Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Josué Morais Moura

MÉTODO ALTERNATIVO PARA REGRESSÃO TRIVARIADA EM PRESENÇA DE OUTLIERS

Belo Horizonte
2013

Josué Morais Moura

MÉTODO ALTERNATIVO PARA REGRESSÃO TRIVARIADA EM PRESENÇA DE OUTLIERS

Trabalho apresentado ao Curso de Especialização em do Departamento de Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, para a obtenção do grau de Especialista em Estatística.

Aluno: Josué Morais Moura
Orientador: Prof. Roberto Quinino

Belo Horizonte
2013

MÉTODO ALTERNATIVO PARA REGRESSÃO TRIVARIADA EM PRESENÇA DE OUTLIERS

Resumo

Este artigo discute a estimação dos coeficientes da equação de regressão trivariada por um método não-paramétrico e sua comparação com a metodologia clássica de mínimos quadrados. Foi simulado modelos trivariados com presença de violações dos pressupostos básicos da análise de regressão pelo método de mínimos quadrados. Para avaliação de desempenho dos métodos foi utilizado o erro quadrático médio. Concluiu-se que neste cenário o método não-paramétrico sugerido apresenta menor erro médio quadrático.

Palavras Chave: Regressão, Métodos Não-paramétricos, Mínimos Quadrados e Erro Quadrático Médio.

MÉTODO ALTERNATIVO PARA REGRESSÃO TRIVARIADA EM PRESENÇA DE OUTLIERS

Abstract

This article discusses the estimation of the coefficients of the regression equation trivariada by a non-parametric method and its comparison with the classical method of least squares. Trivariados was simulated models with the presence of violations of the basic assumptions of regression analysis by the method of least squares. For performance evaluation of the mean square error methods was used. It was concluded that in this scenario the non-parametric method suggested has lower mean square error.

Key-words: Regression, non-parametric methods, Least Squares, Mean Square Error.

MÉTODO ALTERNATIVO PARA REGRESSÃO TRIVARIADA EM PRESENÇA DE OUTLIERS

1. Introdução

O método dos mínimos quadrados é o procedimento de estimação dos parâmetros de um modelo de regressão por meio da minimização da soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados da variável resposta em uma amostra e seus valores preditos pelo modelo.

Possui aplicações em áreas como biologia, engenharia, estatística, física matemática, entre outras, principalmente aquelas que objetivam relacionar uma variável dependente (Y) em função de variáveis explicativas (X_1,...,X_k). O método foi proposto independentemente pelos matemáticos Carl Friedrich Gauss por volta de 1795 e Adrien Marie Legendre em torno de 1805. Apesar de ser um método eficiente ele é muito sensível quando as suposições de homocedasticidade, normalidade, indenpendência dos erros e não presença de outliers são violadas.

Para tentar contornar o problema de violação das suposições fundamentais na análise de regressão pelo método dos mínimos quadrados, avaliaremos o desempenho das estimativas calculadas com base em um método desenvolvido por Theil (1950) e Sen (1968).

O método desenvolvido por eles é caracterizado como um método não paramétrico, e é considerado robusto para regressão linear, escolhendo a inclinação mediana entre todas as retas possíveis encontradas pelas combinações de pares de pontos.

Métodos não paramétricos podem ser uma alternativa para estimação dos coeficientes da regressão,com características de eficiência e insensibilidade principalmente para dados com assimetrias, heterocedaticidade e outlires, Hussain (2005).

Neste artigo avaliaremos o desempenho do modelo trivariado: $Y = a + bX_1 + cX_2 + erro$. A estrutura subjacente do erro será apresentada na próxima seção.

A abordagem aqui descrita foi baseada em Theil (1950) e Birkes e Dodge (1993) e demanda apenas noções de combinação, média ponderada e solução de sistemas de três equações lineares a três incógnitas, conteúdo normalmente pertencente ao ensino médio.

Essencialmente o procedimento resume-se em encontrar todos os modelos que passam por, pelo menos três pontos e, utilizando-se a mediana dos interceptos e das inclinações, para calcular, respectivamente, a estimativa do intercepto e das inclinações do modelo final.

Apesar de o método ser de fácil compreensão, e no caso bivariado também de fácil implementação, para o caso trivariado temos a limitação da complexidade dos cálculos requeridos para a estimação dos parâmetros e ainda a reduzida quantidade de softwares disponíveis e adequados para tal objetivo.

Para mitigar as limitações mencionadas a realização dos cálculos foi desenvolvida através de um código de programação na linguagem do software Matlab. Através de dados de uma simulação de Monte Carlo encontraremos as estimativas do método não paramétrico e o compararemos com resultados do método de mínimos quadrados.

Como método de Monte Carlo, consideramos um método estatístico que se baseia em amostragens aleatórias massivas para obter resultados numéricos, isto é, repetindo sucessivas simulações um elevado numero de vezes.

O Erro Quadrático Médio (EQM) será a forma de avaliar a diferença entre os estimadores e o verdadeiro valor da quantidade estimada para os dois métodos que utilizaremos. O EQM mede a média do quadrado do erro, com o erro sendo o montante pelo qual o estimador difere da quantidade a ser estimada: EQM=Variância+(vício)^2.

O trabalho em si não pretende esgotar o assunto, mas lançar bases para trabalhos posteriores variando a metodologia adotada para cada vez mais comprovar a eficiência do modelo não paramétrico diante das violações de suposições básicas para a análise de regressão. Ou seja, este trabalho é um exemplo da maneira como gerar violações das suposições básicas para analisar os resultados e comparar os modelos apresentados.

A seguir apresentaremos detalhes da metodologia e os resultados apresentados na comparação dos métodos mencionados.

2. Metodologia

Com a rotina desenvolvida no Matlab, e apresentada no apêndice 1, foram gerados resultados para comparação dos coeficientes encontrados pelo método de Mínimos Quadrados e de Theil-Sen. A idéia é observar o que acontece quando saímos de um caso padrão para um caso com alterações nos pressupostos básicos. A metodologia aqui apresentada foi baseada em Theil (1950) e Birkes e Dodge (1993).

A equação trivariada trabalhada na simulação foi a seguinte: $Y = 2 + 3X_1 + 4X_2 + \varepsilon_i$. Em que $\varepsilon_i \sim N(0;k)$. Quando k=1, temos uma situação sem outliers e para k>0 temos a situação com outliers.

Na simulação foram geradas 36 situações diferentes, decorrentes das seguintes alterações: correlação entre as variáveis aleatórias x_1 e x_2, o tamanho da amostra, o percentual da amostra afetado pela contaminação com variância não constante.

Para a parte não contaminada utilizamos uma distribuição normal com média zero e desvio padrão um. Já para parte contaminada utilizamos média zero e desvio padrão k.

Neste trabalho discutimos as simulações utilizando o modelo $Y = 2 + 3X_1 + 4X_2 + \varepsilon_i$, no entanto, vários outros parâmetros e modelos foram avaliados e não constam no trabalho uma vez que os resultados e conclusões são equivalentes, como por exemplo, os testes com os modelos bivariados realizados na fase inicial do trabalho.

As correlações testadas foram 0,3 e 0,6; o tamanho amostral foi 30, 60 e 90; os percentuais de contaminação em relação à amostra foram 0%, 20% e 40% e por fim os desvios para geração das contaminações foram 9 e 15 (k).

A rotina para cada modelo foi reproduzido mil vezes, tanto para o método dos mínimos quadrados, quando para o método não paramétrico. E a métrica de comparação como já foi exposto será o erro médio quadrático.

Alguns dos dados selecionados para nossa simulação foram definidos por caráter computacional. O tamanho da amostra é o caso, pois quando rodamos a rotina para os casos com tamanho igual a noventa o programa durou mais de 20 horas para finalizar a rotina, dado nossas condições de recursos tecnológicos.

Para trabalhos futuros temos uma gama de possíveis variações dos dados estabelecidos aqui para complementar nossa análise muito concentrada e baseadas neles.

2.1- Método dos Mínimos Quadrados

O principio dos mínimos quadrados é uma regra para estimar os coeficientes de uma regressão. Este principio afirma que devemos minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados de Y_i e seu valor esperado $E(Y_i)$. Dadas as observações amostrais Y_i, a minimização da função soma de quadrados é um exercício rotineiro de cálculo.

Segundo teorema de Gauss-Markov os estimadores de mínimos quadrados são os melhores estimadores lineares não-tendenciosos dos parâmetros em um modelo de regressão múltipla, dado que se respeitem os pressupostos do modelo, Hill (2000).

Os pressupostos são os seguintes: cada erro aleatório tem distribuição de probabilidade com média zero; erros são homocedásticos; qualquer par de erros é não correlacionado; os erros aleatórios devem ter distribuição de probabilidade normal, Hill (2000).

A variância do erro afeta diretamente os estimadores de mínimos quadrados, se ela for grande, então os dados poderão apresentar grande dispersão em relação à função regressão e certamente conterão menos informação sobre os valores dos parâmetros.

O tamanho da amostra também afeta os estimadores de mínimos quadrados, quanto maior a amostra menor será a variância e assim dá uma estimação mais precisa dos parâmetros.

Então, de acordo com nossa metodologia apresentada alguns dos pressupostos do método de mínimos quadrados serão afetados. Vamos avaliar o comportamento dos estimadores frente aos do método de Theil-Sen.

2.2- Método Theil-Sen

A metodologia não-paramétrica baseada na estimativa de Theil (1950) e Sen (1968) e descrita em Dias (2005) e Hussain (1983) tem como alternativa o cálculo de todos possíveis coeficientes formados pela combinação de dados amostrais. Em seguida, encontramos a mediana destes coeficientes para termos uma estimativa do verdadeiro valor.

No nosso caso temos que combinar os trios de pontos para encontrar os coeficientes de todos os possíveis planos, e armazená-los para tirarmos a mediana e chegar à estimativa do verdadeiro valor.

Por exemplo, com um conjunto de dados de quatro observações para as variáveis y, x_1 e x_2 seriam possíveis a montagem de quatro sistemas com três incógnitas e três equações, que é a combinação de quatro tomados três a três. Tomados três a três porque existem três parâmetros para serem estimados.

Veja o exemplo hipotético para entendimento da lógica da montagem dos sistemas. Considere o conjunto de dados abaixo:

Quadro 1 – Conjuntos de Trios de Pontos

Trios	y	x1	x2
1º	12	1	4
2º	10	2	2
3º	11	3	1
4º	14	4	3

Com a combinação C_3^4, é possível a elaboração de quatro sistemas, alternando a ordenação das observações, como demonstrado no Quadro 2:

Quadro 2 – Conjuntos de Sistemas

Sistema 1	1º	2º	3º
Sistema 2	1º	2º	4º
Sistema 3	1º	3º	4º
Sistema 4	2º	3º	4º

Seguindo a ordenação demonstrada acima é possível montar os sistemas, veja os quadros abaixo com os resultados:

Quadro 3 – Sistema 1

12	1	4
10	2	2
11	3	1

Quadro 4 – Sistema 2

12	1	4
10	2	2
14	4	3

Quadro 5 – Sistema 3

12	1	4
11	3	1
14	4	3

Quadro 6 – Sistema 4

10	2	2
11	3	1
14	4	3

Com os dados acima são calculados as estimativas dos parâmetros e em seguida estas são armazenadas. As medianas dos coeficientes constituem nas estimativas de Theil-Sen.

Na Tabela 1 ilustramos o procedimento completo para este exemplo e clarificação do procedimento. Observe que os estimadores de mínimos quadrados e Theil-Sen podem ser consideravelmente diferentes.

Tabela 1 - Descrição do Estimador de Theil-Sem e Minimos Quadrados.

Sistemas	**Pontos (Y,X_1,X_2)**	**Reta**	**Intercepto a_i**	**Inclinação b_i**	**Inclinação c_i**
Sistema 1	(12,1,4) (10,2,2) (11,3,1)	$Y=a_1+b_1X_1+c1X_2$	-4	4	3
Sistema 2	(12,1,4) (10,2,2) (14,4,3)	$Y=a_1+b_1X_1+c1X_2$	4,4	1,2	1,6
Sistema 3	(12,1,4) (11,3,1) (14,4,3)	$Y=a_1+b_1X_1+c1X_2$	7	1	1
Sistema 4	(10,2,2) (11,3,1) (14,4,3)	$Y=a_1+b_1X_1+c1X_2$	5,33	1,66	0,66
		Mediana	4,87	1,43	1,30
		Mínimos Quadrados	5,92	1,17	1,17

Assim como neste exemplo hipotético a rotina desenvolvida gerará as combinações dos pontos e cálculos dos coeficientes, porém para uma quantidade muito maior de dados. Por isso, mencionamos a questão da escolha do tamanho da amostra como fator limitador do trabalho, devido às condições computacionais e de tempo.

3. Resultados

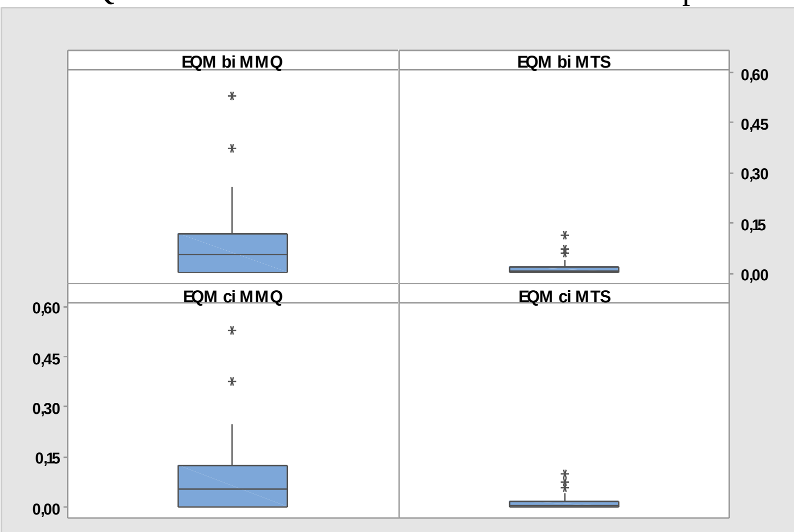
Com a rotina desenvolvida no software Matlab, e apresentada no apêndice 1, os cálculos foram reproduzidos mil vezes, para cada alteração dos modelos, tanto para o método dos mínimos quadrados, quando para o método Theil-Sen.

Ou seja, para cada alteração na correlação (0,3 e 0,6), no tamanho amostral (30,60 e 90), no desvio padrão (9 e 15) e nos percentuais de contaminação de alteração da variância (0%, 20% e 40%) a rotina rodou mil vezes, desta forma a rotina foi executada trinta e seis mil vezes. Gerando assim uma massa de dados para cálculo dos coeficientes para cada cenário.

Depois, calculou-se a média e variância dos coeficientes para compararmos o desempenho de cada método de estimação. Estamos avaliando o caso específico $Y = 2 + 3X_1 + 4X_2 + \varepsilon_i$, do modelo geral $Y = a + bX_1 + cX_2 + erro$. Então vamos estimar os coeficientes *b* e *c*.

Na comparação entre os métodos foi utilizado o erro quadrático médio avaliando assim o viés e vício simultaneamente, Bussab (2003).

Gráfico 1 – Erro Quadrático Médio dos coeficientes estimados pelos dois métodos

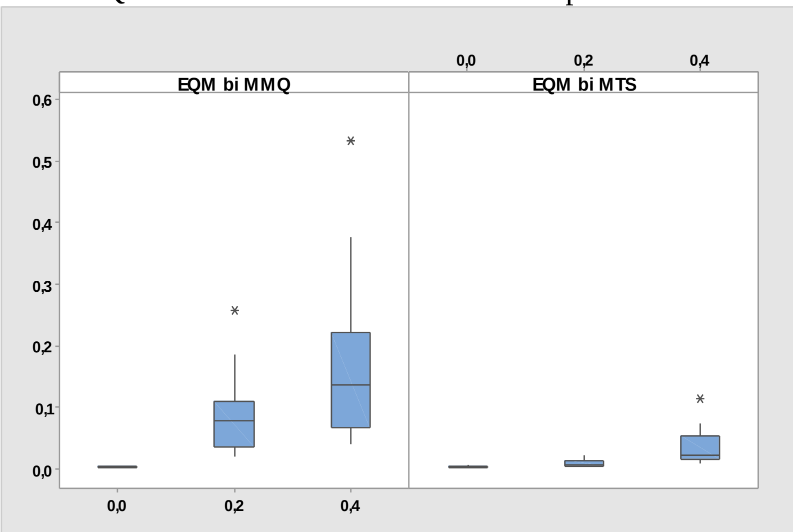


Legenda: EQM: Erro Quadrático; MMQ: Método de Mínimos Quadrados; MTS: Método de Theil-Sen; *bi* e *ci*: coeficientes estimados.

O gráfico 1 de boxplot apresenta os valores do erro quadrático médio dos dois métodos utilizados. Com este gráfico conseguimos perceber a maior dispersão dos dados no Método de Mínimos Quadrados em comparação ao do Método de Theil-Sen.

Mas, este resultado geral foi influenciado pelas alterações sugeridas no modelo. Vamos procurar analisar os efeitos destas alterações e seus reflexos no erro quadrático médio dos métodos analisados.

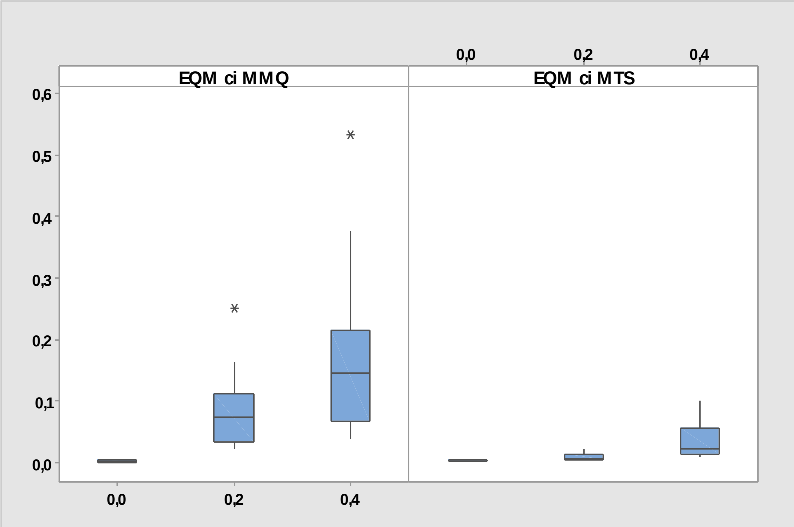
Gráfico 2: Erro Quadrático Médio do coeficiente *bi* por nível de contaminação



Legenda: EQM: Erro Quadrático; MMQ: Método de Mínimos Quadrados; MTS: Método de Theil-Sen; *bi* e *ci*: coeficientes estimados.

No gráfico 2 fica evidente a influencia do percentual de contaminação do erro com a alteração do desvio, este resultado foi para o coeficiente *b*. O efeito foi ampliado para o método dos Mínimos Quadrados, resultado já era esperado devido as os pressupostos deste modelo. Agora vamos ver que o mesmo resultado acontece para o coeficiente *c*, quando observamos os erros quadráticos médios.

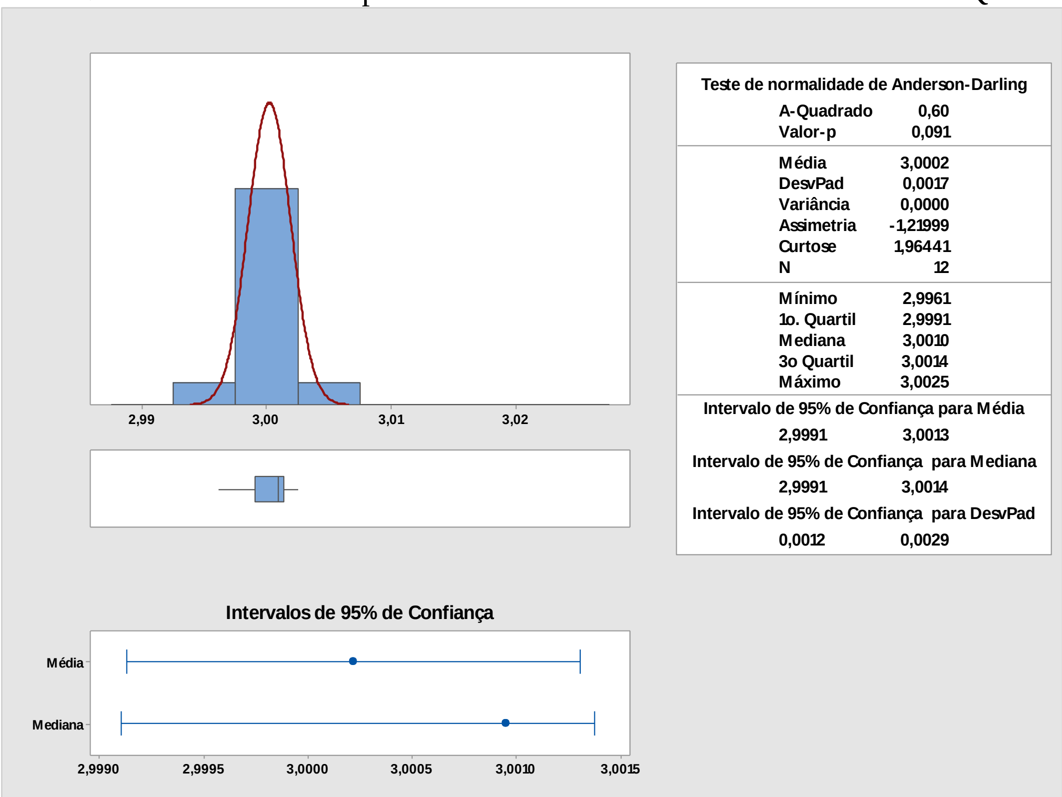
Gráfico 3: Erro Quadrático Médio do coeficiente *ci* por nível de contaminação



Legenda: EQM: Erro Quadrático; MMQ: Método de Mínimos Quadrados;
MTS: Método de Theil-Sen; *bi* e *ci*: coeficientes estimados.

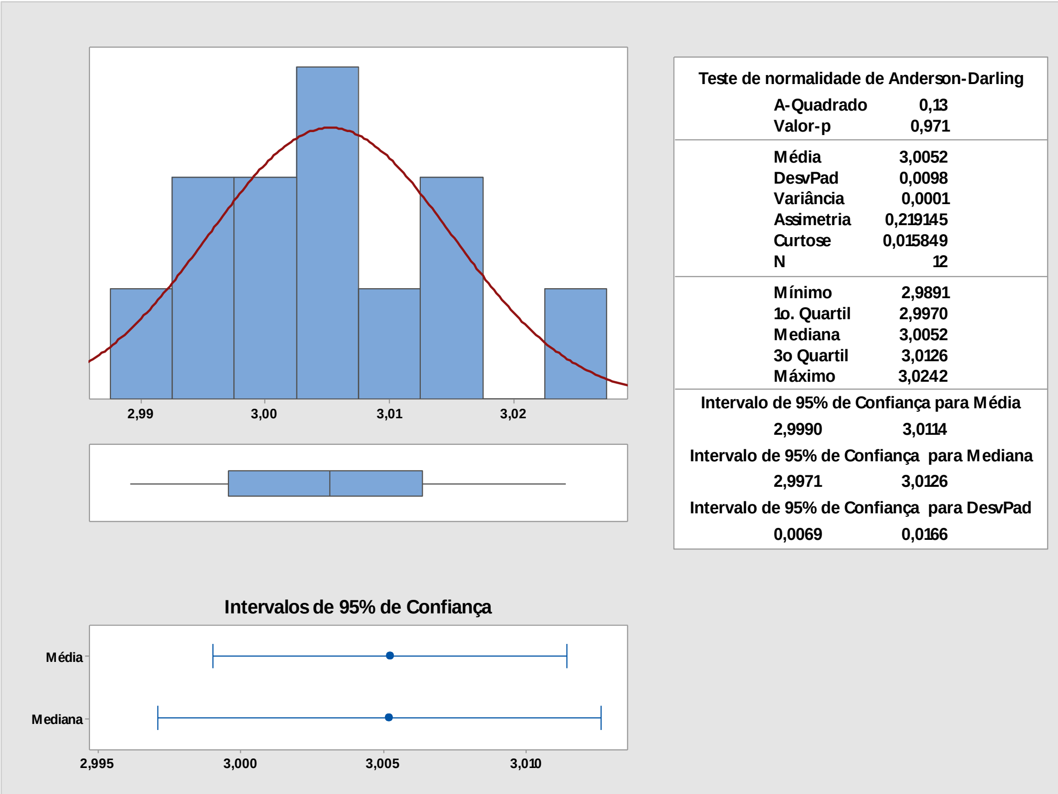
Vamos analisar no detalhe o comportamento dos coeficientes quando afetados por esta contaminação. Começando pelo método de Mínimos Quadrados observaremos abaixo os dados dos coeficientes *b*, sem a influência de dados contaminados.

Gráfico 4: Estatísticas Básicas para os coeficientes *bi* do Método de Mínimos Quadrados



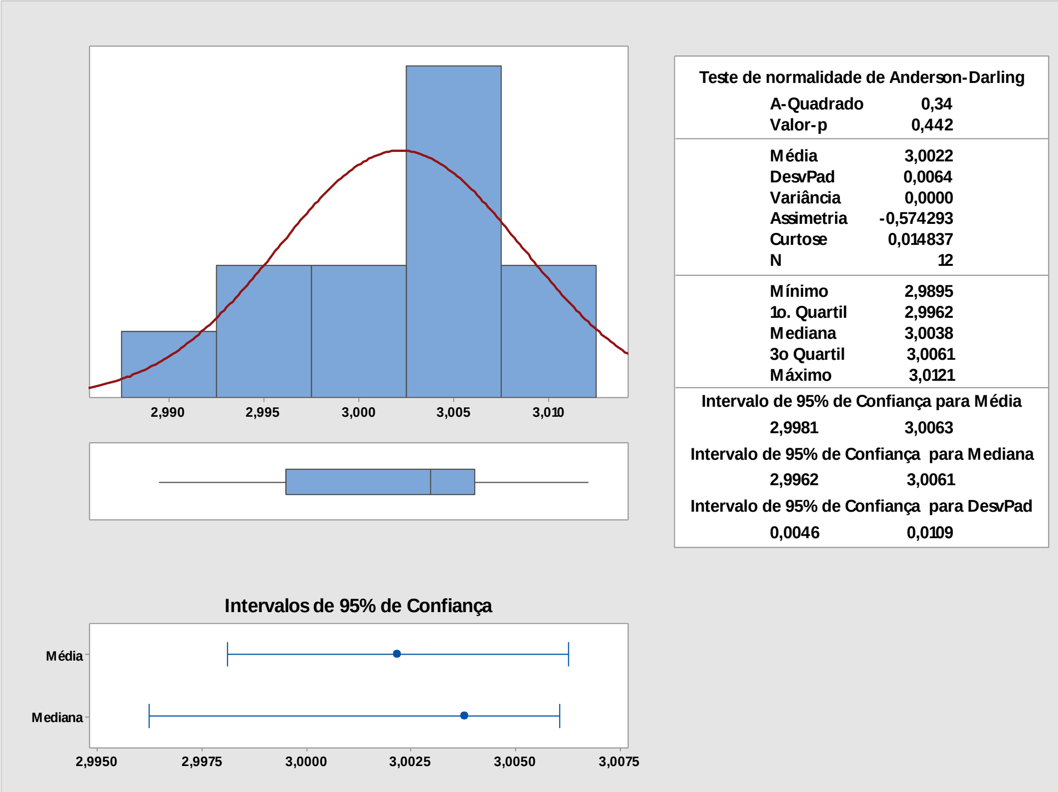
Lembrando que o verdadeiro valor do coeficiente *b* é 3, podemos verificar que a média dos coeficientes foi 3,002, praticamente o valor verdadeiro. Mas, este dado é sem levar em consideração o efeito de contaminação. No próximo gráfico é possível verificar o comportamento após a contaminação de 40% dos erros.

Gráfico 5: Estatísticas Básicas para os coeficientes *bi* do Método de Mínimos Quadrados com 40% dos erros contaminados



Apesar da média ainda está próxima do valor verdadeiro a dispersão dos dados foi muito maior. E como veremos abaixo a influencia da contaminação foi menor para o método de Theil-Sen.

Gráfico 6: Estatísticas Básicas para os coeficientes *bi* do Método de Theil-Sen com 40% dos erros contaminados



Tomando como base a tabela constante no apêndice 2, podemos observar que doze dos trinta e seis modelos tiveram o EQM menor para estimação por Mínimos Quadrados. Estes modelos foram exatamente os que não sofreram efeito da parte contaminada.

Todos os demais modelos tiveram o EQM menor para estimação pelo método de Theil-Sen. Mas de um modo geral os valores do EQM foram menores quando a correlação entre as variáveis foi menor.

4. Considerações Finais

Pretendeu-se neste trabalho demonstrar que o método de Theil-Sen é uma alternativa para estimação dos coeficientes da regressão, e apresenta características de eficiência e insensibilidade principalmente para dados com assimetrias, heterocedaticidade e outlires. Isso quando comparado ao método de mínimos quadrados, nas mesmas condições de violação de alguns pressupostos básicos deste último.

E este resultado pretendido foi exatamente o alcançado, quando os modelos sofreram alguma alteração do pressuposto básico, o método de Theil-Sen teve um erro quadrático médio menor. Ou seja, a relação do coeficiente estimado pelo método de Theil-Sen com o verdadeiro valor do coeficiente foi melhor avaliado do que o coeficiente estimado pelo método de mínimos quadrados.

Como já mencionado, este trabalho em si não pretendeu esgotar o assunto, mas lançar bases para trabalhos posteriores, pois variando a metodologia adotada, pode-se corroborar para demonstrar cada vez mais a robustez do modelo não paramétrico, diante das violações de suposições básicas para a análise de regressão.

5. Referências Bibliográficas

BIRKES, D. , DODGE, Y. (1993): Alternative Methods of Regression. Wiley, New York.

BUSSAB, W. O. e MORETTIN, P. A. (2003): Estatística Básica. Saraiva.

DIAS, A. B. et alii. (2005): Estimação dos parâmetros angular e linear da equação de regressão linear simples pelo método não-paramétrico. Ciência e Natura, UFSM.

FERNANDES, R. e LEBLANC, S. G. (2005): Parametric and non-parametric linear regressions for predicting biophysical parameters in the presence of measurement errors. Canadá.

HILL, C. et alii. (2000); Econometria. Editora Saraiva.

HUSSAIN, S. S. e SPRENT, P. (1983): Non-Paramétric Regression. JSTOR's.

SEN, K. P. (1968): Estimates of Regression Coefficient Based on Kendall's Tau. *Journal of the American Statistical Association*, v. 63, p.1379-1389.

THEIL, H. (1950): A rank-invariant method of linear and polynomial regression analysis. I, II and III. Koninklijke Nederlandse. Akademie van Wetenschappen, Proceedings, ser. A, vol. 53, pp. 386–392, 521–525, 1397–1412.

6. Apêndice 1 – Rotina de Simulação

```
clear all
tic

corridas=1000;
tamanho=90;%VARIAVEL DE ALTERAÇÂO
tamanho1=90;%VARIAVEL DE ALTERAÇÂO
tamanho2=tamanho-tamanho1;
k=15;%VARIAVEL DE ALTERAÇÂO

b0=2;
b1=3;
b2=4;

mu(1,1)=2;
mu(1,2)=4;

v1=10.5;
v2=10.5;
corr=0.6;%VARIAVEL DE ALTERAÇÂO

sigma(1,1)=v1;
sigma(2,2)=v2;
sigma(1,2)=corr*(v1^0.5)*(v2^0.5);
sigma(2,1)=sigma(1,2);
sigma;

for i=1:corridas
n=mvnrnd(mu,sigma,tamanho);

r1=random('normal',0,1,tamanho1,1);
r2=random('normal',0,k,tamanho2,1);
r=[r1;r2];

y=b0+b1.*n(:,1)+b2.*n(:,2)+r;
x=[ones(tamanho,1),n];

B=regress(y,x);

c=nchoosek(1:tamanho,3);
c1=c(:,1);
c2=c(:,2);
c3=c(:,3);
k1=size(c);
k2=k1(1,1);

for j=1:k2
j1=c1(j);
j2=c2(j);
j3=c3(j);
```

```
y11=y(j1);
x11=n(j1,1);
x21=n(j1,2);

y12=y(j2);
x12=n(j2,1);
x22=n(j2,2);

y13=y(j3);
x13=n(j3,1);
x23=n(j3,2);

x1=[x11 x12 x13];
x2=[x21 x22 x23];
yy=[y11 y12 y13];

yy=yy';
xx=[ones(3,1),x1',x2'];

B1=regress(yy,xx);

m0(j)=B1(1,1);
m1(j)=B1(2,1);
m2(j)=B1(3,1);
end

saida1(i)=B(2,1);
saida2(i)=B(3,1);
saida3(i)=median(m1);
saida4(i)=median(m2);
end

s=[saida1',saida3',saida2',saida4'];
medmqinc1=(mean(saida1));
medtsinc1=(mean(saida3));
medmqinc2=(mean(saida2));
medtsinc2=(mean(saida4));
emqmqinc1=var(saida1)+(mean(saida1)-b1)^2;
emqtsinc1=var(saida3)+(mean(saida3)-b1)^2;
emqmqinc2=var(saida2)+(mean(saida2)-b2)^2;
emqtsinc2=var(saida4)+(mean(saida4)-b2)^2;

W=[medmqinc1,medtsinc1,medmqinc2,medtsinc2,emqmqinc1,emqtsinc1,emqmqinc2,emqtsinc2]
Toc
```

7. Apêndice 2 – Resultados Geral dos 36 modelos

MODELOS					RESULTADOS PARA OS DOIS MODELOS							
#	k	Tamanho da Amostra	Contaminação	Correlação	Inclinação *bi* MMQ	Inclinação *bi* MTS	Inclinação *ci* MMQ	Inclinação *ci* MTS	EQM *bi* MMQ	EQM *bi* MTS	EQM *ci* MMQ	EQM *ci* MTS
1	9	30	0%	0,3	3,0009	3,0005	4,0029	4,0017	0,0040	0,0049	0,0040	0,0049
2	9	30	20%	0,3	3,0044	3,0020	4,0033	3,9988	0,0739	0,0143	0,0681	0,0134
3	9	30	40%	0,3	2,9891	2,9895	3,9880	4,0010	0,1184	0,0410	0,1314	0,0420
4	9	60	0%	0,3	2,9995	3,0004	3,9983	3,9983	0,0018	0,0022	0,0019	0,0024
5	9	60	20%	0,3	3,0009	3,0030	3,9979	3,9982	0,0334	0,0056	0,0300	0,0050
6	9	60	40%	0,3	3,0022	3,0039	3,9942	3,9952	0,0609	0,0157	0,0623	0,0162
7	9	90	0%	0,3	3,0010	3,0013	3,9989	3,9994	0,0012	0,0015	0,0012	0,0015
8	9	90	20%	0,3	2,9989	2,9980	4,0005	4,0007	0,0206	0,0038	0,0222	0,0034
9	9	90	40%	0,3	3,0068	3,0037	4,0031	4,0005	0,0401	0,0106	0,0390	0,0095
10	15	30	0%	0,3	3,0014	3,0024	4,0008	4,0029	0,0040	0,0051	0,0041	0,0053
11	15	30	20%	0,3	2,9941	3,0014	3,9937	3,9964	0,1867	0,0148	0,1630	0,0144
12	15	30	40%	0,3	3,0242	3,0064	3,9764	3,9934	0,3758	0,0735	0,3778	0,0762
13	15	60	0%	0,3	2,9990	2,9982	4,0000	4,0017	0,0018	0,0022	0,0019	0,0023
14	15	60	20%	0,3	3,0004	3,0030	3,9981	3,9984	0,0905	0,0064	0,0806	0,0057
15	15	60	40%	0,3	3,0042	3,0051	3,9911	3,9945	0,1680	0,0236	0,1713	0,0242
16	15	90	0%	0,3	3,0013	3,0012	3,9995	3,9990	0,0013	0,0016	0,0011	0,0014
17	15	90	20%	0,3	3,0052	3,0021	4,0030	3,9999	0,0550	0,0041	0,0566	0,0038
18	15	90	40%	0,3	3,0110	3,0044	4,0057	4,0008	0,1097	0,0151	0,1077	0,0139
19	9	30	0%	0,6	2,9994	2,9999	3,9986	3,9991	0,0057	0,0070	0,0055	0,0072
20	9	30	20%	0,6	3,0094	3,0016	3,9895	3,9978	0,0911	0,0177	0,1001	0,0191
21	9	30	40%	0,6	3,0062	2,9999	3,9982	3,9993	0,1794	0,0600	0,1874	0,0619
22	9	60	0%	0,6	2,9990	2,9973	4,0000	4,0020	0,0026	0,0032	0,0027	0,0032
23	9	60	20%	0,6	3,0076	3,0021	4,0001	3,9990	0,0435	0,0074	0,0479	0,0083
24	9	60	40%	0,6	2,9956	2,9949	3,9925	4,0011	0,0865	0,0225	0,0822	0,0212
25	9	90	0%	0,6	3,0025	3,0026	3,9983	3,9979	0,0019	0,0022	0,0018	0,0021
26	9	90	20%	0,6	3,0032	3,0018	3,9984	3,9970	0,0297	0,0049	0,0308	0,0047
27	9	90	40%	0,6	3,0013	3,0023	3,9974	3,9950	0,0608	0,0146	0,0581	0,0137
28	15	30	0%	0,6	2,9961	2,9954	4,0032	4,0032	0,0060	0,0077	0,0056	0,0071
29	15	30	20%	0,6	3,0133	3,0087	3,9781	3,9908	0,2586	0,0219	0,2519	0,0224
30	15	30	40%	0,6	3,0147	3,0121	4,0021	3,9997	0,5335	0,1156	0,5325	0,1022
31	15	60	0%	0,6	3,0010	3,0010	3,9981	3,9988	0,0025	0,0031	0,0025	0,0031
32	15	60	20%	0,6	2,9935	2,9945	4,0131	4,0054	0,1182	0,0081	0,1164	0,0090
33	15	60	40%	0,6	2,9942	2,9949	3,9873	4,0016	0,2375	0,0339	0,2258	0,0313
34	15	90	0%	0,6	3,0015	3,0014	3,9994	3,9988	0,0018	0,0022	0,0016	0,0020
35	15	90	20%	0,6	3,0184	3,0041	3,9904	3,9981	0,0854	0,0058	0,0827	0,0058
36	15	90	40%	0,6	3,0132	3,0091	3,9983	3,9979	0,1578	0,0216	0,1625	0,0217