \sigma_{Y^*,sc}^2$) em que $1 < k_X; k_Y \leq 4$ (Quinino et al., 2011).

A fim de se testar o desempenho das quatro estatísticas, considerou-se uma distribuição normal padronizada bi-variada com coeficiente de correlação igual a 0 e de tamanho $n = 5$. Os resultados de VMAX e VMIX foram obtidos analiticamente enquanto que os resultados de W e |S| foram obtidos por simulação de Monte Carlo. Vide Tabela 1.

Tabela 1: Desempenho comparativo entre as estatísticas de teste.

$(k_x; k_y)$	VMIX	VMAX	S	W
(1.1025; 1)	128.583	130.677	140.291	193.586
(1.1025; 1.1025)	88.278	97.108	100.448	188.343
(1.21; 1)	84.12	82.983	101.976	181.837
(1.21; 1.21)	44.625	52.489	56.024	161.372
(1.5625; 1)	27.986	24.653	46.395	103.051
(1.5625; 1.5625)	10.391	13.359	15.403	62.937
(2.25; 1)	7.98	6.700	18.415	27.419
(2.25; 2.25)	2.919	3.669	4.529	11.979
(4; 1)	2.399	2.134	6.299	5.067
(4; 4)	1.266	1.396	1.692	2.352

A partir da análise da Tabela 1 e do trabalho de Pimentel (2011) pode-se concluir que, para o caso estudado, VMAX é superior que seus competidores |S| e W e apresenta melhores resultados que VMIX em algumas situações enquanto que em outras não. VMIX apresenta melhores resultados, principalmente, nos casos em que $k_X = k_Y$.

Dessa forma, a partir deste ponto em diante, considerar-se-ão apenas as estatísticas VMAX e VMIX para comparação de desempenho entre o VSR e o VMD.

6. VSR E VMD E SEUS COMPETIDORES

As análises foram realizadas via a simulação de Monte Carlo com 500.000 rodadas por meio do software MatLab®. O código do programa está descrito no Anexo A.

Com a intenção de se estudar o maior número possível de casos (positivamente correlacionados) nas mudanças de sob controle para fora de controle, fixaram-se 4 níveis de variância para cada característica de controle e 5 níveis de correlação. Sendo os valores de $(k_X; k_Y) = (1; 1,1; 2; 4)$ e os níveis de correlação $\rho = (0,0; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7)$. O estudo se baseou na produção de sólidos catalíticos granulados utilizados em reatores de leito fluidizado de uma planta química que quando operada sob controle apresenta diâmetro médio $\mu_X = 150,0$ e média da esfericidade $\mu_Y = 1,10$ e os respectivos desvios-padrão $\sigma_X = 5,3$ e $\sigma_Y = 0,04$. O tamanho da amostra foi escolhido pelo engenheiro da qualidade da planta como $n = 10$ e este será o tamanho de amostra a ser utilizado em todas as simulações deste estudo.

Todas as simulações foram realizadas considerando-se um nível de significância $\alpha = 0,005$. Os limites de controle em função da correlação estão resumidos na Tabela 2.

Tabela 2: Limites de Controle (LC) em função da estatística de teste e da correlação.

Correlação ρ	VMAX	VMIX	VMD	VSR
0,0	2,7083	2,0013	2,1700	5,1756
0,1	2,7101	2,0060	2,1338	5,1088
0,3	2,7156	2,0745	2,0972	5,0777
0,5	2,6991	2,1605	2,0838	5,0061
0,7	2,6832	2,2939	2,1275	5,1887

Após as simulações computacionais analisaram-se os resultados para as quatro estatísticas de teste em função da mudança do desvio-padrão e da correlação. Veja os resultados nas Tabela 3 a Tabela 7.

Tabela 3: Valores de ARL_1 em função da estatística de teste para $\rho = 0$.

$(k_x ; k_y)$	Estatística de Teste			
	VMAX	VMIX	VMD	VSR
(1; 1)	200	200	200	200
(1; 1,1)	116,410	116,280	115,130	117,790
(1; 2)	4,806	6,170	5,034	4,822
(1; 4)	1,337	1,484	1,362	1,339
(1,1; 1)	115,210	112,970	113,170	114,570
(1,1; 1,1)	79,962	70,832	76,127	79,580
(1,1; 2)	4,758	5,351	4,804	4,733
(1,1; 4)	1,337	1,436	1,351	1,336
(2; 1)	5,068	6,494	5,308	5,085
(2; 1,1)	4,989	5,583	5,014	4,958
(2; 2)	2,767	2,141	2,347	2,573
(2; 4)	1,254	1,177	1,199	1,226
(4; 1)	1,339	1,486	1,364	1,341
(4; 1,1)	1,335	1,436	1,350	1,335
(4; 2)	1,252	1,174	1,195	1,223
(4; 4)	1,069	1,033	1,043	1,055

Tabela 4: Valores de ARL_1 em função da estatística de teste para $\rho = 0,1$.

$(k_x ; k_y)$	Estatística de Teste			
	VMAX	VMIX	VMD	VSR
(1; 1)	200	200	200	200
(1; 1,1)	115,450	110,910	111,810	114,780
(1; 2)	4,834	6,229	4,949	4,833
(1; 4)	1,337	1,490	1,351	1,337
(1,1; 1)	117,150	110,620	113,170	117,810
(1,1; 1,1)	80,867	69,706	74,096	79,605
(1,1; 2)	4,762	5,388	4,694	4,716
(1,1; 4)	1,337	1,444	1,341	1,334
(2; 1)	5,078	6,548	5,211	5,082
(2; 1,1)	4,999	5,632	4,919	4,948
(2; 2)	2,787	2,155	2,309	2,582
(2; 4)	1,257	1,181	1,192	1,227
(4; 1)	1,339	1,492	1,352	1,339
(4; 1,1)	1,336	1,441	1,339	1,334
(4; 2)	1,254	1,176	1,188	1,223
(4; 4)	1,070	1,034	1,041	1,055

Tabela 5: Valores de ARL_1 em função da estatística de teste para $\rho = 0,3$.

$(k_x ; k_y)$	Estatística de Teste			
	VMAX	VMIX	VMD	VSR
(1; 1)	200	200	200	200
(1; 1,1)	116,470	121,710	116,040	115,820
(1; 2)	4,852	7,107	5,040	4,874
(1; 4)	1,342	1,580	1,356	1,343
(1,1; 1)	118,650	123,370	116,660	118,760
(1,1; 1,1)	83,029	76,746	76,605	81,686
(1,1; 2)	4,796	6,103	4,779	4,765
(1,1; 4)	1,342	1,525	1,345	1,340
(2; 1)	5,096	7,436	5,287	5,114
(2; 1,1)	5,043	6,354	5,018	5,005
(2; 2)	2,860	2,381	2,357	2,648
(2; 4)	1,270	1,228	1,201	1,241
(4; 1)	1,339	1,575	1,352	1,341
(4; 1,1)	1,340	1,520	1,343	1,339
(4; 2)	1,267	1,222	1,198	1,237
(4; 4)	1,078	1,047	1,044	1,061

Tabela 6: Valores de ARL_1 em função da estatística de teste para $\rho = 0,5$.

$(k_x ; k_y)$	Estatística de Teste			
	VMAX	VMIX	VMD	VSR
(1; 1)	200	200	200	200
(1; 1,1)	111,630	112,820	110,640	111,580
(1; 2)	4,778	7,986	5,326	4,917
(1; 4)	1,336	1,704	1,377	1,347
(1,1; 1)	113,560	116,280	113,690	113,900
(1,1; 1,1)	81,420	77,797	77,196	80,321
(1,1; 2)	4,751	6,956	5,085	4,835
(1,1; 4)	1,334	1,641	1,366	1,342
(2; 1)	5,037	8,480	5,658	5,195
(2; 1,1)	4,974	7,250	5,331	5,065
(2; 2)	2,948	2,700	2,533	2,764
(2; 4)	1,285	1,303	1,235	1,264
(4; 1)	1,334	1,699	1,374	1,344
(4; 1,1)	1,337	1,644	1,369	1,345
(4; 2)	1,281	1,296	1,230	1,259
(4; 4)	1,093	1,073	1,058	1,077

Tabela 7: Valores de ARL1 em função da estatística de teste para $\rho = 0,7$.

$(k_x ; k_y)$	Estatística de Teste			
	VMAX	VMIX	VMD	VSR
(1; 1)	200	200	200	200
(1; 1,1)	109,890	122,700	114,890	111,330
(1; 2)	4,697	9,623	6,329	5,161
(1; 4)	1,329	1,910	1,443	1,362
(1,1; 1)	114,440	125,160	119,470	116,120
(1,1; 1,1)	80,775	82,210	79,567	80,090
(1,1; 2)	4,690	8,303	5,981	5,082
(1,1; 4)	1,328	1,840	1,437	1,360
(2; 1)	4,914	10,075	6,655	5,409
(2; 1,1)	4,906	8,601	6,235	5,318
(2; 2)	3,126	3,175	2,949	3,021
(2; 4)	1,307	1,438	1,322	1,310
(4; 1)	1,329	1,906	1,441	1,361
(4; 1,1)	1,327	1,837	1,436	1,359
(4; 2)	1,305	1,429	1,318	1,308
(4; 4)	1,124	1,128	1,101	1,113

A partir dos resultados das simulações, pode-se analisar conjuntamente as quatro estatísticas para monitoramento da variabilidade em termos da quantidade de vezes que cada uma “ganhou” das outras. Define-se o termo “ganhar” aquela estatística que apresentou o menor ARL_1 , ou seja, aquele teste que possui maior poder e, como definido, o valor mínimo do ARL_1 é 1, i.e. quando o erro tipo II dos testes forem 0%.

Ao interpretar a Tabela 8 deve-se atentar em não concluir precipitadamente que a estatística VMAX é melhor que as demais. Todos os quatro testes, neste caso, foram comparados sem se preocupar com possíveis relações causais entre as variáveis de entrada e a variável de saída (ARL_1) e, assim, tem-se um efeito conhecido como Paradoxo de Simpson.

Tabela 8: Desempenho geral das estatísticas de teste.

Estatística	Quantidade de ganhos	Percentual de ganhos
VMAX	31	41,3%
VMIX	13	17,3%
VMD	18	24,0%
VSR	13	17,3%
Totais	75	100%

Ressalta-se que as mudanças em k_x e k_y bem como a correlação entre X e Y influenciam na sensibilidade de cada estatística detectar uma mudança para fora de controle. Destarte, comparar as estatísticas em função destes sub-grupos parece lógico, além de comparar par-a-par uma com a outra.

Note que conforme Tabela 9 a estatística VMAX não apresenta melhores resultados sempre. De fato para correlações baixas ou nulas a estatística VMIX apresenta melhores resultados em geral, enquanto que para correlações moderadas a estatística VMD mostrou bom desempenho e em contrapartida VMAX apresenta bons resultados para altas correlações.

Tabela 9: Desempenho geral das estatísticas de teste agrupadas em função da correlação.

Correlação	Estatística	Quantidade de Ganhos	Percentual de Ganhos
0	VMAX	4	26,7%
	VMIX	6	40,0%
	VMD	1	6,7%
	VSR	4	26,7%
0,1	VMAX	2	13,3%
	VMIX	7	46,7%
	VMD	2	13,3%
	VSR	4	26,7%
0,3	VMAX	4	26,7%
	VMIX	0	0,0%
	VMD	6	40,0%
	VSR	5	33,3%
0,5	VMAX	9	60,0%
	VMIX	0	0,0%
	VMD	6	40,0%
	VSR	0	0,0%
0,7	VMAX	12	80,0%
	VMIX	0	0,0%
	VMD	3	20,0%
	VSR	0	0,0%

Entretanto, ainda há mais um grupo que apresenta relação causal com o desempenho do teste, a ordem de grandeza das mudanças em k_x e k_y . Os resultados segmentados pelos *shifts* na variância estão sumarizados na Tabela 10.

Tabela 10: Desempenho geral das estatísticas de teste agrupadas em função dos *shifts*.

k_x	k_y	VMAX		VMIX		VMD		VSR	
		Qtde	Percent.	Qtde	Percent.	Qtde	Percent.	Qtde	Percent.
1	1	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1,1	1	20%	1	20%	2	40%	1	20%
1	2	4	80%	0	0%	0	0%	1	20%
1	4	4	80%	0	0%	0	0%	1	20%
1,1	1	2	40%	2	40%	1	20%	0	0%
1,1	1,1	0	0%	2	40%	3	60%	0	0%
1,1	2	2	40%	0	0%	1	20%	2	40%
1,1	4	2	40%	0	0%	0	0%	3	60%
2	1	5	100%	0	0%	0	0%	0	0%
2	1,1	2	40%	0	0%	1	20%	2	40%
2	2	0	0%	2	40%	3	60%	0	0%
2	4	1	20%	2	40%	2	40%	0	0%
4	1	5	100%	0	0%	0	0%	0	0%
4	1,1	2	40%	0	0%	0	0%	3	60%
4	2	1	20%	2	40%	2	40%	0	0%
4	4	0	0%	2	40%	3	60%	0	0%

Neste agrupamento, pode-se concluir que para mudanças de mesma magnitude ($k_x = k_y$), a estatística VMD apresenta melhores resultados, seguida pela estatística VMIX, sendo que somente essas duas apresentaram os ganhos, ou seja, ambas são superiores a VSR e VMAX. Já para mudanças com maior discrepância no *shift*, a estatística VMAX supera as demais, ou seja, para $k_x = 1$ e $k_y = 2 / 4$ ou para $k_x = 2$ e $k_y = 1$ ou ainda para $k_x = 4$ e $k_y = 1$. Neste cenário a estatística VSR apresentou o melhor resultado somente para a mudança $k_x = 1,1$ e $k_y = 4$ ou vice-versa.

Resta ainda, por fim, comparar par-a-par cada estatística a fim de se determinar, no geral, qual estatística de teste para monitoramento apresenta o melhor resultado. A partir da análise da Tabela 11, pode-se concluir que a estatística com o melhor desempenho dentre as quatro é VSR, ou seja, em comparação com as demais, apresentou sempre rendimento superior a, praticamente, 55%. VSR é seguida por VMAX no quesito desempenho geral em comparações por pares.

Tabela 11: Desempenho geral das estatísticas de teste em comparações par-a-par.

Referência como ganhador	VMD		VSR		VMAX		VMIX	
	Ganha	%Ganho	Ganha	%Ganho	Ganha	%Ganho	Ganha	%Ganho
VMD			32	42,7	34	45,3	62	82,7
VSR	43	57,3			41	54,7	53	70,7
VMAX	41	54,7	34	45,3			53	70,7
VMIX	13	17,3	22	29,3	22	29,3		

Ressaltam-se as mudanças nas análises do agrupamento quando se tem relações causais entre as variáveis, reforçando, portanto, a importância que se deve dar ao Paradoxo de Simpson.

As distribuições das estatísticas de teste, como dito no capítulo 4, apresentam distribuição de qui-quadrado, sendo que a distribuição de VSR apresenta forte assimetria.

A Figura 11 exemplifica um processo operando sob controle com uma correlação igual a 0,5 e quando o mesmo passa a operar fora de controle para $k_x = k_y = 2$. Conforme Tabela 2 o limite de controle $LC = 5,01$, ou seja, o poder do teste é a área abaixo da curva SFC_VSR a direita de LC, que neste caso, conforme Tabela 6, é igual a 36,2%, i.e. o erro tipo II é 63,8%. Neste caso o ARL_1 é, aproximadamente, 2,8.

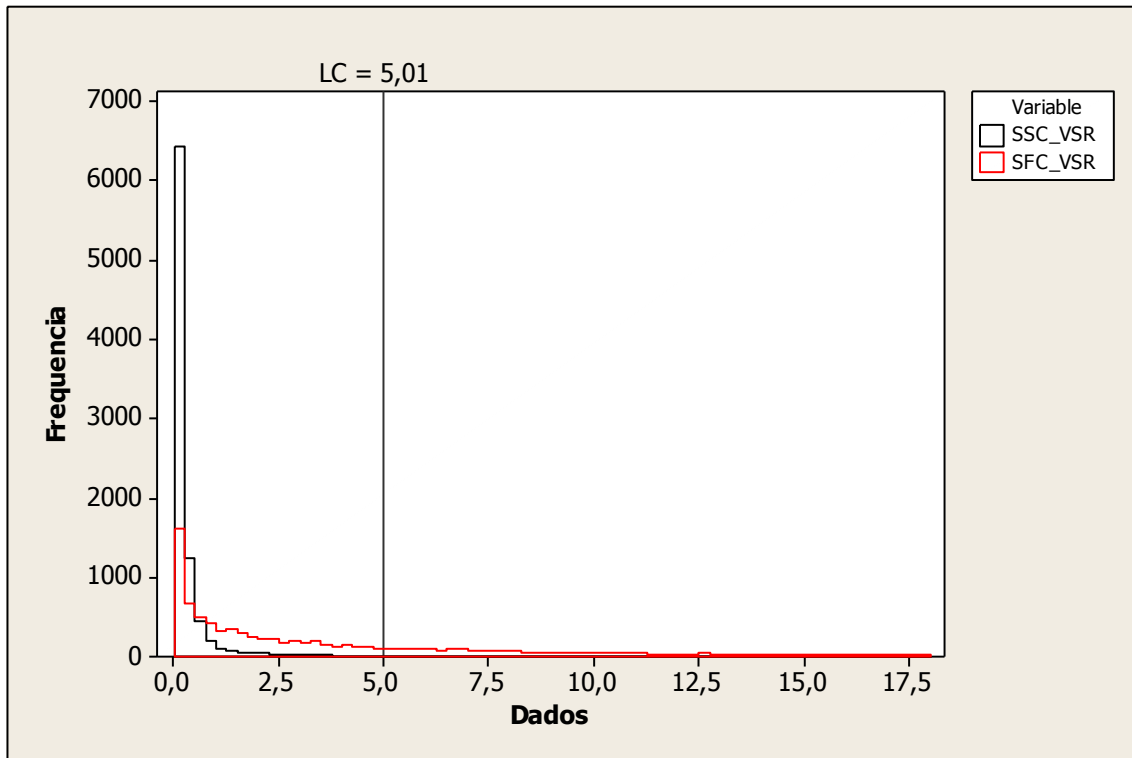


Figura 11: Histograma da distribuição VSR operando sob controle (SSC) e operando fora de controle (SFC) quando $k_x = k_y = 2$ para um p igual a 0,5.

Análise similar é realizada para Figura 12, ou seja, quando um processo operando sob controle com uma correlação igual a 0,5 passa a operar fora de controle para $k_x = k_y = 2$, a área abaixo da curva SFC_VMD e a direita de LC, conforme Tabela 6, é igual a 39,5%, i.e. o erro tipo II é 60,5%. Neste caso o ARL_1 é, aproximadamente, 2,5.

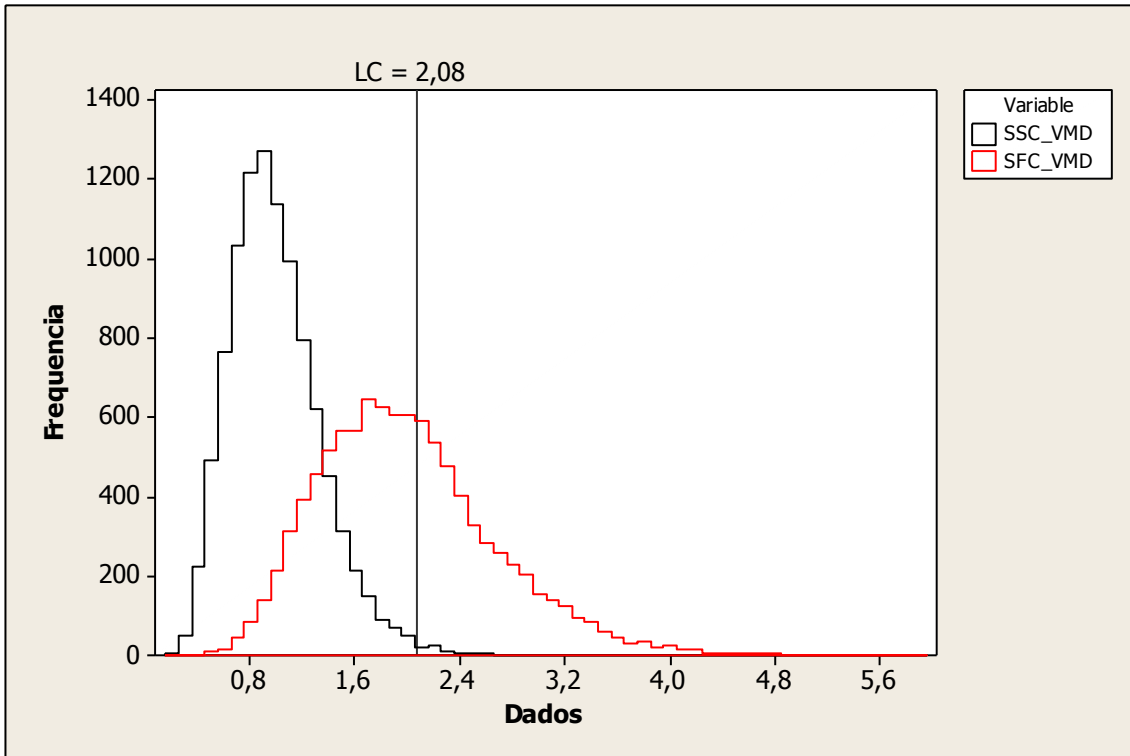


Figura 12: Histograma da distribuição VMD operando sob controle (SSC) e operando fora de controle (SFC) quando $k_x = k_y = 2$ para um p igual a 0,5.

Similarmente, para o histograma da Figura 13, tem-se que o poder do teste quando o processo opera fora de controle, para $k_x = k_y = 2$, é igual a 33,9% e o ARL_1 igual a, aproximadamente 3.

Por fim, o histograma representado na Figura 14 apresenta um poder do teste, quando o processo está fora de controle com $k_x = k_y = 2$ e $p = 0,5$, igual a 37,0% ou, equivalentemente, um ARL_1 com tamanho igual a 2,7.

Como já apresentando na Tabela 10, nesta situação a estatística de melhor desempenho é VMD, com o menor ARL_1 dentre as quatro e igual a 2,5, ou seja, seriam necessárias, em média, apenas 2,5 amostras para detectar que o processo saiu do controle estatístico.

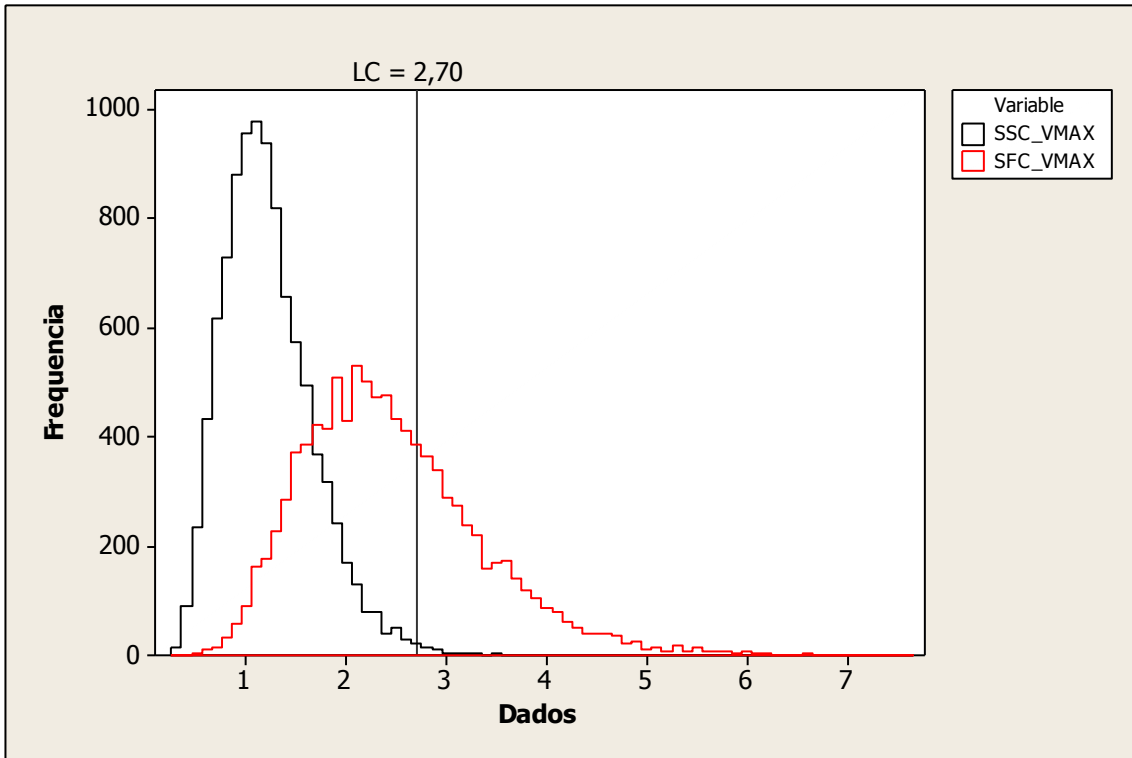


Figura 13: Histograma da distribuição VMAX operando sob controle (SSC) e operando fora de controle (SFC) quando $k_x = k_y = 2$ para um p igual a 0,5.

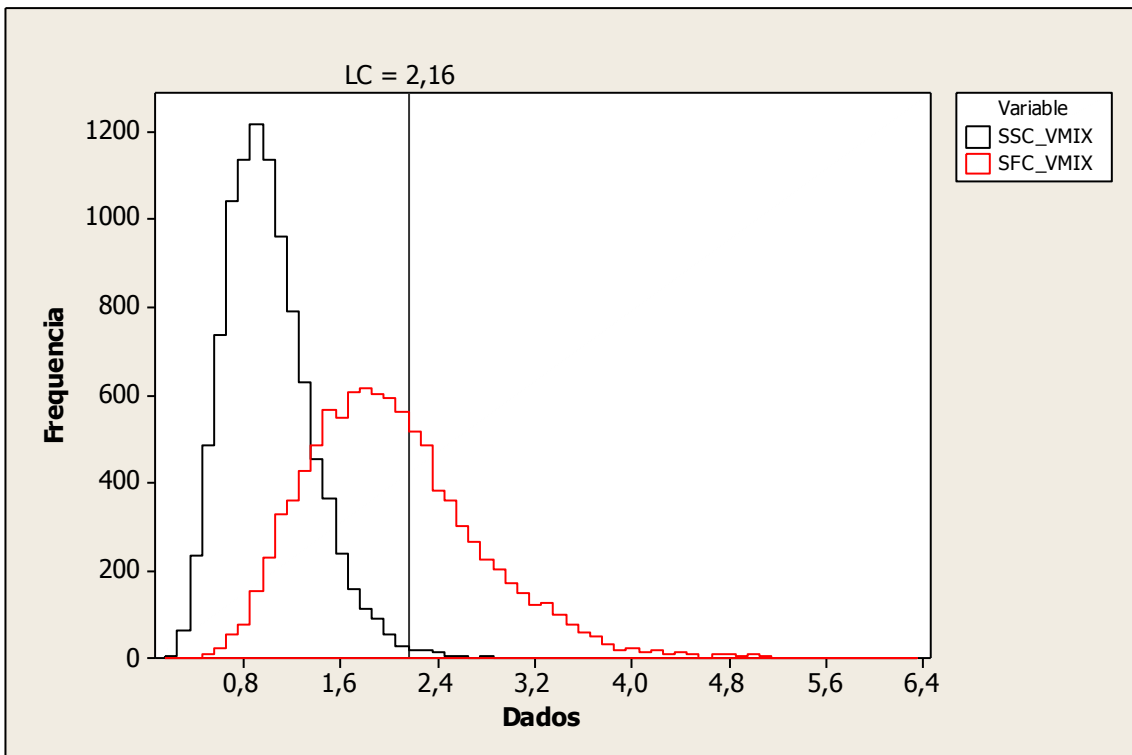


Figura 14: Histograma da distribuição VMIX operando sob controle (SSC) e operando fora de controle (SFC) quando $k_x = k_y = 2$ para um p igual a 0,5.

Os resultados apresentados neste trabalho dependem fortemente da correlação entre as variáveis de qualidade X e Y. Entretanto, pode-se eliminar a correlação entre estas variáveis, ou seja, torna-las independentes a partir do seguinte cálculo:

$$X_i^* = \frac{(X_i - \mu_X)}{\sigma_X} \text{ e } Y_i' = \frac{(Z_i - \rho X_i^*)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \quad (\text{Eq. 11})$$

em que $Z_i = \frac{(Y_i - \mu_Y)}{\sigma_Y}$.

Assim sendo, $\rho = 0$ e as estatísticas VMD e VSR se simplificam para:

$$VSR = \left(\left| \left(\sum_{i=1}^n X_i^{*2} \right) / n - 1 \right|^3 + \left| \left(\sum_{i=1}^n Y_i'^2 \right) / n - 1 \right|^3 \right) \quad (\text{Eq. 12})$$

$$VMD = \left[\frac{\left(\frac{1}{V_X} + \frac{1}{V_Y} \right) (V_X + V_Y)^2}{4 + \left(\frac{1}{V_X} + \frac{1}{V_Y} \right) (V_X + V_Y)} \right] \quad (\text{Eq. 13})$$

Outrossim, quando o processo está sob controle, X_i^* e Y_i' são independentes e normalmente distribuídos com $N \sim (0,1)$ e se tornam livres do coeficiente de correlação ρ .

A partir desta nova definição realizou-se novamente a simulação conforme algoritmo descrito no Anexo A. Os resultados estão sumarizados na Tabela 12.

Tabela 12: Desempenho geral das estatísticas de teste independentemente padronizadas em comparações par-a-par.

Referência como ganhador ↓	VMD		VSR		VMAX		VMIX	
	Ganha	%Ganho	Ganha	%Ganho	Ganha	%Ganho	Ganha	%Ganho
VMD			42	56,0	49	65,3	43	57,3
VSR	33	44,0			64	85,3	40	53,3
VMAX	26	34,7	11	14,7			38	50,7
VMIX	32	42,7	35	46,7	37	49,3		

As demais análises não serão abordadas neste estudo e serão indicadas para os trabalhos futuros, mas, ressalta-se que os resultados de VSR e VMD são satisfatórios e, portanto, são fortes competidores para as estatísticas de testes atuais.

7. CONCLUSÕES E PESQUISA FUTURA

O propósito deste trabalho foi apresentar duas novas estatísticas de teste para monitoramento da matriz de covariância de processos bi-variados, normalmente distribuídos, por meio da simulação de Monte Carlo.

O controle estatístico do processo ganha cada vez mais um papel de grande importância nas indústrias. As cartas de controle mais conhecidas são do tipo de Shewhart para controle da média \bar{x} e amplitude R ou média \bar{x} e variância s^2 . Com os avanços tecnológicos e de automação as p características de qualidade monitoradas são, não raro, iguais ou maiores do que 2, o que levou as pesquisas para o monitoramento de processos multi-variados.

O capítulo 4 apresentou duas novas propostas de estatísticas de teste para monitoramento da matriz de covariância, enquanto o capítulo 5 introduziu as principais estatísticas de controle presentes na literatura. Conforme dito, a estatística apresentada por Costa et al. (2008) denominada de VMAX apresenta resultados superiores em relação aos seus principais competidores $|S|$ e W , já a estatística apresentada por Quinino et al. (2011) apresenta bons resultados quando as mudanças do processo para fora de controle ocorrem de forma igual para ambas as variâncias ou para pequenas mudanças. Assim sendo, essas duas estatísticas foram escolhidas neste estudo a fim de ser *benchmarking* para as propostas VSR e VMD.

No capítulo 6, desenvolveram-se os estudos comparativos entre as estatísticas propostas VSR e VMD em relação aos seus principais competidores, VMAX e VMIX, por meio da comparação do comprimento médio da sequência ARL_1 quando o processo opera fora de controle. Todos os cálculos foram realizados no software MatLab® via simulações de Monte Carlo, ou seja, mesmo para aquela estatística de factível cálculo teórico da distribuição, também se optou por realiza-los por simulações computacionais.

Os resultados apresentados indicam que a estatística VSR é superior aos seus concorrentes na grande maioria das situações estudadas, ou seja, para todas as faixas de correlação, com exceção de $p = 0,7$, e independente da mudança no desvio-padrão, VSR apresentou resultados superiores. Esse fato implica que em uma indústria onde não há previsibilidade para qual caminho o processo sai de controle, VSR é uma estatística

adequada ao uso, pois, em média apresenta melhores resultados, além do mais é de fácil aplicação quanto à realização dos cálculos.

Entretanto, se o engenheiro de qualidade sabe que quando o processo sai de controle, ambas as variâncias são afetadas de forma uniforme, ou seja, $k_x = k_y$, o mesmo pode optar por utilizar a estatística de teste VMD, pois, para correlações superiores a 0,3, esta estatística apresenta maior sensibilidade quando o processo passa a operar fora de controle. Caso se tenha baixas correlações, a estatística VMIX é recomendada.

Agora, se é sabido que as características de qualidade apresentam fortes correlações, o mais indicado é fazer uso do VMAX, que apresenta melhor desempenho nessas situações, mesmo que $k_x = k_y$, a diferença do ARL_1 de VMAX com relação à VMD não é extremamente significativa, ainda mais se o período de amostragem for a curtos intervalos de tempo, a perda por refugo será minimizada.

Finalmente, utilizando-se as variáveis independentemente padronizadas conforme indicado nas equações 11, 12 e 13, recomenda-se o uso da estatística VMD ou VSR sendo que o VMD é mais fortemente indicado nos casos em que $k_x = k_y$.

Algumas possibilidades para continuidade da presente pesquisa são apresentadas:

- Os estudos foram realizados por intermédio da simulação de Monte Carlo, portanto, sugere-se realizar os cálculos aqui apresentados pela distribuição exata de cada estatística de teste;
- Acompanhando os estudos anteriores, este trabalho faz uso do comprimento médio da sequência para avaliar o desempenho das estatísticas de teste quanto ao monitoramento da matriz de covariância. Como alternativa para prosseguimento deste trabalho, conforme apresentado no capítulo 4, podem ser consideradas outras formas de se avaliar o desempenho dos testes. Um caminho natural é expressar o ARL_1 em termos do número esperado de unidades individuais amostradas ao invés do número de amostras retiradas para detectar um deslocamento (Montgomery, 2004). Isto é, qual o número de unidades individuais deve ser amostrado para se detectar um deslocamento $k\sigma$. Neste caso, a simulação também iria incluir um *loop* para o tamanho da amostra.
- Neste estudo, consideraram-se apenas distribuições bi-variadas positivamente correlacionadas. Uma primeira extensão deste trabalho é considerar duas

características negativamente correlacionadas. Um segundo passo é considerar mais que duas variáveis de controle, ou seja, p características maior do que dois.

- Como brevemente apresentado no capítulo 6, instiga-se o leitor interessado a prosseguir com os estudos no caso em que se faz uso do artifício matemático para criar variáveis independentes. Neste caso, basta que as correlações sejam conhecidas e, como dito anteriormente, para processos operando sob controle, com dados históricos suficientes, não é difícil estimar ρ .

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BESSEGATO, L. F.. **Extensão para Controle *On-line* por Atributo com Erros de Classificação: Intervalo de Inspeção Variável, Amostragem Não-unitária, Horizonte Finito e Infinito**. Tese de Doutorado. Departamento de Estatística – ICEX. UFMG. Belo Horizonte, 2009.
- COSTA, A. F. B.. **Charts with variable sample size**. Journal of Quality Technology, 1994, 26, 155-163.
- COSTA, A. F. B.. DE MAGALHÃES, M. S.. EPPRECHT, E. **The Non-Central Chi-Square Chart with Double Sampling**. Brazilian Journal of Operations and Production Management, 2005, 2(3), 21-37.
- COSTA, A. F. B.. **Joint and R charts with variable sample sizes and sampling intervals**. Journal of Quality Technology, 1999, 31, 387-397.
- COSTA, A. F. B.. MACHADO, M. A. G.. **A new chart based on sample variances for monitoring the covariance matrix of multivariate processes**. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2009, 41(7-8), 770-779.
- COSTA, A. F. B.. MACHADO, M. A. G.. **A new chart for monitoring the covariance matrix of bivariate processes**. Communications in Statistics: Simulation and Computation, 2008, 37, 1453-1465. 2008.
- COSTA, A. F. B.. MACHADO, M. A. G.. **Bivariate Control Charts with Double Sampling**. Journal of Applied Statistics, 2008, 35, 809-822.
- COSTA, A. F. B.. RAHIM, M. A.. **A single EWMA chart for monitoring process mean and process variance**. Quality Technology & Quantitative Management, 2006, 3, 295-305.
- GRIMMETT, G. R.. STIRZAKER, D. R.. **Probability and Random Processes**. Oxford, 3rd ed., 2001.
- HAMMERSLEY, J. M.. HANDSCOMB, D. C.. **Monte Carlo Methods**. Fletcher & Son Ltd, Norwich, 1964.
- HOTELLING, H. **Multivariate quality control, illustrated by the air testing of sample bombsights**. Techniques of Statistical Analysis. McGraw Hill, New York, 1947, 111–184.
- MACHADO, M. A. G.. COSTA, A. F. B.. RAHIM, M. A.. **The synthetic control chart based on two sample variances for monitoring the covariance matrix**. Quality and Reliability Engineering International, 2009, 25(5), 595-606.

MACHADO, M. A. G.. COSTA, A. F. B.. **The double sampling and the EWMA charts based on the sample variances.** International Journal of Production Economics, 2008, 114, 134-148.

MONTGOMERY, D. C., RUNGER, G. C.. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros.** Editora LTC 2^a ed.. 2003.

MONTGOMERY, D. C.. **Introdução ao controle estatístico da qualidade.** Editora LTC 4^a ed.. 2004.

PIMENTEL, M. H. A.. **Controle Estatístico De Processo Multivariado: Análise Do Desempenho Das Cartas De Controle Montgomery X Vmax.** Trabalho de Pós-graduação. Departamento de Estatística – ICEX, UFMG. Belo Horizonte, 2011.

QUININO, R. C.. **A single statistic for monitoring the covariance matrix of bivariate process.** To be published.

YEH, A. B.. LIN, D. K. J.. McGRATH, R. N.. **Multivariate Control Charts for Monitoring Covariance Matrix: A Review.** Quality Technology & Quantitative Management, 2006, 3(4), 415-436.

ANEXO A

Código para geração do ARL_1 em função da estatística de teste para monitoramento da matriz de covariância.

```
% Autor Rafael Monteiro
% Outubro de 2011
% Monografia apresentada ao Departamento de Estatística - ICEx

clear all
tamanho=10;
corridas=500000;
Vm(1,1)=150; %Média sob Controle
Vm(1,2)=1.1; %Média Fora de Controle
Resultado=zeros(80,7);
Vcx1=5.3;
Vcx2=0.04;
cont2=1;
cont1=0;
Saida1=zeros(1,corridas);
Saida2=zeros(1,corridas);
Saida3=zeros(1,corridas);
Saida4=zeros(1,corridas);

for Vrho=[0 0.1 0.3 0.5 0.7];
cont1=cont1+1;

for Vdx1=[5.30 5.56 7.50 10.60];
for Vdx2=[0.040 0.042 0.057 0.080];

Mcov=[Vdx1^2 Vrho*Vdx1*Vdx2;Vrho*Vdx1*Vdx2 Vdx2^2];

for k1=1:1:corridas

% Gerando amostras aleatórias
R = mvnrnd(Vm,Mcov,tamanho);
for k2=1:tamanho % Padronizando
R1(k2,1)=(R(k2,1)-Vm(1,1))/(Vcx1);
R1(k2,2)=(R(k2,2)-Vm(1,2))/(Vcx2);
end
R2=sum(R1.^2)./tamanho; %Vetor das Variâncias
Vmax=max(R2);
Saida1(k1)=Vmax;

%Calculando a Variância do Vetor Empilhado
R3=[R1(:,1);R1(:,2)];
R4=sum(R3.^2)/(2*tamanho);
Vmix=R4;
Saida2(k1)=Vmix;

m=corr(R);
FC=1-((m(1,2))/10);
R6=(FC)*(((1/max(R2)+1/min(R2))*(max(R2)+min(R2))^2)/(4+(1/max(R2)+1/min(R2))*(max(R2)+min(R2))));
Vmd=R6;
Saida3(k1)=Vmd;

R8=(FC)*((abs(max(R2)-1))^3+(abs(min(R2)-1))^3);
```

```

VQ=R8;
Saida4(k1)=Vsr;
end

if Vdx1==5.3 & Vdx2==0.040

% Cortes Obtidos com o nível de significância
% Somente calculado para as condições de sob controle
Y1 = prctile(Saida1,99.5);
Y2 = prctile(Saida2,99.5);
Y3 = prctile(Saida3,99.5);
Y4 = prctile(Saida4,99.5);
% Fim dos cortes

MestC(cont1,1)=Y1;
MestC(cont1,2)=Y2;
MestC(cont1,3)=Y3;
MestC(cont1,4)=Y4;

end

%Calculando valores que superam o corte
CPoder1=Saida1>=MestC(cont1,1); %VMAX
CPoder2=Saida2>=MestC(cont1,2); %VMIX
CPoder3=Saida3>=MestC(cont1,3); %VMD
CPoder4=Saida4>=MestC(cont1,4); %VSR

Poder1=mean(CPoder1);
Poder2=mean(CPoder2);
Poder3=mean(CPoder3);
Poder4=mean(CPoder4);

%Calculando o ARL1
NMAVmax=1/Poder1;
NMAVmix=1/Poder2;
NMAVmd=1/Poder3;
NMAVsr=1/Poder4;

Resultado(cont2,1)=Vdx1;
Resultado(cont2,2)=Vdx2;
Resultado(cont2,3)=Vrho;
Resultado(cont2,4)=NMAVmax;
Resultado(cont2,5)=NMAVmix;
Resultado(cont2,6)=NMAVmd;
Resultado(cont2,7)=NMAVsr;

cont2=cont2+1;

end
end
end

Resultado

```