

**IMPLEMENTAÇÃO DA TEORIA DE REISSNER PARA PLACAS
COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM
AMBIENTE COMPUTACIONAL ORIENTADO A OBJETOS**

Adimar Fernandes Maia

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**IMPLEMENTAÇÃO DA TEORIA DE REISSNER PARA PLACAS
COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM
AMBIENTE COMPUTACIONAL ORIENTADO A OBJETOS**

Adimar Fernandes Maia

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Orientador: Prof. Gabriel de Oliveira Ribeiro

Belo Horizonte
11 de Outubro de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Data: **11 de Outubro de 2013**

Autor: **Adimar Fernandes Maia**

Título da Dissertação: **IMPLEMENTAÇÃO DA TEORIA DE REISSNER PARA PLACAS COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM AMBIENTE COMPUTACIONAL ORIENTADO A OBJETOS**

Departamento: **Departamento de Engenharia de Estruturas**

Título: **Mestre** Convocação: **Agosto** Ano: **2014**

GARANTE-SE À Universidade Federal de Minas Gerais O DIREITO DE CIRCULAÇÃO E DE POSSE DE COPIAS PARA FINS NÃO COMERCIAIS DO TRABALHO SUPRA CITADO.

O AUTOR RESERVA-SE, AINDA, OUTROS DIREITOS DE PUBLICAÇÃO E PROPRIEDADE, E NEM A DISSERTAÇÃO NEM PARTES DELA PODEM SER REPRODUZIDAS DE QUALQUER FORMA SEM A PERMISSÃO DO AUTOR.

Assinatura do Autor

"A maior riqueza do homem é a sua incompletude."
(Manoel de Barros)

Agradecimentos

À minha família pelo incansável apoio, dedicação e incentivo fundamental para que eu pudesse chegar até aqui. Nela estão as minhas fontes e a minha confiança.

Ao Professor Gabriel de Oliveira Ribeiro, pelos ensinamentos e orientação na condução e elaboração desta dissertação.

Um agradecimento especial ao Filipe Emanuel Anacleto, pela amizade, apoio constante nas horas difíceis e ensinamentos imprescindíveis na conclusão deste trabalho.

Aos inesquecíveis amigos, pelo atendimento de tantas demandas além das acadêmicas, o meu muito-obrigado.

À Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, professores, grupo INSANE e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas, pelo convívio e contribuição para minha formação acadêmica.

À banca examinadora composta pelo Prof. Dr. Edson Denner Leonel, Prof. Dr. Fernando Amorim de Paula, Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro, Prof. Dr. Samuel Silva Penna e Prof^a. Dra. Tatiana Souza Antunes Ribeiro pelas sugestões dadas, durante a defesa de dissertação, contribuindo para a versão final deste trabalho.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho trata da implementação da teoria de Reissner para placas por meio do método dos elementos de contorno (MEC) em um ambiente computacional orientado a objetos. A solução das incógnitas do problema de flexão de placas em regime elástico linear e materiais isotrópicos e homogêneos deve satisfazer as equações diferenciais parciais que governam este problema mecânico. Devido à complexidade observada na geometria e condições de contorno de estruturas de uso corrente, a análise estrutural baseada em soluções analíticas torna-se aplicável a um número muito restrito de casos. A teoria de Reissner leva em conta a parcela de energia devido às deformações distorcionais, as quais juntamente com a parcela decorrente da flexão, resultam a energia total da placa. Esse conjunto conduz a um sistema de equações de sexta ordem. Esta formulação permite uma representação mecânica mais consistente ao qual se faz atender três condições físicas ao longo do contorno da placa. A implementação dessa formulação foi efetuada como uma extensão de um sistema computacional chamado INSANE, desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG. As aplicações correntes dessa formulação são focadas na análise de lajes com pilares em seu domínio, já que esse problema estrutural é recorrente em projetos de construção de concreto armado. A eficiência e precisão dos resultados obtidos em vários exemplos foram comparados com a solução analítica clássica, com soluções numéricas disponíveis na literatura e com resultados obtidos pelo método dos elementos finitos por meio do programa *Abaqus*.

Palavras-chave: método dos elementos de contorno, teoria de Reissner, programação orientada a objetos.

Abstract

The solution of linear problems of plates for isotropic and homogeneous materials must be satisfied within the context of the respective governing differential equations. Due to the diversities in the structural configuration, such as unusual boundary conditions, the analytical approach becomes more complex. This work deals with the formulation of the boundary integral equation of the bending plate problem taking into account the Reissner's theory and the numerical solution by means of the boundary element method (BEM). The Reissner's theory considers the strain energy not only from bending deformation but also from transversal shear deformation which leads to a partial differential equation of sixth order. It results in a more consistent numerical procedure in which three physical conditions along the boundary plate can be enforced. The implementation has been performed as an extension of a computational system based on object-oriented programming in Java called INSANE, developed at the Structural Engineering Department of UFMG. The current applications are focused in the analysis of flat plate slabs with supports inside the domain, which is a very frequent problem in the design of structural reinforced concrete buildings. The efficiency and accuracy results obtained from several examples were compared with classical analytic solutions, numerical solution available in the literature and results of finite element analysis using *Abaqus* software as well.

Keywords: boundary element method, Reissner's plate theory, object-oriented programming.

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de uma Laje.	4
1.2	Exemplo de uma Laje Lisa.	7
2.1	Sistema de Referência na Placa.	11
2.2	Convenção dos Sentidos das Rotações.	12
2.3	Estado de Tensão no Elemento de Placa.	12
2.4	Resultantes de Tensão na Placa e Convenção de Sinais.	14
2.5	Deformação por Cisalhamento Transversal, $\psi_{3\alpha}$	16
2.6	Sistema de Coordenadas (n, s)	19
2.7	Solução Fundamental.	20
3.1	Exemplo de uma Placa Infinita.	24
3.2	Alteração do Contorno no Canto da Placa.	26
4.1	Exemplo de Discretização de uma Placa.	34
4.2	Exemplo de um Elemento Quadrático, Γ_j	35
4.3	Exemplo de Elemento Linear e Elemento Quadrático.	38
4.4	Representação de uma Laje com Apoio Interno.	54
4.5	Placa com um Furo Interno e duas de suas Bordas Apoiadas.	56
5.1	Simbologia adotada na Representação UML INSANE.	58
5.2	Diagrama da Organização do Núcleo Numérico INSANE.	59
5.3	Diagrama de Classes para <i>Persistence</i>	60
5.4	Diagrama da Interface <i>Model</i>	60
5.5	Diagrama da Interface <i>Model</i> referente ao MEC (<i>BemModel</i>).	61
5.6	Diagrama da Interface <i>ProblemDriver</i>	62
5.7	Diagrama da interface <i>AnalysisModel</i>	62
5.8	Diagrama da interface <i>Assembler</i>	63

5.9	Diagrama da Solução Fundamental.	64
5.10	Diagrama das Funções de Bessel.	64
6.1	Placa Apoiada com Carga Uniformemente Distribuída.	66
6.2	Análise de Convergência do Máximo Deslocamento Transversal da Placa.	66
6.3	Deslocamento Transversal, w , ao Longo da Linha de Centro da Placa.	67
6.4	Condição de contorno <i>hard</i> \times <i>soft</i>	70
6.5	Placa Apoiada com Carga Uniforme Parcialmente Distribuída.	71
6.6	Discretização de uma Placa Apoiada Variando q ($u/a, v/a$).	72
6.7	Discretização de uma Placa Apoiada Variando q ($u/a = 0, 20$).	73
6.8	Discretização de uma Placa Apoiada Variando q ($u/a = 0, 40$).	74
6.9	Discretização de uma Placa Apoiada Variando q ($u/a = 0, 60$).	75
6.10	Discretização de uma Placa Apoiada Variando q ($u/a = 0, 80$).	76
6.11	Placa com Duas Bordas Apoiadas e outras Duas Engastadas.	77
6.12	Discretização de uma Placa Retangular ($a/b = 2$): (a) 16 nós, (b) 32 nós, (c) 64 nós e (d) 128 nós no Contorno.	78
6.13	Placa com Três Bordas Simplesmente Apoiada e Uma Borda Engastada.	81
6.14	Discretização de uma Placa Quadrada ($b/a = 1$): (a) 16 nós, (b) 32 nós, (c) 64 nós e (d) 128 nós no Contorno.	82
6.15	Placa Engastada com Carga Uniformemente Distribuída.	84
6.16	Discretização de uma Placa Quadrada usando Elementos Quadráticos ($b/a = 1$): (a) 8 nós, (b) 16 nós, (c) 32 nós, (d) 64 nós e (e) 128 nós no Contorno.	84
6.17	Discretização de uma Placa Quadrada usando Elementos Lineares ($b/a = 1$): (a) 8 nós, (b) 16 nós, (c) 32 nós, (d) 64 nós e (e) 128 nós no Contorno.	85
6.18	Sistema de Coordenadas adotado pelo Programa <i>Abaqus</i>	90
6.19	Pontos Internos.	90
6.20	Deslocamento Transversal, $w(cm)$	91
6.21	Deslocamento Transversal obtido no segmento \overline{AA} , $w(cm)$	91
6.22	Rotação, $\phi_x(rad)$	92
6.23	Rotação obtida no segmento \overline{AA} , $\phi_x(rad)$	92
6.24	Rotação, $\phi_y(rad)$	93

6.25	Rotação obtida no segmento \overline{AA} , $\phi_y(rad)$	93
6.26	Momento, $M_x(\frac{kN \times cm}{cm})$	94
6.27	Momento obtido no segmento \overline{AA} , $M_x(\frac{kN \times cm}{cm})$	94
6.28	Momento, $M_{xy}(\frac{kN \times cm}{cm})$	95
6.29	Momento obtido no segmento \overline{AA} , $M_{xy}(\frac{kN \times cm}{cm})$	95
6.30	Momento, $M_y(\frac{kN \times cm}{cm})$	96
6.31	Momento obtido no segmento \overline{AA} , $M_y(\frac{kN \times cm}{cm})$	96
6.32	Esforço Cortante, $Q_x(\frac{kN}{cm})$ - <i>Abaqus</i>	97
6.33	Esforço Cortante obtido no segmento \overline{AA} , $Q_x(\frac{kN}{cm})$	97
6.34	Esforço Cortante, $Q_y(\frac{kN}{cm})$ - <i>Abaqus</i>	98
6.35	Esforço Cortante obtido no segmento \overline{AA} , $Q_y(\frac{kN}{cm})$	98
6.36	Placa Quadrada com Quatro Apoios Internos.	99
6.37	Estudo de convergência pelo MEC.	100
6.38	Estudo de convergência pelo MEF.	100
6.39	Discretização da Placa com Quatro Apoios Internos (MEF).	101
6.40	Discretização da Placa com Quatro Apoios Internos (MEC).	102
6.41	Pontos Internos.	102
6.42	Deslocamento Transversal obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	104
6.43	Deslocamento Transversal obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{BB}	104
6.44	Momento M_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	106
6.45	Momento M_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{BB}	106
6.46	Momento M_y obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	108
6.47	Momento M_y obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{BB}	108
6.48	Esforço Cortante Q_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	110
6.49	Esforço Cortante Q_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{BB}	110
6.50	Análise dos Momentos M_x e M_y próximo ao apoio.	111
6.51	Discretização da Placa com Quatro Apoios Internos (MEC).	112
6.52	Deslocamento Transversal obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	113
6.53	Momento M_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	114
6.54	Momento M_y obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	115
6.55	Dimensão da Laje Lisa.	116
6.56	Estudo de convergência pelo MEC.	117
6.57	Discretização da Laje Lisa pelo MEC.	117
6.58	Pontos Internos	118

6.59	Deslocamento Transversal obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .	119
6.60	Rotação ϕ_x obtida pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	120
6.61	Rotação ϕ_y obtida pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	121
6.62	Momento M_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	122
6.63	Momento M_y obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	123
6.64	Esforço Cortante Q_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	124
6.65	Esforço Cortante Q_y obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	125
6.66	Dimensão da Placa Esconsa com Quatro Apoios Internos.	126
6.67	Estudo de convergência pelo MEC.	127
6.68	Estudo de convergência pelo MEF.	127
6.69	Discretização da Placa Esconsa pelo MEC.	128
6.70	Discretização da Placa Esconsa pelo MEF.	128
6.71	Deslocamento Transversal obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .	129
6.72	Rotação ϕ_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	130
6.73	Rotação ϕ_y obtida pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	131
6.74	Momento M_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	132
6.75	Momento M_y obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	133
6.76	Esforço Cortante Q_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	134
6.77	Esforço Cortante Q_y obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA}	135
6.78	Placa Retangular em Balanço.	136
6.79	Exemplo de uma Discretização usando Elemento Descontínuo.	136
6.80	Placa Discretizada usada pelo MEF.	137
6.81	Deslocamento Transversal obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} (Elemento Contínuo).	138
6.82	Deslocamento Transversal obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} (Elemento Descontínuo).	138

Lista de Tabelas

2.1	Condições de Contorno Usuais para uma Placa.	18
3.1	Valores da Constante $C_{ik}(S)$	27
4.1	Abscissas e Pesos para a Quadratura de Gauss-Legendre.	45
4.2	Abscissas e Pesos para Quadratura de Gauss com Função Logarítmica.	47
6.1	Exemplo 1: Deslocamento Transversal, w , para $y = \frac{b}{2}$	68
6.2	Exemplo 1: Momento Fletor, M_x , para $y = \frac{b}{2}$	68
6.3	Exemplo 1: Momento Fletor, M_y , para $y = \frac{b}{2}$	69
6.4	Exemplo 1: Valores Máximos de w , M_x , M_y , Q_x e Q_y	69
6.5	Exemplo 1: Valores de w , M_x e M_y em condições <i>soft</i> e <i>hard</i>	70
6.6	Exemplo 2: Deslocamento transversal, w , variando subdomínio com carga q	72
6.7	Exemplo 2: Momentos Fletores, M_x e M_y , variando subdomínio com carga q ($u/a = 0, 20$).	73
6.8	Exemplo 2: Momentos Fletores, M_x e M_y , variando subdomínio com carga q ($u/a = 0, 40$).	74
6.9	Exemplo 2: Momentos Fletores, M_x e M_y , variando subdomínio com carga q ($u/a = 0, 60$).	75
6.10	Exemplo 2: Momentos Fletores, M_x e M_y , variando subdomínio com carga q ($u/a = 0, 80$).	76
6.11	Exemplo 3: Deslocamento Transversal, w_{max} , para $x = a/2$ e $y = 0$	78
6.12	Exemplo 3: Momento Fletor, M_x , para $x = a/2$ e $y = 0$	78
6.13	Exemplo 3: Momento Fletor, M_y , para $x = a/2$ e $y = 0$	79
6.14	Exemplo 3: Momento Fletor, M_y , para $x = a/2$ e $y = b/2$	79
6.15	Exemplo 3: Deslocamento Transversal, w_{max} , para $x = a/2$ e $y = 0$	79
6.16	Exemplo 3: Momento Fletor, M_x , para $x = a/2$ e $y = 0$	80

6.17	Exemplo 3: Momento Fletor, M_y , para $x = a/2$ e $y = 0$.	80
6.18	Exemplo 3: Momento Fletor, M_y , para $x = a/2$ e $y = b/2$.	80
6.19	Exemplo 4: Deslocamento Transversal, w_{max} , para $x = a/2$ e $y = 0$.	82
6.20	Exemplo 4: Momento Fletor, M_y , para $x = a/2$ e $y = b/2$.	82
6.21	Exemplo 4: Momento Fletor, M_x , para $x = a/2$ e $y = 0$.	83
6.22	Exemplo 4: Momento Fletor, M_y , para $x = a/2$ e $y = 0$.	83
6.23	Exemplo 5: Deslocamento Transversal, w_{max} .	86
6.24	Exemplo 5: Momento Fletor, M_x , para $x = 0$ e $y = 0$.	86
6.25	Exemplo 5: Momento Fletor, M_y , para $x = 0$ e $y = 0$.	87
6.26	Exemplo 5: Momento Fletor, M_x , para $x = \frac{a}{2}$ e $y = 0$.	87
6.27	Exemplo 5: Momento Fletor, M_y , para $x = 0$ e $y = \frac{b}{2}$.	88
6.28	Exemplo 5: Discretização da Placa Engastada.	89
6.29	Exemplo 6: Detalhes da Discretização da Laje Lisa.	101
6.30	Exemplo 6: Deslocamento Transversal nos Segmentos \overline{AA} e \overline{BB} .	103
6.31	Exemplo 6: Momento M_x nos Segmentos \overline{AA} e \overline{BB} .	105
6.32	Exemplo 6: Momento M_y dos Segmentos \overline{AA} e \overline{BB} .	107
6.33	Exemplo 6: Esforço Cortante Q_x dos Segmentos \overline{AA} e \overline{BB} .	109
6.34	Exemplo 6: Valores obtidos para os Momentos, M_x e M_y .	111
6.35	Exemplo 6: Detalhes da Discretização da Laje Lisa com Apoio Pontual.	112
6.36	Exemplo 6: Deslocamento Transversal obtido no Segmento \overline{AA} .	113
6.37	Exemplo 6: Momento M_x obtido no Segmento \overline{AA} .	114
6.38	Exemplo 6: Momento M_y obtido no Segmento \overline{AA} .	115
6.39	Exemplo 7: Detalhes da Discretização da Laje Lisa.	118
6.40	Exemplo 7: Deslocamento Transversal, w , obtido no Segmento \overline{AA} .	119
6.41	Exemplo 7: Rotação ϕ_x obtida no Segmento \overline{AA} .	120
6.42	Exemplo 7: Rotação ϕ_y obtida no Segmento \overline{AA} .	121
6.43	Exemplo 7: Momento M_x obtido no Segmento \overline{AA} .	122
6.44	Exemplo 7: Momento M_y obtido no Segmento \overline{AA} .	123
6.45	Exemplo 7: Esforço Cortante Q_x obtido no Segmento \overline{AA} .	124
6.46	Exemplo 7: Esforço Cortante Q_y obtido no Segmento \overline{AA} .	125
6.47	Exemplo 8: Detalhes da Discretização da Placa Esconsa.	128
6.48	Exemplo 8: Deslocamento Transversal obtido no Segmento \overline{AA} .	129
6.49	Exemplo 8: Rotação ϕ_x obtida no Segmento \overline{AA} .	130
6.50	Exemplo 8: Rotação ϕ_y obtida no Segmento \overline{AA} .	131

6.51	Exemplo 8: Momento M_x obtido no Segmento \overline{AA}	132
6.52	Exemplo 8: Momento M_y obtido no Segmento \overline{AA}	133
6.53	Exemplo 8: Esforço Cortante Q_x obtido no Segmento \overline{AA}	134
6.54	Exemplo 8: Esforço Cortante Q_y obtido no Segmento \overline{AA}	135
6.55	Exemplo 9: Deslocamento Transversal, w , obtido no Segmento \overline{AA} . .	137

Lista de Símbolos

Índices:

i, j, k : variam de 1 a 3

$\alpha, \beta, \gamma, \phi$: variam de 1 a 2

$\chi_{\alpha\beta}$ Componentes do tensor de deformações específicas de flexão

$\Psi_{3\alpha}$ Componentes do tensor de deformações específicas cisalhantes transversais

$\delta_{\alpha\beta}$ Delta de Kronecker

$\delta_{(s,t)}$ Delta de Dirac

ϕ_1 Rotação no plano $x_1 - x_3$

ϕ_2 Rotação no plano $x_2 - x_3$

ϕ_α Rotação na direção α

ϕ_β Rotação na direção β

ϕ_n Rotação na direção n

ϕ_s Rotação na direção s

Γ^* Contorno infinito

Γ_i Contorno do elemento i

Γ_p Parte do contorno onde os deslocamentos generalizados são prescritos

Γ_u Parte do contorno onde as forças de superfícies generalizadas são prescritas

λ Constante característica das equações de Reissner

ν Coeficiente de Poisson

σ_{11} Componente do tensor de tensões na direção de x_1

σ_{22} Componente do tensor de tensões na direção de x_2

σ_{33} Componente do tensor de tensões na direção de x_3

$\sigma_{\alpha\beta}$ Componente do tensor de tensões na direção de x_1 e x_2

$\sigma_{\alpha 3}$ Componente do tensor de tensões na direção perpendicular a x_3

$\sigma_{ij,j}$ Derivada parcial da componente de tensão σ_j em relação à coordenada x_j

ξ Coordenada local adimensional

Ψ^T	Função aproximadora transposta
Ω^*	Domínio infinito
σ_{ij}	Componentes do tensor de tensões
A	Função de z
\underline{A}	Matriz do sistema de equações
B	Função de z
\underline{B}	Vetor cujas componentes são expressas por integrais associadas às forças de domínio
b_i	Carregamento no plano da placa na direção i
\bar{d}	Distância efetiva entre o ponto de colocação e o ponto central do elemento
D	Rigidez à flexão da placa
E	Módulo de elasticidade
F	Vetor correspondente aos valores prescritos
G	Módulo de elasticidade transversal
\underline{G}	Matriz contendo integração da solução fundamental de deslocamento
h	Espessura
\underline{H}	Matriz contendo integração da solução fundamental de forças de superfície
$ J $	Jacobiano
$k_0(z)$	Função de Bessel modificadas de ordem inteira
$k_1(z)$	Função de Bessel modificadas de ordem inteira
l	Comprimento efetivo de um elemento
$\underline{\tilde{M}}$	Matriz contendo os momentos
$M_{\alpha\beta}$	Momentos fletores e torsões por unidade de comprimento
M_n	Momento de flexão na direção normal ao contorno
M_{ns}	Momento volvente
n_α	Cosseno diretor da normal em relação ao eixo x_α
n_β	Cosseno diretor da normal em relação ao eixo x_β
q	Carga transversal por unidade de área
$\underline{\tilde{Q}}$	Matriz contendo os esforços cortantes
Q_α	Força cortante de superfície por unidade de comprimento na direção α
$Q_{\alpha 3}$	Força cortante de superfície por unidade de comprimento na direção x_3
Q_n	Força cortante de superfície por unidade de comprimento na direção n
\underline{P}^*	Matriz que contém as forças de superfície da solução fundamental
p_i^*	Solução fundamental para força superficial

p_{ik}^*	Solução fundamental para força superficial
p_i	Componentes das forças de superfície generalizadas
P^k	Força superficial do nó k
\underline{p}_i	Forças prescritas no contorno
P_1	Força superficial na direção de x_1
P_2	Força superficial na direção de x_2
P_3	Força superficial na direção de x_3
r	Raio
$r_{,\alpha}$	Derivada de r em relação à coordenada x_α
$r_{3\beta}^*$	Influência de carga distribuída nos momentos e forças cortantes
$r_{\alpha\beta}^*$	Influência de carga distribuída nos momentos e forças cortantes
\underline{T}	Matriz de transformação
\underline{U}^*	Matriz que contém os deslocamentos fundamentais
U^k	Deslocamento do nó k
U_1	Deslocamento nodal na direção de x_1
U_2	Deslocamento nodal na direção de x_2
U_3	Deslocamento nodal na direção de x_3
u_α	Deslocamento na direção de x_α
u_3	Deslocamento na direção de x_3
u_i	Componentes dos deslocamentos generalizados
\underline{u}_i	Deslocamentos prescritos no contorno
u_{33}^*	Solução fundamental para deslocamento na direção de x_3
$u_{3\alpha}^*$	Solução fundamental para deslocamento na direção perpendicular a x_3
$u_{\alpha 3}^*$	Solução fundamental para deslocamento na direção perpendicular a x_3
$u_{\alpha\beta}^*$	Solução fundamental para deslocamento na direção de x_1 e x_2
u_i^*	Solução fundamental para deslocamento
u_{ik}^*	Solução fundamental para deslocamento
\underline{X}	Vetor de incógnitas
x_i	Eixo de coordenadas
x_1	Eixo na direção x_1
x_2	Eixo na direção x_2
x_3	Eixo na direção x_3
w	Curvatura da placa
z	Produto expresso por λr

Lista de Abreviaturas e Siglas

BEM	Boundary Element Method
CAPES	Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DEES	Departamento de Engenharia de Estruturas
EIC	Equação Integral de Contorno
E.L.	Elemento Linear
E.Q.	Elemento Quadrático
INSANE	INteractive Structural ANalysis Environment
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MSM	Método Sem Malhas
NC	Número de Células
NE	Número de Elementos de Contorno
NEC	Número de Elementos de Contorno da região carregada
NG	Número de Pontos de Gauss
N°	Número
NNC	Número de Nós do Contorno
POO	Programação Orientada a Objetos
PROPEEs	Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas
S.C.	Solução Clássica
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UML	Unified Modeling Language
VPC	Valor Principal de Cauchy

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xii
Lista de Símbolos	xiii
Lista de Abreviaturas e Siglas	xvi
Sumário	1
1 Introdução	4
1.1 Considerações Iniciais	4
1.1.1 Projeto INSANE	6
1.2 Objetivos	6
1.2.1 Objetivo Geral	6
1.2.2 Objetivos Específicos	6
1.3 Organização do Texto	7
2 Fundamentos da Teoria de Flexão de Placas de Reissner	10
2.1 Introdução	10
2.2 Hipóteses Básicas da Teoria de Reissner	10
2.3 Relações e Equações Básicas da Teoria de Reissner	13
2.3.1 Tensões e Esforços Solicitantes	13
2.3.2 Equações de Equilíbrio	14
2.3.3 Deslocamentos e Deformações	15
2.4 Condições de Contorno	17
2.5 Mudança de Coordenadas	18
2.6 Solução Fundamental de Placas de Reissner	19

3	Equações Integrais de Contorno para Placas de Reissner	23
3.1	Introdução	23
3.2	Equações Integrais de Contorno	23
3.2.1	Equações Integrais para Deslocamentos em Pontos do Domínio	23
3.2.2	Equações Integrais para Deslocamentos em Pontos do Contorno	25
3.2.3	Forças Fundamentais Generalizadas no Contorno	27
3.2.4	Equações Integrais para Esforços nos Pontos Internos	28
3.2.5	Transformação das Integrais de Domínio em Integrais de Contorno	31
4	Método dos Elementos de Contorno	33
4.1	Introdução	33
4.2	Discretização das Equações de Contorno	34
4.3	Carregamentos no Domínio	40
4.4	Deslocamentos nos Pontos Internos	41
4.5	Esforços nos Pontos Internos	42
4.6	Tratamento das Integrais	44
4.6.1	Integral Regular	45
4.6.2	Integral Fracamente Singular	46
4.6.3	Integral Fortemente Singular	51
4.7	Técnica de Solução	52
4.8	Esforços nos Pontos de Contorno	53
4.9	Placas com Apoios no Domínio	54
5	Implementação Computacional	57
5.1	Introdução	57
5.2	Núcleo Numérico	58
5.3	Classes Implementadas	62
6	Resultados Numéricos	65
6.1	Generalidades	65
6.2	Placa Retangular Apoiada nas Quatro Bordas com Carga Uniformemente Distribuída	65
6.3	Placa Retangular Apoiada nas Quatro Bordas com Carga Uniforme Parcialmente Distribuída	71
6.4	Placa Retangular com Duas Bordas Simplesmente Apoiada e Outras Duas Engastadas	77
6.5	Placa Retangular com Três Bordas Simplesmente Apoiadas e Uma Borda Engastada	81
6.6	Placa Retangular Engastada nas Quatro Bordas com Carga Uniformemente Distribuída	83
6.7	Placa Quadrada com Quatro Apoios Internos	99
6.8	Laje Lisa	116
6.9	Placa Esconsa com Quatro Apoios Internos	126
6.10	Placa Retangular em Balanço	136

7	Considerações Finais	139
7.1	Conclusão	139
7.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	142
	Referências Bibliográficas	144
	Apêndice A Funções de Bessel Modificadas k_0 e k_1	149
	Apêndice B Termo Regular e Singular da Solução Fundamental de Deslocamento	151
B.1	Função de Bessel	151
B.2	Termos Regulares e Singulares da Solução Fundamental de Deslocamento	154
	Apêndice C Termo Regular e Singular referente à Solução Fundamental da Integral de Domínio	156

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

A modelagem e a análise do comportamento estrutural de placas é amplamente utilizada em diversos campos da engenharia civil, mecânica, aeronáutica e naval. Particularmente na engenharia civil podem ser observadas nas estruturas de barragens, pontes, reservatórios, edifícios, entres outros, conforme ilustração da Fig.1.1. O principal objetivo destas análises é quantificar a magnitude dos esforços internos e deslocamentos quando as mesmas estão submetidas a carregamentos arbitrários.

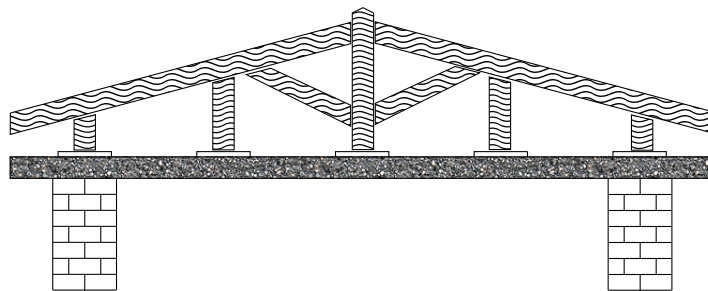


Figura 1.1: Exemplo de uma Laje.

O desenvolvimento dos diversos métodos numéricos tais como o método dos elementos finitos (MEF), método das diferenças finitas (MDF) e o método dos elementos de contorno (MEC) permitiram analisar com relativa precisão o comportamento mecânico dos mais variados elementos estruturais. Isto ocorreu devido aos graus de complexidade dos problemas práticos cuja solução analítica é muito difícil de

ser obtida. A evolução e acessibilidade de processadores de alto desempenho no campo da informática foi outro fator decisivo para pesquisadores prosseguirem no desenvolvimento de novas formulações e implementações.

O trabalho trata da análise numérica de placas utilizando o método dos elementos de contorno. A abordagem será feita baseada na teoria de Reissner por ser considerada uma teoria mais precisa e abrangente. Deste modo, comparando-a com a teoria clássica de Kirchhoff-Love, a deformação cisalhante transversal não é desprezada e, conseqüentemente, os efeitos da espessura devem ser avaliados, possibilitando não apenas análise de placas delgadas, mas também aquelas moderadamente espessas. Esta elaboração consiste num sistema de equações diferenciais de sexta ordem que permite o atendimento de três condições físicas em cada ponto do contorno, a saber, deslocamento transversal (flecha) na direção perpendicular ao plano médio da placa, rotação no plano perpendicular normal ao contorno (rotação no plano normal) e rotação no plano perpendicular ao plano médio tangente ao contorno (rotação no plano tangente). Alternativamente, podem ser atendidas as três condições correspondentes em termos de forças de superfície, quais sejam, força cortante na direção perpendicular ao plano médio, momento de flexão no plano perpendicular normal ao contorno e momento de torção no plano perpendicular ao plano médio tangente ao contorno da placa.

Deve-se ressaltar que a placa possui uma espessura constante e é constituída de material isotrópico, homogêneo e de comportamento mecânico elástico-linear.

Baseado no modelo matemático previsto na teoria de Reissner, que considera a energia de deformação devido ao cisalhamento transversal, é possível considerar o grau de liberdade referente à rotação no plano vertical tangente ao contorno da placa. Além de apresentar resultados mais precisos, a formulação evita problemas relacionados à reação de canto devido à simplificação presente na teoria clássica de Kirchhoff-Love.

1.1.1 Projeto INSANE

O projeto INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment), vinculado ao grupo de pesquisa *Simulação Numérica e Computacional na Mecânica dos Sólidos e das Estruturas* do Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), solidificou-se como base para pesquisas na área de métodos numéricos e computacionais. Tal sistema foi desenvolvido seguindo as premissas fundamentais de: facilidade de uso, código livre, utilização da linguagem Java e separação entre o núcleo numérico e a interface gráfica.

O sistema INSANE dispõe de uma extensa biblioteca de modelos de análise, modelos constitutivos e métodos para soluções de modelos não lineares; modelos discretos do Método dos Elementos Finitos, do Método dos Elementos Finitos Generalizados, dos Métodos Sem Malhas e, finalmente, do Método dos Elementos de Contorno.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Nesta dissertação, objetivou-se estudar a formulação de placas segundo a teoria de Reissner por meio do método dos elementos de contorno e incluí-la no Ambiente Teórico-Computacional INSANE. Para tanto, a formulação desenvolvida por Ribeiro (1992) foi escolhida por reunir os conceitos necessários para esta implementação.

1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos desta dissertação foram:

- Implementar no sistema INSANE a formulação de placas de Reissner, por meio do método dos elementos de contorno, desenvolvido por Ribeiro (1992);
- Tratar as integrais singulares, conforme Karam (1992) e Ribeiro (2006);

- Implementar uma formulação para análise de lajes lisas onde os apoios representados por pilares situam-se no domínio da laje conforme Fig.1.2;

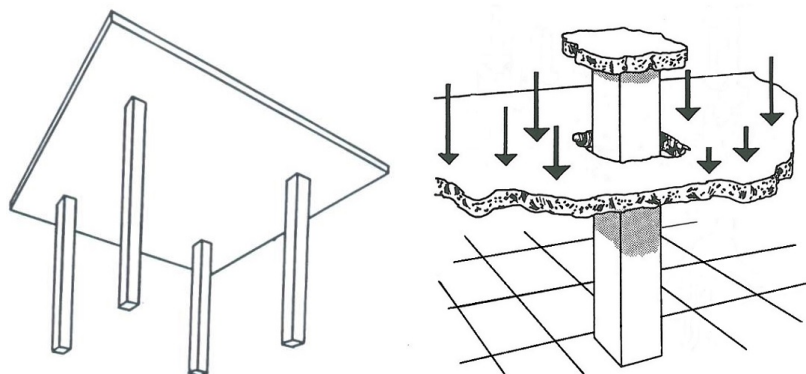


Figura 1.2: Exemplo de uma Laje Lisa.

- Avaliar a estabilidade da formulação implementada, por meio dos resultados numéricos obtidos; e
- Comparar os resultados obtidos com a solução analítica clássica, com soluções numéricas disponíveis na literatura e com resultados obtidos pelo método dos elementos finitos por meio do programa *Abaqus*.

1.3 Organização do Texto

O texto desta dissertação contém sete capítulos, além desta introdução, descritos resumidamente a seguir.

Inicia-se descrevendo, no capítulo 2, os conceitos básicos, considerações iniciais, relações e equações básicas da teoria de Reissner necessários para a compreensão da formulação e a sua abrangência, seguida da solução fundamental de placas de Weeën (1982b).

O capítulo 3 trata da formulação integral de contorno para as placas de Reissner. Esta formulação será apresentada de forma resumida, sendo que maiores detalhes

podem ser encontrados em Ribeiro (1992). Para o cálculo dos deslocamentos e das forças de superfície e posteriormente deslocamentos e forças internas, as integrais de domínio serão tratadas por meio do uso de células ou com base em integrais correspondentes no contorno através do uso de elementos de contorno. Considera-se a atuação de carregamentos distribuídos uniformes, os quais podem atuar parcial ou integralmente no domínio, bem como cargas distribuídas em linha e concentradas. Utilizou-se a notação indicial de Einstein para a formulação apresentada nesta dissertação, sendo esta uma forma simples, compacta e elegante para escrever equações que envolvem um grande número de variáveis.

Em seguida, no capítulo 4, descreve-se o procedimento da implementação numérica pelo MEC por meio da discretização das equações integrais de contorno e aproximação das grandezas no contorno e no domínio. Após a discretização do problema, obtém-se um sistema de equações lineares escrito em termos das incógnitas no contorno, ou seja, forças ou deslocamentos. Um aspecto positivo deste método é a obtenção de resultados internos de acordo com a necessidade ou interesse da área a ser analisada. A solução das forças de superfície nos pontos internos é obtida por meio da representação integral analítica exata através de derivações da solução fundamental de deslocamento em termos das incógnitas do contorno. A discretização do contorno é feita por meio de elementos isoparamétricos lineares ou quadráticos que podem ser contínuos ou descontínuos. As integrais regulares foram determinadas numericamente via quadratura de Gauss-Legendre padrão, enquanto que, no caso de integrais fracamente singulares, adotou-se a quadratura logarítmica. As integrais fortemente singulares foram tratadas por meio do conceito de deslocamento de corpo rígido. A partir da solução final do sistema de equações algébricas lineares, o momento fletor no plano vertical tangente é obtido por meio do esquema de recuperação de tensão (*stress recovery*) conforme Aliabadi (2002).

A implementação realizada por meio da programação orientada a objetos (POO)

é descrita no capítulo 5 enfatizando a implementação das classes referentes à formulação de Reissner no núcleo numérico INSANE. Esse sistema vem sendo continuamente desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG através de novas implementações conduzidas por pesquisadores desta Instituição e disponível no *site* <http://www.insane.dees.ufmg.br>. São discutidos os detalhes da implementação, destacando-se a organização de classes e as principais atividades do núcleo numérico. O ambiente computacional INSANE é constituído de três grandes aplicações implementadas em linguagem Java: pré-processador, processador e pós-processador.

No Capítulo 6, diversos exemplos são apresentados com o objetivo de validar a implementação do código através de uma análise criteriosa dos resultados. A metodologia empregada baseou-se na comparação dos resultados obtidos com soluções analíticas clássicas, soluções numéricas disponíveis na literatura e resultados obtidos por meio do MEF usando o programa *Abaqus*. Desta forma realça-se a importância da teoria de Reissner e de sua implementação através do MEC usando a metodologia de POO no ambiente do Sistema INSANE.

As conclusões advindas ao longo do desenvolvimento deste trabalho e as perspectivas de trabalhos futuros são apresentadas no capítulo 7.

Capítulo 2

Fundamentos da Teoria de Flexão de Placas de Reissner

2.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentados os principais conceitos e formulações para a análise de flexão de placas considerando as hipóteses da teoria de Reissner.

A placa é um elemento estrutural que geometricamente é limitado por duas superfícies planas e que pode ser aproximada apenas por uma superfície bi-dimensional denominada de superfície média, ou plano médio, que resiste predominantemente a esforços em flexão.

Assume-se que o material é homogêneo e isotrópico, isto é, possui as mesmas propriedades físicas em todos os pontos, independentemente da direção a ser considerada na placa.

2.2 Hipóteses Básicas da Teoria de Reissner

As hipóteses básicas, sobre as quais se fundamenta a teoria de Reissner, são:

- A placa é constituída de material homogêneo, isotrópico, e de comportamento mecânico elástico-linear;
- A espessura é pequena se comparada às outras dimensões da placa;

- Diferentemente da teoria clássica de Kirchhoff, apresentada por Ugural (1981), uma reta inicialmente normal ao plano médio, após a deformação permanece reta, porém não mais necessariamente normal à superfície média deformada. Portanto, as deformações distorcionais por cisalhamento transversal são consideradas;
- As componentes tangenciais de força são nulas nas faces da placa; e
- $\sigma_{33} = \pm \frac{q}{2}$ para $x_3 = \pm \frac{h}{2}$ (tensões normais às superfícies externas da placa), sendo h a espessura da placa e q a atuação de uma carga transversal por unidade de área.

Assume-se que as forças externas atuam na direção normal à superfície média da placa. Considera-se a atuação de carregamentos uniformes parcial ou integralmente distribuídos na superfície da placa, cargas distribuídas em linha, bem como cargas concentradas.

A partir das considerações apresentadas anteriormente, adota-se um sistema de referência $x_1 - x_2 - x_3$ para um elemento de placa, sendo o plano $x_1 - x_2$ coincidente com o plano médio da placa em sua configuração indeformada. As componentes de deslocamentos, u_i , nas direções indicadas estão ilustradas na Fig.2.1.

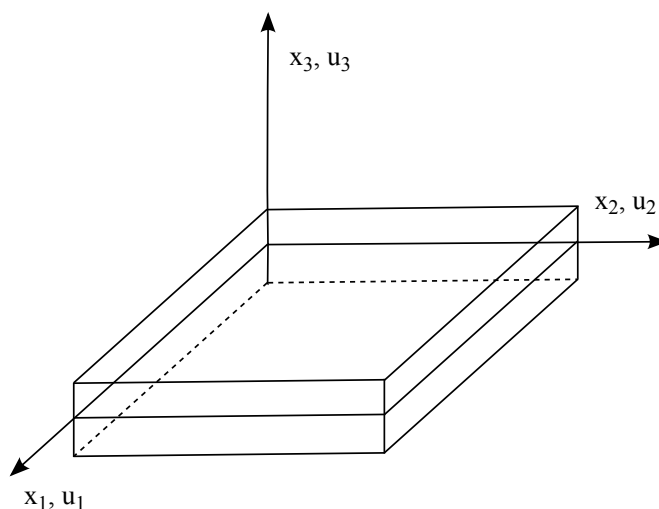


Figura 2.1: Sistema de Referência na Placa.

O sentido das rotações adotado nas equações está ilustrado na Fig.2.2, sendo ϕ_1 a rotação no plano $x_1 - x_3$ e ϕ_2 a rotação no plano $x_2 - x_3$. O deslocamento transversal na direção perpendicular ao plano médio da placa é representado por w .

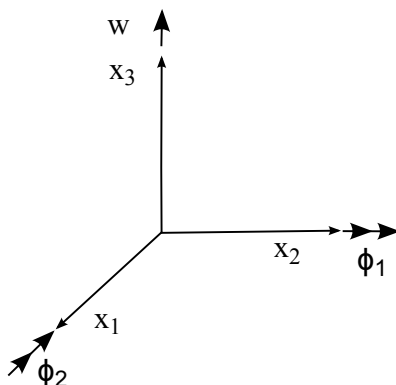


Figura 2.2: Convenção dos Sentidos das Rotações.

As componentes de tensão no sistema de referência $x_1 - x_2 - x_3$ com os respectivos sentidos considerados positivos são mostrados na Fig.2.3. O primeiro índice está relacionado com o vetor normal ao plano e o segundo índice à direção de atuação da tensão.

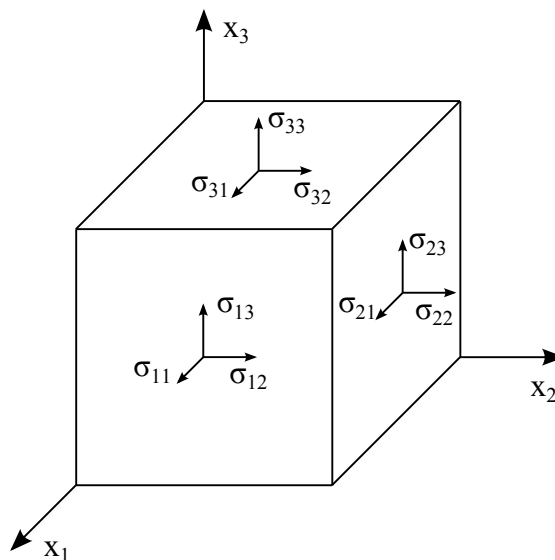


Figura 2.3: Estado de Tensão no Elemento de Placa.

As formulações apresentadas posteriormente baseiam-se neste sistema de referência e formam a base da teoria de Reissner.

2.3 Relações e Equações Básicas da Teoria de Reissner

2.3.1 Tensões e Esforços Solicitantes

Integrando-se as componentes de tensão $\sigma_{\alpha\beta}$ e multiplicando-se pelo braço de alavanca, ao longo da espessura, obtêm-se as resultantes de tensão, que são os momentos de flexão e de torção, por unidade de comprimento, atuando na superfície média:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 \, dx_3, \quad (2.1)$$

onde os índices denotados por letras gregas, α e β , assumem os valores 1 ou 2.

Analogamente, definem-se os esforços cortantes, por unidade de comprimento:

$$Q_{\alpha 3} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha 3} \, dx_3, \quad (2.2)$$

podendo o esforço cortante ser denotado simplesmente por Q_α .

De acordo com a segunda e a quarta hipóteses, apresentadas no item 2.2, as componentes $\sigma_{\alpha\beta}$ variam linearmente ao longo da espessura, sendo expressas por:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12}{h^3} M_{\alpha\beta} x_3. \quad (2.3)$$

O elemento de placa com as resultantes de tensão no sentido generalizado juntamente com a convenção de sinais adotada é mostrado na Fig.2.4.

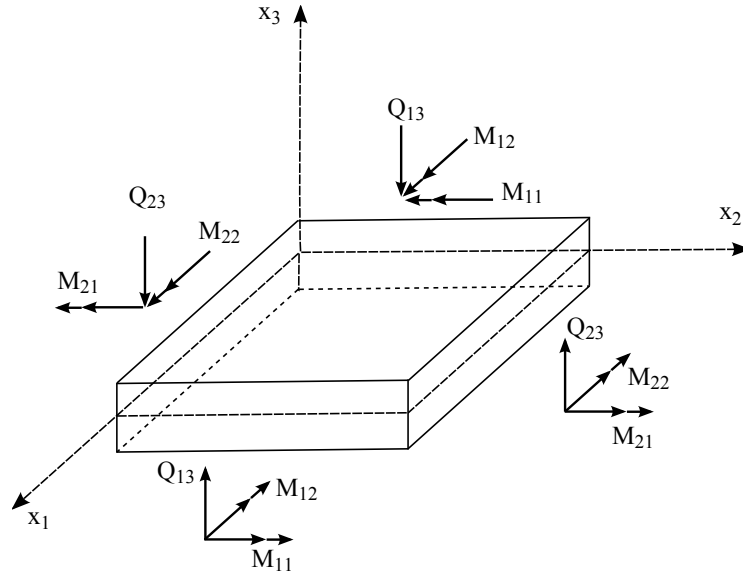


Figura 2.4: Resultantes de Tensão na Placa e Convenção de Sinais.

A partir da Eq.2.1 e Eq.2.2 e utilizando-se as equações diferenciais de equilíbrio, obtém-se uma distribuição parabólica para $\sigma_{\alpha 3}$ na seguinte forma:

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{3}{2h} Q_{\alpha 3} \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right]. \quad (2.4)$$

A avaliação da componente σ_{33} é obtida analogamente, resultando em:

$$\sigma_{33} = \frac{q x_3}{2 h} \left[3 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right]. \quad (2.5)$$

2.3.2 Equações de Equilíbrio

Na teoria de Reissner, impondo-se o equilíbrio de forças na direção x_3 e o equilíbrio de momentos em relação aos eixos x_α no elemento de placa infinitesimal, apresentado por Ribeiro (1992), obtêm-se as seguintes equações de equilíbrio:

$$M_{\alpha\beta,\alpha} - Q_\alpha = 0; \quad (2.6)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} - q = 0. \quad (2.7)$$

2.3.3 Deslocamentos e Deformações

Definem-se os deslocamentos generalizados, w e ϕ_α , na superfície média da placa como sendo, respectivamente, o deslocamento transversal médio tomado sobre a espessura da placa e os valores médios das rotações da seção em x_α constante da seguinte forma, segundo Ribeiro (1992):

$$w = \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{+h/2} u_3 \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] dx_3 \quad (2.8)$$

e

$$\phi_\alpha = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{+h/2} u_{\alpha x_3} dx_3. \quad (2.9)$$

Considerando que a deformação da placa seja definida tomando-se como base o regime de pequenos deslocamentos e deformações, as expressões das deformações generalizadas, em função dos deslocamentos generalizados são as seguintes, conforme apresentado por Ribeiro (1992):

Para as deformações de flexão, tem-se:

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}). \quad (2.10)$$

Para as deformações devido ao cisalhamento transversal, tem-se:

$$\psi_{3\alpha} = \phi_\alpha + w_{,\alpha}. \quad (2.11)$$

As deformações por cisalhamento transversal, $\psi_{3\alpha}$, ocorridas na placa estão ilustradas na Fig.2.5.

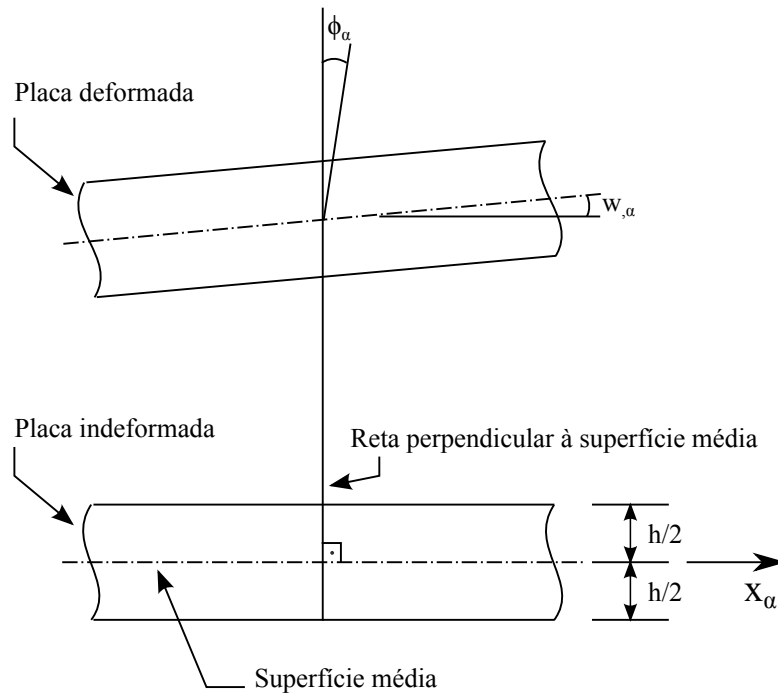


Figura 2.5: Deformação por Cisalhamento Transversal, $\psi_{3\alpha}$.

Na teoria clássica de Kirchhoff, a parcela da energia de deformação relativa às deformações por cisalhamento transversal da placa é desprezada. Portanto, as rotações são obtidas simplesmente através das derivadas do deslocamento na direção de $x_{\alpha}(w_{,\alpha})$.

A partir da teoria da elasticidade para pequenos deslocamentos aliada a princípios variacionais é possível obter as expressões para o cálculo dos momentos e esforços cortantes em função dos deslocamentos generalizados, segundo Ribeiro (1992):

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.12)$$

e

$$Q_{\alpha} = D(1-\nu) \frac{\lambda^2}{2} (\phi_{\alpha} + w_{,\alpha}), \quad (2.13)$$

onde ν representa o coeficiente de Poisson, E o módulo de elasticidade longitudinal,

λ uma constante dada por:

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h} \quad (2.14)$$

e D a rigidez à flexão da placa, sendo que:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (2.15)$$

O sistema formado pelas equações de equilíbrio descritas em 2.6 e 2.7 juntamente com as equações descritas em 2.12 e 2.13 constitui a base da teoria de Reissner e formam um sistema de equações diferenciais de sexta ordem, que permite o atendimento de três condições físicas em cada ponto do contorno. Este sistema reflete, algebricamente, as hipóteses nas quais a teoria de Reissner está fundamentada.

2.4 Condições de Contorno

Para satisfazer o sistema de equações diferenciais baseado na teoria de Reissner, é necessário que sejam atendidas três condições físicas em cada ponto do contorno, a saber, deslocamento transversal (flecha) na direção perpendicular ao plano médio da placa, rotação no plano perpendicular normal ao contorno (rotação no plano normal) e rotação no plano perpendicular ao plano médio tangente ao contorno (rotação no plano tangente). Alternativamente, podem ser atendidas as três condições correspondentes em termos de forças de superfície, quais sejam, força cortante na direção perpendicular ao plano médio, momento de flexão no plano perpendicular normal ao contorno e momento de torção no plano perpendicular ao plano médio tangente ao contorno da placa.

As condições de contorno usuais para placas, em relação a um sistema de referência (n, s) contido no plano da placa, sendo n a direção normal ao contorno e s a direção tangente ao contorno, estão descritas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Condições de Contorno Usuais para uma Placa.

Condição de contorno	1	2	3
Borda simplesmente apoiada			
1 - Condição <i>hard</i>	$w = 0$	$M_n = 0$	$\phi_s = 0$
2 - Condição <i>soft</i>	$w = 0$	$M_n = 0$	$M_{ns} = 0$
Borda engastada			
1 - Condição <i>hard</i>	$w = 0$	$\phi_n = 0$	$\phi_s = 0$
2 - Condição <i>soft</i>	$w = 0$	$\phi_n = 0$	$M_{ns} = 0$
Borda livre	$M_n = 0$	$M_{ns} = 0$	$Q_n = 0$

A teoria clássica de Kirchhoff simula apenas a condição *hard*, pois $\frac{\partial w}{\partial s}$ é nula ao longo da borda apoiada e, para a teoria de Reissner, pode-se utilizar qualquer uma das duas. A condição *hard* ou *soft* depende essencialmente do modelo físico a ser considerado e é apresentada com mais detalhes no item 6.2.

2.5 Mudança de Coordenadas

Os momentos e os esforços cortantes definidos pela Eq.2.1 e Eq.2.2, respectivamente, estão referidos a um sistema de coordenadas (x, y) , porém para os casos em que estas forças de superfície estejam situadas no contorno da placa, será necessário determiná-las em um outro sistema de referência (n, s) .

A transformação de coordenadas do sistema (x, y) para o sistema (n, s) é definida por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \mathcal{T} \begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

e

$$\begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} = \underline{\underline{T}}^T \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix}, \quad (2.17)$$

onde a matriz de transformação $\underline{\underline{T}}$ é dada por:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

O sistema de referência (x, y) e (n, s) está ilustrado na Fig.2.6

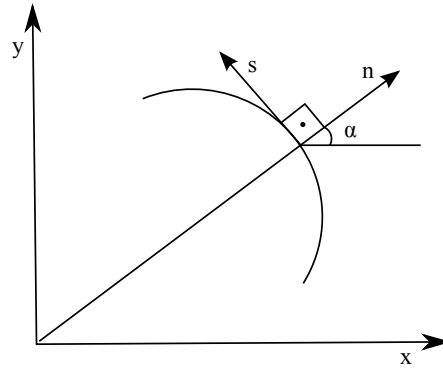


Figura 2.6: Sistema de Coordenadas (n, s) .

2.6 Solução Fundamental de Placas de Reissner

Para a representação integral de contorno, obtida através da teoria de Reissner, utilizam-se as soluções fundamentais de deslocamento para um domínio considerado infinito Ω^* e o contorno correspondente Γ^* .

A solução fundamental é usualmente formulada como a resposta, em um ponto genérico t , de um domínio fundamental infinito, causada pela aplicação de uma fonte pontual em outro ponto s desse domínio conforme Fig.2.7. A fonte pontual é representada pela função Delta de Dirac $\delta_{(s,t)}$, a qual possui as seguintes propriedades:

$$\delta_{(s,t)} = 0, \text{ quando os pontos } s \text{ e } t \text{ não são coincidentes;}$$

$$\delta_{(s,t)} = \infty, \text{ quando os pontos } s \text{ e } t \text{ são coincidentes; e}$$

$$\int_{\Omega^*} \phi(t) \delta(s, t) d\Omega^* = \phi(s), \quad (2.19)$$

onde $\phi(t)$ é uma função qualquer definida no domínio Ω^* . A partir da Eq.2.19 pode-se escrever:

$$\int_{\Omega^*} \delta(s, t) d\Omega^* = 1, \quad (2.20)$$

isto é, a resultante da integral da função delta de Dirac no domínio é a carga unitária.

Para o caso de placas, a fonte pontual é generalizada e consiste na aplicação de dois momentos unitários, um na direção de x_1 e o outro na direção de x_2 e de uma carga concentrada na direção de x_3 . Desta forma, obtém-se as respostas em um ponto t do domínio, causada por cada uma das fontes pontuais generalizadas.

Na figura 2.7, ilustra-se o caso de uma carga unitária aplicada no ponto s na direção x_3 e as respostas fundamentais no ponto t deste mesmo domínio em termos de deslocamentos (u_{31}^* , u_{32}^* e u_{33}^*), Fig.2.7(a), e em termos de forças de superfície (p_{31}^* , p_{32}^* e p_{33}^*), Fig.2.7(b).

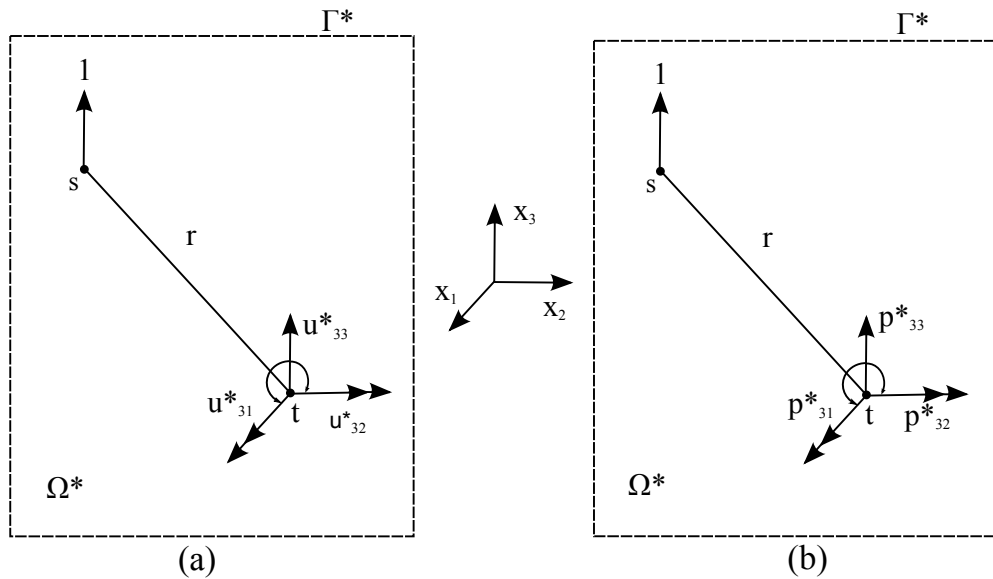


Figura 2.7: Solução Fundamental.

De acordo com Weeën (1982b), a solução fundamental $u_{ij}^*(s, t)$ é obtida pelo Método de Hörmander, sendo expressa por:

$$u_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \{ [8B - (1-\nu)(2\ln z - 1)] \delta_{\alpha\beta} - [8A + 2(1-\nu)] r_{,\alpha} r_{,\beta} \}; \quad (2.21)$$

$$u_{\alpha 3}^* = -u_{3\alpha}^* = \frac{1}{8\pi D} (2\ln z - 1) r r_{,\alpha}; \quad (2.22)$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} [(1-\nu)z^2(2\ln z - 1) - 8\ln z], \quad (2.23)$$

onde r é a distância entre o ponto fonte s e o ponto de deslocamento t , sabendo-se ainda que:

$$r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_\alpha(t)} = \frac{r_{,\alpha}}{r}; \quad (2.24)$$

$$r_\alpha = x_\alpha(t) - x_\alpha(s); \quad (2.25)$$

$$z = \lambda r. \quad (2.26)$$

Nas expressões acima aparecem ainda A e B que são funções de z dadas por:

$$A(z) = k_0(z) + \frac{2}{z} \left[k_1(z) - \frac{1}{z} \right]; \quad (2.27)$$

$$B(z) = k_0(z) + \frac{1}{z} \left[k_1(z) - \frac{1}{z} \right], \quad (2.28)$$

sendo $K_0(z)$ e $K_1(z)$ funções de Bessel modificadas de ordem inteira, podendo ser calculadas através de expansões polinomiais dadas por Abramowitz e Stegun (1965).

A expansão de $A(z)$ para pequenos argumentos mostra que esta função é contínua enquanto a expansão de $B(z)$ apresenta singularidade do tipo $\ln z$ conforme Karam (1992) e mostrada no Anexo B.

As referidas funções de Bessel modificadas estão apresentadas no Anexo A.

Capítulo 3

Equações Integrais de Contorno para Placas de Reissner

3.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se, de forma resumida, a formulação integral para o problema de flexão de placas considerando material isotrópico e homogêneo. O modelo teórico de placas utilizado está de acordo com a teoria de Reissner e, portanto, possui seis variáveis de contorno: M_n , M_{ns} , Q_n , w , ϕ_n e ϕ_s . A placa, considerada neste trabalho com espessura constante, está sujeita à atuação de carregamentos distribuídos uniformemente na superfície, de linha, bem como cargas concentradas.

As equações integrais de contorno para deslocamentos e esforços em pontos do domínio e do contorno da placa podem ser obtidas a partir do método dos resíduos ponderados, tal como apresentado por Ribeiro (1992).

3.2 Equações Integrais de Contorno

3.2.1 Equações Integrais para Deslocamentos em Pontos do Domínio

Para a obtenção do conjunto de equações integrais que permitirão a modelagem mecânica de uma placa isotrópica e homogênea, deve-se definir a placa num domínio finito Ω , a qual está sujeita a um carregamento distribuído em uma região Ω_q , contida no domínio Ω , que provocará em um ponto (T) da placa, um estado de

tensão e deformação.

A placa, em equilíbrio, está contida numa placa infinita de contorno Γ^* e de domínio Ω^* , da qual ela é apenas um subdomínio. As grandezas relacionadas às expressões que serão descritas nesse capítulo e ao subdomínio Ω_q , onde atua a carga distribuída q , estão ilustradas na Fig.3.1.

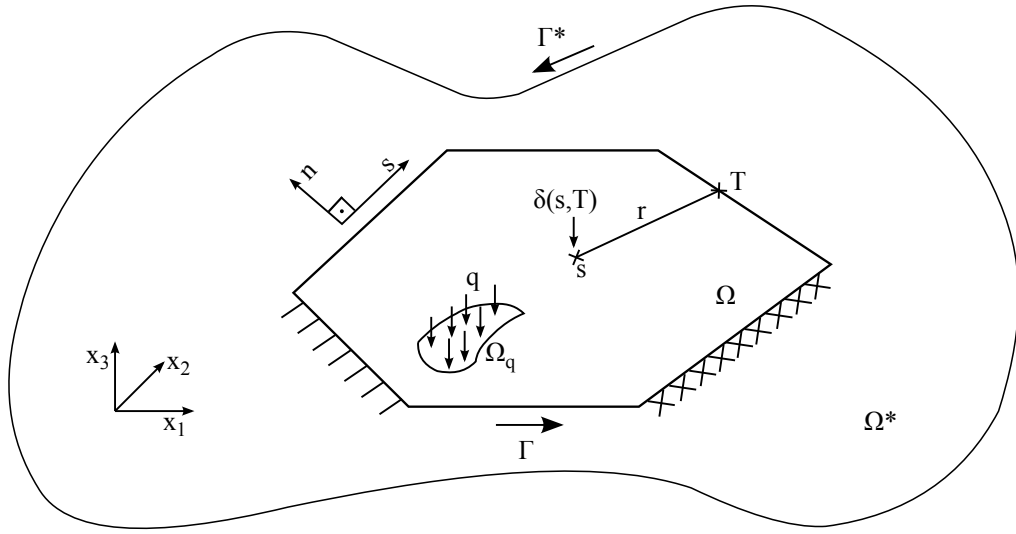


Figura 3.1: Exemplo de uma Placa Infinita.

Através do método dos resíduos ponderados, o erro cometido na aproximação da solução da equação diferencial de equilíbrio pode ser distribuído de acordo com:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma_p} (p_i - \bar{p}_i) u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \bar{u}_i) p_i^* d\Gamma, \quad (3.1)$$

onde u_i^* é a solução fundamental genérica em deslocamentos adotada como função ponderadora do erro, $\sigma_{ij,j}$ é a derivada parcial da componente de tensão σ_{ij} em relação à coordenada x_j , b_i é o carregamento de domínio na direção i , p_i são as forças na superfície do contorno, \bar{p}_i são as forças prescritas no contorno Γ_p , u_i são os deslocamentos do contorno, \bar{u}_i são os deslocamentos prescritos no contorno Γ_u , p_i^* é a solução fundamental para a força de superfície.

Aplicando-se a Eq.3.1 à situação da placa, sob as condições de equilíbrio dadas pela Eq.2.6 e Eq.2.7, tem-se:

$$\int_{\Omega} [(M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{3\alpha})u_{\alpha}^* + (Q_{3\alpha,\alpha} + q)u_3^*] d\Omega = \int_{\Gamma_p} (p_i - \bar{p}_i)u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \bar{u}_i)p_i^* d\Gamma. \quad (3.2)$$

Partindo-se da Eq.3.2, de acordo com o desenvolvimento apresentado por Ribeiro (1992), a Equação Integral para Deslocamentos em pontos no domínio pode ser escrita como:

$$u_i(s) = \int_{\Gamma} [u_{ik}^*(s, T)p_k(T) - p_{ik}^*(s, T)u_k(T)] d\Gamma(T) + \int_{\Omega} q(t) \left[u_{i3}^*(s, t) - \frac{\nu}{(1 - \nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(s, t) \right] d\Omega(t), \quad (3.3)$$

onde os pontos s e t pertencem ao domínio Ω e T pertence ao contorno Γ , u_k e p_k são respectivamente os deslocamentos e as forças generalizadas sobre o contorno.

Assim os deslocamentos no ponto s do domínio podem ser expressos pela Eq.3.3, em função dos valores dos deslocamentos e das forças no contorno e dos carregamentos aplicados no domínio.

3.2.2 Equações Integrais para Deslocamentos em Pontos do Contorno

Para a solução das incógnitas no contorno através das equações integrais, a Eq.3.3 deverá ser reescrita para o ponto fonte S situado sobre o contorno Γ da placa. Para tanto, o ponto s é levado para o contorno Γ por meio de um processo de limites, alterando o contorno de forma que S fique como parte do domínio, tal como demonstrado por Ribeiro (1992).

Assim sendo, o contorno será alterado, acrescentado-se o trecho em arco de círculo, Γ_{ε} , com raio ε e o centro no ponto S situado sobre o contorno inicial. Conforme

a Figura 3.2, retira-se ainda o contorno $\bar{\Gamma}$, resultando em um novo contorno dado por $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon$.

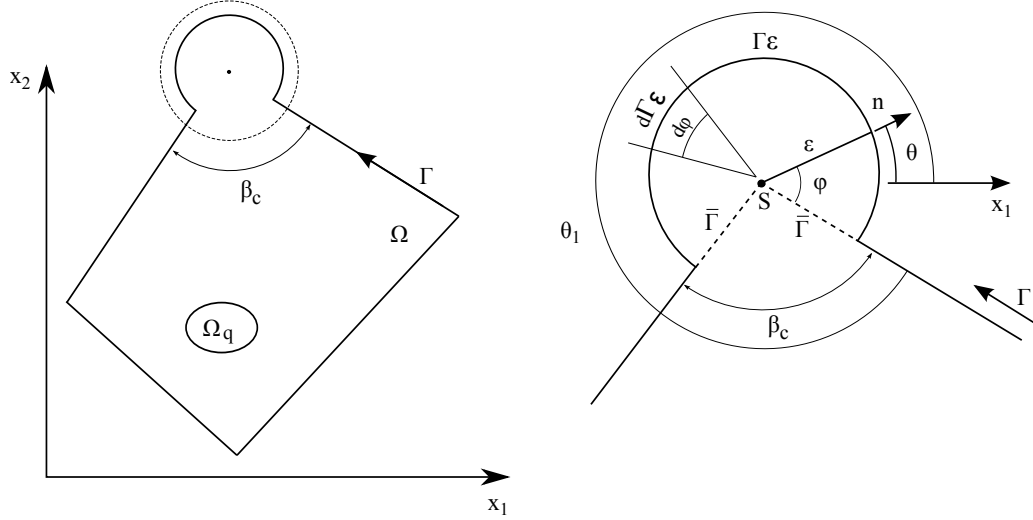


Figura 3.2: Alteração do Contorno no Canto da Placa.

O ângulo φ varia de 0 a $(2\pi - \beta_c)$, no trecho acrescido Γ_ε , enquanto o ângulo θ varia de θ_1 a $(\theta_1 - \beta_c)$.

No caso de pontos situados no canto da placa, considera-se este novo contorno e, por meio de um processo de cálculo dos limites quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a Eq.3.3 pode ser reescrita, conforme apresentado por Ribeiro (1992), como:

$$C_{ik}(S)u_k(S) = \int_{\Gamma} u_{ik}^*(S, T)p_k(T) d\Gamma(T) - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(S, T)u_k(T) d\Gamma(T) + \int_{\Omega_q} q(t) \left[u_{i3}^*(S, t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(S, t) \right] d\Omega(t), \quad (3.4)$$

onde $C_{ik}(S)$ advém do conceito de ângulo sólido dado por:

$$C_{ik}(S) = \delta_{ik} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ik}^*(S, T) d\Gamma(T). \quad (3.5)$$

Os valores da constante $C_{ik}(S)$ estão ilustrados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Valores da Constante $C_{ik}(S)$.

Valor	Condição do contorno
1/2	Contorno suave
0	Pontos externos ao contorno (S)
1	Pontos internos ao contorno (s)

3.2.3 Forças Fundamentais Generalizadas no Contorno

A partir da solução fundamental de deslocamentos é possível deduzir as expressões das forças fundamentais generalizadas p_{ik}^* que constam da Eq.3.3 e Eq.3.4. Estas forças se referem ao domínio fundamental Ω^* e representam as respostas no ponto de deslocamento t causadas pela ação de uma distribuição de carga unitária no ponto fonte s . Esta distribuição de carga é modelada pela função Delta de Dirac. As forças fundamentais generalizadas podem ser expressas por:

$$\begin{aligned}
 P_{\gamma\alpha}^*(s, t) &= M_{\alpha\beta\gamma}^*(s, t)n_\beta; \\
 P_{3\alpha}^*(s, t) &= M_{\alpha\beta 3}^*(s, t)n_\beta; \\
 P_{\gamma 3}^*(s, t) &= Q_{3\beta\gamma}^*(s, t)n_\beta; \\
 P_{33}^*(s, t) &= Q_{3\beta 3}^*(s, t)n_\beta,
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

sendo,

$M_{\alpha\beta\gamma}^*$: momentos fundamentais em t , produzidos por momentos unitários aplicados em s , nas direções γ ;

$M_{\alpha\beta 3}^*$: momentos fundamentais em t , produzidos por uma força unitária aplicada em s , na direção x_3 ;

$Q_{3\beta\gamma}^*$: forças cortantes fundamentais em t , produzidas por momentos unitários aplicados em s , nas direções γ ;

$Q_{3\beta 3}^*$: forças cortantes fundamentais em t , produzidas por uma força unitária aplicada em s , na direção x_3 .

As seguintes expressões são obtidas para as forças generalizadas no contorno:

$$p_{\gamma\alpha}^* = -\frac{1}{4\pi r} [(4A + 2zk_1 + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma} r_{,n} + r_{,\alpha} n_\gamma) + (4A + 1 + \nu)r_{,\gamma} n_\alpha - 2(8A + 2zk_1 + 1 - \nu)r_{,\alpha} r_{,\gamma} r_{,n}]; \quad (3.7)$$

$$p_{3\alpha}^* = -\frac{(1 - \nu)}{8\pi} \left\{ \left[2\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \ln z - 1 \right] n_\alpha + 2r_{,\alpha} r_{,n} \right\}; \quad (3.8)$$

$$p_{\gamma 3}^* = -\frac{\lambda^2}{2\pi} [Bn_\gamma - Ar_{,\gamma} r_{,n}]; \quad (3.9)$$

$$p_{33}^* = -\frac{1}{2\pi r} r_{,n} \quad , \quad (3.10)$$

onde $r_{,n}$ é a derivada de r na direção da normal no ponto t , dada por:

$$r_{,n} = \frac{\partial r}{\partial n(t)} = r_{,\alpha} n_\alpha. \quad (3.11)$$

Examinando-se as expressões acima e as expansões de $A(z)$ e $B(z)$, conclui-se que p_{ik}^* possui singularidades do tipo $\ln r$ e $1/r$ tal como apresentado por Karam (1992).

3.2.4 Equações Integrais para Esforços nos Pontos Internos

O cálculo das grandezas nos pontos internos é uma das grandes vantagens do método dos elementos de contorno pela sua eficiência computacional. Os valores dos esforços internos são calculados por meio da representação integral analítica exata através de derivações da solução fundamental de deslocamento em termos das incógnitas do contorno. Para o método dos elementos finitos e o método das diferenças

finitas, os valores dos esforços internos são obtidos através de uma derivação numérica dos deslocamentos calculados nesses pontos internos. Porém, como as grandezas internas são obtidas conhecendo-se os valores sobre o contorno, uma análise criteriosa destes valores torna-se fundamental para a qualidade dos resultados obtidos nos pontos internos.

A partir da expressão integral de deslocamentos, Eq.3.3, e suas derivadas apropriadas em relação às coordenadas no ponto fonte s , e das relações dos esforços e deslocamentos generalizados, vistas na Eq.2.12 e Eq.2.13, obtém-se as representações integrais dos momentos e forças cortantes, tal como apresentado por Ribeiro (1992).

Assim, após derivação e rearranjo, obtém-se as seguintes expressões integrais para os momentos fletores, torçor e forças cortantes:

$$M_{\alpha\beta}(s) = \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta k}^*(s, T) p_k(T) d\Gamma(T) - \int_{\Gamma} p_{\alpha\beta k}^*(s, T) u_k(T) d\Gamma(T) + \int_{\Omega_q} r_{\alpha\beta}^*(s, t) q(t) d\Omega_q(t) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \delta_{\alpha\beta}; \quad (3.12)$$

$$Q_{3\beta}(s) = \int_{\Gamma} u_{3\beta k}^*(s, T) p_k(T) d\Gamma(T) - \int_{\Gamma} p_{3\beta k}^*(s, T) u_k(T) d\Gamma(T) + \int_{\Omega_q} r_{3\beta}^*(s, t) q(t) d\Omega_q(t), \quad (3.13)$$

onde

$$u_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{1}{4\pi r} [(4A + 2zk_1 + 1 - \nu)(\delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta}) - (16A + 4zk_1 + 2 - 2\nu)r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + (4A + 1 + \nu)\delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma}]; \quad (3.14)$$

$$u_{\alpha\beta 3}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left\{ \left[\frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \ln z - 1 \right] \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right\}; \quad (3.15)$$

$$u_{3\beta\gamma}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B\delta_{\gamma\beta} - Ar_{,\gamma} r_{,\beta}]; \quad (3.16)$$

$$u_{3\beta 3}^* = \frac{1}{2\pi r} r_{,\beta}, \quad (3.17)$$

e

$$\begin{aligned} p_{\alpha\beta\gamma}^* = & \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2} \{ (4A + 2zk_1 + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma} n_\beta + \delta_{\gamma\beta} n_\alpha) + \\ & (4A + 1 + 3\nu)\delta_{\alpha\beta} n_\gamma - (16A + 6zk_1 + z^2 k_0 + 2 - 2\nu) \times \\ & [(n_\alpha r_{,\beta} + n_\beta r_{,\alpha})r_{,\gamma} + (\delta_{\gamma\alpha} r_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha})r_{,n}] - \\ & (16A + 4zk_1 + 2 + 2\nu)(\delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} r_{,n} + n_\gamma r_{,\alpha} r_{,\beta}) + \\ & (96A + 32zk_1 + 4z^2 k_0 + 8 - 8\nu)r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,n} \}; \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$p_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} [(2A + zk_1)(r_{,\beta} n_\alpha + r_{,\alpha} n_\beta) - (8A + 2zk_1)r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} + 2A\delta_{\alpha\beta} r_{,n}]; \quad (3.19)$$

$$p_{3\beta\gamma}^* = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} [(2A + zk_1)(\delta_{\gamma\beta} r_{,n} + r_{,\gamma} n_\beta) - (8A + 2zk_1)r_{,\gamma} r_{,\beta} r_{,n} + 2A n_\gamma r_{,\beta}]; \quad (3.20)$$

$$p_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2} [(z^2 B + 1)n_\beta - (z^2 A + 2)r_{,\beta} r_{,n}]. \quad (3.21)$$

As expressões fundamentais $r_{\alpha\beta}^*$ e $r_{3\alpha}^*$, presentes na integral de domínio para cálculo dos momentos e esforços cortantes, são dadas por:

$$r_{\alpha\beta}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left\{ \left[\frac{2(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right] \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} - \frac{4\nu}{(1-\nu)\lambda^2 r^2} (2r_{,\alpha} r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \right\} \quad (3.22)$$

e

$$r_{3\beta}^* = \frac{1}{2\pi r} r_{,\beta}. \quad (3.23)$$

3.2.5 Transformação das Integrais de Domínio em Integrais de Contorno

As integrais de domínio que aparecem na Eq.3.3, Eq.3.12 e Eq.3.13 podem ser transformadas em integrais de contorno da região carregada Γ_q através de transformações apropriadas, conforme Weeën (1982b). Assim, considerando-se a carga uniformemente distribuída q , no subdomínio Ω_q , e utilizando-se o teorema de divergência, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_q} q(t) \left[u_{i3}^*(s, t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(s, t) \right] d\Omega_q(t) = \\ \int_{\Gamma_q} q(t) \left[v_{i, \alpha}^*(s, t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(s, t) \right] n_\alpha d\Gamma_q(t), \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde a função $v_{i, \alpha}^*(s, t)$ deve satisfazer a:

$$v_{i, \alpha\alpha}^*(s, t) = u_{i3}^*(s, t) \quad (3.25)$$

As expressões fundamentais $v_{i, \alpha}^*(s, t)$ que atendem à Eq.3.25 são dadas por:

$$v_{\alpha, \beta}^* = \frac{r^2}{128\pi D} [\delta_{\alpha\beta}(4\ln(z) - 5) + 2(4\ln(z) - 3)r_{, \alpha}r_{, \beta}] \quad (3.26)$$

e

$$v_{3, \beta}^* = -\frac{rr_{, \beta}}{128\pi D(1-\nu)\lambda^2} [32(2\ln(z) - 1) - z^2(1-\nu)(4\ln(z) - 5)]. \quad (3.27)$$

As derivadas de u_{ij} em relação às coordenadas do ponto de deslocamento t são expressas por:

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta, \gamma}^* = \frac{-1}{4\pi D(1-\nu)r} [(4A + 4zk_1 + 1 - \nu)r_{, \gamma}\delta_{\alpha\beta} - (16A + 4zk_1 + 2 - 2\nu)r_{, \alpha}r_{, \beta}r_{, \gamma} \\ + (4A + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma}r_{, \beta} + \delta_{\beta\gamma}r_{, \alpha})]; \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$u_{\alpha 3, \beta}^* = -u_{3\alpha, \beta}^* = \frac{1}{8\pi D} [\delta_{\alpha\beta}(2lnz - 1) + 2r_{,\alpha}r_{,\beta}]; \quad (3.29)$$

$$u_{33, \alpha}^* = -\frac{r_{,\alpha}}{8\pi D(1-\nu)r^2} [(1-\nu)z^2(2lnz - 1) - 8]. \quad (3.30)$$

A influência da carga uniformemente distribuída q no cálculo dos esforços nos pontos internos é dada pela integral de domínio:

$$\int_{\Omega_q} r_{i\beta}^*(s, t)q(t) d\Omega_q(t). \quad (3.31)$$

A Equação 3.31 pode ser substituída por uma formulação equivalente a partir das expressões integrais sobre o contorno da região carregada. Considerando-se as definições dos momentos fletores e torçor expressa na Eq.2.12 e das forças cortantes vista na Eq.2.13, obtém-se para os momentos fletores e torçor:

$$\int_{\Gamma_q} w_{\alpha\beta}^*(s, t)q(t) d\Gamma_q(t), \quad (3.32)$$

e para as forças cortantes:

$$\int_{\Gamma_q} w_{3\beta}^*(s, t)q(t) d\Gamma_q(t). \quad (3.33)$$

As expressões fundamentais $w_{\alpha\beta}^*$ e $w_{3\beta}^*$ são definidas por:

$$\begin{aligned} w_{\alpha\beta}^* = & -\frac{r}{64\pi} \{ (4ln(z) - 3)[(1-\nu)(r_{,\beta}n_\alpha + r_{,\alpha}n_\beta) + (1+3\nu)\delta_{\alpha\beta}r_{,n}] \\ & + 4[(1-\nu)r_{,\alpha}r_{,\beta} + \nu\delta_{\beta\alpha}]r_{,n} \} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_\gamma \end{aligned} \quad (3.34)$$

e

$$w_{3\beta}^* = \frac{1}{8\pi} [(2ln(z) - 1)n_\beta + 2r_{,\beta}r_{,n}] - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta\gamma}^* n_\gamma. \quad (3.35)$$

Capítulo 4

Método dos Elementos de Contorno

4.1 Introdução

A resolução de um problema referente à flexão de placas, obtida através da solução analítica das equações diferenciais, está restrita a poucos casos na literatura, conforme Timoshenko (1959). Somente através de simplificações dessas mesmas equações é que se pode obter uma solução analítica. Dada a complexidade da obtenção de equações analíticas em relação às aplicações correntes de placas na engenharia, desenvolveram-se vários métodos numéricos que possibilitam a obtenção de soluções aproximadas.

O presente capítulo apresenta os procedimentos utilizados na implementação numérica da análise mecânica de placas utilizando a formulação apresentada no capítulo anterior através do método dos elementos de contorno (MEC).

Considerando-se o MEC, as equações integrais são escritas em sua forma discretizada no contorno da placa dividida em segmentos denominados elementos de contorno. A discretização do contorno é feita por meio de elementos isoparamétricos lineares ou quadráticos que podem ser contínuos ou descontínuos. As integrações são efetuadas numericamente por meio da quadratura de Gauss-Legendre, sendo que, no caso de integrais singulares, utilizam-se procedimentos especiais. Ao final

destas integrações obtém-se um sistema de equações algébrico escrito em termos das incógnitas do problema: deslocamentos ou forças de superfície generalizadas correspondentes. A solução deste sistema leva à determinação das grandezas incógnitas no contorno; em seguida são calculados de forma direta os valores de deslocamentos e esforços nos pontos internos.

Por fim, para problemas envolvendo a prescrição de deslocamentos nulos em uma região do domínio, como placas com apoios no domínio, adotou-se um procedimento específico em que o contorno do apoio é adicionado ao contorno da placa formando um sistema único de equações a serem solucionadas. Desta forma, optou-se por uma formulação alternativa em relação ao tratamento dado por Silva (1996).

4.2 Discretização das Equações de Contorno

O elemento estrutural de domínio Ω e contorno Γ está ilustrado na Fig.4.1. O contorno Γ é dividido em um número finito de segmentos, retos ou curvos, denominados elementos de contorno sobre o plano médio da placa. O contorno real é, portanto, substituído por um contorno aproximado, baseado em esquemas de interpolação previamente definidos. Da mesma forma, as grandezas do contorno (deslocamentos e forças de superfície) são aproximadas por funções de interpolação definidas em termos de seus valores nodais.

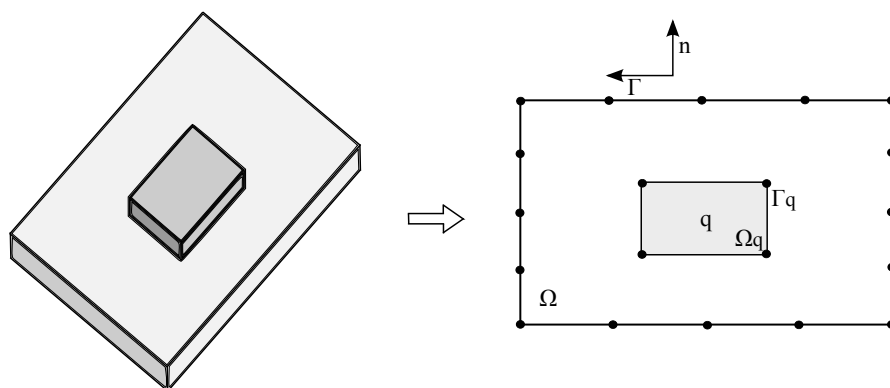


Figura 4.1: Exemplo de Discretização de uma Placa.

A formação dos elementos assumem valores de 2 ou 3 nós implicando em uma aproximação por função linear ou quadrática, respectivamente. Como as integrais são resolvidas numericamente, é conveniente expressar a variável do Γ_j e as coordenadas de cada ponto, ao longo do elemento, em função das coordenadas locais homogêneas, ξ , de acordo com a Fig.4.2.

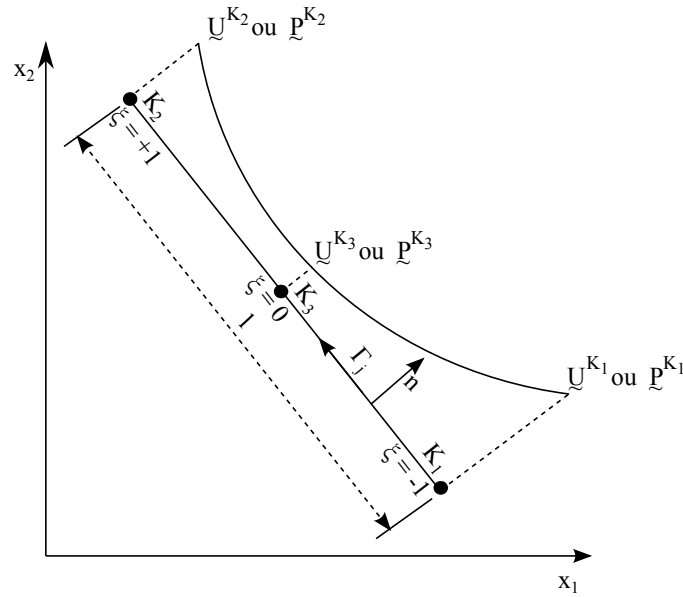


Figura 4.2: Exemplo de um Elemento Quadrático, Γ_j .

Assim, as coordenadas do ponto genérico m ficam expressas por:

$$\underline{x}^m = \underline{\Psi}^T(\xi)\underline{x}^{(N)}, \quad (4.1)$$

onde x^m são coordenadas cartesianas, $x^{(N)}$, o vetor de coordenadas nodais, e Ψ^T , a transposta da matriz das funções aproximadoras.

Para o nó K_1 , por exemplo, tem-se os seguintes vetores de deslocamentos e forças de superfície:

$$\underline{U}^{K_1} = \left\{ \begin{array}{c} U_1^{K_1} \\ U_2^{K_1} \\ U_3^{K_1} \end{array} \right\}, \quad (4.2)$$

e

$$\underline{\tilde{P}}^{K_1} = \begin{Bmatrix} P_1^{K_1} \\ P_2^{K_1} \\ P_3^{K_1} \end{Bmatrix}. \quad (4.3)$$

Os valores de deslocamentos e forças de superfície são aproximados sobre os elementos por funções de interpolação lineares ou quadráticas em função dos respectivos valores nodais. Assim, para um ponto m qualquer sobre o contorno Γ_j , tem-se para um dado elemento linear:

$$\underline{\tilde{u}}^m = \underline{\tilde{\Psi}}^T(\xi)U^{(N)} = \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_1^{K_1} \\ U_2^{K_1} \\ U_3^{K_1} \\ U_1^{K_2} \\ U_2^{K_2} \\ U_3^{K_2} \end{Bmatrix}; \quad (4.4)$$

$$\underline{\tilde{p}}^m = \underline{\tilde{\Psi}}^T(\xi)P^{(N)} = \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} P_1^{K_1} \\ P_2^{K_1} \\ P_3^{K_1} \\ P_1^{K_2} \\ P_2^{K_2} \\ P_3^{K_2} \end{Bmatrix}, \quad (4.5)$$

e para um dado elemento quadrático, tem-se:

$$\underline{\tilde{u}}^m = \underline{\tilde{\Psi}}^T(\xi)U^{(N)} = \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_3 & 0 & 0 & \Psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_3 & 0 & 0 & \Psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_3 & 0 & 0 & \Psi_2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_1^{K_1} \\ U_2^{K_1} \\ U_3^{K_1} \\ U_1^{K_3} \\ U_2^{K_3} \\ U_3^{K_3} \\ U_1^{K_2} \\ U_2^{K_2} \\ U_3^{K_2} \end{Bmatrix}; \quad (4.6)$$

$$\underline{\tilde{p}}^m = \underline{\tilde{\Psi}}^T(\xi)P^{(N)} = \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_3 & 0 & 0 & \Psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_3 & 0 & 0 & \Psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_3 & 0 & 0 & \Psi_2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} P_1^{K_1} \\ P_2^{K_1} \\ P_3^{K_1} \\ P_1^{K_3} \\ P_2^{K_3} \\ P_3^{K_3} \\ P_1^{K_2} \\ P_2^{K_2} \\ P_3^{K_2} \end{Bmatrix}. \quad (4.7)$$

Os vetores de deslocamentos e forças de superfície contêm, respectivamente, em cada ponto:

$$\underline{U}^K = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \\ w \end{Bmatrix}, \quad (4.8)$$

e

$$\underline{\tilde{P}}^K = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_n \\ M_{ns} \\ Q \end{Bmatrix}. \quad (4.9)$$

onde ϕ_n e ϕ_s são as rotações no plano normal x_{3n} e tangencial x_{3s} , respectivamente, para os pontos do contorno; w é o deslocamento transversal na direção x_3 ; M_n e M_{ns} são os momentos nos planos x_{3n} e x_{3s} , respectivamente, para os pontos do contorno e Q_n é a força transversal na direção x_3 . O sistema de eixos, normal n e tangencial s , está representado na Fig.2.6.

A matriz das funções aproximadoras $\underline{\tilde{\Psi}}^T$ é dada por Beer et al. (2008). Estas funções aproximadoras, representadas pelo elemento linear e elemento quadrático, estão ilustradas na Fig.4.3.

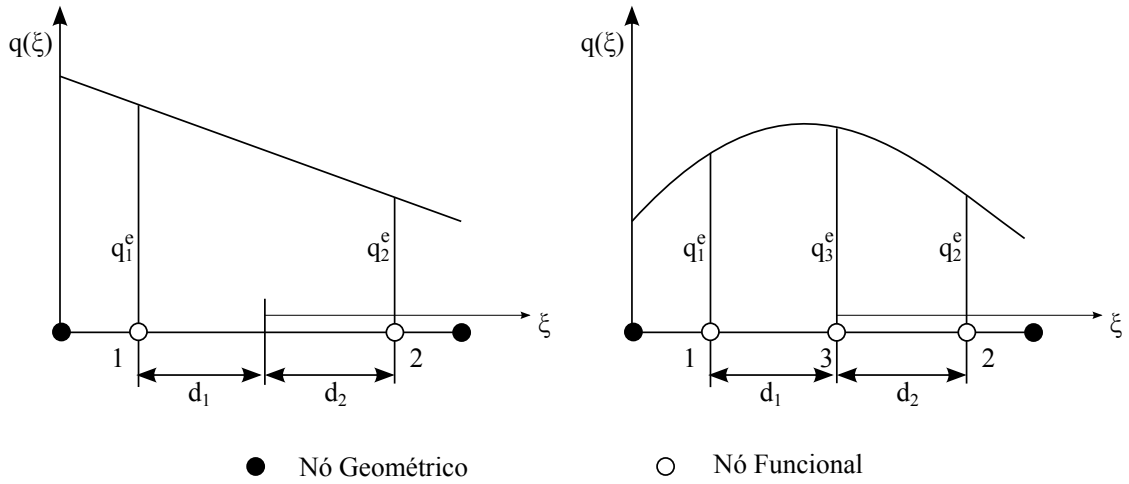


Figura 4.3: Exemplo de Elemento Linear e Elemento Quadrático.

Para o elemento linear, tem-se as seguintes funções de forma:

$$\begin{aligned}\bar{N}_1(\xi) &= \frac{1}{d_1 + d_2}(d_1 - \xi); \\ \bar{N}_2(\xi) &= \frac{1}{d_1 - d_2}(d_2 - \xi).\end{aligned}\tag{4.10}$$

Para o elemento quadrático, tem-se as seguintes funções de forma:

$$\begin{aligned}\bar{N}_1(\xi) &= \frac{1}{d_1 + d_2}(d_1 - \xi)\left(-1 - \frac{\xi}{d_2}\right); \\ \bar{N}_2(\xi) &= \frac{1}{d_1 - d_2}(d_2 - \xi)\left(-1 - \frac{\xi}{d_1}\right); \\ \bar{N}_3(\xi) &= \frac{1}{d_1 d_2}(d_1 - \xi)(d_2 + \xi).\end{aligned}\tag{4.11}$$

O jacobiano da transformação de coordenadas globais x_i para coordenadas adimensionais intrínsecas ξ é dado por:

$$J = |J| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2}.\tag{4.12}$$

Após a discretização do contorno e da mudança de variável Γ para ξ , a equação integral de contorno, conforme a Eq.3.4, pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
C_{ik}(S)u_k(S) &= \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^{+1} |J| \underset{\sim}{\Psi}^T u_{ik}^* \underset{\sim}{P}^{(N)} d\xi \\
&- \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^{+1} |J| \underset{\sim}{\Psi}^T p_{ik}^* \underset{\sim}{U}^{(N)} d\xi \\
&+ \int_{\Omega} q(t) \left[u_{i3}^*(S, t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(S, t) \right] d\Omega(t),
\end{aligned} \tag{4.13}$$

onde NE é o número de elementos do contorno.

A Equação 4.13 é integrada numericamente pela Quadratura de Gauss-Legendre, já que o procedimento é simples e eficiente para o tratamento computacional do método. Reescrevendo a Eq.4.13 sobre os elementos, as equações integrais são transformadas em um sistema com 3 (NNC) equações e 3 (NNC) incógnitas expresso por:

$$\underline{C}\underline{U} + \hat{\underline{H}}\underline{U} = \underline{G}\underline{P} + \underline{B}, \tag{4.14}$$

onde NNC é o número de nós do contorno.

Os termos da diagonal que contém a matriz \underline{C} são incorporados à matriz $\hat{\underline{H}}$ conforme Aliabadi (2002). Estes termos podem ser avaliados diretamente através do conceito de deslocamento de corpo rígido através da equação:

$$C_{ik}(S) = - \sum_{\gamma=1}^{NNC} \hat{\underline{H}}_{ik}^{S\gamma}. \tag{4.15}$$

Assim os termos da diagonal da matriz H podem ser avaliados reescrevendo a Eq.4.15 como:

$$C_{ik}(S) + \hat{\underline{H}}_{ik}^{SS} = - \sum_{\gamma=1, S \neq \gamma}^{NNC} \hat{\underline{H}}_{ik}^{S\gamma}, \tag{4.16}$$

isto é,

$$\underline{\underline{H}}_{ik}^{SS} = - \sum_{\gamma=1, S \neq \gamma}^{NNC} \hat{\underline{\underline{H}}}_{ik}^{S\gamma}. \quad (4.17)$$

Portanto, a Eq.4.14 pode ser reescrita como:

$$\underline{\underline{H}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{B}}, \quad (4.18)$$

sendo:

$$\underline{\underline{G}} = \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^{+1} |J| \underline{\underline{\Psi}}^T(T) u_{ik}^*(S, T) d\xi(T); \quad (4.19)$$

$$\underline{\underline{H}} = \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^{+1} |J| \underline{\underline{\Psi}}^T(T) p_{ik}^*(S, T) d\xi(T), \quad (4.20)$$

onde u_{ik}^* é a solução fundamental generalizada de deslocamento, p_{ik}^* é a solução fundamental generalizada de força de superfície, T representa o nó local do elemento em que é medida a resposta de uma fonte pontual em S e $\underline{\underline{\Psi}}^T$ é a transposta da matriz das funções aproximadoras.

O vetor $\underline{\underline{B}}$ contém a influência do carregamento de domínio sendo detalhado no item 4.3.

4.3 Carregamentos no Domínio

A contribuição da carga distribuída uniformemente no domínio, parcial ou total, para a formação do sistema de equações lineares é efetuada considerando a 3ª integral do 2º membro da Eq.3.4 que é a transformada integral sobre o contorno da região carregada conforme Eq.3.24. Como alternativa, implementou-se também a integração da parcela referente à influência do carregamento de domínio diretamente utilizando-se a discretização do domínio em células.

O termo discretizado da Eq.3.4, contendo a integral de domínio, pode ser reescrito para uma integração sobre o contorno da região carregada, Γ_q . Para isso, tem-se:

$$\underline{B} = \sum_{k=1}^{NEC} \int_{-1}^{+1} |J| \underline{\Psi}^T(t) S_{ik}^* d\xi(t) q(t), \quad (4.21)$$

onde NEC é o número de elementos do contorno da região carregada, Γ_q , e a expressão fundamental S_{ik}^* é dada por:

$$S_{ik}^* = \left[v_{i,\alpha}^*(s, t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(s, t) \right] n_\alpha. \quad (4.22)$$

Para a integração sobre o domínio da região carregada, Ω_q , tem-se:

$$\underline{B} = \sum_{k=1}^{NC} \int_{-1}^{+1} |J| \underline{\Psi}^T(t) S_{ik}^* d\xi(t) q(t), \quad (4.23)$$

onde NC é o número de células em que foi dividido o domínio carregado, Ω_q , e a expressão fundamental S_{ik}^* é dada por:

$$S_{ik}^* = u_{i3}^*(s, t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(s, t). \quad (4.24)$$

Esta contribuição é convenientemente endereçada e armazenada no vetor \underline{B} .

4.4 Deslocamentos nos Pontos Internos

O cálculo dos deslocamentos nos pontos internos é feito numa etapa de pós-processamento a partir da determinação das incógnitas de contorno por meio da discretização da Eq.3.3. O procedimento adotado nessa discretização é análogo ao realizado na Eq.3.4. Deve-se observar que, neste caso, as integrais são todas regulares e os valores das grandezas de contorno relativos aos pontos nodais são

agora conhecidos. Desta maneira obtém-se para cada ponto interno no domínio Ω , o respectivo deslocamento por meio da equação:

$$\begin{aligned}
u_k(s) = & \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^{+1} |J| \tilde{\Psi}^T(T) u_{ik}^*(s, T) \tilde{P}^{(N)} d\xi(T) \\
& - \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^{+1} |J| \tilde{\Psi}^T(T) p_{ik}^*(s, T) \tilde{U}^{(N)} d\xi(T) \\
& + \int_{\Omega} q(t) \left[u_{i3}^*(S, t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(S, t) \right] d\Omega(t).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Reescrevendo-se a Eq.4.25 para todos os pontos internos, obtém-se a seguinte forma matricial:

$$\tilde{U} = \tilde{G} \tilde{P} - \tilde{H} \tilde{U} + \tilde{B}, \tag{4.26}$$

onde \tilde{U} é o vetor de deslocamentos nos pontos internos composto de três variáveis: os dois primeiros deslocamentos referentes às rotações nos planos $x_1 - x_3$ e $x_2 - x_3$ e o terceiro referente ao deslocamento transversal na direção x_3 .

As componentes de deslocamento nos pontos internos são calculadas em relação ao sistema global $x_1 - x_2 - x_3$.

4.5 Esforços nos Pontos Internos

A determinação dos momentos fletores, momento de torção e esforços cortantes para cada ponto interno é obtida com base na Eq.3.12 e Eq.3.13, discretizadas de acordo com as aproximações adotadas no item 4.2. Lembrando-se que as integrais de domínio têm as suas integrais de contorno equivalentes da região carregada, Γ_q , de acordo com o item 3.2.5.

Discretizando-se a Eq.3.12 para a determinação dos momentos nos pontos internos, tem-se:

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta}(s) &= \sum_{j=1}^{NE} \int_{-1}^{+1} |J| \underline{\Psi}^T(T) u_{\alpha\beta k}^*(s, T) \underline{P}^{(N)} d\xi \\
&\quad - \sum_{j=1}^{NE} \int_{-1}^{+1} |J| \underline{\Psi}^T(T) p_{\alpha\beta k}^*(s, T) \underline{U}^{(N)} d\xi \\
&\quad + \int_{\Omega} r_{\alpha\beta}^*(s, t) q(t) d\Omega(t) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \delta_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Pode-se representar a influência do contorno da seguinte maneira:

$$\mathcal{G}' = \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^{+1} |J| \underline{\Psi}^T(T) u_{\alpha\beta k}^*(S, T) d\xi(T); \tag{4.28}$$

$$\mathcal{H}' = \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^{+1} |J| \underline{\Psi}^T(T) p_{\alpha\beta k}^*(S, T) d\xi(T). \tag{4.29}$$

Discretizando-se a Eq.3.13 para a determinação dos esforços cortantes, tem-se:

$$\begin{aligned}
Q_{3\beta}(s) &= \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^{+1} |J| \underline{\Psi}^T(T) u_{3\beta k}(s, T) \underline{P}^{(N)} d\xi \\
&\quad - \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^{+1} |J| \underline{\Psi}^T(T) p_{3\beta k}(s, T) \underline{U}^{(N)} d\xi \\
&\quad + \int_{\Omega} r_{3\beta}^*(s, t) q(t) d\Omega(t).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Pode-se representar a influência do contorno da seguinte maneira:

$$\mathcal{G}'' = \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^{+1} |J| \underline{\Psi}^T(T) u_{3\beta k}^*(s, T) d\xi(T); \tag{4.31}$$

$$\mathcal{H}'' = \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^{+1} |J| \underline{\Psi}^T(T) p_{3\beta k}^*(s, T) d\xi(T). \tag{4.32}$$

Reescrevendo a Eq.4.27 e Eq.4.30 para todos os pontos internos, obtém-se a seguinte forma matricial:

$$\underline{M} = \underline{G}' \underline{P} - \underline{H}' \underline{U} + \underline{B}', \quad (4.33)$$

e

$$\underline{Q} = \underline{G}'' \underline{P} - \underline{H}'' \underline{U} + \underline{B}'', \quad (4.34)$$

onde \underline{P} é um vetor de valores nodais de forças de superfície, \underline{U} , um vetor de valores nodais de deslocamentos, e \underline{B}' e \underline{B}'' , vetores de influência do carregamento de domínio.

4.6 Tratamento das Integrais

O método dos elementos de contorno (MEC) fundamenta-se nas equações integrais de contorno (EIC) as quais contêm integrais regulares e singulares provenientes das soluções fundamentais. Como algumas equações da solução fundamental de Weeën (1982b) apresentam núcleos singulares, as integrais fortemente singulares são avaliadas no sentido do valor principal de Cauchy (VPC) e as integrais fracamente singulares são avaliadas pela quadratura logarítmica de Gauss-legendre. Esta avaliação torna-se necessária somente quando o ponto de colocação estiver localizado sobre o elemento a ser integrado. Neste capítulo, mostram-se o tratamento e o procedimento numérico usados para avaliar estas singularidades apresentados por Karam (1992) e Ribeiro (2006).

Dentre os diversos tipos de singularidades identificados no método de elementos de contorno, e todos de acordo com a natureza de seu núcleo, a integral contendo a solução fundamental de deslocamento é considerada fracamente singular para análise de flexão de placas usando a teoria de Reissner, conforme Karam (1992). A singularidade presente em algumas destas equações são do tipo $\ln(z)$ e são apresentadas com mais detalhes no Anexo B e Anexo C. Para a integral contendo a solução

fundamental de força de superfície, as integrais fortemente singulares foram tratadas por meio do conceito de deslocamento de corpo rígido. A abordagem adotada para o tratamento das integrais singulares é detalhada no item 4.6.2.

4.6.1 Integral Regular

Para os casos em que o ponto de colocação não coincida com o elemento de integração, integra-se as equações de contorno usando a quadratura de Gauss-Legendre padrão de acordo com a Eq.4.35.

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)d\xi = \sum_{s=1}^{NG} w_s f(\xi_s), \quad (4.35)$$

onde w_s e ξ_s são, respectivamente, os pesos e abscissas e NG o número de pontos de Gauss apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Abscissas e Pesos para a Quadratura de Gauss-Legendre.

NG	ξ_s	w_s
2	$\pm 0,5773502692$	1,0000000000
4	$\pm 0,3399810436$ $\pm 0,8611363116$	0,6521451549 0,3478548451
6	$\pm 0,2386191861$ $\pm 0,6612093865$ $\pm 0,9324695142$	0,4679139346 0,3607615730 0,1713244924
8	$\pm 0,1834346425$ $\pm 0,5255324099$ $\pm 0,7966664774$ $\pm 0,9602898565$	0,3626837834 0,3137066459 0,2223810345 0,1012285363

As coordenadas dos nós nos elementos são parametrizadas de tal forma que as

novas coordenadas chamadas de coordenadas intrínsecas situam-se no intervalo de -1 a +1, conforme Fig.4.2.

Neste trabalho, utilizou-se como referência o critério desenvolvido por Eberwien et al. (2005) onde a ordem da quadratura de Gauss está relacionada com o limite superior de erro na integração. O número de pontos de integração dependerá basicamente de um fator denominado f de acordo com a expressão:

$$f = \frac{\bar{d}}{l}, \quad (4.36)$$

onde \bar{d} é a *distância efetiva* entre o ponto de colocação e o ponto central do elemento a ser integrado e l é o *comprimento efetivo* deste elemento.

Ao final deste critério, adotaram-se duas ordens para a quadratura de Gauss: 4 (quatro) para $f < 1$ e 12 (doze) para $f \geq 1$.

4.6.2 Integral Fracamente Singular

Para os casos em que o ponto de colocação coincida com o elemento de integração, as integrais correspondentes à matriz G e ao vetor B possuirão singularidades de ordem $\ln r$, de acordo com Karam (1992), e vistas com mais detalhes no Anexo B e Anexo C.

O procedimento adotado para tratar as integrais onde ocorrem as singularidades consiste em isolar o termo logarítmico das equações fundamentais a fim de se utilizar o método numérico adequado para a integração. Tal singularidade será ajustada através da integração logarítmica vista na Eq.4.37.

$$\int_0^1 f(\eta) \ln \left(\frac{1}{\eta} \right) d\eta = \sum_{s=1}^{NG} w_s f(\eta_s), \quad (4.37)$$

onde w_s e η_s são, respectivamente, os pesos e abscissas e NG o número de pontos de Gauss apresentados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Abscissas e Pesos para Quadratura de Gauss com Função Logarítmica.

NG	η_s	w_s
2	$\pm 0,1120088062$	0,7185393190
	$\pm 0,6022769081$	0,2814606810
4	$\pm 0,0414484802$	0,3834640681
	$\pm 0,2452749143$	0,3868753178
	$\pm 0,5561654536$	0,1904351270
	$\pm 0,8489823945$	0,0392254871
6	$\pm 0,0216340058$	0,2387636626
	$\pm 0,1295833912$	0,3082865733
	$\pm 0,3140204499$	0,2453174266
	$\pm 0,5386572174$	0,1420087566
	$\pm 0,7569153374$	0,0554546223
	$\pm 0,9226688514$	0,0101689587
8	$\pm 0,0133202442$	0,1644166047
	$\pm 0,0797504290$	0,2375256100
	$\pm 0,1978710293$	0,2268419844
	$\pm 0,3541539944$	0,1757540790
	$\pm 0,5294585752$	0,1129240302
	$\pm 0,7018145299$	0,0578722107
	$\pm 0,8493793204$	0,0209790737
	$\pm 0,9533264500$	0,0036864071

Afim de se usar a quadratura logarítmica, a distância $r(S, T)$ deve ser reescrita para diferentes casos de acordo com a posição do nó no elemento. A abordagem apresentada neste tópico segue o procedimento apresentado por Huang (1993) e, para efeitos de ilustração, segue uma formulação para elementos quadráticos.

Para o caso em que a singularidade ocorra quando o ponto de colocação estiver situado no primeiro nó do elemento, a coordenada intrínseca é $\xi = -1$, e

$$\begin{aligned} x_i - x_i^p &= x_i - x_i^1 \\ &= x_i^1 [N_1(\xi) - 1] + x_i^2 N_2(\xi) + x_i^3 N_3(\xi), \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde x_i^α é a coordenada cartesiana dos nós para um dado elemento, x_i^p é a coordenada do ponto de colocação, e $N_\alpha(\xi)$ é a função de forma do elemento. Substituindo-se a equação de forma na Eq.4.38 para o elemento quadrático e rearranjando a equação, é obtida a seguinte expressão:

$$x_i - x_i^p = \eta(\xi) g_{1x_i}(\xi), \quad (4.39)$$

onde

$$g_{1x_i}(\xi) = (\xi - 2)x_i^1 + \xi x_i^2 + 2(1 - \xi)x_i^3, \quad (4.40)$$

e

$$\eta(\xi) = \frac{1 + \xi}{2}. \quad (4.41)$$

Com base na Eq.4.39, a distância r pode ser escrita como:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1^1)^2 + (x_2 - x_2^1)^2} = \eta(\xi) \sqrt{g_{1x_1}^2 + g_{1x_2}^2}. \quad (4.42)$$

Analogamente, se o ponto de colocação estiver situado no segundo nó do elemento, a coordenada intrínseca é $\xi = +1$, e a Eq.4.38 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
x_i - x_i^p &= x_i - x_i^2 \\
&= x_i^1 N_1(\xi) + x_i^2 [N_2(\xi) - 1] + x_i^3 N_3(\xi) \\
&= \eta(\xi) g_{2x_i}(\xi),
\end{aligned} \tag{4.43}$$

onde

$$g_{2x_i}(\xi) = -\xi x_i^1 - (\xi + 2)x_i^2 + 2(1 + \xi)x_i^3, \tag{4.44}$$

e

$$\eta(\xi) = \frac{1 - \xi}{2}. \tag{4.45}$$

Com base na Eq.4.43, a distância r pode ser escrita como:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1^2)^2 + (x_2 - x_2^2)^2} = \eta(\xi) \sqrt{g_{2x_1}^2 + g_{2x_2}^2}. \tag{4.46}$$

Para o terceiro caso em que o ponto de colocação situa-se sobre o nó do meio, tem-se a coordenada intrínseca $\xi = 0$. Neste caso, a integração deve ser dividida em duas regiões: uma região onde $-1 < \xi < 0$ e outra região onde $0 < \xi < +1$. Portanto, tem-se para a Eq.4.38:

$$\begin{aligned}
x_i - x_i^p &= x_i - x_i^3; \\
&= x_i^1 N_1(\xi) + x_i^2 N_2(\xi) + x_i^3 [N_3(\xi) - 1]; \\
&= \eta(\xi) g_{3x_i}(\xi),
\end{aligned} \tag{4.47}$$

onde

$$g_{3x_i}(\xi) = \frac{\xi - 1}{2} x_i^1 + \frac{\xi + 1}{2} x_i^2 - \xi x_i^3; \tag{4.48}$$

$$\eta(\xi) = \begin{cases} +\xi & \text{se } -1 < \xi < 0; \\ -\xi & \text{se } 0 < \xi < +1. \end{cases} \tag{4.49}$$

Para ambos os intervalos, o raio pode ser escrito como:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1^3)^2 + (x_2 - x_2^3)^2} = \eta(\xi) \sqrt{g_{3x_1}^2 + g_{3x_2}^2}. \quad (4.50)$$

Pode-se observar que, para todos os casos, o raio r será reescrito como:

$$r = \eta(\xi) \sqrt{g_{kx_1}^2 + g_{kx_2}^2}. \quad (4.51)$$

onde k é o número do nó no elemento em que o ponto de colocação coincida com o mesmo.

Através da Eq.4.51, a equação integral contendo a solução fundamental de deslocamento será reescrita para aplicação adequada da quadratura de Gauss-Legendre.

Portanto, a representação integral contendo a solução fundamental de deslocamento será reescrita esquematicamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} J(\xi) N_\alpha(\xi) U_{ik}^*(S, T) d\xi &= \int J(\xi) N_\alpha(\xi) (K^R + K^S \ln(r))(S, T) d\xi; \\ &= \int J(\xi) N_\alpha(\xi) [K^R + K^S \ln(\eta(\xi) \sqrt{g_{kx_1}^2 + g_{kx_2}^2})](S, T) d\xi; \\ &= \int_{-1}^{+1} J(\xi) N_\alpha(\xi) [K^R + K^S \ln(\sqrt{g_{kx_1}^2 + g_{kx_2}^2})](S, T) d\xi + \\ &\quad \int_0^{+1} J(\xi) N_\alpha(\xi) \ln(\eta(\xi)) d\xi, \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde K^R é o termo regular e K^S o termo que contém uma parte singular da integral apresentados nos Anexos B e C.

Lembrando-se ainda que:

Caso o primeiro nó seja singular:

$$\eta(\xi) = \frac{1 + \xi}{2} \therefore \xi = 2\eta - 1 \therefore \xi = 2d\eta. \quad (4.53)$$

Caso o segundo nó seja singular:

$$\eta(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \therefore \xi = -2\eta + 1 \therefore \xi = -2d\eta. \quad (4.54)$$

Caso o terceiro nó seja singular:

$$\eta(\xi) = \begin{cases} -\xi \therefore d\xi = -d\eta & \text{se } -1 < \xi < 0; \\ +\xi \therefore d\xi = d\eta & \text{se } 0 < \xi < +1. \end{cases} \quad (4.55)$$

4.6.3 Integral Fortemente Singular

O tratamento de singularidade das integrais correspondentes à matriz \underline{H} , ou seja, as integrais contendo a solução fundamental de força de superfície, será feito através do conceito de deslocamento de corpo rígido abordado por Karam (1992).

$$C_{ik}(\xi)U_k(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ik}^*(\eta, x)u_k(x)d\Gamma(x) = 0. \quad (4.56)$$

A Equação 4.56 admite as seguintes soluções não triviais para os deslocamentos de corpo rígido:

$$Para \quad \begin{cases} \underline{u}_1 = (1, 0, x_1(\xi) - x_1(x)); \\ \underline{u}_2 = (1, 0, x_2(\xi) - x_2(x)); \\ \underline{u}_3 = (0, 0, 1). \end{cases} \quad (4.57)$$

Substituindo a Eq.4.57 na Eq.4.56, tem-se:

$$C_{i\alpha} + \int_{\Gamma} [p_{i\alpha}^* + (x_{\alpha}(\eta) - x_{\alpha}(x))p_{i3}^*]d\Gamma(x) = 0; \quad (4.58)$$

$$C_{i3} + \int_{\Gamma} p_{i3}^*d\Gamma(x) = 0. \quad (4.59)$$

Portanto, as submatrizes $3 \times 3 \underline{H}_{pp}$ da diagonal de \underline{H} podem ser calculadas pela seguinte expressão, escrita na forma matricial:

$$\underline{H}_{pp} = \sum_{q=1}^n \underline{H}_{st} \underline{D}_{st}, \quad (4.60)$$

onde $s \neq t$, s varia de 1 a n , n é o número de pontos nodais e \underline{D}_{st} é uma matriz dada por:

$$\underline{D}_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1(s) - x_1(t) & x_2(s) - x_2(t) & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

4.7 Técnica de Solução

Como visto anteriormente, a discretização da equação integral de contorno para placas forma um sistema de equações algébricas expressas matricialmente por:

$$\underline{H}\underline{U} = \underline{G}\underline{P} + \underline{B}. \quad (4.62)$$

Através da integração da solução fundamental, preenchem-se as matrizes \underline{H} , \underline{G} e o vetor \underline{B} contendo a influência do carregamento de domínio. Tais matrizes são não-simétricas e cheias, e normalmente bem condicionadas com termos diagonais dominantes. Os vetores \underline{U} e \underline{P} contêm os deslocamentos e forças de superfície, prescritos ou incógnitos no contorno, e completam a Eq.4.62.

Porém, como a técnica de processamento computacional das equações lineares encontra-se em outro formato no núcleo numérico INSANE, um novo sistema algébrico é formado trocando as colunas entre as matrizes \underline{H} e \underline{G} . Deste modo, todas as incógnitas do contorno são acumuladas no vetor \underline{X} e a Eq.4.62 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\underline{A}\underline{X} = \underline{F}. \quad (4.63)$$

O vetor \underline{F} contém os efeitos dos deslocamentos e forças prescritos no contorno, e de todos os carregamentos atuantes no domínio. A matriz \underline{A} é a matriz dos coeficientes correspondentes às incógnitas, obtida pela troca de colunas entre as matrizes \underline{H} e \underline{G} , e finalmente o vetor \underline{X} contendo as incógnitas de contorno a serem resolvidas.

4.8 Esforços nos Pontos de Contorno

A solução obtida pelas equações integrais de contorno (EIC) referente aos esforços no contorno são duas componentes de momento (momento fletor no plano vertical normal ao contorno e momento de torção) e o esforço cortante. Para a determinação da componente de momento fletor no plano vertical tangente ao contorno, \overline{M}_{22} , será utilizado o método das diferenças finitas também conhecido como *stress recovery* juntamente com a Lei de Hooke de acordo com Aliabadi (2002). O conceito básico desse método consiste em transformar as equações diferenciais que governam o problema em um sistema de equações algébricas através da aplicação do operador de diferença. Os pontos nodais onde as incógnitas são associadas devem ser prescritos e as funções interpoladoras que governam as derivadas especificadas.

A partir da relação momento-curvatura sobre um determinado elemento de contorno, tem-se:

$$\overline{M}_{22} = D[\overline{u}_{2,2} + \nu\overline{u}_{1,1}] + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}q. \quad (4.64)$$

As grandezas envolvidas na Eq.4.64 são referidas ao sistema local de coordenadas.

Analogamente fazendo-se para \overline{M}_{11} , porém explicitando-se $\overline{u}_{1,1}$, tem-se:

$$\overline{u}_{1,1} = -\nu\overline{u}_{2,2} + \frac{1}{D} \left[\overline{M}_{11} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}q \right]. \quad (4.65)$$

O deslocamento \bar{u}_2 é aproximado sobre o elemento de contorno pela função de forma dada na Eq.4.1.

Derivando-se \bar{u}_2 em relação a \bar{x}_2 , obtém-se a curvatura $\bar{u}_{2,2}$ no plano $\bar{x}_2\bar{x}_3$, isto é:

$$\bar{u}_{2,2} = \frac{\partial \xi}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial N^\alpha}{\partial \xi}, \quad (4.66)$$

onde ∂N^α é a derivada da função de forma utilizada.

Apesar da eficiência do método das diferenças finitas, deve-se observar que a solução encontrada para \bar{M}_{22} , a partir da solução dos sistema de equações lineares vista na Eq.4.63, depende da qualidade da solução das incógnitas de contorno.

4.9 Placas com Apoios no Domínio

A formulação presente neste capítulo descreve uma metodologia aplicada à análise de lajes lisas onde os apoios representados por pilares situam-se no domínio da laje. Esta aplicação é bastante conhecida nos projetos de edifícios em que lajes lisas, também conhecidas como lajes do tipo cogumelo, requerem uma condição de deslocamento prescrita no domínio. Uma representação dessa laje com apoio interno no domínio está ilustrada na Fig.4.4.

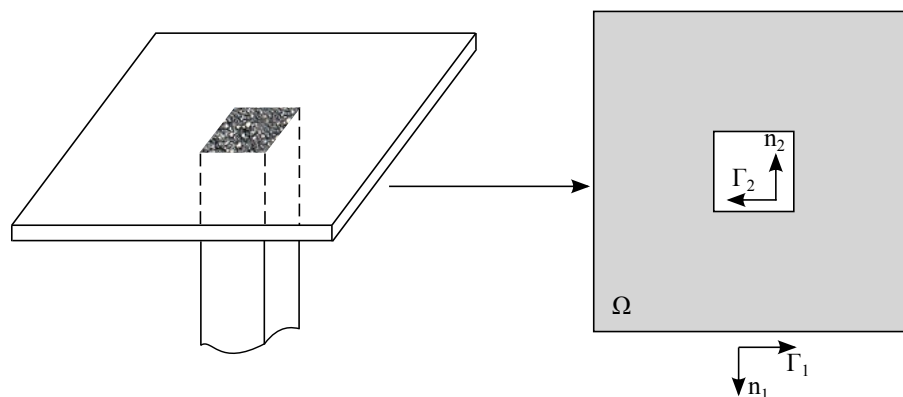


Figura 4.4: Representação de uma Laje com Apoio Interno.

Com base na Fig.4.4, adicionou-se um contorno interno na interface placa-pilar equivalente a uma placa com furo. Tal procedimento é necessário para que as novas incógnitas possam ser acrescentadas neste contorno interno, Γ_2 , implicando em novas equações para o sistema final a ser resolvido. Estas novas equações são obtidas escrevendo-se as equações integrais de deslocamentos para cada ponto onde houver vinculação interna.

Como apresentado no item 4.2, tem-se a representação de um sistema de equações algébricas na forma matricial:

$$\underline{H}\underline{U} = \underline{G}\underline{P} + \underline{B}. \quad (4.67)$$

Reescrevendo a Eq.4.67, devido à presença de um apoio interno no domínio da placa, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \underline{H}_{\Gamma_1} & \underline{H}_{\Gamma_2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{U}_{\Gamma_1} \\ \underline{U}_{\Gamma_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}_{\Gamma_1} & \underline{G}_{\Gamma_2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{P}_{\Gamma_1} \\ \underline{P}_{\Gamma_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B}_{\Gamma_1} \\ \underline{B}_{\Gamma_2} \end{bmatrix}. \quad (4.68)$$

Tem-se para o contorno interno, interface placa-pilar, o mesmo funcionamento da discretização já apresentada anteriormente em que são prescritos os deslocamentos ou forças de superfície nos pontos nodais ao longo deste contorno.

Inicialmente foi previsto, para a modelagem da laje cogumelo, o uso de rotações no contorno interno, normal e tangencial, como incógnitas do problema. Porém, através de testes numéricos, provou-se que a única condição aceitável para este tipo de formulação seria a prescrição dos deslocamentos nulos para ϕ_n , ϕ_{ns} e w no domínio da placa.

Portanto, assumindo-se que os apoios internos sejam as ligações da placa com pilares e que os mesmos tenham rigidez axial infinita, e considerando as rotações

normal e tangente ao plano médio da placa nulas, a Eq.4.68 pode ser reescrita para análise de uma laje cogumelo como:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_{\Gamma_1} & \mathcal{H}_{\Gamma_2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{\Gamma_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{\Gamma_1} & \mathcal{G}_{\Gamma_2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\Gamma_1} \\ \mathcal{P}_{\Gamma_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{\Gamma_1} \\ \mathcal{B}_{\Gamma_2} \end{bmatrix}. \quad (4.69)$$

Porém, para análise de uma placa com furo em seu domínio, ou seja, o contorno interno não representa uma interface placa-pilar, a Eq.4.68 permite o uso das rotações, normal e tangente ao plano médio da placa, e o deslocamento vertical como incógnitas do problema. Um exemplo deste problema está ilustrado na Fig.4.5.

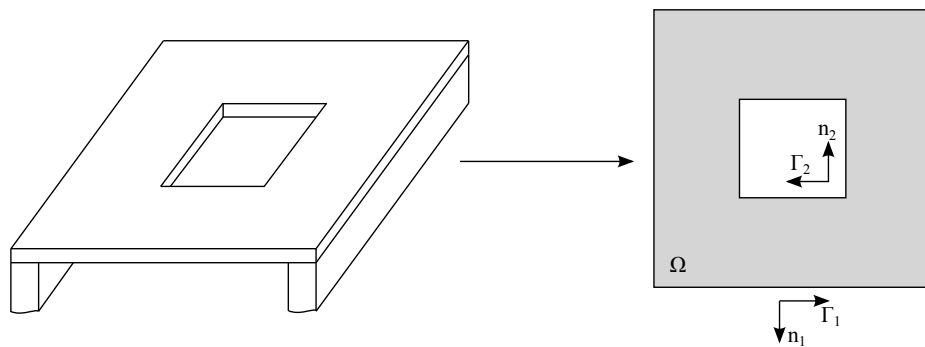


Figura 4.5: Placa com um Furo Interno e duas de suas Bordas Apoiadas.

Capítulo 5

Implementação Computacional

5.1 Introdução

A plataforma INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment) é um ambiente interativo de análise estrutural desenvolvido pelo Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG que solidificou-se como base para pesquisas na área de métodos numéricos e computacionais para graduação e pós-graduação.

Inicialmente concebido por Fonseca et al. (2004), formou-se a partir de seus estudos o núcleo numérico INSANE, assim como a primeira interface gráfica do sistema para pré e pós-processamento. O sistema foi desenvolvido seguindo as premissas fundamentais de: facilidade de uso, código livre, utilização da linguagem Java e separação entre o núcleo numérico e a interface gráfica.

Dentre os diversos trabalhos realizados neste ambiente computacional, destacam-se os trabalhos de Gonçalves (2004), Fuina (2004), Pitangueira e Caldas (2005), Almeida (2005), Germanio (2005), Fonseca (2006), Moreira (2006), Penna (2007), Saliba (2007), Camara (2007), Ferreira (2008), Fonseca (2008), Ajeje (2009), Wolff (2010), Penna (2011), Alves (2012), Silva (2012), Anacleto et al. (2013), Wolenski (2013) e Monteiro (2013) que compõem a versão atual do sistema. Esta versão possui diversos recursos, como: extensa biblioteca de modelos de análise, modelos constitutivos e métodos para soluções de modelos não lineares; modelos discretos

do Método dos Elementos Finitos (MEF), do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), dos Métodos Sem Malhas (MSM) e finalmente do Método dos Elementos de Contorno (MEC) . Entre os trabalhos citados, é importante destacar o trabalho de Saliba (2007) por realizar um extenso estudo sobre placas baseado nas teorias de Kirchhoff e de Reissner-Mindlin por meio do método dos elementos finitos.

A implementação computacional referente ao estudo de flexão de placas considerando as hipóteses de Reissner ocorreu em um ambiente já fundamentado com as técnicas de integração dos elementos de contorno bem como a solução final do sistema de equações lineares conforme Anacleto et al. (2013). Portanto, para a implementação da formulação vista neste trabalho foi necessário o acréscimo e alteração de algumas classes e métodos, específicos para análise de placas por meio do MEC. Para a orientação quanto ao entendimento destas contribuições, adotou-se a simbologia ilustrada na Fig. 5.1. As classes do sistema INSANE, ilustradas a seguir, são simbolizadas pelas cores branca, amarela e verde. Essa simbologia faz referência às classes não modificadas, modificadas e criadas, respectivamente.

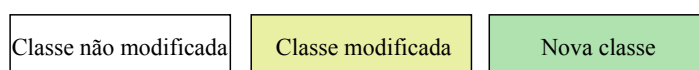


Figura 5.1: Simbologia adotada na Representação UML INSANE.

5.2 Núcleo Numérico

O sistema INSANE é composto por três grandes partes independentes: pré-processador, núcleo numérico (processador) e pós-processador. Basicamente, a implementação da formulação proposta neste trabalho implicou na adição de novas classes e modificação de classes já existentes do núcleo numérico cuja principal função é o processamento e obtenção dos resultados de diferentes modelos discretos.

A seguir é apresentado, através de diagramas UML (Unified Modeling Language), o projeto orientado a objetos da implementação realizada no sistema INSANE identificando-se as classes implementadas de maior relevância, e permitindo, de forma ainda que superficial, conhecer a hierarquia das mesmas e como elas se comunicam para desempenhar suas funções.

A organização e as relações entre as interfaces *Assembler* e *Persistence*, e das classe abstratas *Model* e *Solution* está ilustrada na Fig.5.2. Tais interfaces apresentam responsabilidades distintas, porém interdependentes entre si. A interface *Assembler* é a responsável pela montagem do sistema matricial de primeira ordem, de acordo com a equação 4.63, e as classes relativas a *Solution* são responsáveis pela solução deste sistema de equações.

As classes herdeiras da classe abstrata *Model* têm como função armazenar os dados relativos ao modelo discreto, processar as equações integrais de contorno e fornecer ao *Assembler* todas as informações necessárias para montagem do sistema de equações do problema.

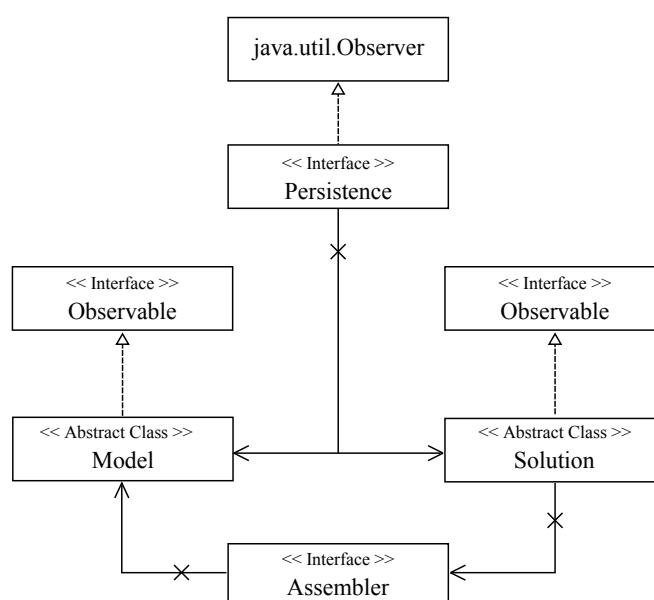


Figura 5.2: Diagrama da Organização do Núcleo Numérico INSANE.

A interface *Persistence* gerencia os dados de entrada e saída e se faz necessária

sempre que se observa alterações no estado do modelo discreto. Este processo de observação ocorre segundo o padrão de projeto *Observer* que é um mecanismo de propagação de mudanças. Sua função é a de notificar os objetos observadores para se atualizarem das modificações ocorridas nos objetos observados. Isto garante a consistência e a comunicação entre o observador *Persistence*, e os observados *Solution* e *Model*. Na Figura 5.3 é exposta a hierarquia da interface *Persistence*, que é implementada pela classe *PersistenceAsXML*. Esta classe foi alterada com o objetivo de persistir a entrada e a saída de dados, relativas às implementações desta dissertação.

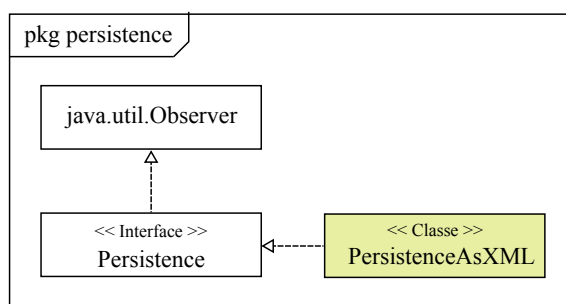


Figura 5.3: Diagrama de Classes para *Persistence*.

Os vários modelos discretos são representados pela classe abstrata *Model* incluindo o método dos elementos de contorno representado pela classe *BemModel*. A hierarquia de classes dos modelos está ilustrada na Fig.5.4.

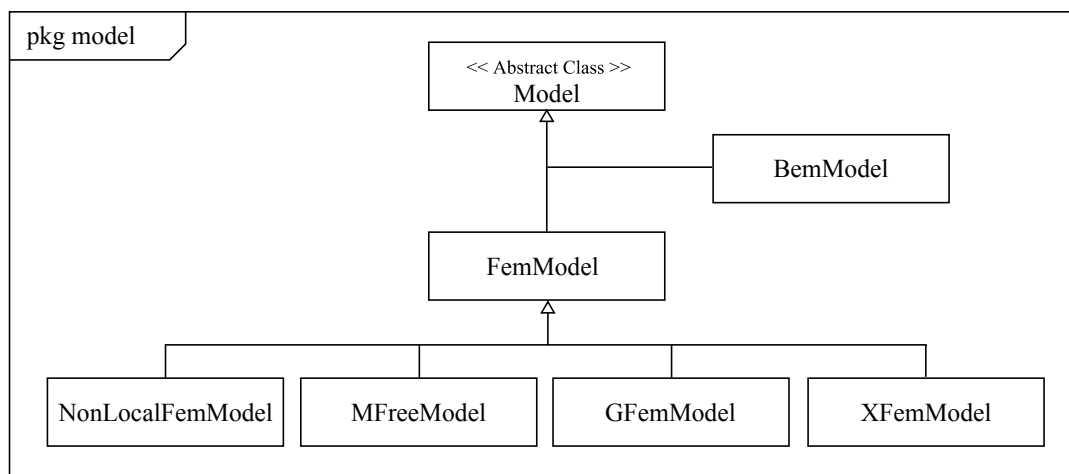


Figura 5.4: Diagrama da Interface *Model*.

A classe abstrata *Model*, conforme Fig.5.5, é constituída por listas de objetos inerentes a um modelo discreto e contém métodos de acesso e manipulação das mesmas. Tais listas são compostas de nós, elementos, funções de forma, carregamentos, modelos de análise, materiais e modelos constitutivos. Possui ainda um modelo de análise denominado *AnalysisModel* e um objeto *ProblemDriver* que é responsável pelos critérios de integração relativo ao tipo de problema.

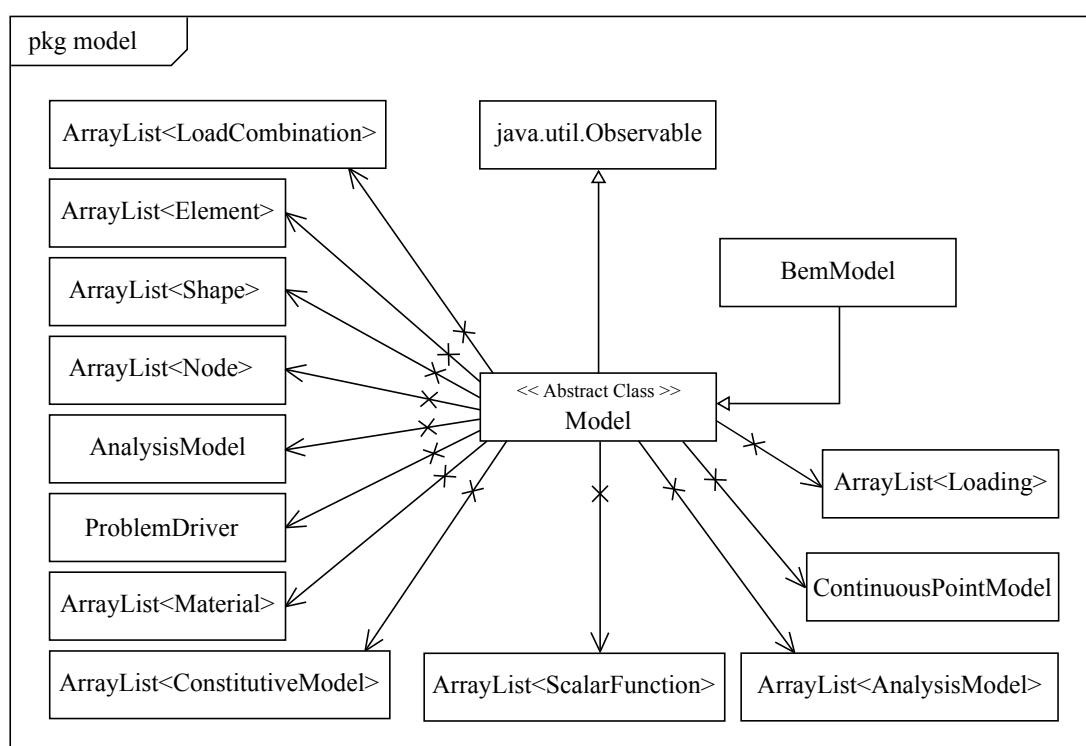


Figura 5.5: Diagrama da Interface *Model* referente ao MEC (*BemModel*).

A classe *BemModel* possui métodos herdados da classe *Model*, como as listas mencionadas anteriormente e métodos particulares do MEC.

É importante ressaltar que a classe *ProblemDriver* possui métodos necessários para a integração das equações e obtenção das matrizes de cada elemento requisitadas pelo *Assembler*. O diagrama da classe *BemProblemDriver* está ilustrado na Fig.5.6.

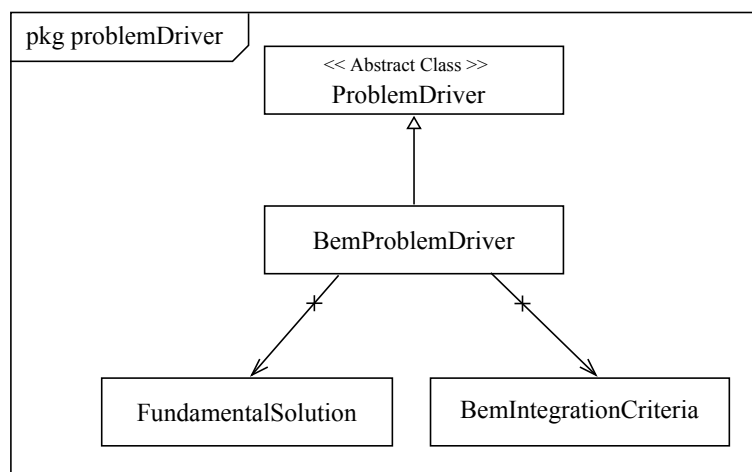


Figura 5.6: Diagrama da Interface *ProblemDriver*.

5.3 Classes Implementadas

A classe abstrata *AnalysisModel* possui os métodos para fornecer as informações, dependentes do modelo de análise, e necessárias aos elementos de contorno para efetuar a avaliação e armazenamento das soluções fundamentais. Algumas destas informações são: o número de graus de liberdade para cada nó, dimensionamento de matrizes, métodos para efetuar os cálculos referentes às diferenças finitas, entre outras. O diagrama da classe abstrata *AnalysisModel* está ilustrado na Fig.5.7.

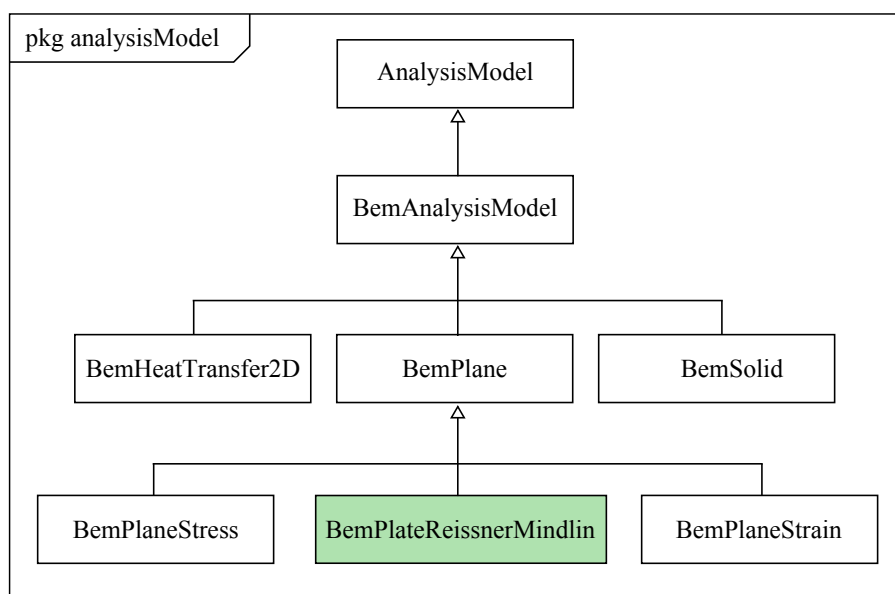


Figura 5.7: Diagrama da interface *AnalysisModel*.

O diagrama da interface *Assembler* está ilustrado na Fig.5.8 e, dentre as principais responsabilidades já mencionadas, é na classe *DiagonalTerms* que foram implementados os métodos necessários para avaliar o deslocamento de corpo rígido e, depois de calculados, inseridos na diagonal da matriz \underline{H} .

Após a solução do sistema de equações lineares, obtêm-se os valores das incógnitas de contorno. Porém para a determinação da componente de momento fletor no plano vertical tangente ao contorno, conforme Eq.4.64, foi utilizado o método das diferenças finitas também conhecido como *stress recovery*. A classe *BemExplicit* possui o método necessário para gerenciar esse cálculo e, devido as particularidades da formulação de placas de Reissner, inseriu-se uma condicional para o devido tratamento dessa formulação.

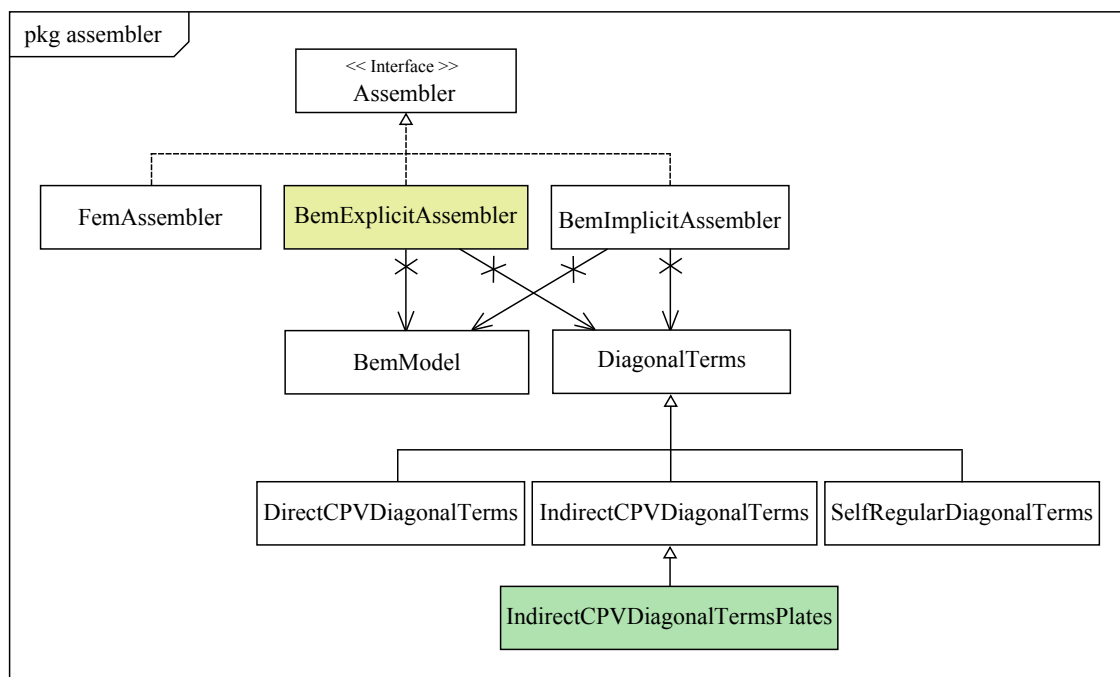


Figura 5.8: Diagrama da interface *Assembler*.

E finalmente, a classe abstrata *FundamentalSolution*, apresentada pela Fig.5.9, tem o objetivo de avaliar as soluções fundamentais para diversos problemas estruturais apresentados nesta mesma figura. A classe *ReissnerMindlinPlate* foi criada para

agrupar todas as equações referentes à solução fundamental de placas considerando a teoria de Reissner.

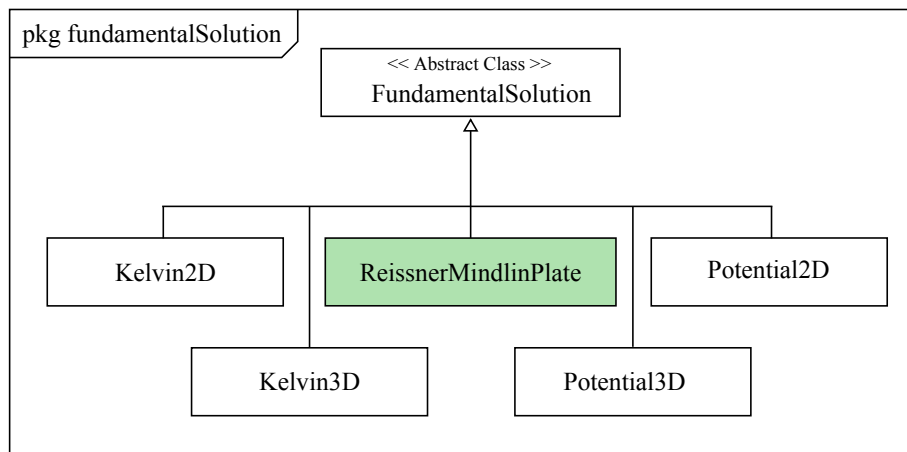


Figura 5.9: Diagrama da Solução Fundamental.

A classe *BesselEquation*, vista na Fig.5.10, efetua as operações referentes às funções de Bessel modificadas, conforme Eq.2.27 e Eq.2.28.

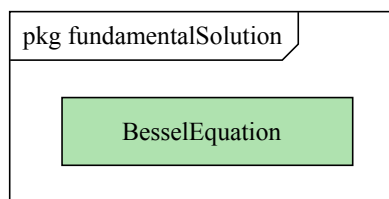


Figura 5.10: Diagrama das Funções de Bessel.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

6.1 Generalidades

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos por meio da implementação computacional realizada no núcleo numérico INSANE.

Através dos diversos exemplos ilustrados a seguir, objetivou-se avaliar a correta implementação da formulação proposta, comparando-a com a teoria clássica de acordo com Timoshenko (1959), quando possível, e com resultados obtidos por outros pesquisadores e programas comerciais existentes.

Deve-se notar que foi realizada uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados obtidos através do estudo de convergência de diversas malhas para cada problema proposto.

6.2 Placa Retangular Apoiada nas Quatro Bordas com Carga Uniformemente Distribuída

Uma placa retangular de lados com dimensões genéricas, a e b , com carga uniformemente distribuída, q , em toda a sua área, e simplesmente apoiada nas quatro bordas, foi resolvida variando-se as dimensões dos lados e a espessura da placa conforme a ilustração da Fig.6.1. Na análise deste problema, considerou-se ora a rotação no plano vertical tangente ao contorno restringida, condição *hard*, ora o momento de torção nulo no plano vertical tangente ao contorno, condição *soft*.

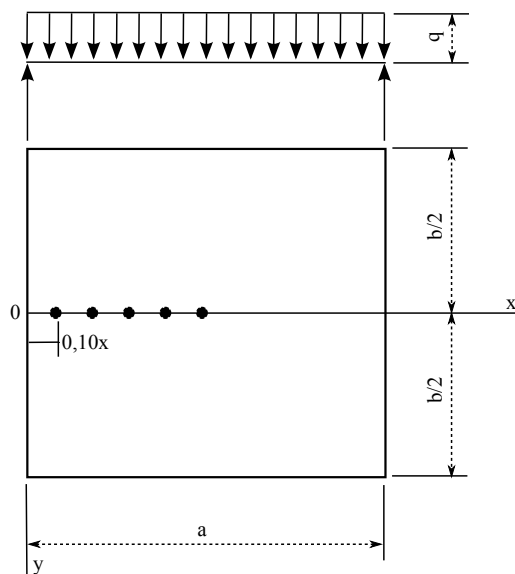


Figura 6.1: Placa Apoiada com Carga Uniformemente Distribuída.

O módulo de elasticidade longitudinal do material é dado por E e o coeficiente de Poisson igual a ν .

Para o estudo da influência da espessura, h , no deslocamento transversal, w , com a rotação tangencial ao contorno restringida, condição *hard*, adotou-se uma placa quadrada com uma espessura variando de $0,01a$ a $0,30a$.

A figura 6.2 apresenta um estudo de convergência do deslocamento transversal de um nó situado no centro desta placa quadrada com espessura igual a $0,01a$.

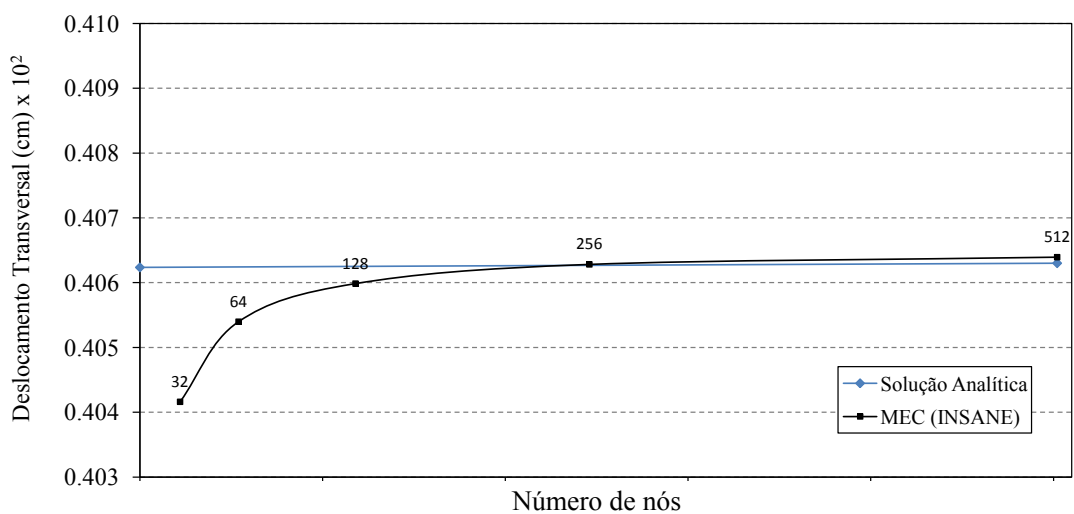


Figura 6.2: Análise de Convergência do Máximo Deslocamento Transversal da Placa.

A discretização adotada consta de 64 elementos quadráticos (128 nós) no contorno da placa como uma referência razoável para realizar o estudo de acordo com a Fig.6.3. Os resultados obtidos pelo INSANE em termos de deslocamento transversal, sobre a linha de centro da placa, são comparados com os resultados obtidos pela teoria clássica apresentada por Timoshenko (1959).

Observa-se que, com o aumento da espessura, os resultados da teoria de Reissner apresentam diferenças significativas. Em valores relativos, pode-se afirmar que para um caso em que a espessura apresenta a relação $0,30a$, o valor obtido é 39,7% superior ao valor obtido pela teoria clássica.

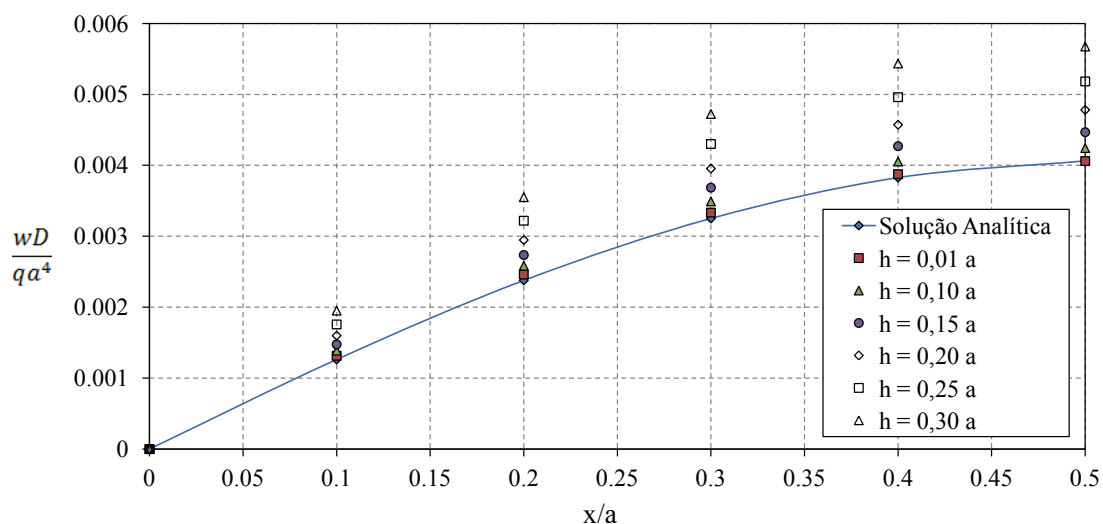


Figura 6.3: Deslocamento Transversal, w , ao Longo da Linha de Centro da Placa.

Os resultados referentes ao deslocamento transversal para os pontos internos situados no eixo x , conforme Fig.6.1, estão apresentados na Tabela 6.1. Estes resultados foram comparados com os obtidos por Ribeiro (1992) com o objetivo de avaliar a qualidade da implementação computacional no núcleo numérico INSANE. Pode-se concluir por esta comparação que a formulação proposta nesta dissertação e sua respectiva implementação correspondem aos valores esperados.

Tabela 6.1: Exemplo 1: Deslocamento Transversal, w , para $y = \frac{b}{2}$.

$w_{max} = \alpha \frac{qa^4}{D} \times 10^{-2}$						
Posição no eixo x :		0, 10a	0, 20a	0, 30a	0, 40a	0, 50a
Referência	h	α	α	α	α	α
Ribeiro(1992)	0, 01a	0,132	0,246	0,334	0,388	0,406
INSANE		0,131	0,246	0,333	0,388	0,406
Ribeiro(1992)	0, 10a	0,139	0,258	0,349	0,405	0,424
INSANE		0,139	0,258	0,349	0,405	0,424
Ribeiro(1992)	0, 20a	0,160	0,295	0,395	0,457	0,478
INSANE		0,160	0,295	0,395	0,457	0,478
Ribeiro(1992)	0, 25a	0,176	0,322	0,430	0,496	0,518
INSANE		0,176	0,322	0,430	0,496	0,518
Ribeiro(1992)	0, 30a	0,195	0,355	0,472	0,543	0,567
INSANE		0,195	0,355	0,472	0,544	0,567

Para as análises posteriores, procurou-se avaliar os resultados obtidos pelo MEC comparando-os com os resultados da teoria clássica, conforme Timoshenko (1959). A discretização adotada consta de uma variação de 16, 32, 64, 128 e 256 elementos quadráticos contínuos (com 32, 64, 128, 256 e 512 nós, respectivamente) e uma espessura constante de 0,01a. Novamente, procurou-se obter uma resposta de estabilidade e convergência numérica da formulação implementada no núcleo numérico INSANE. Os resultados obtidos estão apresentados nas Tabelas 6.2, 6.3 e 6.4

Tabela 6.2: Exemplo 1: Momento Fletor, M_x , para $y = \frac{b}{2}$.

$M_x = \beta_1 qa^2 \times 10^{-1}$ para $b/a = 1,0$										
$x = 0.10a$			$x = 0.20a$		$x = 0.30a$		$x = 0.40a$		$x = 0.50a$	
Nº	T.C.	MEC	T.C.	MEC	T.C.	MEC	T.C.	MEC	T.C.	MEC
Nós	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1
32		0,207		0,341		0,421		0,464		0,477
64		0,208		0,342		0,423		0,465		0,478
128	0,209	0,209	0,343	0,343	0,424	0,423	0,466	0,465	0,479	0,478
256		0,209		0,343		0,423		0,466		0,479
512		0,209		0,343		0,424		0,466		0,479

Tabela 6.3: Exemplo 1: Momento Fletor, M_y , para $y = \frac{b}{2}$.

$M_y = \beta_2 qa^2 \times 10^{-1}$ para $b/a = 1,0$										
$x = 0.10a$		$x = 0.20a$		$x = 0.30a$		$x = 0.40a$		$x = 0.50a$		
Nº	T.C.	MEC	T.C.	MEC	T.C.	MEC	T.C.	MEC	T.C.	MEC
Nós	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2
32		0,168		0,302		0,399		0,457		0,477
64		0,168		0,302		0,400		0,458		0,478
128	0,168	0,168	0,303	0,303	0,400	0,400	0,459	0,459	0,479	0,478
256		0,168		0,303		0,400		0,459		0,479
512		0,168		0,303		0,400		0,459		0,479

Tabela 6.4: Exemplo 1: Valores Máximos de w , M_x , M_y , Q_x e Q_y .

Valores para $b/a = 1,0$										
$w_{max} = \alpha \frac{qa^4}{D} \times 10^{-2}$			$M_{max} = \beta qa^2 \times 10^{-1}$				$Q_{max} = \gamma qa$			
w_{max}			$M_{x_{max}}$		$M_{y_{max}}$		$Q_{x_{max}}$		$Q_{y_{max}}$	
Nº	T.C.	MEC	T.C.	MEC	T.C.	MEC	T.C.	MEC	T.C.	MEC
Nós	α	α	β_1	β_1	β_2	β_2	γ_1	γ_1	γ_2	γ_2
32		0,404		0,477		0,477		0,406		0,406
64		0,405		0,478		0,478		0,361		0,361
128	0,406	0,406	0,479	0,478	0,479	0,479	0,338	0,342	0,338	0,342
256		0,406		0,479		0,479		0,338		0,338
512		0,406		0,479		0,479		0,338		0,338

Os resultados referentes às variações da força cortante, Q_n , na borda da placa para as condições de contorno *hard* e *soft* estão apresentados na Fig.6.4 juntamente com os resultados obtidos pela teoria clássica, conforme Timoshenko (1959). Observa-se que na condição de contorno *soft*, o modelo de Reissner simula uma concentração de carga em um trecho próximo ao canto da placa. Esta concentração de carga é similar à reação concentrada de canto presente na análise de placas finas pela teoria de Kirchhoff-Love. Já na condição de contorno *hard*, o momento de torção é absorvido pelo apoio.

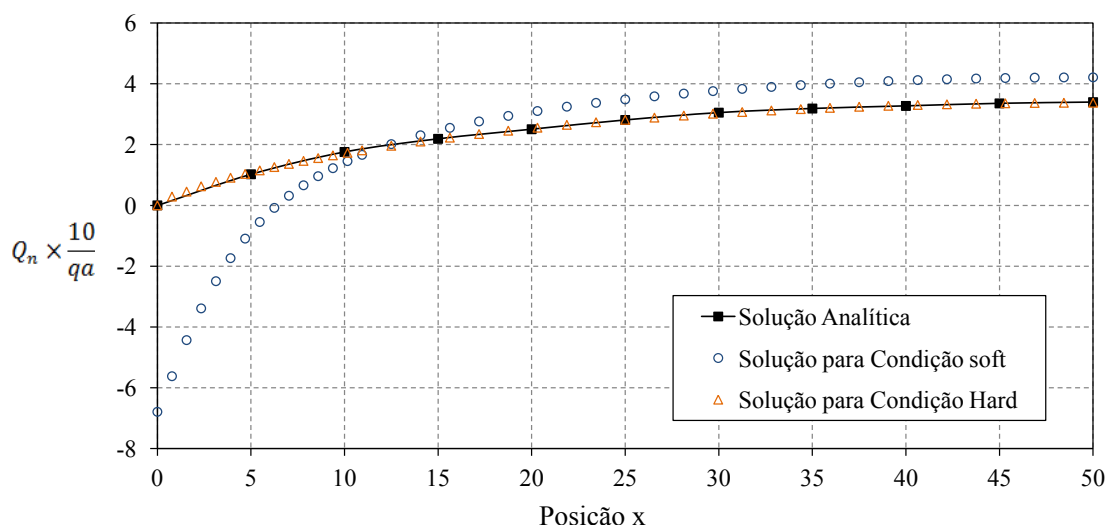


Figura 6.4: Condição de contorno *hard* \times *soft*.

A Tabela 6.5 apresenta resultados de deslocamentos transversais, w , e momentos fletores, M_x e M_y , para condições de contorno *hard* e *soft* e uma relação $\frac{h}{a} = 0,10$. As coordenadas dos pontos internos estão situadas na linha de centro, conforme Fig.6.1.

Os valores obtidos para w , M_x e M_y na condição de contorno *hard* apresentaram-se inferiores em relação aos valores obtidos na condição *soft*. Isto se deve à condição de contorno *hard* simular uma placa mais rígida e, portanto, valores de deslocamentos e momentos menores.

Tabela 6.5: Exemplo 1: Valores de w , M_x e M_y em condições *soft* e *hard*.

	$w_{max} = \alpha \frac{qa^4}{D} \times 10^{-2}$		$M_x = \beta_1 qa^2 \times 10^{-1}$		$M_y = \beta_2 qa^2 \times 10^{-1}$	
x/a	<i>Soft</i> α	<i>Hard</i> α	<i>Soft</i> β_1	<i>Hard</i> β_1	<i>Soft</i> β_2	<i>Hard</i> β_2
0,10	0,1523	0,1387	0,2480	0,2054	0,1911	0,1666
0,20	0,2814	0,2584	0,3769	0,3400	0,3268	0,3007
0,30	0,3784	0,3491	0,4535	0,4207	0,4264	0,3978
0,40	0,4381	0,4053	0,4941	0,4631	0,4866	0,4566
0,50	0,4583	0,4243	0,5067	0,4762	0,5067	0,4762

6.3 Placa Retangular Apoiada nas Quatro Bordas com Carga Uniforme Parcialmente Distribuída

Uma placa retangular de lado a e b simplesmente apoiada nas quatro bordas, com carga uniforme e parcialmente distribuída, q , foi resolvida variando-se a região da carga sobre um subdomínio retangular, conforme indicado na Fig.6.5.

Na análise deste problema, considerou-se somente a condição de contorno *hard*.

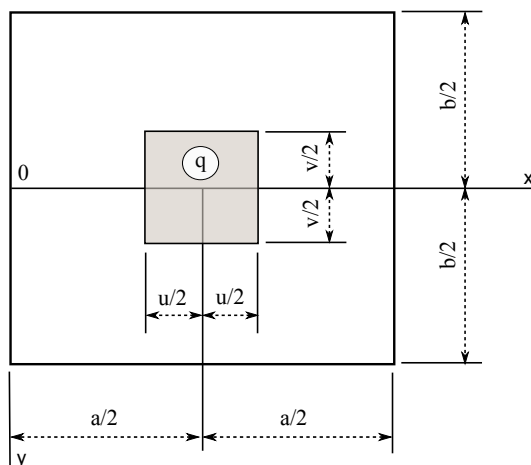


Figura 6.5: Placa Apoiada com Carga Uniforme Parcialmente Distribuída.

O módulo de elasticidade longitudinal do material é dado por E e o coeficiente de Poisson igual a ν .

A discretização adotada consta de uma variação de 16, 32, 64, 128 e 256 elementos quadráticos contínuos (com 32, 64, 128, 256 e 512 nós, respectivamente) a fim de se avaliar uma resposta de estabilidade e convergência numérica dos resultados obtidos pelo MEC. A região contendo o carregamento é composta de quatro células lineares conforme as Figs.6.6, 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10.

A Tabela 6.6 apresenta os valores obtidos para o deslocamento transversal pelo MEC comparando-os com os valores obtidos pela solução analítica para diferentes tamanhos de subdomínios, conforme Timoshenko (1959). Estes subdomínios são

submetidos a uma carga uniforme parcialmente distribuída.

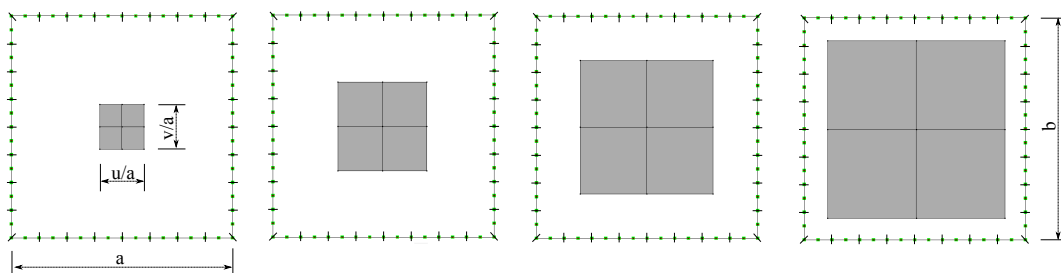


Figura 6.6: Discretização de uma Placa Apoiada Variando q ($u/a, v/a$).

Tabela 6.6: Exemplo 2: Deslocamento transversal, w , variando subdomínio com carga q .

$w_{max} = \alpha \frac{qa^4}{D} \times 10^{-2}$ para $a = b$				
u/a	v/a	Solução Analítica α	Nº de Nós	INSANE α
0,20	0,20	0,0435	32	0,0434
			64	0,0435
			128	0,0436
			256	0,0436
			512	0,0436
0,40	0,40	0,1503	32	0,1498
			64	0,1503
			128	0,1505
			256	0,1506
			512	0,1506
0,60	0,60	0,2744	32	0,2732
			64	0,2742
			128	0,2747
			256	0,2749
			512	0,2749
0,80	0,80	0,3704	32	0,3685
			64	0,3700
			128	0,3707
			256	0,3710
			512	0,3711

As tabelas 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10 contêm os valores de Momento, M_x e M_y , obtido pela discretização descrita acima e comparados com os respectivos valores obtidos pela solução analítica, conforme Timoshenko (1959).

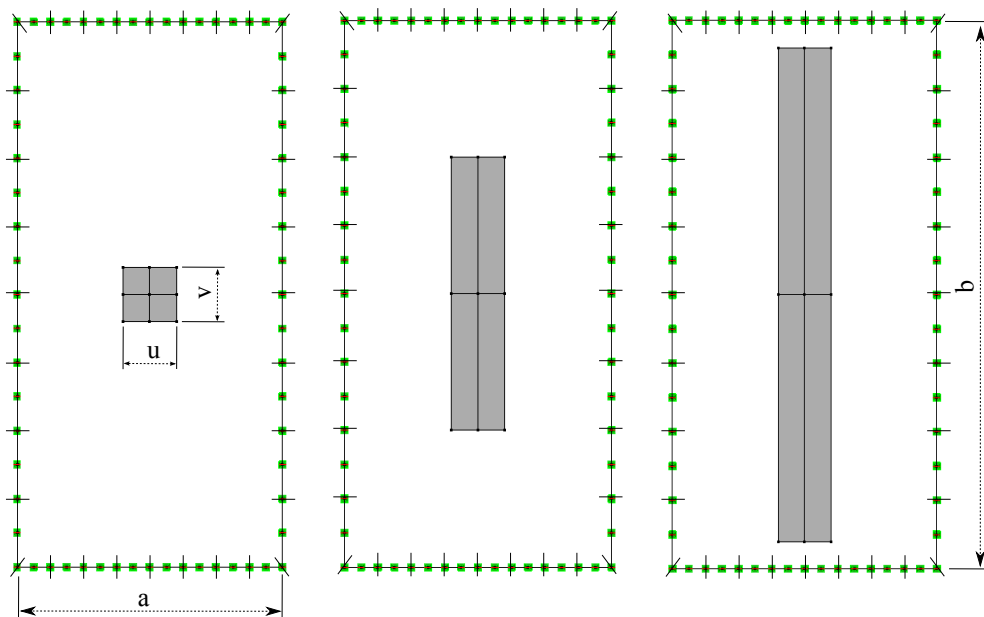


Figura 6.7: Discretização de uma Placa Apoiada Variando q ($u/a = 0,20$).

Tabela 6.7: Exemplo 2: Momentos Fletores, M_x e M_y , variando subdomínio com carga q ($u/a = 0,20$).

$M_{x_{max}} = \beta_1 uvq$ e $M_{y_{max}} = \beta_2 uvq$ para $b = 2a$						
Solução Analítica				INSANE		
u/a	v/a	$M_{x_{max}}$ β_1	$M_{y_{max}}$ β_2	Nº de Nós	$M_{x_{max}}$ β_1	$M_{y_{max}}$ β_2
0,20	0,20	0,252	0,203	32	0,253	0,203
				64	0,254	0,204
				128	0,254	0,204
				256	0,254	0,204
				512	0,254	0,204
0,20	1,00	0,155	0,081	32	0,156	0,080
				64	0,156	0,080
				128	0,156	0,080
				256	0,156	0,080
				512	0,156	0,080
0,20	1,80	0,104	0,045	32	0,104	0,045
				64	0,104	0,045
				128	0,104	0,045
				256	0,104	0,045
				512	0,104	0,045

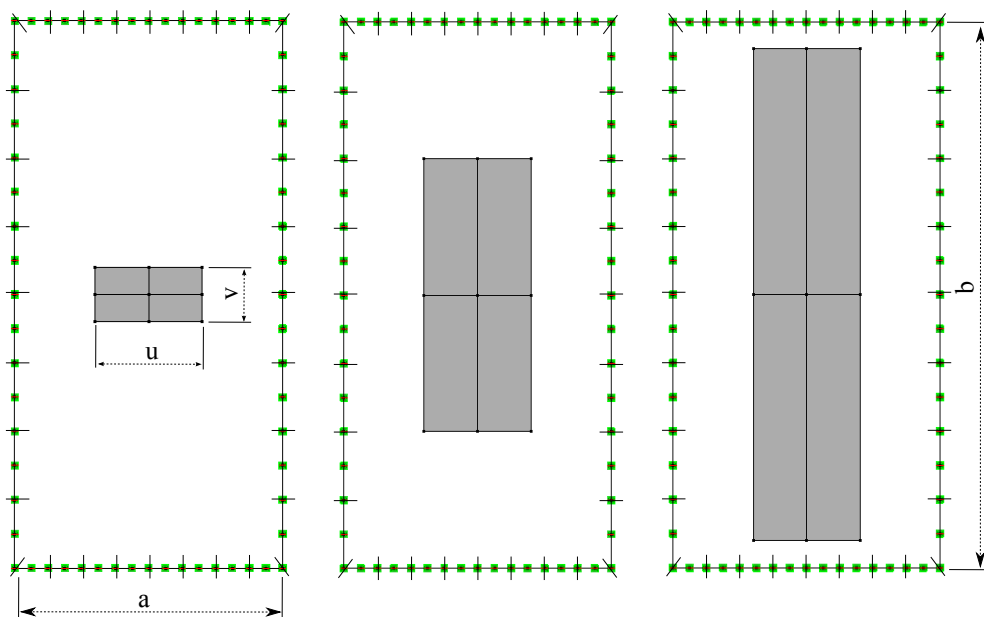


Figura 6.8: Discretização de uma Placa Apoiada Variando q ($u/a = 0,40$).

Tabela 6.8: Exemplo 2: Momentos Fletores, M_x e M_y , variando subdomínio com carga q ($u/a = 0,40$).

$M_{x_{max}} = \beta_1 uvq$ e $M_{y_{max}} = \beta_2 uvq$ para $b = 2a$						
Solução Analítica				INSANE		
u/a	v/a	$M_{x_{max}}$ β_1	$M_{y_{max}}$ β_2	Nº de Nós	$M_{x_{max}}$ β_1	$M_{y_{max}}$ β_2
0,40	0,20	0,199	0,170	32	0,200	0,170
				64	0,200	0,170
				128	0,200	0,170
				256	0,200	0,170
				512	0,200	0,170
0,40	1,00	0,134	0,073	32	0,134	0,072
				64	0,134	0,072
				128	0,134	0,072
				256	0,134	0,072
				512	0,134	0,072
0,40	1,80	0,091	0,041	32	0,091	0,041
				64	0,091	0,041
				128	0,091	0,041
				256	0,091	0,041
				512	0,091	0,041

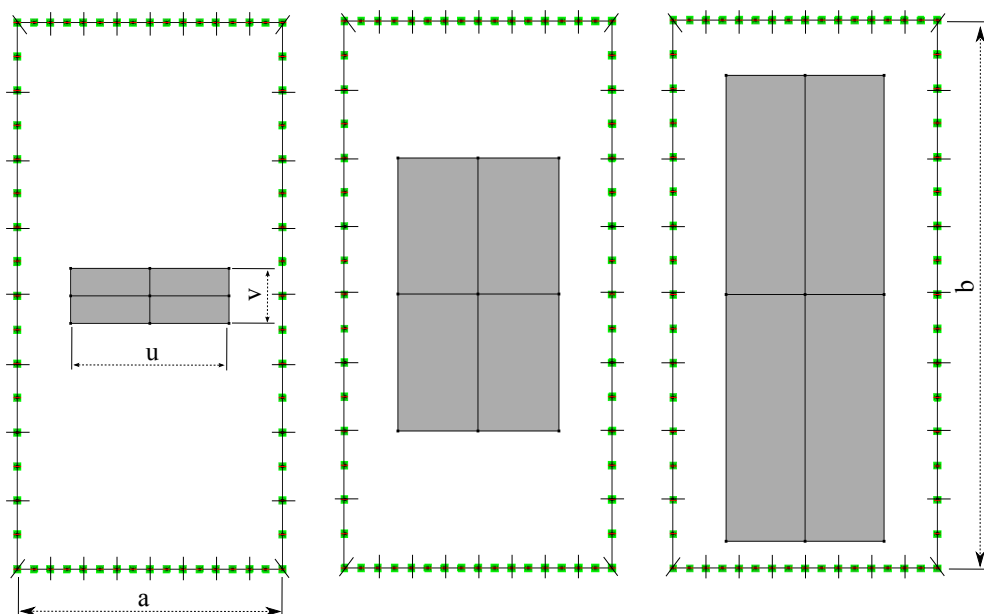


Figura 6.9: Discretização de uma Placa Apoiada Variando q ($u/a = 0,60$).

Tabela 6.9: Exemplo 2: Momentos Fletores, M_x e M_y , variando subdomínio com carga q ($u/a = 0,60$).

$M_{x_{max}} = \beta_1 uvq$ e $M_{y_{max}} = \beta_2 uvq$ para $b = 2a$						
Solução Analítica				INSANE		
u/a	v/a	$M_{x_{max}}$ β_1	$M_{y_{max}}$ β_2	Nº de Nós	$M_{x_{max}}$ β_1	$M_{y_{max}}$ β_2
0,60	0,20	0,163	0,143	32	0,163	0,143
				64	0,163	0,143
				128	0,163	0,143
				256	0,163	0,143
				512	0,163	0,143
0,60	1,00	0,115	0,064	32	0,115	0,063
				64	0,115	0,063
				128	0,115	0,064
				256	0,115	0,064
				512	0,115	0,064
0,60	1,80	0,079	0,036	32	0,078	0,036
				64	0,078	0,036
				128	0,078	0,036
				256	0,078	0,036
				512	0,078	0,036

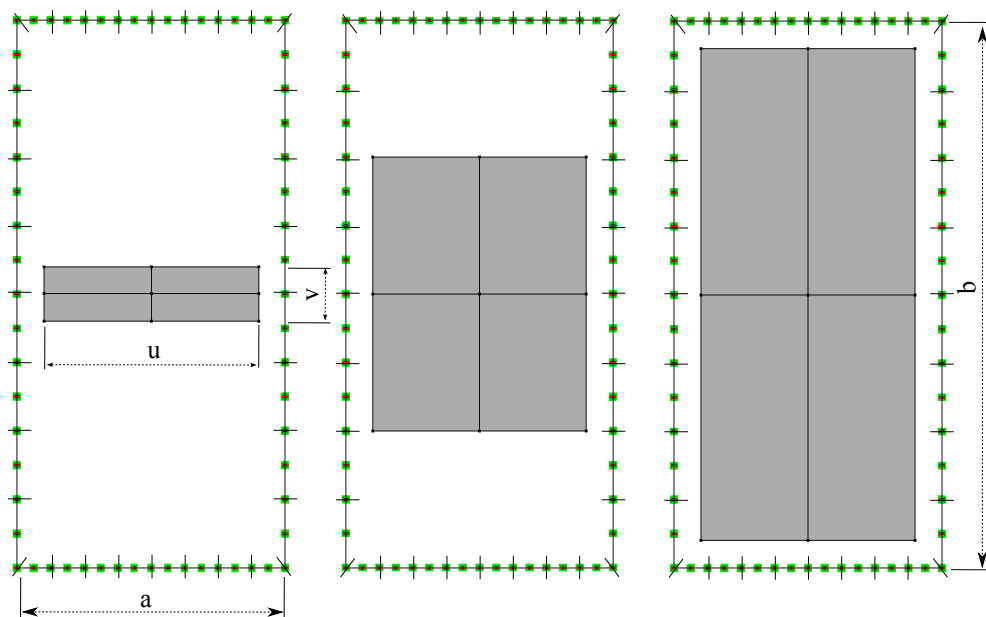


Figura 6.10: Discretização de uma Placa Apoiada Variando q ($u/a = 0,80$).

Tabela 6.10: Exemplo 2: Momentos Fletores, M_x e M_y , variando subdomínio com carga q ($u/a = 0,80$).

$M_{x_{max}} = \beta_1 uvq$ e $M_{y_{max}} = \beta_2 uvq$ para $b = 2a$						
Solução Analítica				INSANE		
u/a	v/a	$M_{x_{max}}$ β_1	$M_{y_{max}}$ β_2	Nº de Nós	$M_{x_{max}}$ β_1	$M_{y_{max}}$ β_2
0,80	0,20	0,135	0,120	32	0,134	0,119
				64	0,135	0,120
				128	0,135	0,120
				256	0,135	0,120
				512	0,135	0,120
0,80	1,00	0,097	0,055	32	0,097	0,055
				64	0,097	0,055
				128	0,097	0,055
				256	0,097	0,055
				512	0,097	0,055
0,80	1,80	0,067	0,031	32	0,067	0,031
				64	0,067	0,031
				128	0,067	0,031
				256	0,067	0,031
				512	0,067	0,031

6.4 Placa Retangular com Duas Bordas Simplesmente Apoiada e Outras Duas Engastadas

Uma placa quadrada de lado a , com carga uniformemente distribuída, q , apoiada em duas de suas bordas opostas, e as outras duas engastadas, foi resolvida para diversas relações entre comprimento e largura. Considera-se que, para as bordas engastadas, a condição de rotação no plano vertical tangente ao contorno está restringida (condição *hard*), conforme indicado na Fig.6.11.

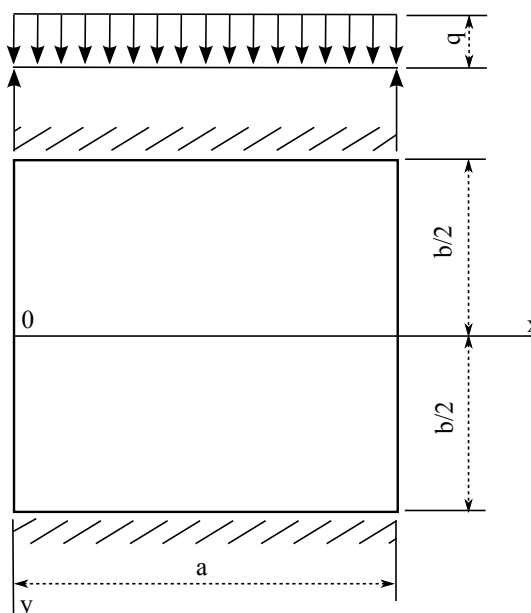


Figura 6.11: Placa com Duas Bordas Apoiadas e outras Duas Engastadas.

O módulo de elasticidade longitudinal do material é dado por E e o coeficiente de Poisson igual a ν .

A discretização adotada consta de uma variação de 8, 16, 32 e 64 elementos quadráticos contínuos no contorno da placa (com 16, 32, 64 e 128 nós, respectivamente) conforme Fig.6.12. Neste problema, procurou-se realizar a integração da carga de domínio da placa através da equação integral de domínio vista na Eq.3.24. As células contendo o carregamento são quadráticas.

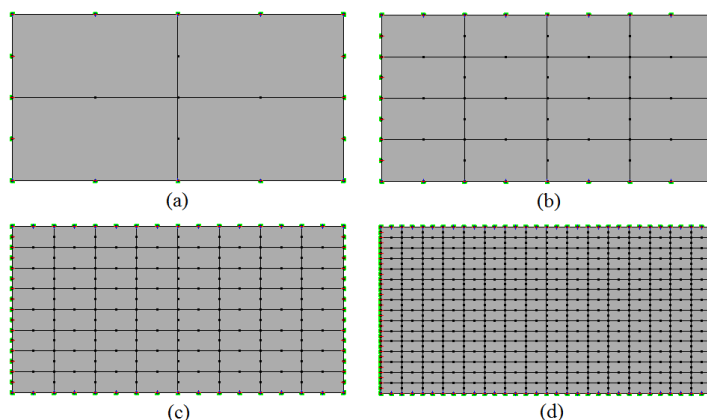


Figura 6.12: Discretização de uma Placa Retangular ($a/b = 2$): (a) 16 nós, (b) 32 nós, (c) 64 nós e (d) 128 nós no Contorno.

Os valores obtidos para o deslocamento transversal, w , estão apresentados na Tabela 6.11 juntamente com a respectiva solução analítica, conforme Timoshenko (1959). Neste caso, o lado a da placa é maior que o lado b .

Tabela 6.11: Exemplo 3: Deslocamento Transversal, w_{max} , para $x = a/2$ e $y = 0$.

$w_{max} = \alpha \frac{qb^4}{D} \times 10^{-2}$		INSANE (Nº de Nós)			
a/b	Solução Analítica α	16 α	32 α	64 α	128 α
2,0	0,260	0,2597	0,2625	0,2626	0,2626
1,5	0,247	0,2476	0,2490	0,2490	0,2490
1,1	0,209	0,2087	0,2100	0,2101	0,2101

As Tabelas 6.12, 6.13 e 6.14 apresentam os valores obtidos para os Momentos, M_x e M_y , juntamente com a respectiva solução analítica.

Tabela 6.12: Exemplo 3: Momento Fletor, M_x , para $x = a/2$ e $y = 0$.

$M_x = \beta_1 qb^2 \times 10^{-1}$		INSANE (Nº de Nós)			
a/b	Solução Analítica β_1	16 β_1	32 β_1	64 β_1	128 β_1
2,0	0,142	0,1403	0,1419	0,1419	0,1419
1,5	0,179	0,1773	0,1784	0,1784	0,1784
1,1	0,230	0,2298	0,2305	0,22305	0,2305

Tabela 6.13: Exemplo 3: Momento Fletor, M_y , para $x = a/2$ e $y = 0$.

$M_y = \beta_2 q b^2 \times 10^{-1}$		INSANE (Nº de Nós)			
a/b	Solução Analítica β_2	16 β_2	32 β_2	64 β_2	128 β_2
2,0	0,420	0,4189	0,4208	0,4208	0,4208
1,5	0,406	0,4055	0,4064	0,4065	0,4065
1,1	0,355	0,3543	0,3561	0,3562	0,3563

Tabela 6.14: Exemplo 3: Momento Fletor, M_y , para $x = a/2$ e $y = b/2$.

$M_y = \gamma q b^2 \times 10^{-1}$		INSANE (Nº de Nós)			
a/b	Solução Analítica γ	16 γ	32 γ	64 γ	128 γ
2,0	-0,842	-0,7925	-0,8393	-0,8423	-0,8425
1,5	-0,822	-0,7894	-0,8195	-0,8215	-0,8217
1,1	-0,739	-0,7158	-0,7371	-0,7383	-0,7384

A Tabela 6.15 apresenta os valores obtidos para o deslocamento transversal, w , juntamente com a respectiva solução analítica, conforme Timoshenko (1959). Neste caso, o lado b da placa é maior que o lado a .

Tabela 6.15: Exemplo 3: Deslocamento Transversal, w_{max} , para $x = a/2$ e $y = 0$.

$w_{max} = \alpha \frac{q a^4}{D} \times 10^{-2}$		INSANE (Nº de Nós)			
b/a	Solução Analítica α	16 α	32 α	64 α	128 α
1,0	0,192	0,1913	0,1928	0,1929	0,1929
1,5	0,531	0,5258	0,5334	0,5342	0,5342
2,0	0,844	0,8305	0,8443	0,8459	0,8460
3,0	1,168	1,1527	1,1673	1,1692	1,1695

As Tabelas 6.16, 6.17 e 6.18 apresentam os valores obtidos para os Momentos, M_x e M_y , juntamente com a respectiva solução analítica. Neste caso, o lado b da

placa é maior que o lado a .

Tabela 6.16: Exemplo 3: Momento Fletor, M_x , para $x = a/2$ e $y = 0$.

$M_x = \beta_1 q a^2 \times 10^{-1}$		INSANE (N° de Nós)			
b/a	Solução Analítica β_1	16 β_1	32 β_1	64 β_1	128 β_1
1,0	0,244	0,2437	0,2446	0,2446	0,2446
1,5	0,585	0,5794	0,5848	0,5855	0,5855
2,0	0,869	0,8565	0,8676	0,8690	0,8691
3,0	1,144	1,1307	1,1418	1,1435	1,1437

Tabela 6.17: Exemplo 3: Momento Fletor, M_y , para $x = a/2$ e $y = 0$.

$M_y = \beta_2 q a^2 \times 10^{-1}$		INSANE (N° de Nós)			
b/a	Solução Analítica β_2	16 β_2	32 β_2	64 β_2	128 β_2
1,0	0,332	0,3301	0,3324	0,3326	0,3326
1,5	0,460	0,4509	0,4591	0,4594	0,4594
2,0	0,474	0,4631	0,4736	0,4735	0,4735
3,0	0,419	0,4217	0,4225	0,4213	0,4212

Tabela 6.18: Exemplo 3: Momento Fletor, M_y , para $x = a/2$ e $y = b/2$.

$M_y = \gamma q a^2 \times 10^{-1}$		INSANE (N° de Nós)			
b/a	Solução Analítica γ	16 γ	32 γ	64 γ	128 γ
1,0	-0,698	-0,6761	-0,6963	-0,6973	-0,6974
1,5	-1,049	-0,9998	-1,0436	-1,0464	-1,0466
2,0	-1,191	-1,1251	-1,1823	-1,1878	-1,1884
3,0	-1,246	-1,1858	-1,2342	-1,2411	-1,2433

6.5 Placa Retangular com Três Bordas Simplesmente Apoiadas e Uma Borda Engastada

Uma placa retangular de lados com dimensões genéricas, a e b , com carga uniformemente distribuída, q , em toda a sua área, e com três bordas simplesmente apoiadas e uma borda engastada, foi resolvida variando-se os lados conforme a ilustração da Fig.6.13.

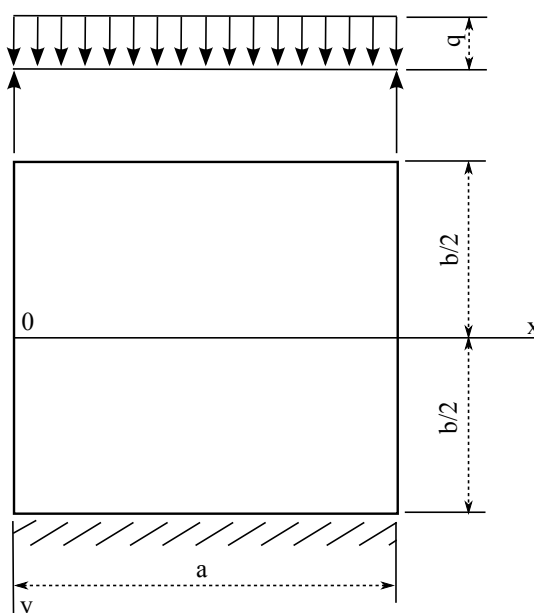


Figura 6.13: Placa com Três Bordas Simplesmente Apoiada e Uma Borda Engastada.

Na análise deste problema, considerou-se a rotação no plano vertical tangente ao contorno restringida, condição *hard*. O módulo de elasticidade longitudinal do material é dado por E e o coeficiente de Poisson igual a ν .

A discretização adotada consta de uma variação de 8, 16, 32 e 64 elementos quadráticos contínuos (com 16, 32, 64 e 128 nós, respectivamente) no contorno da placa conforme a Fig.6.14. Neste problema, procurou-se realizar a integração da carga de domínio da placa através da equação integral de domínio vista na Eq.3.24. As células contendo o carregamento, q , são quadráticas.

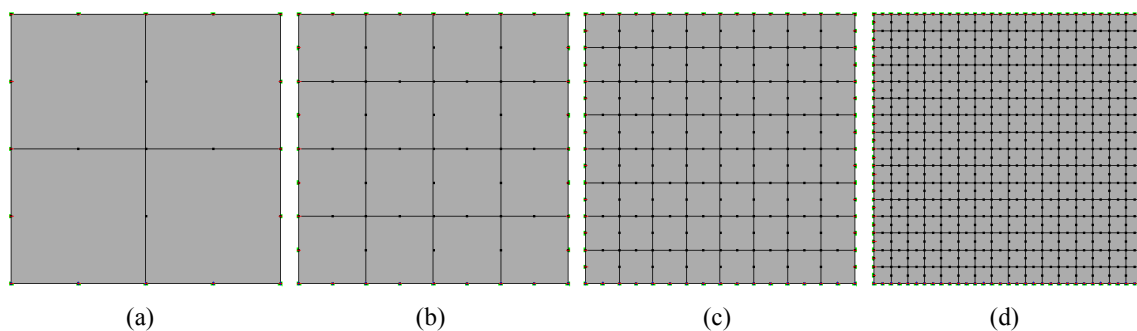


Figura 6.14: Discretização de uma Placa Quadrada ($b/a = 1$): (a) 16 nós, (b) 32 nós, (c) 64 nós e (d) 128 nós no Contorno.

Os valores obtidos para o deslocamento transversal, w , estão apresentados na Tabela 6.19 juntamente com a respectiva solução analítica, conforme Timoshenko (1959).

Tabela 6.19: Exemplo 4: Deslocamento Transversal, w_{max} , para $x = a/2$ e $y = 0$.

$w_{max} = \alpha \frac{qa^4}{D} \times 10^{-2}$		INSANE (Nº de Nós)			
b/a	Solução Analítica α	16 α	32 α	64 α	128 α
1,0	0,28	0,276	0,279	0,286	0,287
1,5	0,64	0,636	0,643	0,655	0,655
2,0	0,93	0,915	0,925	0,934	0,936

As Tabelas 6.20, 6.21 e 6.22 apresentam os valores obtidos para os Momentos, M_x e M_y , juntamente com a respectiva solução analítica, conforme Timoshenko (1959).

Tabela 6.20: Exemplo 4: Momento Fletor, M_y , para $x = a/2$ e $y = b/2$.

$M_y = \gamma qa^2 \times 10^{-1}$		INSANE (Nº de Nós)			
b/a	Solução Analítica γ	16 γ	32 γ	64 γ	128 γ
1,0	-0,84	-0,812	-0,834	-0,836	-0,837
1,5	-1,12	-1,071	-1,114	-1,118	-1,119
2,0	-1,22	-1,151	-1,206	-1,211	-1,212

Tabela 6.21: Exemplo 4: Momento Fletor, M_x , para $x = a/2$ e $y = 0$.

$M_x = \beta_1 q a^2 \times 10^{-1}$		INSANE (N° de Nós)			
b/a	Solução Analítica β_1	16 β_1	32 β_1	64 β_1	128 β_1
1,0	0,34	0,337	0,339	0,339	0,339
1,5	0,69	0,684	0,689	0,690	0,691
2,0	0,94	0,931	0,939	0,941	0,941

Tabela 6.22: Exemplo 4: Momento Fletor, M_y , para $x = a/2$ e $y = 0$.

$M_y = \beta_2 q a^2 \times 10^{-1}$		INSANE (N° de Nós)			
b/a	Solução Analítica β_2	16 β_2	32 β_2	64 β_2	128 β_2
1,0	0,39	0,388	0,391	0,392	0,392
1,5	0,48	0,470	0,477	0,477	0,478
2,0	0,47	0,462	0,468	0,468	0,469

6.6 Placa Retangular Engastada nas Quatro Bordas com Carga Uniformemente Distribuída

Este problema propõe comparar a convergência numérica para uma discretização usando somente elementos lineares e uma segunda somente elementos quadráticos, porém ambas contendo o mesmo número de nós. Para tal, foi usada uma placa retangular de lados com dimensões a e b , com carga uniformemente distribuída, q , em toda a sua área, e engastada nas quatro bordas. O problema foi resolvido para diversas relações entre comprimento e largura conforme a Fig.6.15.

Na análise deste problema, considerou-se apenas a rotação no plano vertical tangente ao contorno restringida (condição *hard*). O módulo de elasticidade longitudinal do material é dado por E e o coeficiente de Poisson igual a ν .

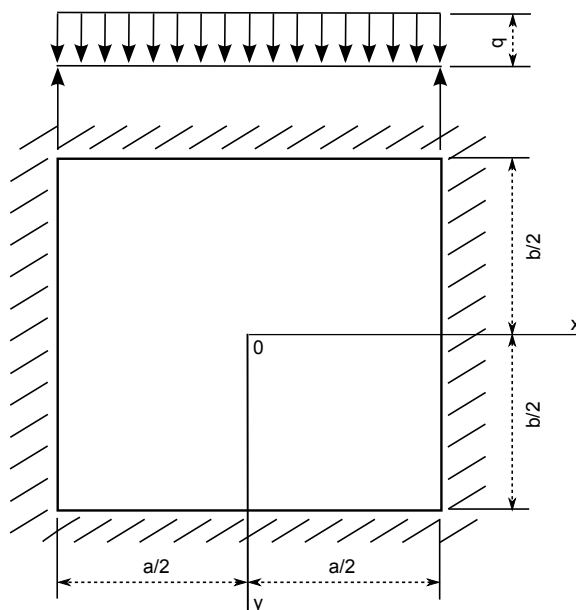


Figura 6.15: Placa Engastada com Carga Uniformemente Distribuída.

A discretização adotada consta de uma variação de 4, 8, 16, 32 e 64 elementos quadráticos contínuos (com 8, 16, 32, 64 e 128 nós, respectivamente), conforme Fig.6.16.

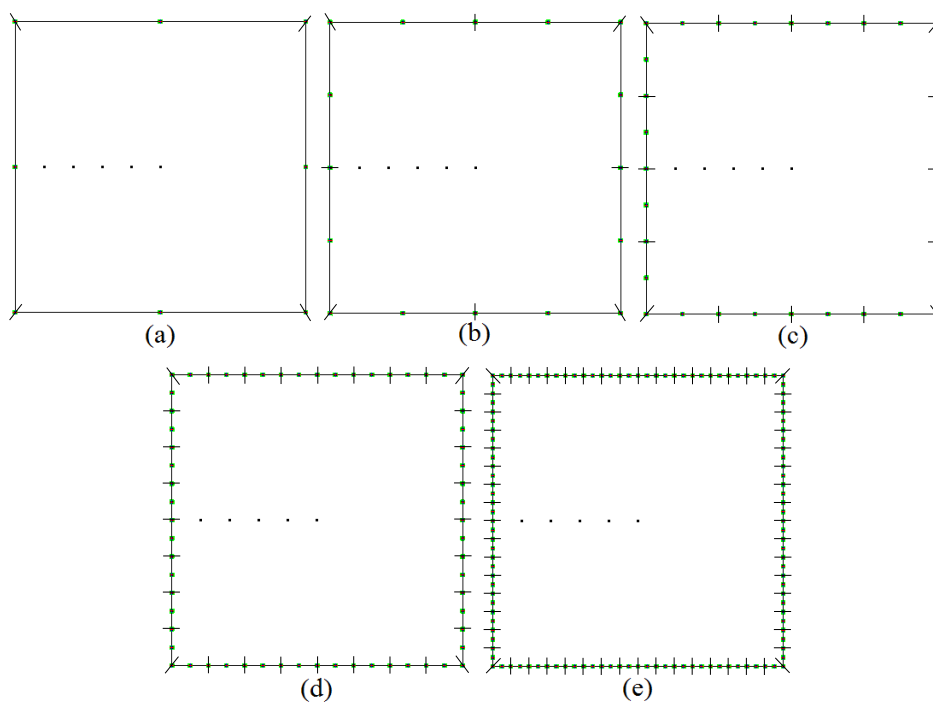


Figura 6.16: Discretização de uma Placa Quadrada usando Elementos Quadráticos ($b/a = 1$): (a) 8 nós, (b) 16 nós, (c) 32 nós, (d) 64 nós e (e) 128 nós no Contorno.

Uma segunda discretização foi feita utilizando-se de 8, 16, 32, 64 e 128 elementos lineares contínuos (com 8, 16, 32, 64 e 128 nós, respectivamente), conforme Fig.6.17.

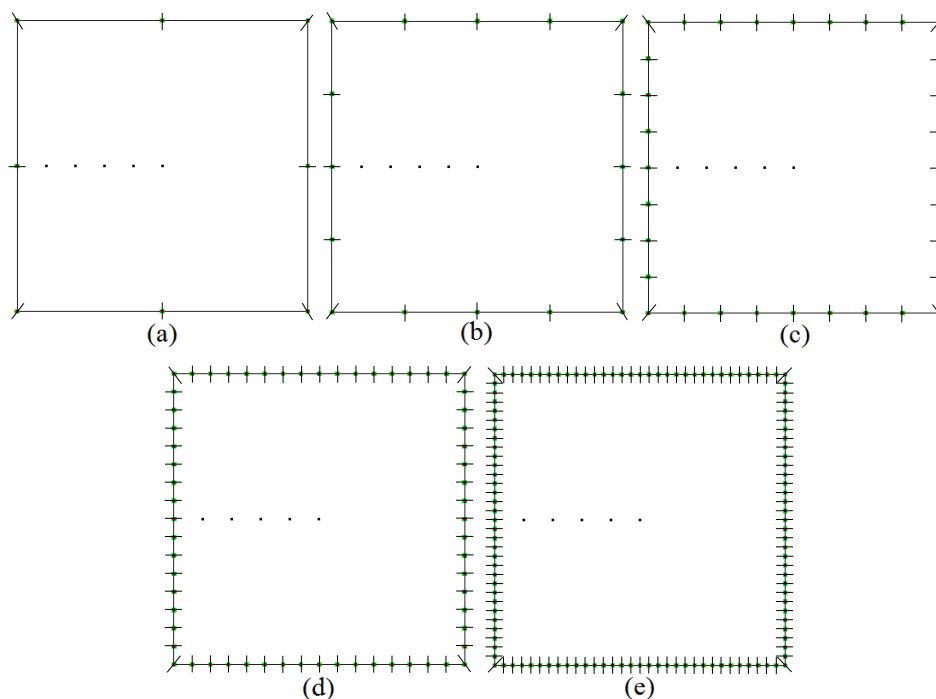


Figura 6.17: Discretização de uma Placa Quadrada usando Elementos Lineares ($b/a = 1$): (a) 8 nós, (b) 16 nós, (c) 32 nós, (d) 64 nós e (e) 128 nós no Contorno.

Neste problema, procurou-se integrar a carga de domínio da placa por meio da equação integral de contorno vista na Eq.3.24.

Os valores obtidos para o máximo deslocamento transversal, w , estão apresentados na Tabela 6.23 juntamente com a respectiva solução clássica (S.C.), conforme Timoshenko (1959). Observa-se que houve uma convergência numérica para ambos os elementos, elementos lineares (E.L.) e elementos quadráticos (E.Q.), porém para a discretização contendo somente elementos quadráticos, a convergência numérica apresentou um melhor desempenho.

Tabela 6.23: Exemplo 5: Deslocamento Transversal, w_{max} .

$w_{max} = \alpha \frac{qa^4}{D} \times 10^{-2}$									
b/a	1,0			1,5			2,0		
Nº	S.C.	E.L.	E.Q.	S.C.	E.L.	E.Q.	S.C.	E.L.	E.Q.
Nós	α	α	α	α	α	α	α	α	α
8		0,1304	0,1263		0,2299	0,2210		0,2736	0,2606
16		0,1283	0,1280		0,2223	0,2213		0,2559	0,2536
32	0,126	0,1276	0,1276	0,220	0,2212	0,2210	0,254	0,2549	0,2548
64		0,1276	0,1275		0,2210	0,2210		0,2548	0,2548
128		0,1275	0,1275		0,2210	0,2210		0,2548	0,2548

As Tabelas 6.24 e 6.25 apresentam os valores obtidos para os momentos, M_x e M_y , no centro da placa juntamente com a respectiva solução clássica, conforme Timoshenko (1959). Observa-se que houve uma convergência numérica para ambos os elementos, elementos lineares (E.L.) e elementos quadráticos (E.Q.), porém para a discretização contendo somente elementos quadráticos, a convergência numérica apresentou um melhor desempenho.

Tabela 6.24: Exemplo 5: Momento Fletor, M_x , para $x = 0$ e $y = 0$.

$M_x = \beta_1 qa^2 \times 10^{-1}$									
b/a	1,0			1,5			2,0		
N.E.	S.T.	E.L.	E.Q.	S.T.	E.L.	E.Q.	S.T.	E.L.	E.Q.
	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1
8		0,2308	0,2286		0,3735	0,3671		0,4255	0,4152
16		0,2299	0,2297		0,3688	0,3681		0,4126	0,4109
32	0,231	0,2293	0,2292	0,368	0,3679	0,3678	0,412	0,4118	0,4117
64		0,2292	0,2292		0,3678	0,3678		0,4116	0,4116
128		0,2292	0,2292		0,3678	0,3678		0,4116	0,4116

Tabela 6.25: Exemplo 5: Momento Fletor, M_y , para $x = 0$ e $y = 0$

$M_y = \beta_2 qa^2 \times 10^{-1}$									
b/a	1,0			1,5			2,0		
N.E.	S.T.	E.L.	E.Q.	S.T.	E.L.	E.Q.	S.T.	E.L.	E.Q.
	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2
8		0,2308	0,2286		0,2016	0,2028		0,1412	0,1503
16		0,2299	0,2297		0,2037	0,2032		0,1584	0,1580
32	0,231	0,2293	0,2292	0,203	0,2030	0,2029	0,158	0,1582	0,1581
64		0,2292	0,2292		0,2029	0,2029		0,1582	0,1582
128		0,2292	0,2292		0,2029	0,2029		0,1582	0,1582

As Tabelas 6.26 e 6.27 apresentam os valores obtidos para os momentos, M_x e M_y , no centro de uma das bordas da placa juntamente com a respectiva solução clássica, conforme Timoshenko (1959). Observa-se que houve uma convergência numérica para ambos os elementos, elementos lineares (E.L.) e elementos quadráticos (E.Q.), porém para a discretização contendo somente elementos quadráticos, a convergência numérica apresentou um melhor desempenho.

Tabela 6.26: Exemplo 5: Momento Fletor, M_x , para $x = \frac{a}{2}$ e $y = 0$

$M_x = \beta_1 qa^2 \times 10^{-1}$									
b/a	1,0			1,5			2,0		
N.E.	S.T.	E.L.	E.Q.	S.T.	E.L.	E.Q.	S.T.	E.L.	E.Q.
	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1	β_1
8		-0,5794	-0,4931		-0,8686	-0,7492		-0,9707	-0,8474
16		-0,5466	-0,5327		-0,7962	-0,7661		-0,8560	-0,8093
32	-0,513	-0,5199	-0,5132	-0,757	-0,7642	-0,7557	-0,829	-0,8333	-0,8261
64		-0,5142	-0,5123		-0,7581	-0,7560		-0,8296	-0,8282
128		-0,5127	-0,5123		-0,7566	-0,7560		-0,8287	-0,8284

Tabela 6.27: Exemplo 5: Momento Fletor, M_y , para $x = 0$ e $y = \frac{b}{2}$

$M_y = \beta_2 q a^2 \times 10^{-1}$									
b/a	1,0			1,5			2,0		
N.E.	S.T.	E.L.	E.Q.	S.T.	E.L.	E.Q.	S.T.	E.L.	E.Q.
	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2	β_2
8		-0,5794	-0,4931		-0,6579	-0,5484		-0,6991	-0,5757
16		-0,5466	-0,5327		-0,6091	-0,5946		-0,6100	-0,5938
32	-0,513	-0,5199	-0,5132	-0,570	-0,5783	-0,5706	-0,571	-0,5782	-0,5703
64		-0,5142	-0,5123		-0,5713	-0,5690		-0,5710	-0,5687
128		-0,5127	-0,5123		-0,5696	-0,5690		-0,5692	-0,5686

Uma segunda análise deste mesmo problema foi realizada com o objetivo de visualizar e comparar os resultados obtidos no domínio da placa através do método dos elementos finitos (MEF), por meio do programa *Abaqus*, e o método dos elementos de contorno (MEC), por meio da implementação no núcleo numérico INSANE. A integração da carga de domínio da placa foi por meio da equação integral de domínio vista na Eq.3.24

Para tanto, adotou-se para a placa engastada as seguintes dimensões: $a = 300cm$, $b = 300cm$ e espessura constante, $h = 20cm$. A carga, uniformemente distribuída em toda a área, é igual a $20,0kN/m^2$. A placa possui as seguintes propriedades mecânicas: módulo de elasticidade longitudinal, $E = 25.000MPA$ e o coeficiente de Poisson, $\nu = 0,20$.

Considerou-se a rotação no plano vertical tangente ao contorno restringida, condição *hard*.

Os detalhes da discretização utilizada para o MEF e o MEC estão de acordo com a Tabela 6.28.

Tabela 6.28: Exemplo 5: Discretização da Placa Engastada

Programa	Elemento	Graus de liberdade por nó	Distância entre nós	Total de Elementos
<i>Abaqus</i>	<i>S8R</i>	u_x, u_y, u_z r_x, r_y, r_z	18,75 cm × 18,75 cm	256
INSANE	<i>BL3</i> <i>BQ8</i>	ϕ_n, ϕ_s, w	18,75 cm 18,75 cm × 18,75 cm	64 (contorno) 256 (domínio)

O elemento finito utilizado na discretização da placa por meio do MEF (*Abaqus*) foi o *S8R*. Este elemento apresenta as seguintes características:

- Elemento de casca (*shell*) quadrilateral;
- Elemento isoparamétrico com função aproximadora quadrática;
- Formulação baseada na teoria Reissner-Mindlin;
- Possui 6 graus de liberdade;
- Utiliza-se a integração numérica reduzida;
- A normal positiva é definida pela regra da mão direita;
- Representa a superfície média de um elemento de placa.

O sistema de coordenadas utilizado pelo programa *Abaqus*, de acordo com a Fig.6.18, apresenta a mesma orientação do sistema de coordenadas adotado pela implementação no núcleo numérico INSANE, porém o resultado referente ao cálculo da rotação ϕ_y apresentou sentido inverso, conforme Fig.6.24 e Fig.6.25. Isto ocorreu porque a convenção de sinal adotada pelo MEC para ϕ_y , vista na Fig.2.2, é contrária ao adotado pelo programa *Abaqus*.

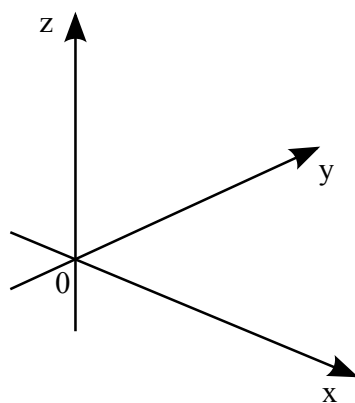


Figura 6.18: Sistema de Coordenadas adotado pelo Programa *Abaqus*.

Os resultados apresentados a seguir exibem uma comparação entre os métodos numéricos MEF e MEC. Devido à indisponibilidade do mesmo número de isofaixas entre os dois programas no pós-processamento, realizou-se uma segunda comparação através dos pontos internos contidos entre o segmento \overline{AA} tal como mostrado na Fig.6.19.

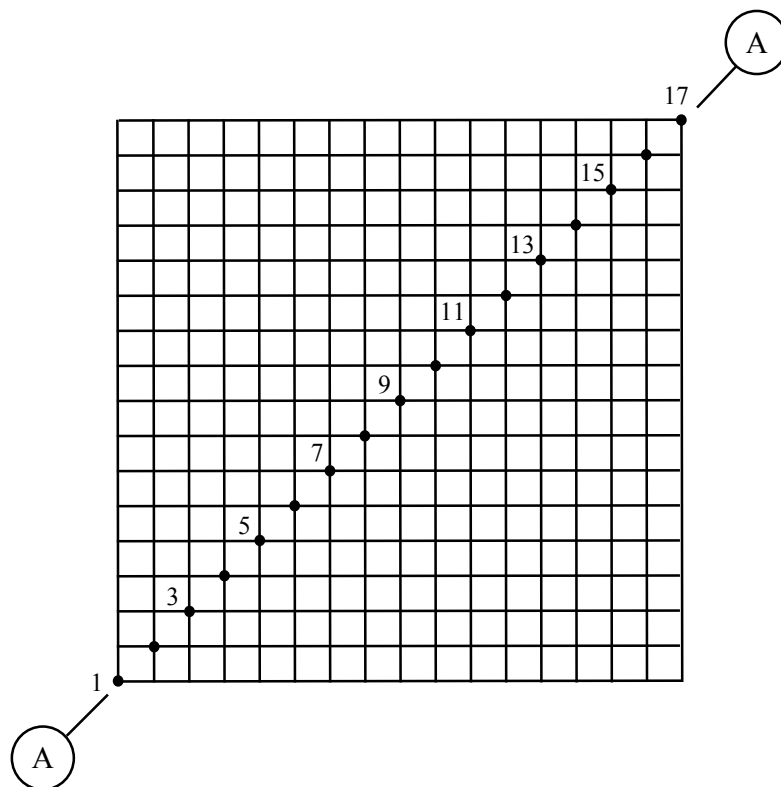


Figura 6.19: Pontos Internos.

O cálculo do deslocamento transversal, w , e os resultados contidos entre o segmento \overline{AA} estão ilustrados na Fig.6.20 e na Fig.6.21, respectivamente.

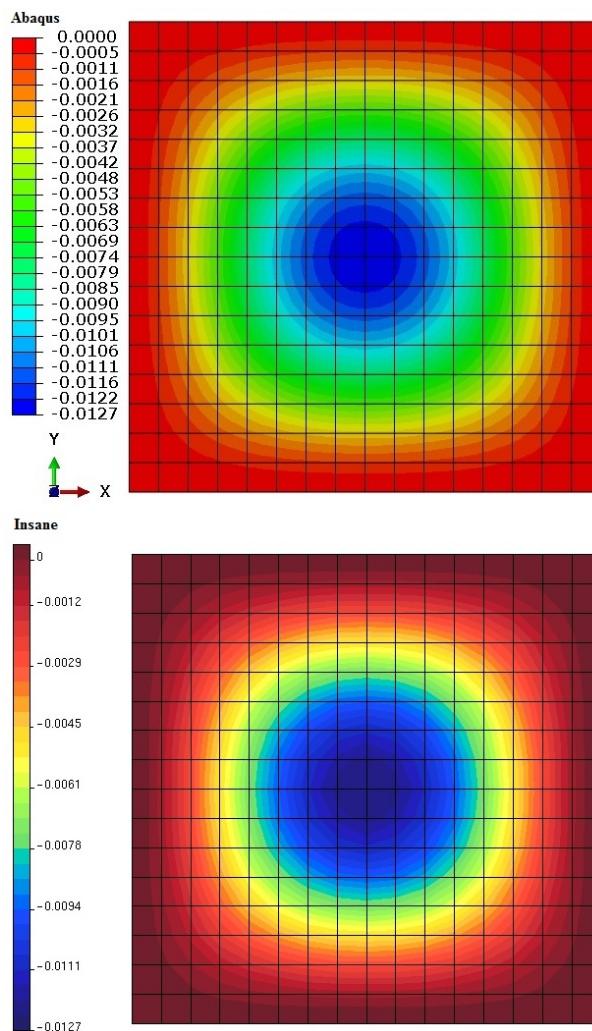


Figura 6.20: Deslocamento Transversal, $w(cm)$.

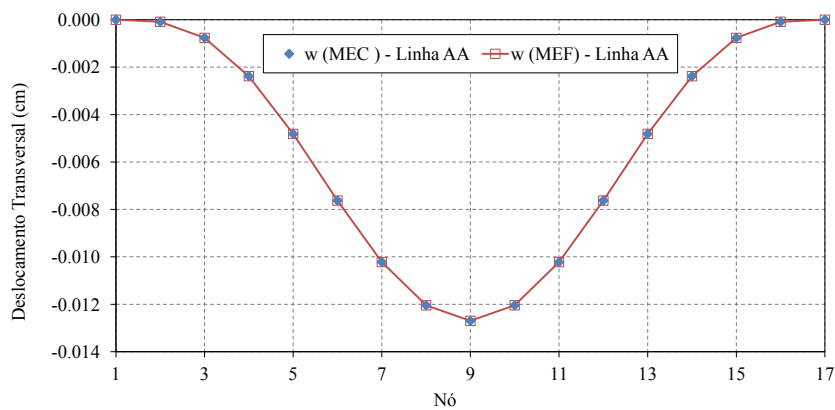


Figura 6.21: Deslocamento Transversal obtido no segmento \overline{AA} , $w(cm)$.

O cálculo da rotação, ϕ_x , e os resultados contidos entre o segmento \overline{AA} estão ilustrados na Fig.6.22 e na Fig.6.23, respectivamente.

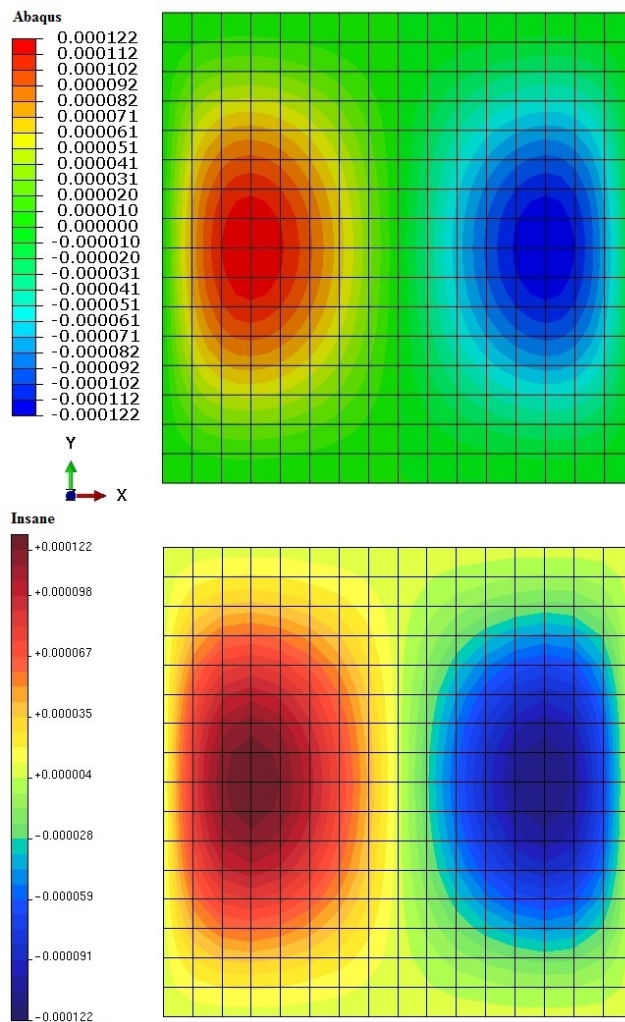


Figura 6.22: Rotação, $\phi_x(rad)$.

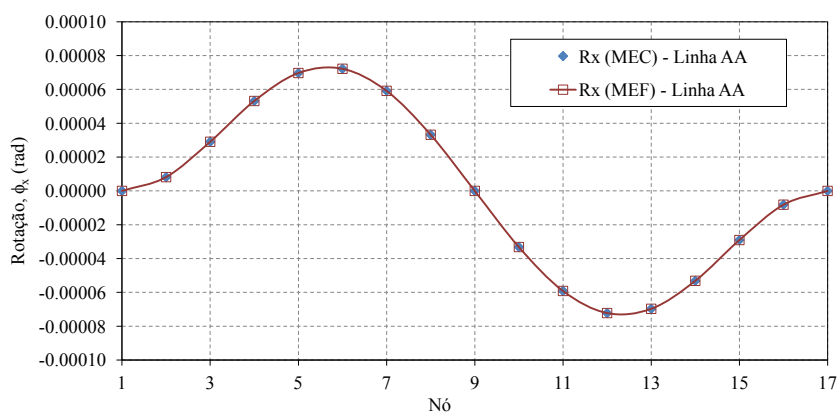


Figura 6.23: Rotação obtida no segmento \overline{AA} , $\phi_x(rad)$.

O cálculo da rotação, ϕ_y , e os resultados contidos entre o segmento \overline{AA} estão ilustrados na Fig.6.24 e na Fig.6.25, respectivamente.

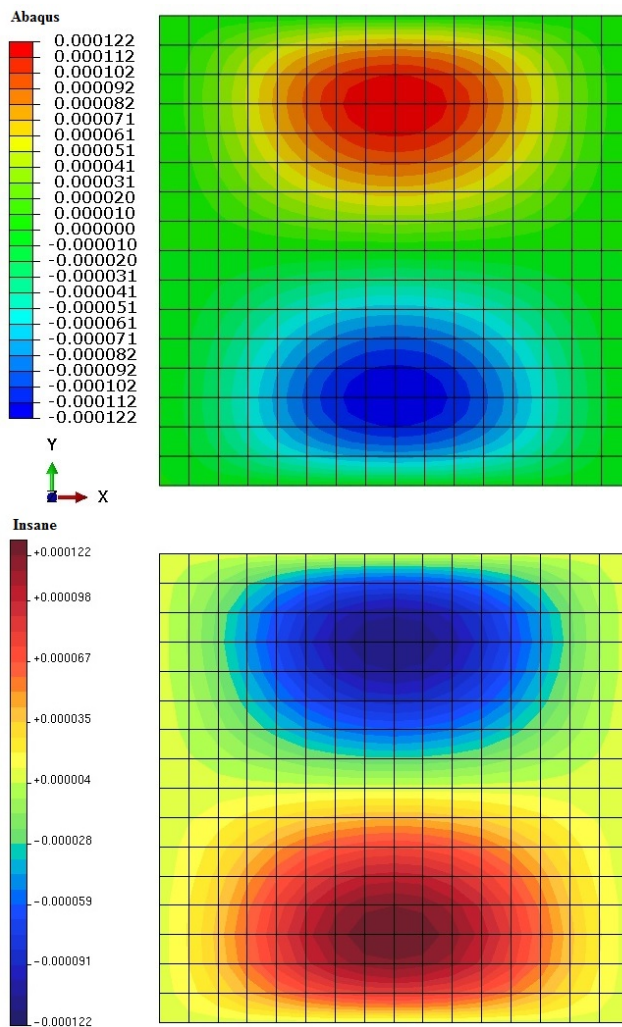


Figura 6.24: Rotação, $\phi_y(rad)$.

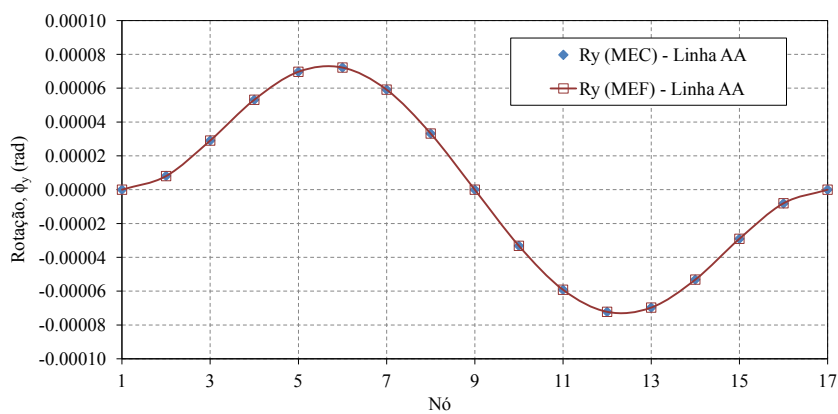


Figura 6.25: Rotação obtida no segmento \overline{AA} , $\phi_y(rad)$.

O cálculo do momento fletor, M_x , e os resultados contidos entre o segmento \overline{AA} estão ilustrados na Fig.6.26 e na Fig.6.27, respectivamente.

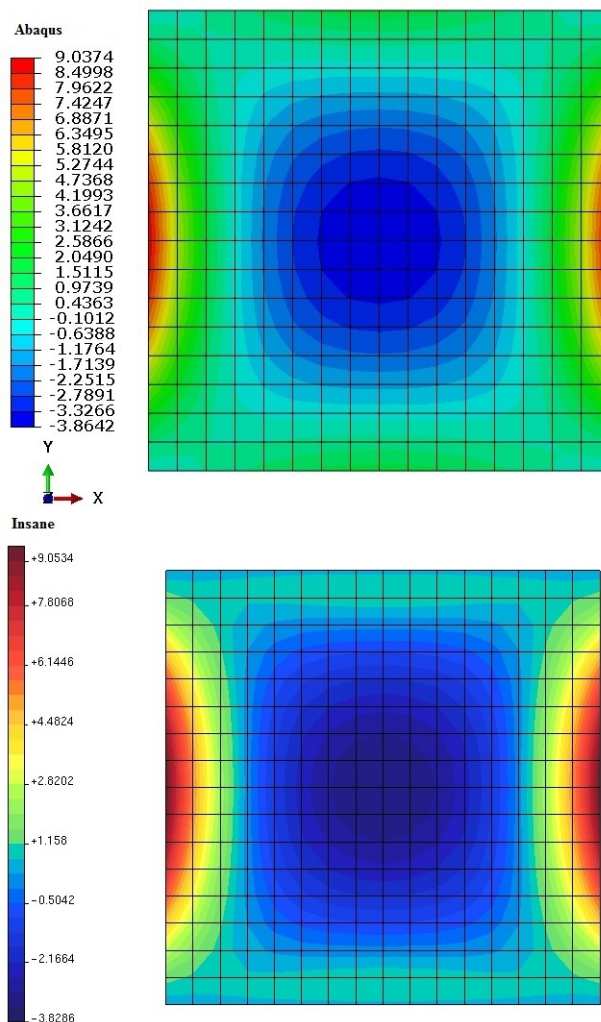


Figura 6.26: Momento, M_x ($\frac{kN \times cm}{cm}$).

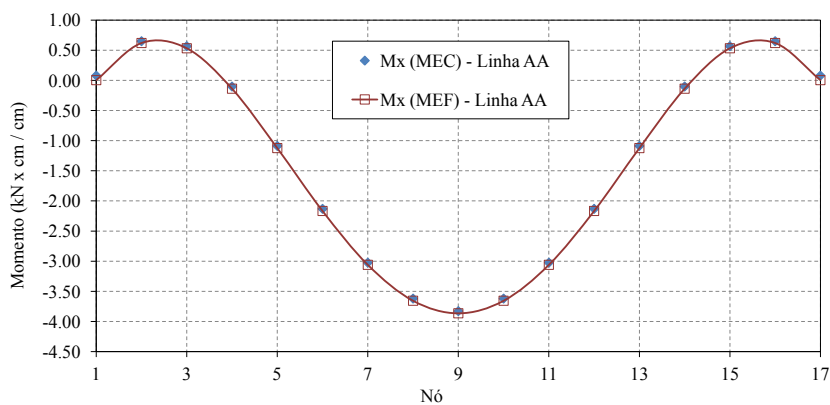


Figura 6.27: Momento obtido no segmento \overline{AA} , M_x ($\frac{kN \times cm}{cm}$).

O cálculo do momento torçor, M_{xy} , e os resultados contidos entre o segmento \overline{AA} estão ilustrados na Fig.6.28 e na Fig.6.29, respectivamente.

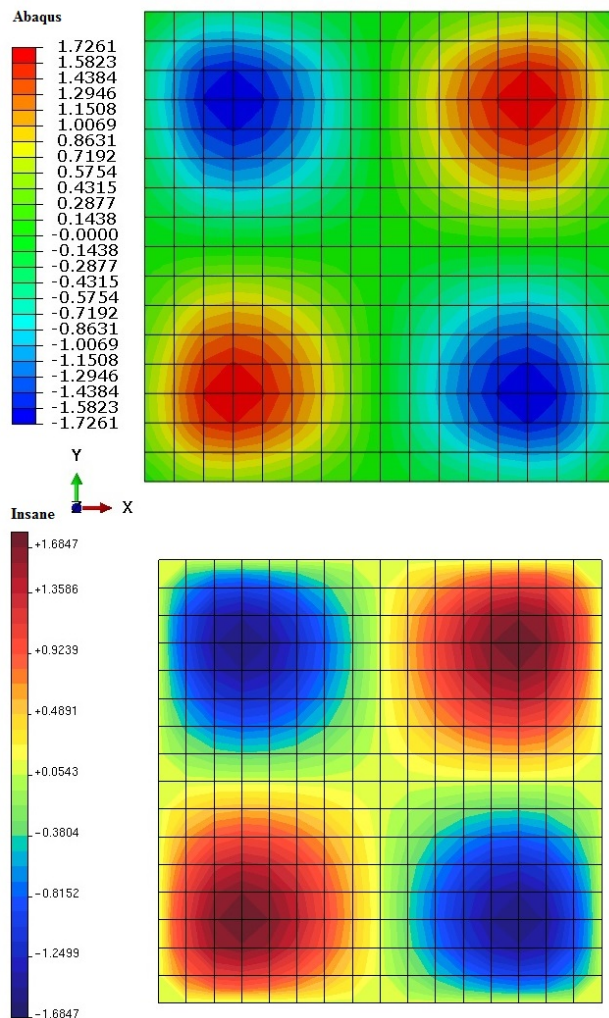


Figura 6.28: Momento, $M_{xy}(\frac{kN \times cm}{cm})$.

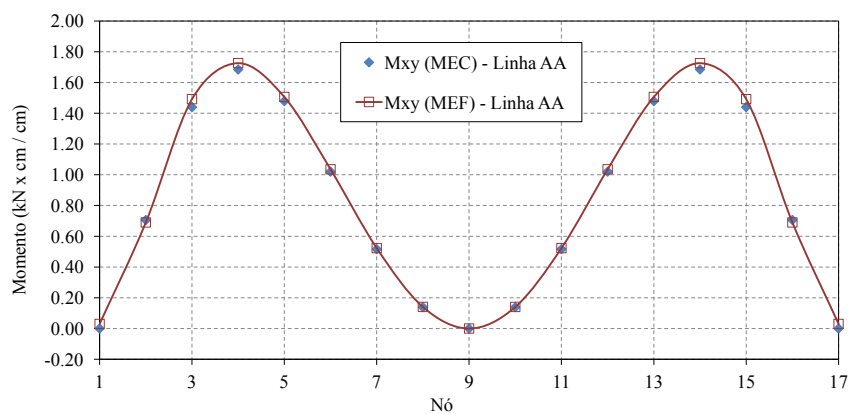


Figura 6.29: Momento obtido no segmento \overline{AA} , $M_{xy}(\frac{kN \times cm}{cm})$.

O cálculo do momento fletor, M_y , e os resultados contidos entre o segmento \overline{AA} estão ilustrados na Fig.6.30 e na Fig.6.31, respectivamente.

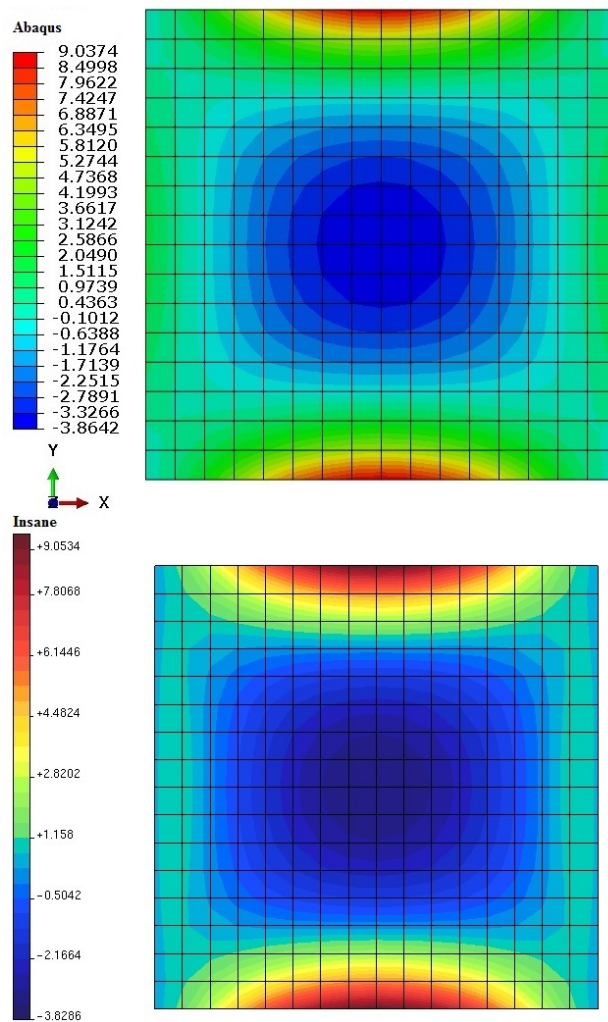


Figura 6.30: Momento, M_y ($\frac{kN \times cm}{cm}$).

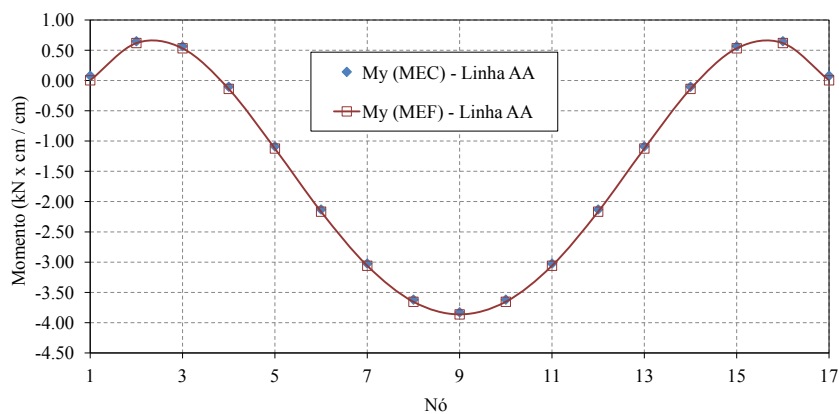


Figura 6.31: Momento obtido no segmento \overline{AA} , M_y ($\frac{kN \times cm}{cm}$).

O cálculo do esforço cortante, Q_x , e os resultados contidos entre o segmento \overline{AA} estão ilustrados na Fig.6.32 e na Fig.6.33, respectivamente.

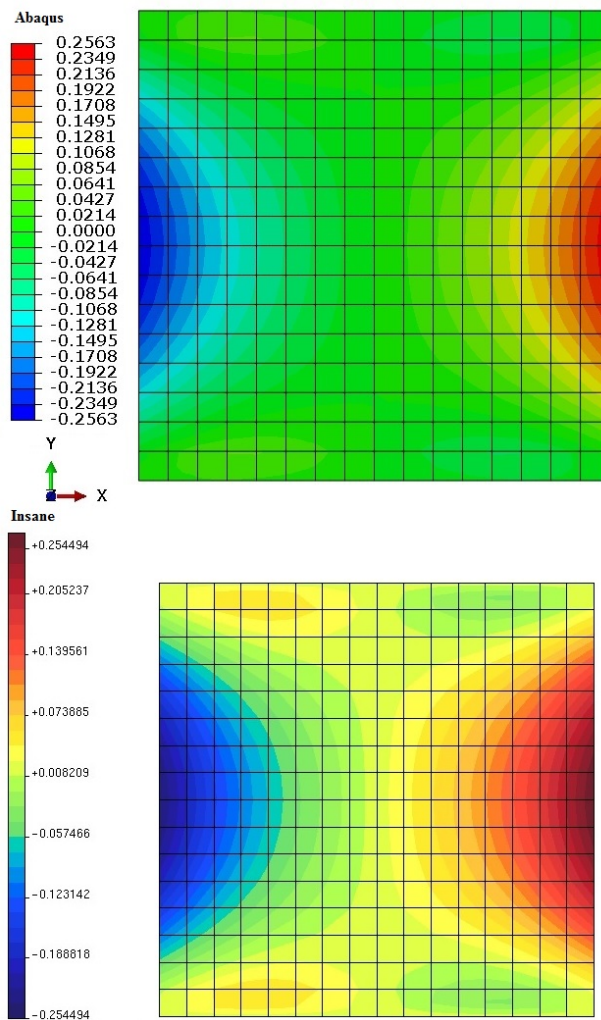


Figura 6.32: Esforço Cortante, $Q_x(\frac{kN}{cm})$ - *Abaqus*.

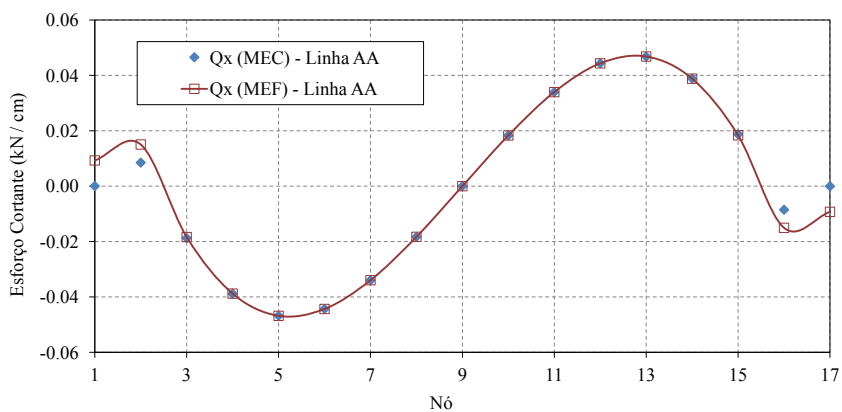


Figura 6.33: Esforço Cortante obtido no segmento \overline{AA} , $Q_x(\frac{kN}{cm})$.

O cálculo do esforço cortante, Q_y , e os resultados contidos entre o segmento \overline{AA} estão ilustrados na Fig.6.34 e na Fig.6.35, respectivamente.

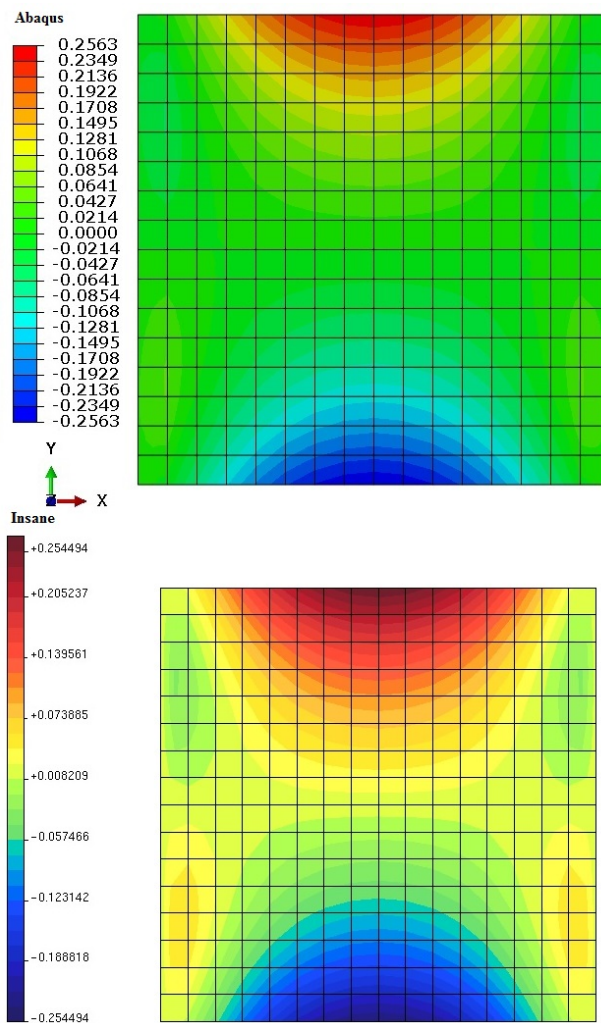


Figura 6.34: Esforço Cortante, $Q_y(\frac{kN}{cm})$ - Abaqus.

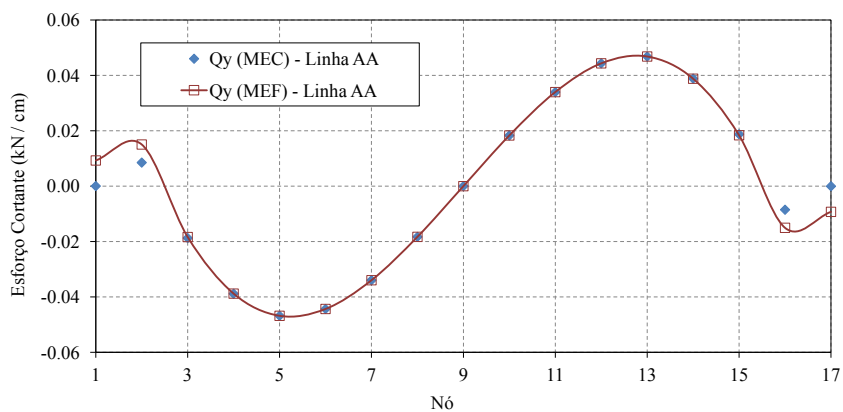


Figura 6.35: Esforço Cortante obtido no segmento \overline{AA} , $Q_y(\frac{kN}{cm})$.

6.7 Placa Quadrada com Quatro Apoios Internos

Uma placa quadrada de lado, $a = 300\text{cm}$, espessura constante, $h = 10\text{cm}$, e carga uniformemente distribuída em toda a sua área, $q = 5,0\text{kN/m}^2$ com quatro apoios internos de $20,0\text{cm} \times 20,0\text{cm}$, foi resolvida para um material com módulo de elasticidade longitudinal, $E = 25.000\text{MPa}$ e o coeficiente de Poisson, $\nu = 0,1667$.

A placa possui as quatro bordas livres de apoio conforme a Fig.6.36.

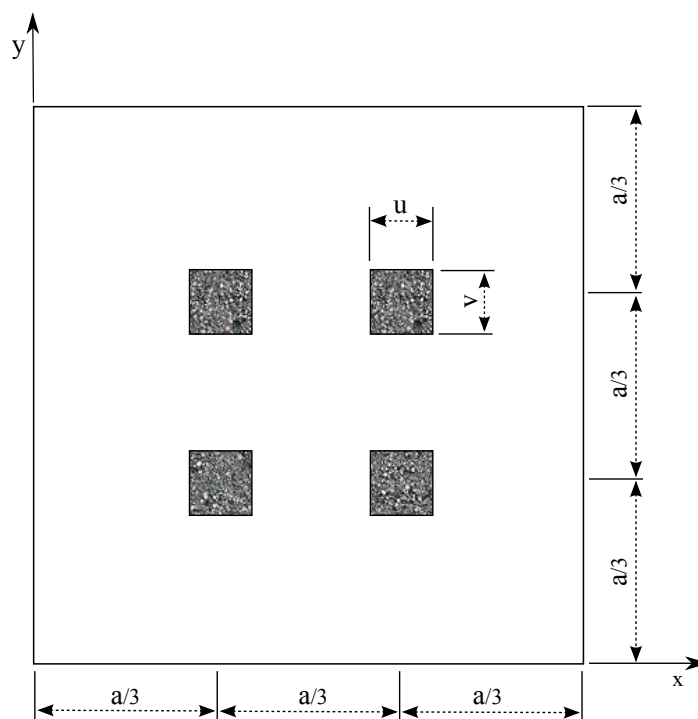


Figura 6.36: Placa Quadrada com Quatro Apoios Internos.

Trata-se de um problema em que não há solução analítica, e portanto, efetuou-se a comparação dos resultados obtidos pelo MEC com os resultados proporcionados pelo MEF através do programa *Abaqus*. O elemento finito usado na discretização da placa foi o *S4R* por representar as características necessárias ao problema proposto. Este elemento possui as mesmas propriedades que o *S8R*, abordado com mais detalhes no item 6.6, porém a função aproximadora do *S4R* é linear.

Foi realizado um estudo de convergência da flecha com base em discretizações refinadas sucessivamente para o MEC, por meio da divisão de cada elemento ao meio,

a partir de uma malha inicial composta de quatro elementos quadráticos (8 nós). Através da convergência observada na Fig.6.37, adotou-se a discretização contendo 64 elementos quadráticos (128 nós) no contorno externo da placa. Em todas as discretizações utilizadas nesta análise, o apoio interno teve uma única discretização contendo 16 elementos quadráticos (32 nós) representado pelo contorno interno.

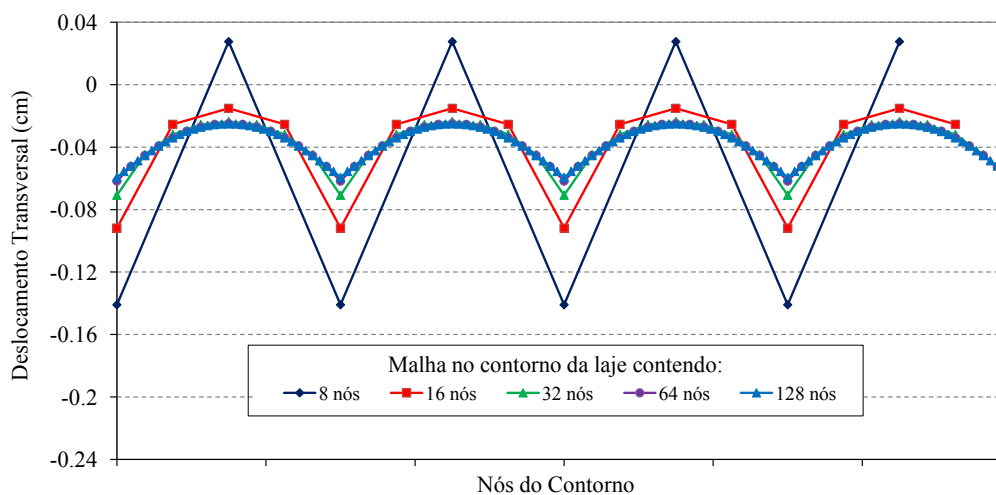


Figura 6.37: Estudo de convergência pelo MEC.

Para o estudo de convergência do MEF, utilizou-se como referência o deslocamento transversal do nó situado no canto da placa ($x = 0$ e $y = 0$).

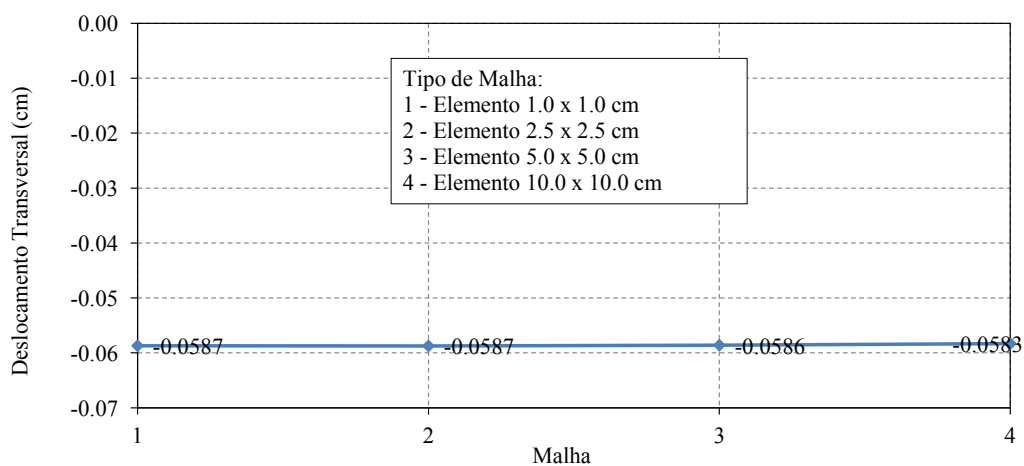


Figura 6.38: Estudo de convergência pelo MEF.

A discretização utilizada nas análises posteriores está apresentada com mais detalhes na Tabela 6.29.

Tabela 6.29: Exemplo 6: Detalhes da Discretização da Laje Lisa

Programa	Elemento	Graus de liberdade por nó	Distância entre nós	Total de Elementos
<i>Abaqus</i>	<i>S4R</i>	u_x, u_y, u_z r_x, r_y, r_z	5,0 cm \times 5,0 cm	3600
INSANE	<i>BL3</i>	ϕ_n, ϕ_s, w	9,375 cm 2,500 cm	64 (contorno) 16 (cada apoio)

A discretização utilizada pelo programa *Abaqus* (MEF) está de acordo com a Fig.6.39.

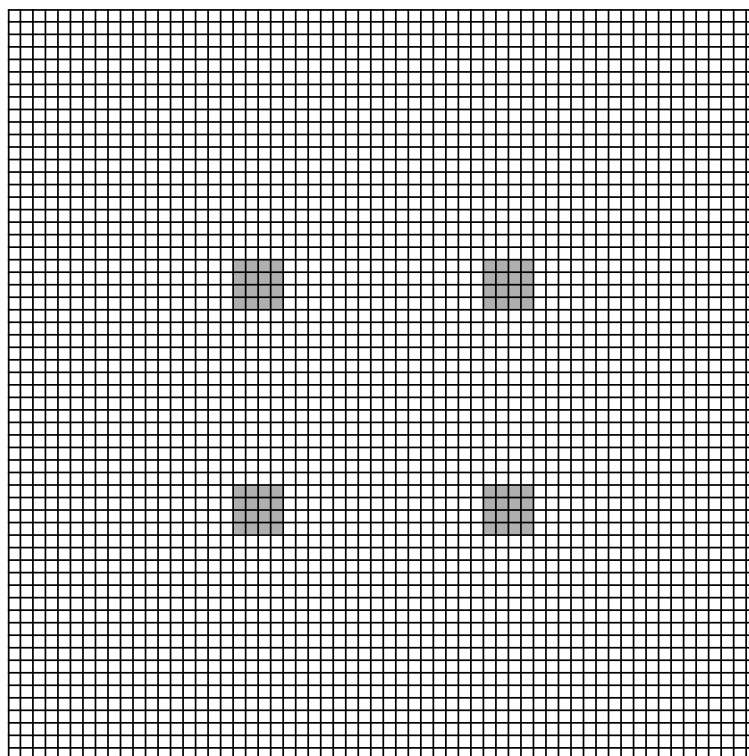


Figura 6.39: Discretização da Placa com Quatro Apoios Internos (MEF).

A discretização utilizada pelo programa INSANE (MEC) está de acordo com a Fig.6.40.

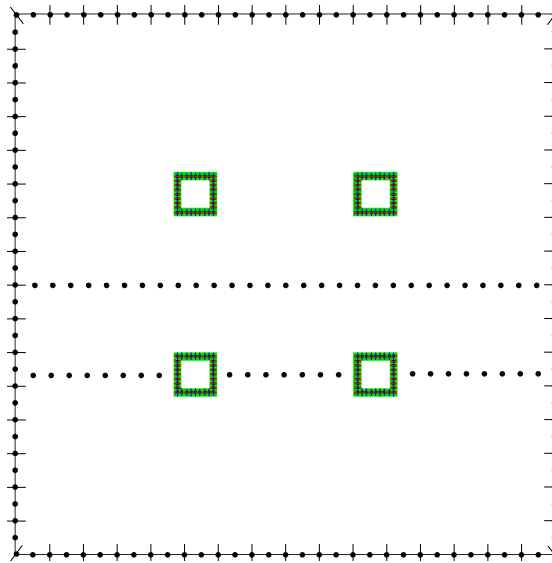


Figura 6.40: Discretização da Placa com Quatro Apoios Internos (MEC).

Os resultados apresentados a seguir exibem uma comparação entre os métodos numéricos através dos pontos internos contidos entre os segmentos \overline{AA} e \overline{BB} tal como ilustrado na Fig.6.41.

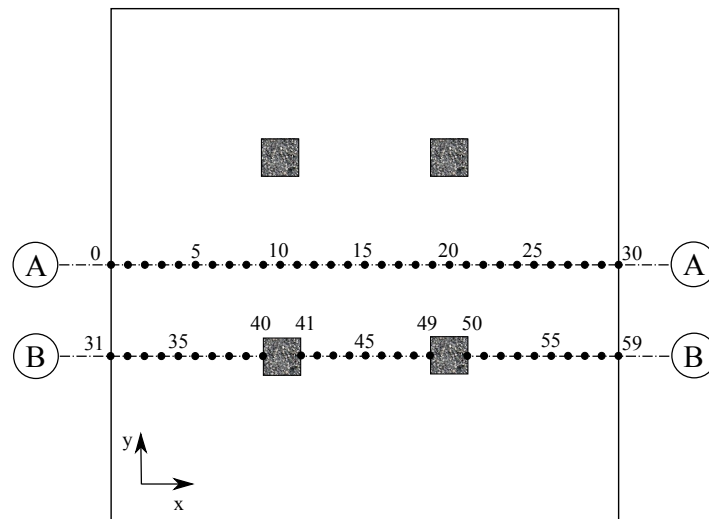


Figura 6.41: Pontos Internos.

As diferenças entre os resultados obtidos pelo MEC e MEF para o deslocamento transversal (w) estão ilustradas na Tabela 6.30. Em seguida, são apresentadas a Fig.6.42 e a Fig.6.43 referentes a estes mesmos dados contidos entre os segmentos \overline{AA} e \overline{BB} , conforme a Fig.6.41.

Tabela 6.30: Exemplo 6: Deslocamento Transversal nos Segmentos \overline{AA} e \overline{BB}

Segmento \overline{AA} - w (cm)				Segmento \overline{BB} - w (cm)			
Nós	MEC	MEF	Diferença (%)	Nós	MEC	MEF	Diferença (%)
0	-0,025071	-0,025055	0,06	31	-0,028867	-0,028855	0,04
1	-0,021555	-0,021539	0,07	32	-0,025166	-0,025140	0,10
2	-0,018029	-0,018014	0,09	33	-0,021387	-0,021361	0,12
3	-0,014562	-0,014546	0,11	34	-0,017569	-0,017545	0,14
4	-0,011243	-0,011228	0,13	35	-0,013767	-0,013743	0,17
5	-0,008182	-0,008171	0,14	36	-0,010064	-0,010041	0,23
6	-0,005502	-0,005497	0,09	37	-0,006579	-0,006556	0,35
7	-0,003315	-0,003317	-0,07	38	-0,003491	-0,003465	0,75
8	-0,001693	-0,001701	-0,42	39	-0,001096	-0,001057	3,62
9	-0,000630	-0,000636	-0,90	40	0,000000	0,000000	0,00
10	-0,000025	-0,000026	-1,17	41	0,000000	0,000000	0,00
11	0,000274	0,000276	-1,02	42	0,000051	0,000057	-9,74
12	0,000408	0,000409	-0,39	43	0,000032	0,000035	-7,99
13	0,000467	0,000465	0,27	44	-0,000008	-0,000007	6,74
14	0,000492	0,000489	0,65	45	-0,000025	-0,000026	-1,17
15	0,000499	0,000496	0,76	46	-0,000008	-0,000007	6,74
16	0,000492	0,000489	0,65	47	0,000025	0,000026	-7,99
17	0,000467	0,000465	0,27	48	0,000051	0,000057	-9,74
18	0,000408	0,000409	-0,39	49	0,000000	0,000000	0,00
19	0,000274	0,000276	-1,02	50	0,000000	0,000000	0,00
20	-0,000025	-0,000026	-1,17	51	-0,001096	-0,001057	3,62
21	-0,000630	-0,000636	-0,90	52	-0,003491	-0,003465	0,75
22	-0,001693	-0,001701	-0,42	53	-0,006579	-0,006556	0,35
23	-0,003315	-0,003317	-0,07	54	-0,010064	-0,010041	0,23
24	-0,005502	-0,005497	0,09	55	-0,013767	-0,013743	0,17
25	-0,008182	-0,008171	0,14	56	-0,017569	-0,017545	0,14
26	-0,011243	-0,011228	0,13	57	-0,021387	-0,021361	0,12
27	-0,014562	-0,014546	0,11	58	-0,025166	-0,025140	0,10
28	-0,018029	-0,018014	0,09	59	-0,028867	-0,028855	0,04
29	-0,021555	-0,021539	0,07				
30	-0,025071	-0,025055	0,06				

As diferenças mais significativas entre os dois métodos numéricos encontram-se no segmento \overline{BB} e próximas da região de apoio. Como nesta região, o resultado do

deslocamento transversal está próximo de zero, o aumento da diferença, em termos percentuais, é admissível.

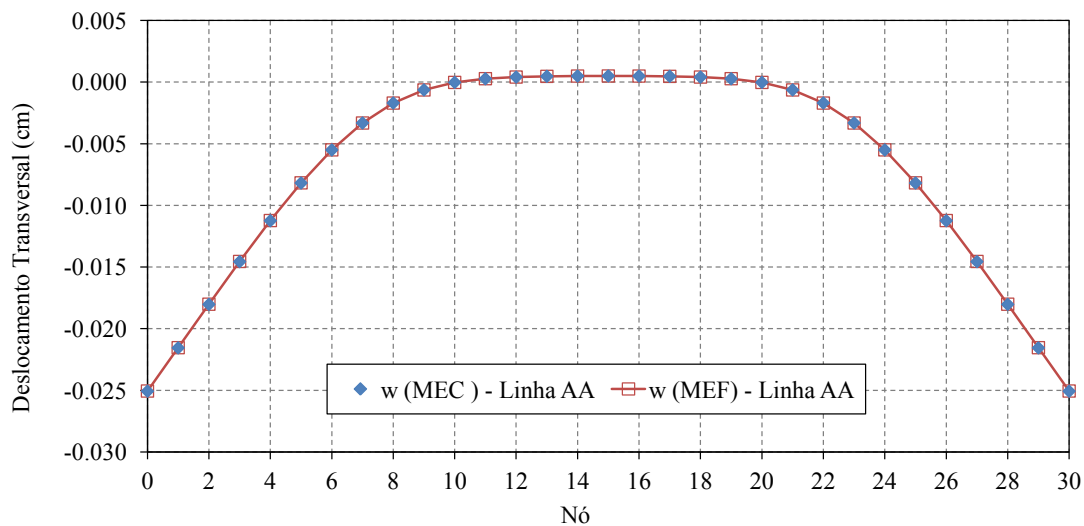


Figura 6.42: Deslocamento Transversal obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

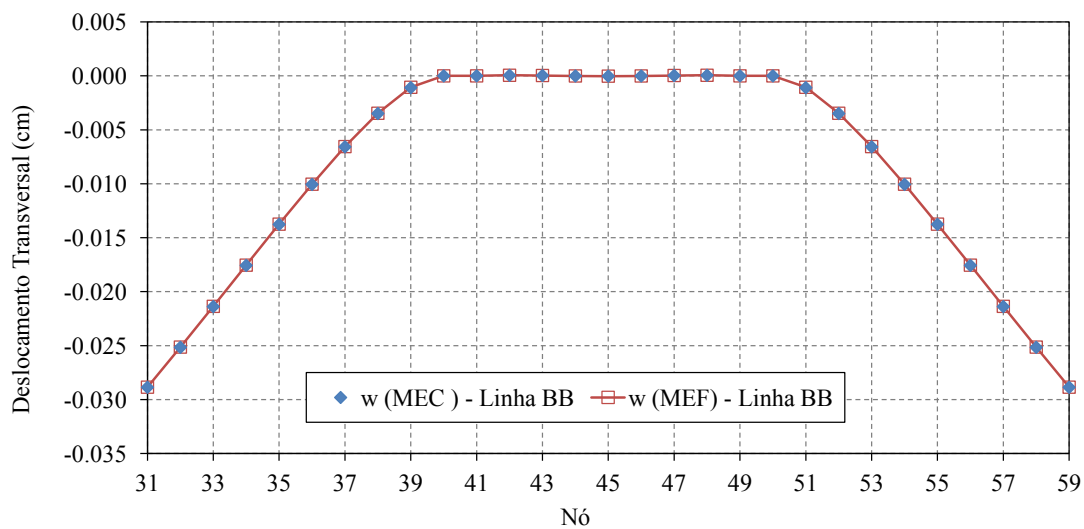


Figura 6.43: Deslocamento Transversal obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{BB} .

As diferenças entre os resultados obtidos pelo MEC e MEF para o momento M_x estão ilustradas na Tabela 6.31. Em seguida, são apresentadas a Fig.6.44 e a Fig.6.45 referentes a estes mesmos dados contidos entre os segmentos \overline{AA} e \overline{BB} , conforme a Fig.6.41.

Tabela 6.31: Exemplo 6: Momento M_x nos Segmentos \overline{AA} e \overline{BB}

Segmento \overline{AA} - M_x ($\frac{kN \times cm}{cm}$)				Segmento \overline{BB} - M_x ($\frac{kN \times cm}{cm}$)			
Nós	MEC	MEF	Diferença (%)	Nós	MEC	MEF	Diferença (%)
0	0,0000	0,0000	0,00	31	0,0001	0,0000	0,00
1	0,0767	0,0748	2,53	32	0,0121	0,0120	0,88
2	0,2088	0,2083	0,24	33	0,0742	0,0755	-1,71
3	0,3849	0,3861	-0,31	34	0,2007	0,2029	-1,07
4	0,5993	0,6021	-0,48	35	0,3973	0,3994	-0,55
5	0,8331	0,8368	-0,45	36	0,6810	0,6822	-0,17
6	1,0470	1,0489	-0,19	37	1,0958	1,0945	0,12
7	1,1777	1,1737	0,34	38	1,7542	1,7505	0,21
8	1,1545	1,1445	0,87	39	2,9418	2,9921	-1,68
9	0,9519	0,9456	0,67	40	4,9781	4,7301	5,24
10	0,6439	0,6477	-0,59	41	0,0036	0,0273	-86,7
11	0,3598	0,3670	-1,96	42	0,1530	0,1396	9,64
12	0,1765	0,1792	-1,50	43	0,1220	0,1216	0,31
13	0,0867	0,0854	1,47	44	0,0603	0,0589	2,36
14	0,0513	0,0495	3,62	45	0,0367	0,0353	4,15
15	0,0424	0,0409	3,57	46	0,0603	0,0589	2,36
16	0,0513	0,0495	3,62	47	0,1220	0,1216	0,31
17	0,0867	0,0854	1,47	48	0,1530	0,1396	9,64
18	0,1765	0,1792	-1,50	49	0,0036	0,0273	-86,7
19	0,3598	0,3670	-1,96	50	4,9781	4,7301	5,24
20	0,6439	0,6477	-0,59	51	2,9418	2,9921	-1,68
21	0,9519	0,9456	0,67	52	1,7542	1,7505	0,21
22	1,1545	1,1445	0,87	53	1,0958	1,0945	0,12
23	1,1777	1,1737	0,34	54	0,6810	0,6822	-0,17
24	1,0470	1,0489	-0,19	55	0,3973	0,3994	-0,55
25	0,8331	0,8368	-0,45	56	0,2007	0,2029	-1,07
26	0,5993	0,6021	-0,48	57	0,0742	0,0755	-1,71
27	0,3849	0,3861	-0,31	58	0,0121	0,0120	0,88
28	0,2088	0,2083	0,24	59	0,0000	0,0000	0,00
29	0,0767	0,0748	2,53				
30	0,0000	0,0000	0,00				

As diferenças mais significativas entre os dois métodos encontram-se no segmento \overline{BB} e próximas da região de apoio resultantes de erros numéricos devido ao alto

gradiente de deformação localizados.

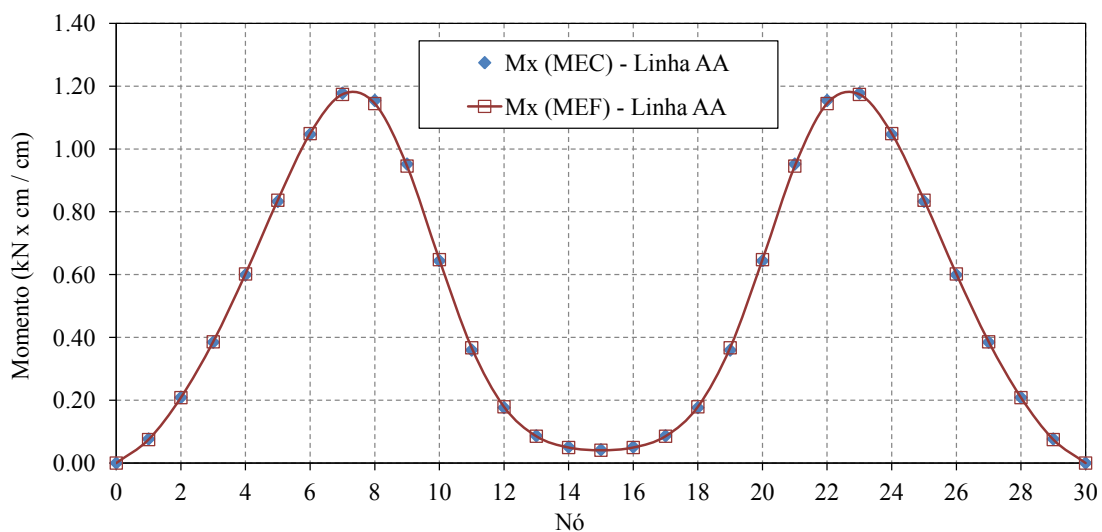


Figura 6.44: Momento M_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

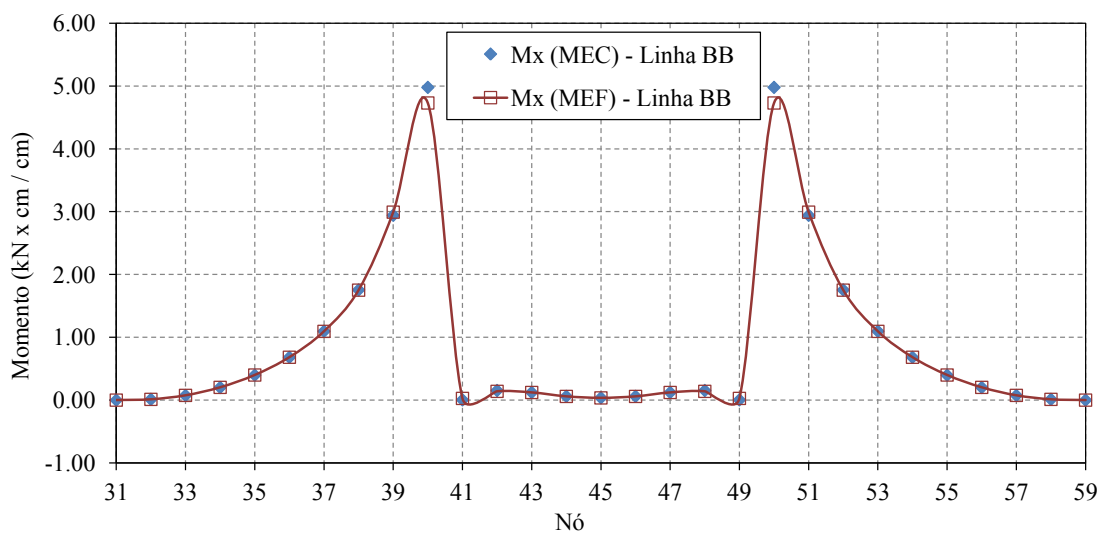


Figura 6.45: Momento M_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{BB} .

As diferenças entre os resultados obtidos pelo MEC e MEF para o momento M_y estão ilustradas na Tabela 6.32. Em seguida, são apresentadas a Fig.6.46 e a Fig.6.47 referentes a estes mesmos dados contidos entre os segmentos \overline{AA} e \overline{BB} , conforme a Fig.6.41.

Tabela 6.32: Exemplo 6: Momento M_y dos Segmentos \overline{AA} e \overline{BB}

Segmento \overline{AA} - M_y ($\frac{kN \times cm}{cm}$)				Segmento \overline{BB} - M_y ($\frac{kN \times cm}{cm}$)			
Nós	MEC	MEF	Diferença (%)	Nós	MEC	MEF	Diferença (%)
0	0,5621	0,5692	-1,2300	31	0,7719	0,7690	0,38
1	0,5562	0,5555	0,0012	32	0,7934	0,7847	1,11
2	0,5154	0,5146	0,0017	33	0,8417	0,8328	1,07
3	0,4586	0,4574	0,0027	34	0,9196	0,9106	0,99
4	0,3802	0,3782	0,0052	35	1,0340	1,0249	0,88
5	0,2784	0,2754	0,0108	36	1,1930	1,1842	0,74
6	0,1609	0,1576	0,0211	37	1,4015	1,3943	0,52
7	0,0515	0,0500	0,0288	38	1,6393	1,6396	-0,02
8	-0,0135	-0,0117	0,1517	39	1,7451	1,7685	-1,33
9	-0,0105	-0,0089	0,1844	40	0,8291	0,6101	35,90
10	0,0367	0,0353	0,0415	41	-0,0056	0,0839	-106,7
11	0,0757	0,0739	0,0248	42	0,4924	0,5199	-5,30
12	0,0809	0,0810	-0,0013	43	0,6087	0,6183	-1,55
13	0,0649	0,0653	-0,0069	44	0,6387	0,6438	-0,79
14	0,0485	0,0478	0,0160	45	0,6439	0,6477	-0,59
15	0,0424	0,0409	0,0357	46	0,6387	0,6438	-0,79
16	0,0485	0,0478	0,0160	47	0,6087	0,6183	-1,55
17	0,0649	0,0653	-0,0069	48	0,4924	0,5199	-5,30
18	0,0809	0,0810	-0,0013	49	-0,0056	0,0839	-106,7
19	0,0757	0,0739	0,0248	50	0,8291	0,6101	35,90
20	0,0367	0,0353	0,0415	51	1,7451	1,7685	-1,33
21	-0,0105	-0,0089	0,1844	52	1,6393	1,6396	-0,02
22	-0,0135	-0,0117	0,1517	53	1,4015	1,3943	0,52
23	0,0515	0,0500	0,0288	54	1,1930	1,1842	0,74
24	0,1609	0,1576	0,0211	55	1,0340	1,0249	0,88
25	0,2784	0,2754	0,0108	56	0,9196	0,9106	0,99
26	0,3802	0,3782	0,0052	57	0,8417	0,8328	1,07
27	0,4586	0,4574	0,0027	58	0,7934	0,7847	1,11
28	0,5154	0,5146	0,0017	59	0,7719	0,7690	0,38
29	0,5562	0,5555	0,0012				
30	0,5621	0,5692	-1,2300				

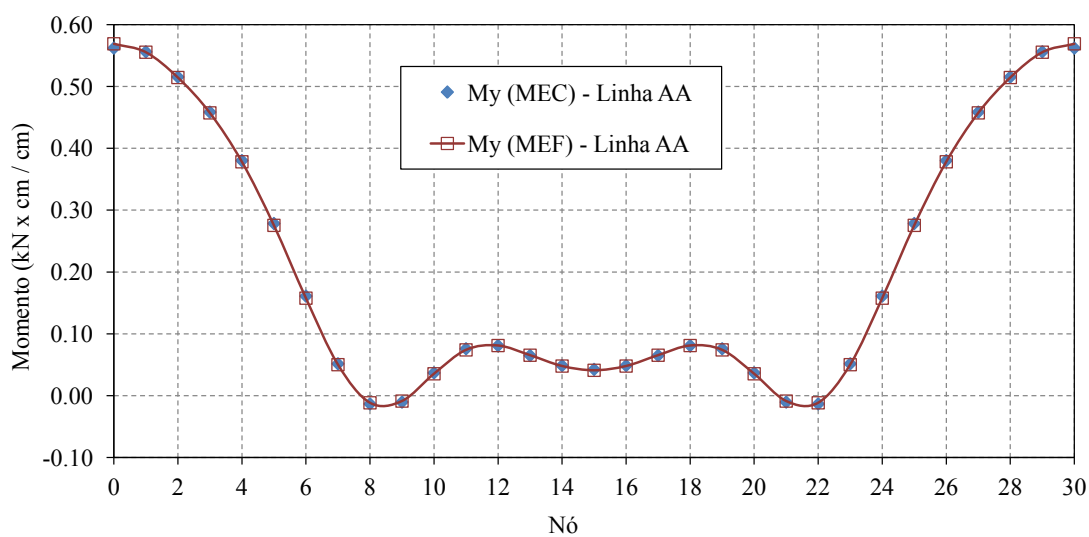


Figura 6.46: Momento M_y obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

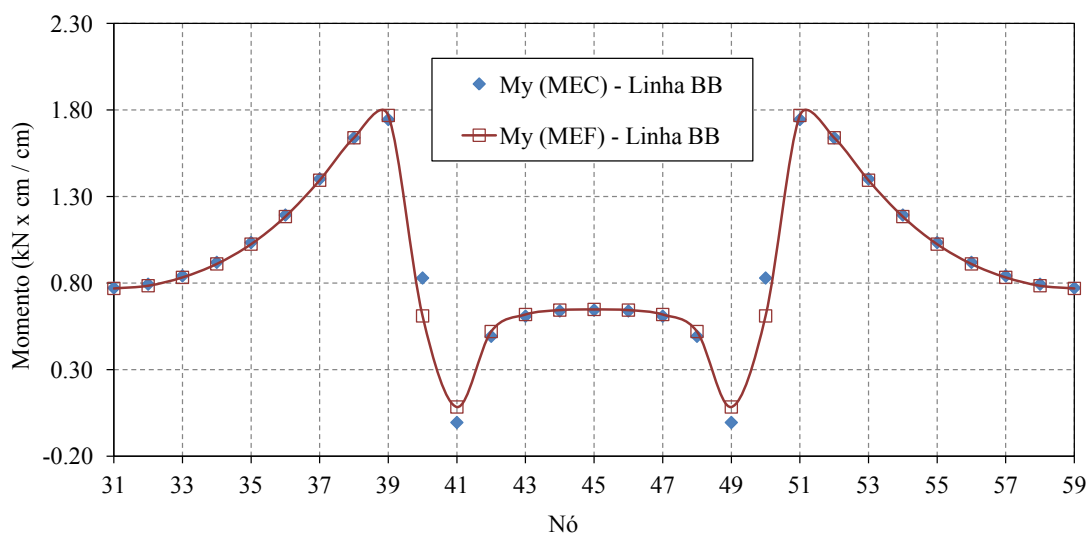


Figura 6.47: Momento M_y obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{BB} .

As diferenças entre os resultados obtidos pelo MEC e MEF para o esforço cortante Q_x estão ilustradas na Tabela 6.33. Em seguida, são apresentadas a Fig.6.48 e a Fig.6.49 referentes a estes mesmos dados contidos entre os segmentos \overline{AA} e \overline{BB} , conforme a Fig.6.41.

Tabela 6.33: Exemplo 6: Esforço Cortante Q_x dos Segmentos \overline{AA} e \overline{BB}

Segmento \overline{AA} - Q_x ($\frac{kN}{cm}$)				Segmento \overline{BB} - Q_x ($\frac{kN}{cm}$)			
Nós	MEC	MEF	Diferença (%)	Nós	MEC	MEF	Diferença (%)
0	0,0000	0,0026	-	31	0,0000	0,0010	-
1	0,0063	0,0065	-1,71	32	0,0057	0,0058	-1,64
2	0,0091	0,0093	-1,50	33	0,0134	0,0134	-0,50
3	0,0112	0,0113	-1,30	34	0,0218	0,0218	0,05
4	0,0119	0,0120	-0,98	35	0,0318	0,0317	0,37
5	0,0103	0,0103	-0,10	36	0,0448	0,0445	0,55
6	0,0056	0,0054	3,42	37	0,0634	0,0631	0,47
7	-0,0025	-0,0028	-11,2	38	0,0925	0,0933	-0,83
8	-0,0127	-0,0127	-0,54	39	0,1298	0,1403	-7,51
9	-0,0208	-0,0204	1,87	40	0,1190	0,0942	26,4
10	-0,0227	-0,0224	1,54	41	0,0667	0,0305	118,9
11	-0,0185	-0,0186	-0,57	42	0,0203	0,0193	5,19
12	-0,0120	-0,0123	-2,53	43	-0,0012	-0,0024	-52,2
13	-0,0064	-0,0066	-2,74	44	-0,0029	-0,0033	-11,5
14	-0,0027	-0,0027	-1,40	45	0,0000	0,0000	0,00
15	0,0000	0,0000	0,00	46	0,0029	0,0033	-11,5
16	0,0027	0,0027	-1,40	47	0,0012	0,0024	-52,2
17	0,0064	0,0066	-2,74	48	-0,0203	-0,0193	5,19
18	0,0120	0,0123	-2,53	49	-0,0667	-0,0305	118,9
19	0,0185	0,0186	-0,57	50	-0,1190	-0,0942	0,00
20	0,0227	0,0224	1,54	51	-0,1298	-0,1403	-7,51
21	0,0208	0,0204	1,87	52	-0,0925	-0,0933	-0,83
22	0,0127	0,0127	-0,54	53	-0,0634	-0,0631	0,47
23	0,0025	0,0028	-11,2	54	-0,0448	-0,0445	0,55
24	-0,0056	-0,0054	3,42	55	-0,0318	-0,0317	0,37
25	-0,0103	-0,0103	-0,10	56	-0,0218	-0,0218	0,05
26	-0,0119	-0,0120	-0,98	57	-0,0134	-0,0134	-0,50
27	-0,0112	-0,0113	-1,30	58	-0,0057	-0,0058	-1,64
28	-0,0091	-0,0093	-1,50	59	0,0000	-0,0010	-
29	-0,0063	-0,0065	-1,71				
30	0,0000	-0,0026	-				

As diferenças mais significativas entre os dois métodos encontram-se no segmento \overline{BB} e próximas da região de apoio. Tais diferenças já eram esperadas.

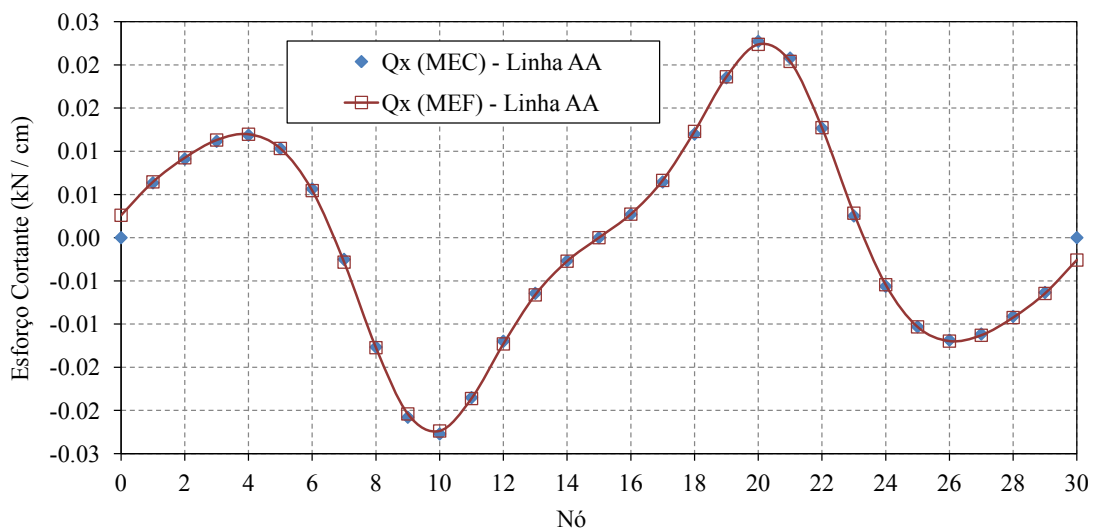


Figura 6.48: Esforço Cortante Q_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

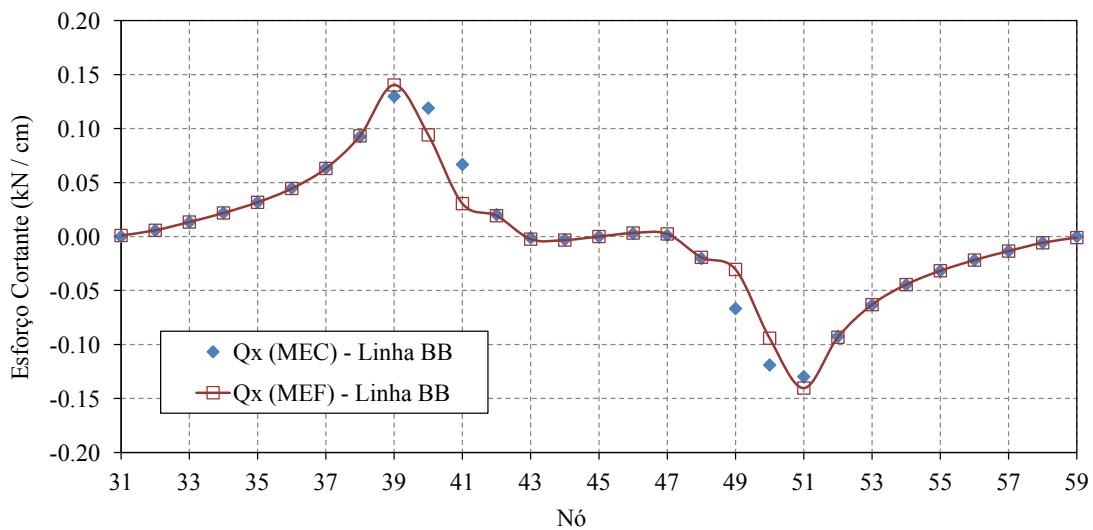


Figura 6.49: Esforço Cortante Q_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{BB} .

Devido às diferenças mais significativas estarem na região próxima ao apoio, vários pontos internos foram adicionados nesta área para análise dos momentos, M_x e M_y , conforme Fig.6.50.

Os resultados da Tabela 6.34 indicam que estas diferenças estão localizadas somente na região próxima ao contorno do apoio interno (pilar).

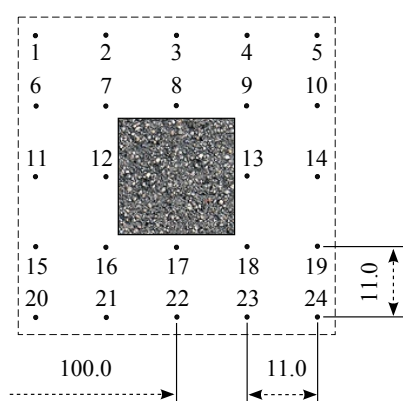


Figura 6.50: Análise dos Momentos M_x e M_y próximo ao apoio.

Tabela 6.34: Exemplo 6: Valores obtidos para os Momentos, M_x e M_y .

Nó	MEC ($\frac{kN \times cm}{cm}$)		MEF ($\frac{kN \times cm}{cm}$)		Erro (%)	
	M_x	M_y	M_x	M_y	M_x	M_y
1	1,675	0,375	1,675	0,375	0,05	0,15
2	1,394	0,247	1,394	0,249	0,04	0,11
3	0,533	0,158	0,535	0,159	-0,35	-0,13
4	0,099	0,090	0,100	0,090	-0,92	-0,42
5	0,081	0,081	0,081	0,081	-0,29	-0,29
6	2,220	0,967	2,219	0,966	0,05	0,10
7	2,946	1,068	3,070	1,009	-4,06	5,87
8	0,082	-0,017	0,080	-0,013	2,34	28,73
9	-0,316	-0,316	-0,324	-0,324	-2,60	-2,60
10	0,090	0,099	0,090	0,100	-0,42	-0,92
11	2,642	1,768	2,641	1,766	0,06	0,10
12	4,736	1,037	4,737	1,029	-0,02	0,87
13	-0,017	0,082	-0,013	0,080	28,73	2,34
14	0,158	0,533	0,159	0,535	-0,13	-0,35
15	2,490	2,510	2,486	2,503	0,16	0,29
16	5,395	5,395	5,481	5,481	-1,56	-1,56
17	1,037	4,736	1,029	4,737	0,87	-0,02
18	1,068	2,946	1,009	3,070	5,87	-4,06
19	0,247	1,394	0,247	1,394	0,11	0,04
20	2,034	2,034	2,031	2,031	0,14	0,14
21	2,510	2,490	2,503	2,486	0,29	0,16
22	1,768	2,642	1,766	2,641	0,10	0,06
23	0,967	2,220	0,966	2,219	0,10	0,05
24	0,375	1,675	0,375	1,675	0,15	0,05

Uma segunda análise deste problema foi feita, porém alterando as dimensões dos apoios internos para $1,0\text{cm} \times 1,0\text{cm}$.

A discretização utilizada nas análises posteriores desta laje lisa considerando os apoios *pontuais* está apresentada com mais detalhes na Tabela 6.35.

Tabela 6.35: Exemplo 6: Detalhes da Discretização da Laje Lisa com Apoio Pontual

Programa	Elemento	Graus de liberdade por nó	Distância entre nós	Total de Elementos
<i>Abaqus</i>	<i>S4R</i>	u_x, u_y, u_z r_x, r_y, r_z	$0,5\text{ cm} \times 0,5\text{ cm}$	360.000
INSANE	<i>BL3</i>	ϕ_n, ϕ_s, w	9,375 cm 0,125 cm	64 (contorno) 16 (cada apoio)

A discretização utilizada pelo programa INSANE (MEC) para apoios pontuais está apresentada na Fig.6.51.

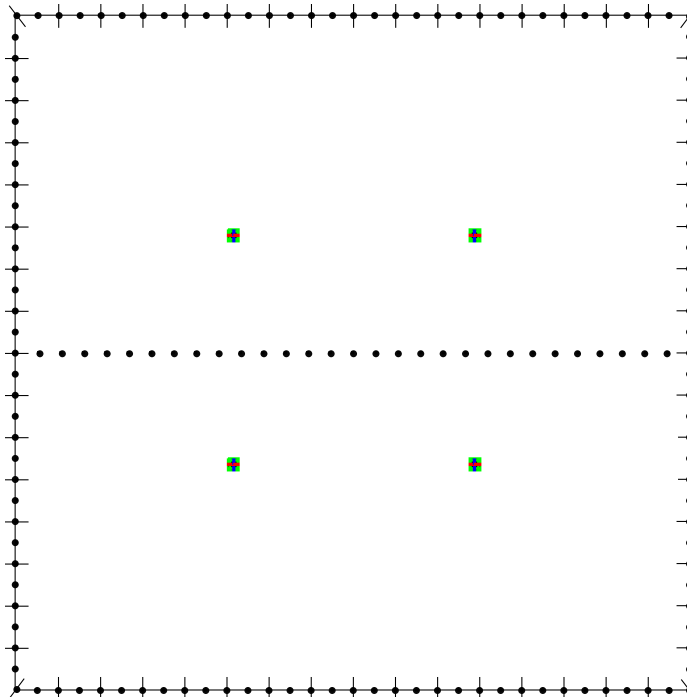


Figura 6.51: Discretização da Placa com Quatro Apoios Internos (MEC).

Os resultados obtidos para o deslocamento transversal (w), por meio do MEC e MEF, estão apresentados na Tabela 6.36. Posteriormente, estes mesmos dados são ilustrados na Fig.6.52 contidos entre o segmento \overline{AA} , visto esquematicamente na Fig.6.41.

Tabela 6.36: Exemplo 6: Deslocamento Transversal obtido no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC w (<i>cm</i>)	MEF w (<i>cm</i>)	Diferença %	Nó	MEC w (<i>cm</i>)	MEF w (<i>cm</i>)	Diferença %
0	-0,0514	-0,0513	0,00	16	0,0110	0,0110	0,50
1	-0,0451	-0,0450	0,18	17	0,0102	0,0102	0,51
2	-0,0388	-0,0387	0,17	18	0,0089	0,0089	0,53
3	-0,0323	-0,0323	0,16	19	0,0069	0,0069	0,58
4	-0,0260	-0,0259	0,15	20	0,0042	0,0042	0,73
5	-0,0198	-0,0197	0,13	21	0,0008	0,0008	2,68
6	-0,0138	-0,0138	0,10	22	-0,0034	-0,0034	-0,30
7	-0,0083	-0,0083	0,02	23	-0,0083	-0,0083	0,02
8	-0,0034	-0,0034	-0,30	24	-0,0138	-0,0138	0,10
9	0,0008	0,0008	2,68	25	-0,0198	-0,0197	0,13
10	0,0042	0,0042	0,73	26	-0,0260	-0,0259	0,15
11	0,0069	0,0069	0,58	27	-0,0323	-0,0323	0,16
12	0,0089	0,0089	0,53	28	-0,0388	-0,0387	0,17
13	0,0102	0,0102	0,51	29	-0,0451	-0,0450	0,18
14	0,0110	0,0110	0,50	30	-0,0514	-0,0513	0,18
15	0,0113	0,0112	0,50				

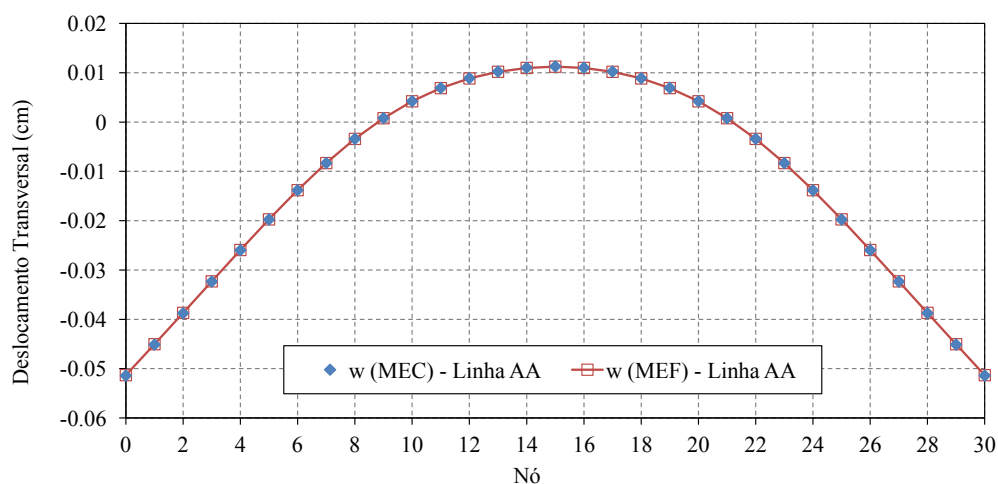


Figura 6.52: Deslocamento Transversal obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

A Tabela 6.37 apresenta os resultados obtidos para o momento M_x por meio do MEC e MEF. Posteriormente, a Figura 6.53 é apresentada referente a estes mesmos dados contidos entre o segmento \overline{AA} , visto esquematicamente na Fig.6.41.

Tabela 6.37: Exemplo 6: Momento M_x obtido no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC M_x $\frac{kN \times cm}{cm}$	MEF M_x $\frac{kN \times cm}{cm}$	Diferença %	Nó	MEC M_x $\frac{kN \times cm}{cm}$	MEF M_x $\frac{kN \times cm}{cm}$	Diferença %
0	0,000	0,000	0,00	16	1,307	1,302	0,41
1	0,045	0,038	18,78	17	1,385	1,380	0,38
2	0,142	0,137	4,14	18	1,504	1,499	0,33
3	0,299	0,295	1,46	19	1,642	1,638	0,27
4	0,517	0,514	0,64	20	1,751	1,747	0,22
5	0,788	0,786	0,33	21	1,764	1,761	0,18
6	1,095	1,093	0,20	22	1,641	1,638	0,16
7	1,398	1,396	0,16	23	1,398	1,396	0,16
8	1,641	1,638	0,16	24	1,095	1,093	0,20
9	1,764	1,761	0,18	25	0,788	0,786	0,33
10	1,751	1,747	0,22	26	0,517	0,514	0,64
11	1,642	1,638	0,27	27	0,299	0,295	1,46
12	1,504	1,499	0,33	28	0,142	0,137	4,14
13	1,385	1,380	0,38	29	0,045	0,038	18,78
14	1,307	1,302	0,41	30	0,000	0,000	0,00
15	1,280	1,275	0,43				

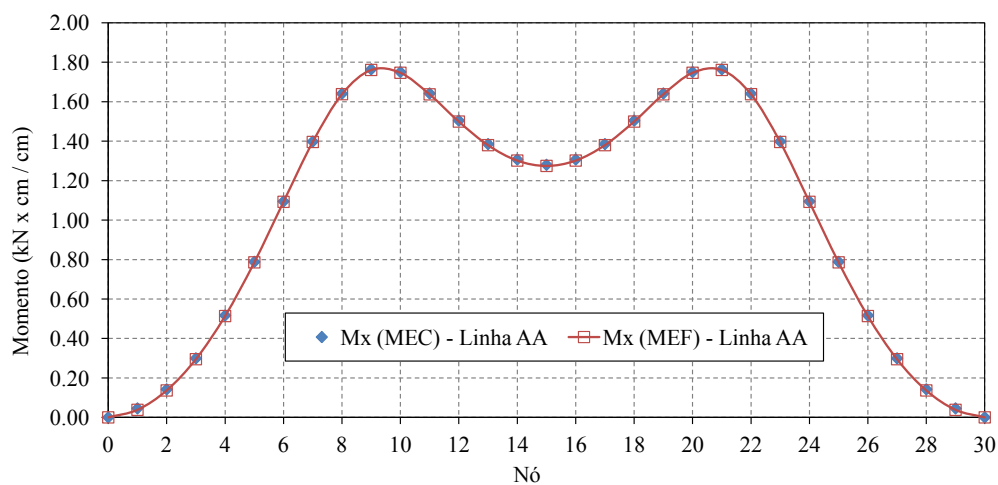


Figura 6.53: Momento M_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

A Tabela 6.38 apresenta os resultados obtidos para o momento M_y por meio do MEC e MEF. Posteriormente, a Figura 6.54 é apresentada referente a estes mesmos dados contidos entre o segmento \overline{AA} , visto esquematicamente na Fig.6.41.

Tabela 6.38: Exemplo 6: Momento M_y obtido no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC M_y $\frac{kN \times cm}{cm}$	MEF M_y $\frac{kN \times cm}{cm}$	Diferença %	Nó	MEC M_y $\frac{kN \times cm}{cm}$	MEF M_y $\frac{kN \times cm}{cm}$	Diferença %
0	1,264	1,256	0,65	16	1,268	1,262	0,44
1	1,268	1,257	0,88	17	1,230	1,225	0,46
2	1,266	1,255	0,88	18	1,171	1,165	0,51
3	1,259	1,249	0,87	19	1,097	1,091	0,59
4	1,242	1,231	0,86	20	1,030	1,023	0,68
5	1,207	1,197	0,85	21	0,999	0,991	0,77
6	1,151	1,142	0,85	22	1,022	1,013	0,83
7	1,083	1,073	0,84	23	1,083	1,073	0,84
8	1,022	1,013	0,83	24	1,151	1,142	0,85
9	0,999	0,991	0,77	25	1,207	1,197	0,85
10	1,030	1,023	0,68	26	1,242	1,231	0,86
11	1,097	1,091	0,59	27	1,259	1,249	0,87
12	1,171	1,165	0,51	28	1,266	1,255	0,88
13	1,230	1,225	0,46	29	1,268	1,257	0,88
14	1,268	1,262	0,44	30	1,264	1,256	0,65
15	1,280	1,275	0,43				

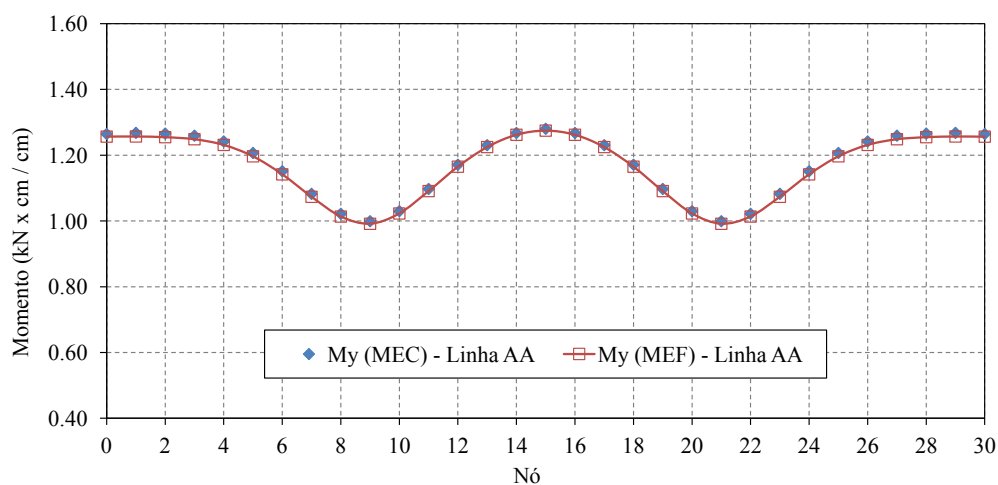


Figura 6.54: Momento M_y obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

6.8 Laje Lisa

Uma laje apoiada por pilares e submetida a um carregamento uniformemente distribuído igual a $10kN/m^2$ está ilustrada na Fig.6.55. Esta laje é composta por um material cujas propriedades mecânicas são: módulo de elasticidade igual a $2,0 \times 10^7 kN/m^2$, coeficiente de Poisson igual a 0,2 e espessura constante igual a 20cm.

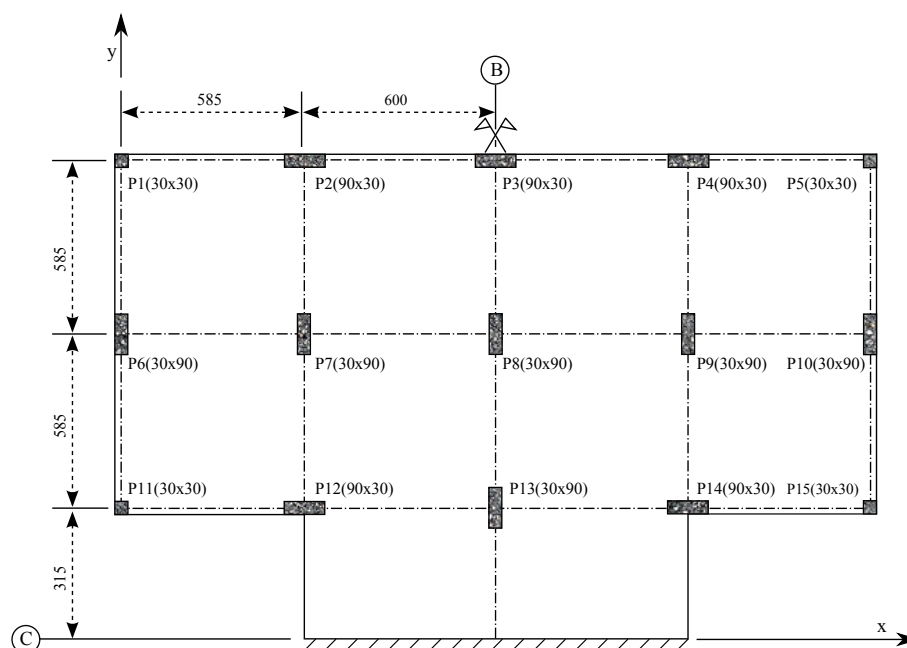


Figura 6.55: Dimensão da Laje Lisa.

Quanto às condições de contorno, considerou-se os pilares restringindo as rotações, normal e tangencial ao contorno, e deslocamento vertical no contato com a laje. Ao longo do eixo C , engastou-se todo o bordo, impedindo qualquer movimento do mesmo. No eixo de simetria B , restringiu-se a rotação ϕ_x .

Foi realizado um estudo de convergência da flecha com base em discretizações refinadas sucessivamente para o MEC, por meio da divisão de cada elemento ao meio, a partir de uma malha inicial composta de 105 elementos quadráticos (210 nós). Através da convergência observada na Fig.6.56, adotou-se a discretização contendo 99 elementos quadráticos para o contorno externo (198 nós) e 6 elementos quadráticos para o contorno do apoio (12 nós), conforme Fig.6.57.

Apesar da aparente simplicidade da geometria da laje, evitou-se qualquer simplificação na discretização feita pelo MEF (*Abaqus*) e adotou-se arbitrariamente elementos de dimensão $1,0\text{cm} \times 1,0\text{cm}$. O elemento finito usado na discretização da placa foi o *S4R* por representar as características necessárias ao problema proposto. Este elemento possui as mesmas propriedades que o *S8R*, abordado com mais detalhes no item 6.6, porém a função aproximadora do *S4R* é linear.

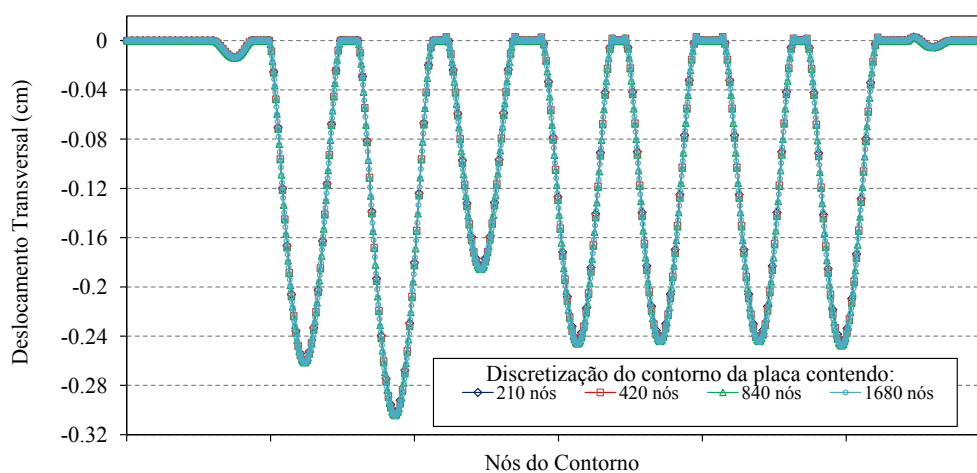


Figura 6.56: Estudo de convergência pelo MEC.

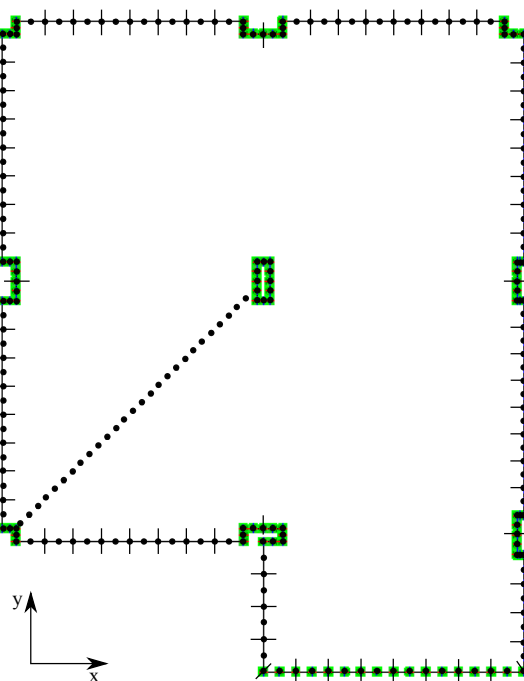


Figura 6.57: Discretização da Laje Lisa pelo MEC.

As comparações realizadas através dos resultados obtidos pelo MEC e MEF são baseadas nos pontos internos mostrados na Fig.6.58.

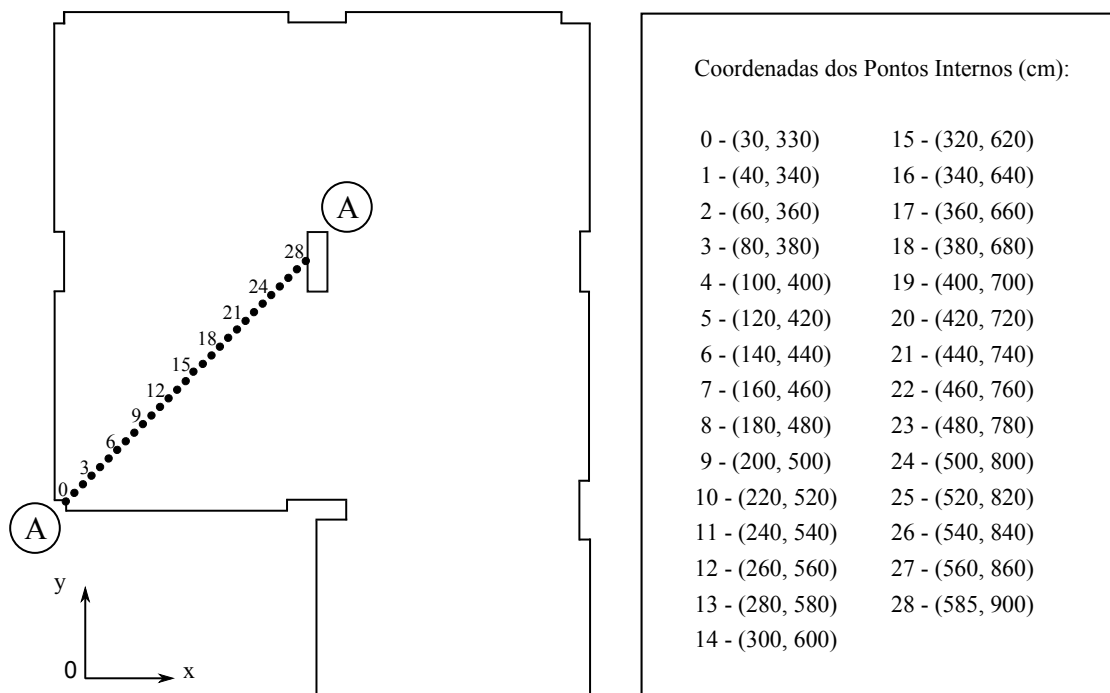


Figura 6.58: Pontos Internos

A discretização utilizada nas análises posteriores são apresentadas com mais detalhes na Tabela 6.39.

Tabela 6.39: Exemplo 7: Detalhes da Discretização da Laje Lisa

Programa	Elemento	Graus de liberdade por nó	Distância entre nós	Total de Elementos
<i>Abaqus</i>	<i>S4R</i>	u_x, u_y, u_z r_x, r_y, r_z	1,0 cm × 1,0 cm	64.800
INSANE	<i>BL3</i>	ϕ_n, ϕ_s, w	≈ 30,0 cm	99 (contorno) 6 (apoio)

Os resultados obtidos para o deslocamento transversal (w), por meio do MEC e MEF, estão apresentados na Tabela 6.40. Posteriormente, estes mesmos dados são ilustrados na Fig.6.59 contidos entre o segmento \overline{AA} , de acordo com a Fig.6.58.

Tabela 6.40: Exemplo 7: Deslocamento Transversal, w , obtido no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC w (cm)	MEF w (cm)	Diferença %	Nó	MEC w (cm)	MEF w (cm)	Diferença %
0	0,0000	0,0000	0,00	15	-0,4787	-0,4822	-0,72
1	-0,0153	-0,0166	-7,58	16	-0,4666	-0,4699	-0,72
2	-0,0624	-0,0647	-3,62	17	-0,4483	-0,4515	-0,72
3	-0,1201	-0,1231	-2,44	18	-0,4238	-0,4269	-0,74
4	-0,1803	-0,1837	-1,87	19	-0,3931	-0,3961	-0,76
5	-0,2387	-0,2424	-1,53	20	-0,3563	-0,3592	-0,81
6	-0,2927	-0,2966	-1,31	21	-0,3138	-0,3165	-0,87
7	-0,3408	-0,3448	-1,15	22	-0,2660	-0,2685	-0,96
8	-0,3823	-0,3863	-1,04	23	-0,2140	-0,2163	-1,10
9	-0,4167	-0,4207	-0,95	24	-0,1594	-0,1616	-1,32
10	-0,4440	-0,4480	-0,88	25	-0,1050	-0,1068	-1,72
11	-0,4642	-0,4681	-0,83	26	-0,0548	-0,0563	-2,66
12	-0,4776	-0,4814	-0,79	27	-0,0160	-0,0171	-6,32
13	-0,4843	-0,4880	-0,75	28	0,0000	0,0000	0,00
14	-0,4847	-0,4882	-0,73				

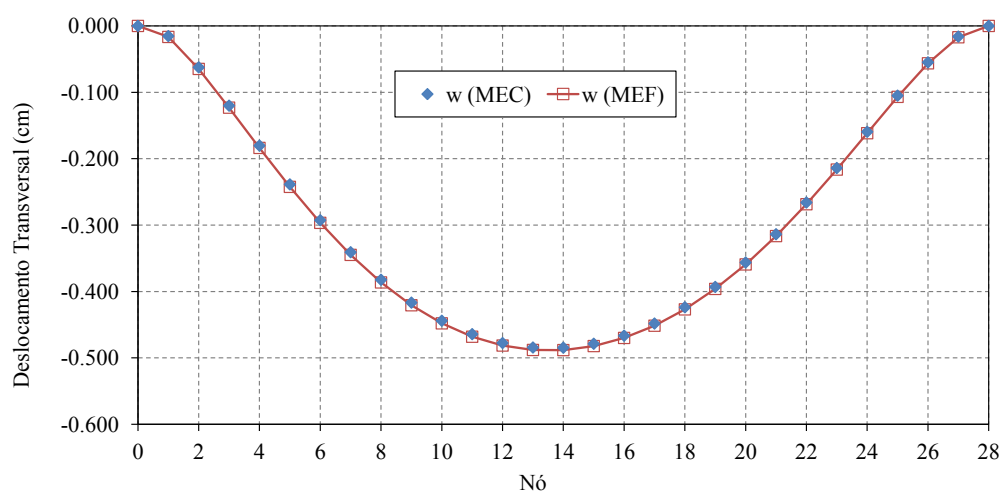


Figura 6.59: Deslocamento Transversal obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

A Tabela 6.41 apresenta os resultados obtidos para a rotação ϕ_x por meio do MEC e MEF. Em seguida, a Figura 6.60 é apresentada referente a estes mesmos dados contidos entre o segmento \overline{AA} , visto esquematicamente na Fig.6.58.

Tabela 6.41: Exemplo 7: Rotação ϕ_x obtida no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC ϕ_x (rad)	MEF ϕ_x (rad)	Diferença %	Nó	MEC ϕ_x (rad)	MEF ϕ_x (rad)	Diferença %
0	0,00000	0,00000	0,00	15	-0,00025	-0,00025	-0,31
1	0,00081	0,00082	-1,56	16	-0,00041	-0,00041	0,10
2	0,00132	0,00133	-1,43	17	-0,00058	-0,00058	0,31
3	0,00148	0,00149	-0,82	18	-0,00074	-0,00074	0,43
4	0,00148	0,00149	-0,50	19	-0,00091	-0,00090	0,50
5	0,00141	0,00141	-0,28	20	-0,00107	-0,00106	0,53
6	0,00128	0,00128	-0,12	21	-0,00122	-0,00122	0,53
7	0,00112	0,00112	0,02	22	-0,00136	-0,00135	0,50
8	0,00095	0,00095	0,16	23	-0,00146	-0,00146	0,43
9	0,00077	0,00077	0,31	24	-0,00152	-0,00151	0,32
10	0,00059	0,00059	0,49	25	-0,00150	-0,00149	0,13
11	0,00041	0,00041	0,74	26	-0,00134	-0,00135	-0,23
12	0,00024	0,00024	1,23	27	-0,00093	-0,00095	-1,92
13	0,00007	0,00007	3,52	28	0,00000	0,00000	0,00
14	-0,00009	-0,00009	-1,90				

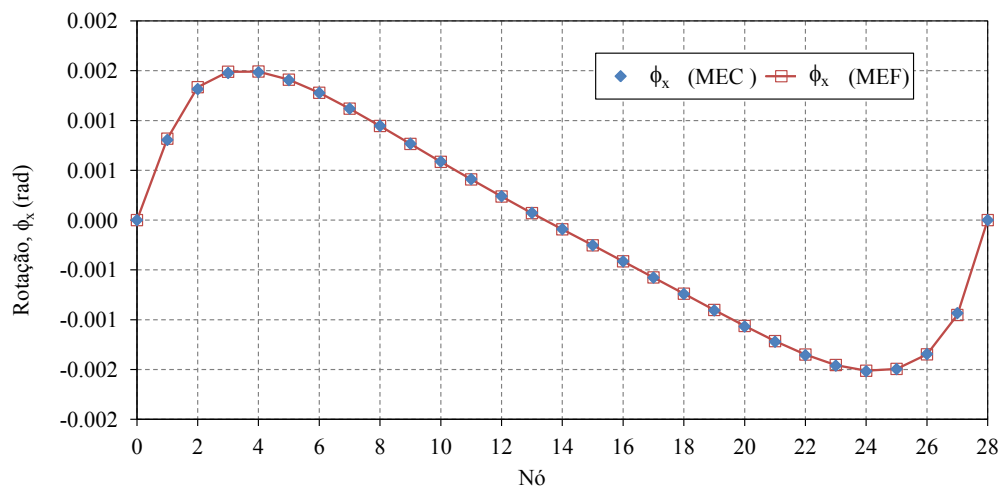


Figura 6.60: Rotação ϕ_x obtida pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

A Tabela 6.42 apresenta os resultados obtidos para a rotação ϕ_y por meio do MEC e MEF. Em seguida, a Figura 6.61 é apresentada referente a estes mesmos dados contidos entre o segmento \overline{AA} , visto esquematicamente na Fig.6.58.

Tabela 6.42: Exemplo 7: Rotação ϕ_y obtida no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC ϕ_y (rad)	MEF ϕ_y (rad)	Diferença %	Nó	MEC ϕ_y (rad)	MEF ϕ_y (rad)	Diferença %
0	0,00000	0,00000	0,00	15	-0,00020	-0,00020	2,30
1	0,00080	0,00082	1,71	16	-0,00034	-0,00035	1,68
2	0,00131	0,00133	1,59	17	-0,00049	-0,00049	1,47
3	0,00147	0,00148	1,01	18	-0,00063	-0,00064	1,39
4	0,00148	0,00149	0,72	19	-0,00077	-0,00078	1,37
5	0,00140	0,00140	0,54	20	-0,00090	-0,00092	1,38
6	0,00127	0,00127	0,42	21	-0,00103	-0,00104	1,41
7	0,00111	0,00112	0,32	22	-0,00113	-0,00114	1,45
8	0,00094	0,00095	0,23	23	-0,00119	-0,00121	1,50
9	0,00077	0,00077	0,13	24	-0,00120	-0,00122	1,56
10	0,00059	0,00059	0,00	25	-0,00111	-0,00113	1,65
11	0,00042	0,00042	-0,22	26	-0,00089	-0,00091	1,93
12	0,00026	0,00026	-0,69	27	-0,00046	-0,00048	3,86
13	0,00010	0,00010	-2,64	28	0,00000	0,00000	0,00
14	0,00005	0,00005	6,88				

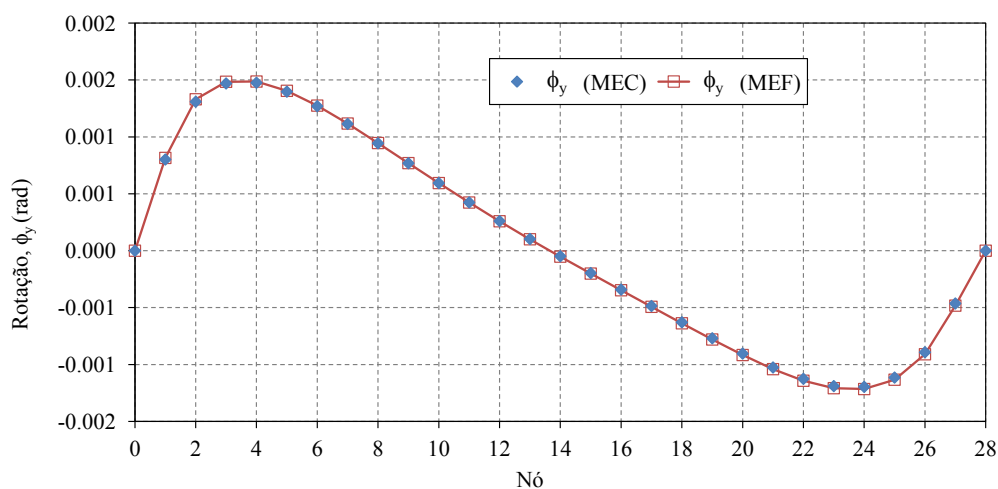


Figura 6.61: Rotação ϕ_y obtida pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

As diferenças entre os resultados obtidos pelo MEC e MEF para o momento M_x estão ilustradas na Tabela 6.43. Em seguida, os respectivos resultados são apresentados na Fig.6.62 referente aos dados contidos entre o segmento \overline{AA} .

Tabela 6.43: Exemplo 7: Momento M_x obtido no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC M_x ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	MEF M_x ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	Diferença %	Nó	MEC M_x ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	MEF M_x ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	Diferença %
1	42,18	42,67	-1,15	15	-13,64	-13,55	0,69
2	17,63	17,37	1,51	16	-12,99	-12,87	0,94
3	7,06	6,85	3,12	17	-12,08	-11,93	1,24
4	0,58	0,41	42,27	18	-10,86	-10,69	1,62
5	-3,89	-4,03	-3,49	19	-9,29	-9,09	2,17
6	-7,13	-7,25	-1,55	20	-7,27	-7,05	3,09
7	-9,53	-9,62	-0,92	21	-4,71	-4,47	5,20
8	-11,30	-11,37	-0,59	22	-1,47	-1,23	19,46
9	-12,57	-12,62	-0,37	23	2,62	2,85	-8,19
10	-13,44	-13,47	-0,19	24	7,82	8,03	-2,52
11	-13,99	-13,99	-0,03	25	14,61	14,73	-0,81
12	-14,25	-14,23	0,12	26	24,11	24,00	0,49
13	-14,27	-14,23	0,29	27	41,14	39,57	3,96
14	-14,06	-14,00	0,48				

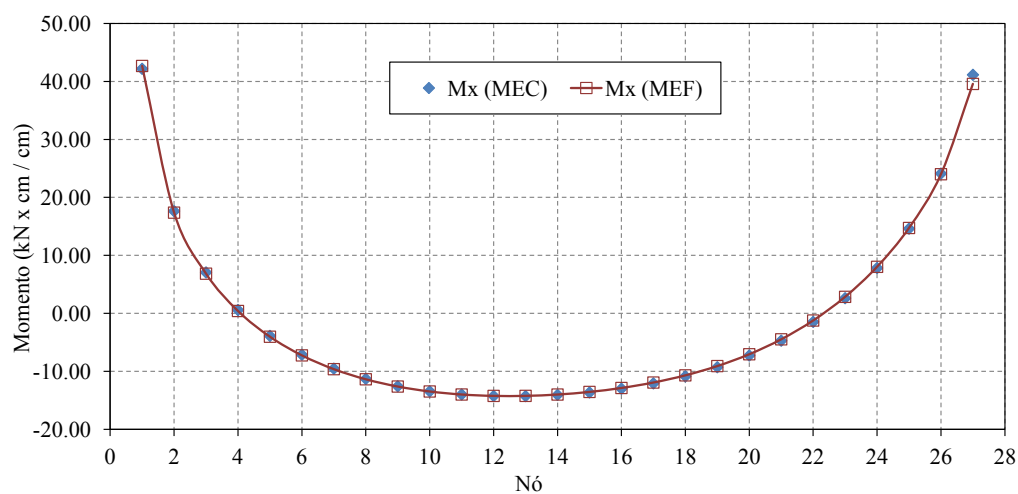


Figura 6.62: Momento M_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

As diferenças entre os resultados obtidos pelo MEC e MEF para o momento, M_y , estão ilustradas na Tabela 6.44. Em seguida, os respectivos resultados são apresentados na Fig.6.63 referente aos dados contidos entre o segmento \overline{AA} .

Tabela 6.44: Exemplo 7: Momento M_y obtido no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC M_y ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	MEF M_y ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	Diferença %	Nó	MEC M_y ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	MEF M_y ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	Diferença %
1	41,99	42,55	-1,30	15	-12,80	-12,83	-0,23
2	17,51	17,30	1,25	16	-12,01	-12,03	-0,19
3	7,00	6,82	2,65	17	-10,95	-10,97	-0,12
4	0,57	0,42	35,90	18	-9,59	-9,59	0,00
5	-3,85	-3,98	-3,21	19	-7,85	-7,83	0,26
6	-7,05	-7,16	-1,51	20	-5,66	-5,61	0,88
7	-9,40	-9,49	-0,97	21	-2,89	-2,80	3,22
8	-11,11	-11,19	-0,71	22	0,62	0,77	-18,71
9	-12,32	-12,39	-0,55	23	5,09	5,30	-3,99
10	-13,13	-13,19	-0,45	24	10,84	11,13	-2,59
11	-13,59	-13,64	-0,38	25	18,35	18,69	-1,84
12	-13,76	-13,80	-0,33	26	27,94	28,16	-0,78
13	-13,67	-13,71	-0,30	27	35,07	34,63	1,27
14	-13,35	-13,38	-0,26				

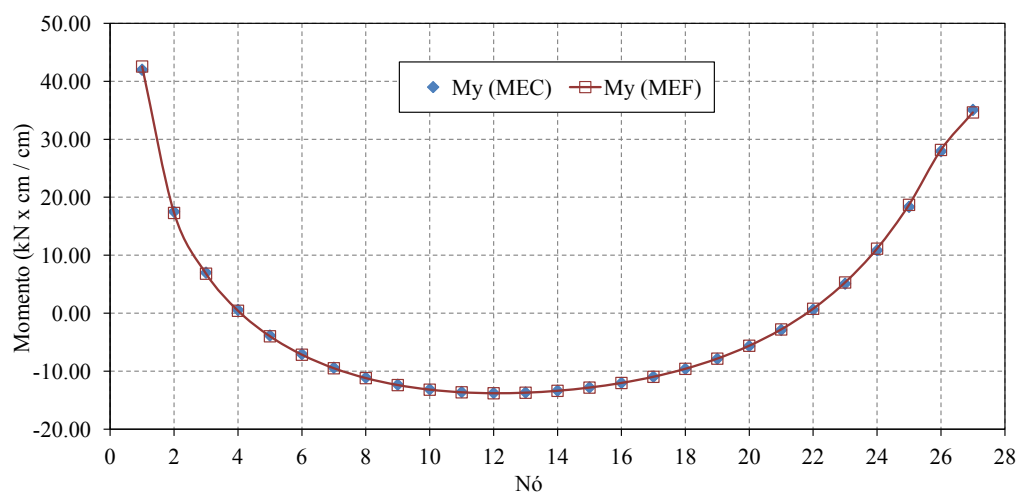


Figura 6.63: Momento M_y obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

Os resultados obtidos para o esforço cortante Q_x , por meio do MEC e MEF, estão apresentados na Tabela 6.45. Posteriormente, estes mesmos dados são ilustrados na Fig.6.64 contidos entre o segmento \overline{AA} , de acordo com a Fig.6.58.

Tabela 6.45: Exemplo 7: Esforço Cortante Q_x obtido no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC $\frac{Q_x}{cm}$ (kN)	MEF $\frac{Q_x}{cm}$ (kN)	Diferença %	Nó	MEC $\frac{Q_x}{cm}$ (kN)	MEF $\frac{Q_x}{cm}$ (kN)	Diferença %
1	-1,8057	-1,9197	-5,94	15	0,0259	0,0269	-3,82
2	-0,5918	-0,5925	-0,12	16	0,0366	0,0377	-2,94
3	-0,3303	-0,3292	0,32	17	0,0490	0,0502	-2,41
4	-0,2192	-0,2181	0,52	18	0,0639	0,0652	-2,06
5	-0,1564	-0,1553	0,68	19	0,0822	0,0837	-1,83
6	-0,1149	-0,1140	0,82	20	0,1051	0,1069	-1,68
7	-0,0848	-0,0839	1,01	21	0,1344	0,1366	-1,59
8	-0,0616	-0,0608	1,31	22	0,1727	0,1754	-1,54
9	-0,0429	-0,0422	1,84	23	0,2249	0,2283	-1,49
10	-0,0276	-0,0269	2,90	24	0,3013	0,3054	-1,35
11	-0,0147	-0,0139	5,78	25	0,4261	0,4297	-0,84
12	-0,0036	-0,0027	30,86	26	0,6693	0,6606	1,32
13	0,0065	0,0074	-12,20	27	1,1665	1,0173	14,67
14	0,0161	0,0170	-5,63				

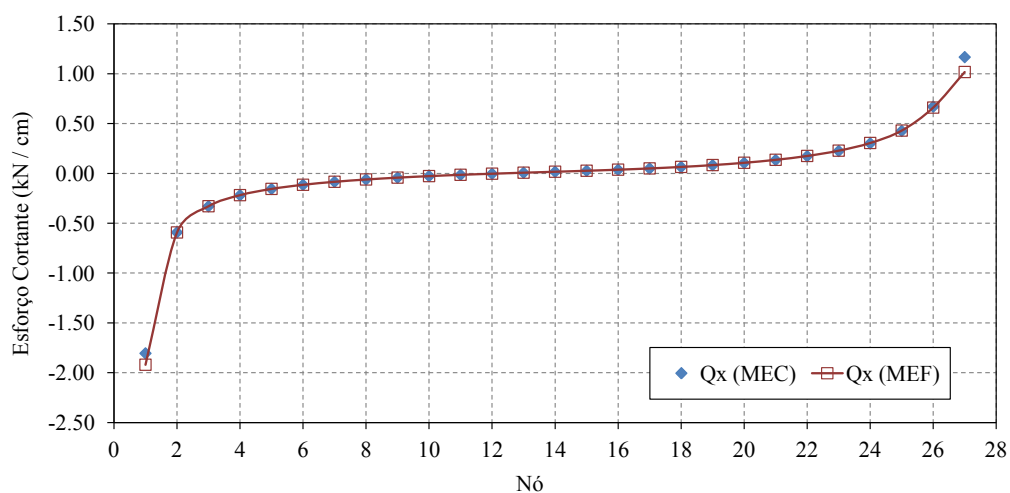


Figura 6.64: Esforço Cortante Q_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

Os resultados obtidos para o esforço cortante Q_y , por meio do MEC e MEF, estão apresentados na Tabela 6.46. Posteriormente, estes mesmos dados são ilustrados na Fig.6.65 contidos entre o segmento \overline{AA} , de acordo com a Fig.6.58.

Tabela 6.46: Exemplo 7: Esforço Cortante Q_y obtido no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC $\frac{Q_y}{cm}$ (kN)	MEF $\frac{Q_y}{cm}$ (kN)	Diferença %	Nó	MEC $\frac{Q_y}{cm}$ (kN)	MEF $\frac{Q_y}{cm}$ (kN)	Diferença %
1	-1,8123	-1,9244	-5,82	15	0,0242	0,0246	-1,42
2	-0,5936	-0,5937	-0,02	16	0,0339	0,0343	-1,08
3	-0,3309	-0,3296	0,38	17	0,0449	0,0453	-0,88
4	-0,2193	-0,2181	0,53	18	0,0578	0,0582	-0,73
5	-0,1562	-0,1553	0,63	19	0,0732	0,0737	-0,60
6	-0,1146	-0,1138	0,69	20	0,0920	0,0925	-0,46
7	-0,0844	-0,0838	0,76	21	0,1149	0,1152	-0,26
8	-0,0612	-0,0607	0,87	22	0,1428	0,1428	0,02
9	-0,0426	-0,0421	1,07	23	0,1767	0,1759	0,49
10	-0,0273	-0,0269	1,47	24	0,2166	0,2137	1,35
11	-0,0146	-0,0142	2,55	25	0,2569	0,2487	3,29
12	-0,0036	-0,0033	10,52	26	0,2523	0,2279	10,71
13	0,0061	0,0064	-5,22	27	-0,2003	-0,2157	-7,15
14	0,0152	0,0155	-2,18				

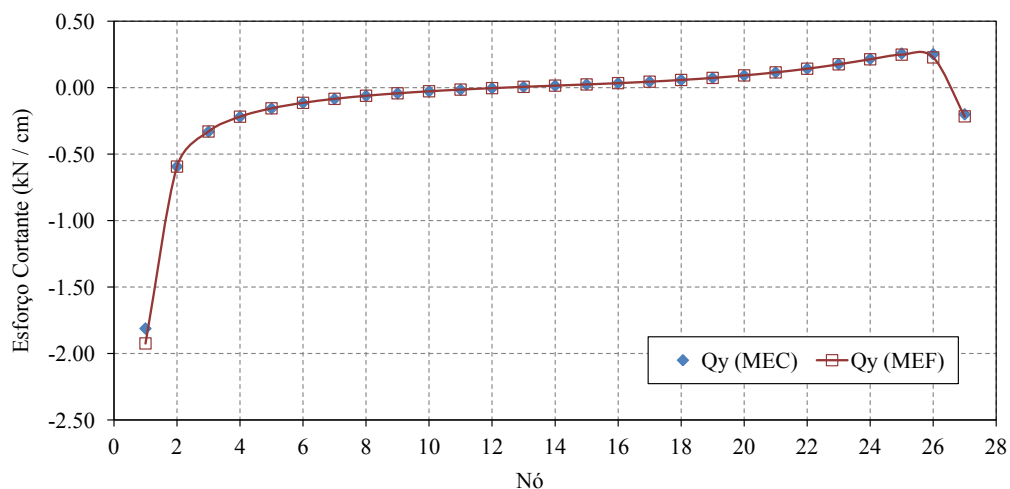


Figura 6.65: Esforço Cortante Q_y obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

6.9 Placa Esconsa com Quatro Apoios Internos

Uma laje esconsa submetida a um carregamento uniformemente distribuído igual a $25kN/m^2$ e apoiada por quatro pilares é apresentada na Fig.6.66. Esta laje é composta por um material cujas propriedades mecânicas são: módulo de elasticidade igual a $2,0 \times 10^7kN/m^2$, coeficiente de Poisson igual a 0,20 e espessura constante igual a 30cm.

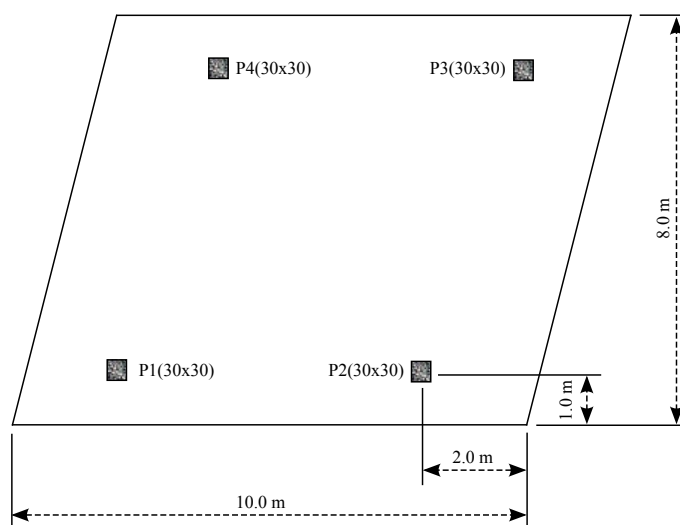


Figura 6.66: Dimensão da Placa Esconsa com Quatro Apoios Internos.

Quanto às condições de contorno, consideraram-se os pilares restringindo as rotações e deslocamento vertical no contato com a laje. As bordas estão livres de apoio.

Foi realizado um estudo de convergência da flecha com base em discretizações refinadas sucessivamente para o MEC, por meio da divisão de cada elemento ao meio, a partir da malha inicial composta de quatro elementos quadráticos. Os resultados deste estudo estão apresentados na Fig.6.67, e a partir desta análise, foi adotada a discretização contendo 64 elementos quadráticos (128 nós) no contorno externo da placa como uma referência razoável para efetuar a comparação com os resultados a serem obtidos pelo MEF. Em todas as discretizações desta análise, cada apoio interno teve uma única discretização contendo 8 elementos quadráticos (16 nós) no

contorno interno.

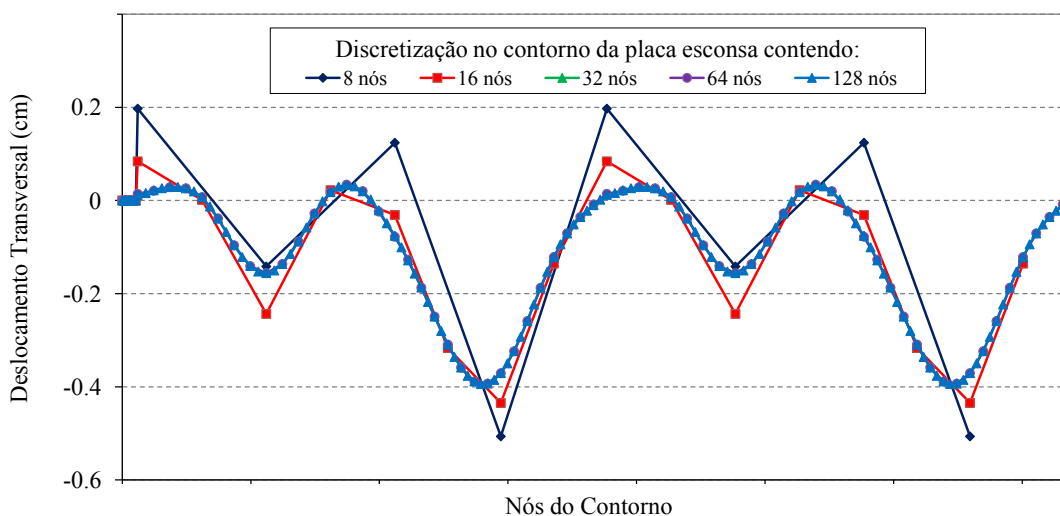


Figura 6.67: Estudo de convergência pelo MEC.

Para o estudo de convergência realizado no MEF, levou-se em consideração apenas o estudo de deslocamento vertical do nó central da placa (coordenada $x = 6.0m$ e $y = 4.0m$) conforme a Fig.6.68. O valor de referência adotado nesta análise foi o resultado obtido pelo MEC através da malha de 128 nós.

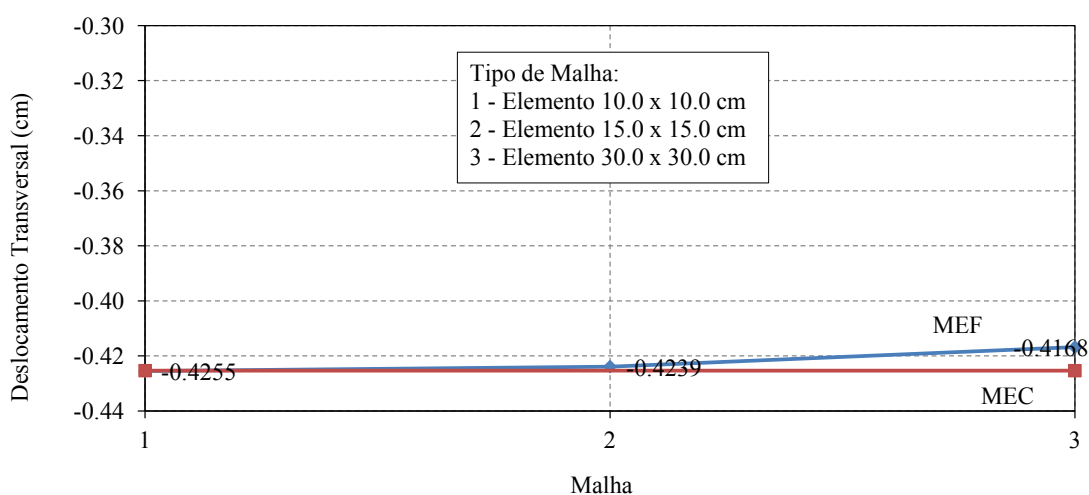
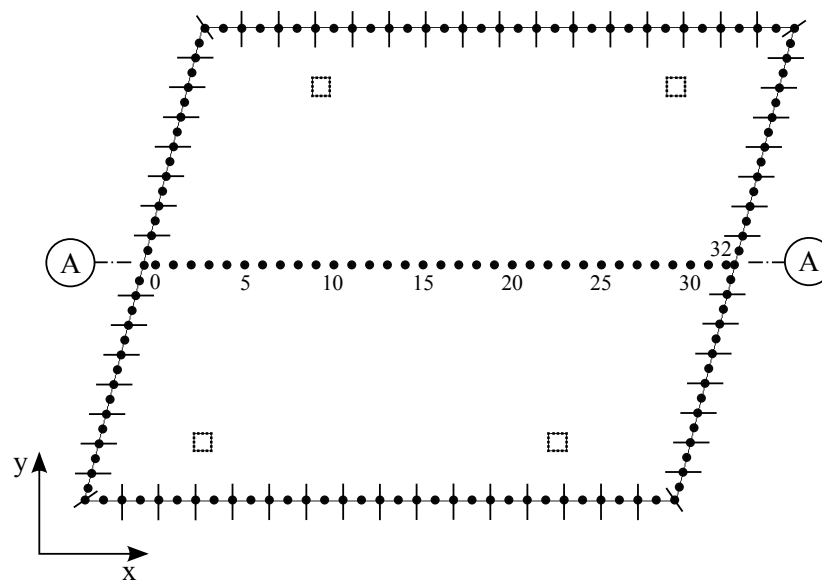
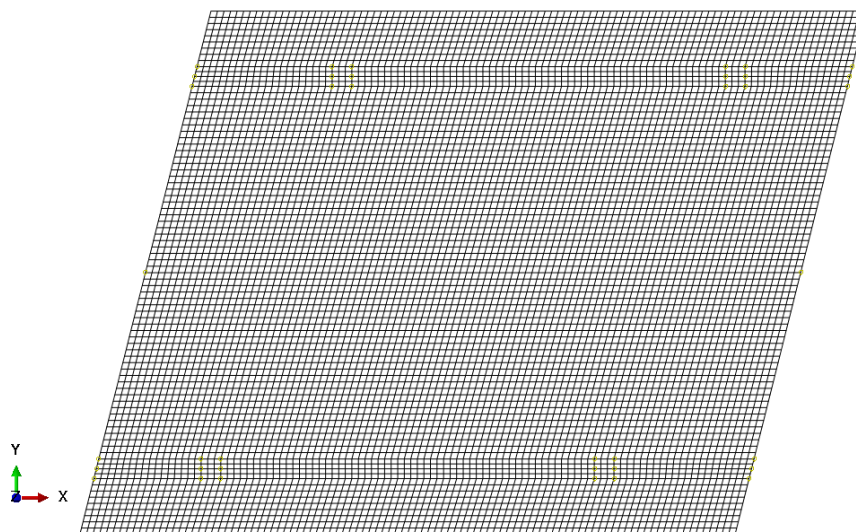


Figura 6.68: Estudo de convergência pelo MEF.

As discretizações usadas pelo MEC e MEF nas análises posteriores e apresentadas com mais detalhes na Tabela 6.47 estão ilustradas na Fig.6.69 e Fig.6.70.

Tabela 6.47: Exemplo 8: Detalhes da Discretização da Placa Esconsa

Programa	Elemento	Graus de liberdade por nó	Distância entre nós	Total de Elementos
<i>Abaqus</i>	<i>S4R</i>	u_x, u_y, u_z r_x, r_y, r_z	10,0 cm × 10,0 cm	8400
INSANE	<i>BL3</i>	ϕ_n, ϕ_s, w	≈ 30,0 cm 7,5 cm	96 (contorno) 8 (cada apoio)

**Figura 6.69:** Discretização da Placa Esconsa pelo MEC.**Figura 6.70:** Discretização da Placa Esconsa pelo MEF.

Na Tabela 6.48 são apresentadas as respostas em deslocamento transversal (w) através do programa desenvolvido neste trabalho ao lado das respostas correspondentes obtidas pelo programa *Abaqus*. Posteriormente, os respectivos resultados são apresentados na Fig.6.71 referente aos pontos situados sobre o segmento \overline{AA} .

Tabela 6.48: Exemplo 8: Deslocamento Transversal obtido no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC w (cm)	MEF w (cm)	Diferença %	Nó	MEC w (cm)	MEF w (cm)	Diferença %
0	-0,3656	-0,3657	-0,011	17	-0,4239	-0,4240	-0,031
1	-0,3591	-0,3593	-0,045	18	-0,4195	-0,4197	-0,037
2	-0,3539	-0,3542	-0,074	19	-0,4127	-0,4129	-0,045
3	-0,3505	-0,3509	-0,098	20	-0,4040	-0,4042	-0,058
4	-0,3491	-0,3495	-0,115	21	-0,3942	-0,3944	-0,072
5	-0,3499	-0,3504	-0,125	22	-0,3840	-0,3843	-0,088
6	-0,3530	-0,3535	-0,128	23	-0,3742	-0,3745	-0,103
7	-0,3582	-0,3587	-0,124	24	-0,3654	-0,3658	-0,116
8	-0,3654	-0,3658	-0,116	25	-0,3582	-0,3587	-0,124
9	-0,3742	-0,3745	-0,103	26	-0,3530	-0,3535	-0,128
10	-0,3840	-0,3843	-0,088	27	-0,3499	-0,3504	-0,125
11	-0,3942	-0,3944	-0,072	28	-0,3491	-0,3495	-0,115
12	-0,4040	-0,4042	-0,058	29	-0,3505	-0,3509	-0,098
13	-0,4127	-0,4129	-0,045	30	-0,3539	-0,3542	-0,074
14	-0,4195	-0,4197	-0,037	31	-0,3591	-0,3593	-0,045
15	-0,4239	-0,4240	-0,031	32	-0,3656	-0,3657	-0,011
16	-0,4254	-0,4255	-0,029				

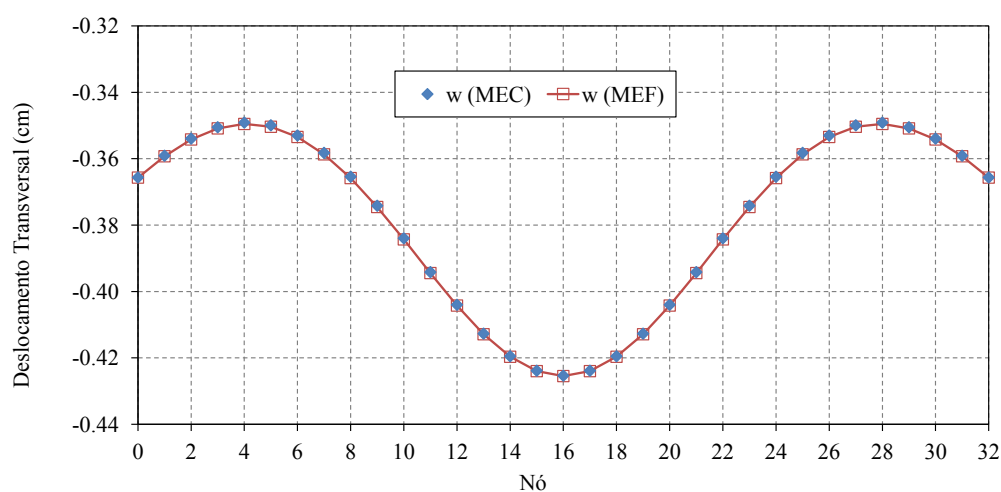


Figura 6.71: Deslocamento Transversal obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

Os resultados obtidos para a rotação ϕ_x , por meio do MEC e MEF, estão apresentados na Tabela 6.49. Posteriormente, estes mesmos dados são ilustrados na Fig.6.72 contidos entre o segmento AA, visto esquematicamente na Fig.6.69.

Tabela 6.49: Exemplo 8: Rotação ϕ_x obtida no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC ϕ_x (rad)	MEF ϕ_x (rad)	Diferença %	Nó	MEC ϕ_x (rad)	MEF ϕ_x (rad)	Diferença %
0	-0,000238	-0,000233	1,87	17	-0,000098	-0,000097	0,40
1	-0,000197	-0,000194	1,87	18	-0,000187	-0,000186	0,41
2	-0,000145	-0,000142	2,07	19	-0,000259	-0,000258	0,43
3	-0,000082	-0,000080	2,81	20	-0,000309	-0,000308	0,44
4	-0,000011	-0,000010	15,8	21	-0,000334	-0,000333	0,45
5	0,000063	0,000064	-1,29	22	-0,000333	-0,000332	0,44
6	0,000137	0,000137	-0,13	23	-0,000309	-0,000308	0,40
7	0,000206	0,000206	0,19	24	-0,000265	-0,000264	0,33
8	0,000265	0,000264	0,33	25	-0,000206	-0,000206	0,19
9	0,000309	0,000308	0,40	26	-0,000137	-0,000137	-0,13
10	0,000333	0,000332	0,44	27	-0,000063	-0,000064	-1,29
11	0,000334	0,000333	0,45	28	0,000011	0,000010	15,8
12	0,000309	0,000308	0,44	29	0,000082	0,000080	2,81
13	0,000259	0,000258	0,43	30	0,000145	0,000142	2,07
14	0,000187	0,000186	0,41	31	0,000197	0,000194	1,87
15	0,000098	0,000097	0,40	32	0,000238	0,000233	1,87
16	0,000000	0,000000	0,00				

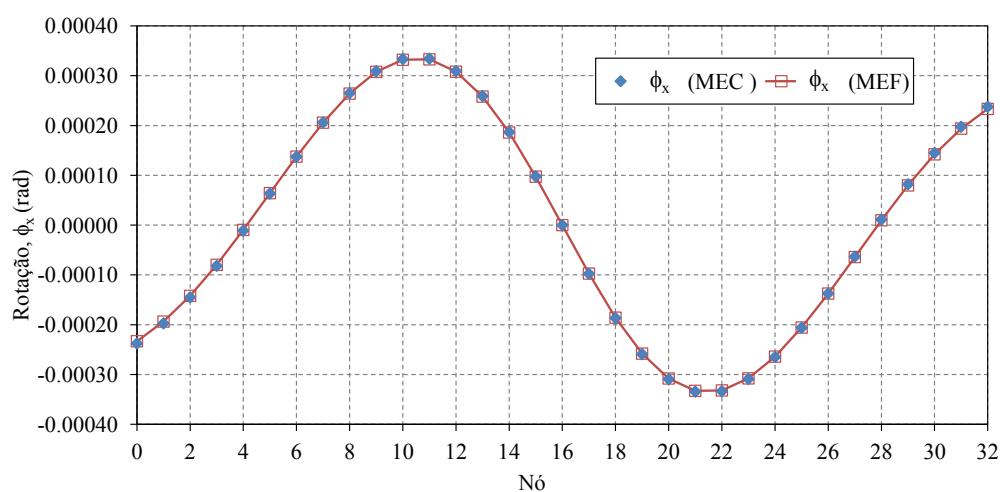


Figura 6.72: Rotação ϕ_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

Os resultados obtidos para a rotação ϕ_y , por meio do MEC e MEF, estão apresentados na Tabela 6.50. Posteriormente, estes mesmos dados são ilustrados na Fig.6.73 contidos entre o segmento AA, visto esquematicamente na Fig.6.69.

Tabela 6.50: Exemplo 8: Rotação ϕ_y obtida no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC ϕ_y (rad)	MEF ϕ_y (rad)	Diferença %	Nó	MEC ϕ_y (rad)	MEF ϕ_y (rad)	Diferença %
0	0,000704	0,000704	0,08	17	0,000101	0,000102	0,17
1	0,000604	0,000605	0,10	18	0,000195	0,000195	0,15
2	0,000496	0,000497	0,13	19	0,000272	0,000272	0,12
3	0,000379	0,000379	0,16	20	0,000326	0,000327	0,07
4	0,000253	0,000253	0,24	21	0,000351	0,000351	0,02
5	0,000122	0,000123	0,50	22	0,000343	0,000343	-0,05
6	-0,000007	-0,000007	-9,40	23	0,000301	0,000301	-0,13
7	-0,000126	-0,000126	-0,48	24	0,000227	0,000227	-0,24
8	-0,000227	-0,000227	-0,24	25	0,000126	0,000126	-0,48
9	-0,000301	-0,000301	-0,13	26	0,000007	0,000007	-9,40
10	-0,000343	-0,000343	-0,05	27	-0,000122	-0,000123	0,50
11	-0,000351	-0,000351	0,02	28	-0,000253	-0,000253	0,24
12	-0,000326	-0,000327	0,07	29	-0,000379	-0,000379	0,16
13	-0,000272	-0,000272	0,12	30	-0,000496	-0,000497	0,13
14	-0,000195	-0,000195	0,15	31	-0,000604	-0,000605	0,10
15	-0,000101	-0,000102	0,17	32	-0,000704	-0,000704	0,08
16	0,000000	-0,000000	0,00				

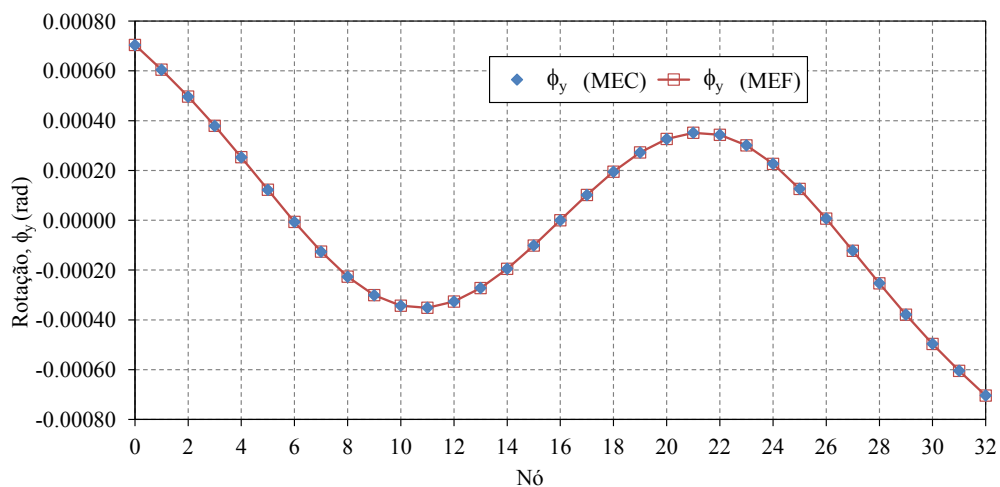


Figura 6.73: Rotação ϕ_y obtida pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

Na Tabela 6.51 são apresentados os resultados obtidos para o momento M_x através do programa desenvolvido neste trabalho ao lado dos valores correspondentes obtidos pelo programa *Abaqus*. Logo após, estes mesmos dados são ilustrados na Fig.6.74 contidos entre o segmento AA, visto esquematicamente na Fig.6.69.

Tabela 6.51: Exemplo 8: Momento M_x obtido no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC M_x ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	MEF M_x ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	Diferença %	Nó	MEC M_x ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	MEF M_x ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	Diferença %
0	-2,72	-2,78	-2,02	17	-22,76	-22,71	0,23
1	-1,28	-1,38	-7,47	18	-20,93	-20,89	0,23
2	0,18	0,08	121,27	19	-18,13	-18,09	0,22
3	1,32	1,22	8,25	20	-14,67	-14,65	0,16
4	1,97	1,87	5,15	21	-10,94	-10,94	0,03
5	2,04	1,95	4,50	22	-7,34	-7,36	-0,26
6	1,49	1,41	5,46	23	-4,16	-4,19	-0,92
7	0,29	0,22	29,51	24	-1,59	-1,64	-3,29
8	-1,59	-1,64	-3,29	25	0,29	0,22	29,51
9	-4,16	-4,19	-0,92	26	1,49	1,41	5,46
10	-7,34	-7,36	-0,26	27	2,04	1,95	4,50
11	-10,94	-10,94	0,03	28	1,97	1,87	5,15
12	-14,67	-14,65	0,16	29	1,32	1,22	8,25
13	-18,13	-18,09	0,22	30	0,18	0,08	121,26
14	-20,93	-20,89	0,23	31	-1,28	-1,38	-7,47
15	-22,76	-22,71	0,23	32	-2,72	-2,78	-2,02
16	-23,39	-23,34	0,23				

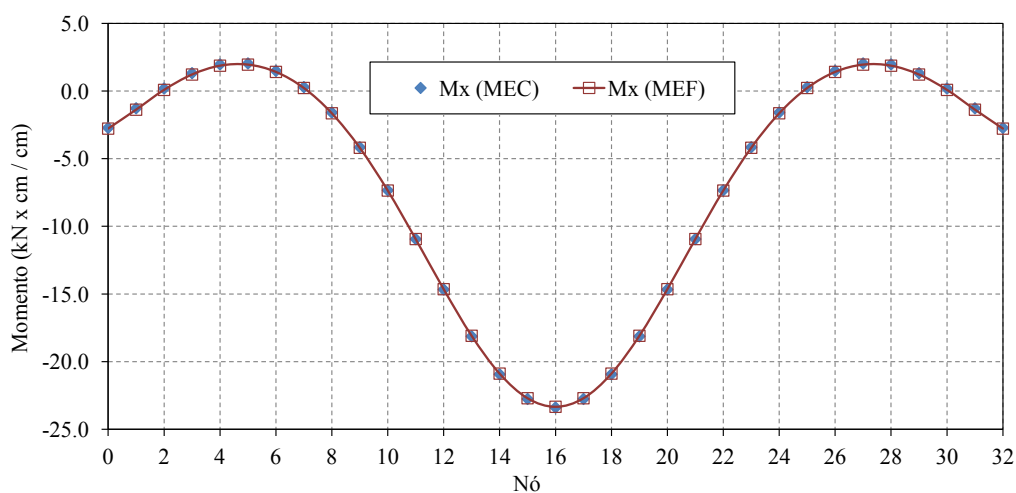


Figura 6.74: Momento M_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

Na Tabela 6.52 são apresentados os resultados obtidos para o momento M_y através do programa desenvolvido neste trabalho ao lado dos valores correspondentes obtidos pelo programa *Abaqus*. Logo após, estes mesmos dados são ilustrados na Fig.6.75 contidos entre o segmento AA, visto esquematicamente na Fig.6.69.

Tabela 6.52: Exemplo 8: Momento M_y obtido no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC M_y ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	MEF M_y ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	Diferença %	Nó	MEC M_y ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	MEF M_y ($\frac{kN \times cm}{cm}$)	Diferença %
0	-39,61	-39,60	0,02	17	-42,74	-42,73	0,02
1	-41,14	-41,11	0,08	18	-43,26	-43,25	0,02
2	-42,70	-42,68	0,06	19	-44,04	-44,03	0,01
3	-44,06	-44,04	0,04	20	-44,94	-44,94	0,00
4	-45,17	-45,16	0,02	21	-45,83	-45,83	0,00
5	-46,03	-46,03	0,01	22	-46,56	-46,56	0,00
6	-46,66	-46,66	0,00	23	-47,02	-47,02	0,00
7	-47,05	-47,05	-0,01	24	-47,18	-47,18	0,00
8	-47,18	-47,18	0,00	25	-47,05	-47,05	-0,01
9	-47,02	-47,02	0,00	26	-46,66	-46,66	0,00
10	-46,56	-46,56	0,00	27	-46,03	-46,03	0,01
11	-45,83	-45,83	0,00	28	-45,17	-45,16	0,02
12	-44,94	-44,94	0,00	29	-44,06	-44,04	0,04
13	-44,04	-44,03	0,01	30	-42,70	-42,68	0,06
14	-43,26	-43,25	0,02	31	-41,14	-41,11	0,08
15	-42,74	-42,73	0,02	32	-39,61	-39,60	0,02
16	-42,56	-42,55	0,03				

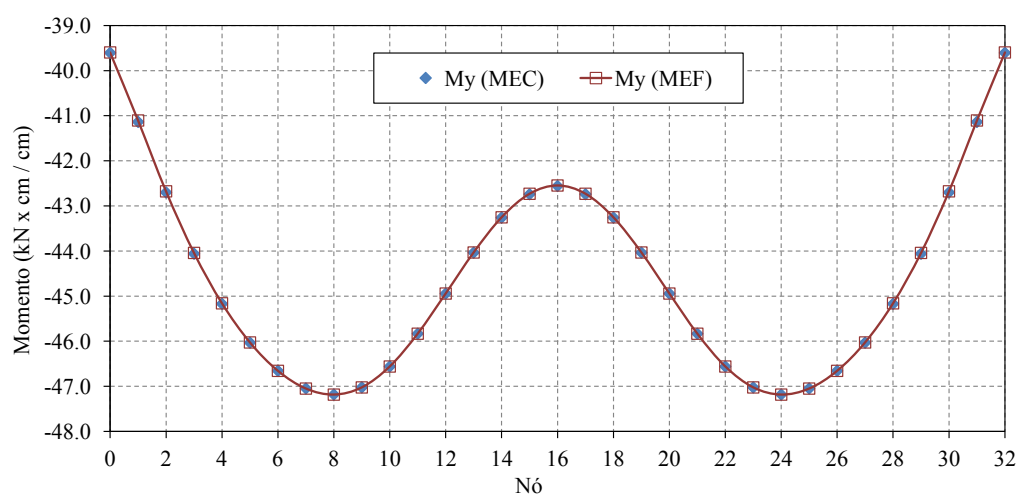


Figura 6.75: Momento M_y obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

As diferenças entre os resultados obtidos pelo MEC e MEF para a forças cortante Q_x estão apresentadas na Tabela 6.53. Em seguida, os respectivos resultados são apresentados na Fig.6.76 referente aos pontos situados sobre o segmento \overline{AA} .

Tabela 6.53: Exemplo 8: Esforço Cortante Q_x obtido no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC Q_x ($\frac{kN}{cm}$)	MEF Q_x ($\frac{kN}{cm}$)	Diferença %	Nó	MEC Q_x ($\frac{kN}{cm}$)	MEF Q_x ($\frac{kN}{cm}$)	Diferença %
0	-0,0144	-0,0170	-15,03	17	0,0248	0,0247	0,41
1	-0,0029	-0,0029	-1,05	18	0,0471	0,0469	0,45
2	-0,0040	-0,0041	-2,68	19	0,0647	0,0643	0,51
3	-0,0091	-0,0091	-0,71	20	0,0760	0,0755	0,58
4	-0,0170	-0,0170	0,18	21	0,0804	0,0799	0,63
5	-0,0271	-0,0269	0,49	22	0,0786	0,0781	0,64
6	-0,0383	-0,0381	0,56	23	0,0717	0,0713	0,62
7	-0,0501	-0,0498	0,57	24	0,0617	0,0613	0,59
8	-0,0617	-0,0613	0,59	25	0,0501	0,0498	0,57
9	-0,0717	-0,0713	0,62	26	0,0383	0,0381	0,56
10	-0,0786	-0,0781	0,64	27	0,0271	0,0269	0,49
11	-0,0804	-0,0799	0,63	28	0,0170	0,0170	0,18
12	-0,0760	-0,0755	0,58	29	0,0091	0,0091	-0,71
13	-0,0647	-0,0643	0,51	30	0,0040	0,0041	-2,68
14	-0,0471	-0,0469	0,45	31	0,0029	0,0029	-1,05
15	-0,0248	-0,0247	0,41	32	0,0144	0,0170	-15,03
16	0,0000	0,0000	0,00				

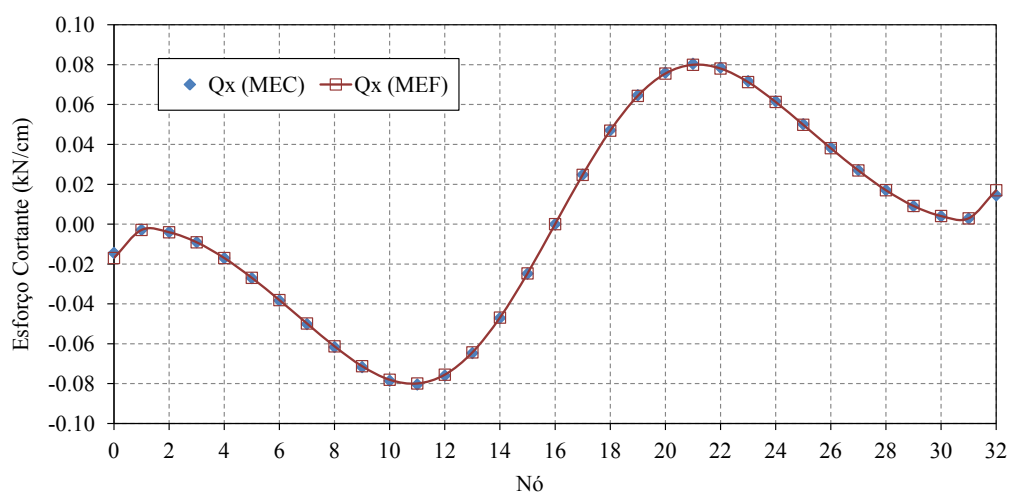


Figura 6.76: Esforço Cortante Q_x obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

As diferenças entre os resultados obtidos pelo MEC e MEF para a força cortante Q_y estão apresentadas na Tabela 6.54. Em seguida, os respectivos resultados são apresentados na Fig.6.77 referente aos pontos situados sobre o segmento \overline{AA} .

Tabela 6.54: Exemplo 8: Esforço Cortante Q_y obtido no Segmento \overline{AA} .

Nó	MEC Q_y ($\frac{kN}{cm}$)	MEF Q_y ($\frac{kN}{cm}$)	Diferença %	Nó	MEC Q_y ($\frac{kN}{cm}$)	MEF Q_y ($\frac{kN}{cm}$)	Diferença %
0	-0,1581	-0,1603	-1,4,	17	-0,0341	-0,0341	-0,15
1	-0,1110	-0,1112	-0,16	18	-0,0661	-0,0661	-0,11
2	-0,0930	-0,0932	-0,25	19	-0,0937	-0,0937	-0,03
3	-0,0708	-0,0710	-0,22	20	-0,1146	-0,1145	0,08
4	-0,0424	-0,0426	-0,31	21	-0,1264	-0,1261	0,21
5	-0,0087	-0,0089	-2,17	22	-0,1272	-0,1267	0,35
6	0,0278	0,0275	1,19	23	-0,1161	-0,1156	0,48
7	0,0635	0,0630	0,75	24	-0,0941	-0,0935	0,60
8	0,0941	0,0935	0,60	25	-0,0635	-0,0630	0,75
9	0,1161	0,1156	0,48	26	-0,0278	-0,0275	1,19
10	0,1272	0,1267	0,35	27	0,0087	0,0089	-2,17
11	0,1264	0,1261	0,21	28	0,0424	0,0426	-0,31
12	0,1146	0,1145	0,08	29	0,0708	0,0710	-0,22
13	0,0937	0,0937	-0,03	30	0,0930	0,0932	-0,25
14	0,0661	0,0661	-0,11	31	0,1110	0,1112	-0,16
15	0,0341	0,0341	-0,15	32	0,1581	0,1603	-1,40
16	0,0000	0,0000	0,00				

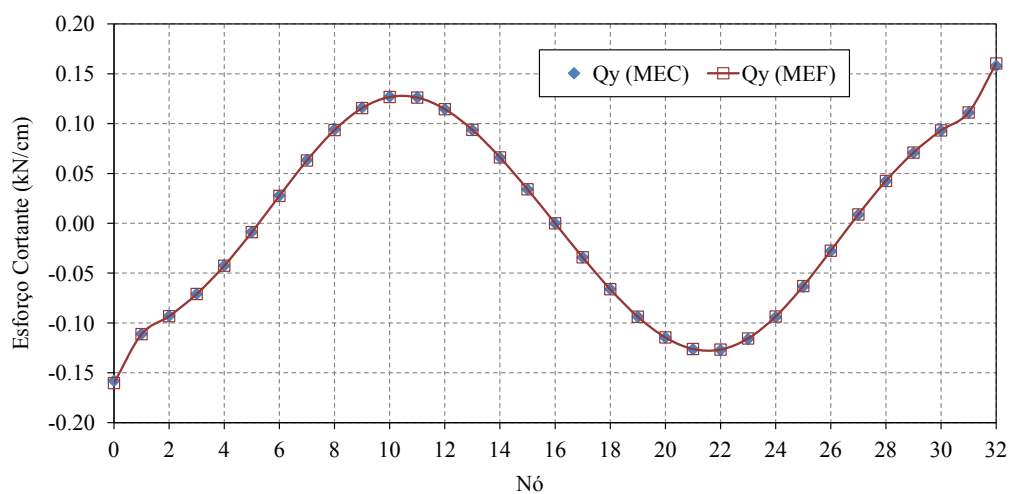


Figura 6.77: Esforço Cortante Q_y obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} .

6.10 Placa Retangular em Balanço

Este exemplo tem como finalidade analisar a consideração do uso da normal média presente nos cantos da placa, quando elementos contínuos são adotados. Para tanto, são realizadas simulações com elementos contínuos e descontínuos para uma placa retangular com lados $a = 4,0m$ e $b = 2,0m$. Esta placa está engastada em uma borda e submetida a uma linha de carga na borda oposta de $10,0kN/m^2$ representada pela Fig.6.78. O material desta placa possui as seguintes propriedades mecânicas: módulo de elasticidade igual a $2,5 \times 10^7 kN/m^2$ e coeficiente de Poisson igual a $0,20$. A espessura é considerada constante e igual a $10cm$.

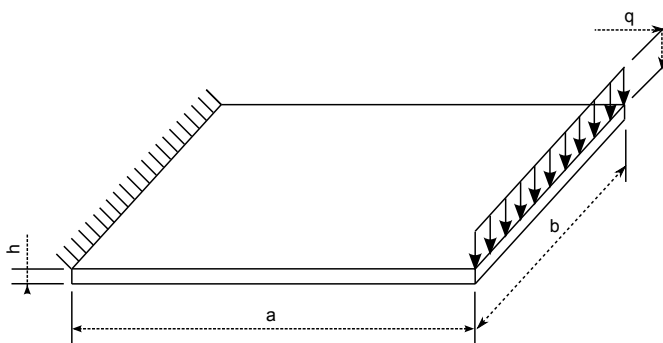


Figura 6.78: Placa Retangular em Balanço.

Foi realizado um estudo de convergência da flecha com base em discretizações refinadas sucessivamente para o MEC, por meio da divisão de cada elemento ao meio, a partir de uma malha inicial composta de seis elementos quadráticos e ilustrada na Fig.6.79.

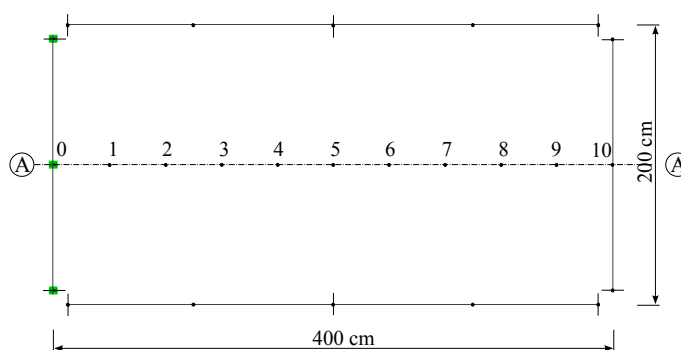


Figura 6.79: Exemplo de uma Discretização usando Elemento Descontínuo.

Adotou-se a solução do MEF, obtida pelo programa *Abaqus*, como uma referência a ser considerada neste estudo de convergência. O elemento finito usado na discretização da placa foi o *S4R* por representar as características necessárias ao problema proposto. Este elemento possui as mesmas propriedades que o *S8R*, abordado com mais detalhes no item 6.6, porém a função aproximadora do *S4R* é linear. A malha é composta de 800 elementos quadriláteros isoparamétricos sendo o tamanho de cada elemento de $10\text{cm} \times 10\text{cm}$.

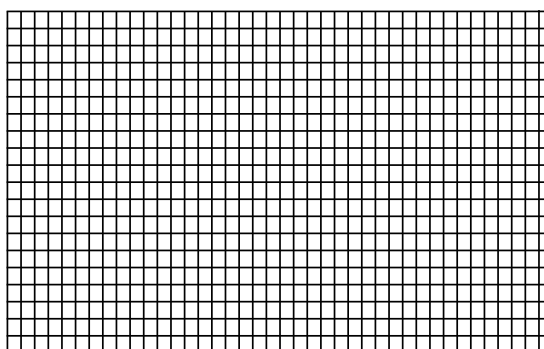


Figura 6.80: Placa Discretizada usada pelo MEF.

Os valores obtidos para o deslocamento transversal, w (cm), estão apresentados na Tabela 6.55 por meio do MEC e MEF.

Tabela 6.55: Exemplo 9: Deslocamento Transversal, w , obtido no Segmento \overline{AA} .

Nó	Nº de Elementos Contínuos				Nº de Elementos Descontínuos				MEF
	6	12	24	48	6	12	24	48	
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	-0,0013	-0,0015	-0,0015	-0,0015	-0,0016	-0,0015	-0,0015	-0,0015	-0,0015
2	-0,0046	-0,0056	-0,0058	-0,0058	-0,0060	-0,0058	-0,0058	-0,0058	-0,0058
3	-0,0092	-0,0117	-0,0123	-0,0124	-0,0127	-0,0124	-0,0124	-0,0124	-0,0124
4	-0,0144	-0,0197	-0,0210	-0,0211	-0,0214	-0,0210	-0,0210	-0,0211	-0,0211
5	-0,0202	-0,0291	-0,0314	-0,0317	-0,0318	-0,0313	-0,0314	-0,0315	-0,0315
6	-0,0267	-0,0398	-0,0433	-0,0438	-0,0435	-0,0430	-0,0433	-0,0435	-0,0435
7	-0,0334	-0,0513	-0,0563	-0,0570	-0,0560	-0,0558	-0,0564	-0,0567	-0,0568
8	-0,0393	-0,0634	-0,0703	-0,0713	-0,0690	-0,0694	-0,0704	-0,0708	-0,0709
9	-0,0417	-0,0751	-0,0847	-0,0861	-0,0819	-0,0834	-0,0849	-0,0856	-0,0857
10	-0,0331	-0,0858	-0,0992	-0,1012	-0,0947	-0,0976	-0,0997	-0,1007	-0,1008

Os resultados apresentados na Fig.6.81 e Fig.6.82 ilustram a diferença entre o uso de elementos contínuos e elementos descontínuos na discretização da placa. O

uso do elemento contínuo implica que a normal utilizada nos nós dos cantos da placa é resultado do cálculo da normal média entre os elementos adjacentes deste mesmo nó. Observa-se pela Fig.6.81 o impacto no deslocamento transversal considerando o uso da normal média. Porém, com o aumento do refinamento sucessivo da malha, a influência da normal média reduz significativamente.

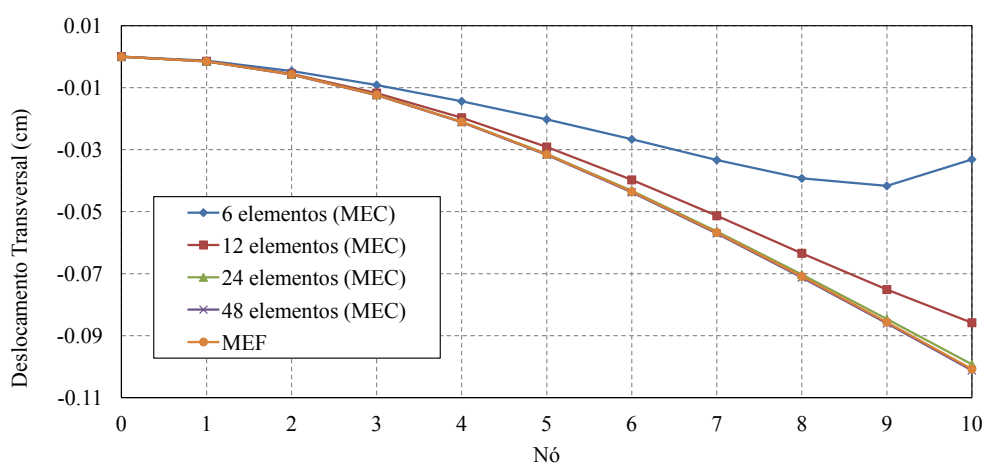


Figura 6.81: Deslocamento Transversal obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} (Elemento Contínuo).

A partir de uma malha de 24 elementos e fazendo-se o uso de elementos descontínuos nos cantos da placa, tem-se um resultado próximo aos obtidos pelo MEF.

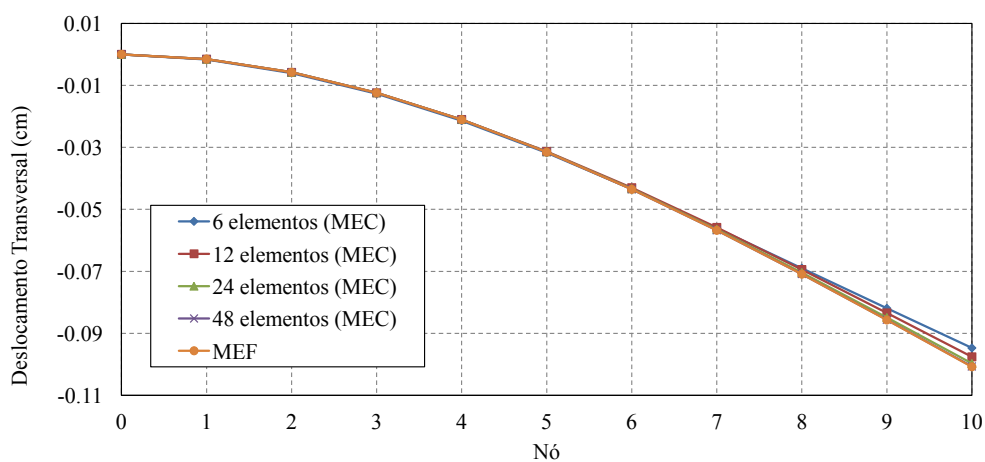


Figura 6.82: Deslocamento Transversal obtido pelo MEC e MEF no segmento \overline{AA} (Elemento Descontínuo).

Capítulo 7

Considerações Finais

Nesta dissertação foi apresentada a formulação integral para flexão de placas baseada na teoria de Reissner, de acordo com Weeën (1982*b*), por meio do método dos elementos de contorno. A implementação desta formulação ocorreu no ambiente computacional INSANE. Este ambiente, anteriormente testado para problemas de elasticidade por meio do MEC, foi aqui validado para problemas referentes à flexão de placas.

A potencialidade da biblioteca de diversos modelos discretos deste sistema computacional foi observada em razão da generalidade das implementações de classes existentes nesta plataforma. Esta característica orientou a inclusão da formulação de placas de Reissner e reforçou a eficiência do paradigma de programação orientada a objetos (POO).

7.1 Conclusão

A partir da plataforma computacional INSANE, foi implementada a formulação integral para análise de flexão de placas baseada na teoria de Reissner. O ambiente interativo de análise estrutural existente proporcionou uma implementação numérica robusta combinada com um alto desempenho no processamento dos modelos discretos por meio do método dos elementos de contorno. O paradigma da programação orientada a objetos permitiu não apenas a ampliação do núcleo numérico

existente, mas a possibilidade de expansão através de novas pesquisas na área de diversos métodos numéricos.

Este paradigma de programação permitiu que novas funcionalidades fossem incorporadas ao núcleo numérico com relativa facilidade em virtude da natureza do código base. Com base nesta premissa, a implementação da formulação da teoria de Reissner por meio do MEC herdou um ambiente com diversos métodos e classes que atendiam à técnica a ser utilizada no problema de flexão de placas. A reutilização do código possibilitou uma economia de tempo no esforço da programação e um ganho no uso de métodos e classes já validados.

Por fim, este ambiente computacional foi desenvolvido em linguagem Java por apresentar diversas vantagens para o meio acadêmico entre elas a portabilidade, robustez e acesso a um ambiente de desenvolvimento gratuito.

A formulação para análise de flexão de placas baseada na teoria de Reissner provou ser mais completa e abrangente comparada à teoria clássica de Kirchhoff-Love por considerar a parcela da energia de deformação derivada do cisalhamento transversal. Esta consideração resulta num sistema de equações diferenciais de sexta ordem, possibilitando o atendimento de três condições físicas em cada ponto do contorno, ao invés de apenas duas como na teoria clássica de Kirchhoff-Love. Outra vantagem significativa desta formulação é que esta não apresenta as complicações relativas às reações de canto presentes na teoria clássica, que decorrem de simplificações relativas ao equilíbrio do momento de torção nas bordas. A análise de placas por meio da teoria de Reissner permite avaliar como a espessura relativa influencia os resultados em termos de deslocamentos e esforços internos diferentemente do que acontece na teoria clássica.

A simulação da condição *hard* e *soft* nas condições de contorno evidenciou o tratamento de rigidez dada à placa. Na condição *soft*, a rotação tangencial é diferente de

zero e, portanto, tem-se uma placa mais flexível. Neste caso, foram obtidos deslocamentos e momentos fletores maiores que os correspondentes à condição de contorno *hard*. O uso adequado entre a condição *soft* ou *hard* depende da interpretação física do tipo de problema a ser modelado e analisado.

O uso de uma discretização por meio do MEC contendo apenas o contorno da placa pressupõe em uma montagem final de um sistema reduzido de equações lineares em comparação com o sistema gerado pelo MEF e, conseqüentemente, tem-se um menor custo na obtenção da solução das incógnitas de contorno deste mesmo problema. Considerando a qualidade desta solução, as grandezas internas calculadas por meio do MEC apresentaram valores muito próximos aos ilustrados nos exemplos numéricos dado que estes são decorrentes de integrais exatas. As técnicas de integração empregadas nas equações integrais de contorno mostraram-se eficientes ao compará-las com os resultados analíticos obtidos na literatura clássica apresentado por Timoshenko (1959).

Foi observado através de alguns exemplos, que possíveis erros decorrentes de uma discretização contendo poucos elementos são resolvidos através de refinamentos sucessivos da malha. Neste sentido, estudos de convergência numérica foram realizados para avaliar a qualidade dos resultados obtidos, evidenciando a importância deste estudo na busca por respostas aproximadas através do MEC, bem como por outros métodos numéricos.

É importante observar que o gerenciamento e a manipulação de acesso aos dados de um modelo discreto qualquer, proporcionado pelo ambiente INSANE, possibilitou uma discretização mais refinada do problema. Este ganho tem expandido as análises, por meio do MEC, através de uma discretização antes limitada a poucos elementos.

As simulações numéricas apresentadas nos exemplos deste trabalho validaram a implementação da formulação integral de placas baseada na teoria de Reissner, no

ambiente do sistema INSANE usando as técnicas de POO. Além disto, as simulações realizadas mostraram resultados altamente satisfatórios quando comparadas com a solução analítica correspondente ou com soluções numéricas disponíveis na literatura e ou ainda por meio de análises baseadas pelo MEF usando o programa *Abaqus*. Resultados importantes e com boa precisão também foram obtidos para placas com apoios no domínio, tal como ocorre nas aplicações práticas de lajes cogumelo amplamente utilizadas nos projetos de pavimentos de edifícios.

7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

A implementação da formulação para análise de flexão de placas no ambiente INSANE usando as técnicas de POO, vista neste trabalho, possibilitou compreender o conteúdo teórico e computacional. Conseqüentemente, surgem algumas questões que requerem um maior aprofundamento referente à formulação apresentada.

Por meio de pesquisas realizadas no desenvolvimento deste trabalho, observou-se que há outras formas de abordar a formulação para análise de placas com apoios internos e tratamento numérico das equações integrais de contorno. Portanto, sugere-se que as seguintes propostas de estudos sejam formuladas e implementadas no núcleo numérico INSANE:

1. A tese elaborada por Silva (1996) aborda uma formulação para placas contendo apoios internos (pilares) diferente da apresentada neste trabalho. Uma vantagem desta formulação é a possibilidade da rotação normal e tangencial no contorno interno da interface placa-pilar. Sugere-se estudar e implementar o algoritmo no sistema INSANE;
2. O tratamento numérico dado à solução fundamental de força de superfície,

quando há ocorrência de singularidade, é feito por meio do conceito de deslocamento de corpo rígido. Porém há tratamentos alternativos como as formulações auto-regularizadas, conforme Ribeiro (2003). Sugere-se estudar e implementar o algoritmo no sistema INSANE;

3. Expansão da análise de flexão de placas para casos de elastoplasticidade por meio da implementação da formulação elaborado por Ribeiro (1992). Sugere-se estudar e implementar o algoritmo no sistema INSANE;
4. Expansão da análise de flexão de placas para casos de placas enrijecidas por meio da implementação da formulação elaborado por Bacarji (2001) e Fernandes (2003). Sugere-se estudar e implementar o algoritmo no sistema INSANE.

Referências Bibliográficas

- Abramowitz, M. e Stegun, I. A., (1965), *Mathematical Functions*, Technical report, Nova York, EUA.
- Ajeje, F. H., 2009. Abordagem orientada a objetos para implementação computacional de elementos finitos de cascas planos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Aliabadi, M. H., 2002. *The Boundary Element Method - Applications in Solids and Structures*. Vol. 2, John Wiley and Sons.
- Almeida, M. L., 2005. Elementos finitos paramétricos implementados em java. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Alves, P. D., 2012. Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Anacleto, F. E. S., Ribeiro, T. S. A., Ribeiro, G. O., Pitangueira, R. L. S. e Penna, S. S., 2013. ‘An Object-Oriented Tridimensional Self-regular Boundary Element Method Implementation’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, .
- Bacarji, E., 2001. Aplicação do Método de Elementos de Contorno à Análise de Pavimentos de Edifícios. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo (USP), São Carlos.
- Beer, G., Smith, I. e Duenser, C., 2008. *The Boundary Element Method with Programming*. Springer Wien New York, Graz University of Technology, Austria.

- Camara, L. S., 2007. Um serviço web para o método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Chaves, E. W. V., 1997. Análise de placas com variação de espessura através do método dos elementos de contorno. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo (USP), São Carlos.
- Eberwien, U., Duenser, C. e Moser, W., 2005. 'Efficient calculation of internal results in 2D elasticity BEM'. *Elsevier Inc.*, p. 447.
- Fernandes, G. R., 2003. Análise Não-Linear de Estruturas de Pavimentos de Edifícios através do Método de Elementos de Contorno. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo (USP), São Carlos.
- Ferreira, R. L., 2008. Pré-processador para modelos reticulados e planos do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, F. T., Pitangueira, R. L. S. e Filho, A. V., (2004), Implementação de modelos estruturais de barras como casos particulares do método de elementos finitos, *in* 'Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional - SIMMEC', Itajubá, MG, Brasil.
- Fonseca, M. T., 2006. Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

- Fuina, J. S., 2004. Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Germanio, L., 2005. Implementação orientada a objetos da solução de problemas estruturais dinâmicos via método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Gonçalves, M. A. B., 2004. Geração de malhas bidimensionais de elementos finitos baseada em mapeamentos transfinitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Huang, Q., (1993), Boundary Element Method: an introduction., Technical report, Vanderbilt University, Nova York, EUA.
- Karam, V. J., 1992. Análise de Flexão de Placas Pelo Mec Incluindo Não-Linearidade Física. Tese de Doutorado, COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro.
- Monteiro, A. B., 2013. Ambiente teórico-computacional unificado para modelos constitutivos: Inclusão de modelo elastoplástico com dano. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Moreira, R. N., 2006. Sistema gráfico interativo para ensino de análise estrutural através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Penna, S. S., 2007. Pós-processador para modelos bidimensionais não-lineares do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Penna, S. S., 2011. Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: Unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e

- modelagem de estruturas de concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Pitangueira, R. L. S. e Caldas, R. B., (2005), *in* ‘XXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods - CILAMCE’.
- Pitangueira, R. L. S., Fonseca, F. T., Fuina, J. S., Camara, L., Ferreira, R. L. e Moreira, R. N., 2008. ‘Insane - versão 2.0’. *XXVII Latin American Congress on Computational Methods in Engineering CILAMCE*, pp. 1–20.
- Ribeiro, G. O., 1992. Sobre a formulação do método dos elementos de contorno de placas usando as hipóteses de Reissner. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo (USP), São Carlos.
- Ribeiro, G. O. e Venturini, W. S., 1998. ‘Elastoplastic analysis of Reissner’s plate using the boundary element method. in: M. h. Aliabadi’. *U.K.: Computational Mechanics Publications*, pp. v. 1, p. 101–125.
- Ribeiro, T. S. A., 2003. Algoritmos não-singulares do método dos elementos de contorno para problemas bidimensionais de elasticidade. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Ribeiro, T. S. A., 2006. Elastoplastic Boundary Element Method with Adaptive Cell Generation. Tese de Doutorado, Institut Für Baustatik, Technische Universität at Graz, Áustria.
- Saliba, S. S., 2007. Implementação computacional e análise crítica de elementos finitos de placas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Silva, N. A., 1996. Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Placas com Enrijecedores Utilizando a Teoria de Reissner. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo (USP), São Carlos.

- Silva, R. P., 2012. Análise Não-Linear de Estruturas de Concreto por meio do Método Element Free Galerkin. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Timoshenko, S., 1959. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill Book Company, Inc., Stanford University, USA.
- Ugural, A. P., 1981. *Stresses in Plates and Shells*. McGraw-Hill Book Company, Inc., Fairleigh Dickinson University, New Jersey, USA.
- Waidemam, L., 2008. Formulação do Método de Elementos de Contorno para Placas Enrijecidas Considerando-se Não-Linearidades Física e Geométrica. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo (USP), São Carlos.
- Weeën, F., (1982a), Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model, *in* 'Boundary Element Method in Engineering, Proceedings of the 4th International Seminar', Southampton, UK.
- Weeën, F. V., 1982b. 'Application of boundary integral equation method to reissner's plate model'. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, (18(1)), pp. 1–10.
- Wolenski, A. R. V., 2013. Ambiente teórico-computacional unificado para modelos constitutivos: Inclusão de modelo de microplanos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Wolff, K. P., 2010. Implementação computacional de um modelo de fissuração para o concreto baseado no método dos elementos finitos estendido (xfem). Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Apêndice A

Funções de Bessel Modificadas k_0 e k_1

As funções de Bessel modificadas de ordem inteira k_0 e k_1 podem ser calculadas por expansões polinomiais dadas por Abramowitz e Stegun (1965), sendo z um argumento real, conforme se segue:

1. Para $0 < z \leq 2$:

$$\begin{aligned} k_0(z) = & -\ln\left(\frac{z}{2}\right) I_0(z) - 0,57721566 \\ & + 0,42278420 \left(\frac{z}{2}\right)^2 + 0,23069756 \left(\frac{z}{2}\right)^4 + 0,03488590 \left(\frac{z}{2}\right)^6 \\ & + 0,00262698 \left(\frac{z}{2}\right)^8 + 0,00010750 \left(\frac{z}{2}\right)^{10} + 0,00000740 \left(\frac{z}{2}\right)^{12} + \epsilon_{K_0}; \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$|\epsilon| < 1,0 \times 10^{-8}.$$

$$\begin{aligned} k_1(z) = & + \frac{1}{z} \left[z \ln\left(\frac{z}{2}\right) I_1(z) + 1 \right. \\ & + 0,15443144 \left(\frac{z}{2}\right)^2 - 0,67278579 \left(\frac{z}{2}\right)^4 - 0,18156897 \left(\frac{z}{2}\right)^6 \\ & - 0,01919402 \left(\frac{z}{2}\right)^8 - 0,00110404 \left(\frac{z}{2}\right)^{10} - 0,00004686 \left(\frac{z}{2}\right)^{12} \\ & \left. + \epsilon_{K_1} \right]; \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$|\epsilon| < 8,0 \times 10^{-8}.$$

$$\begin{aligned}
I_0(z) = & 1,00 + 3,5156229t^2 + 3,0899424t^4 + 1,2067492t^6 + 0,2659732t^8 \\
& + 0,0360768t^{10} + 0,0045813t^{12} - \epsilon; \\
& |\epsilon| < 1,6 \times 10^{-7}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
I_1(z) = & z[0,5 + 0,87890594t^2 + 0,51498869t^4 + 0,15084934t^6 + 0,02658733t^8 \\
& + 0,00301532t^{10} + 0,00032411t^{12} + \epsilon]; \\
& |\epsilon| < 8,0 \times 10^{-9}.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

sendo:

$$t = \frac{z}{3,75}. \tag{A.5}$$

2. Para $z > 2$:

$$\begin{aligned}
k_0(z) = & + \frac{1}{\sqrt{z}e^z} [1,25331414 \\
& - 0,07832358 \left(\frac{2}{z}\right) + 0,02189568 \left(\frac{2}{z}\right)^2 - 0,01062446 \left(\frac{2}{z}\right)^3 \\
& + 0,00587872 \left(\frac{2}{z}\right)^4 - 0,00251540 \left(\frac{2}{z}\right)^5 + 0,00053208 \left(\frac{2}{z}\right)^6 \\
& + \epsilon_{K_0}]; \\
& |\epsilon| < 1,9 \times 10^{-7}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
k_1(z) = & \frac{1}{\sqrt{z}e^z} [1,25331414 \\
& + 0,23498619 \left(\frac{2}{z}\right) - 0,03655620 \left(\frac{2}{z}\right)^2 + 0,01504268 \left(\frac{2}{z}\right)^3 \\
& - 0,00780353 \left(\frac{2}{z}\right)^4 - 0,00325614 \left(\frac{2}{z}\right)^5 - 0,00068245 \left(\frac{2}{z}\right)^6 \\
& + \epsilon_{K_1}]; \\
& |\epsilon| < 2,2 \times 10^{-7}.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Apêndice B

Termo Regular e Singular da Solução Fundamental de Deslocamento

B.1 Função de Bessel

A metodologia de integração logarítmica consiste em separar os termos logarítmico e regular de uma equação e integrá-los com suas respectivas quadraturas gaussianas. De acordo com as equações presentes no Apêndice A, pode-se reescrevê-las a fim de separar tais termos.

$$\begin{aligned} A(z) &= k_0(z) + \frac{2}{z} \left[k_1(z) - \frac{1}{z} \right]; \\ B(z) &= k_0(z) + \frac{1}{z} \left[k_1(z) - \frac{1}{z} \right]. \end{aligned} \tag{B.1}$$

1. Para $0 < z \leq 2$

Para o cálculo da variável k_0 , tem-se:

$$I_0(z) = 1.0 + C_{I_0}(z), \tag{B.2}$$

onde

$$\begin{aligned} C_{I_0}(z) = & 3,5156229t^2 + 3,0899424t^4 + 1,2067492t^6 + \\ & 0,2659732t^8 + 0,0360768t^{10} + 0,0045813t^{12}; \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
K_0(z) &= -\ln\left(\frac{z}{2}\right)I_0(z) + C_{K_0}(z); \\
K_0(z) &= -\ln\left(\frac{z}{2}\right)(1.0 + C_{I_0}(z)) + C_{K_0}(z); \\
K_0(z) &= -\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \bar{C}_{I_0}(z) + C_{K_0}(z),
\end{aligned} \tag{B.4}$$

onde

$$\begin{aligned}
C_{K_0}(z) &= -0,57721566 \\
&+ 0,42278420\left(\frac{z}{2}\right)^2 + 0,23069756\left(\frac{z}{2}\right)^4 + 0,03488590\left(\frac{z}{2}\right)^6 \\
&+ 0,00262698\left(\frac{z}{2}\right)^8 + 0,00010750\left(\frac{z}{2}\right)^{10} + 0,00000740\left(\frac{z}{2}\right)^{12},
\end{aligned} \tag{B.5}$$

e

$$\bar{C}_{I_0}(z) = -\ln\left(\frac{z}{2}\right)C_{I_0}(z). \tag{B.6}$$

Para o cálculo da variável k_1 , tem-se:

$$I_1(z) = \frac{z}{2} + C_{I_1}(z), \tag{B.7}$$

onde

$$\begin{aligned}
C_{I_1}(z) &= z(0,87890594t^2 + 0,51498869t^4 + 0,15084934t^6 + \\
&0,02658733t^8 + 0,00301532t^{10} + 0,00032411t^{12});
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
K_1(z) &= \frac{1}{z} \left[z \ln\left(\frac{z}{2}\right)I_1(z) + 1 \right] + C_{K_1}(z); \\
K_1(z) &= \frac{1}{z} \left[z \ln\left(\frac{z}{2}\right) \left(\frac{z}{2} + C_{I_1}(z) \right) + 1 \right] + C_{K_1}(z); \\
K_1(z) &= \ln\left(\frac{z}{2}\right) \left(\frac{z}{2} + C_{I_1}(z) \right) + \frac{1}{z} + C_{K_1}(z); \\
K_1(z) &= \frac{z}{2} \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{z} + \bar{C}_{I_1}(z) + C_{K_1}(z),
\end{aligned} \tag{B.9}$$

onde

$$\begin{aligned}
C_{K_1}(z) &= \frac{1}{z} [0,15443144\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 0,67278579\left(\frac{z}{2}\right)^4 - 0,18156897\left(\frac{z}{2}\right)^6 - \\
&0,01919402\left(\frac{z}{2}\right)^8 - 0,00110404\left(\frac{z}{2}\right)^{10} - 0,00004686\left(\frac{z}{2}\right)^{12}],
\end{aligned} \tag{B.10}$$

e

$$\bar{C}_{I_1}(z) = \ln\left(\frac{z}{2}\right)C_{I_1}(z). \quad (\text{B.11})$$

Substituindo-se as equações B.4 e B.9 em B.1, tem-se:

$$\begin{aligned} A(z) &= -\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \bar{C}_{I_0}(z) + C_{K_0}(z) + \frac{2}{z} \left[\frac{z}{2} \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{z} + \bar{C}_{I_1}(z) + C_{K_1}(z) - \frac{1}{z} \right]; \\ A(z) &= -\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \bar{C}_{I_0}(z) + C_{K_0}(z) + \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \bar{C}_{I_1}^A(z) + \bar{C}_{K_1}^A(z); \\ A(z) &= \bar{C}_{I_0}(z) + C_{K_0}(z) + \bar{C}_{I_1}^A(z) + \bar{C}_{K_1}^A(z), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{C}_{I_1}^A(z) &= \frac{2}{z}\bar{C}_{I_1}(z); \\ \bar{C}_{K_1}^A(z) &= \frac{2}{z}C_{K_1}(z). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} B(z) &= -\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \bar{C}_{I_0}(z) + C_{K_0}(z) + \frac{1}{z} \left[\frac{z}{2} \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{z} + \bar{C}_{I_1}(z) + C_{K_1}(z) - \frac{1}{z} \right]; \\ B(z) &= -\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \bar{C}_{I_0}(z) + C_{K_0}(z) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \bar{C}_{I_1}^B(z) + \bar{C}_{K_1}^B(z); \\ B(z) &= -\frac{1}{2}(\ln z - \ln 2) + \bar{C}_{I_0}(z) + C_{K_0}(z) + \bar{C}_{I_1}^B(z) + \bar{C}_{K_1}^B(z); \\ B(z) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\ln 2}{2} + \bar{C}_{I_0}(z) + C_{K_0}(z) + \bar{C}_{I_1}^B(z) + \bar{C}_{K_1}^B(z); \\ B(z) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{z}\right) + B^C(z), \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

onde

$$\begin{aligned} B^C(z) &= \frac{\ln 2}{2} + \bar{C}_{I_0}(z) + C_{K_0}(z) + \bar{C}_{I_1}^B(z) + \bar{C}_{K_1}^B(z); \\ \bar{C}_{I_1}^B(z) &= \frac{1}{z}\bar{C}_{I_1}(z); \\ \bar{C}_{K_1}^B(z) &= \frac{1}{z}C_{K_1}(z). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

2. Para $z > 2$

Para a condição $z > 2$, não é necessário separar os termos logarítmico e regular de uma equação pois não há ocorrência de singularidade nesta situação. Portanto, $A(z)$ e $B(z)$ serão calculados conforme o Apêndice A.

B.2 Termos Regulares e Singulares da Solução Fundamental de Deslocamento

Para a solução fundamental de deslocamento proposta por Weeën (1982b), as equações podem ser reescritas conforme os termos separados no item B.1.

a) Termo $U_{\alpha\beta}$:

$$U_{\alpha\beta}(S, T) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \{ [8B(z) - (1-\nu)(2\ln z - 1)]\delta_{\alpha\beta} - [8A(z) + 2(1-\nu)]r_{,\alpha}r_{,\beta} \}. \quad (\text{B.16})$$

Desenvolvendo o termo onde ocorre a singularidade, tem-se:

$$\begin{aligned} [8B(z) - (1-\nu)(2\ln z - 1)]\delta_{\alpha\beta} &= \\ \left[8 \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{z} \right) + B^C(z) \right) - (1-\nu)(-2\ln \left(\frac{1}{z} \right) - 1) \right] \delta_{\alpha\beta} &= \\ \left[4 \ln \left(\frac{1}{z} \right) + 8B^C(z) + 2(1-\nu) \ln \left(\frac{1}{z} \right) + (1-\nu) \right] \delta_{\alpha\beta} &= \\ \left[2(3-\nu) \ln \left(\frac{1}{z} \right) + 8B^C(z) + 1-\nu \right] \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Substituindo o termo B.17 na Eq.B.16, obtém-se:

$$U_{\alpha\beta}(S, T) = \kappa_{\alpha\beta}^S \ln \left(\frac{1}{z} \right) + \kappa_{\alpha\beta}^R(z), \quad (\text{B.18})$$

onde

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta}^S &= \frac{(3-\nu)}{4\pi\mu(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta}; \\ \kappa_{\alpha\beta}^R(z) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \{ (8B^C(z) + 1-\nu)\delta_{\alpha\beta} - [8A(z) + 2(1-\nu)]r_{,\alpha}r_{,\beta} \}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

b) Termo $U_{\alpha 3}$ e $U_{3\alpha}$:

$$\begin{aligned} U_{\alpha 3}(S, T) &= -U_{3\alpha}(S, T) = \frac{1}{8\pi\mu}(2\ln z - 1)rr_{,\alpha}; \\ U_{\alpha 3}(S, T) &= -U_{3\alpha}(S, T) = \kappa_{\alpha 3}^S \ln\left(\frac{1}{z}\right) + \kappa_{\alpha 3}^R(z), \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

onde

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha 3}^S &= 0; \\ \kappa_{\alpha 3}^R(z) &= \frac{1}{8\pi\mu}(2\ln z - 1)rr_{,\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

c) Termo U_{33} :

$$\begin{aligned} U_{33}(S, T) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)\lambda^2} [(1-\nu)(\ln z - 1)z^2 - 8\ln z]; \\ U_{33}(S, T) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)\lambda^2} \left[8\ln\left(\frac{1}{z}\right) + (1-\nu)(\ln z - 1)z^2 \right]; \\ U_{33}(S, T) &= \kappa_{33}^S \ln\left(\frac{1}{z}\right) + \kappa_{33}^R(z), \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

onde

$$\begin{aligned} \kappa_{33}^S &= \frac{1}{\pi\mu(1-\nu)\lambda^2}; \\ \kappa_{33}^R(z) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)\lambda^2} [(1-\nu)(\ln z - 1)z^2]. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Apêndice C

Termo Regular e Singular referente à Solução Fundamental da Integral de Domínio

A técnica utilizada para tratar a singularidade da integral de domínio contendo o carregamento será feita na equação integral de contorno equivalente vista no item 3.2.5. Esta *EIC* possui um termo singular, e portanto, aplicará a mesma metodologia vista no Apêndice B. A técnica consiste em separar os termos logarítmico e regular de uma equação e integrá-los com suas respectivas quadraturas gaussianas.

Através da Eq.C.1, e as respectivas soluções fundamentais presentes no item 3.2.5, tem-se:

$$\int_{\Gamma_q} q(t) \left[v_{i,\alpha}^*(s, t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(s, t) \right] n_\alpha d\Gamma_q(t). \quad (\text{C.1})$$

A solução fundamental $v_{i,\alpha}^*$ não possui um termo singular, e portanto podemos expressá-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \kappa_{i,\alpha}^{vS} &= 0; \\ \kappa_{\alpha,\beta}^{vR}(z) &= \frac{r^2}{128\pi D} [\delta_{\alpha\beta}(4\ln(z) - 5) + 2(4\ln(z) - 3)r_{,\alpha}r_{,\beta}]; \\ \kappa_{3,\beta}^{vR}(z) &= -\frac{rr_{,\beta}}{128\pi D(1-\nu)\lambda^2} [32(2\ln(z) - 1) - z^2(1-\nu)(4\ln(z) - 5)]. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

O termo $u_{i\alpha}^*$ possui um termo singular, porém já foi tratado conforme Apêndice

B. Denominando o segundo termo constante da Eq.C.1 de C_C , tem-se:

$$C_C = -\frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}. \quad (\text{C.3})$$

Incluindo a Eq.C.3 nos termos já tratados, tem-se:

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta}^{uS} &= C_C \times \frac{(3-\nu)}{4\pi\mu(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta}; \\ \kappa_{\alpha\beta}^{uR}(z) &= C_C \times \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ (8B^C(z) + 1 - \nu) \delta_{\alpha\beta} - [8A(z) + 2(1-\nu)] r_{,\alpha} r_{,\beta} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Para o termo $u_{3\alpha}^*$, não há singularidade. Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} \kappa_{3\alpha}^{uS} &= 0; \\ \kappa_{3\alpha}^{uR}(z) &= C_C \times \frac{1}{8\pi\mu} (2 \ln z - 1) r r_{,\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$