

Lívia Martins da Costa Furtado Pimentel

Alocação Ótima em Ativos Financeiros
para Formação de um Plano de
Previdência

Belo Horizonte
2014

Lívia Martins da Costa Furtado

Alocação Ótima em Ativos Financeiros para Formação de um Plano de Previdência

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais, para a obtenção de Título de Mestre em Engenharia de Produção, na Linha de Pesquisa Modelagem Estocástica e Simulação.

Orientador: Leonardo Pereira Santiago

Belo Horizonte
2014

Martins da Costa Furtado Pimentel, Livia
Alocação Ótima em Ativos Financeiros para Formação
de um Plano de Previdência
76 páginas
Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia da Uni-
versidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. Depar-
tamento de Engenharia de Produção.

1. Seleção de Portfólio
2. Programação Dinâmica Estocástica
3. Simulação de Monte Carlo
4. Plano de Previdência
5. Modelos Paramétricos

I. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Enge-
nharia. Departamento de Engenharia de Produção.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr.

Anderson Laércio G. Trindade

Prof. Dr.

José Angelo C. do A. Divino

Prof. Dr.

Marcelo Azevedo Costa

Prof. Dr.

Leonardo Pereira Santiago

*Ao Marcelo, pelo delicado amor e companheirismo nesta caminhada
e aos meus pais, Gegê e Bia, por todo carinho e zelo.*

Eu queria que você visse o que é realmente coragem,
em vez de pensar que coragem é um homem com uma arma na mão.
Coragem é quando você sabe que está derrotado antes mesmo de começar,
mas começa assim mesmo, e vai até o fim, apesar de tudo.

Harper Lee

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Leonardo Pereira Santiago pelo constante apoio, orientação e por todas as portas abertas durante este período,

aos colegas do LADEC pela paciência e inúmeras ajudas,

aos professores Anderson Laércio Galindo Trindade, José Angelo Costa do Amor Divino e Marcelo Azevedo Costa por suas participações na banca,

e aos demais professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da UFMG pelo conhecimento compartilhado.

Resumo

Decisões relacionadas a alocação de recursos em um portfólio de ativos continuam a gerar um número relevante de pesquisas. Um exemplo de problema desta natureza é a formação de um portfólio para fundos de previdência. Planos de previdência com contribuições definidas são caracterizados por uma alocação constante nos primeiros períodos de contrato, seguida por uma alocação não constante conservadora nos últimos períodos. Esta pesquisa propõe um modelo de apoio a decisão que capte esta mudança de comportamento da alocação (míope para não míope) e que seja computacionalmente tratado de forma eficiente. São considerados como ativos disponíveis para investimento ações e títulos públicos. O problema é formulado via programação dinâmica estocástica, complementado com a simulação de Monte Carlo para representar o comportamento multivariado da taxa de retorno dos ativos. Geralmente, problemas deste tipo são difíceis de solucionar, pois são dependentes de árvores de cenário, em que o número de estados cresce exponencialmente com o número de estágios. Características de funções utilidades não míopes são exploradas para sintetizar os períodos iniciais em um único período de decisão. Esta abordagem permite a representação da mudança de comportamento do investidor além de, naturalmente, reduzir o esforço computacional requerido. Para contornar a dependência da árvore de cenários, é proposta uma aproximação da função custo ótima nos períodos finais através de um modelo paramétrico. Com esta abordagem, elimina-se a necessidade de construção da árvore de cenários e uma solução satisfatória pode ser obtida dentro de limites computacionalmente tratáveis. Os resultados obtidos mostram a adequação das abordagens complementares propostas.

Palavras-chave: seleção de portfólio, programação dinâmica estocástica, simulação de Monte Carlo, plano de previdência, métodos paramétricos

Abstract

The decisions concerning resource allocation in a portfolio of assets continue to generate a relevant amount of research. One example of such problems is the formation of a portfolio for pension fund. Pension plans with defined-contribution are characterized by a constant allocation in the first periods of contract, followed by a conservative non-constant allocation in the latter periods. This research offers a model of decision support which captures this change in the allocation behavior (myopic to –non-myopic) and is computationally efficient. The considered assets are stocks and governmental bonds. The problem is formulated via dynamic stochastic programming, complemented with Monte Carlo simulation to represent the multivariate behavior of asset rates of return. However, problems of this type are difficult to solve due to the dependence to scenario tree, in which the number of states grows exponentially with the number of stages. Characteristics of non-myopic utility functions are exploited to synthesize the initial periods in a single-period of decision. This approach allows the representation of the behavior change as well as, naturally, to reduce the required computational effort. To overcome the dependence of scenario tree, it is proposed an approximation of the optimal cost function in the later periods through a parametric model. With this approach, the need to construct a scenario tree is eliminated and a satisfactory solution may be obtained within limits computationally tractable. The obtained results show the adequacy of the proposed complementary approaches.

Keywords: portfolio selection, dynamic stochastic programming, Monte Carlo simulation, pension plans, parametric methods

Lista de Figuras

1	O equivalente certo e o prêmio de risco	11
2	Perfil avesso ao risco, neutro ao risco e propenso ao risco	12
3	Novos investidores cadastrados no programa Tesouro Direto - Janeiro/2002 até Setembro/2012	37
4	Total de investidores cadastrados no programa Tesouro Direto - Janeiro/2002 até Setembro/2012	37
5	Prazo de vencimento dos títulos adquiridos no programa Tesouro Direto - 2011	38
6	Forma geral de uma árvore de cenários	61
7	Forma da árvore de cenários em que os primeiros períodos exibem compor- tamento míope	63
8	Ilustração da abordagem proposta	67
9	Caminhos aleatórios gerados na simulação <i>versus</i> esperança escontrada . . .	70
10	Curvas aproximadas da função custo ótima	73
11	Parâmetros estimados para os diferentes cenários	73
12	Evolução da curva de custo ótimo ao longo do horizonte de tempo	74
13	Comparação da alocação ótima para um mesmo estado $x_k = 1.100$ ao longo dos estágios de decisão para diferentes parâmetros da função utilidade . . .	75
14	Parâmetro a descontado ao longo dos períodos	78
15	Comparação dos retornos esperados para diferentes valores de k^*	79
16	Comparação dos retornos esperados para diferentes valores de k^* na ausência de um ativo com retorno livre de risco	83
17	Comparação dos parâmetros estimados entre abordagem com aproximação da riqueza terminal e sem esta aproximação	84
18	Comparação das alocações ótimas entre abordagem com aproximação da riqueza terminal e sem esta aproximação	85

Lista de Tabelas

1	Função de tolerância ao risco e o comportamento míope	48
2	Retorno esperado do portfólio para diferentes parâmetros da função utilidade	76
3	Número de estados percorridos para um único controle admissível	76
4	Tempo computacional requerido total requerido em minutos	77
5	Tempo computacional requerido médio por estado em segundos	77
6	Tempo computacional total requerido para diferentes valores de k^* em minutos	80
7	Retorno esperado do portfólio comparando com aproximação da riqueza terminal	81
8	Taxa de retorno líquida esperada para o portfólio ótimo	82

Tabela de Notação

- a : Parâmetro de funções utilidade;
- A : Uma matriz tal que $AA^\top = \Sigma$;
- b : Parâmetro de funções utilidade;
- B : Conjunto de bens ou serviços;
- c_k : Controle ou decisão tomada no estágio k ;
- $C_k(x_k)$: Conjunto de controles possíveis de serem selecionados no estado x_k ;
- \mathcal{C}_k : Conjunto de controles possíveis de serem selecionados no estágio k ;
- $CE(\cdot)$: Certeza equivalente;
- d : Número de ativos de risco;
- e_k^i : Retorno aleatório do ativo i no estágio k ;
- $f_k(\cdot)$: Função que descreve a dinâmica do sistema no estágio k ;
- $F(\cdot)$: Função de distribuição de probabilidade cumulada;
- $g_k(\cdot)$: Função de custo do estágio k ;
- i : Índice que denota um ativo (ação);
- $J^*(x_k)$: Função custo ótima;
- $J_\pi(x_k)$: Custo esperado de π em x_k ;
- k : Índice que denota um período de decisão;
- $K^{(m)}$: Função de derivadas parciais para estimar parâmetros do modelo paramétrico;
- $l + 1$: Número de observações do preço de uma ação;
- L : Loteria simples;
- \mathcal{L} : Conjunto de loterias simples;

- n : Número de caminhos aleatórios gerados através da simulação de Monte Carlo;
- N : Número de períodos do problema;
- o_k : Um desfecho (ou perturbação, estado da natureza) relativo às variáveis aleatórias no período k ;
- O : Número de desfechos possíveis onde $o = 1, \dots, O$;
- $O_k(x_{k-1})$: Conjunto de estados da natureza;
- \mathcal{O}_k : Conjunto de todos os possíveis desfechos no período k ;
- p_o : Probabilidade do desfecho o acontecer;
- $P_k(\cdot)$: Função de distribuição de probabilidade de w_k ;
- $PR(\cdot)$: Prêmio de risco;
- q_t^i : Taxa de retorno de uma ação durante o intervalo de tempo da t -ésima observação;
- r_k : Taxa de retorno livre de risco;
- $r_A(x)$: Coeficiente de aversão ao risco absoluto;
- $r_R(x)$: Coeficiente de aversão ao risco relativo;
- R : Retorno do portfólio;
- \mathfrak{s} : Desvio padrão dos preços observados de uma ação;
- s_k : Retorno livre de risco;
- S : Preço de um ativo;
- t, τ e \mathfrak{t} : Instante de tempo;
- $U(\cdot)$: Função utilidade esperada von Neumann-Morgenstern;
- $u(\cdot)$: Função utilidade Bernoulli;
- w_k : Estado da natureza no estágio k ;

- W : Movimento Browniano aritmético;
- x_k : Estado no sistema no estágio k ;
- X_t : Vetor de variáveis no instante t ;
- \mathcal{X}_k : Conjunto de possíveis estados no estágio k ;
- $Y_t(\cdot)$: Função que segue um processo de Itô;
- Z : Variável aleatória normal padrão;
- β_k^j : Parâmetro do modelo paramétrico;
- ε : Erro determinado;
- $\theta_k(x_k)$: Função que atribui ao estado x_k o controle c_k ;
- $\theta_k^i(x_k)$: Montante investido no ativo i no período k ;
- λ_i : Percentual investido no ativo i ;
- μ : Taxa de retorno esperada por unidade de tempo;
- Ω : Número de estados arbitrariamente escolhidos;
- π : Política admissíveis ou lei de controle;
- Π : Conjunto de todas as políticas admissíveis;
- ρ_{ij} : Correlação entre os retornos dos ativos i e j ;
- σ : Volatilidade por unidade de tempo;
- Σ : Matriz de covariância;
- $\Psi(\cdot)$: Uma função côncava crescente qualquer;

Sumário

1	Introdução	1
2	Referencial Matemático	4
2.1	Escolha sob Incerteza	5
2.1.1	Preferência	5
2.1.2	Utilidade	6
2.1.3	Teoria da Utilidade Esperada	7
2.1.4	Loterias Monterárias	9
2.1.5	Aversão ao Risco	11
2.2	Métodos de Monte Carlo	15
2.2.1	Comportamento do Preço de um Ativo	15
2.2.2	Geração de Números Multivariados	21
2.2.3	Geração de Caminhos Aleatórios	23
2.3	Programação Dinâmica Estocástica	27
2.3.1	Parâmetros e Variáveis	27
2.3.2	Algoritmo de Programação Dinâmica	30
3	Previdência	32
3.1	Planos de Previdência	32
3.1.1	Previdência com Benefícios Definidos	33
3.1.2	Previdência com Contribuições Definidas	33
3.1.3	Previdência Social, Privada e Doméstica	34
3.2	Títulos Públicos	36
3.2.1	Mercado brasileiro de títulos públicos	36
3.2.2	Títulos públicos ofertados no Brasil	38
3.3	Seleção de Portfólio - Teoria Clássica	40
3.3.1	Paradigma de Markowitz	41
3.3.2	Formulação Dinâmica	42
3.3.3	Miopia	46
3.3.4	Portfólio Ótimo	48

3.4	Seleção de Portfólio - Literatura Atual	49
3.4.1	Árvore de Cenários	49
3.4.2	Correlação	51
3.4.3	Seleção de Portfólio e Títulos Públicos	52
4	Formulação do Modelo	54
4.1	Formulação do Problema	54
4.2	Modelo de Otimização de Portfólio	57
4.2.1	Modelo Tradicional	57
4.2.2	Sintetização dos períodos iniciais	62
4.2.3	Aproximação de $J_k(x_k)$	63
5	Exemplo Numérico	68
5.1	Parâmetros do Modelo Básico	68
5.2	Análise dos Resultados	71
5.2.1	Caso com $r_k \neq 0$	71
5.2.2	Caso sem ativo com retorno livre de risco	81
5.2.3	Caso com $r_k = 0$	83
6	Discussão Final	86
	Referências Bibliográficas	90

1 Introdução

Decisões relacionadas a alocação de recursos em um portfólio de ativos continuam a gerar um número relevante de pesquisas. Um exemplo de problemas desta natureza é a formação de um portfólio para fundos de previdência. Mesmo que estes fundos possam estar relacionados a previdência social ou privada, a essência da escolha entre ativos cujos retornos são incertos permanece semelhante para todas estas categorias.

Quando decisores possuem uma percepção distinta do valor do portfólio e de variações em sua composição ao longo do tempo, fica caracterizado um problema de tomada de decisão em multiperíodo. Uma ferramenta utilizada para resolver problemas deste tipo é a programação dinâmica estocástica. Entretanto, problemas de tomada de decisão dinâmicos tradicionalmente representados por árvores de cenário podem se tornar difíceis de serem resolvidos, pois o número de estados cresce exponencialmente com o aumento do número de períodos.

Para gerar a árvore de estados do problema, muitas pesquisas recorrem a métodos de simulação de Monte Carlo como complementação ao algoritmo de programação dinâmica. Estes métodos são adequados, pois captam o comportamento multivariado da taxa de retorno dos ativos. Entretanto, para atingir acurácia suficiente na representação do comportamento dos ativos, é necessário um número razoavelmente grande de caminhos simulados. Este fato naturalmente corrobora para o aumento do espaço de estados possíveis do problema e, conseqüentemente, aumenta o esforço computacional requerido para se obter a solução satisfatória.

Para alguns casos particulares, problemas de multiperíodo podem ser sintetizados em um único período, geralmente referidos como problemas míopes. Neles, o investidor age como se ignorasse oportunidades de reinvestimento e escolhe a mesma alocação em todo o horizonte de tempo. Conseqüentemente, o esforço computacional requerido é reduzido. Logo, estes casos refletem uma suposição relativa às escolhas do decisor ser, de certa forma, constante ao longo do tempo. Entretanto, esta suposição não tem aderência ao problema real. Fatores que ocasionam problemas míopes envolvem a escolha de parâmetros específicos de algumas funções utilidade ou taxa livre de risco constante e igual a 0% em todos os períodos.

Segundo Brandt (2010), o portfólio ótimo míope é um importante caso para aplicações na indústria financeira. De acordo com este autor, poucas instituições financeiras implementaram estratégias de investimento em problemas de multiperíodo não míopes. Além disso, até recentemente, a literatura acadêmica sobre seleção de portfólio estava focada quase que exclusivamente em problemas de um único período, em particular, no paradigma de média-variância de Markowitz (1952). Este paradigma será detalhado na seção 3.3.

No caso dos fundos de previdência, é importante notar que o perfil de alocação nesta modalidade é, na maior parte, constante ao longo de quase toda a vida do contrato. Na previdência privada, por exemplo, são oferecidos ao investidor fundos de diferentes graus de risco e este escolhe um de acordo com o seu perfil. Nos últimos anos da vida de contrato, quantidades predefinidas são regularmente retiradas destes fundos e reinvestidas em ativos de menor risco.

Portanto, os fundos de previdência possuem duas evidências de subotimalidade da alocação do ponto de vista individual dos investidores. A primeira evidência está no fato de que um mesmo fundo é escolhido por investidores com perfis de risco semelhantes, mas não idênticos. Assim, a utilidade terminal dos fundos é uma aproximação do perfil de aversão ao risco dos investidores e não os representam completamente. A segunda evidência está no comportamento míope do portfólio ótimo, já que na escolha da utilidade terminal, os parâmetros da função utilidade são escolhidos para gerar este comportamento que sintetiza o problema a um único período de decisão.

O foco deste trabalho está em problemas de multiperíodos que são originalmente não míopes, mas à medida que o horizonte de tempo se torna suficientemente longo, a política ótima nos estágios iniciais se aproxima da política míope. O desafio e objetivo desta pesquisa é oferecer um modelo de apoio a decisão que capte esta mudança de comportamento do investidor (de míope para não míope) e que seja tratado computacionalmente de forma eficiente.

Os objetivos específicos da pesquisa são:

1. Elaboração de um modelo de programação dinâmica estocástica que capte a incerteza associada aos ativos disponíveis para a composição de um portfólio dinâmico.

2. Definição da política ótima de alocação entre os ativos a cada momento de tomada de decisão para diferentes preferências de risco.
3. Comparação do portfólio ótimo e retorno esperado em relação aos diferentes ativos disponíveis, em relação aos diferentes perfis de aversão ao risco
4. Análise dos diferentes casos de comportamento míope.
5. Avaliação de alternativas para a construção da árvore de cenários.

Esta proposta de dissertação está organizada da seguinte forma: O Capítulo 2 introduz o referencial teórico matemático necessário para a conceituação do problema de seleção de portfólio, e engloba a escolha sob incerteza, métodos de Monte Carlo e a programação dinâmica estocástica; o Capítulo 3 aborda o problema de fundos de previdência e sua interface com o problema de seleção de portfólio, assim como a revisão teórica do estado da arte relacionada ao problema de pesquisa; o Capítulo 4 é dedicado à formulação matemática do modelo proposto; no Capítulo 5 são apresentados os resultados numéricos e análises relacionadas; o Capítulo 6 é reservado às discussões finais e próximos passos planejados para a continuação da pesquisa.

2 Referencial Matemático

Nesta pesquisa, o problema de seleção de portfólio é estruturado em função de três pilares principais. O primeiro pilar está associado à função utilidade escolhida pelo gestor do fundo para a seleção do portfólio. A função utilidade possui o papel de representar a preferência dos investidores por diferentes montantes de riqueza. Como a riqueza é determinada pela composição do portfólio com ativos mais ou menos voláteis, ela é uma variável aleatória. Portanto, diferentes portfólios podem gerar maiores ou menores lucros e prejuízos em relação à riqueza inicial. A preferência por estas variações é captada pela função utilidade. Portanto, esta é uma escolha definida pela incerteza da riqueza a ser obtida para cada possível portfólio. Assim, o primeiro pilar é a *escolha sob incerteza*, que será apresentada na seção 2.1.

O segundo pilar está associado à taxa do retorno dos ativos. A riqueza que o investidor possui em um dado momento depende da taxa de retorno dos ativos que compõe o portfólio dinâmico. Esta taxa é uma variável aleatória e seu comportamento é geralmente representado por um processo estocástico conhecido, o movimento Browniano geométrico. A simulação de Monte Carlo reproduz o comportamento do retorno dos ativos através da geração de caminhos aleatórios de desfechos de acordo com a distribuição de probabilidade do processo estocástico seguido. A seção 2.2 é dedicada aos fundamentos de alguns dos métodos de Monte Carlo aplicados à engenharia financeira e que serão utilizados na construção do modelo.

O terceiro e último pilar é a programação dinâmica estocástica, uma ferramenta tipicamente utilizada para o cálculo de políticas ótimas em problemas de decisão multiperíodo onde a variável de estado segue um processo estocástico. Embora algumas pesquisas recentes recorram à programação linear para solucionar o problema de seleção de portfólio (e.g., Fonseca and Rustem (2012)), a grande maioria faz uso da programação dinâmica (e.g., Topaloglou et al. (2008), Fu et al. (2010) e Jin and Zhang (2013)). Seu conceito e a equação de Bellman serão apresentados na seção 2.3.

2.1 Escolha sob Incerteza

Muitas decisões econômicas importantes envolvem elementos de risco. Em particular, o elemento de risco envolvido nesta pesquisa é a taxa de retorno dos ativos de investimento, que determinará os possíveis valores de riqueza a ser obtida ao final do horizonte de tempo. Para avaliar as diversas situações possíveis produzidas pela aleatoriedade dos elementos de risco, é necessário revisitar a teoria da escolha assim como a escolha sob incerteza.

Conceitos clássicos importantes como relação de preferência, utilidade, loterias, equivalente certo, prêmio de risco e aversão ao risco serão introduzidos através de definições e proposições. Estes conceitos são apresentados a seguir, utilizando como referência Mas-Colell et al. (1995).

2.1.1 Preferência

A seção 2.1 é iniciada pela introdução do conceito de relação de preferência e algumas de suas propriedades básicas que auxiliam a compreensão de como os diferentes portfólios serão escolhidos. Seja $B \subset \mathbb{B}_+^L$ um conjunto de bens ou serviço, a preferência de um consumidor é captada pela *relação de preferência* \succsim (uma relação de “pelo menos tão bom quanto”) definido em B . A relação de preferência de um consumidor sobre um bem ou serviço é sempre *racional*. A Definição 2.1 (ver Mas-Colell et al. (1995), página 42) formaliza esta suposição:

Definição 2.1. A relação de preferência \succsim em B é racional se possui as seguintes duas propriedades:

- (i) *Integralidade:* para qualquer $x, y \in B$, $x \succsim y$ ou $x \preceq y$ ou ambos. O axioma da integralidade afirma que o decisor realiza apenas escolhas baseadas em séries reflexões para encontrar suas preferências.
- (ii) *Transitividade:* para todo x, y e $z \in B$, se $x \succsim y$ e $y \succsim z$, então $x \succsim z$. O axioma da transitividade implica que é impossível ter um decisor com uma sequência de escolhas de pares em que suas preferências apareçam em ciclo.

Além disso, é razoável assumir que quantidades maiores de bens ou serviços são preferidas que menores. Esta característica de preferências é capturada pela suposição de

monotonicidade. A Definição 2.2 (ver Mas-Colell et al. (1995), página 42) formaliza esta suposição:

Definição 2.2. A relação de preferência \succsim em B é *monótona* se $x \in B$ e $y \gg x$ implica em $y \succ x$. Ela será *fortemente monótona* se $y \geq x$ implica em $y \succ x$.

A suposição de que preferências são monótonas é satisfeita desde que o bem ou serviço seja “bom” em vez de “ruim”. Como o problema em questão está associado a preferências sobre riquezas e, claramente, quanto maior a riqueza de um investidor, melhor, esta suposição será satisfeita.

Finalmente, é importante ressaltar uma última suposição sobre relações de preferências, relativa à convexidade da preferência. Esta suposição está relacionada ao trade-off que o consumidor está disposto a fazer entre diferentes bens ou serviços. A Definição 2.3 (ver Mas-Colell et al. (1995), página 44) formaliza esta suposição:.

Definição 2.3. A relação de preferência \succsim em B é *convexa* se para todo $x \in B$, o conjunto de contorno superior $\{y \in B : y \succsim x\}$ é convexo; isto é, se $y \succsim x$ e $z \succsim x$, então $\alpha y + (1 - \alpha)z \succsim x$ para qualquer $\alpha \in [0, 1]$.

A suposição de convexidade é importante, pois pode ser vista como a expressão formal da inclinação de investidores para a diversificação. De fato, sob convexidade, se x é indiferente a y , então $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ não pode ser pior que x ou y .

2.1.2 Utilidade

A representação da preferência de consumidores através de uma função utilidade é relevante do ponto de vista analítico. Técnicas de programação matemática, como a programação dinâmica estocástica, podem ser utilizadas para resolver problemas relacionados a preferência de consumidores através desta representação. O primeiro passo para garantir a existência de uma função utilidade é a suposição de continuidade da preferência. A Definição 2.4 (ver Mas-Colell et al. (1995), página 46) formaliza esta suposição:

Definição 2.4. A relação de preferência \succsim em B é *contínua* se ela está preservada sob limites. Isto é, para qualquer sequência de pares $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ com $x^n \succsim y^n$ para todo n , $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n$, e $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y^n$, tem-se $x \succsim y$.

A continuidade afirma que a preferência do consumidor não pode exibir “saltos” e, de fato, garante a existência de uma função utilidade *contínua*. A Proposição 2.1 (ver Mas-Colell et al. (1995), página 47) formaliza esta suposição:

Proposição 2.1. Suponha que a relação de preferência racional \succsim em B é contínua. Então existe uma função utilidade $u(x)$ que representa \succsim .

As funções utilidade u_n são contínuas e duplamente diferenciáveis para $x \geq 0$. Geralmente são chamadas de *funções utilidade Bernoulli* e inclui a classe de *funções utilidade HARA*¹. Fazem parte desta classe as utilidades exponencial, logarítmica e de potência. Algumas características importantes das funções utilidade HARA serão exploradas na seção 3.3.2.

2.1.3 Teoria da Utilidade Esperada

Funções utilidades revelam também preferências de consumidores sobre alternativas de risco. Cada alternativa de risco pode resultar em um número de possíveis *desfechos*. No momento em que o decisor deve escolher uma alternativa (e.g., um portfólio possível), qual desfecho que irá acontecer é desconhecido (e.g., qual taxa de retorno e conseqüente riqueza será obtida). Entretanto, é assumido que o número de desfechos possíveis é finito e que as probabilidades de cada desfecho acontecer são conhecidas. O conjunto de possíveis desfechos é denotado por B , onde estes desfechos são indexados por $o = 1, \dots, O$. O conceito de *loteria*, que é utilizado para representar as alternativas de risco, está formalizado na Definição 2.5 (ver Mas-Colell et al. (1995), página 168):

Definição 2.5. Uma *loteria simples* L é uma lista $L = (p_1, \dots, p_O)$ com $p_o \geq 0$ para todo o e $\sum_o p_o = 1$, onde p_o é interpretado como a probabilidade do desfecho o acontecer.

Uma importante suposição sobre loterias é sua *continuidade*. Esta suposição significa que pequenas variações nas probabilidades não altera a natureza da ordenação entre duas loterias. A formalização desta suposição está na Definição 2.6 (ver Mas-Colell et al. (1995), página 171):

¹Em inglês: hyperbolic absolute risk aversion

Definição 2.6. A relação de preferência \succsim no espaço de loterias simples \mathcal{L} é *contínua* se para qualquer $L, L', L'' \in \mathcal{L}$, os conjuntos

$$\{\alpha \in [0, 1] : \alpha L + (1 - \alpha)L' \succsim L''\} \subset [0, 1]$$

e

$$\{\alpha \in [0, 1] : L'' \succsim \alpha L + (1 - \alpha)L'\} \subset [0, 1]$$

são fechados.

O axioma da continuidade indica a existência de uma função utilidade representando \succsim , função esta $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $L \succsim L'$ se, e somente se, $U(L) \geq U(L')$.

Uma última suposição sobre loterias, o axioma da independência, possibilita impor uma maior estrutura em $U(\cdot)$. Ele diz que, se forem misturadas cada uma de duas loterias com uma terceira, então a ordenação de preferência do resultado das duas misturas não depende da terceira loteria utilizada. O axioma está formalizado na Definição 2.7 (ver Mas-Colell et al. (1995), página 171):

Definição 2.7. A relação de preferência \succsim no espaço de loterias simples \mathcal{L} satisfaz o *axioma da independência* se para todo $L, L', L'' \in \mathcal{L}$ e $\alpha \in (0, 1)$ tem-se

$$L \succsim L' \quad \text{se e somente se} \quad \alpha L + (1 - \alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1 - \alpha)L''.$$

O axioma da independência está intimamente relacionado à representatividade de preferências sobre loterias através de uma função utilidade que possui uma *forma de utilidade esperada*. Esta propriedade está explicada na Definição 2.8 (ver Mas-Colell et al. (1995), página 173):

Definição 2.8. A função utilidade $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ possui uma *forma de utilidade esperada* se existe uma atribuição de números (u_1, \dots, u_O) para os O desfechos tal que para cada loteria simples $L = (p_1, \dots, p_O) \in \mathcal{L}$ tem-se

$$U(L) = u_1 p_1 + \dots + u_O p_O.$$

A função utilidade $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ com a forma de utilidade esperada é chamada de

uma *função de utilidade esperada von Neumann-Morgenstern (v.N-M)*. Observe que se denotamos L^o a loteria que gera o desfecho o com probabilidade um, então $U(L^o) = u_o$. Portanto, o termo *utilidade esperada* é apropriado pois com a forma de utilidade esperada v.N-M, a utilidade de uma loteria pode ser entendida com o valor esperado das utilidades u_o dos O desfechos.

Finalmente, o Teorema da Utilidade Esperada é o resultado mais importante da teoria da escolha sob incerteza. A primeira vantagem deste teorema está associada a benefícios técnicos, pois é analiticamente conveniente. Segundo Mas-Colell et al. (1995), este fato é uma das explicações de seu uso difundido na economia. Uma segunda vantagem está associada ao ponto de vista normativo, pois a utilidade esperada pode fornecer um guia para tomada de decisão.

Geralmente, as pessoas acham difícil pensar sistematicamente sobre alternativas de risco. Contudo, se em indivíduo acredita que a sua escolha deve satisfazer os axiomas em que o teorema é baseado (continuidade e independência), então o teorema pode ser utilizado como um guia no seu processo de decisão. O Teorema da Utilidade Esperada está formalizado na Proposição 2.2 Sua prova pode ser encontrada em Mas-Colell et al. (1995), páginas 176 a 178.

Proposição 2.2 (Teorema da Utilidade Esperada). Suponha que a relação de preferência racional \succsim no espaço de loterias \mathcal{L} satisfaz os axiomas de continuidade e independência. Então \succsim admite uma representação de utilidade da forma de utilidade esperada. Isto é, podemos atribuir um número u_o a cada desfecho $o = 1, \dots, O$ de forma que para qualquer duas loterias $L = (p_1, \dots, p_O)$ e $L' = (p'_1, \dots, p'_O)$ tem-se

$$L \succsim L' \quad \text{se e somente se} \quad \sum_{o=1}^O u_o p_o \geq \sum_{o=1}^O u_o p'_o.$$

2.1.4 Loterias Monterárias

A partir desta seção, as loterias estarão associadas a um bem monetário. Portanto, x poderá ser entendida como a riqueza possuída pelo decisor em um dado momento. Para facilitar os cálculos analíticos, a riqueza x será considerada como uma variável aleatória contínua. São apresentados os conceitos de equivalente certo e prêmio de risco, que serão

utilizados posteriormente na introdução do conceito de aversão ao risco, na seção 2.1.5.

Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ a função de distribuição de probabilidade cumulada que representa uma loteria monetária. Isto é, para qualquer x , $F(x)$ é a probabilidade do pagamento (desfecho) realizado ser menor ou igual a x . Assim, com a aplicação do teorema da utilidade esperada para quantidades não negativas monetárias, tem-se

$$U(F) = \int u(x)dF(x).$$

O conceito de equivalente certo está formalizado na Definição 2.9 (ver Mas-Colell et al. (1995), página 186):

Definição 2.9. O equivalente certo de $F(\cdot)$, chamado $CE(F, u)$, é a quantidade monetária para a qual um indivíduo é indiferente entre a aposta $F(\cdot)$ e a quantidade monetária certa $CE(F, u)$. Isto é:

$$u(CE(F, u)) = \int u(x)dF(x) = E[u(x)] = U(F).$$

O conceito de prêmio de risco está formalizado na Definição 2.10 (ver Mas-Colell et al. (1995), página 186):

Definição 2.10. Para uma quantidade fixa monetária x e um valor positivo Δx , o prêmio de risco denotado por $PR(x, \Delta x, u)$ é o excesso na probabilidade de ganhar sobre chances justas que faz o indivíduo ficar indiferente entre um desfecho certo x e uma aposta de dois desfechos $x + \Delta x$ e $x - \Delta x$. Isto é:

$$u(x) = \left(\frac{1}{2} + PR(x, \Delta x, u)\right) u(x + \Delta x) + \left(\frac{1}{2} - PR(x, \Delta x, u)\right) u(x - \Delta x).$$

Os conceitos de equivalente certo e prêmio de risco estão ilustrados na Figura 1 para um caso em que $u(\cdot)$ é côncava. Na seção seguinte, serão explorados casos de funções utilidades côncavas e convexas e suas implicações relacionadas à preferências de risco de decisores.

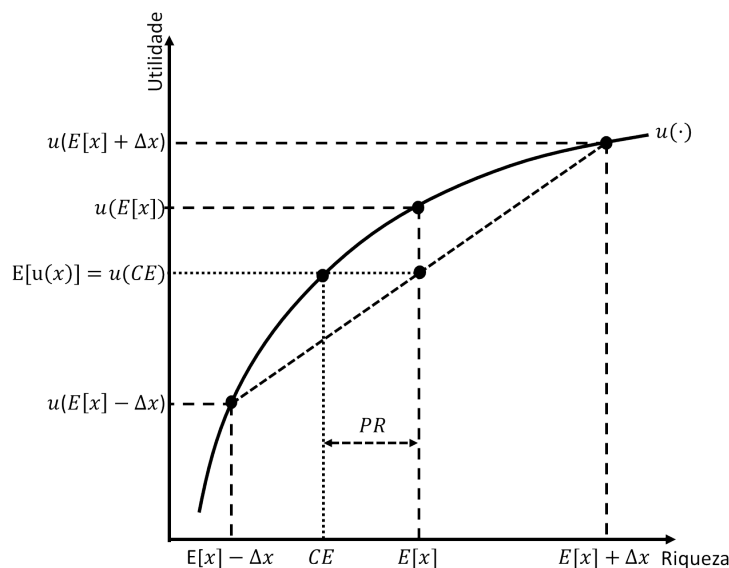


Figura 1: O equivalente certo e o prêmio de risco

2.1.5 Aversão ao Risco

A noção de risco capta atributos básicos de atitudes do decisor e caracteriza aspectos de seu comportamento. Serão introduzidas a seguir medidas de risco propostas por Arrow (1965) e Pratt (1964): o coeficiente de aversão ao risco absoluto; e o coeficiente de aversão ao risco relativo. Estas medidas estão associadas com comportamentos de políticas míopes. Portanto, a compreensão destas medidas é importante para a análise dos diferentes casos de miopia, que são exploradas na seção 3.3.3.

O conceito de aversão ao risco é essencial para a modelagem e análise de problemas econômicos relacionados à escolha sob incerteza. Seu conceito geral está dado na Definição 2.11 (ver Mas-Colell et al. (1995), página 185):

Definição 2.11. Um decisor é *avesso ao risco* se, para qualquer loteria $F(\cdot)$, a loteria degenerada que gera a quantia $\int x dF(x)$ com certeza é pelo menos tão boa quanto a própria loteria $F(\cdot)$. Se o decisor é sempre indiferente entre essas duas loterias, então ele é chamado de *neutro ao risco*. Finalmente, um decisor é *estritamente avesso ao risco* se a indiferença se mantém apenas quando as duas loterias são iguais.

Se a preferência admitir uma representação de utilidade esperada com uma função utilidade Bernoulli $u(x)$, então, da definição de aversão ao risco, tem-se que o decisor é

avesso ao risco se e somente se

$$\int u(x)dF(x) \leq u\left(\int x dF(x)\right) \quad \text{para todo } F(x). \quad (1)$$

A equação (1) é chamada de *desigualdade de Jensen*. Segundo Bakula et al. (2012), a desigualdade de Jensen possui muitas aplicações na matemática e estatística. Neste caso particular, a equação (1) caracteriza o comportamento de investidores avesso ao risco. Isto é, o decisor é avesso ao risco se ele sempre prefere o valor esperado de uma loteria que a loteria em si. É equivalente dizer que a aversão ao risco está associada a funções $u(x)$ côncavas.

Na Figura 2 está ilustrada esta associação. À esquerda, o gráfico mostra $u(x)$ côncava, que apresentam prêmio de risco $PR \geq 0$, caracterizando um perfil avesso ao risco. Pode-se ver que a penalidade por variações negativas $E[x] - \Delta x$ é maior que a recompensa por variações positivas $E[x] + \Delta x$. Já no gráfico central, está apresentado o perfil neutro ao risco, onde $PR = 0$. Neste caso, a penalidade por variações $E[x] - \Delta x$ é igual a recompensa $E[x] + \Delta x$. À direita, está caracterizado o perfil *propenso ao risco*, onde a penalidade é inferior à recompensa para variações equivalentes $E[x] \pm \Delta x$ e $PR \leq 0$.

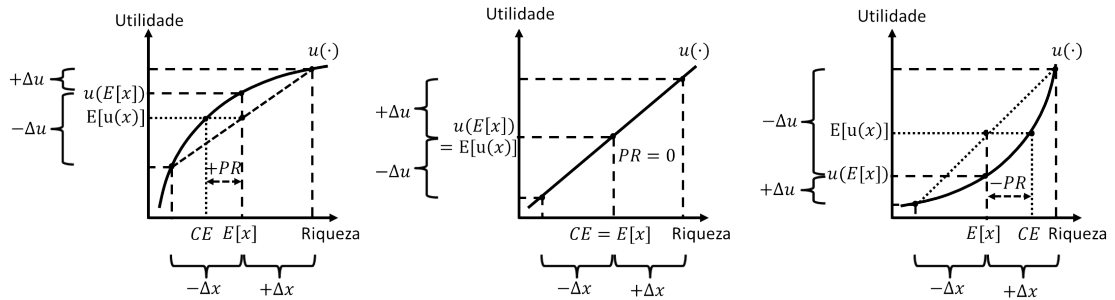


Figura 2: Perfil avesso ao risco, neutro ao risco e propenso ao risco

A aversão ao risco implícita pela função utilidade u pode, portanto, ser medida através de sua concavidade. A medida de aversão ao risco proposta por Arrow (1965) e Pratt (1964) está formalizada na Definição 2.12 (ver Mas-Colell et al. (1995), página 190):

Definição 2.12. Dada uma função utilidade Bernoulli (duplamente diferenciável) $u(\cdot)$

monetária, o *coeficiente de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt* em x é definido como

$$r_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)},$$

onde $u'(x)$ é a derivada primeira de $u(x)$ e $u''(x)$ é a derivada segunda.

$r_A(x)$ negativo implica em convexidade e, conseqüentemente, propensão a riscos. Um sinal positivo implica em concavidade, e portanto, aversão ao risco. Se o valor do coeficiente for zero, então a utilidade é linear e representa um perfil neutro ao risco. Dado duas funções utilidade Bernoulli $u_1(\cdot)$ e $u_2(\cdot)$, é possível comparar se um indivíduo com a primeira utilidade é *mais avesso ao risco que* o segundo. A Proposição 2.3 (ver Mas-Colell et al. (1995), páginas 191 e 192) formaliza condições equivalentes de comparação entre utilidades.

Proposição 2.3. As definições (i) a (v), associadas a relação *mais avesso ao risco que*, são equivalentes:

- (i) $r_A(x, u_2) \geq r_A(x, u_1)$ para todo x .
- (ii) Existe uma função côncava crescente $\Psi(\cdot)$ tal que $u_2(x) = \Psi(u_1(x))$ em todo x . Isto é, $u_2(\cdot)$ é uma transformação côncava de $u_1(\cdot)$. Em outras palavras, u_2 é *mais côncava* que u_1 .
- (iii) $CE(F, u_2) \leq CE(F, u_1)$ para todo $F(\cdot)$.
- (iv) $PR(x, \Delta x, u_2) \geq PR(x, \Delta x, u_1)$ para qualquer x e Δx .
- (v) Sempre que $u_2(\cdot)$ achar a loteria $F(\cdot)$ pelo menos tão boa quanto um desfecho certo \bar{x} , então $u_1(\cdot)$ também acha $F(\cdot)$ pelo menos tão boa quanto \bar{x} . Isto é, $\int u_2(x)dF(x) \geq u_2(\bar{x})$ implica que $\int u_1(x)dF(x) \geq u_1(\bar{x})$ para qualquer $F(\cdot)$ e \bar{x} .

É comum achar que pessoas que detém uma maior riqueza estão dispostas a tomar maiores risco que pessoas que detém uma riqueza menor. Embora isso possa ser explicado devido a diferentes funções utilidade entre as pessoas, é mais provável que pessoas mais ricas “podem se dar ao luxo de tomar uma chance”. A condição colocada na Definição 2.13 (ver Mas-Colell et al. (1995), página 193) compara a aversão ao risco para diferentes níveis de riqueza:

Definição 2.13. A função utilidade Bernoulli $u(\cdot)$ monetária exhibe *aversão ao risco decrescente* se $r_A(x, u)$ é uma função decrescente em x .

Esta comparação será importante para o problema de seleção de portfólio, pois implica em diferentes escolhas de ativos para diferentes perfis. A atitude do investidor em relação a esta definição será explorada na seção 3.3.3.

Quando $dr_A(x, u)/dx < 0$, $u(x)$ possui um coeficiente de aversão ao risco decrescente e a função utilidade é chamada como DARA². Quando $dr_A(x, u)/dx > 0$, $u(x)$ possui um coeficiente de aversão ao risco crescente e a função utilidade é chamada IARA³. Quando $dr_A(x, u)/dx = 0$, $u(x)$ possui um coeficiente de aversão ao risco constante e a função utilidade é chamada CARA⁴.

Indivíduos cuja preferência é representada por uma função utilidade DARA assumem mais risco à medida que se tornam mais ricos. Já indivíduos cuja preferência é representada por uma função IARA assumem menos riscos à medida que se tornam mais ricos. Finalmente, indivíduos representados por funções CARA assumem o mesmo risco absoluto independente de sua riqueza.

O conceito de aversão ao risco absoluta é adequado para comparações de atitudes em relação ao risco relacionadas a desfechos de ganhos e perdas absolutas em relação à riqueza atual. Entretanto, também é interessante avaliar atitudes relacionadas a risco de desfechos de ganhos e perdas percentuais à atual riqueza. Este conceito de aversão proporcional está formalizado na Definição 2.14:

Definição 2.14. Dada uma função utilidade Bernoulli $u(\cdot)$, o *coeficiente de aversão ao risco relativo* em x é

$$r_R(x) = -x \frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

Portanto, $r_R(x) = xr_A(x)$. Funções com aversão ao risco relativa crescente (IRRA⁵) implicam que o indivíduo assume um menor risco em relação a desfechos de ganho ou perdas percentuais à sua riqueza atual à medida que fica mais rico. Já funções com aversão ao risco relativo decrescente (DRRA⁶) implicam que o indivíduo assume um maior risco

²Em inglês: *Decreasing Absolute Risk Aversion*

³Em inglês: *Increasing Absolute Risk Aversion*

⁴Em inglês: *Constant Absolute Risk Aversion*

⁵Em inglês: *Increasing Relative Risk Aversion*

⁶Em inglês: *Decreasing Relative Risk Aversion*

em torno de ganhos e perdas percentuais à sua riqueza atual à medida que fica mais rico. Finalmente, funções com aversão ao risco relativo constante (CRRA⁷) implicam que indivíduos assumirão o mesmo risco em relação à desfechos de ganho e perda percentuais à sua riqueza atual, independente se esta mais ou menos rico.

2.2 Métodos de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo é uma ferramenta utilizada na precificação de opções e outros derivativos quando não é possível calcular analiticamente seus valores. Além disso, é aplicada em cálculos de medidas de risco em problemas de gestão de portfólio de ativos (Glasserman, 2004). Neste trabalho, o comportamento da taxa de retorno dos ativos será representado através da geração de caminhos aleatórios fundamentados nos métodos de Monte Carlo.

Algumas propriedades do comportamento do preço de um ativo serão abordadas na seção 2.2.1. É importante mencionar que a correlação entre os ativos de risco será considerada na construção do modelo proposto. Portanto, serão introduzidos fundamentos da geração de números aleatórios multivariados, apresentados na seção 2.2.2. Finalmente, a seção 2.2.3 é destinada aos fundamentos e alguns métodos de geração de caminhos aleatórios, que será utilizada para a construção da árvore de estados da modelagem do problema. Os fundamentos e métodos apresentados a seguir podem ser encontrados com maior detalhes em Hull (2002) e Glasserman (2004).

2.2.1 Comportamento do Preço de um Ativo

A evolução do valor do portfólio de ativos de um plano de previdência depende, dentre outros fatores, do desfecho do preço dos ativos detidos a cada período de decisão. Uma simulação de Monte Carlo de um processo estocástico é um procedimento para gerar desfechos aleatórios deste processo (Hull, 2002). Os princípios do comportamento do preço de ativos relacionados aos métodos de Monte Carlo serão introduzidos nesta seção.

Processo de Wiener

Conforme apresentado por Hull (2002), o tipo de processo seguido pelo preço de um ativo

⁷Em inglês: *Constant Relative Risk Aversion*

é chamado Processo de Wiener. Este é um tipo particular do processo de Markov, com média zero e taxa de variação de 1 por período. É utilizado em física para descrever o movimento de uma partícula que está sujeita a um grande número de pequenos choques moleculares e é algumas vezes referido como *movimento Browniano aritmético*. A variável W segue um movimento Browniano aritmético se possui as duas propriedades (ver Hull (2002), página 218):

Propriedade 2.1. A variação ΔW durante um pequeno período de tempo Δt é

$$\Delta W = \sqrt{\Delta t}Z$$

onde Z é uma variável aleatória normal padrão $\phi(0, 1)$.

Propriedade 2.2. Os valores de ΔW , para qualquer dois intervalos de tempo distintos Δt , são independentes.

Da propriedade 2.1, tem-se que ΔW segue uma distribuição normal $\phi(0, \sqrt{\Delta t})$ e, da propriedade 2.2, tem-se que W segue um processo de Markov. No limite, quando $\Delta t \rightarrow 0$, ΔW se torna dW . Este é o processo de Wiener básico, com taxa de retorno esperada de 0 e variância 1. Um *processo de Wiener generalizado* para a variável x pode ser definido em termos de dW como

$$dx = \mu dt + \sigma dW,$$

onde μ e σ são constantes. O termo μ implica que x possui uma taxa de retorno esperada de μ por unidade de tempo. Já o termo σdW pode ser entendido como uma perturbação ou variabilidade no caminho seguido por x por unidade de tempo. A quantidade da perturbação ou variabilidade é σ vezes o processo de Wiener básico.

Movimento Browniano geométrico

Seja S_t o preço de um ativo no instante t , μ a taxa de retorno esperada sobre o ativo composta continuamente e σ a volatilidade do preço do ativo. De acordo com Hull (2002), pode-se, assim, reescrever o processo de Wiener para o incremento percentual de um ativo

quando Δt é pequeno, também chamado *movimento Browniano geométrico*, como:

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z. \quad (2)$$

Esta equação mostra que o incremento percentual no preço de um ativo, para um intervalo de tempo pequeno Δt , é normalmente distribuído com $\phi(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t})$.

Lema de Itô

Segundo Glasserman (2004), o processo de Itô é semelhante ao processo generalizado de Wiener, com os termos μ e σ dependentes de x e t , como mostra a seguinte equação:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_\tau d\tau + \int_0^t \sigma_\tau dW_\tau, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Será utilizado agora o Lema de Itô 2.1 (ver Glasserman (2004), página 546) para derivar o processo seguido pelo preço S de um ativo.

Teorema 2.1 (Fórmula de Itô). *Seja X um processo de Itô como em (3). Seja $\Sigma_t = \sigma_t \sigma_t^\top$. Então $Y_t = f(t, X_t)$ é um processo de Itô com*

$$\begin{aligned} dY_t &= \\ & \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial x_i} dx_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial x_i \partial x_j} \Sigma_t^{ij} dt \\ &= \left(\frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial x_i} \mu_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial x_i \partial x_j} \Sigma_t^{ij} \right) dt + \\ & \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial x_i} \sigma_t^i dW_t \end{aligned} \quad (4)$$

e

$$\begin{aligned}
Y_t &= f(X_0, 0) \\
&+ \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(X_\tau, \tau)}{\partial x_i} \sigma_\tau^i dW_\tau \\
&\int_0^t \left(\frac{\partial f(X_\tau, \tau)}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(X_\tau, \tau)}{\partial x_i} \mu_\tau^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f(X_\tau, \tau)}{\partial x_i \partial x_j} \Sigma_\tau^{ij} \right) d\tau
\end{aligned}$$

Se f não possui dependência explícita em t , então que $Y_t = f(X_t)$, a equação (4) pode ser reescrita e simplificada para

$$dY_t = \left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial f(X_t)}{\partial x_i} \mu_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f(X_t)}{\partial x_i \partial x_j} \Sigma_t^{ij} \right) dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(X_t)}{\partial x_i} \sigma_t^i dW_t. \quad (5)$$

Utilizaremos o Lema de Itô para derivar o processo seguido por $\log S$, conforme feito por Hull (2002), páginas 226 e 227. Seja $Y = \log S$, das equações (2) e (5) tem-se

$$\begin{aligned}
df &= \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW_o \\
&= \left(\frac{1}{S} \mu S + 0 - \frac{1}{2} \frac{1}{S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{1}{S} \sigma S dW_o \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_o
\end{aligned}$$

A distribuição do retorno esperado $\log \frac{S_T}{S_0}$ entre o tempo zero e algum tempo futuro T é, então, distribuída normalmente com

$$\log \frac{S_T}{S_0} \sim \phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right].$$

Reescrevendo o processo de Itô para $\log \frac{S_T}{S_0}$ tem-se que

$$\log \frac{S_T}{S_0} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} Z$$

e, consequentemente,

$$S_T = S_0 e^{\left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} Z \right\}} \quad (6)$$

Propriedade lognormal

Este t3pico pontua algumas caracter3sticas interessantes do comportamento de S apresentadas por Glasserman (2004), p3ginas 94 e 95. A equa3o (6) permite observar que S_T segue uma distribui3o de probabilidade *lognormal*. Os momentos de uma vari3vel lognormal podem ser calculados utilizando a identidade b3sica

$$\mathbb{E} [e^{\alpha Z}] = e^{\frac{1}{2}\alpha^2}$$

para a fun3o geradora de momento de uma normal padr3o. Assim, se Y segue uma distribui3o lognormal, ent3o $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$ e possui

$$\mathbb{E}[Y] = e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)}, \quad \text{var}(Y) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

3 val3do notar que o valor esperado do retorno percentual sobre todo o per3odo T , $\log \frac{S_T}{S_0}$, se difere da varia3o percentual esperada no pre3o da a3o no mesmo per3odo:

$$\mathbb{E} \left[\log \frac{S_T}{S_0} \right] = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \neq \log \left(\frac{\mathbb{E}[S_T]}{S_0} \right) = \mu T.$$

Isso acontece quando no momento do c3culo da esperan3a da equa3o (6):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_T] &= \mathbb{E} \left[S_0 e^{\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z\}} \right] \\ &= S_0 \mathbb{E} \left[e^{\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z\}} \right] \\ &= S_0 \left(e^{(\mu T)} e^{(-\frac{1}{2}\sigma^2 T)} \mathbb{E} \left[e^{(\sigma\sqrt{T}Z)} \right] \right) \end{aligned} \tag{7}$$

tende-se a fazer

$$\mathbb{E} \left[e^{\sigma\sqrt{T}Z} \right] = 1,$$

pois

$$\mathbb{E} \left[\sigma\sqrt{T}Z \right] = 0.$$

Entretanto, este termo possui uma distribui3o lognormal. Como este tipo de distribui3o,

diferentemente da distribuição normal, é assimétrica, da equação (7) tem-se que

$$\mathbb{E} \left[e^{\sigma\sqrt{T}Z} \right] > 0 = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T}.$$

Este termo irá compensar o termo $e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T}$ na equação (7), fazendo com que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_T] &= S_0 \left(e^{(\mu T)} e^{(-\frac{1}{2}\sigma^2 T)} \mathbb{E} \left[e^{(\sigma\sqrt{T}Z)} \right] \right) \\ &= S_0 \left(e^{(\mu T)} e^{(-\frac{1}{2}\sigma^2 T)} e^{(\frac{1}{2}\sigma^2 T)} \right) \\ &= S_0 e^{(\mu T)} \end{aligned}$$

Aplicando novamente estas observações em (7), tem-se

$$(S_T/S_0) \sim LN \left(\left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] T, \sigma^2 T \right)$$

e

$$E[S_T] = S_0 e^{\mu T}, \quad Var(S_T) = e^{2\mu T} S_0^2 \left(e^{\sigma^2 T} - 1 \right)$$

Portanto, μ age como uma taxa média de crescimento para S , um tipo de taxa de retorno composta continuamente. Entretanto, quando é analisado um único caminho aleatório, pode-se chegar a conclusões distintas. Sabe-se que em cada caminho, o retorno esperado possui o seguinte comportamento:

$$\begin{aligned} \log \frac{S_T}{S_0} &\rightarrow \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \\ \frac{1}{T} \log \frac{S_T}{S_0} &\rightarrow \mu - \frac{1}{2}\sigma^2. \end{aligned}$$

Quando $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 > 0$ e $T \rightarrow \infty$, o preço da ação em um único caminho tende a infinito ($S_T \rightarrow \infty$) assim como $\mathbb{E}[S_T] = S_0 e^{\mu T} \rightarrow \infty$. Entretanto, quando $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 < 0$ e $T \rightarrow \infty$, $S_T \rightarrow 0$ mesmo que $\mathbb{E}[S_T] = S_0 e^{\mu T} \rightarrow \infty$. Isso acontece devido ao aumento da assimetria do formato da distribuição da lognormal quando $T \rightarrow \infty$. Grande parte da ocorrência está próximo de 0. Entretanto, eventos raros da calda da distribuição lognormal de valores significativamente grandes fazem com que $\mathbb{E}[S_T] = S_0 e^{\mu T}$.

2.2.2 Geração de Números Multivariados

Em muitas aplicações de simulações de Monte Carlo relacionadas à precificação de ativos ou derivativos correlacionados, é necessário gerar sequências de números aleatórios normais multivariados. Existem três propriedades da distribuição normal multivariada que são válidas mencionar (ver Glasserman (2004), página 65):

Propriedade 2.3 (Propriedade de Transformação Linear:). Qualquer transformação linear de um vetor normal é igualmente normal:

$$X \sim N(\mu, \Sigma) \Rightarrow AX \sim N(A\mu, A\Sigma A^\top).$$

Como Z é uma variável aleatória normal padrão, da equação anterior tem-se que

$$X = \mu + AZ, \quad X \sim N(\mu, AA^\top).$$

Sejam Z_1, Z_2, \dots variáveis normais padrão independentes, tem-se

$$\begin{aligned} X_1 &= \mu_1 + A_{11}Z_1 \\ X_2 &= \mu_2 + A_{21}Z_1 + A_{22}Z_2 \\ &\vdots \\ X_d &= \mu_d + A_{d1}Z_1 + A_{d2}Z_2 + \dots + A_{dd}Z_d \end{aligned} \tag{8}$$

Para viabilizar o método de geração de números normais multivariados é preciso encontrar matriz A , tal que $AA^\top = \Sigma$. Isso pode ser feito com a *fatorização de Cholesky*, que veremos mais a diante.

Propriedade 2.4 (Fórmula de Condicionamento). Suponha que o vetor particionado $(X_{[1]}, X_{[2]})$ é normal multivariado com

$$\begin{pmatrix} X_{[1]} \\ X_{[2]} \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \mu_{[1]} \\ \mu_{[2]} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{[11]} & \Sigma_{[12]} \\ \Sigma_{[21]} & \Sigma_{[22]} \end{pmatrix} \right),$$

e suponha $\Sigma_{[22]}$ tenha posto completo. A equação que dá a distribuição de $X_{[1]}$ condicional a $X_{[2]} = x$ é

$$(X_{[1]}|X_{[2]} = x) \sim N(\mu_{[1]} + \Sigma_{[12]}\Sigma_{[22]}^{-1}(x - \mu_{[2]}), \Sigma_{[11]} - \Sigma_{[12]}\Sigma_{[22]}^{-1}\Sigma_{[21]}). \quad (9)$$

A matriz de covariância Σ de uma distribuição normal multivariada ($N \sim (\mu, \Sigma)$) pode ser expressa como

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1d} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & & \rho_{2d} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{1d} & \rho_{2d} & \dots & \rho_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_d \end{pmatrix},$$

onde σ_i é a volatilidade do ativo i e ρ_{ij} é a correlação entre o ativo i e j .

Propriedade 2.5 (Função Geradora de Momento). Se $X \sim N(\mu, \Sigma)$ com X de d -dimensões, então

$$E[e^{(\varphi^\top X)}] = e^{(\mu^\top \varphi + \frac{1}{2}\varphi^\top \Sigma \varphi)}$$

para todo $\varphi \in \mathbb{R}^d$.

Fatorização de Cholesky

As equações derivadas de $X = \mu + AZ$ em (24) foram construídas a partir de uma matriz triangular inferior A . Esta representação de Σ como AA^\top , onde A é uma triangular inferior, é chamada de fatorização de Cholesky de Σ deste que esta seja é positiva definida.

Seja Σ uma matriz de covariância 2x2 representada como

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Assumindo que $\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 > 0$, o fator de Cholesky é

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_2 \end{pmatrix},$$

e é possível ver facilmente que

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \rho\sigma_2 \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 \end{pmatrix} = \Sigma.$$

Então, as equações em (8) podem ser escritas, neste caso de duas dimensões, como

$$\begin{aligned} X_1 &= \mu_1 + \sigma_1 Z_1 \\ X_2 &= \mu_2 + \rho\sigma_2 Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 Z_2 \end{aligned}$$

Para o caso generalizado onde a matriz de covariância possui dimensão $d \times d$, a resolução da equação

$$\Sigma = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ A_{21} & A_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{d1} & A_{d2} & \dots & A_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{d1} \\ & A_{22} & \dots & A_{d2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{dd} \end{pmatrix}$$

é:

$$A_{ij} = \left(\Sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} A_{ik}A_{jk} \right) / A_{jj}, \quad j < i$$

e

$$A_{ii} = \sqrt{\Sigma_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}^2},$$

que são as expressões para se chegar ao fator de Cholesky.

2.2.3 Geração de Caminhos Aleatórios

Esta seção é destinada a métodos de simulação de caminhos de uma variedade de processos estocásticos importantes na engenharia financeira. O intuito é apresentar métodos em que a distribuição conjunta dos valores simulados coincide com a distribuição conjunta dos processos de interesse. Ela está fortemente baseada em Glasserman (2004).

Construção de Caminhos Aleatórios

Sabe-se que $W \sim N(0, 1)$ quando $t = 1$. Na verdade, para qualquer intervalo de tempo t , $W \sim N(0, t)$. Seja $t_0 = 0$ e $W(0) = 0$ os parâmetros iniciais de um movimento Browniano aritmético. Os valores gerados na construção de um caminho aleatório de um movimento Browniano aritmético são

$$W(t_{i+1}) = W(t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (10)$$

onde Z_1, Z_2, \dots são variáveis aleatórias normais padrão. Para a equação (2), que segue um movimento Browniano geométrico $S \sim BM(\mu, \sigma^2)$, os valores subsequentes gerados deste processo é dado por

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

De (10), temos que o vetor $(W(t_1), \dots, W(t_n))$ é uma transformação linear do vetor de incrementos $(W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}))$. Como esses incrementos são independentes e normalmente distribuídos, da Propriedade 2.3 de Transformação Linear da distribuição normal multivariada temos que $(W(t_1), \dots, W(t_n))$ possui uma distribuição normal multivariada. É necessário, portanto, achar a média e matriz de covariância deste vetor.

Visto que $W(t_i)$ é um movimento Browniano aritmético, sabemos que $E[W(t_i)] = 0$. Para a matriz de covariância, consideraremos primeiro qualquer $0 < \tau < t < T$. Usando a independência dos incrementos achamos que

$$\begin{aligned} \text{Cov}[W(\tau), W(t)] &= \text{Cov}[W(\tau), W(\tau) + (W(t) - W(\tau))] \\ &= \text{Cov}[W(\tau), W(\tau)] + \text{Cov}[W(\tau), (W(t) - W(\tau))] \\ &= 0 + \tau = \tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Seja C a matriz de covariância de $(W(t_1), \dots, W(t_n))$, desta forma temos

$$C_{ij} = \min(t_i, t_j). \quad (12)$$

Uma vez que sabemos que o vetor $(W(t_1), \dots, W(t_n))$ possui distribuição $N(0, C)$,

podemos reescrever as equações em (8) com $\mu = 0$. Assim, o vetor $(W(t_1), \dots, W(t_n))$ pode ser gerado como AZ , onde $AA^\top = C$ e $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^\top$. O fator de Cholesky é, então

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \dots & \sqrt{t_n - t_{n-1}} \end{pmatrix}$$

A matriz A representa, neste caso, o desvio padrão de cada passo simulado.

Construção de Pontes Brownianas

A equação (10) fornece a evolução de W respeitando a sequência t_1, t_2, \dots . Entretanto, é possível simular a evolução de W em outra ordem, desde que seja levada em consideração a distribuição condicional dado os valores já gerados. Segundo Glasserman (2004), essa flexibilização é útil para a aplicação de técnicas de redução de variância e métodos de discrepância baixa.

A construção de uma *ponte Browniana* se dá quando geramos, primeiramente, o ponto final $(W(t_n))$, depois o ponto mediano $(W(t_{\lfloor n/2 \rfloor}))$ e, após, demais pontos $(W(t_{\lfloor n/4 \rfloor}), W(t_{\lfloor 3n/4 \rfloor}), \dots)$, sucessivamente seguindo esta lógica.

O primeiro passo para a construção das pontes é encontrar a matriz de covariância dos pontos. Suponha $0 < t < \tau < t$ e considere que queremos gerar $W(s)$ dado que $W(t) = x$ e $W(t) = y$. Da solução em (11), podemos achar a matriz de covariância entre os vetores $(W(t), W(\tau), W(t))$, que é

$$\begin{pmatrix} W(t) \\ W(\tau) \\ W(t) \end{pmatrix} \sim N \left(0, \begin{pmatrix} t & t & t \\ t & \tau & \tau \\ t & \tau & t \end{pmatrix} \right).$$

É necessário, então, achar a distribuição de $W(\tau)$ condicionada a $W(t) = x$ e $W(t) = y$. Para isso, conforme apresentado por Glasserman (2004), é necessário fazer uma permuta no vetor $(W(t), W(\tau), W(t))$ para poder aplicar a Propriedade 2.4 da Fórmula de Condicionamento, para poder calcular $E[W(\tau)|W(t) = x, W(t) = y]$ conforme equação (9).

Obedecendo ao termo (12),

$$\begin{pmatrix} W(\tau) \\ W(\mathbf{t}) \\ W(t) \end{pmatrix} \sim N \left(0, \begin{pmatrix} \tau & \mathbf{t} & \tau \\ \mathbf{t} & \mathbf{t} & \mathbf{t} \\ \tau & \mathbf{t} & t \end{pmatrix} \right),$$

$$E[W(\tau)|W(\mathbf{t}) = x, W(t) = y] = 0 - \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{t} \\ \mathbf{t} & \mathbf{t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{(t - \tau)x + (\tau - \mathbf{t})y}{(t - \mathbf{t})}$$

e

$$\text{Var}(W(\tau)|W(\mathbf{t}) = x, W(t) = y) = \tau - \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{t} \\ \mathbf{t} & \mathbf{t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \tau \end{pmatrix} = \frac{(\tau - \mathbf{t})(t - \tau)}{(t - \mathbf{t})}.$$

Então,

$$(W(\tau)|W(\mathbf{t}) = x, W(t) = y) \sim N \left(\frac{(t - \tau)x + (\tau - \mathbf{t})y}{(t - \mathbf{t})}, \frac{(\tau - \mathbf{t})(t - \tau)}{(t - \mathbf{t})} \right) \quad (13)$$

Uma vez que temos a solução para um caso específico, podemos generalizá-lo. Suponha $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k$ e $W(\tau_1) = x_1, W(\tau_2) = x_2, \dots, W(\tau_k) = x_k$. Suponha também que $\tau_i < \tau < \tau_{i+1}$. Queremos gerar $W(\tau)$ condicionado a esses valores. Então, similarmente a (13), temos

$$(W(\tau)|W(\tau_1) = x_1, W(\tau_2) = x_2, \dots, W(\tau_k) = x_k) \sim N \left(\frac{(\tau_{i+1} - \tau)x_i + (\tau - \tau_i)x_{i+1}}{(\tau_{i+1} - \tau_i)}, \frac{(\tau - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau)}{(\tau_{i+1} - \tau_i)} \right)$$

Visto que se $W(\tau)$ segue uma distribuição normal, temos consequentemente $W(\tau) = \mu + \sigma Z$. Mais especificamente:

$$W(\tau) = \frac{(\tau_{i+1} - \tau)x_i + (\tau - \tau_i)x_{i+1}}{(\tau_{i+1} - \tau_i)} + \sqrt{\frac{(\tau - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau)}{(\tau_{i+1} - \tau_i)}} Z.$$

Finalmente, podemos agora gerar $W(t)$ em qualquer ordem e construir as pontes Brow-

nianas.

2.3 Programação Dinâmica Estocástica

A programação dinâmica estocástica é uma técnica desenvolvida por Bellman (1952) para solucionar problemas de tomadas de decisão realizadas sequencialmente sob incerteza. Sua contribuição foi significativa para a popularização desta técnica e para sua transformação em uma ferramenta sistemática.

Existem dois problemas fundamentais que podem ser formulados nesta situação: aqueles que buscam maximizar o retorno obtido em um dado horizonte de tempo; e aqueles que buscam minimizar o tempo ou custo requerido para executar uma atividade. Estes problemas geralmente são complexos, mas podem ser divididos em subproblemas mais simples. O desfecho da decisão tomada é desconhecido, mas pode ser antecipado de alguma forma (e.g., através de uma função de distribuição de probabilidade). Geralmente, acontece um trade-off entre custo presente e custos futuros (ou lucros presentes e lucros futuros). As decisões possíveis de serem tomadas são ranqueadas com base na soma do custo presente e custo futuro esperado, assumindo que decisões ótimas são tomadas nos estágios subsequentes.

Bertsekas (2005) apresenta o algoritmo da programação dinâmica que pode ser aplicado a problemas para a obtenção de controle ótimo, problemas de decisão Markovianos, otimização combinatória e tomada de decisão sequencial sob incerteza. A seguir, serão introduzidos conceitos e o algoritmo da programação dinâmica estocástica com base no livro de Bertsekas. Posteriormente, será explorado o problema de seleção de portfólio modelado como um problema de programação dinâmica estocástica.

2.3.1 Parâmetros e Variáveis

A seguir, serão introduzidos alguns conceitos importantes para a modelagem do sistema dinâmico de um modelo básico.

Estágio de decisão

O momento da tomada de decisão, chamado *estágio*, é assumido como discreto. Ele é denotado por $k = 0, 1, \dots, N - 1$ sendo N o número de *períodos* em que o horizonte de

tempo é dividido ou o número de momentos de tomada de decisão.

Variável de estado

O *estado* em que o sistema se encontra sintetiza informações passadas que são relevantes para otimizações futuras. Ele pode representar, por exemplo, o nível de estoque em um certo período, o nível de degradação de uma máquina, ou a riqueza de um investidor. O estado do sistema, denotado por x_k , é uma variável, pois depende de outros fatores que serão explorados a diante. O conjunto de estados possíveis a serem alcançados no estágio k é denotado por \mathcal{X}_k . Portanto $x_k \in \mathcal{X}_k$.

Variável de controle

O *controle* c_k representa uma decisão tomada no estágio k . O conjunto de controles possíveis de serem selecionados quando o sistema se encontra no estado x_k é denotado por $C_k(x_k)$. Isto é, $c_k \in C_k(x_k)$ para todo $x_k \in \mathcal{X}_k$ e para todo k . O conjunto de controles possíveis a serem selecionados no estágio k é denotado por \mathcal{C}_k , onde $C_k(x_k) \subset \mathcal{C}_k$.

Estados da natureza

A variável de *estado da natureza* (também chamado de perturbação ou ruído) é um parâmetro aleatório. O estado da natureza w_k é caracterizado por uma distribuição de probabilidade $P_k(\cdot|x_k, c_k)$ que pode depender explicitamente de x_k e c_k mas não de valores de estados da natureza anteriores $w_{k-1} \dots w_0$.

Dinâmica do sistema

A *dinâmica do sistema* é a forma como este evolui ao longo dos estágios em função dos parâmetros e variáveis associados. Sua forma é dada por

$$x_{k+1} = f_k(x_k, c_k, w_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

onde f_k é a função que descreve o sistema e, em particular, o mecanismo em que é atualizado.

Função custo (ou função lucro)

A *função custo* é aditivada no sentido que o custo ocorrido no estágio k , denotado por $g_k(x_k, c_k, w_k)$, é acumulado ao longo dos estágios. O custo total é dado por

$$g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, c_k, w_k),$$

onde $g_N(x_N)$ é o custo terminal incorrido no final do horizonte de tempo. Entretanto, como a presença de w_k , o custo depende de uma variável aleatória e não pode ser otimizado com base apenas em sua média. O problema é então formulado como uma otimização do *custo esperado*

$$\mathbb{E} \left[g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, c_k, w_k) \right],$$

onde a esperança está relacionada à distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias envolvidas. A otimização acontece sobre os controles c_0, c_1, \dots, c_{N-1} . Cada controle é escolhido com algum conhecimento prévio da variável de estado x_k , seja este conhecimento exato ou dado uma informação relacionada.

Políticas admissíveis

A classe de *políticas*, também conhecidas como leis de controle, consiste em uma sequência de funções

$$\pi = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}\},$$

onde θ_k atribui ao estado x_k o controle $c_k = \theta_k(x_k)$, tal que $\theta_k(x_k) \in C_k(x_k)$ para todo $x_k \in \mathcal{X}_k$. Estas políticas são chamadas *admissíveis*. O conjunto de todas as políticas admissíveis é denotado por Π .

Política e custo ótimos

Dado um estado inicial x_0 e uma política admissível $\pi = \{\theta_0, \dots, \theta_{N-1}\}$, os estados x_k e estados da natureza w_k são variáveis aleatórias com distribuições que segue o seguinte

sistema de equações:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, \theta_k(x_k), w_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Então, para uma dada função g_k , o custo esperado de π iniciando em x_0 é

$$J_\pi(x_0) = \mathbb{E} \left[g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, \theta_k(x_k), w_k) \right].$$

A *política ótima* π^* é aquela que minimiza o custo, isto é

$$J_{\pi^*}(x_0) = \min_{\pi \in \Pi} J_\pi(x_0).$$

A política ótima π^* está, portanto, relacionada a um estado inicial fixo x_0 . Entretanto, um aspecto interessante do problema básico da programação dinâmica é que é tipicamente possível achar uma política π^* que é simultaneamente ótimo para todos os estados. Este ponto será explorado posteriormente para o problema de portfólio ótimo.

O *custo ótimo* depende de x_0 e é denotado por $J^*(x_0)$, isto é:

$$J^*(x_0) = \min J_\pi(x_0).$$

2.3.2 Algoritmo de Programação Dinâmica

O *princípio da otimalidade* é a base da técnica de programação dinâmica. Sua formalização está na Definição 2.15 (ver Bertsekas (2005), página 18):

Definição 2.15. Seja $\pi^* = \{\theta_0^*, \dots, \theta_{N-1}^*\}$ a política ótima para o problema básico, e assumindo que quando utilizando π^* , um dado estado x_i ocorre no período i com probabilidade positiva. Considere o subproblema onde o sistema está no estado x_i no período i e o objetivo é minimizar o “custo de ir” do período i até o período N dado por

$$\mathbb{E} \left[g_N(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} g_k(x_k, \theta_k(x_k), w_k) \right].$$

Então, a política truncada $\{\theta_i^*, \theta_{i+1}^*, \dots, \theta_{N-1}^*\}$ é ótima para este subproblema.

O princípio da otimalidade sugere que uma política ótima pode ser construída por partes, primeiro construindo a política ótima para o subproblema do último estágio, depois estendendo a política ótima para o subproblema que envolve os dois últimos estágios, e assim por diante até que a política ótima seja construída para todo o problema. O algoritmo de programação dinâmica segue esta lógica, procedendo sequencialmente o problema de trás para frente. Sua formalização é dada na Proposição 2.4 (ver Bertsekas (2005), página 23):

Proposição 2.4. Para cada estado inicial x_0 , o custo ótimo $J^*(x_0)$ do problema básico é igual a $J_0(x_0)$, dado pelo último passo do seguinte algoritmo, que é processado de trás para frente no tempo do período $N - 1$ até o período 0:

$$J_N(x_N) = g_N(x_N),$$

$$J_k(x_k) = \min_{c_k \in C_k(x_k)} \mathbb{E}_{w_k} [g_k(x_k, c_k, w_k) + J_{k+1}(f_k(x_k, c_k, w_k))], \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (14)$$

onde a esperança é calculada em relação à distribuição de probabilidade w_k , que depende de x_k e c_k . Além disso, se $c_k = \theta_k^*(x_k)$ minimiza o lado direito da equação (14) para cada x_k e k , a política $\pi^* = \{\theta_0^*, \dots, \theta_{N-1}^*\}$ é ótima.

A prova desta proposição pode ser encontrada em Bertsekas (2005) (páginas 23 e 24). Idealmente, é bom usar o algoritmo de programação dinâmica para obter a expressão de J_k analiticamente. Entretanto, não é possível obter uma solução analítica em vários casos práticos e se torna necessário recorrer a execuções numéricas do algoritmo. O esforço computacional é proporcional ao número de possíveis valores de x_k , portanto para problemas complexos, este esforço pode ser considerável.

3 Previdência

Uma vez introduzidos conceitos importantes para a seleção de portfólio, o Capítulo sobre a formação de um plano de previdência pode ser apresentado com maior embasamento. Ele está organizado da seguinte forma: A seção 3.1 apresenta como estão estruturados os principais planos de previdência oferecidos atualmente. A seção 3.2 apresenta o mercado brasileiro de títulos públicos e suas características principais. Na seção 3.3, será apresentada a teoria clássica da seleção de portfólio, que fornecerá grande parte da estrutura necessária para a formulação matemática do problema. Finalmente, na seção 3.4, serão apresentadas algumas recentes pesquisas relacionadas à seleção de portfólio associadas a esta pesquisa.

3.1 Planos de Previdência

Segundo Sundaresan and Zapatero (1997), os planos de previdência dos setores público e privado possuem papel chave no funcionamento dos mercados financeiros. Estes planos fornecem um mecanismo para que consumidores economizem e podem influenciar os incentivos à aposentadoria. Conforme mencionado por estes autores, dada a dimensão dos ativos de previdência, não é surpreendente que fundos de previdência como classe são as instituições de investimento dominantes no mercado de capitais: um percentual significativo de ações e ativos de renda fixa são detidos por fundos de previdência. Estas observações sugerem que a valoração e políticas financeiras de planos de previdência devam ser de grande interesse para tomadores de decisão e pesquisadores.

Existem dois tipos básicos de planos de previdência: planos com benefícios definidos (DB⁸) e planos com contribuições definidas (DC⁹). Embora não sejam exclusivos de planos de previdência social ou privado, podem estar mais associados a algumas destas classes. Os planos DB e DC serão explorados nas seções 3.1.1 e 3.1.2, respectivamente. A seção 3.1.3 é destinada a uma discussão sobre os planos social, privado e doméstico.

⁸Em inglês: *defined-benefit*

⁹Em inglês: *defined-contribution*

3.1.1 Previdência com Benefícios Definidos

Segundo Blake et al. (2001), um plano DB típico oferece uma previdência que está relacionada ao salário final alcançado pelo membro do fundo logo antes de se aposentar e está indexado à inflação até a sua morte. Os riscos associados são suportados pelo patrocinador do plano, que geralmente é uma grande empresa, ao invés de serem suportados pelo membro. Entretanto, este tipo de plano possui baixa portabilidade. Então, quando o membro muda de emprego, ele pode estar sujeito a uma previdência bem menor. A baixa portabilidade dos planos DB cria um desincentivo a mudanças de emprego e, portanto, é um obstáculo considerável à flexibilidade do mercado de trabalho.

Rauh (2006) fez uma análise dos impactos dos planos DB do ponto de vista das empresas patrocinadoras. Segundo o autor, empresas que patrocinam planos DB devem fazer contribuições financeiras ao fundo de previdência de acordo com fórmulas específicas legais.

Segundo este autor, se o valor de mercado dos ativos do fundo de previdência é maior que o valor presente descontado dos pagamentos prometidos aos funcionários, o plano é considerado “sobrefinanciado”. Empresas com planos sobrefinanciados não precisam fazer contribuições aos fundos. Elas podem escolher fazer, mas até um certo limite.

Por outro lado, Rauh (2006) menciona que se o valor de mercado dos ativos for menor que o valor presente descontado das obrigações, o plano de previdência é considerado “subfinanciado”. Neste caso, é exigido que a empresa faça contribuições de acordo com uma função não linear complexa. Estas contribuições causam um impacto direto nos recursos financeiros da empresa. Se a empresa possui restrições financeiras, as contribuições exigidas podem também afetar sua capacidade em investir em capital novo, de conduzir pesquisa e desenvolvimento, e de fazer novas aquisições.

3.1.2 Previdência com Contribuições Definidas

Ao contrário dos planos DB, Rauh (2006) ressalta que os planos DC não sofrem de problemas de portabilidade, já que é fácil de ser transferido entre empregos. Entretanto, é imposto ao membro um conjunto de riscos e outros problemas. O membro pode ter que pagar taxas excessivas e outros custos impostos pelo provedor do plano, como taxas administrativas, de gestão do fundo, de marketing, etc. O membro suporta o risco do preço

dos ativos, como o risco de perda no valor do fundo de previdência devido à queda no preço dos ativos especialmente no período logo antes da aposentadoria. Ao se aposentar, o membro também suporta o risco da taxa de juros da economia. Se ao aposentar, as taxas estiverem baixas, a receita da aposentadoria será permanentemente baixa. Além disso, também existe o risco associado à inflação não antecipada após a aposentadoria.

Emms and Haberman (2008) apresentam uma divisão de duas fases nos planos DC. A primeira fase é chamada de fase de acumulação (ou fase pré-aposentadoria), quando os membros fazem contribuições ao fundo de previdência. Estas contribuições são investidas em um portfólio de ativos com um perfil de risco particular. A segunda fase é chamada de fase de distribuição (ou pós-aposentadoria), quando os membros recebem uma receita periódica do fundo a fim de proporcionar suporte financeiro na velhice.

Segundo Cairns et al. (2006), uma estratégia popular de alocação de ativos para a gestão de risco durante a fase de acumulação de um plano de DC é a “estilo de vida determinístico”. Nesta estratégia, as contribuições são totalmente investidas em ações. Então, em uma data predeterminada (e.g., 10 anos) antes da aposentadoria, as ações são gradualmente substituídas por títulos em uma taxa igual ao inverso da duração do período de troca (1/10 anos, ou 10% ao ano). No momento da aposentadoria, todos os ativos detidos são títulos, que são então vendidos para fornecer uma renda vitalícia de previdência. O objetivo desta estratégia é reduzir o impacto na previdência de uma queda catastrófica no mercado de ações logo antes do investidor se aposentar e para cobrir o risco da taxa de juros inerente à decisão de aquisição anual.

3.1.3 Previdência Social, Privada e Doméstica

A política de alocação dos planos de previdência social é uma questão ainda em aberto. Lucas and Zeldes (2009) apresentam dois pontos de vista em relação a como os fundos de previdência social devem investir. A primeira linha acredita na prática de investimentos altos em ações de maior risco e com maior retorno esperado, argumentando que o maior retorno esperado irá reduzir futuras receitas fiscais necessárias e também irá reduzir o déficit do fundo ao longo do tempo. Já a segunda linha defende uma abordagem mais conservadora, que busca reduzir a volatilidade dos níveis de financiamento e a probabilidade de déficit durante crises econômicas, quando os recursos governamentais já estão

restringidos.

Segundo Heijdra and Romp (2009), os avanços feitos na redução do processo de mortalidade têm impactado os sistemas de previdência. Em particular, os planos de previdência social na maioria dos países desenvolvidos oferecem promessas que não podem ser cumpridas sem significantes reformas do sistema. Sem estas reformas, os sistemas atuais são insustentáveis do ponto de vista fiscal. Nesta linha, Lacomba and Lagos (2009) citam as principais propostas para neutralizar os futuros problemas financeiros, como aumento das taxas, corte de benefícios, adiamento da idade de aposentadoria.

Neste sentido, Rauh (2006) diz que os contribuintes passam, então, a considerar os riscos e retornos dos planos de previdência social quando estão formando seus próprios portfólios. Assim, podem ajustar as alocações feitas nos fundos sociais através mudanças em seus próprios portfólios. Portanto, os regimes de previdência estão atualmente passando por duas grandes transições, conforme apresentado por Blake et al. (2001): uma substituição de previdência social para previdência privada; e, dentro dos fundos privados, uma substituição de planos DB para planos DC. Estas mudanças envolvem a transferência dos riscos já comentados dos contribuintes e patrocinadores dos planos DB para os membros individuais dos planos DC.

O recente declínio dos planos tradicionais de previdência DB com conseqüente migração para planos DC e redução dos benefícios dos planos sociais como adequação à sua sustentabilidade também são temas abordados por Pang and Warshawsky (2010), entretanto do ponto de vista dos planos de previdência domésticos. Segundo estes autores, planos DC são, em muitos casos, geridos pelos próprios participantes.

Em seu estudos, os autores chegam a conclusões semelhantes a aquelas apresentadas por Cairns et al. (2006): A incerteza associada a despesas com saúde não asseguradas geralmente levam a maiores precauções nos investimentos. Assim, participantes racionais de portfólios domésticos devem substituir seus ativos de risco (ações) para ativos livres de risco (títulos) ao longo do tempo, dado o nível desejado de exposição ao risco.

De acordo com MadDonald and Cairns (2009), planos de previdência DC vêm crescendo em todo o mundo, tanto em sistemas de previdência privada quanto social. Seguindo esta tendência, será avaliado neste trabalho o portfólio ótimo de alocação de um plano DC, que é aplicável aos sistemas de previdência social, privado e doméstico.

3.2 Títulos Públicos

Os títulos públicos têm como objetivo principal captar recursos para o financiamento da dívida pública de um país, assim como financiar atividades governamentais (Tesouro Direto, 2013). Eles constituem uma importante classe de investimento em renda fixa. Muitas vezes são tidos como ativos livres de risco em problemas de seleção de portfólio, pois são considerados pelo mercado como ativos de baixíssimo risco.

Exemplos de aplicação de títulos públicos como ativos livres de risco podem ser encontrados em: Topaloglou et al. (2008), que consideram a taxa de retorno de um título público de um mês como a taxa livre de risco; e Brown and Smith (2011), que consideram o retorno médio de um título público de três meses como a taxa livre de risco. Outros artigos como o de Çanakoğlu and Özekici (2010), Fu et al. (2010), Nocetti and Smith (2011) e Jin and Zhang (2013) também utilizam títulos de forma genérica como referência para a taxa livre de risco.

No caso particular desta dissertação, os títulos serão considerados como ativos de risco no segundo caso de comportamento míope a ser descrito posteriormente. Nesta linha, estão os trabalhos de Campebell and Viceira (2001) e Ekeland and Taffin (2005). Portanto, é importante compreender os diferentes tipos de títulos que são ofertados pelos governos e suas particularidades. Na seção 3.2.1 será apresentada o mercado brasileiro de títulos públicos, com recentes alterações de regra e principais características. Na seção 3.2.2 serão apresentados os diferentes tipos de títulos ofertados pelo Tesouro Nacional brasileiro.

3.2.1 Mercado brasileiro de títulos públicos

Até pouco mais de dez anos atrás, pessoas físicas só podiam comprar títulos públicos brasileiros através da aquisição de cotas de fundos de investimento de bancos, corretoras e outras instituições financeiras. O volume mínimo de compra era de aproximadamente R\$50.000,00.

Em 2002, um programa de venda de títulos públicos para pessoas físicas diretamente através da internet, chamado Tesouro Direto. Pequenos investidores passaram a poder comprar um mínimo de 20% de uma unidade de título, cerca de R\$100,00, um valor significativamente inferior ao modelo anterior ao programa. Além disso, os investidores não

estavam mais sujeitos a altas taxas de custódia cobradas pelas instituições intermediárias, que cobravam valores próximos a 2% ao ano sobre o valor investido. Com a compra direta, as taxas de custódia caíram para valores entre 0% e 0,5% ao ano (Tesouro Direto, 2011).

Em 2012, novas mudanças foram anunciadas pelo Tesouro Nacional. Entre as principais mudanças então: redução limite mínimo de compra, que passou para 10% de uma unidade de título, cerca de R\$30,00; possibilidade de agendamento de compras mensais, neste caso sem pagamento de taxa de negociação; redução da taxa de negociação, que passou de 0,10% para 0,05% sobre o valor investido a partir da terceira compra realizada pelo agendamento prévio.

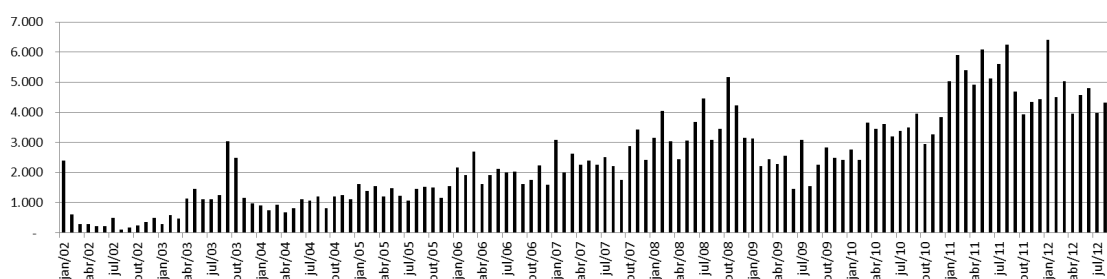


Figura 3: Novos investidores cadastrados no programa Tesouro Direto - Janeiro/2002 até Setembro/2012

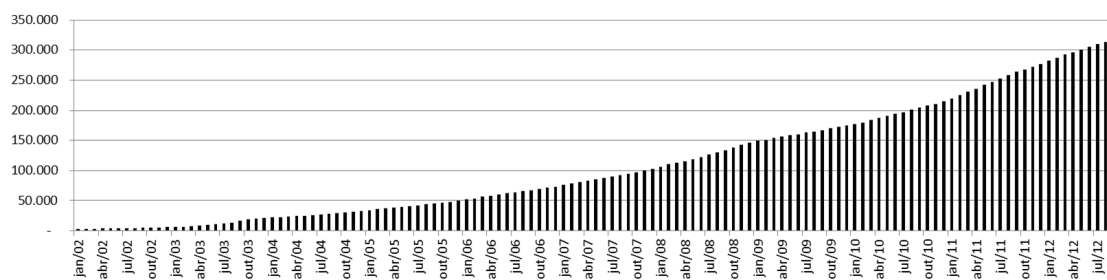


Figura 4: Total de investidores cadastrados no programa Tesouro Direto - Janeiro/2002 até Setembro/2012

A popularização do programa tem atraído cada vez mais investidores, conforme mostra a Figura 3. A Figura 4 mostra o constante crescimento do total de investidores cadastrados. As recentes mudanças foram feitas, entre outras razões, para incentivar a poupança de longo prazo (ver Figura 5); democratizar o acesso a compra de títulos públicos; e para oferecer uma alternativa de aplicação financeira com rentabilidade competitiva e segura. O Tesouro Nacional permite o acesso público de diversas informações sobre estatística e

formação de preços, fornecendo uma maior transparência ao investidor. Cada vez mais brasileiros se sentem atraídos pelo programa do Tesouro Direto, embora não estejam completamente preparados para decidir sobre sua carteira.

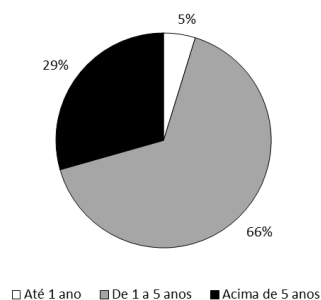


Figura 5: Prazo de vencimento dos títulos adquiridos no programa Tesouro Direto - 2011

3.2.2 Títulos públicos ofertados no Brasil

Pequenos investidores são cada vez mais incentivados a montar sua própria carteira de acordo com seus objetivos, combinando diferentes títulos com diferentes datas de vencimento. Muitos investidores têm optado por fazer depósitos periódicos para a formação de uma previdência. Assim, o investidor detém maior controle sobre a escolha entre rendimento e risco tolerado. Entretanto, a decisão sobre a composição nem sempre é trivial. O desconhecimento das regras e características dos títulos constitui uma grande barreira para aqueles que estão iniciando investimentos no programa. Além disso, pequenos investidores já experientes podem não tomar a melhor decisão sobre qual título comprar e quando comprar.

São cinco tipos de títulos públicos oferecidos que podem ser divididos em três categorias: prefixados; indexados no IPCA¹⁰; e indexados na SELIC¹¹. As duas primeiras categorias oferecem opção de cupons semestrais de juros, o que proporciona um fluxo de rendimentos periódicos.

¹⁰Índice de inflação calculado mensalmente pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), que reflete a variação dos preços das cestas de consumo das famílias com renda mensal de um a 40 salários mínimos, nas regiões metropolitanas de Belém, Fortaleza, Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo, Curitiba, Porto Alegre, Brasília e Goiânia.

¹¹Taxa média ajustada dos financiamentos diários apurados no Sistema Especial de Liquidação e de Custódia (Selic) para títulos federais. Para fins de cálculo da taxa, são considerados os financiamentos diários relativos às operações registradas e liquidadas no próprio Selic e em sistemas operados por câmaras ou prestados de serviço de compensação e de liquidez.

Cada tipo de título também pode ser oferecido com diferentes datas de vencimento. Se o investidor carregar o título até a data de vencimento, o retorno será aquele acordado no momento da aquisição. Entretanto, ele pode optar por vender o título para o Tesouro Nacional antes de sua maturação. Neste caso, será pago ao investidor um valor de mercado, que depende de variações na economia. Portanto, os títulos são sujeitos a desvalorizações de seu valor real, pois não acompanham completamente variações na economia e podem gerar prejuízos ou ganhos inesperados se liquidados antes do vencimento. Os títulos oferecidos no Tesouro Direto são os mesmos oferecidos às instituições financeiras, e serão descritos a seguir, conforme Tesouro Direto (2011).

Títulos prefixados

LTN: Letras do Tesouro Nacional

Investindo em títulos prefixados, o investidor sabe exatamente qual será o retorno do investimento se carregar o título até o vencimento. Entretanto, como esta categoria não acompanha variações na economia, como a inflação ou taxa básica de juros, o investidor está sujeito a perdas do poder aquisitivo. Este tipo de título é adequado a um perfil menos conservador, indicado para investidores que acreditam que a taxa prefixada será maior que a taxa de juros básica da economia.

NTN-F: Notas do Tesouro Nacional - Série F

Assim como a LNT, o investidor também sabe exatamente qual retorno terá ao final do contrato e também está sujeito a desvalorizações nominais do título, dadas as variações na inflação e taxa básica de juros. No caso da NTN-F, o investidor recebe semestralmente cupons de juros.

Títulos indexados no IPCA

NTN-B: Notas do Tesouro Nacional - Série B

Investindo em títulos indexados no IPCA, a rentabilidade contratada é um valor prefixado adicionado à taxa anual do IPCA. Portanto, é oferecido ao investidor um retorno real acima da inflação e protegido contra suas variações. Este título também oferece cupons

semestrais de juros, o que aumenta a liquidez possibilitando reinvestimentos. Entretanto, se o investidor não levar o título até o vencimento, também está sujeito a perdas, já que uma parcela do retorno contratado é prefixado.

NTN-B Principal

A NTN-B Principal se diferencia da NTN-B por não oferecer cupons semestrais. Assim, a parte do retorno prefixado é superior neste título se comparado ao anterior.

Títulos indexados na SELIC

LFT: Letras Financeiras do Tesouro

Este título oferece um retorno ao final do contrato indexado totalmente à taxa de juros da economia, a SELIC. É indicado para investidores mais conservadores que desejam títulos que flutuem em função da expectativa da SELIC. Também oferece um fluxo simples de pagamento, pois não existem variações que fornecem cupons semestrais de juros.

É interessante notar que, na verdade, os títulos públicos nem sempre são ativos de baixo risco. De fato, se o investidor não carregá-lo até seu vencimento poderá realizar prejuízos consideráveis. Além disso, os títulos não acompanham completamente variações na economia, como alta e queda da inflação e da taxa básica de juros. Portanto, mesmo na data de vencimento, podem ocorrer perdas em relação ao valor real do título. Finalmente, é necessário conciliar os prazos de vencimento oferecidos com o horizonte de investimento. Nem sempre existem títulos disponíveis para compra que acompanham o horizonte de investimento exato determinado pelo investidor.

3.3 Seleção de Portfólio - Teoria Clássica

A teoria de seleção de portfólio desenvolvida por Markowitz (1952), Mossin (1968), Samuelson (1969) e Merton (1971) é considerada por muitos pesquisadores (e.g., Brandt (2010), Çanakoglu and Özekici (2010), Fu et al. (2010) e Brown and Smith (2011)) como importante base para a formulação das estratégias de investimento atuais. A formulação do problema de formação de um plano de previdência terá como base esta teoria de seleção de portfólio.

A literatura sobre seleção de portfólio se inicia com o problema de média-variância proposto por Markowitz (1952), que será apresentado na seção 3.3.1. A seção 3.3.2 é dedicada à formulação do problema de seleção de portfólio através da programação dinâmica estocástica, com base nos trabalhos pioneiros de Mossin (1968) e Samuelson (1969). A seção 3.3.3 possui importância particular, pois apresenta o conceito de miopia introduzido por Mossin (1968), que será utilizado na formulação proposta neste trabalho. Finalmente, a seção 3.3.4 apresenta o portfólio ótimo proposto por Merton (1971). A discussão sobre o portfólio ótimo e as implicações em relação ao comportamento míope é essencial para a formulação proposta.

3.3.1 Paradigma de Markowitz

O problema de seleção de ativos para a composição de um portfólio foi primeiramente apresentado por Markowitz (1952). Este autor introduziu a importância da diversificação para a redução da variância do retorno do portfólio. Em seu trabalho, Markowitz mostra que uma combinação linear de diferentes ativos pode gerar um portfólio com mesmo retorno esperado que um único ativo equivalente, porém com menor variância. Portanto, a diversificação contribui para a redução da variância, embora esta não possa ser completamente eliminada devido à existência de correlação entre o retorno dos ativos. Existe, então, uma taxa na qual o investidor pode aumentar o retorno esperado permitindo que a variância aumente, ou pode reduzir a variância aceitando um retorno esperado menor.

O problema de média-variância proposta por Markowitz (1952) possui a seguinte formulação: Seja e_i o retorno aleatório do i -ésimo ativo, onde $i = 1, \dots, d$. Seja σ_{ij} a covariância entre e_i e e_j (logo σ_{ii} é a variância de e_i). Seja λ_i o percentual do recurso do investidor que é alocado ao i -ésimo ativo, onde $\sum_i \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0$. A esperança retorno e variância do portfólio R é dado por

$$E[R] = \sum_{i=1}^d \lambda_i E[e_i] \quad \text{e} \quad \text{var}(R) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} \lambda_i \lambda_j.$$

Segundo Brandt (2010), a escolha do portfólio depende da tolerância ao risco do investidor. Para incorporar o trade-off ótimo do investidor entre o retorno esperado e risco, o problema de média-variância pode ser formulado de uma maneira alternativa como a

seguinte maximização da utilidade esperada:

$$\max_{\theta_i} \left[E[R] - \frac{b}{2} \text{var}(R) \right],$$

onde b é a medida do nível de aversão ao risco relativa do investidor.

Segundo Brandt (2010), o paradigma introduzido por Markowitz (1952) captura dois aspectos fundamentais do problema de escolha de portfólio: diversificação e trade-off entre retorno esperado e risco. Porém, existem várias objeções a este paradigma. Entre elas, Brandt (2010) ressalta que o problema de média-variância representa apenas um caso particular de maximização da utilidade esperada de uma utilidade de potência. Esta especificação de preferência é problemática, pois não é monotonicamente crescente com a riqueza. Além disso, segundo este autor, o problema de média-variância é um problema míope, um comportamento que será explorado na seção 3.3.3.

3.3.2 Formulação Dinâmica

Segundo Samuelson (1969), até então, grande parte das análises de seleção de portfólio, sejam de abordagens de média-variância ou outros tipos mais gerais, buscavam solucionar o problema em um único período de decisão. Os trabalhos de Mossin (1968) e Samuelson (1969) se coincidem no tempo e mostram como resolver o problema de seleção de portfólio através da programação dinâmica estocástica recursiva, processando de trás para frente conforme a abordagem de Bellman (1952). A formulação do problema de seleção de portfólio através da programação dinâmica estocástica será apresentada nesta seção, de acordo com a formulação apresentada por Bertsekas (2005).

Problema de um período

Mossin (1968) caracteriza o modelo de um único período através da seguinte estrutura: O investidor toma a decisão sobre seu portfólio ao início do período e aguarda até o fim deste, quando a taxa de retorno de seu portfólio se materializa. Ele não pode realizar nenhuma mudança intermediária na composição de seu portfólio. O investidor toma sua decisão com o objetivo de maximizar a utilidade esperada da riqueza ao final do período (riqueza terminal).

Variáveis e parâmetros

- x_0 : Riqueza inicial disponível para investimento;
- d : Número de ativos de risco;
- e_i : Taxa de retorno do i -ésimo ativo de risco, onde $i = 1, \dots, d$;
- $s = e^r$: Taxa de retorno do ativo livre de risco.

Controle

A variável c_i representa a quantidade investida no i -ésimo ativo de risco. A quantidade investida no ativo livre de risco é dada por $(x_0 - c_1 - \dots - c_d)$. Inicialmente, não há restrições na quantidade c_i , portanto é possível fazer empréstimos no ativo livre de risco para aplicação em ativos de risco.

Dinâmica do sistema

A riqueza ao final do primeiro período é dada por

$$\begin{aligned}x_1 &= s(x_0 - c_1 - \dots - c_d) + \sum_{i=1}^d e_i c_i \\ &= s x_0 + \sum_{i=1}^d (e_i - s) c_i.\end{aligned}$$

Função objetivo

Seja $u(x)$ uma função utilidade Bernoulli, a função objetivo é dada por

$$\max_{c_i \in C(x_0)} \mathbb{E}_{e_i} \left[u \left(s x_0 + \sum_{i=1}^d (e_i - s) c_i \right) \right].$$

Políticas admissíveis

No problema de seleção de portfólio, θ_k^i representa um possível montante investido no i -ésimo ativo que atribui ao estado de riqueza x_k o controle $c_k = \theta_k(x_k)$. Portanto, a

política $\pi = \{\theta_0, \dots, \theta_{N-1}\}$ representa uma sequência de alocações em ativos de risco.

Função custo ótima

Seja $J(x_0)$ o valor ótimo do problema, aplicando o algoritmo de programação dinâmica tem-se

$$J(x_0) = \max_{c_i \in C(x_0)} \mathbb{E}_{e_i} \left[u \left(sx_0 + \sum_{i=1}^d (e_i - s)c_i \right) \right].$$

Problema de Multiperíodos

O problema de seleção de portfólio de multiperíodos possui a seguinte estrutura: O investidor determina um momento no futuro em que planeja consumir qualquer montante de riqueza disponível que possuir. As decisões de investimento continuam sendo tomadas com o objetivo de maximizar a utilidade esperada de sua riqueza terminal. Entretanto, agora o horizonte de tempo é subdividido em N períodos. A cada um destes períodos, novas decisões podem ser tomadas sobre a composição do portfólio, isto é, a riqueza atual pode ser reinvestida no início de cada período (Mossin, 1968).

Variáveis e parâmetros

- N : Número de períodos em que o horizonte de tempo foi dividido;
- k : Estágios de tomada de decisão, onde $k = 0, 1, \dots, N - 1$;
- x_k : Riqueza disponível para investimento no estágio k ;
- d : Número de ativos de risco;
- e_i^k : Taxa de retorno do i -ésimo ativo de risco durante o k -ésimo período;
- $s_k = e^{r_k}$: Taxa de retorno aleatória do ativo livre de risco durante o k -ésimo período.

Controle

A variável c_i^k representa a quantidade investida no i -ésimo ativo de risco no k -ésimo estágio de decisão. A quantidade investida no ativo livre de risco é dada por $(x_k - c_1^k - \dots - c_d^k)$. Igualmente, não há restrições na quantidade c_i^k .

Dinâmica do sistema

A riqueza ao final de cada período é dada por

$$x_{k+1} = s_k x_k + \sum_{i=1}^d (e_i^k - s_k) c_i^k.$$

Função objetivo

O objetivo é maximizar $E[u(x_N)]$, a esperança da utilidade terminal da riqueza x_k .

Função custo ótima

Seja $J(x_0)$ o valor ótimo do problema, aplicando o algoritmo de programação dinâmica tem-se

$$J_N(x_N) = u(x_N),$$
$$J_k(x_k) = \max_{c_i^k \in C_k(x_k)} \mathbb{E}_{e_i^k} \left[J_{k+1} \left(s_k x_k + \sum_{i=1}^d (e_i^k - s_k) c_i^k \right) \right].$$

Política e função custo ótimos

Seja $\theta_k^i(x_k)$ o montante investido no ativo i no período k , θ_k^i atribuído ao estado x_k o controle $c_k = \theta_k^i(x_k)$. Seja $\pi = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}\}$ uma política admissível, tal que $\pi \subset \Pi$, onde Π é o conjunto de todas as políticas admissíveis. Através do algoritmo de programação dinâmica, pode-se encontrar o valor ótimo para $J_0(x_0)$ dado por:

$$J_{\pi^*}(x_0) = \max_{\pi \in \Pi} J_{\pi}(x_0),$$

onde $\pi^* = \{\theta_0^*, \theta_1^*, \dots, \theta_{N-1}^*\}$ é a política ótima.

Para funções utilidade Bernoulli da família HARA, $u(x)$ possui o coeficiente de aversão ao risco positivo. Portanto, $J_N(x_N) = u(x_N)$ é côncava, contínua e duplamente diferenciável. Utilizando o Teorema 3.1 (ver Bertsekas (2005), página 467), é possível mostrar que $J_k(x_k)$ também é côncava, contínua e duplamente diferenciável.

Teorema 3.1. *Se $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é côncava, então a função $J(x) = \mathbb{E}_w[\psi(x+w)]$, onde w é*

um vetor aleatório em \mathbb{R}^n , é uma função côncava que fornece o valor esperado e é finita para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Aplicação para $J_k(x_k)$. Seja $J_{N-1}(x_{N-1})$ a função custo do estágio $N - 1$ do algoritmo de programação dinâmica, tem-se:

$$\begin{aligned}
J_{N-1}(x_{N-1}) &= \max_{c_i^{N-1} \in C_{N-1}(x_N)} E_{e^{N-1}} [u(x_N)] \\
&= \max_{c_i^{N-1} \in C_{N-1}(x_N)} E_{e^{N-1}} \left[u \left(\underbrace{s_{N-1}x_{N-1}}_x + \underbrace{\sum_{i=1}^d (e_i^{N-1} - s_{N-1}) c_i^{N-1}}_w \right) \right] \\
&= \max_{c_i^{N-1} \in C_{N-1}(x_N)} E_w [\psi(x + w)]
\end{aligned}$$

Portanto, $J_{N-1}(x_{N-1})$ é também côncava, contínua e duplamente diferenciável. Por indução, o mesmo se aplica a $J_k(x_k)$ para todo $k = 0, 1, \dots, N - 2$. \square

Esta propriedade será utilizada na seção 3.3.4.

3.3.3 Miopia

O comportamento míope possui uma importante participação neste trabalho. Ele foi primeiramente apresentado e discutido por Mossin (1968). Segundo o autor, quando a sequência ótima de decisões do investidor é obtida como uma série de decisões de um único período (começando no primeiro período), cada período é tratado como se fosse o anterior, então ele se comporta *miopiticamente*. Com miopia, o investidor baseia a decisão de cada período na riqueza inicial e na distribuição dos retornos apenas, com o objetivo de maximizar a utilidade da riqueza final daquele período desconsiderando o futuro completamente.

A relevância deste comportamento está na sintetização de problemas de multiperíodo em problemas de um único período de decisão. Assim, segundo Mossin (1968), o problema de gestão seria significativamente simplificado. Portanto, é válido isolar as funções utilidade em que tal comportamento é ótimo.

Para identificar estas funções, o autor utilizou a medida de aversão ao risco de Arrow

(1965) e Pratt (1964) para considerar a aversão ao risco do decisor em diferentes pontos de riqueza. A função utilizada

$$-\frac{u'(x)}{u''(x)} = a + bx \quad (15)$$

é o inverso da função de aversão ao risco absoluto e, geralmente, é chamada de *função de tolerância ao risco*. As funções utilidade que satisfazem esta função são as exponencial, logarítmica e de potência, que possuem as seguintes estruturas:

Exponencial: $-e^{(-x/a)}$, para $b = 0$ e $a > 0$;

Logarítmica: $\log(x + a)$, para $b = 1$;

Potência: $\left(\frac{1}{b-1}\right) (a + bx)^{\left(-\frac{1}{b}\right)}$, para $b \neq 0$ e $b \neq 1$.

Mossin (1968) classifica os comportamentos míopes em dois tipos: *miopia completa* e *miopia parcial*.

1. Miopia completa

A miopia completa é caracterizada pela escolha de funções utilidade com parâmetro $a = 0$. Neste caso, o efeito do tempo pode ser descartado. A miopia completa também acontece pela existência de um ativo livre de risco com taxa de retorno $r = 0$. Neste caso, o valor monetário ao longo do tempo não muda. Em ambos os casos, o investidor age como se o período imediato fosse o último período e nenhum ajuste na composição do portfólio é necessário.

2. Miopia parcial

A miopia parcial é caracterizada pela existência de um ativo livre de risco com taxa de retorno $r \neq 0$. Neste caso, a informação sobre a distribuição de probabilidade futura dos ativos de risco é desnecessária, sendo apenas relevante a informação futura sobre a taxa livre de risco r_k . O investidor pode tomar sua decisão imediata como se toda a riqueza resultante fosse investida na taxa livre de risco para todos os períodos subsequentes. Então, mesmo que não seja ótimo se comportar como se o período imediato fosse o último (como na miopia completa), o investidor pode se comportar como se a decisão imediata fosse a última.

A relação entre as condições necessárias e suficientes para otimalidade na presença de miopia e a função de tolerância de risco é apresentada na Tabela 1:

Tabela 1: Função de tolerância ao risco e o comportamento míope

Taxa livre de risco	Condições necessárias e suficientes para otimalidade em	
	Miopia Completa	Miopia Parcial
$r = 0$	$-u'(x)/u''(x) = a + bx$	
$r \neq 0$	$-u'(x)/u''(x) = bx$	$-u'(x)/u''(x) = a + bx$
sem ativo livre de risco	$-u'(x)/u''(x) = bx$	

3.3.4 Portfólio Ótimo

Merton (1971) derivou o portfólio ótimo para mais funções utilidades, sem se restringir ao comportamento míope. Em seu trabalho, é mostrado que a solução ótima pode ser encontrada analiticamente através de cálculos estocásticos assumindo tempo contínuo. Segundo ele, quando os ativos são gerados através de um movimento Browniano geométrico, o caso onde existem dois ativos (livre e risco e de risco) pode ser utilizado sem perda de generalidade. Nesta seção, o portfólio ótimo proposto por Merton será apresentado e suas implicações para o problema de multiperíodo serão discutidas.

Assumindo que os preços dos ativos seguem um movimento Browniano geométrico e aplicando o Lema de Itô, Merton (1971) deriva a equação diferencial parcial de otimalidade para $J_k(x_k)$ para uma utilidade $u(x)$ qualquer, desde que côncava, contínua e duplamente diferenciável. A alocação ótima para um ativo é então dado por:

$$\begin{aligned}
 \theta_k &= \frac{(\mu - s_k)}{\sigma^2 s_k} \left[bs_k x_k + \frac{a}{s_{N-1} \dots s_{k+1}} \right] \\
 &= \frac{(\mu - s_k)}{\sigma^2} \left[bx_k + \frac{a}{s_{N-1} \dots s_{k+1} s_k} \right] \\
 &= \frac{(\mu - s_k)}{\sigma^2} \left[-\frac{J'_k(x_k)}{J''_k(x_k)} \right].
 \end{aligned} \tag{16}$$

É válido notar que a equação de portfólio ótimo (16) depende da função de tolerância ao risco discutida anteriormente, entretanto para $J_k(x_k)$. Conforme apresentado na seção 3.3.2, a função $J_k(x_k)$ é côncava, contínua e duplamente diferenciável, e portanto também possui uma função de tolerância ao risco como $J_N(x_N) = u(x_N)$. As funções utilidade Bernoulli possuem portfólio ótimo dado pela equação (16) e, portanto, satisfazem a função de tolerância ao risco para $J_k(x_k)$:

$$-\frac{J'_k(x_k)}{J''_k(x_k)} = \frac{a}{s_{N-1} \dots s_{k+1} s_k} + bx_k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \tag{17}$$

Outro fato importante de ser notado é que o parâmetro a da função utilidade é descontado pela taxa de retorno do ativo livre de risco $s_k = e^{r_k}$ quando $s_k > 1$, tanto na função do portfólio ótimo quanto na função de tolerância ao risco para $J_k(x_k)$. Isto significa, que quando N é grande, nos estágios iniciais $a \rightarrow 0$ e o portfólio ótimo se aproxima daquele da política completamente míope onde $a = 0$. Então, conforme mencionado por Bertsekas (2005), a política parcialmente míope torna-se assintoticamente míope.

Esta é uma característica que o presente trabalho busca explorar e, portanto, ela será retomada na formulação matemática do problema na seção 4.1.

3.4 Seleção de Portfólio - Literatura Atual

A formulação do problema desenvolvida no Capítulo 4 está diretamente relacionada com esta seção, em que métodos e conceitos recentes importantes serão apresentados. A literatura atual associada a presente pesquisa pode ser dividida em três temas: Aquelas pesquisas direcionadas ao estudo da árvore de estados e como esta pode ser sintetizada para que o tempo computacional requerido para a solução do problema seja adequado (seção 3.4.1); aquelas pesquisas que abordam a importância da representação da correlação entre os ativos na formulação do problema (seção 3.4.2); e aquelas pesquisas que consideram a seleção de portfólio contemplando os diferentes títulos públicos como ativos de risco.

3.4.1 Árvore de Cenários

Segundo Topaloglou et al. (2008), a maior vantagem dos programas estocásticos é que estes não estão restritos a nenhuma suposição particular sobre distribuição de probabilidade para as variáveis aleatórias do modelo. Eles podem acomodar distribuições discretas arbitrárias que são expressas através de árvores de cenário. Assim, a árvore de cenários representa a evolução das variáveis aleatórias multivariadas durante o horizonte planejado.

Entretanto, conforme colocado por Topaloglou et al. (2008), o tamanho do programa estocástico de multiperíodo cresce substancialmente com o número de nós da árvore. Em problemas deste tipo, deve ser dada atenção para limitar o fator de “ramificação” para cada nó e, conseqüentemente, o número total de cenários para manter o tamanho do programa de otimização dentro de limites computacionalmente tratáveis. Métodos alternativos de procedimentos para a geração de árvores de cenário podem ser encontrados no trabalho

de Dupačová and Römisch (2003) e Heitsch and Römisch (2003), baseados nas medidas de probabilidade das variáveis aleatórias.

Outro trabalho que apresenta alternativas para problemas em que o espaço de estados é grande é aquele apresentado por Brown and Smith (2011). Segundo estes autores, grande parte das formulações de seleção de portfólio não consideram os custos transacionais de compra e venda de ativos. Na prática, estes custos podem ser significativos e impactar o valor do retorno esperado já que, a cada estágio, o portfólio deve ser rebalanceado (casos com comportamento não míope). Este trabalho apresenta estratégias de heurísticas para solucionar o problema de seleção considerando o custo de transação. Estas heurísticas são baseadas em modelos de otimização mais simples em associação com a programação dinâmica estocástica, o que reduz o tempo computacional requerido originalmente.

Linha de pesquisa envolvendo a representação através de árvores de cenário incluem também estudos sobre métodos de Monte Carlo aplicados a este problema. A pesquisa de Detemple et al. (2005), por exemplo, compara o desempenho de dois métodos de Monte Carlo aplicados ao problema de seleção de portfólio: o primeiro método foi proposto por Detemple et al. (2003) e é chamado de Monte Carlo com Derivadas de Malliavin¹²; e o segundo método foi proposto por Brandt et al. (2005) e é chamado de Monte Carlo com Regressão.

Segundo Brandt et al. (2005), embora seu método (Monte Carlo com Regressão) seja complementar ao método de Detemple et al. (2003), eles são conceitualmente diferentes. Detemple et al. (2003) apoiam-se na suposição de mercado completo para expressar o problema dinâmico como um problema estático e então usar a simulação para avaliar as esperanças através de métodos de Monte Carlo. Em seu método, Brandt et al. (2005) utiliza a regressão através da simulação para resolver recursivamente o problema de programação dinâmica.

No método de Brandt et al. (2005), o autor simplifica o problema de portfolio ótimo expandindo a função valor $J_k(x_k)$ em uma série de Taylor para o valor atual x_k crescendo

¹²O cálculo de Malliavin é o cálculo de variações no processo estocástico. Ele se aplica ao processo de Wiener, isto é, a variáveis aleatórias e processos estocásticos que dependem de trajetórias de movimentos Brownianos. A derivada de Malliavin, que é um dos elementos deste cálculo de variação, mensura o efeito de pequenas variações na trajetória do movimento Browniano de uma função de Wiener. A introdução sobre este cálculo e a proposição sobre o portfólio ótimo derivado de sua aplicação são detalhados em Detemple et al. (2005)

com a taxa livre de risco s_k até o final do horizonte $k = N - 1$ fazendo $u(s_{N-1} \dots s_k x_k)$. Com a expressão da derivada da expansão de Taylor igualada a zero, o autor utiliza métodos de regressão para estimar os parâmetros desta função e encontrar o portfólio ótimo. Para encontrar a riqueza atual x_k , é utilizada a simulação de Monte Carlo para gerar os caminhos aleatórios segundo $f_k(x_k)$.

As vantagens do método de Brandt et al. (2005) em relação a demais métodos, conforme exposto pelos autores, está do fato de este método conseguir lidar com problemas em que a distribuição condicional dos retornos depende de um grande número de variáveis com dinâmicas que potencialmente dependem do caminho ou de dinâmicas não constantes (não míopes). De acordo com estes autores, vários outros métodos recorrem a preferências com aversão ao risco relativa constante (CRRA), que são míopes, ou à sua extensão realizada por Epstein and Zin (1989), para eliminar a dependência das políticas de alocação sobre a riqueza e assim fazer o problema independente do caminho (míope). Mais importante ainda, vários destes outros métodos não conseguem lidar com o grande número de variáveis com dinâmicas complicadas, que surgem em muitos problemas de seleção de portfólio realistas.

3.4.2 Correlação

A importância da diversificação e efeitos da correlação para tomadas de decisão sobre alocação de ativos é ressaltada por Topaloglou et al. (2008). Segundo estes autores, o acesso a ativos internacionais é um interesse comum entre empresas multinacionais e instituições financeiras (e.g., bancos, empresas de seguro e fundos de previdência). Os benefícios deste tipo de investimento citados neste trabalho são: a possibilidade de maiores lucros em eventos de melhor desempenho em mercados estrangeiros; maior possibilidade de diversificação através de um maior conjunto de ativos disponíveis.; e exposição reduzida a riscos sistêmicos devido à baixa correlação entre os ativos.

De acordo com Çanakoğlu and Özekici (2010), na maioria dos problemas de decisões em multiperíodo, a taxa de retorno dos ativos durante os consecutivos períodos são assumidas como não correlacionadas. Na realidade, esta suposição não é correta e a correlação entre as taxas de retorno deve ser considerada. A taxa de retorno dos ativos nos mercados financeiros é aleatória e existem vários fatores econômicos, financeiros, sociais e políticos

que afetam sua distribuição de probabilidade conjunta. Este artigo discute uma formulação do processo de mercado através de uma cadeia de Markov.

Segundo You and Daigler (2010), estudos de diversificação geralmente empregam correlação constante para examinar os benefícios da diversificação. Entretanto, esta abordagem ignora o fato de a correlação frequentemente variar com o tempo e assim desviar da correlação constante.

Neste presente estudo, a correlação entre os ativos será considerada. A geração dos retornos dos ativos correlacionados será realizada através da geração de números multivariados introduzidos na seção 2.2.2, conforme apresentado por Glasserman (2004). Em Haugh, M. (2010), pode ser encontrado um guia de como realizar aplicações de geração de movimentos Brownianos correlacionados utilizando a decomposição de Cholesky da matriz de covariância.

3.4.3 Seleção de Portfólio e Títulos Públicos

Campebell and Viceira (2001) mencionam que pouca atenção tem sido dada a portfólios ótimos de títulos públicos para diferentes tipos de investidores. Uma razão para esta lacuna na literatura pode ser a grande dificuldade em se caracterizar estratégias de portfólio ótimo para investidores de longo prazo. Segundo estes autores, a teoria clássica de seleção de portfólio está baseada em suposições de que a taxa de juros da economia é constante ao longo do tempo, assim como a taxa da inflação. Portanto, o retorno dos títulos é assumido como determinístico e todos os títulos são perfeitamente substituídos por dinheiro.

Nesta mesma linha, Ekeland and Taffin (2005) apresentam a mesma lacuna entre as abordagens tradicionais de gestão de portfólios de títulos e de ações. Segundo estes autores, a gestão de portfólios de títulos se baseia em conceitos como duração, sensibilidade e convexidade, enquanto a gestão de portfólio de ações se baseia em maximização da utilidade esperada.

Ekeland and Taffin (2005) ressaltam que a teoria clássica de seleção de portfólio não se aplica diretamente a portfólios de títulos devido a diferenças significativas entre o comportamento dos títulos e ações. Uma importante diferença citada é o fato de que os títulos vencem em uma data predefinida após a qual eles se desaparecem do mercado, enquanto que as características das ações não mudam, com a exceção de reações ao noticiário de

negócios ou decisões de gestão.

Outra diferença relevante citada por Ekeland and Taflin (2005) está no fato de que o tempo de vencimento pode assumir valores infinitos, então existe uma infinidade de títulos diferentes. Uma primeira consequência destas diferenças é que o preço da ação depende apenas do risco que ela carrega (risco de mercado), enquanto que o preço do título depende tanto do risco que ele carrega (risco associado à taxa de juros, risco associado à inflação) quanto do tempo de maturação.

Assim, conforme apresentado por Ekeland and Taflin (2005), a análise matemática de um portfólio que inclui ações e títulos é complicada pelo fato de que os preços para cada um destes tipos de ativos evoluem ao longo do tempo de acordo com regras diferentes. Uma dificuldade adicional, devido à dependência do vencimento, é que algumas estratégias possíveis para ações não estão disponíveis para títulos: a estratégia simples de “buy-and-hold”, por exemplo, resulta na conversão de títulos para dinheiro no vencimento.

Em nosso conhecimento, as pesquisas existentes sobre seleção de portfólio com a presença de títulos não consideram todo o conjunto de títulos disponíveis. Conforme citado anteriormente, grande parte das pesquisas consideram apenas títulos prefixados como representação de um ativo com taxa livre de risco. Dentre aqueles que consideram títulos como ativos de risco, Campebell and Viceira (2001) por exemplo, estudam os efeitos do risco de inflação em portfólios ótimos de títulos. Isto é feito comparando a solução de um modelo em que apenas títulos indexados na inflação estão disponíveis com um modelo onde existem apenas títulos com retornos prefixados. Em ambos os modelos, não existem opções diferentes de maturidade ou opções de pagamentos de cupons. Já Ekeland and Taflin (2005) consideram títulos prefixados que não pagam cupom com diferentes datas de vencimento.

Para contornar esta lacuna sobre o comportamento dos diferentes títulos públicos, serão utilizados métodos paramétricos. Através destes métodos, pode ser possível aproximar o comportamento das taxas contratadas para cada título em cada estágio de decisão, assim como estabelecer um modelo de preço de venda do título em casos oportunos de liquidação antes do vencimento.

No próximo capítulo será apresentado o modelo matemático da formulação da pergunta de pesquisa apresentada no Capítulo 1.

4 Formulação do Modelo

Neste Capítulo, será apresentada a formulação matemática para responder à pergunta de pesquisa introduzida no Capítulo 1. A seção 4.1 é dedicada à formulação do problema e a uma discussão das principais suposições referentes a esta formulação. Na seção 4.2, será descrita a estrutura do modelo formulado.

4.1 Formulação do Problema

Esta pesquisa propõe a formulação de um modelo de apoio a decisão para o planejamento de um fundo de previdência com contribuições definidas. Uma novidade desta formulação está no fato de que o modelo proposto capta a mudança de comportamento do investidor, que é míope nos primeiros períodos da fase de contribuição e se torna não míope nos últimos períodos.

Conforme mencionado na seção 3.3.4, políticas não míopes se tornam-se assintoticamente míopes nos períodos iniciais quando o horizonte de tempo é suficientemente grande. Esta é uma característica que o presente trabalho busca explorar para sintetizar o problema de formação de uma previdência. No problema da previdência, o número de períodos N do horizonte de tempo pode ser suficientemente grande para que a política ótima de uma utilidade que não é completamente míope se aproxime da política míope nos estágios iniciais. Assim, o problema pode ser sintetizado nos estágios iniciais sem a necessidade de restringir o conjunto de utilidades possíveis a apenas utilidades míopes. Portanto, a segunda evidência de subotimalidade dos fundos de previdência apresentada na Introdução pode ser contornada através desta abordagem.

Outra novidade proposta nesta formulação é utilização de métodos paramétricos para aproximação da função custo $J_k(x_k)$ para os estágios finais, em que as políticas ótimas não são constantes. Esta formulação permite a construção de um modelo que não depende da construção da árvore de cenários e, conseqüentemente, reduz significativamente o número de estados necessários. Então, esta abordagem pode ser adequada para contornar o problema de formulações em que o número de estados cresce exponencialmente com o aumento do número de estágios, conforme apresentado na Introdução e discutido na seção 3.4.1.

Portanto, oferecemos um modelo para obtenção de uma solução satisfatória tratado

computacionalmente de forma eficiente. Estas duas abordagens propostas serão descritas na seção seguinte (4.2), ao final da formulação matemática proposta.

Suposições do modelo

As principais suposições do modelo estão listadas a seguir e serão discutidas posteriormente:

1. A alocação de recursos no portfólio de ativos pelo investidor é sensível ao retorno esperado deste portfólio;
2. Taxa de retorno das ações possui distribuição de probabilidade lognormal;
3. O ativo cujo retorno é livre de risco será representado por títulos públicos;
4. Taxas geralmente cobradas pelas instituições financeiras, relativas à movimentação de ativos e à gestão de fundos, não são consideradas.

Precificação neutra-ao-risco

Assim como em vários trabalhos relacionados a seleção de portfólio (e.g., Topaloglou et al. (2008), Çanakoglu and Özekici (2010), Fu et al. (2010) e Brown and Smith (2011)), não será utilizada a precificação neutra-ao-risco para replicar o comportamento a taxa de retorno dos ativos de risco (ações).

Segundo Hull (2002), a precificação neutra-ao-risco deve ser independente de qualquer variável que é afetada pela preferência de risco do investidor. Entretanto, o valor da taxa de retorno esperada μ depende de preferências sobre risco. Quanto maior for o nível de aversão ao risco do investidor, maior μ deve ser para uma dada ação. Ao contrário, na precificação neutra-ao-risco, Hull (2002) ressalta que o retorno esperado sobre todos os ativos é a taxa livre de risco r . Neste caso, os investidores não requerem um prêmio que os induzam a tomar riscos.

Conforme colocado por Hull (2002), esta suposição de precificação neutra-ao-risco é importante para simplificações na precificação de derivativos e não deve ser considerada no problema de seleção de portfólio, já que este último está baseado nas preferências de risco dos investidores representada pela função utilidade $u(\cdot)$.

Processo estocástico do retorno das ações

Segundo Glasserman (2004), apesar do fato de que a grande maioria dos modelos assumem que os ativos possuem caminhos de amostras contínuos, muitos estudos têm encontrado evidências da importância de *saltos* nos preços e argumentam a favor da inclusão destes saltos nos modelos de precificação. Entre as pesquisas sobre seleção de portfólio que consideram saltos em seus modelos estão He and Meng (2012) e Jin and Zhang (2013).

Em nosso modelo, não serão considerados os saltos. Entre as pesquisas que, assim como esta, não levam em consideração os saltos, estão Topaloglu et al. (2008), Çanakoğlu and Özekici (2010), Fu et al. (2010) e Brown and Smith (2011). Este ponto será revisitado no Capítulo 6, como oportunidade para futuras pesquisas.

Título público como ativo livre de risco

Nesta pesquisa em particular, serão explorados os três casos de comportamento míope apresentados na Tabela 1, da seção 3.3.3. Estes três casos são: taxa de retorno do ativo livre de risco igual a $r = 0$; com taxa de retorno $r \neq 0$; e um último modelo onde não existem ativos livres de risco disponíveis para investimento.

No segundo caso, onde $r \neq 0$, o ativo livre de risco considerado será um título público com prazo de investimento suficientemente longo em relação ao horizonte de tempo do plano de previdência considerado. Conforme mencionado na seção 3.2, esta suposição de retorno determinística em relação aos títulos públicos está presente em várias pesquisas.

Entretanto, esta suposição pode ser relaxada para representar a realidade de forma mais precisa, pois nem sempre um ativo com retorno determinístico está disponível (terceiro caso). Conforme mencionado na seção 3.2.2, os títulos públicos ofertados no Brasil não possuem retornos que refletem completamente as variações na economia.

Os títulos prefixados estão sujeitos a desvalorizações em seu valor real, pois não acompanham as variações na taxa de inflação. Isto é comum para grande parte das economias emergentes cujas taxas de inflação muitas vezes são significativamente altas e não podem ser desconsideradas. O mesmo acontece com os títulos indexados na taxa básica de juros da economia, que também não acompanham a taxa de inflação. Já os títulos indexados na taxa de inflação não acompanham as variações da taxa básica de juros da economia e, portanto, também estão sujeitos a desvalorizações ao longo de sua vida.

Taxas de movimentação e de gestão desconsideradas

Segundo Brown and Smith (2011), grande parte dos modelos formulados para determinar estratégias de investimento ótimas consideram ambientes que assumem a inexistência de custos transacionais. O mesmo também acontece com as taxas administrativas cobradas para gerenciar fundos. Esta pesquisa segue em linha com esta suposição, embora estes custos possam ser significativos e impactar a composição do portfólio ótimo.

Ainda segundo Brown and Smith (2011), sem os custos transacionais, a alocação ótima depende tipicamente apenas da riqueza do investidor mas não da composição do portfólio. Entretanto, com os custos de transação, o portfólio ótimo depende também da posição inicial nos ativos, e a dimensão do espaço de estados é pelo menos tão grande quanto o número de ativos considerados. O resultante problema de programação dinâmica passa a sofrer da grande dimensionalidade e se torna muito difícil de ser resolvido com mais de um ou dois ativos.

4.2 Modelo de Otimização de Portfólio

Nesta seção será apresentada a estrutura matemática do modelo proposto. A seção 4.2.1 é dedicada à formulação do problema tradicional. Na seção 4.2.2 é apresentada a formulação matemática referente à abordagem proposta de sintetização dos períodos iniciais em um único período de decisão. Por último, será apresentada na seção 4.2.3 a abordagem proposta de aproximação da função $J_k(x_k)$ utilizando um modelo paramétrico.

4.2.1 Modelo Tradicional

Horizonte de decisão

O horizonte de tempo considerado na fase de acumulação de um plano de previdência DC foi dividido N períodos. Os estágios de decisão sobre a alocação do montante a são indexados por $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Ativos disponíveis para investimento

Na formulação do modelo genérico, serão considerados dois tipos de ativos: ações e um ativo livre de risco. Seus comportamentos serão agora descritos.

Ações

Seja d o número de ações disponíveis para investimento ao longo de todo o horizonte de tempo. Seja S_k^i o preço da ação i no estágio k , a taxa de retorno da i -ésima ação no k -ésimo período é dada por

$$e_k^i = \frac{S_{k+1}^i}{S_k^i}.$$

Sabe-se que S_{k+1} é uma variável aleatória que segue uma distribuição lognormal, conforme apresentado na seção 2.2.1. Através da simulação de Monte Carlo, o processo estocástico seguido por e_k^i , quando os ativos são correlacionados, pode ser representado através da seguinte expressão:

$$e_k^i = \exp \left\{ \left(\mu_k^i - \frac{1}{2} \sigma_k^{i2} \right) + [A_k Z]_i \right\},$$

onde A é a matriz obtida através da fatorização de Cholesky apresentada na seção 2.2.2, μ_k^i é a taxa de retorno esperada da ação i durante o período k e σ_k^i é a volatilidade da ação i durante o período k . Esta expressão pode ser encontrada em Haugh, M. (2010).

Ativo livre de risco

Existe um ativo livre de risco com retorno $s_k = e^{r_k}$ por período. Este retorno representa um investimento em títulos públicos de longo prazo de investimento.

Variáveis de Decisão: Controles

Seja g_k a contribuição definida do investidor ao plano de previdência no estágio k . O controle c_k^i representa o montante investido na ação $i = 1, \dots, d$ no período k . Não é necessário controle para determinar o montante investido no ativo livre de risco, já que este pode ser obtido através das variáveis anteriores por:

$$(x_k + g_k) - \sum_{i=1}^d c_k^i,$$

onde x_k representa o estado em que o sistema se encontra, isto é, representa a riqueza do investidor ao início do k -ésimo período.

Estados da natureza

A cada estágio, os estados possíveis da natureza (ou perturbações aleatórias) são gera-

dos através da simulação de Monte Carlo. Cada desfecho $o_k = Z$ representa um valor possível para a variável normal padrão Z , conforme apresentado na seção 2.2.1. Portanto, representa um cenário para a taxa de retorno de cada ativo e_k^i . A partir deste desfecho, a variável de estado x_k pode ser determinada através da função de dinâmica do sistema f_k , que será descrita a seguir.

Dinâmica do sistema

Dada uma riqueza inicial $x_0 = 0$, e g_0 representa a primeira contribuição realizada pelo investidor ao fundo de previdência, dada uma política admissível $\pi = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}\}$ e uma perturbação o_k , o estado x_k é uma variável aleatória com distribuições definida através seguinte dinâmica de sistema

$$x_{k+1} = f_k(x_k, g_k, \theta_k(x_k), o_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

ou

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= s_k(g_k + x_k - \sum_{i=1}^d c_k^i) + \sum_{i=1}^d c_k^i e_k^i \\ &= s_k(g_k + x_k) + \sum_{i=1}^d c_k^i (e_k^i - s_k). \end{aligned}$$

Restrições da dinâmica do sistema

Nesta formulação, não serão consideradas possibilidades de empréstimos monetários para investimento no plano de previdência assim como não serão consideradas possibilidades de posição vendida. Segundo Jin and Zhang (2013), a teoria clássica de seleção de portfólio não considera estas restrições e, portanto, não se pode utilizar os resultados fechados propostos. As equações das restrições são:

1. Restrições a posição vendida:

$$c_k^i \geq 0 \quad \text{para todo } i = 1, \dots, d \text{ e para todo } k = 0, \dots, N - 1; \quad (18)$$

2. Restrição a empréstimos:

$$\sum_{i=1}^d c_k^i \leq x_k + g_k \quad \text{para todo } k = 0, \dots, N-1. \quad (19)$$

Função objetivo

Seja $u(x)$ uma função utilidade Bernoulli da classe HARA. O objetivo é maximizar a esperança da utilidade da riqueza terminal $u(x_N)$ sobre c_k^1, \dots, c_k^d :

$$\mathbb{E}[u(x_N)],$$

onde $u(x)$ satisfaz a equação (15) de tolerância ao risco:

$$-\frac{u'(x)}{u''(x)} = a + bx.$$

Algoritmo de programação dinâmica

Aplicando o algoritmo de programação dinâmica apresentado na seção 3.3.2, tem-se

$$J_N(x_N) = u(x_N),$$

$$\begin{aligned} J_k(x_k) &= \max_{c_k^1, \dots, c_k^d} \mathbb{E}[J_{k+1}(x_{k+1})] \\ &= \max_{c_k^1, \dots, c_k^d} \mathbb{E} \left[J_{k+1} \left(s_k(g_k + x_k) + \sum_{i=1}^d c_k^i (e_k^i - s_k) \right) \right]. \end{aligned}$$

A esperança é calculada em relação à variável aleatória e_k^i . g_k é a contribuição definida do investidor ao plano de previdência. Note que g_k não é função do estado, apenas do estágio. Em outras palavras, a contribuição do investidor não depende do valor do fundo de previdência e sim do horizonte de tempo.

Política e função custo ótimos

Seja $\theta_k^i(x_k)$ o montante investido na ação i no período k , θ_k^i atribuído ao estado x_k o controle $c_k^i = \theta_k^i(x_k)$. Seja $\pi = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}\}$ uma política admissível tal que $\pi \subset \Pi$, onde

Π é o conjunto de todas as políticas admissíveis. Através do algoritmo de programação dinâmica, pode-se encontrar o valor ótimo para $J_0(x_0)$ dado por:

$$J_{\pi^*}(x_0) = \max_{\pi \in \Pi} J_{\pi}(x_0),$$

onde $\pi^* = \{\theta_0^*, \theta_1^*, \dots, \theta_{N-1}^*\}$ é a política ótima.

Árvore de cenário

A árvore de estados se inicia no estado inicial x_0 . A cada estágio, os estados possíveis da natureza são gerados através da simulação de Monte Carlo. Cada desfecho o_k representa um cenário possível da taxa de retorno de cada ativo, do valor da taxa de inflação e do valor da taxa de juros. A partir deste desfecho, a variável de estado x_k pode ser determinada através da função de dinâmica do sistema $f_k(x_k, \theta_k(x_k), o_k)$.

Existem n desfechos possíveis para cada nó x_{k-1} . A variável n é determinada previamente e representa o número de caminhos aleatórios gerados na simulação de Monte Carlo. n deve ser grande o suficiente para que haja convergência da esperança do valor de $J_{k-1}(x_{k-1})$. É válido notar que n não está vinculado a um determinado estágio k . Logo, o número de desfechos o_k é o mesmo para cada nó x_{k-1} .

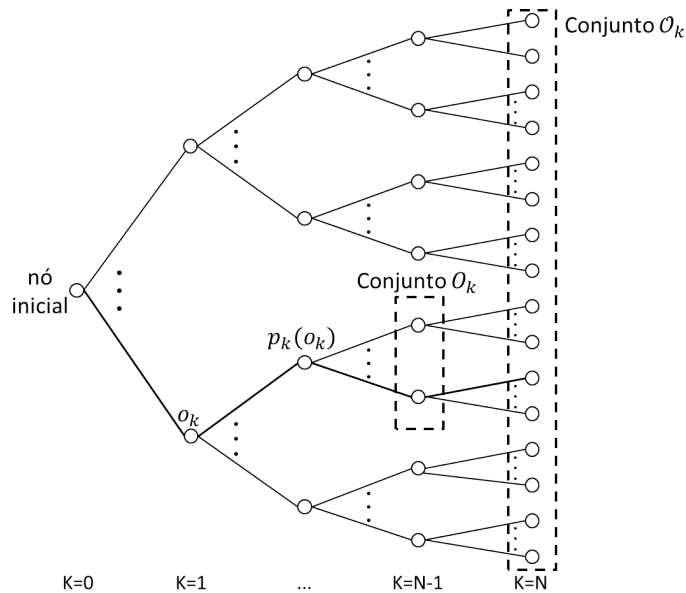


Figura 6: Forma geral de uma árvore de cenários

O conjunto de estados da natureza $O_k(x_{k-1})$ determina todos os desfechos possíveis de

um determinado estado anterior x_{k-1} , para cada controle possível. Isto é, $o_k \subset O_k(x_{k-1})$. O conjunto de estados da natureza \mathcal{O}_k contém todos os possíveis desfechos de um dado estágio, isto é, $O_k(x_{k-1}) \subset \mathcal{O}_k$. A Figura 6 ilustra uma árvore de estados tradicional.

4.2.2 Sintetização dos períodos iniciais

Retomando a equação (17) referente à função de tolerância ao risco para a função custo $J_k(x_k)$:

$$-\frac{J'_k(x_k)}{J''_k(x_k)} = \frac{a}{s_{N-1} \dots s_{k+1} s_k} + bx_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

pode-se perceber que, quando $s_k \geq 1$, o termo

$$\frac{a}{s_{N-1} \dots s_{k+1} s_k} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad N \rightarrow \infty.$$

Para um dado ε e um dado k^* tal que

$$\frac{a}{s_{N-1} \dots s_{k^*+1} s_{k^*}} \leq \varepsilon, \quad \text{faz-se} \quad \frac{a}{s_{N-1} \dots s_{k^*+1} s_{k^*}} = 0.$$

Conseqüentemente, a função de tolerância ao risco para a função de custo $J_k(x_k)$ terá a forma desejada que exhibe o comportamento míope, conforme Tabela 1 apresentada na seção 3.3.3:

$$-\frac{J'_k(x_k)}{J''_k(x_k)} = bx_k, \quad k = 0, 1, \dots, k^*.$$

Portanto, o subproblema de programação dinâmica de $k = 0, 1, \dots, k^*$ pode ser sintetizado em um subproblema de um único período de decisão. A função objetivo para o estágio inicial passa a ser maximizar, sobre os controles c_0^1, \dots, c_0^d :

$$E[J_{k^*}(x_{k^*})].$$

A Figura 7 ilustra a árvore de cenários após a sintetização dos primeiros períodos com comportamento míope. Observa-se que os nós entre os estágios de decisão $k = 0$ e $k = k^*$ são eliminados com este procedimento, o que naturalmente reduz o esforço computacional requerido para se obter uma solução satisfatória.

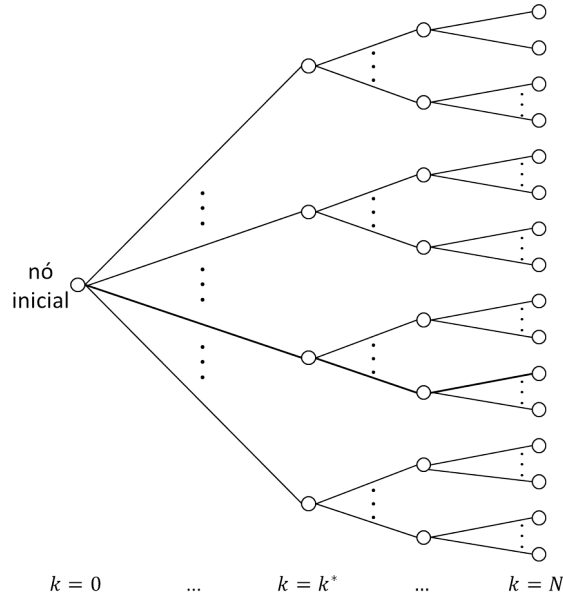


Figura 7: Forma da árvore de cenários em que os primeiros períodos exibem comportamento míope

4.2.3 Aproximação de $J_k(x_k)$

O portfólio ótimo pode ser encontrado algebricamente através da derivada primeira da função objetivo em relação aos controles. Os controles ótimos são aqueles que estão associados ao máximo da função custo ótima $J_k(x_k)$, ou seja, quando a derivada primeira em relação a estes é zero. Por exemplo, para encontrar os controles ótimos em $k = N - 1$ é necessário fazer:

$$\frac{\partial E[u(x_N)]}{\partial c_{N-1}^i} = E \left[(e_{N-1}^i - s_{N-1}) u' \left(s_{N-1} (g_{N-1} + x_N - 1) + \sum_{i=1}^d c_{N-1}^i (e_{N-1}^i - s_{N-1}) \right) \right] = 0, \quad (20)$$

onde $E[u(x_N)] = J_N(x_N)$, conforme visto anteriormente. Este cálculo muitas vezes não é trivial e geralmente a simulação de Monte Carlo é utilizada para realizá-lo.

Nesta proposta, iremos utilizar o método aproximação paramétrica para aproximar $J_k(x_k)$ sem recorrer à simplificação de $E[u(x_N)] = E[u(s_{N-1} \dots s_{k+1} x_{k+1})]$, utilizada por Brandt et al. (2005) e Çanakoğlu and Özekici (2010) (seção 3.4.1). Naturalmente, eliminando esta simplificação, espera-se que a solução obtida possua maior acurácia. Além disso, quando não existem ativos livres de risco disponíveis para investimentos (terceiro

caso da tabela 1), esta aproximação não pode ser feita, pois não existe um ativo com retorno determinístico s_k . A principal vantagem em aproximar $J_k(x_k)$ está na eliminação da construção da árvore de cenários e, conseqüentemente, redução do esforço computacional requerido.

Conforme apresentado na seção 3.3.2, a função custo $J_k(x_k)$ é côncava, contínua e duplamente diferenciável para todo x_k se $u(x_N)$ pertencer à família HARA. Assim sendo, $J_k(x_k)$ pode ser aproximada sem a necessidade de se construir toda a dinâmica do sistema (árvore de cenário) para obter quais possíveis estados em k seriam alcançados dada a seqüência de conjuntos de desfechos O_0, O_1, \dots, O_k e dado o conjunto de controles possíveis $c_k^i \subset C_k(x_k)$.

Para melhor compreensão e formulação matemática, os passos desta nova abordagem serão descritos a seguir:

Passo 1

Seja X um conjunto de estados arbitrários para qualquer k de tamanho Ω . Para cada $x_j \in X$, onde $j = 1, \dots, \Omega$, realiza-se uma simulação de Monte Carlo para calcular

$$J_{N-1}^{*j}(x_j) = \max_{c_{N-1}^1, \dots, c_{N-1}^d} \mathbf{E}[u(x_N)], \quad (21)$$

onde a esperança é obtida sobre as variáveis aleatórias e_{N-1}^i (retorno da ação i em $N-1$). Realizado este procedimento, serão obtidos os valores $J_{N-1}^{*1}, J_{N-1}^{*2}, \dots, J_{N-1}^{*\Omega}$.

Passo 2

A função custo ótima $J_{N-1}^*(x_{N-1})$ pode ser estimada através de um modelo paramétrico conforme equação (22), ao invés de ser calculada algebricamente através da equação (20):

$$J_{N-1}^*(x_{N-1}) = \beta_{N-1}^0 [u(x_{N-1} \beta_{N-1}^1)], \quad (22)$$

onde β_{N-1}^0 e β_{N-1}^1 são os parâmetros do modelo.

Conforme apresentado por Montgomery and Peck (2001), estes parâmetros podem ser estimados utilizando a minimização de mínimos quadrados não lineares. Seja $\hat{J}_{N-1}^*(x_{N-1})$ o valor da função custo estimada no estado x_{N-1} . Seja, por exemplo, escolhida uma

utilidade de potência em que a função custo em $N - 1$ tenha a seguinte estrutura:

$$\hat{J}_{N-1}^*(x_{N-1}) = \beta_{N-1}^0 \left(\frac{1}{b-1} \right) (a + \beta_{N-1}^1 bx)^{(1-1/b)}.$$

Portanto, o valor estimado $\hat{J}_{N-1}^{*j}(x_{N-1})$ pelo modelo paramétrico é uma função de:

$$\hat{J}_{N-1}^{*j}(x_{N-1}) = f(\beta_{N-1}, x_j).$$

O objetivo é estimar os parâmetros do modelo β_{N-1} a partir da minimização da Soma dos Quadrados dos Erros

$$\begin{aligned} \text{SQE}(\beta) &= \sum_{j=1}^{\Omega} \left(J_{N-1}^{*j}(x_{N-1}) - \hat{J}_{N-1}^{*j}(x_{N-1}) \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\Omega} \left(\hat{J}_{N-1}^{*j}(x_{N-1}) - \beta_{N-1}^0 \left(\frac{1}{b-1} \right) (a + \beta_{N-1}^1 bx_j)^{(1-1/b)} \right)^2. \end{aligned}$$

A solução para o seguinte sistema de equações não lineares deve ser encontrada:

$$\frac{\partial \text{SQE}}{\partial \beta_{N-1}^0} = 0$$

$$\frac{\partial \text{SQE}}{\partial \beta_{N-1}^1} = 0.$$

Entretanto, como as variáveis deste sistema são não lineares, o problema pode ser abordado através da utilização de uma expansão em série de Taylor de primeira ordem, do tipo:

$$f(\beta) = f(\beta^{(0)}) + f'(\beta^{(0)})(\beta - \beta^{(0)}),$$

onde $\beta^{(0)}$ representa o vetor com os elementos $\beta_{N-1}^{0(0)}$ e $\beta_{N-1}^{1(0)}$ e (0) representa a condição inicial do algoritmo a ser apresentado (passos $m = 0, 1, \dots$).

Seja $\gamma = 0, 1$. Seja

$$K_\gamma = \left. \frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta_\gamma} \right|_{\beta=\beta^{(0)}} (\beta_\gamma - \beta_\gamma^{(0)}).$$

A representação vetorial pode ser definida como:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\beta) &= \mathbf{f}(\beta^{(0)}) + \mathbf{K}^{(0)}(\beta - \beta^{(0)}) \\ &= \mathbf{f}^{(0)} + \mathbf{K}^{(0)}(\beta - \beta^{(0)}).\end{aligned}$$

Seja \mathbf{J} o vetor com os valores $J_{N-1}^{*1}, J_{N-1}^{*2}, \dots, J_{N-1}^{*\Omega}$ obtidos no Passo 1. A Soma dos Quadrados dos Erros pode então ser escrita como:

$$\begin{aligned}\text{SQE}(\beta) &= \|\mathbf{J} - [\mathbf{f}^{(0)} + \mathbf{K}^{(0)}(\beta - \beta^{(0)})]\|^2 \\ &= \|(\mathbf{J} - \mathbf{f}^{(0)}) - \mathbf{K}^{(0)}\Delta\beta\|^2 \\ &= \|\mathbf{J}^{(0)} - \mathbf{K}^{(0)}\Delta\beta\|^2,\end{aligned}$$

onde $\Delta\beta = (\beta - \beta^{(0)})$ e $\mathbf{J}^{(0)} = (\mathbf{J} - \mathbf{f}^{(0)})$. A solução de mínimos quadrados lineares é então dada por

$$\beta = \beta^{(0)} + \left([\mathbf{K}^{(0)}]^\top [\mathbf{K}^{(0)}]\right)^{-1} [\mathbf{K}^{(0)}]^\top \mathbf{J}^{(0)}.$$

Um processo iterativo pode ser criado seguindo a seguinte dinâmica:

$$\beta^{(m+1)} = \beta^{(m)} + \left([\mathbf{K}^{(m)}]^\top [\mathbf{K}^{(m)}]\right)^{-1} [\mathbf{K}^{(m)}]^\top \mathbf{J}^{(m)}. \quad (23)$$

O algoritmo de estimação dos parâmetros β consiste em atualizar os estimadores utilizando a equação (23) até o algoritmo convergir. Ou seja, até que $\|\beta^{(m+1)} - \beta^{(m)}\| \leq \epsilon$, onde ϵ é um nível de tolerância especificado pelo usuário. O software R possui uma função `nls()` que realiza este algoritmo para estimar os parâmetros do modelo paramétrico.

Passo 3

Uma vez obtida a expressão numérica de $J_{N-1}^*(x_{N-1})$ retorna-se ao passo 1 e executa a sequência de passos sucessivas vezes para $k = N - 2, N - 3, \dots, k^* + 1, k^*$, alterando a equação (21) por

$$J_k^{*j}(x_j) = \max_{c_k^1, \dots, c_k^d} \mathbb{E} [J_{k+1}^*(x_{k+1})]. \quad (24)$$

Portanto, o algoritmo de programação dinâmica será executado recursivamente para se encontrar a aproximação da função custo até se obter a função custo ótima $J_{k^*}^*(x_{k^*})$ em

k^* . A partir deste estágio, o problema é sintetizado em um problema de único período de decisão conforme descrito anteriormente.

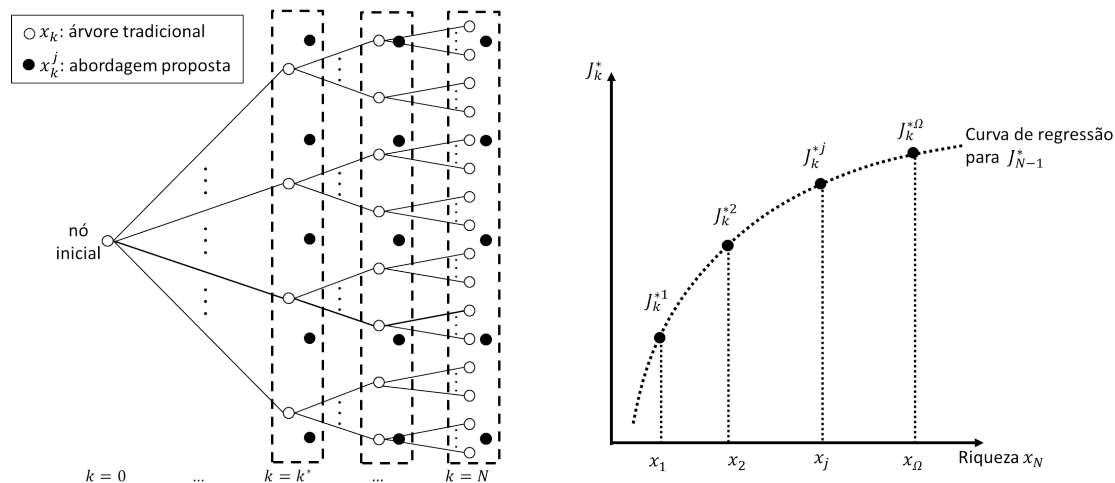


Figura 8: Ilustração da abordagem proposta

A Figura 8 ilustra a abordagem proposta. No diagrama à esquerda, os pontos pretos representam os estados arbitrários x_j . Nota-se que, com esta abordagem, o número de estados nos períodos $k = k^*, k^* + 1, \dots, N$ é reduzido significativamente. No gráfico à direita está ilustrada a curva para a aproximação de $J_k^*(x_k)$.

No próximo Capítulo (5), serão apresentados os resultados obtidos com a uma aplicação numérica do modelo proposto, explorando os três casos de miopia da Tabela 1 e abordagens propostas.

5 Exemplo Numérico

Nesta seção, será ilustrada a aplicação do modelo formulado no Capítulo anterior para um exemplo numérico para os três casos de comportamento míope apresentados na seção 3.3.3. É investigada a adequação do modelo paramétrico para aproximar a função custo $J_k(x_k)$, assim como os impactos no valor do portfólio ótimo e na sua composição quando aplicada a sintetização dos primeiros períodos em um único período de decisão. Portanto, será verificada a pertinência das duas abordagens propostas anteriormente.

Na seção 5.1, os principais parâmetros do exemplo numérico são apresentados. Cada caso de comportamento míope foi explorado e os resultados encontrados são apresentados e discutidos na seção 5.2.

5.1 Parâmetros do Modelo Básico

Horizonte de tempo e ativos

Neste exemplo numérico, a duração de um período de decisão equivale a um mês. O horizonte de tempo considerado foi de 10 anos ($N = 120$). Foram considerados como ativos disponíveis para investimento três ações contadas na Bolsa de Valores de São Paulo, dos setores Financeiro (PSSA3), Energético (CESP6) e Petroquímico (BRKM5).

Volatilidade

Com objetivo de ilustração, as observações dos preços das ações foram realizadas entre os dias 01 de novembro de 2012 e 31 de outubro de 2013, totalizando 247 dias de observação. Foram descontadas das taxas de retorno diárias a inflação referente a este período. A volatilidade destes ativos, por período, foi calculada de acordo com Hull (2002), páginas 239 e 240. Seja $l + 1$ o número de observações e seja S_t^i o preço da i -ésima ação ao final do t -ésimo intervalo de tempo observado, seja

$$q_t^i = \log \left(\frac{S_t^i}{S_{t-1}^i} \right) \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, l$$

a taxa de retorno desta ação. O desvio padrão de q_t^i é dado por

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{l-1} \sum_{t=1}^l (q_t^i)^2 - \frac{1}{l(l-1)} \left(\sum_{t=1}^l q_t^i \right)^2}.$$

Seja τ o comprimento do intervalo de tempo em meses. Assumindo que existem 21 dias de negociação por mês, a volatilidade da ação por mês é dada por:

$$\sigma_k^i = s_i \sqrt{21}.$$

A volatilidade por mês das três ações consideradas foram $\sigma_k = \begin{pmatrix} 0,032 & 0,040 & 0,042 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Retorno esperado

Seja $\bar{q}_i = \sum_{t=1}^l q_t^i$ a média da taxa dos retornos observados. O retorno médio esperado das ações por período é dado por:

$$\mu_k^i = 21 \times \bar{q}_i$$

Os retorno esperados encontrados foram $\mu_k = \begin{pmatrix} 0,0085 & 0,0089 & 0,0087 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Correlação

A correlação entre os ativos 1 e 2, 1 e 3, e 2 e 3 é $\rho_k = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,30 & 0,16 \end{pmatrix}$, reespectivamente. A matriz de covariância entre as três ações consideradas é:

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} 0,00065 & 0,00014 & 0,00015 \\ 0,00014 & 0,00050 & 0,00072 \\ 0,00015 & 0,00071 & 0,00039 \end{pmatrix}.$$

Ativo livre de risco

Além das três ações, foi considerado um ativo livre de risco no modelo básico. Tradicionalmente, o ativo livre de risco é representado por um ativo com menor propabilidade de *default*. Para ilustração, para representar o ativo cujo retorno é determinístico, foi escolhido um título público indexado na inflação sem pagamento de cupons (NTN-B Principal)

com taxa de retorno IPCA+6% ao ano, onde $r_k = 0,06/12$. Isto é, um retorno real de $s_k = \exp\{0,06/12\}$ ao mês. O ano de vencimento deste título é para 2030, maior prazo oferecido em outubro de 2013.

Contribuição definida

A contribuição definida feita pelo investidor é $g_k = 100$. Embora neste modelo os parâmetros relacionados aos ativos e à contribuição definida sejam constantes ao longo do tempo, esta simplificação pode ser facilmente alterada.

Os parâmetros σ_k , μ_k , ρ_k , r_k e g_k foram considerados constantes ao longo do horizonte de tempo. Esta é uma simplificação e diferentes valores ao longo do tempo podem ser atribuídos a estes parâmetros, desde que seu comportamento seja determinístico.

Caminhos aleatórios gerados

Na simulação de Monte Carlo realizada para a obtenção de J_k^* conforme expressão (24) relacionada ao Passo 1 da segunda abordagem proposta, foi utilizada a simulação de quasi-Monte Carlo. Este método de baixa discrepância apresentado em Glasserman (2004) é uma alternativa à simulação de Monte Carlo comum para acelerar a convergência. O software utilizado R possui um pacote para gerar sequências de quasi-Monte Carlo baseados na sequência de Sobol (ver Glasserman (2004), páginas 303 a 307).

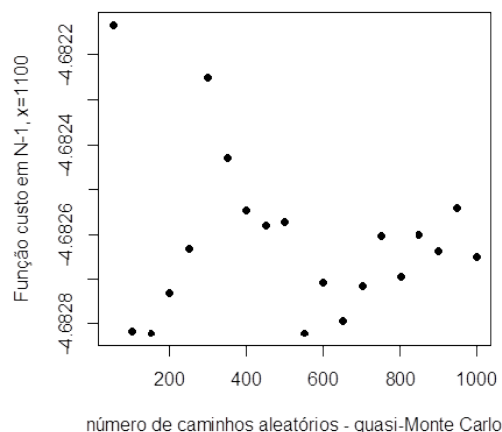


Figura 9: Caminhos aleatórios gerados na simulação *versus* esperança encontrada

Foram simulados $n = 1000$ caminhos aleatórios que representam os cenários possíveis

da variável aleatória e_k^i (taxa de retorno da ação i durante o período k). Para a escolha do número de simulações a serem realizadas, foi feito um teste de convergência do valor da função custo $J_{N-1}(x_{N-1} = 1100)$, que está ilustrado na Figura 9. Pode-se verificar que este valor oscila menos com o aumento do número de caminhos aleatórios gerados.

Controles admissíveis

As alocações dentre os ativos disponíveis admissíveis considerados foram percentuais de 2%. Isto significa que para um determinado ativo pode-se investir 0, 2%, 4%, ..., 98%, 100% do montante disponível para investimento. Dadas as restrições do problema de posição vendida (equação (18)) e a empréstimo (equação (19)), são 23.426 controles admissíveis para qualquer estado.

5.2 Análise dos Resultados

Nesta seção, serão analisados os resultados obtidos para o modelo numérico para os três casos de comportamento míope: quando existe um ativo com taxa de retorno livre de risco com $r_k \neq 0$ (5.2.1); quando não existe tal ativo (5.2.2); e quando a taxa de retorno deste ativo é $r_k = 0$ (5.2.3). Devido à característica recursiva da programação dinâmica, primeiramente será avaliada a abordagem paramétrica para aproximação da função custo ótima $J_k^*(x_k)$. Posteriormente, será avaliada a abordagem que explora o comportamento míope nos primeiros períodos de decisão para sintetizá-los em um único período.

5.2.1 Caso com $r_k \neq 0$

O primeiro caso relacionado ao comportamento míope a ser analisado é aquele onde existe um ativo cujo retorno é livre de risco e este é diferente de zero. Este é o caso mais presente na literatura e pode ser encontrado, por exemplo, em Detemple et al. (2005), Brandt (2010), Topaloglou et al. (2008), Fu et al. (2010) e Jin and Zhang (2013).

A função utilidade escolhida para ilustrar este caso é a de potência, dada pela expressão

$$\left(\frac{1}{b-1} \right) (a + bx)^{(1-1/b)}.$$

Serão comparados seis cenários, combinando os seguintes parâmetros: $a = 0$, $a = 20$,

$a = 1000$, $b = 0,1$ e $b = 0,5$. Desta forma, será possível analisar os diferentes resultados obtidos quando os parâmetros da utilidade escolhida variam. Observa-se que os cenários com $a = 0$ são aqueles que geram alocações míopes.

Quando $r_k \neq 0$, funções utilidade com o parâmetro $a \neq 0$ são parcialmente míope, ou seja, a utilidade terminal pode ser aproximada por

$$E[u(x_N)] = E[u(s_{N-1} \dots s_{k+1} x_{k+1})]. \quad (25)$$

Esta aproximação será comparada aos demais resultados obtidos no modelo número posteriormente nesta seção.

Aproximação da função custo ótima

Os resultados obtidos referentes à abordagem de aproximação da função custo $J_k(x_k)$ serão agora apresentados e discutidos. Os valores escolhidos arbitrariamente para o conjunto X , onde $x_j \in X$ são:

$$X = \left(10 \quad 100 \quad 200 \quad 500 \quad 1.000 \quad 5.000 \quad 10.000 \quad 50.000 \quad 100.000 \quad 250.000 \quad 500.000 \right).$$

A Figura 10 mostra a curva de aproximação de $J_k^*(x_k)$ para $k = N-10, \dots, N-50, N-100$. Os pontos em preto representam os valores de $J_k^*(x_j)$ e, a partir destes pontos, a curva foi aproximada através da expressão paramétrica 22:

$$J_k^*(x_k) \sim \beta_k^0 \left(\frac{1}{b-1} \right) (a + bx_k \beta_k^1)^{1-1/b}.$$

A Figura 11 mostra o diferente comportamento do parâmetro estimado $\hat{\beta}_k^0$ entre os cenários. Quanto maior o valor do parâmetro a da função utilidade, menos acentuada é a queda no valor de $\hat{\beta}_k^0$. Quanto maior o parâmetro da função utilidade b , maior é o valor de $\hat{\beta}_k^0$. A análise para $\hat{\beta}_k^1$ é diferente. Os valores estimados para $a = 1000$, tanto com $b = 0,1$ quanto com $b = 0,5$ são significativamente próximos, mas não são coincidentes. Já para valores menores de a , quanto menor b for, menor são os valores estimados para $\hat{\beta}_k^0$.

Esta evolução da dinâmica de $J_k^*(x_k)$ pode ser verificada na Figura 12. Nesta Figura, o gráfico à direita apresenta as mesmas informações que o gráfico à esquerda, entretanto para

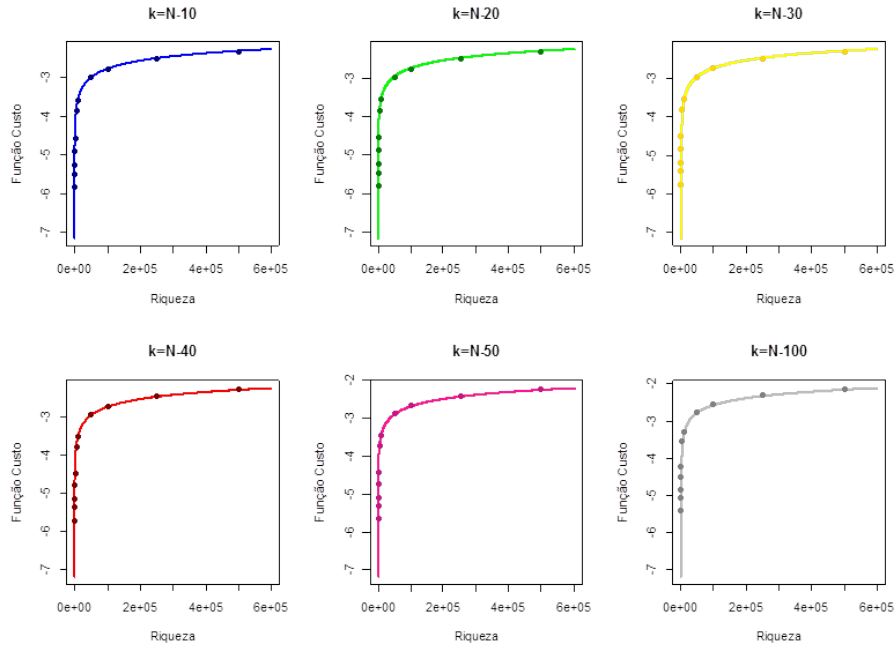


Figura 10: Curvas aproximadas da função custo ótima

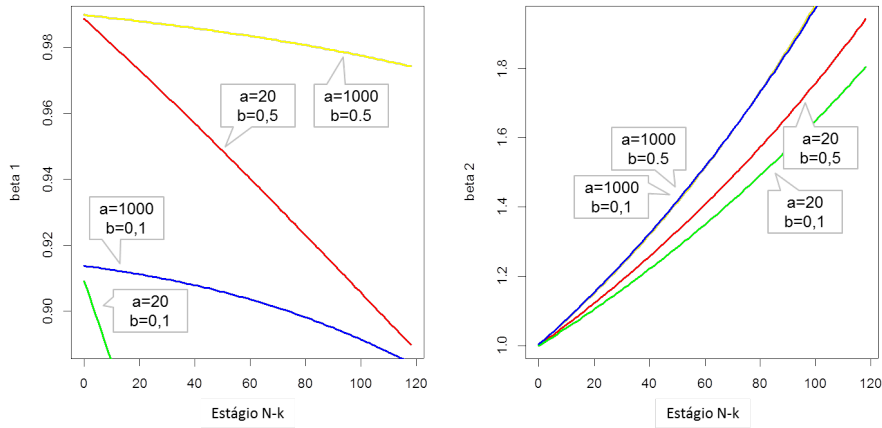


Figura 11: Parâmetros estimados para os diferentes cenários

um intervalo de x_k menor, ampliando as curvas. A curva preta representa $u(x_N)$, a azul representa $(J_{N-10}(x_{N-10}))$, a verde representa $(J_{N-20}(x_{N-20}))$ e assim sucessivamente até $k = N - 50$. As curvas em cinza representam a função custo em $N - 100$, $N - 200$, $N - 300$ e $N - 400$.

Varificação da adequação

Para avaliar a adequação da aproximação da função custo ótima $J_k^*(x_k)$, é necessário avaliar

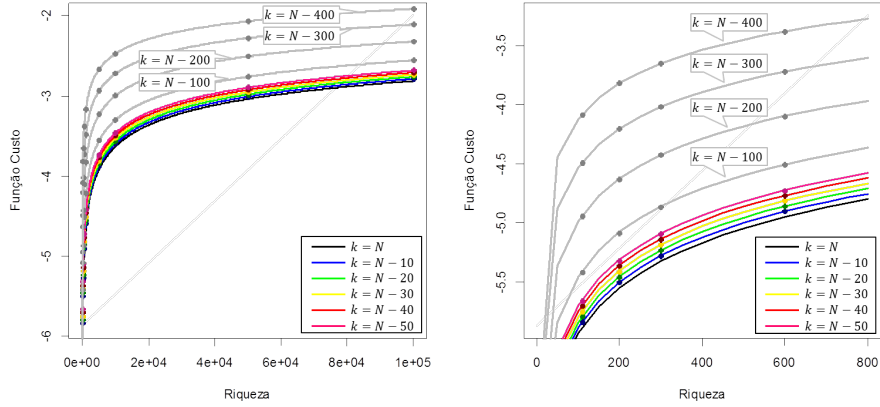


Figura 12: Evolução da curva de custo ótimo ao longo do horizonte de tempo

os indicadores deste modelo. Para estimar os parâmetros β_γ , foi utilizado o ambiente R, em particular, a função `nls()`, com o algoritmo de mínimos quadrados não lineares apresentado na seção 4.2.3.

Como esta é aproximação sem uma componente de erro aleatório, pode-se calcular o valor de R^2 para também verificar a adequação. Este valor revela o quão bem representada a função custo está através da expressão paramétrica sugerida. Isto é, o quanto da curva estimada é ajustada através da equação paramétrica que não é ajustada através de uma média simples das observações ($\bar{J}_k^*(x_j)$). Informações adicionais sobre o R^2 podem ser encontradas em Montgomery and Peck (2001).

Seja $\bar{J}_k^*(x_j)$ a média simples das observações $J_k^*(x_j)$, $\hat{J}_k^*(x_j)$ o valor estimado de $J_k^*(x_j)$ através do modelo paramétrico para os mesmos pontos x_j . Seja

$$SQ_{\text{Reg}} = \sum_{j=1}^{\Omega} \left(\hat{J}_k^*(x_j) - \bar{J}_k^*(x_j) \right)^2,$$

$$SQ_{\text{Res}} = \sum_{j=1}^{\Omega} \left(J_k^*(x_j) - \hat{J}_k^*(x_j) \right)^2$$

e

$$SQ_{\text{Total}} = SQ_{\text{Reg}} + SQ_{\text{Res}}.$$

O valor de R^2 é dado por:

$$R^2 = \frac{SQ_{\text{Reg}}}{SQ_{\text{Total}}}.$$

O valor encontrado para o modelo da curva paramétrica em $k = N - 1$ foi de 0,9999887. Isto significa que a equação paramétrica explica aproximadamente 100% da função custo $J_k(x_k)$ que a média simples entre as observações não explica. Portanto, a abordagem proposta se mostra adequada.

Alocação ótima

A Figura 13 mostra a alocação ótima para um mesmo estado ($x_k = 1.100$) ao longo do horizonte de tempo para os diferentes cenários obtidos. Observa-se que a alocação ótima nos períodos iniciais do problema se aproxima assintoticamente daquela míope (quando $a = 0$). Esta característica é aquela discutida na seção 4.2.3 e será discutida posteriormente nesta seção.

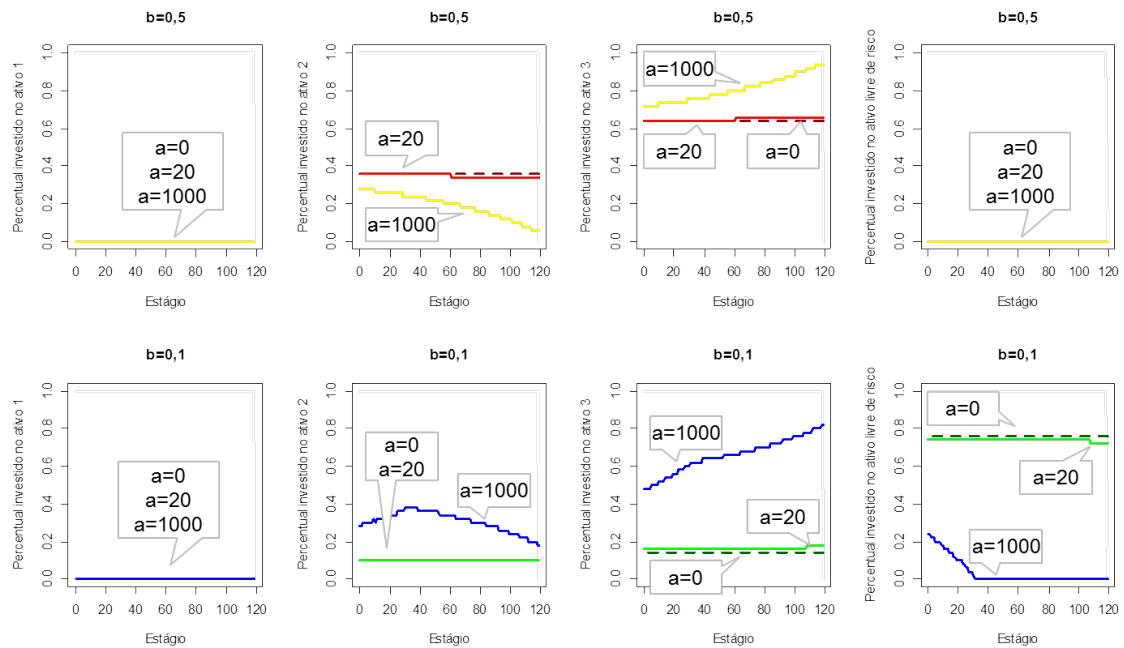


Figura 13: Comparação da alocação ótima para um mesmo estado $x_k = 1.100$ ao longo dos estágios de decisão para diferentes parâmetros da função utilidade

É interessante notar também na Figura 13 a interferência do ativo livre de risco no portfólio ótimo. Considerando os gráficos com $b = 0,1$ (gráficos inferiores), é possível verificar a mudança no comportamento da alocação nos ativos 2 e 3 a partir do momento em que o montante alocado ao ativo livre de risco deixa de ser nulo.

Retorno esperado do portfólio

A taxa de retorno esperada em relação à política ótima de alocação para cada cenário está na Tabela 2. Para os cenários com $b = 0,5$, as taxas obtidas são similares para valores diferentes de a , o que indicaria que a escolha da utilidade míope é razoável. Entretanto, isto de fato não se aplica a todos os casos. No caso onde $b = 0,1$, o cenário onde $a = 1000$, a taxa de retorno obtida é, aproximadamente, 4 pontos percentuais superior a aquela quando aplicada a alocação míope.

Destá forma, fica explícita a importância de se modelar o problema para utilidades não míopes. Nestes casos, por ser considerada a possibilidade de reinvestimento ao longo do tempo, o montante alocado a ativos de maior risco é superior, o que faz com que o retorno esperado do portfólio seja também superior. Portanto, a escolha de utilidades míopes é sempre igual ou subótima à escolha de utilidades não míopes.

Tabela 2: Retorno esperado do portfólio para diferentes parâmetros da função utilidade

Parâmetro b	$a = 0$	$a = 20$	$a = 1000$
$b = 0.1$	43,05%	43,07%	47,11%
$b = 0.5$	63,57%	63,58%	63,79%

Esforço computacional requerido

A principal diferença entre o tempo computacional requerido para resolver o problema resolvido tradicionalmente pela árvore de cenários e pela abordagem proposta de aproximação da função custo está no número de estados necessários a serem percorridos por estágio. A Tabela 3 mostra esta diferença para o exemplo numérico. Nota-se que número de estados a serem percorridos na formulação proposta é constante ao longo dos estágios de decisão. Entretanto, o mesmo não acontece na formulação tradicional através da árvore de cenários, onde o número de estados a serem percorridos cresce exponencialmente ao longo dos estágios de decisão.

Tabela 3: Número de estados percorridos para um único controle admissível

Estágio	Número de Estados	
	Abordagem proposta	Árvore tradicional
0	11×1000	1000
1	11×1000	1000^2
2	11×1000	1000^3
3	11×1000	1000^4
4	11×1000	1000^5

O tempo computacional requerido para gerar os estados em $N = 1$ na abordagem

tradicional é inferior a 10 segundos¹³. Já para gerar os estados em $N = 2$ na abordagem tradicional ultrapassa 3 horas. O tempo computacional requerido em minutos para resolver o problema de programação dinâmica combinado com simulação de Monte Carlo através da abordagem proposta de aproximação da função custo é apresentado na Tabela 4. Nota-se que, independe dos parâmetros a e b , os tempos requeridos para se resolver todo o problema de 120 períodos foram inferior a 15 minutos. Isto representa uma redução significativa de esforço requerido quando utilizada a abordagem proposta.

Tabela 4: Tempo computacional requerido total requerido em minutos

Parâmetro b	$a = 0$	$a = 20$	$a = 1000$
$b = 0.1$	0,06	12,16	11,96
$b = 0.5$	0,04	7,22	4,96

Tabela 5: Tempo computacional requerido médio por estado em segundos

Parâmetro b	$a = 0$	$a = 20$	$a = 1000$
$b = 0.1$	3,76	6,08	5,98
$b = 0.5$	2,45	3,61	2,48

O tempo médio requerido por estágio em segundos é apresentado na Tabela 5. Os tempos médios para $b = 0,1$ são superiores a aqueles requeridos para $b = 0,5$ pois o espaço de controles admissíveis é maior neste caso. A diferença está na alocação de recursos para o ativo livre de risco. Quando $b = 0,5$, os controles ótimos ao longo dos estados e estágios são zero para este ativo. Contudo, para $b = 0,1$, os controles ótimos para este ativo é diferente de zero em vários momentos de decisão.

Sintetização dos períodos iniciais

A principal vantagem de se sintetizar os períodos iniciais está na redução dos estágios considerados no algoritmo de programação dinâmica recursivo, que é interrompido em um determinado estágio k^* . A partir deste estágio, a função custo $J_{k^*}(x_{k^*})$ passa a ser aplicada aos demais estágios antecedentes $N = 1, \dots, k^* - 1$. Portanto, o portfólio ótimo θ_0^* no estágio inicial $k = 0$ é aquele que:

$$\max_{c_0^i \in C_0(x_0)} \mathbb{E}[J_1(x_1)] = \max_{c_0^i \in C_0(x_0)} \mathbb{E}[J_{k^*}(x_{k^*})]$$

¹³Os tempos citados são referentes a: Software R, processador Intel CORE i5, 4GB de memória

Alocação não míope e míope

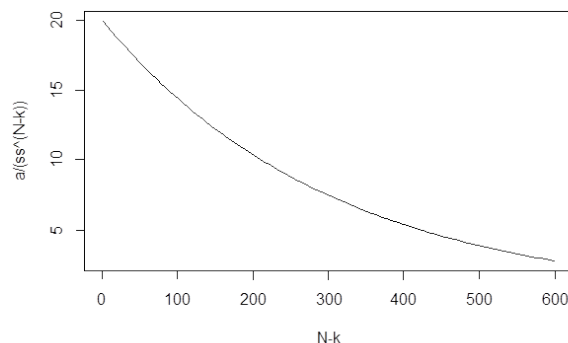


Figura 14: Parâmetro a descontado ao longo dos períodos

Conforme mostrado anteriormente na Figura 13, as alocações nos estágios iniciais do problema se aproximam daquela míope. Este fato, que foi discutido na seção 4.2.2, já era esperado. Esta é a característica esta pesquisa busca explorar. Isto acontece pois o parâmetro a é descontado pela taxa livre de risco $s^N > 1$ até que se torne suficientemente próxima de zero. Na Figura 14 está ilustrado a evolução do termo a/s^{N-k} . Conforme apresentado, este termo decresce exponencialmente se tornando assintoticamente zero.

Retorno esperado do portfólio

Para avaliar o impacto da escolha de diferentes valores para k^* , é necessário avaliar a variação na taxa de retorno esperado do portfólio. A Figura 15 mostra as diferentes taxas de retorno esperada líquidas para os diferentes cenários e valores de k^* . Em todos os gráficos, o primeiro ponto à esquerda representa a taxa de retorno do portfólio ótimo quando a alocação é míope. O segundo ponto representa a taxa de retorno quando não é utilizada a abordagem de sintetização dos períodos iniciais. Estes valores são aqueles mostrados anteriormente na Tabela 2. Os demais pontos representam as taxas de retorno quando aplicada a abordagem de sintetização escolhendo $k^* = 10$, $k^* = 20$, $k^* = 50$ e $k^* = 100$, sendo este último o ponto mais à direita.

Nestes gráficos é possível ver a diferença entre a alocação míope e não míope através da diferença entre o primeiro e segundo ponto. Conforme analisado anteriormente, a alocação míope gera sempre um valor esperado igual ou menor à alocação não míope. A variação entre o segundo ponto (sem sintetização), terceiro ($k^* = 10$) e quarto ponto ($k^* = 20$)

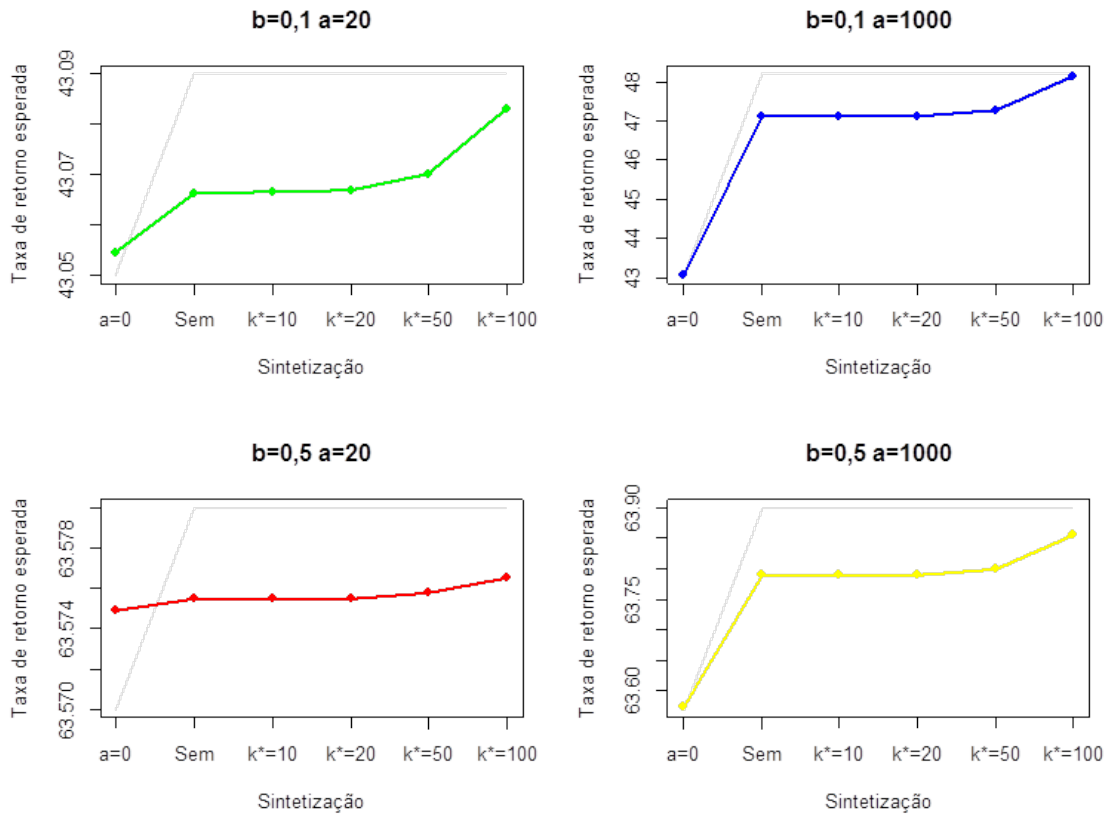


Figura 15: Comparação dos retornos esperados para diferentes valores de k^*

se mostra não relevante. Já para o quinto ponto ($k^* = 50$), a variação é percebida, aumentando significativamente no sexto ponto ($k^* = 100$).

Estas taxas podem ser consideradas superestimadas, pois quanto maior for o valor escolhido para o estágio k^* , menos avessa ao risco será a função custo $J_{k^*}(x_{k^*})$. Portanto, maior será o montante investido em ativos de maior risco. Esta suposição pode ser verificada através do cálculo do coeficiente de aversão ao risco absoluto e relativo para um mesmo valor do portfólio.

O coeficiente de aversão ao risco relativo para a função custo $J_k(x_k)$ quando uma utilidade de potência é escolhida é dado por:

$$r_R(x_k) = -x \frac{u''(x_k)}{u'(x_k)} = \frac{x_k \beta_k^1}{(a + \beta_k^1 b x_k)}. \quad (26)$$

Fazendo-se a derivada parcial da equação (26) em relação a β_k^1 , tem-se:

$$\frac{\partial r_R(x_k)}{\partial \beta_k^1} = \frac{ax_k}{(a + \beta_k^1 bx_k)^2} > 0.$$

Pode-se então concluir que, quando o valor de β_k^1 aumenta, para um mesmo valor de portfólio x_k , os coeficientes $r_A(x_k)$ e $r_R(x_k)$ aumentam. Conforme mostrado na Figura 11, os valores de β_k^1 aumentam ao se aproximar do estágio inicial $k = 0$. Isto mostra que, de fato, a função custo se torna mais avessa ao risco, tanto absolutamente quando relativamente, ao se aproximar dos estágios iniciais.

Esforço computacional requerido

Os tempos computacionais totais requeridos para resolver todo o problema de 3 ativos de risco e 120 períodos, quando aplicada a abordagem de sintetização dos estágios iniciais estão exibidos na Tabela 6. O tempo reduzido é proporcional ao número de períodos eliminados do problema. Entretanto, deve-se ter atenção ao erro aceitável em relação ao valor esperado do portfólio.

Tabela 6: Tempo computacional total requerido para diferentes valores de k^* em minutos

Cenário k^*	$b = 0, 1$			$b = 0, 5$		
	$a = 0$	$a = 20$	$a = 1000$	$a = 0$	$a = 20$	$a = 1000$
Sem	0,06	12,16	11,96	0,04	7,22	4,96
$k^* = 10$	0,06	11,15	10,96	0,04	6,62	4,55
$k^* = 20$	0,06	10,13	9,97	0,04	6,02	4,13
$k^* = 50$	0,06	7,09	6,98	0,04	4,21	2,89
$k^* = 100$	0,06	2,03	1,99	0,04	1,20	0,83

Aproximação da riqueza terminal

Conforme apresentado no início desta seção, quando $r_k \neq 0$, utilidades não míopes se comportam como parcialmente míopes (ver Tabela 1). Portanto, pouco esforço é necessário, já que a função custo para qualquer período será a própria utilidade terminal. Desta forma, o portfólio ótimo θ_0^* no estágio inicial $k = 0$ é aquele que:

$$\max_{c_0^i \in C_0(x_0)} E[u(s_{N-1} \dots s_1 x_1)].$$

Esta aproximação foi utilizada em Brandt et al. (2005) e Çanakoğlu and Özekici (2010).

As taxas de retorno esperados do portfólio ótimo quando aplicada esta aproximação da riqueza terminal estão exibidas na Tabela 7. Para $a = 0$, o resultado é sempre o mesmo, pois esta é a alocação míope. Diferentemente, para $a \neq 0$, os resultados obtidos com a aproximação da riqueza terminal são superiores, apesar de próximos.

Tabela 7: Retorno esperado do portfólio comparando com aproximação da riqueza terminal

Parâmetro b	Abordagem Proposta			$E[u(x_N)] = E[u(s_{N-1} \dots s_{k+1} x_{k+1})]$		
	$a = 0$	$a = 20$	$a = 1000$	$a = 0$	$a = 20$	$a = 1000$
$b = 0.1$	43,05%	43,07%	47,11%	43,05%	43,09%	48,75%
$b = 0.5$	63,57%	63,58%	63,79%	63,57%	63,58%	63,89%

Este é um indício de que esta aproximação é adequada para o caso de $r_k \neq 0$, embora atenção deva ser dada para garantir que a diferença entre os valores esperados do portfólio esteja dentro de limites aceitáveis. No próximo caso de comportamento míope, que será discutido na próxima seção (5.2.2), esta aproximação não pode ser realizada, pois um ativo livre de risco não está disponível para investimento.

5.2.2 Caso sem ativo com retorno livre de risco

Os títulos públicos no Brasil, assim como em outros países emergentes, estão sujeitos a um risco maior associado em comparação às economias desenvolvidas. Investimentos neste tipo de ativo nem sempre podem ser considerados como livre de risco, conforme discutido na seção 3.2. Outros tipos de investimento com menor risco associado, como a caderneta de poupança, não são competitivos e da mesma forma também estão sujeitos ao risco do país. Portanto, é interessante analisar o modelo de otimização de portfólio que não possua um ativo com retorno livre de risco.

Neste caso, é suposto a estacionariedade do preço dos ativos de risco, já que a ausência de um ativo livre de risco poderia indicar aumento da demanda por ativos de risco. A principal alteração entre o modelo básico para este caso está na dinâmica do sistema. Esta deve ser alterada para a seguinte expressão:

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^d c_k^i e_k^i.$$

A aproximação realizada através da equação (25) utilizada por Brandt et al. (2005) e Çanakoğlu and Özekici (2010) não pode ser realizada neste caso pois o ativo com retorno

s_k não está disponível para investimento. O comportamento parcialmente míope não acontece neste caso, portanto a aproximação da riqueza terminal através da equação (25) não pode ser realizada. Assim, a abordagem de aproximação da função custo $J_k(x_k)$ se torna ainda mais importante.

Tabela 8: Taxa de retorno líquida esperada para o portfólio ótimo

Cenários com $b = 0, 1$	$a = 0$	$a = 1000$	Δ
Com ativo livre de risco $r_k \neq 0$	43,05%	47,11%	4,06 p.p
Sem ativo livre de risco	54,27%	62,35%	8,08 p.p

As taxas de retorno esperadas no caso onde não estão disponíveis ativos cujos retornos são livre de risco estão na Tabela 8. Pode-se observar o aumento na taxa de retorno esperada tanto para a alocação míope $a = 0$, quanto para a alocação não míope $a = 1000$. Isto se deve ao fato de um maior percentual ser alocado aos ativos de maior risco, já que não estão disponíveis ativos sem risco.

É interessante notar a variação na taxa de retorno esperada entre o portfólio míope e o não míope, que dobrou de 4,06 para 8,08 pontos percentuais. Neste caso, o parâmetro a não é descontado no tempo pela taxa livre de risco, em contraste ao caso anterior onde $r_k \neq 0$. Portanto, não é possível afirmar que a política não míope se aproxima daquela míope.

A Figura 16 ilustra a comparação entre o controle ótimo do cenário com um ativo com retorno livre de risco (discutido anteriormente na seção 5.2.1) e do cenário sem este ativo. É interessante notar que, ao se aproximar dos estágios iniciais, o percentual investido no ativo 3, aquele de maior risco e retorno, aumenta quando não está disponível o ativo livre de risco (gráfico inferior à esquerda). Da mesma forma, o percentual investido no ativo livre de risco para o cenário em que este está disponível aumenta nos estágios próximos ao estágio inicial. Portanto, a taxa de retorno esperada para o cenário sem o ativo livre de risco deve, de fato, ser maior.

O gráfico superior à direita é um bom exemplo do impacto da ausência deste ativo na evolução do controle ótimo ao longo dos horizontes para um mesmo valor de portfólio x_k . Pode-se ver que a curva rosa, que representa o cenário sem o ativo livre de risco com $a = 1000$ e $b = 0, 1$, cruza a linha pontilhada em roxo que representa também o cenário sem o ativo livre de risco, entretanto com a política míope ($a = 0$ e $b = 0, 1$). Este fato

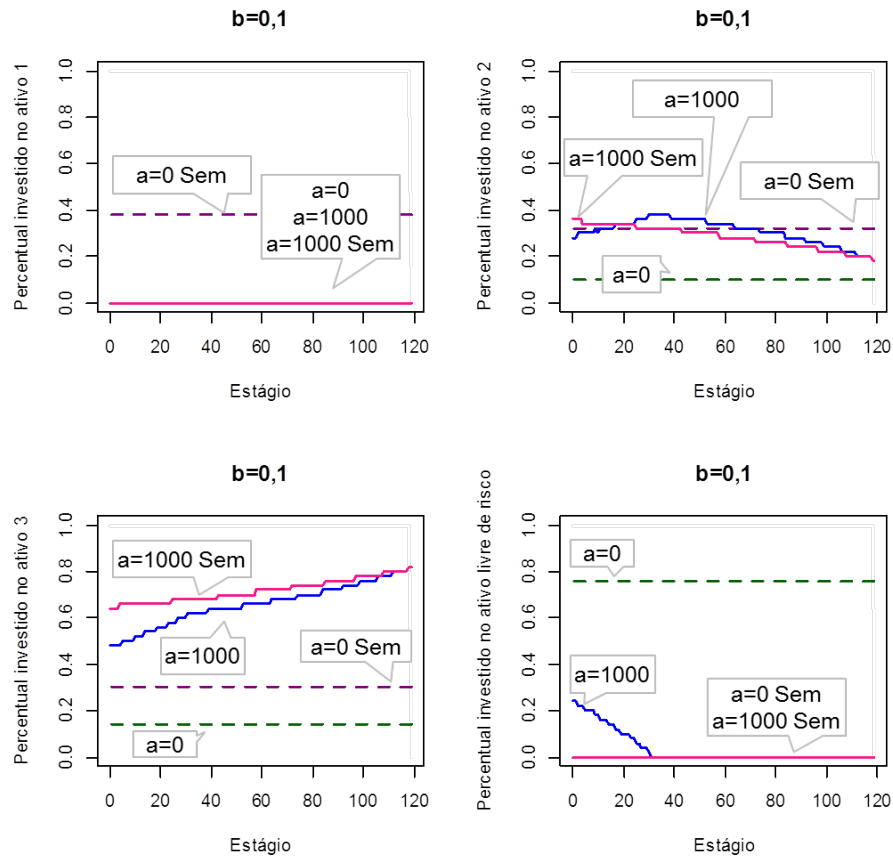


Figura 16: Comparação dos retornos esperados para diferentes valores de k^* na ausência de um ativo com retorno livre de risco

não acontece no caso discutido na seção 5.2.1, onde o parâmetro a é descontado pela taxa livre de risco e a alocação ótima se aproxima da alocação míope.

5.2.3 Caso com $r_k = 0$

O caso quando $r_k = 0$ é importante, pois representa um modelo a ser aplicável para os países com economias desenvolvidas. Nestas economias, muitas vezes a taxa de retorno dos títulos de longo prazo são próximas de zero e são utilizadas como a taxa do ativo cujo retorno é livre de risco.

Quando a taxa de retorno do ativo livre de risco é $r_k = 0$, este ativo passa a não ser competitivo em relação aos demais ativos de risco. Isto significa que o investidor age da mesma forma como que este ativo não estivesse disponível para investimento. Portanto, os resultados obtidos a partir do exemplo numérico são exatamente os mesmos a aqueles

apresentados na seção anterior (5.2.2).

Uma pergunta a ser feita neste caso é se a aproximação da riqueza terminal através da equação (25) é adequada ou não. Como neste caso $s_k = 1$, esta aproximação implicaria em utilizar a utilidade terminal em todos os demais estágios como função custo pois:

$$\mathbb{E}[u(x_N)] = \mathbb{E}[u(s_{N-1} \dots s_{k+1} x_{k+1})] = \mathbb{E}[u(x_{k+1})].$$

Portanto, o algoritmo de programação dinâmica passaria a ser

$$J_N(x_N) = u(x_N),$$

$$J_k(x_k) = \max_{c_k \in C_k(x_k)} \mathbb{E}[u(x_{k+1})],$$

pois

$$J_{k+1}(x_{k+1}) = u(x_{k+1}).$$

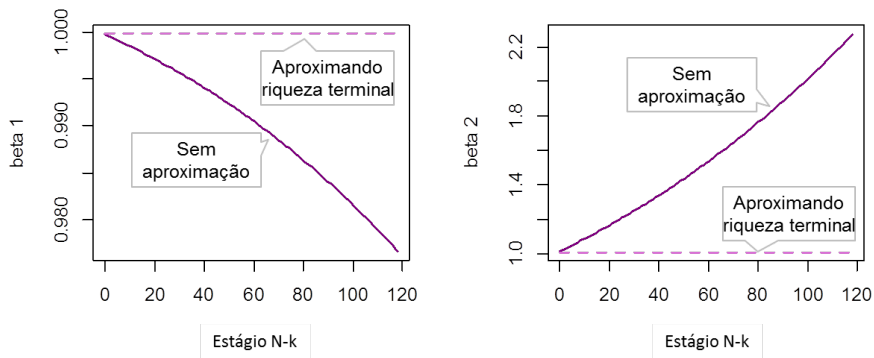


Figura 17: Comparação dos parâmetros estimados entre abordagem com aproximação da riqueza terminal e sem esta aproximação

A utilização da aproximação da riqueza terminal levaria ao comportamento míope, pois o controle ótimo seria o mesmo para todo valor de portfólio ignorando o estágio em que o problema se encontra. A Figura 17 mostra a diferença entre os parâmetros β_k^y obtidos com e sem a aproximação da riqueza terminal. Pode-se observar a diferença das dinâmicas de $J_k(x_k)$. É interessante notar que, de fato, quando aplicada a aproximação da riqueza terminal, a função custo é igual à utilidade terminal, onde os parâmetros $\beta_k^0 = \beta_k^1 = 1$.

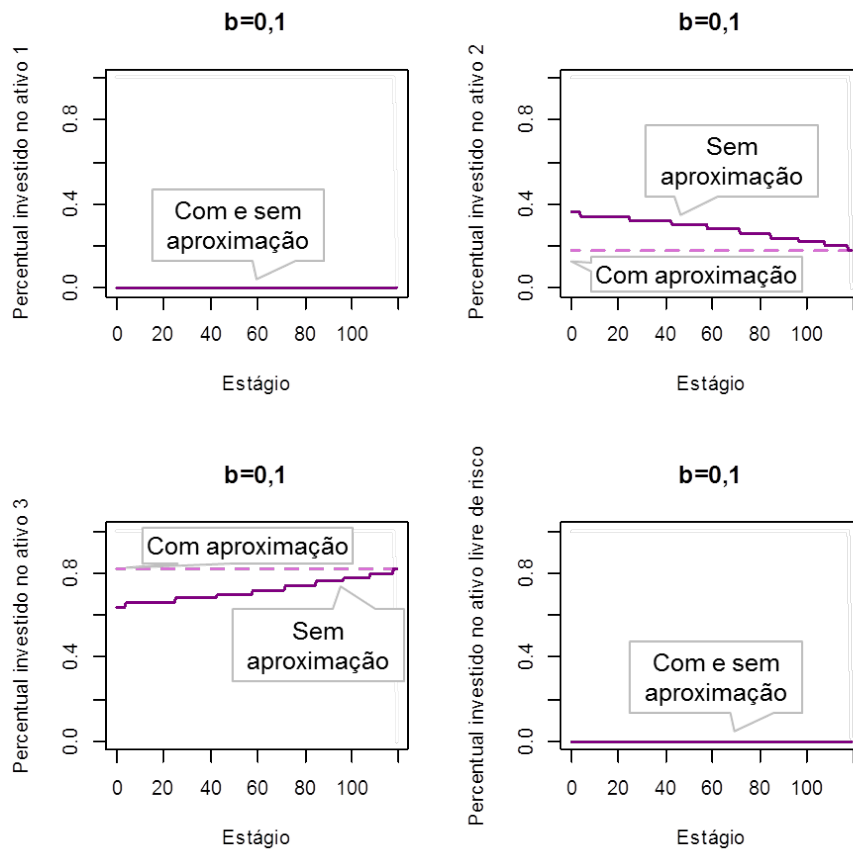


Figura 18: Comparação das alocações ótimas entre abordagem com aproximação da riqueza terminal e sem esta aproximação

O impacto da utilização da aproximação da utilidade terminal também pode ser visto na Figura 18. Da mesma forma como mostrado na seção 5.2.1, a aproximação da riqueza terminal gera uma maior alocação em ativos de maior risco, o que faz com o que valor do portfólio esperado seja superestimado em relação a aquele onde a aproximação da riqueza terminal não é aplicado.

Pode-se concluir então que a aproximação da riqueza terminal através da equação (25) distorce o comportamento do problema, tornando-o míope. Além disso, gera impactos que não podem ser desprezados na composição do portfólio ótimo. Como consequência, o valor esperado do portfólio ótimo é superestimado.

6 Discussão Final

A combinação das técnicas de programação dinâmica estocástica e de simulação de Monte Carlo ainda é uma área de pesquisa ativa e em evolução. Problemas de seleção de portfólio como a formação de um plano de previdência geralmente recorrem a estas técnicas para encontrar uma alocação satisfatória. Muitas pesquisas utilizam a utilidade míope para simplificar o problema em um único período de decisão, como em Fu et al. (2010), Chiarawongse et al. (2012), He and Meng (2012) e Jin and Zhang (2013). Outras pesquisas recorrem à aproximação da riqueza terminal (utilidades parcialmente míopes) para tornar o algoritmo independente da árvore de cenário, como por exemplo, Brandt et al. (2005) e Çanakoglu and Özekici (2010).

A contribuição desta pesquisa está na formação de um modelo de apoio a decisão que represente a formação de planos de previdência com contribuições definidas que seja adequado tanto para a escolha de utilidades míopes quanto não míopes e que seja computacionalmente tratado de forma eficiente. Para isso, utilizaram-se características do comportamento não míope para a sintetização dos períodos iniciais do problema de programação dinâmica, reduzindo o número de estágios do problema e, conseqüentemente, o esforço computacional requerido. Esta abordagem proposta também é interessante pelo fato de estar em linha com a mudança de comportamento míope para não míope exibida pelos planos de previdência com contribuição definida.

Para a segunda abordagem proposta, que é complementar a esta, foi utilizado um método paramétrico para aproximar a expressão numérica da função custo do algoritmo de programação dinâmica. Desta forma, foi possível reduzir o número de estados da árvore de cenários, o que contribui significativamente para a redução do esforço computacional requerido para a resolução do problema.

As duas abordagens propostas foram testadas e suas adequações foram confirmadas. A sintetização dos períodos iniciais geram composições do portfólio e taxa de retorno esperada próximas a aquelas sem a aplicação da sintetização. As taxas de retorno esperadas obtidas com esta abordagem são superestimadas, mas desde que o número de períodos a serem sintetizados seja escolhido com atenção, a abordagem apresenta resultados satisfatórios. Os testes aplicados à abordagem de aproximação da função custo também indicam a

adequação desta segunda abordagem proposta. Os erros de aproximação são mínimos e podem ser ignorados.

Através de um exemplo numérico explorado no Capítulo 5, foi possível mostrar as diferenças na composição da alocação ótima e na taxa de retorno esperada do portfólio ótimo entre a escolha de uma utilidade míope e de uma não míope. Os resultados apresentados indicam que a escolha de uma utilidade míope gera uma taxa de retorno esperada que é igual ou menor a de uma utilidade não míope. A diferença entre as taxas de retorno esperada podem ser significativas dependendo da escolha dos parâmetros da função utilidade e não podem ser desprezadas.

A aproximação da riqueza terminal também foi examinada e os resultados obtidos mostram que esta simplificação da árvore de cenários pode gerar taxas de retorno esperadas de portfólios superestimadas. O impacto desta aproximação na composição da alocação ótima é significativo e, em casos específicos, pode apontar para um comportamento míope de forma não correta.

Grande parte das pesquisas sobre seleção de portfólio considera apenas o caso onde existe um ativo cuja taxa de retorno é livre de risco e esta é diferente zero. Exemplos de trabalhos nesta linha são Topaloglou et al. (2008), Çanakoğlu and Özekici (2010), Fu et al. (2010), Brown and Smith (2011), Nocetti and Smith (2011) e Jin and Zhang (2013). O caso com ativo livre de risco com taxa de retorno zero e o caso com ausência de ativos livre de risco são pouco explorados. Entretanto, os modelos que consideram estes dois casos podem, muitas vezes, representar melhor as características dos mercados desenvolvidos e dos mercados emergentes, respectivamente.

Esta pesquisa também possui contribuições neste sentido, pois examina todos os três casos referentes ao ativo livre de risco. As diferenças na composição e taxa de retorno esperada do portfólio foram examinadas. Os resultados obtidos através do exemplo numérico mostram que as abordagens tradicionalmente utilizadas pela literatura (utilidade míope e parcialmente míope) podem não ser adequadas quando não estão disponíveis ativos com taxas de retorno livre de risco ou quando esta taxa é zero.

Em relação às suposições do modelo proposto, acredita-se que aquela sobre a distribuição lognormal da taxa de retorno dos ativos de risco pode ser facilmente relaxada. A escolha desta distribuição não altera a aplicabilidade das abordagens propostas. Portanto,

a utilização de técnicas mais avançadas para a escolha da distribuição dos retornos e da escolha sobre o período observado dos preços das ações irá contribuir para que o modelo proposto se aproxime ainda mais do mundo real sem a necessidade de uma reformulação.

Já a relaxação da suposição sobre ausência de custos transacionais e custos administrativos deve ser examinada com atenção. Dependendo do ambiente econômico e valor do portfólio, estes custos podem ser significativos e implicar na obtenção de alocações distintas. A consideração destes custos no modelo proposto implicaria na necessidade de se avaliar não só o valor do portfólio ao longo do tempo, mas também variações em sua composição. Isto é, os estados do problema devem representar o valor do portfólio associado a uma determinada composição. Neste caso, a formulação proposta nesta pesquisa, que é independente da árvore de cenários, pode não ser adequada.

Um importante ponto a ser considerado como pesquisa futura é a utilização de técnicas de Monte Carlo aplicadas à finança mais avançadas. A escolha arbitrária dos valores de x_j que compõe o primeiro passo da aproximação da função custo deve ser revista. Segundo Glasserman (2004), métodos de Monte Carlo de baixa discrepância são dependentes da dimensionalidade do problema. Consequentemente, as ferramentas utilizadas para desenvolver e analisar os métodos de baixa discrepância são muito diferentes daquelas utilizadas na simulação de Monte Carlo comum. Desta forma, a evolução da presente pesquisa nesta linha iria contribuir para uma representação mais precisa da taxa de retorno dos ativos de risco.

Planos de previdência privada com contribuições definidas geralmente oferecem ao investidor fundos com diferentes níveis de risco e ele deve escolher um de acordo com seu perfil de risco. Nos últimos anos do contrato, montantes predefinidos são retirados do fundo e replicados em ativos de menor risco. Uma importante contribuição esta pesquisa está na formulação de um modelo de seleção de portfólio com decisões em multiperíodo. Através desta formulação torna-se possível avaliar diferentes opções de investimento em momentos predefinidos do contrato, como alternativa ao reinvestimento exclusivo em ativos de menor risco. Esta evolução na proposta do modelo se torna interessante quando o retorno alcançado pelo fundo ao longo da vida do contrato difere daquele inicialmente esperado pelo investidor.

Finalmente, é importante mencionar que o retorno esperado de problemas de seleção

de portfólio que utilizam funções utilidade é aquele dado pelo equivalente certo. Isto é, o retorno obtido através da esperança das utilidades da riqueza terminal. Pela desigualdade de Jensen (equação (1)), este retorno é sempre igual ou menor ao retorno obtido pela utilidade da esperança da riqueza final. Esta diferença entre o equivalente certo e a esperança do valor do portfólio não está evidente na literatura pesquisada e é a essência do problema de escolha sob incerteza.

Referências Bibliográficas

- Arrow, K. (1965). Aspects of the Theory of Risk-Bearing. *Yrjo Hahnsson Foudation*.
- Bakula, M., Pečarić, J., and Perić, J. (2012). On the coverse Jensen inequality. *Applied Mathematical and Computation*, 218:6566–6575.
- Bellman, R. (1952). On the theory of Dynamic Programming. *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America*, 38(8):716–719.
- Bertsekas, D. P. (2005). *Dynamic Programming and Optimal Control*, volume 1. Athena Scientific, 3 edition.
- Blake, D., Cairns, A., and Dowd, K. (2001). Pensionmetrics: stochastic pension plan design and value-at-risk during the accumulation phase. *Insurance: Mathematics and Economics*, 29:187–215.
- Brandt, M. W. (2010). *Handbook of Financial Econometrics*, volume 1, chapter 5, pages 269–336. Elsevier.
- Brandt, M. W., Goyal, A., Santa-Clara, P., and Stroud, J. (2005). A simulation approach to dynamic portfolio choice with an application to learning about return predicability. *Review of Financial Studies*, 18(3):831–873.
- Brown, D. B. and Smith, J. E. (2011). Dynamic portfolio optimization with transaction costs: Heuristics and dual bounds. *Management Science*, 57(10):1752–1770.
- Cairns, A., Blake, D., and Dowd, K. (2006). Stochastic lifestyle: Optimal dynamic asset allocation for defined contribution pension plans. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30:843–877.
- Campebell, J. Y. and Viceira, L. M. (2001). Who should buy long-term bonds? *American Economic Review*, 91(1):99–127.
- Çanakoglu, E. and Özekici, S. (2010). Portfolio selection in stochastic market with HARA utility functions. *European Journal of Operational Research*, 201:520–536.

- Chiarawongse, A., Kiatsupaibul, S., Tirapat, S., and Beijamin, V. R. (2012). Portfolio Selection with quatitative input. *Journal of Banking and Finance*, (36):489–496.
- Detemple, J., Garcia, R., and Rindisbacher, M. (2003). A Monte-Carlo method for optimal portfolios. *The Journal of Finance*, (58):401–446.
- Detemple, J., Garcia, R., and Rindisbacher, M. (2005). Intertemporal asset allocation: A comparison of methods. *Journal of Banking and Finance*, (29):2821–2848.
- Dupačová, N. and Römisch, W. (2003). Scenario reduction in stochastic programming: An approach using probability metrics. *Mathematical Programming*, 95(3):493–511.
- Ekeland, I. and Taflin, E. (2005). A theory of bond portfolios. *The Annals of Applied Probability*, 15(2):1260–1305.
- Emms, P. and Haberman, S. (2008). Income drawdown schemes for a defined-contribution pension plan. *The Journal of Risk and Insurance*, 45(1):739–761.
- Epstein, L. G. and Zin, S. E. (1989). Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset return: A theoretical framework. *Econometrica*, 57:937–969.
- Fonseca, R. and Rustem, B. (2012). International portfolio management with affine policies. *European Journal of Operational Research*, 223:177–187.
- Fu, C., Lari-Lavassani, A., and Li, X. (2010). Dynamic mean-variance portfolio selection with borrowing constraint. *European Journal of Operational Research*, 200:312–319.
- Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag, New York.
- Haugh, M. (2010). The Monte Carlo Framework and Financial Applications. *Disponível em: http://www.columbia.edu/~mh2078/MCS_Framework_FEegs.pdf*.
- He, C. and Meng, W. (2012). Dynamic portfolio choice under the time-varying, jumps, and knight uncertainty of assets return process. *Journal of Systems Science and Complexity*, 25(5):896–908.

- Heijdra, B. and Romp, W. (2009). Retirement, Pension, and Ageing . *Journal of Public Economics*, 93:586–604.
- Heitsch, H. and Römisch, W. (2003). Scenario reduction algorithms in stochastic programming. *Computational Optimization and Applications*, 24(2-3):187–206.
- Hull, J. C. (2002). *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 5 edition.
- Jin, X. and Zhang, K. (2013). Dynamic optimal portfolio choice in a jump-diffusion model with investment constraints. *Journal of Banking and Finance*, 37:1733–1746.
- Lacomba, J. A. and Lagos, F. (2009). Defined contribution plan vs. defined benefits plan: reforming the legal retirement age. *Journal of Economic Policy Reform*, 12(1):1–11.
- Lucas, D. J. and Zeldes, S. P. (2009). How should public pension plans invest? *The American Economic Review*, 99(2):527–532.
- MadDonald, B. and Cairns, A. J. G. (2009). Getting feedback on defined contribution pension plan. *The Journal of Risk and Insurance*, 76(2):385–417.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91.
- Mas-Colell, A., Whinston, M., and Green, J. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, London.
- Merton, R. C. (1971). Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. *Journal of Economic Theory*, (3):373–413.
- Montgomery, D. C. and Peck, E. (2001). *Introduction to linear regression analysis*. Wiley-Interscience, New York, 3 edition.
- Mossin, J. (1968). Optimal Multiperiod Portfolio Policies. *The Journal of Business*, 41(2):215–229.
- Nocetti, D. and Smith, W. T. (2011). Price uncertainty, saving, and welfare. *Journal of Economic Dynamic and Control*, 35:1139–1149.

- Pang, G. and Warshawsky, M. (2010). Optimization the equity-bond-annuity portfolio in retirement: The impact of uncertain health expenses. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46:198–209.
- Pratt, J. (1964). Risk Aversion in the Small and Large. *Econometrica*, 32(1/2):122–136.
- Rauh, J. D. (2006). Investment and financing constraints: Evidence form funding of corporate pension plans. *The Journal of Finance*, 61(1):33–71.
- Samuelson, P. A. (1969). Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming. *The Review of Economics and Statistics*, 51(3):239–246.
- Sundaresan, S. and Zapatero, F. (1997). Valuation, optimal asset allocation and retirement incentives of pension plans. *Review of Financial Studies*, 10(3):631–660.
- Tesouro Direto (2011). Cartilha Tesouro Direto. Disponível em: http://www3.tesouro.gov.br/tesouro_direto/download/Cartilha_TesouroDireto_2011.pdf.
- Tesouro Direto (2013). Primeira Vez no Tesouro Direto? Disponível em: http://www.tesouro.gov.br/tesouro_direto/primeiravez.asp.
- Topaloglou, N., Vladimirov, H., and Zenios, S. (2008). A dynamic stochastic programming model for international portfolio management. *European Journal of Operational Research*, 185:1501–1524.
- You, L. and Daigler, R. T. (2010). Is international diversification really beneficial? *Journal of Banking and Finance*, 34:163–173.