

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

UMA ABORDAGEM LMI PARA ANÁLISE DO CONSENSO  
EM SISTEMAS MULTI-AGENTES SUJEITOS A ATRASOS NO  
TEMPO E TOPOLOGIA VARIÁVEL

CARLOS RAIMUNDO PEREIRA DOS SANTOS JUNIOR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Fernando de Oliveira Souza

BELO HORIZONTE

2014

*À minha família.*

# Agradecimentos

- A minha família, por todo apoio e suporte.
- A minha namorada Gessika, pela ajuda, companheirismo e infinita paciência.
- Ao orientador, professor Fernando de Oliveira Souza, pela paciência, competência, amizade e excepcional orientação.
- Ao conterrâneo e aluno de doutorado Heitor Savino, pelas ideias, disponibilidade e amizade.
- Aos amigos e colegas da Sala do Mestrado e do DIFCOM, pela amizade e por propiciarem ótimos ambientes de trabalho.
- Ao corpo docente e funcionários do PPGEE, pela colaboração e atenção.
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo fomento.

*Tudo que uma pessoa pode imaginar, outras podem  
tornar real.*

*Júlio Verne*

# Resumo

Este trabalho apresenta métodos de análise de consenso para sistemas multi-agentes com topologia variável sujeitos a atrasos variantes, não diferenciáveis e não uniformes. É assumido que a mudança de topologia se comporta como uma cadeia de Markov de tempo contínuo. O sistema multi-agente é transformado em um sistema linear sujeito a saltos markovianos de modo que a análise do consenso passa a ser realizada por meio de uma análise de estabilidade deste sistema transformado. A condição de consenso é verificada por meio de condições suficientes baseadas em desigualdades matriciais lineares. Os resultados são ilustrados por meio de exemplos numéricos e simulações.

Palavras-chave: sistemas multi-agente, análise de consenso, atrasos variantes, topologia variável, sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos, desigualdades matriciais lineares.

# Abstract

This work presents consensus analysis methods for multi-agent systems with switching topology subjects to non-differentiable and nonuniform time-varying delays. It is considered that the change of topology behaves as a continuous time Markov chain. The multi-agent system is transformed into a Markov jump linear system such that the consensus analysis is performed by stability analysis of that transformed system. The consensus is verified through sufficient conditions based on linear matrix inequalities. The results are illustrated by numerical examples and simulations.

Key-words: multi-agent systems, consensus analysis, time-varying delay, switching topology, Markov jump linear systems, linear matrix inequalities.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Sistemas Multi-Agentes . . . . .	1
1.2 Consenso . . . . .	3
1.3 Revisão da Literatura . . . . .	3
1.4 Objetivos . . . . .	5
1.5 Organização da Dissertação . . . . .	5
<b>2 Formulação do Problema</b>	<b>6</b>
2.1 Consenso em Sistemas Multi-Agentes . . . . .	6
2.2 Protocolos de Consenso . . . . .	7
2.3 Consenso como Problema de Estabilidade . . . . .	14
<b>3 Métodos Propostos</b>	<b>17</b>
3.1 Análise de Estabilidade para Sistemas Sujeitos a Saltos Markovianos . .	17
3.2 Análise de Consenso em Sistemas Multi-Agentes . . . . .	19
3.2.1 Sistemas com Topologia Variável e Atrasos Variantes . . . . .	19
3.2.2 Sistemas com Topologia Fixa e Atrasos Variantes . . . . .	27
3.2.3 Sistemas com Topologia Variável Incerta . . . . .	28

<b>4</b>	<b>Estudos de Caso</b>	<b>35</b>
4.1	Caso 1: Sistema com Topologia Fixa e Atrasos Constantes . . . . .	35
4.2	Caso 2: Sistema com Topologia Fixa e Atrasos Variantes . . . . .	38
4.3	Caso 3: Sistema com Topologia Variável e Atrasos Variantes . . . . .	40
4.4	Caso 4: Sistema com Topologia Variável Incerta e Atrasos Variantes . .	44
<b>5</b>	<b>Considerações Finais e Perspectivas</b>	<b>46</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>48</b>
<b>A</b>	<b>Ferramentas Matemáticas</b>	<b>54</b>
A.1	Teoria Algébrica dos Grafos . . . . .	54
A.2	O Gerador Infinitesimal . . . . .	55
A.3	Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) . . . . .	56
A.4	O Complemento de Schur . . . . .	57
A.5	Desigualdade de Jensen . . . . .	58
A.6	Estabilidade via Lyapunov-Krasovskii . . . . .	58
A.7	A Fórmula de Dynkin . . . . .	59



# Introdução

*Uma longa viagem começa com um único passo.*

*Lao-Tsé*

Este capítulo apresenta a parte introdutória desta dissertação. Inicialmente é apresentada uma descrição sobre sistemas multi-agentes. Em seguida apresenta-se o conceito do consenso para estes sistemas. Na terceira seção, faz-se uma revisão da literatura na qual se apresenta um breve panorama histórico da evolução do problema de consenso em sistemas multi-agentes seguido da descrição de sistemas multi-agentes sujeitos a atrasos no tempo e topologia variável. Adiante são apresentados os objetivos da dissertação e por fim a organização da dissertação.

## 1.1 Sistemas Multi-Agentes

Sistemas multi-agentes (SMA) são sistemas compostos por múltiplos agentes que possuem duas características fundamentais que são a capacidade de agir de forma autônoma, tomando decisões que levam à satisfação dos seus próprios objetivos, e a capacidade de interagir com outros agentes utilizando meios de interação social (Russell & Norving 2003). Na literatura existem diversas maneiras de se definir e classificar um agente. Várias são as abordagens e pontos de vista adotados pelas diferentes áreas de pesquisa. Geralmente, a definição de agente se associa às características e funcionalida-

des apresentadas pelo sistema em questão. Na definição do dicionário Ferreira (2013), um agente é uma pessoa que opera, agencia ou age. Também é aquilo que produz, ou é capaz de produzir determinado efeito. Tal definição se aplica no caso de um agente humano. Russell & Norving (2003) definem que um agente pode ser visto como tudo aquilo que percebe seu ambiente por meio de sensores e que atua sobre ele através de executores, o que generaliza o termo agente também para agentes artificiais. Outra definição muito comum é a descrita por Ferber (1999) que diz que um agente pode ser uma entidade física ou virtual. Física quando o agente é alguma coisa concreta e que atue no mundo real. Virtual quando é uma entidade abstrata tais como componentes de software.

Nos últimos anos, estudos envolvendo SMA vêm despertando o interesse de pesquisadores de diversas áreas do conhecimento. Essa abrangência se deve à gama de aplicações teóricas (como em problemas de computação distribuída, estatística e economia (Mesbahi & Egerstedt 2010)) e aos grandes avanços dos sistemas de comunicação. Uma das motivações para pesquisas na área de SMA é o simples fato de que determinados sistemas, se compostos por vários agentes simples, teriam um melhor desempenho do que se fossem compostos por um único agente complexo. Imagine uma situação em que um agente (na forma de um grande robô) carregando um tanque de água é usado para combater um incêndio em um ambiente de destroços. Este agente não poderia falhar e ainda deveria gastar bastante tempo navegando em torno de todas as partes do incêndio para apagá-lo. Agora se considerarmos um grupo de agentes (na forma de pequenos robôs) com tanques, podemos distribuí-los em torno do incêndio e dividir os esforços até que todo o fogo se apague. Além disso, se um dos robôs falhar durante a operação, o grupo pode simplesmente se reorganizar, redistribuir os esforços e garantir o êxito da operação.

Em geral, duas abordagens são utilizadas para o controle de SMA, uma delas norteia-se em técnicas de controle centralizado no qual uma unidade central realiza o controle de todos os agentes do sistema e a outra baseada em controle distribuído onde cada agente possui sua própria unidade de controle. Apesar de as duas abordagens serem realizáveis, em aplicações práticas, a abordagem do controle distribuído se torna mais apropriada, dadas as restrições físicas de comunicação e além disso, essa

abordagem geralmente possui menor custo operacional, maior robustez e melhor adaptabilidade. Esta dissertação se baseia na abordagem do controle distribuído.

## 1.2 Consenso

Um dos principais problemas relacionados aos SMA é a determinação de uma lei de controle (posteriormente chamada de protocolo de consenso) que possibilite ao grupo de agentes, por meio da troca de informações, chegar a um acordo sobre um determinado valor de uma grandeza de interesse, *e.g.* velocidade, posição, altitude e temperatura. Tal situação é também conhecida como problema de consenso que teve sua origem no campo da estatística (DeGroot 1974) e na ciência da computação com a teoria de automação de algoritmos distribuídos (Lynch 1997). Atualmente, o problema do consenso vem sendo estudado também no contexto do controle coordenado de veículos aéreos não tripulados (VANTs) (Beard, McLain, Goodrich & Anderson 2002, Jesus, Pimenta, Tôrres & Mendes 2013), formação em voo (Giulietti, Pollini & Innocenti 2000), controle cooperativo de agentes autônomos (Ren, Beard & Atkins 2007, Jadbabaie, Lin & Morse 2003, Olfati-Saber 2006), alinhamento de satélites (Mesbahi & Hadaegh 1999) e em outras áreas, o que pode ser visto em Cao, Yu, Ren & Chen (2013).

## 1.3 Revisão da Literatura

DeGroot (1974) em seu trabalho pioneiro, estudou o problema de consenso sob o contexto da estatística. Posteriormente Vicsek, Czirók, Ben-Jacob, Cohen & Shochet (1995) introduziram a dinâmica de interação entre vizinhos por meio da investigação do ordenamento de um sistema de partículas que se movimentam em um plano. Nesse trabalho é mostrado que uma lei de controle em tempo discreto é capaz de governar todos os agentes a uma direção comum mesmo sem a existência de um controle centralizado. A cada passo dessa lei de controle, ocorre a atualização da direção de cada partícula com o valor da sua direção somado ao valor da média da direção de seus vizinhos. Utilizando conceitos da teoria algébrica dos grafos, Jadbabaie et al. (2003) remodelou o problema de consenso formulado em Vicsek et al. (1995), modificando

a lei de controle proposta por uma regra onde a atualização dos valores dos agentes dependia agora apenas dos valores dos estados de seus vizinhos.

Outras peculiaridades do problema de consenso são tratadas em Olfati-Saber & Murray (2004). Neste trabalho, o termo protocolo de consenso foi utilizado pela primeira vez para nomear a lei de controle que possibilita ao grupo de agentes, através da troca de informações, chegar a um acordo sobre um determinado valor de uma grandeza de interesse. Além disso, neste trabalho são considerados SMA com características de topologia de rede fixa ou variável, redes direcionadas e não direcionadas e a presença de atrasos na interação dos agentes. A partir disso, várias pesquisas foram desenvolvidas considerando as características apresentadas em Olfati-Saber (2006) por meio de diversas ferramentas matemáticas tais como a teoria algébrica dos grafos, desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) e o método de análise de estabilidade de Lyapunov (Fax & Murray 2004, Beard & Stepanyan 2003, Zhiyun, Broucke & Francis 2003, Moreau 2004, Moreau 2005, Zhang & Tian 2009, Zhao, Xu & Yuan 2011).

Em sistemas multi-agentes que buscam realizar uma tarefa em conjunto por meio de controle distribuído, um meio de comunicação e/ou sensoriamento entre seus agentes é indispensável. Entretanto, em aplicações reais, devido às limitações físicas e de processamento dos meios de comunicação e das ações de controle, sempre existirá atraso na interação dos agentes, o que pode reduzir o desempenho do sistema, fazendo-o oscilar em torno do valor de interesse, ou até mesmo levá-lo à instabilidade, tornando-o incapaz de atingir o consenso. Com base nessa situação, foram realizados diversos trabalhos tratando do problema de consenso em sistemas sujeitos a atrasos. Dentre esses trabalhos, para as interações dos agentes, alguns consideram atrasos constantes no tempo e iguais (uniformes) (Lin, Jia & Li 2008, Seuret, Dimarogonas & Johansson 2008), outros consideram atrasos constantes no tempo e diferentes (não uniformes) (Lin, Jia, Du & Yu 2009, Zhang, Niu, Wang, Shen & Zhu 2011) e ainda existem trabalhos que consideram atrasos variantes no tempo e iguais (Sun & Wang 2009, Kecai, Chunxiang, Xiang & Yang 2011). Estudos recentes, mais especificamente em Bettoni, Souza & Pimenta (2012), é apresentado um método de análise de caráter suficiente baseado em LMIs capaz de verificar a existência do consenso em um sistema multi-agente em uma rede

não direcionada, no qual os atrasos assumidos são variantes no tempo e diferentes nas interações dos agentes. Em Savino, Cota, Souza, Pimenta, Mendes & Mozelli (2013) esses resultados foram refinados e uma análise de taxa de convergência foi adicionada.

Além dos atrasos, existem na literatura trabalhos considerando que o SMA está sujeito a mudanças de topologia. Essas mudanças, em sistemas reais, estão associadas a falhas temporárias que podem ocorrer na comunicação entre os agentes ou nos próprios agentes e a mudanças desejadas na organização dos agentes. A descrição deste problema pode ser vista em Ren et al. (2007), Olfati-Saber (2006) e Yu & Wang (2010), sendo que nestes trabalhos a mudança de topologia não é estocástica. Atualmente, alguns trabalhos vêm tratando a mudança de topologia como uma cadeia de Markov de tempo contínuo (Zhang & Tian 2009, Zhao et al. 2011, Matei, Martins & Baras 2009), metodologia que será aplicada nesta dissertação.

## 1.4 Objetivos

Esta dissertação tem como principal objetivo a elaboração de métodos capazes de verificar se existe consenso em sistemas multi-agentes sujeitos a atrasos no tempo e topologia variável. Pretende-se representar a dinâmica da mudança de topologia como uma cadeia de Markov de tempo contínuo e ainda transformar o problema de consenso em um problema de análise de estabilidade a ser resolvido utilizando LMIs. Além disso, deve-se fazer uma extensão para casos em que as taxas de transição da mudança de topologia são incertas.

## 1.5 Organização da Dissertação

No Capítulo 2, é abordada a formulação do problema destacando a caracterização do SMA e a transformação do problema do consenso em um problema de estabilidade. O Capítulo 3 trata do desenvolvimento dos métodos propostos para a análise do consenso. No Capítulo 4 os métodos propostos no Capítulo 3 são aplicados a diferentes sistemas gerando assim resultados que são úteis para a verificação da eficiência dos métodos. Por fim, no Capítulo 5, são apresentadas as considerações finais.

## Formulação do Problema

*A formulação de um problema é mais importante que sua solução.*

*Albert Einstein*

Este capítulo apresenta a descrição do problema tratado por esta dissertação. Inicialmente é apresentado o conceito de consenso em sistemas multi-agentes levando em consideração a sua representação por meio da teoria algébrica dos grafos e em seguida é definida a dinâmica dos agentes do sistema a ser estudado. Adiante segue uma descrição sobre os protocolos de consenso e a definição do modelo do sistema a ser estudado. Por fim apresenta-se uma estratégia de transformação do sistema para que o problema de análise de consenso seja interpretado como um problema de análise de estabilidade.

### 2.1 Consenso em Sistemas Multi-Agentes

Um sistema multi-agente pode ser modelado por meio da teoria algébrica dos grafos (veja Apêndice A.1) considerando que os nós representam os agentes e as arestas, os canais comunicação entre eles. Partindo desta ideia, considere um sistema multi-agente, composto por  $n$  agentes no qual  $x_i \in \mathbb{R}$  representa o estado (qualquer grandeza física como posição, velocidade, temperatura, tensão etc) do agente (nó)  $v_i$  com  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sabe-se que o agente  $v_i$  está em consenso com o agente  $v_j$  se, e somente se,  $x_i = x_j$ , ou seja, se o valor dos estados dos agentes  $i$  e  $j$  forem iguais. Assim, podemos

dizer que tal sistema está em consenso quando, para um tempo suficientemente grande e para quaisquer  $i$  e  $j$  tivermos  $x_i = x_j$ . Matematicamente, por definição, diz-se que ocorreu o consenso em um sistema multi-agente se, e somente se,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - x_j(t)) = 0$ .

Nesta dissertação será considerado um sistema multi-agente no qual a dinâmica dos  $n$  agentes do sistema é igual e de primeira ordem (do tipo integrador simples), como se apresenta a seguir:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad (2.1)$$

sendo que  $x_i(t)$  representa o estado e  $u_i(t)$  a entrada de controle do  $i$ -ésimo agente com  $i = 1, 2, \dots, n$ .

## 2.2 Protocolos de Consenso

Sabe-se que o protocolo de consenso é uma lei de controle que garante que um sistema multi-agente alcance o consenso. É por meio desse protocolo que os agentes atualizam seus estados.

O seguinte protocolo, proposto por Olfati-Saber & Murray (2004), resolve o problema de consenso em redes de agentes com dinâmica integrador simples considerando que a troca de informação entre os agentes ocorre de maneira instantânea.

$$u_i(t) = - \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)), \quad (2.2)$$

sendo  $n$  o número de agentes do sistema,  $a_{ij}$  um elemento da matriz de adjacências (veja Apêndice A.1) associada ao grafo do sistema e  $x_i(t)$  e  $x_j(t)$ , respectivamente, os estados dos agentes  $i$  e  $j$ .

Na literatura podem ser encontrados outros protocolos de consenso que atuam em diferentes cenários como em sistemas multi-agente com dinâmica integrador duplo (Ren 2007) ou com restrições (saturação) na entrada (Li, Xiang & Wei 2011).

Nesta dissertação, como acontece em sistemas multi-agentes reais, vamos considerar a existência de atrasos variantes no tempo nas interações dos agentes. Sendo assim,

redefinimos o protocolo de consenso (2.2) para o seguinte:

$$u_i(t) = - \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i(t - \tau_{ij}(t)) - x_j(t - \tau_{ij}(t))), \quad (2.3)$$

no qual  $\tau_{ij}(t)$  representa o atraso entre os agentes. Assume-se ainda que tal atraso possui a forma  $\tau_{ij}(t) = \tau + \mu_{ij}(t)$ , sendo  $\tau$  um valor constante que representa o valor nominal do atraso e  $\mu_{ij}(t)$  uma perturbação variante no tempo que satisfaz  $|\mu_{ij}(t)| \leq \mu_m$ ,  $\forall i, j$ , sendo  $\mu_m$  o limitante superior dessa perturbação. Dessa forma, temos que  $\tau_{ij}(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m]$  tal que  $\tau > 0$  e  $\tau \geq \mu_m \geq 0$ . É válido ressaltar que será assumido também que os atrasos são não uniformes, ou seja,  $\tau_{ij}(t) \neq \tau_{ji}(t)$ .

A seguir é apresentado um exemplo que demonstra a aplicação do protocolo de consenso (2.3).

**Exemplo 2.1** *Considere um sistema multi-agente sujeito a atrasos  $\tau_{ij}(t)$  na comunicação, composto por três agentes com topologia de rede fixa, direcionada e conectada (Figura 2.1).*

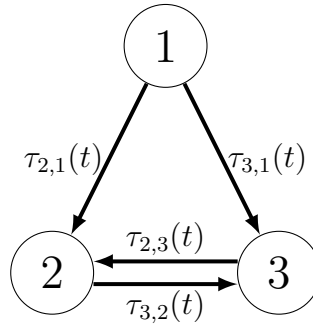


Figura 2.1: Sistema multi-agente sujeito a atrasos  $\tau_{ij}(t)$  na comunicação, composto por três agentes com topologia de rede fixa, direcionada e conectada.

*Temos que a matriz de adjacências associada ao sistema da Figura 2.1 é definida por:*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

*Então, aplicando o protocolo de consenso (2.3) ao sistema da Figura 2.1 obtemos o*



seguinte:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 0, \\ u_2(t) &= x_1(t - \tau_{21}(t)) - x_2(t - \tau_{21}(t)) + x_3(t - \tau_{23}(t)) - x_2(t - \tau_{23}(t)), \\ u_3(t) &= x_1(t - \tau_{31}(t)) - x_3(t - \tau_{31}(t)) + x_2(t - \tau_{32}(t)) - x_3(t - \tau_{32}(t)). \end{aligned}$$

□

A fim de obter uma representação mais compacta, com auxílio da matriz laplaciana (veja Apêndice A.1) e de uma representação simplificada dos índices  $i, j$ , a seguir é apresentado um protocolo de consenso equivalente ao protocolo (2.3) na forma matricial

$$U(t) = - \sum_{k \in K} L_k X(t - d_k(t)), \quad (2.5)$$

tal que  $d_k(t) = \tau_{ij}(t)$  representa o atraso entre os agentes  $i$  e  $j$ , e o índice  $k$  se refere a aresta (canal de comunicação) associada ao atraso  $\tau_{ij}(t)$ , dado por

$$k = (i - 1)n + j, \quad (2.6)$$

tal que  $k \in K$  na qual  $K$  é o conjunto que agrupa os índices das arestas do grafo,  $L_k$  é a matriz laplaciana associada ao grafo composto por todos os nós do grafo do sistema e apenas a aresta  $k$ , de modo que  $\sum_{k \in K} L_k = L$  (sendo  $L$  a matriz laplaciana do sistema),  $U(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)]^T$  é um vetor que agrupa as  $n$  entradas de controle do sistema e  $X(t - d_k(t)) = [x_1(t - d_k(t)), x_2(t - d_k(t)), \dots, x_n(t - d_k(t))]^T$  um vetor que agrupa os estados dos agentes. É importante ressaltar que o número de elementos do conjunto  $K$ , aqui representado por  $\kappa \leq n(n - 1)$ , é dado pela quantidade de arestas do grafo, ou seja, pelo número máximo de canais de comunicação do sistema.

A seguir é apresentado um exemplo que demonstra a aplicação da regra (2.6) e o uso do protocolo de consenso (2.5).

**Exemplo 2.2** *Considere o sistema multi-agente apresentado na Figura 2.1. Sob a aplicação da regra (2.6) as arestas de tal sistema são enumeradas conforme a Figura 2.2 na qual os números entre chaves representam os índices  $k$  associados aos pares  $i, j$ .*

*Em seguida, utilizando a nova representação, faz-se a substituição de  $\tau_{ij}(t)$  por  $d_k(t)$ , o que implica na obtenção do sistema da Figura 2.3.*

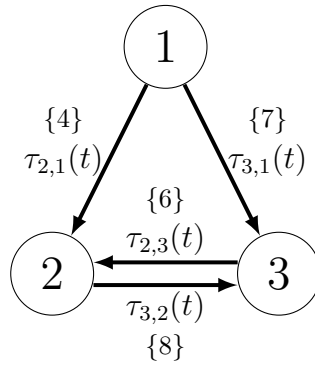


Figura 2.2: Exemplo de aplicação da regra (2.6).

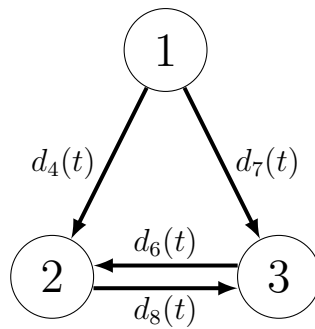


Figura 2.3: Sistema multi-agente sujeito a atrasos  $d_k(t)$  na comunicação, composto por três agentes com topologia de rede fixa, direcionada e conectada.

Agora, vamos aplicar o protocolo de consenso (2.5) ao sistema multi-agente da Figura 2.3. Inicialmente, precisamos definir as matrizes  $L_k$ . Como relatado anteriormente,  $L_k$  é a matriz laplaciana associada ao grafo composto por todos os nós do grafo do sistema e apenas aresta  $k$ , de modo que  $\sum_{k \in K} L_k = L$ . Dessa forma, para o SMA em questão (Figura 2.3), os grafos do sistema associados às suas respectivas arestas  $k$  são apresentados na Figura 2.4.

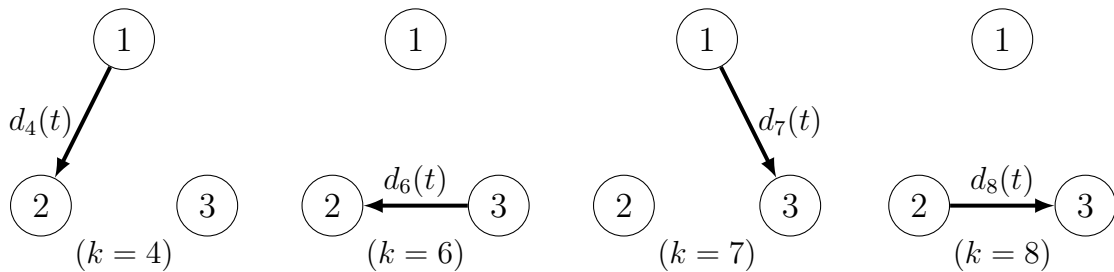


Figura 2.4: Grafos associados às arestas  $k$ .

Assim, temos que as matrizes  $L_k$  são definidas como:

$$L_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = -L_4 \begin{bmatrix} x_1(t - d_4(t)) \\ x_2(t - d_4(t)) \\ x_3(t - d_4(t)) \end{bmatrix} - L_6 \begin{bmatrix} x_1(t - d_6(t)) \\ x_2(t - d_6(t)) \\ x_3(t - d_6(t)) \end{bmatrix} \\ - L_7 \begin{bmatrix} x_1(t - d_7(t)) \\ x_2(t - d_7(t)) \\ x_3(t - d_7(t)) \end{bmatrix} - L_8 \begin{bmatrix} x_1(t - d_8(t)) \\ x_2(t - d_8(t)) \\ x_3(t - d_8(t)) \end{bmatrix}.$$

□

Além do atraso na comunicação, nesta dissertação também será considerado que o sistema multi-agente está sujeito a mudanças aleatórias de topologia. Essas mudanças, em sistemas reais, estão associadas a falhas temporárias que podem ocorrer na comunicação entre os agentes ou nos próprios agentes. Considerando essa situação e que a mudança de uma topologia para outra seja instantânea, definimos o seguinte protocolo de consenso:

$$U(t, \theta_t) = - \sum_{k \in K(\theta_t)} L_k(\theta_t) X(t - d_k(t)), \quad (2.8)$$

sendo  $\theta_t$  o parâmetro que indica a topologia do sistema e  $K(\theta_t)$  o conjunto que agrupa os índices  $k$  das arestas do grafo associado à topologia  $\theta_t$ , sendo seu número de elementos definido por  $\kappa(\theta_t) \leq n(n-1)$ . É válido ressaltar que a regra (2.6), aplicada ao protocolo (2.5), também se aplica ao protocolo (2.8).

Assume-se que a dinâmica do parâmetro  $\theta_t$  é dada por uma cadeia de Markov de tempo contínuo (ver Wentzell (1981)) com estados (modos) discretos dados por um conjunto  $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, s\}$  (sendo  $s$  o número das diferentes topologias do sistema) e

matriz de probabilidade de transição  $\Psi = [\psi_{pq}]$  definida por

$$\psi_{pq} = \mathbb{P}\{\theta_{t+\Delta} = q \mid \theta_t = p\} = \begin{cases} \pi_{pq}\Delta + o(\Delta) & p \neq q, \\ 1 + \pi_{pp}\Delta + o(\Delta) & p = q, \end{cases} \quad (2.9)$$

na qual  $\mathbb{P}$  representa a probabilidade de  $\{\cdot\}$ ,  $\Delta > 0$ ,  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0$ ,  $\pi_{pq} \geq 0$  ( $i, j \in \mathcal{S}$ ,  $j \neq i$ ) é a taxa de transição do estado  $p$  no tempo  $t$  para o estado  $q$  no tempo  $t + \Delta$  e  $\pi_{pp} = -\sum_{q=1, q \neq p}^s \pi_{pq} \forall p \in \mathcal{S}$ . Logo, a matriz de taxas de transição  $\Pi$  é definida por

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1s} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{s1} & \pi_{s2} & \cdots & \pi_{ss} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

A seguir é apresentado um exemplo que demonstra o uso do protocolo (2.8).

**Exemplo 2.3** *Considere um sistema multi-agente sujeito a atrasos  $d_k(t)$  na comunicação, composto por três agentes com topologia que varia como uma cadeia de Markov entre os grafos  $G_a$  e  $G_b$  apresentados na Figura 2.5.*

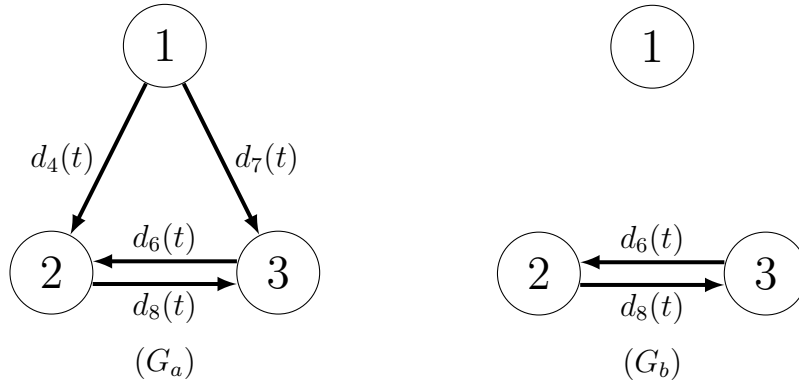


Figura 2.5: Sistema multi-agente sujeito a atrasos  $d_k(t)$  na comunicação, composto por três agentes com topologia variável.

Vamos assumir que no modo 1 ( $\theta_t = 1$ ) o sistema assume o comportamento do grafo  $G_a$  e que no modo 2 ( $\theta_t = 2$ ) o comportamento do grafo  $G_b$ . Dessa forma, aplicando o protocolo de consenso (2.8) ao sistema multi-agente da Figura 2.5,

para  $\theta_t = 1$  e  $K(\theta_t) = \{4,6,7,8\}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} &= -L_4 \begin{bmatrix} x_1(t - d_4(t)) \\ x_2(t - d_4(t)) \\ x_3(t - d_4(t)) \end{bmatrix} - L_6 \begin{bmatrix} x_1(t - d_6(t)) \\ x_2(t - d_6(t)) \\ x_3(t - d_6(t)) \end{bmatrix} \\ &\quad - L_7 \begin{bmatrix} x_1(t - d_7(t)) \\ x_2(t - d_7(t)) \\ x_3(t - d_7(t)) \end{bmatrix} - L_8 \begin{bmatrix} x_1(t - d_8(t)) \\ x_2(t - d_8(t)) \\ x_3(t - d_8(t)) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e para  $\theta_t = 2$  e  $K(\theta_t) = \{6,8\}$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = -L_6 \begin{bmatrix} x_1(t - d_6(t)) \\ x_2(t - d_6(t)) \\ x_3(t - d_6(t)) \end{bmatrix} - L_8 \begin{bmatrix} x_1(t - d_8(t)) \\ x_2(t - d_8(t)) \\ x_3(t - d_8(t)) \end{bmatrix}.$$

É válido ressaltar que as matrizes  $L_4$ ,  $L_6$ ,  $L_7$  e  $L_8$ , são exatamente as mesmas do Exemplo 2.3 definidas em (2.7).

□

Enfim, considerando a dinâmica dos agentes em (2.1) e o protocolo de consenso em (2.8), fica determinado que o modelo do sistema multi-agente a ser estudado por esta dissertação é o apresentado a seguir:

$$\dot{X}(t) = - \sum_{k \in K(\theta_t)} L_k(\theta_t) X(t - d_k(t)). \quad (2.11)$$

Esta dissertação se concentra no problema de análise de consenso em sistemas multi-agentes com as características do sistema (2.11). A estratégia proposta para a análise do consenso consiste na transformação do sistema multi-agente (2.11) em um sistema linear sujeito a saltos markovianos (SLSSM) de forma que a análise do consenso no sistema multi-agente seja feita por meio de análise de estabilidade deste sistema transformado. Esta transformação é apresentada na Seção seguinte.

Para formalizar o problema de análise de consenso em um sistema multi-agente com topologia variável estocástica (que é o caso do sistema (2.11)), considere a seguinte definição:

**Definição 2.1** (Zhao et al. 2011) *Sob topologia variável estocástica, o sistema multi-agente (2.11) alcança o consenso se,  $x_i(t) - x_j(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty \forall i \neq j$ , para qualquer condição inicial de estados ( $X(0) \in \mathbb{R}^n$ ) e de topologia ( $\theta_0 \in \mathcal{S}$ ).*

## 2.3 Consenso como Problema de Estabilidade

Como relatado anteriormente, nesta seção é apresentado como o problema de análise de consenso em um sistema multi-agente com topologia variável estocástica pode ser transformado em um problema de análise de estabilidade de um SLSSM.

A transformação proposta é similar ao método *Tree-Type Transformation* apresentado em (Sun & Wang 2009) com a inclusão da ideia da topologia variável. Com base na mudança de variável  $z_i(t) = x_1(t) - x_{i+1}(t)$  e na observação de que o consenso existirá se  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) = 0 \forall i = 1, 2, \dots, n-1$ . Dessa forma, define-se:

$$z(t) = \mathcal{I}_1 X(t), \quad (2.12)$$

$$X(t) = x_1(t)\mathbf{1} + \mathcal{I}_0 z(t), \quad (2.13)$$

na qual  $\mathcal{I}_1 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n}$  e  $\mathcal{I}_0 \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$  são matrizes dadas por

$$\mathcal{I}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -I_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T \\ -I_{n-1} \end{bmatrix},$$

sendo  $\mathbf{1}$  um vetor coluna unitário com dimensão apropriada,  $\mathbf{0}$  um vetor coluna nulo com dimensão apropriada,  $I$  uma matriz identidade e  $z(t) = [z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)]^T$  com  $z_i(t) = x_1(t) - x_{i+1}(t)$ .

Assim, derivando (2.12) e utilizando as equações (2.11), (2.13) e (A.1) (veja Apêndice A.1), temos que:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \mathcal{I}_1 \dot{X}(t) \\ &= -\mathcal{I}_1 \sum_{k \in K(\theta_t)} L_k(\theta_t) X(t - \tau_k(t)) \\ &= -\mathcal{I}_1 \sum_{k \in K(\theta_t)} L_k(\theta_t) [x_1(t - \tau_k(t))\mathbf{1} + \mathcal{I}_0 z(t - \tau_k(t))] \\ &= -\mathcal{I}_1 \sum_{k \in K(\theta_t)} L_k(\theta_t) x_1(t - \tau_k(t))\mathbf{1} - \mathcal{I}_1 \sum_{k \in K(\theta_t)} L_k(\theta_t) \mathcal{I}_0 z(t - \tau_k(t)), \end{aligned}$$

sabendo que  $x_1(t - \tau_k(t))$  é escalar, tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -x_1(t - \tau_k(t))\mathcal{I}_1 \sum_{k \in K(\theta_t)} \bar{L}_k(\theta_t)\mathbf{1} - \mathcal{I}_1 \sum_{k \in K(\theta_t)} L_k(\theta_t)\mathcal{I}_0 z(t - \tau_k(t)) \\ &= - \sum_{k \in K(\theta_t)} \mathcal{I}_1 L_k(\theta_t)\mathcal{I}_0 z(t - \tau_k(t)). \end{aligned}$$

Dessa forma, o sistema transformado proposto será dado por:

$$\dot{z}(t) = - \sum_{k \in K(\theta_t)} \bar{L}_k(\theta_t)z(t - \tau_k(t)), \quad (2.14)$$

na qual  $\sum_{k \in K(\theta_t)} \bar{L}_k(\theta_t) = \bar{L}(\theta_t)$  e  $\bar{L}_k(\theta_t) = \mathcal{I}_1 L_k(\theta_t)\mathcal{I}_0 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ .

De posse do sistema transformado (2.14), apresenta-se o seguinte Lema:

**Lema 2.1** *O sistema (2.14) atinge a origem se, e somente se, o sistema (2.11) atingir o consenso.*

**Demonstração:** Sabe-se que o sistema (2.14) atinge a origem quando o  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$  e que o sistema (2.11) atinge o consenso quando o  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \beta(t)\mathbf{1}$ , com  $\beta(t) \in \mathbb{R}$ .

Inicialmente, considere a definição em (2.12) e assuma que o sistema (2.11) atinge consenso, então

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{I}_1 X(t) \\ &= \mathcal{I}_1 \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) \\ &= \beta(t)\mathcal{I}_1\mathbf{1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, temos que se o sistema em sistema (2.11) atinge consenso, então o sistema em (2.14) atinge a origem.

Agora, considere a definição em (2.13) e assuma que o sistema (2.14) atinge a origem, então

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} [x_1(t)\mathbf{1} + \mathcal{I}_0 z(t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t)\mathbf{1} + \mathcal{I}_0 \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t)\mathbf{1} \\ &= \beta(t)\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Portanto, fica demonstrado que se o sistema (2.14) atinge a origem, consequentemente o sistema (2.11) atinge o consenso.  $\square$

Para formalizar o problema de análise de estabilidade em um SLSSM (que é o caso do sistema (2.14)), considere a seguinte definição:

**Definição 2.2** (*Boukas 2005*) *O SLSSM (2.14) será estocasticamente estável se, para qualquer condição inicial de estados  $z(0) \in \mathbb{R}^{n-1}$  e topologia  $\theta_0 \in \mathcal{S}$ , existir uma constante positiva  $T(z(0), \theta_0)$ , tal que a seguinte condição seja satisfeita:*

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^\infty z^T(\xi) z(\xi) d\xi \right] \leq T(z(0), \theta_0),$$

na qual  $\mathbb{E}$  representa a esperança matemática.

**Observação:** Adiante, mais especificamente no Capítulo 3, será utilizado o termo *atinge o consenso estocasticamente* para indicar que um SMA sujeito a topologia variável modelada de forma estocástica atinge o consenso. Tal termo é equivalente ao termo *estocasticamente estável*, utilizado para indicar a estabilidade de um SLSSM.



## Métodos Propostos

*Não existem métodos fáceis para resolver problemas difíceis.*

*René Descartes*

Este capítulo apresenta a descrição dos métodos propostos para análise do consenso em SMAs com topologia fixa ou variável e atrasos no tempo e ainda um método que formaliza a ideia da análise de estabilidade estocástica por meio de desigualdades. É apresentada também uma extensão para o caso da topologia variável na qual considera-se que a matriz de taxas de transição que governa a mudança de topologia possui incertezas.

### 3.1 Análise de Estabilidade para Sistemas Sujeitos a Saltos Markovianos

O lema apresentado a seguir, baseado na ideia do método de análise de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii (veja Apêndice A.6), propõe uma alternativa para análise de estabilidade de SLSSMs por meio de LMIs. Tal lema será utilizado posteriormente na demonstração dos Teoremas 3.1 e 3.2.

**Lema 3.1** *O SLSSM (2.14) será estocasticamente estável se existir um funcional de Lyapunov-Krasovskii com variáveis estocásticas, quadrático e limitado  $V(z, \theta_t)$ , que*

satisfaça as seguintes condições:

$$V(z, \theta_t) \geq \alpha z^T(t)z(t), \quad \forall \theta_t \in \mathcal{S}, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{L}V(z, \theta_t) \leq -\alpha z^T(t)z(t), \quad \forall \theta_t \in \mathcal{S}, \quad (3.2)$$

sendo  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$  e  $\mathcal{L}$  o operador do gerador infinitesimal (veja Apêndice A.2).

**Demonstração:** Considere  $V(z, \theta_t)$  sendo um funcional de Lyapunov-Krasovskii com variáveis estocásticas, quadrático e limitado. Então, aplicando a Fórmula de Dynkin (ver Apêndice A.7) em  $V(z, \theta_t)$ , temos

$$\mathbb{E}[V(z, \theta_t)] = V(z(0), \theta_0) + \mathbb{E} \left[ \int_0^t \mathcal{L}V(z(\xi), \theta_\xi) d\xi \right].$$

Assim, assumindo que a condição em (3.2) seja satisfeita, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(z, \theta_t)] - V(z(0), \theta_0) &\leq -\alpha \mathbb{E} \left[ \int_0^t z^T(\xi)z(\xi) d\xi \right] \\ \alpha \mathbb{E} \left[ \int_0^t z^T(\xi)z(\xi) d\xi \right] &\leq V(z(0), \theta_0) - \mathbb{E}[V(z(t), \theta_t)] \end{aligned}$$

e assumindo que a condição em (3.1) também é satisfeita, podemos considerar o seguinte limitante superior para a desigualdade acima

$$\begin{aligned} \alpha \mathbb{E} \left[ \int_0^t z^T(\xi)z(\xi) d\xi \right] &\leq V(z(0), \theta_0) \\ \mathbb{E} \left[ \int_0^t z^T(\xi)z(\xi) d\xi \right] &\leq \frac{V(z(0), \theta_0)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Agora, fazendo  $t \rightarrow \infty$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \mathbb{E} \left[ \int_0^t z^T(\xi)z(\xi) d\xi \right] \right) &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{V(z(0), \theta_0)}{\alpha} \right) \\ \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty z^T(\xi)z(\xi) d\xi \right] &\leq \frac{V(z(0), \theta_0)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Logo, definindo  $\frac{V(z(0), \theta_0)}{\alpha} = T(z(0), \theta_0)$ , obtém-se

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^\infty z^T(\xi)z(\xi) d\xi \right] \leq T(z(0), \theta_0).$$

Portanto, com base na Definição 2.2, fica demonstrado que o SLSSM (2.14) será estocasticamente estável se as condições impostas pelo Lema 3.1 forem satisfeitas.

□

**Observação:** A partir da próxima seção, com o intuito de obter uma notação mais compacta para as variáveis estocásticas e dos termos que dependem do modo (topologia) do sistema, o argumento  $\theta_t$  será substituído pelo índice subscrito  $i$ , por exemplo: considere uma variável estocástica denotada por  $Y(\theta_t)$ , utilizando a notação compacta, tal variável passa a ser representada por  $Y_i$ .

## 3.2 Análise de Consenso em Sistemas Multi-Agentes

Nesta seção serão apresentados os métodos propostos como solução para o problema de análise de consenso em SMAs. Na Subseção 3.2.1 é apresentado o método proposto para SMAs com topologia variável sujeitos a atrasos variantes, não diferenciáveis e não uniformes. Na Subseção 3.2.2 é apresentado o método proposto para SMAs com topologia fixa sujeitos a atrasos variantes, não diferenciáveis e não uniformes. E por fim, na Subseção 3.2.3 é apresentado o método proposto para SMAs com topologia variável incerta sujeitos a atrasos variantes, não diferenciáveis e não uniformes.

### 3.2.1 Sistemas com Topologia Variável e Atrasos Variantes

O teorema apresentado a seguir é o método proposto por esta dissertação como solução para o problema de análise de consenso em SMAs com topologia variável sujeitos a atrasos variantes, não diferenciáveis e não uniformes.

**Teorema 3.1** *Dados  $\tau > 0$ ,  $\tau \geq \mu_m \geq 0$  e  $\Pi$  definida em (2.10), o sistema multi-agente (2.11) com  $d_k(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m] \forall k \in K_i$  e topologia variável, atinge o consenso estocasticamente se existirem matrizes  $F_i, G_i, P_i = P_i^T, Q_i, R_1 = R_1^T, R_2, R_3 = R_3^T, S = S^T$  e  $Z = Z^T$  com dimensão  $(n-1) \times (n-1)$  que satisfaçam as LMIs (3.3), (3.4) e (3.5)  $\forall i \in \mathcal{S}$ .*

$$\begin{bmatrix} P_i & Q_i \\ * & \frac{1}{\tau}S \end{bmatrix} > 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2^T \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_i & \mu_m \Gamma_i \\ * & -\mu_m Z \end{bmatrix} < 0, \quad (3.5)$$

sendo

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \phi_i^{11} & P_i + \tau R_2^T - F_i & -Q_i + \frac{1}{\tau} R_3 - F_i \bar{L}_i & -\frac{1}{\tau} R_2 + \sum_{j=1}^s \pi_{ij} Q_j \\ * & \tau R_3 + 2\mu_m Z - G_i - G_i^T & -G_i \bar{L}_i & Q_i \\ * & * & -\frac{1}{\tau} R_3 - S & \frac{1}{\tau} R_2 \\ * & * & * & -\frac{1}{\tau} R_1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

com

$$\phi_i^{11} = \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j + Q_i + Q_i^T + \tau R_1 - \frac{1}{\tau} R_3 + S$$

e

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} F_i \bar{L}_i \\ G_i \bar{L}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

**Demonstração:** Considerando o Lema 2.1, tem-se que o SMA (2.11) atinge o consenso estocasticamente se, e somente se, o SLSSM (2.14) for estocasticamente estável o que permite que o problema de consenso possa ser interpretado como um problema de estabilidade. Dessa forma, esta demonstração apresenta condições que determinam se o SLSSM (2.14) é estocasticamente estável usando como base o Lema 3.1.

Considere o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii com variáveis estocásticas candidato:

$$V(z, i) = V_1(z, i) + V_2(z, i) + V_3(z) + V_4(z) + V_5(z, i) \quad (3.8)$$

com

$$\begin{aligned}
V_1(z,i) &= z^T(t)P_i z(t), \\
V_2(z,i) &= 2z^T(t)Q_i \int_{t-\tau}^t z(\xi)d\xi, \\
V_3(z) &= \int_{-\tau}^0 \int_{t+\zeta}^t \bar{z}^T(\xi)\bar{R}\bar{z}(\xi)d\xi d\zeta, \\
V_4(z) &= \int_{t-\tau}^t z^T(\xi)S z(\xi)d\xi, \\
V_5(z,i) &= \sum_{k \in K_i} \int_{-\mu_m}^{\mu_m} \int_{t+\zeta-\tau}^t \dot{z}^T(\xi)Z_k \dot{z}(\xi)d\xi d\zeta,
\end{aligned}$$

sendo  $\bar{z}^T(\xi) = [z^T(\xi) \ \dot{z}^T(\xi)]$  e  $P_i = P_i^T$ ,  $Q_i$ ,  $\bar{R} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2^T \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} = \bar{R}^T$ ,  $S = S^T$  e  $Z_k = Z_k^T \ \forall k \in K_i$  variáveis matriciais.

A primeira parte da demonstração mostra que se as LMIs (3.3), (3.4) e (3.5) forem satisfeitas, a condição  $V(z,i) \geq \alpha z^T(t)z(t)$  com  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$  também será.

Inicialmente, vamos expandir o termo  $V_2(z(t),i)$  obtendo:

$$\begin{aligned}
V_2(z,i) &= 2z^T(t)Q_i \int_{t-\tau}^t z(\xi)d\xi \\
&= z^T(t)Q_i \int_{t-\tau}^t z(\xi)d\xi + \int_{t-\tau}^t z^T(\xi)d\xi Q_i^T z(t) \\
&= z^T(t)Q_i \int_{-\tau}^0 z(t+\xi)d\xi + \int_{-\tau}^0 z^T(t+\xi)d\xi Q_i^T z(t). \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Em seguida, assumindo que  $S > 0$  e aplicando o Lema A.2 (desigualdade de Jensen (ver Apêndice A.5)) em  $V_4(z)$  obtém-se:

$$\begin{aligned}
V_4(z) &= \int_{t-\tau}^t z^T(\xi)S z(\xi)d\xi \\
&\geq \int_{t-\tau}^t z^T(\xi)d\xi \frac{1}{\tau} S \int_{t-\tau}^t z(\xi)d\xi \\
&\geq \int_{-\tau}^0 z^T(t+\xi)d\xi \frac{1}{\tau} S \int_{-\tau}^0 z(t+\xi)d\xi. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Assim, considerando (3.9) e (3.10) e agrupando  $V_1(z,i)$ ,  $V_2(z,i)$  e  $V_4(z)$  na forma quadrática, podemos reescrever o funcional (3.8) como:

$$\begin{aligned} V(z,i) \geq & \eta^T \begin{bmatrix} P_i & Q_i \\ * & \frac{1}{\tau} S \end{bmatrix} \eta \\ & + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\zeta}^t \bar{z}^T(\xi) \bar{R} \bar{z}(\xi) d\xi d\zeta \\ & + \sum_{k \in K_i} \int_{-\mu_m}^{\mu_m} \int_{t+\zeta-\tau}^t \dot{z}^T(\xi) Z_k \dot{z}(\xi) d\xi d\zeta, \end{aligned}$$

com  $\eta^T = \left[ z^T(t) \quad \int_{-\tau}^0 z^T(t+\xi) d\xi \right]$ .

Portanto, uma condição suficiente para garantir  $V(z,i) \geq \alpha z^T(t)z(t)$  com  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$ , é que o lado direito da desigualdade acima seja positivo. Então, fica demonstrado que se as LMIs (3.3), (3.4) e (3.5) forem satisfeitas a condição  $V(z,i) \geq \alpha z^T(t)z(t)$  com  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$  também será. Note que as LMIs (3.3) e (3.4) garantem respectivamente, que o primeiro e o segundo termo da desigualdade acima sejam positivo e que  $Z = \sum_{k \in K_i} Z_k$  na LMI (3.5) garante a positividade do terceiro termo.

O próximo passo da demonstração mostra que se as LMIs (3.3), (3.4) e (3.5) forem satisfeitas a condição  $\mathcal{L}V(z,i) \leq -\alpha z^T(t)z(t)$  com  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$  também será.

Aplicando o operador do gerador infinitesimal ao longo das trajetórias no funcional (3.8), obtém-se:

$$\mathcal{L}V(z,i) = \mathcal{L}V_1(z,i) + \mathcal{L}V_2(z,i) + \mathcal{L}V_3(z) + \mathcal{L}V_4(z) + \mathcal{L}V_5(z,i). \quad (3.11)$$

O termo  $\mathcal{L}V_1(z,i)$  é dado por:

$$\begin{aligned} V_1(z,i) &= z^T(t)P_i z(t), \\ \mathcal{L}V_1(z,i) &= \dot{z}^T(t)P_i z(t) + z^T(t)P_i \dot{z}(t) + z^T(t) \left( \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j \right) z(t). \end{aligned}$$

O termo  $\mathcal{L}V_2(z, i)$  é dado por:

$$\begin{aligned}
 V_2(z, i) &= 2z^T(t)Q_i \int_{t-\tau}^t z(\xi)d\xi \\
 &= z^T(t)Q_i \int_{t-\tau}^t z(\xi)d\xi + \int_{t-\tau}^t z^T(\xi)d\xi Q_i^T z(t) \\
 &= z^T(t)Q_i \int_{-\tau}^0 z(t+\xi)d\xi + \int_{-\tau}^0 z^T(t+\xi)d\xi Q_i^T z(t), \\
 \mathcal{L}V_2(z, i) &= \dot{z}^T(t)Q_i \int_{-\tau}^0 z(t+\xi)d\xi + \int_{-\tau}^0 z^T(t+\xi)d\xi Q_i^T \dot{z}(t) \\
 &\quad + z^T(t)Q_i z(t) + z^T(t)Q_i^T z(t) - z^T(t)Q_i z(t-\tau) - z^T(t-\tau)Q_i^T z(t) \\
 &\quad + z^T(t) \left( \sum_{j=1}^s \pi_{ij} Q_j \right) \int_{-\tau}^0 z(t+\xi)d\xi + \int_{-\tau}^0 z^T(t+\xi)d\xi \left( \sum_{j=1}^s \pi_{ij} Q_j^T \right) z(t).
 \end{aligned}$$

O termo  $\mathcal{L}V_3(z)$  é dado por:

$$\begin{aligned}
 V_3(z) &= \int_{-\tau}^0 \int_{t+\zeta}^t \bar{z}^T(\xi) \bar{R} \bar{z}(\xi) d\xi d\zeta, \\
 \mathcal{L}V_3(z) &= \bar{z}^T(t) \tau \bar{R} \bar{z}(t) - \int_{t-\tau}^t \bar{z}^T(\xi) \bar{R} \bar{z}(\xi) d\xi,
 \end{aligned}$$

aplicando o Lema A.2 (Lema de Jensen) ao segundo termo de  $\mathcal{L}V_3(z(t))$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}V_3(z) &\leq \bar{z}^T(t) \tau \bar{R} \bar{z}(t) - \int_{t-\tau}^t \bar{z}^T(\xi) d\xi \frac{1}{\tau} \bar{R} \int_{t-\tau}^t \bar{z}(\xi) d\xi \\
 &\leq \bar{z}^T(t) \tau \bar{R} \bar{z}(t) - \int_{-\tau}^0 \bar{z}^T(t+\xi) d\xi \frac{1}{\tau} \bar{R} \int_{-\tau}^0 \bar{z}(t+\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Substituindo  $\bar{z}$  e  $\bar{R}$ , temos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}V_3(z) &\leq z^T(t) \tau R_1 z(t) + \dot{z}^T(t) \tau R_2 z(t) + z^T(t) \tau R_2^T \dot{z}(t) + \dot{z}^T(t) \tau R_3 \dot{z}(t) \\
 &\quad - \int_{t-\tau}^t z^T(\xi) d\xi \frac{1}{\tau} R_1 \int_{t-\tau}^t z(\xi) d\xi - z^T(t) \frac{1}{\tau} R_2 \int_{t-\tau}^t z(\xi) d\xi \\
 &\quad + z^T(t-\tau) \frac{1}{\tau} R_2 \int_{t-\tau}^t z(\xi) d\xi - \int_{t-\tau}^t z^T(\xi) d\xi \frac{1}{\tau} R_2^T z(t) \\
 &\quad + \int_{t-\tau}^t z^T(\xi) d\xi \frac{1}{\tau} R_2^T z(t-\tau) - z^T(t) \frac{1}{\tau} R_3 z(t) + z^T(t) \frac{1}{\tau} R_3 z(t-\tau) \\
 &\quad + z^T(t-\tau) \frac{1}{\tau} R_3 z(t) - z^T(t-\tau) \frac{1}{\tau} R_3 z(t-\tau).
 \end{aligned}$$

O termo  $\mathcal{L}V_4(z)$  é dado por:

$$V_4(z) = \int_{t-\tau}^t z^T(\xi)S z(\xi)d\xi,$$

$$\mathcal{L}V_4(z) = z^T(t)S z(t) - z^T(t-\tau)S z(t-\tau).$$

O termo  $\mathcal{L}V_5(z,i)$  é dado por:

$$V_5(z,i) = \sum_{k \in K_i} \int_{-\mu_m}^{\mu_m} \int_{t+\zeta-\tau}^t \dot{z}^T(\xi)Z_k \dot{z}(\xi)d\xi d\zeta,$$

$$\mathcal{L}V_5(z(t)) = \sum_{k \in K_i} 2\mu_m \dot{z}^T(t)Z_k \dot{z}(t) - \sum_{k \in K_i} \int_{t-\tau-\mu_m}^{t-\tau+\mu_m} \dot{z}^T(\xi)Z_k \dot{z}(\xi)d\xi.$$

Após a aplicação do operador do gerador infinitesimal ao funcional (3.8), considere o seguinte termo nulo obtido a partir do SLSSM (2.14):

$$\begin{aligned} 0 &= 2 [z^T(t)F_i + \dot{z}^T(t)G_i] \left[ -\dot{z}(t) - \sum_{k \in K_i} \bar{L}_{ki} z(t - d_k(t)) \right] \\ &= 2 [z^T(t)F_i + \dot{z}^T(t)G_i] \left[ -\dot{z}(t) - \sum_{k \in K_i} \bar{L}_{ki} \left( z(t - \tau) - \int_{-d_k(t)}^{-\tau} \dot{z}(t + \xi) d\xi \right) \right] \\ &= 2 [z^T(t)F_i + \dot{z}^T(t)G_i] \left[ -\dot{z}(t) - \sum_{k \in K_i} \bar{L}_{ki} z(t - \tau) + \sum_{k \in K_i} \bar{L}_{ki} \int_{-d_k(t)}^{-\tau} \dot{z}(t + \xi) d\xi \right] \\ &= 2 [z^T(t)F_i + \dot{z}^T(t)G_i] \left[ -\dot{z}(t) - \sum_{k \in K_i} \bar{L}_{ki} z(t - \tau) \right] \\ &\quad + 2 [z^T(t)F_i + \dot{z}^T(t)G_i] \left[ \sum_{k \in K_i} \bar{L}_{ki} \int_{-d_k(t)}^{-\tau} \dot{z}(t + \xi) d\xi \right] \\ &= 2\Lambda \left[ -\dot{z}(t) - \sum_{k \in K_i} \bar{L}_{ki} z(t - \tau) \right] + v(t,i), \end{aligned}$$

sendo  $F_i$  e  $G_i$  matrizes com dimensão apropriada  $\forall i \in \mathcal{S}$ ,  $\Lambda = [z^T(t)F_i + \dot{z}^T(t)G_i]$  e

$$\begin{aligned} v(t,i) &= 2\Lambda \sum_{k \in K_i} \bar{L}_{ki} \int_{-d_k(t)}^{-\tau} \dot{z}(t + \xi) d\xi \\ &= \sum_{k \in K_i} \int_{-d_k(t)}^{-\tau} 2\Lambda \bar{L}_{ki} \dot{z}(t + \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Aplicando em  $v(t,i)$  a desigualdade

$$2a^T b \leq a^T X^{-1} a + b^T X b$$



tal que  $a$  e  $b \in \mathbb{R}^n$  e  $X > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e fazendo  $a^T = \Lambda \bar{L}_{ki}$ ,  $b = \dot{z}(t + \xi)$  e  $X = Z_k$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} v(t, i) &= \sum_{k \in K_i} \int_{-d_k(t)}^{-\tau} 2\Lambda \bar{L}_{ki} \dot{z}(t + \xi) d\xi \\ &\leq \sum_{k \in K_i} \int_{-d_k(t)}^{-\tau} [(\Lambda \bar{L}_{ki}) Z_k^{-1} (\Lambda \bar{L}_{ki})^T + \dot{z}^T(t + \xi) Z_k \dot{z}(t + \xi)] d\xi \\ &\leq \sum_{k \in K_i} \int_{-d_k(t)}^{-\tau} (\Lambda \bar{L}_{ki}) Z_k^{-1} (\Lambda \bar{L}_{ki})^T d\xi + \sum_{k \in K_i} \int_{-d_k(t)}^{-\tau} \dot{z}^T(t + \xi) Z_k \dot{z}(t + \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Agora, substituindo  $d_k(t)$  pelo seu limite superior, obtemos:

$$\begin{aligned} v(t, i) &\leq \sum_{k \in K_i} \int_{-(\tau + \mu_m)}^{-\tau} (\Lambda \bar{L}_{ki}) Z_k^{-1} (\Lambda \bar{L}_{ki})^T d\xi + \sum_{k \in K_i} \int_{-(\tau + \mu_m)}^{-\tau} \dot{z}^T(t + \xi) Z_k \dot{z}(t + \xi) d\xi \\ &\leq \int_{-\tau - \mu_m}^{-\tau} d\xi \sum_{k \in K_i} (\Lambda \bar{L}_{ki}) Z_k^{-1} (\Lambda \bar{L}_{ki})^T + \sum_{k \in K_i} \int_{t - \tau - \mu_m}^{t - \tau} \dot{z}^T(\xi) Z_k \dot{z}(\xi) d\xi \\ &\leq \mu_m \sum_{k \in K_i} (\Lambda \bar{L}_{ki}) Z_k^{-1} (\Lambda \bar{L}_{ki})^T + \sum_{k \in K_i} \int_{t - \tau - \mu_m}^{t - \tau} \dot{z}^T(\xi) Z_k \dot{z}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Sendo

$$\sum_{k \in K_i} \int_{t - \tau - \mu_m}^{t - \tau} \dot{z}^T(\xi) Z_k \dot{z}(\xi) d\xi \leq \sum_{k \in K_i} \int_{t - \tau - \mu_m}^{t - \tau + \mu_m} \dot{z}^T(\xi) Z_k \dot{z}(\xi) d\xi,$$

podemos reescrever  $v(t, i)$  como

$$v(t, i) \leq \sum_{k \in K_i} \mu_m (\Lambda \bar{L}_{ki}) Z_k^{-1} (\Lambda \bar{L}_{ki})^T + \sum_{k \in K_i} \int_{t - \tau - \mu_m}^{t - \tau + \mu_m} \dot{z}^T(\xi) Z_k \dot{z}(\xi) d\xi. \quad (3.12)$$

Após considerar as imposições sobre  $v(t, i)$ , temos que o termo nulo de forma expandida será dado por

$$\begin{aligned} 0 &\geq -z^T(t) F_i \dot{z}(t) - \dot{z}^T(t) F_i^T z(t) - z^T(t) F_i \sum_{k \in K_i} \bar{L}_{ki} z(t - \tau) \\ &\quad - z^T(t - \tau) \sum_{k \in K_i} \bar{L}_{ki}^T z(t) - \dot{z}^T(t) G_i \dot{z}(t) - \dot{z}^T(t) G_i^T \dot{z}(t) \\ &\quad - \dot{z}^T(t) G_i \sum_{k \in K_i} \bar{L}_{ki} z(t - \tau) - z^T(t - \tau) \sum_{k \in K_i} \bar{L}_{ki}^T G_i^T \dot{z}(t) \\ &\quad + \sum_{k \in K_i} \mu_m (\Lambda \bar{L}_{ki}) Z_k^{-1} (\Lambda \bar{L}_{ki})^T + \sum_{k \in K_i} \int_{t - \tau - \mu_m}^{t - \tau + \mu_m} \dot{z}^T(\xi) Z_k \dot{z}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Adicionando o termo nulo a (3.11) e colocando tal resultado na forma quadrática, reescrevemos (3.11) como:

$$\mathcal{L}V(z, i) \leq \Upsilon^T \Phi_i \Upsilon + \sum_{k \in K_i} \mu_m (\Lambda \bar{L}_{ki}) Z_k^{-1} (\Lambda \bar{L}_{ki})^T, \quad (3.14)$$

sendo  $\Upsilon^T = \begin{bmatrix} z^T(t) & \dot{z}^T(t) & z^T(t - \tau) & \int_{-\tau}^0 z^T(t + \xi) d\xi \end{bmatrix}$  e  $\Phi_i$  definida em (3.6).

Reescrevendo o termo  $\Lambda \bar{L}_{ki}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \Lambda \bar{L}_{ki} &= [z^T(t)F\bar{L}_{ki} + \dot{z}^T(t)G_i\bar{L}_{ki}] \\ &= [z^T(t) \quad \dot{z}^T(t)] \begin{bmatrix} F_i\bar{L}_{ki} \\ G_i\bar{L}_{ki} \end{bmatrix} \\ &= \Upsilon^T \begin{bmatrix} F_i\bar{L}_{ki} \\ G_i\bar{L}_{ki} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \Upsilon^T \Gamma_{ki}. \end{aligned}$$

Dessa forma podemos reescrever (3.14) como

$$\mathcal{L}V(z,i) \leq \Upsilon^T \Phi_i \Upsilon + \sum_{k \in K_i} \mu_m \Upsilon^T \Gamma_{ki} Z_k^{-1} \Gamma_{ki}^T \Upsilon. \quad (3.15)$$

Lembrando que  $\kappa_i$  indica a quantidade de elementos do conjunto  $K_i$ , reescrevemos (3.15) como

$$\mathcal{L}V(z,i) \leq \Upsilon^T \left[ \sum_{k \in K_i} \left( \frac{1}{\kappa_i} \Phi_i + \Gamma_{ki} \mu_m Z_k^{-1} \Gamma_{ki}^T \right) \right] \Upsilon. \quad (3.16)$$

Portanto, uma condição suficiente para garantir  $\mathcal{L}V(z,i) \leq -\alpha z^T(t)z(t)$  com  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$  é que o termo entre chaves em (3.16) seja negativo. Utilizando o complemento de Schur, tal condição é equivalente a

$$\sum_{k \in K_i} \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa_i} \Phi_i & \mu_m \Gamma_{ki} \\ * & -\mu_m Z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_i & \mu_m \Gamma_i \\ * & -\mu_m Z \end{bmatrix} < 0$$

exatamente como a LMI (3.5), sendo  $Z = \sum_{k \in K_i} Z_k$  e  $\Gamma_i = \sum_{k \in K_i} \Gamma_{ki}$ . Então, fica demonstrado que se as LMIs (3.3), (3.4) e (3.5) forem satisfeitas a condição  $\mathcal{L}V(z,i) \leq -\alpha z^T(t)z(t)$  com  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$  também será.

Por fim, fica demonstrado que se as LMIs impostas pelo Teorema 3.1 forem satisfeitas, temos que, pelo Lema 3.1, o SLSSM (2.14) será estocasticamente estável e conseqüentemente, pelo Lema 2.1, o SMA (2.11) atingirá o consenso estocasticamente.  $\square$

### 3.2.2 Sistemas com Topologia Fixa e Atrasos Variantes

É importante ressaltar que o Teorema 3.1 também se aplica aos casos de sistemas com topologia fixa. Para isso, basta simplesmente considerar que o sistema é composto por uma única topologia, ou seja,  $s = 1$ . Neste caso, como o sistema possui apenas uma topologia, não existem transições entre os modos e portanto tem-se que a matriz de taxas de transição será dada por  $\Pi = 0$ . Assim, tem-se que as LMIs que garantem o consenso para esta situação são equivalentes às LMIs (3.3), (3.4) e (3.5) considerando  $\Pi = 0$  e as variáveis estocásticas  $P_i$ ,  $Q_i$ ,  $F_i$  e  $G_i$  como variáveis determinísticas. Tais LMIs são apresentadas no Corolário (3.1).

**Corolário 3.1** *Dados  $\tau > 0$  e  $\tau \geq \mu_m \geq 0$ , o sistema multi-agente (2.11) com  $d_k(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m] \forall k \in K$  e topologia fixa, atinge o consenso se existirem matrizes  $F$ ,  $G$ ,  $P = P^T$ ,  $Q$ ,  $R_1 = R_1^T$ ,  $R_2$ ,  $R_3 = R_3^T$ ,  $S = S^T$  e  $Z = Z^T$  com dimensão  $(n-1) \times (n-1)$  que satisfaçam as LMIs (3.17), (3.18) e (3.19).*

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ * & \frac{1}{\tau}S \end{bmatrix} > 0, \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2^T \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi & \mu_m \Gamma \\ * & -\mu_m Z \end{bmatrix} < 0, \quad (3.19)$$

sendo

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi^{11} & P + \tau R_2^T - F & -Q + \frac{1}{\tau}R_3 - F\bar{L} & -\frac{1}{\tau}R_2 \\ * & \tau R_3 + 2\mu_m Z - G - G^T & -G\bar{L} & Q \\ * & * & -\frac{1}{\tau}R_3 - S & \frac{1}{\tau}R_2 \\ * & * & * & -\frac{1}{\tau}R_1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

com

$$\phi^{11} = Q + Q^T + \tau R_1 - \frac{1}{\tau}R_3 + S$$

$e$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} F\bar{L} \\ G\bar{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

□

### 3.2.3 Sistemas com Topologia Variável Incerta

Em sistemas sujeitos a saltos markovianos, as taxas de transição são um fator dominante na determinação do comportamento do sistema. Na prática, sabe-se que é extremamente difícil estimar precisamente as taxas de transição que caracterizam o sistema. Como solução para este problema, na literatura foram propostos trabalhos que consideram essas taxas de transição como incertas (Xiong & Lam 2009, Xiong, Lam, Gao & Ho 2005) ou desconhecidas (Zhang, Boukas & Lam 2008, Zhang & Boukas 2009). Esta mesma ideia pode ser aplicada ao caso de estudo desta dissertação, ou seja, o de SMAs sujeitos a topologia variável baseada em saltos markovianos.

Nesta seção é apresentada uma extensão do método proposto para o caso de SMAs sujeitos a topologia variável na qual é adotada uma abordagem em que as taxas de transição que definem o comportamento das mudanças de topologia podem não ser precisamente conhecidas. Tal incerteza é inserida,  $\forall i, j \in \mathcal{S}$ , na taxa de transição  $\pi_{ij}$  de forma que esta taxa é reescrita como  $\pi_{ij} = \bar{\pi}_{ij} + \epsilon_{ij}$ , sendo  $\bar{\pi}_{ij}$  o valor estimado da taxa de transição do estado  $i$  no tempo  $\theta_t$  para  $j$  no tempo  $\theta_{t+\Delta}$  e  $\epsilon_{ij}$  o erro presente nesta estimativa. É importante ressaltar que  $\epsilon_{ij}$  é um valor constante desconhecido que pertence ao intervalo  $\epsilon_{ij} \in [-\delta_{ij}, \delta_{ij}]$  com  $\delta_{ij} > 0 \forall i, j \in \mathcal{S}$  e que os parâmetros  $\bar{\pi}_{ij}$  e  $\delta_{ij} > 0$  são conhecidos. Sob tais considerações, redefine-se a matriz de probabilidade de transição  $\Psi = [\psi_{ij}]$  apresentada em (2.9) para

$$\psi_{ij} = \mathbb{P}\{\theta_{t+\Delta} = j \mid \theta_t = i\} = \begin{cases} (\bar{\pi}_{ij} + \epsilon_{ij})\Delta + o(\Delta) & i \neq j, \\ 1 + (\bar{\pi}_{ii} + \epsilon_{ii})\Delta + o(\Delta) & i = j, \end{cases} \quad (3.22)$$

Logo, a matriz de taxas de transição sob a consideração das incertezas  $\bar{\Pi} = [\bar{\pi}_{ij} + \epsilon_{ij}]$

é definida por

$$\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} \bar{\pi}_{11} + \epsilon_{11} & \bar{\pi}_{12} + \epsilon_{12} & \cdots & \bar{\pi}_{1s} + \epsilon_{1s} \\ \bar{\pi}_{21} + \epsilon_{21} & \bar{\pi}_{22} + \epsilon_{22} & \cdots & \bar{\pi}_{2s} + \epsilon_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\pi}_{s1} + \epsilon_{s1} & \bar{\pi}_{s2} + \epsilon_{s2} & \cdots & \bar{\pi}_{ss} + \epsilon_{ss} \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Mantendo as características de uma matriz de taxas de transição, tem-se,  $\forall i \in \mathcal{S}$ , que  $\bar{\pi}_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^s \bar{\pi}_{ij}$ ,  $\epsilon_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^s \epsilon_{ij}$  e conseqüentemente  $\sum_{j=1}^s (\bar{\pi}_{ij} + \epsilon_{ij}) = 0$ .

Ademais, será apresentado um método (Teorema 3.2) para a análise do consenso do sistema (2.11) considerando que a topologia variável possui taxas de transição incertas. Neste caso, assume-se que a dinâmica do parâmetro  $\theta_t$  é a mesma assumida para o caso de topologia variável com taxas de transição precisamente conhecidas apresentada no Capítulo 2 considerando que a matriz de probabilidade de transição é agora dada por (3.22). Antes de apresentar o Teorema 3.2, considere o seguinte lema:

**Lema 3.2** (Xiong & Lam 2009) *Dados um número real  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , uma matriz quadrada  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e uma matriz simétrica definida positiva  $T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , a seguinte desigualdade é verdadeira:*

$$\varepsilon(M + M^T) \leq \varepsilon^2 T + MT^{-1}M^T.$$

□

**Teorema 3.2** *Dados  $\tau > 0$ ,  $\tau \geq \mu_m \geq 0$  e  $\bar{\Pi}$  definida em (3.23) tal que  $\epsilon_{ij} \in [-\delta_{ij}, \delta_{ij}]$  com  $\delta_{ij} > 0 \forall i, j \in \mathcal{S}$ , o sistema multi-agente (2.11) com  $d_k(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m] \forall k \in K_i$ , atinge o consenso estocasticamente se existirem matrizes  $F_i, G_i, P_i = P_i^T, Q, R_1 = R_1^T, R_2, R_3 = R_3^T, S = S^T$  e  $Z = Z^T$  com dimensão  $(n-1) \times (n-1)$  que satisfaçam as LMIs (3.24), (3.25) e (3.26)  $\forall i \in \mathcal{S}$ .*

$$\begin{bmatrix} P_i & Q \\ * & \frac{1}{\tau} S \end{bmatrix} > 0, \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2^T \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_i & \mu_m \Gamma_i \\ * & -\mu_m Z \end{bmatrix} < 0, \quad (3.26)$$

sendo

$$\bar{\Phi}_i = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_i^{11} & P_i + \tau R_2^T - F_i & -Q + \frac{1}{\tau} R_3 - F_i \bar{L}_i & -\frac{1}{\tau} R_2 \\ * & \tau R_3 + 2\mu_m Z - G_i - G_i^T & -G_i \bar{L}_i & Q \\ * & * & -\frac{1}{\tau} R_3 - S & \frac{1}{\tau} R_2 \\ * & * & * & -\frac{1}{\tau} R_1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

com

$$\bar{\phi}_i^{11} = \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j + \sum_{j=1}^s \frac{5\delta_{ij}}{4} P_j + Q + Q^T + \tau R_1 - \frac{1}{\tau} R_3 + S$$

e

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} F_i \bar{L}_i \\ G_i \bar{L}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

**Demonstração:** A demonstração deste teorema consiste no mesmo procedimento adotado para demonstrar o Teorema 3.1 considerando uma pequena diferença nos termos em que aparecem as taxas de transição  $\pi_{ij}$  que aqui são substituídas por  $\bar{\pi}_{ij} + \epsilon_{ij}$ . Considerando o Lema 2.1, tem-se que o SMA (2.11), sujeito a topologia variável incerta, atinge o consenso estocasticamente se, e somente se, o SLSSM (2.14), com matriz de taxas de transição incerta, for estocasticamente estável permitindo que o problema de análise de consenso possa ser interpretado como um problema de análise de estabilidade. Dessa forma, esta demonstração apresenta condições que determinam se o SLSSM (2.14) com matriz de taxas de transição incerta é estocasticamente estável usando como base o Lema 3.1.

Considere o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii com variáveis estocásticas candidato:

$$\bar{V}(z, i) = \bar{V}_1(z, i) + \bar{V}_2(z) + \bar{V}_3(z) + \bar{V}_4(z) + \bar{V}_5(z) \quad (3.29)$$

com

$$\begin{aligned}\bar{V}_1(z,i) &= z^T(t)P_i z(t), \\ \bar{V}_2(z) &= 2z^T(t)Q \int_{t-\tau}^t z(\xi)d\xi, \\ \bar{V}_3(z) &= \int_{-\tau}^0 \int_{t+\zeta}^t \bar{z}^T(\xi)\bar{R}\bar{z}(\xi)d\xi d\zeta, \\ \bar{V}_4(z) &= \int_{t-\tau}^t z^T(\xi)S z(\xi)d\xi, \\ \bar{V}_5(z,i) &= \sum_{k \in K_i} \int_{-\mu_m}^{\mu_m} \int_{t+\zeta-\tau}^t \dot{z}^T(\xi)Z_k \dot{z}(\xi)d\xi d\zeta,\end{aligned}$$

sendo  $\bar{z}^T(\xi) = [z^T(\xi) \ \dot{z}^T(\xi)]$  e  $P_i = P_i^T$ ,  $Q$ ,  $\bar{R} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2^T \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} = \bar{R}^T$ ,  $S = S^T$  e  $Z_k = Z_k^T \ \forall k \in K_i$  variáveis matriciais.

A primeira parte da demonstração mostra que se as LMIs (3.24), (3.25) e (3.26) forem satisfeitas a condição  $\bar{V}(z,i) \geq \alpha z^T(t)z(t)$  com  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$  também será.

É análogo que  $\bar{V}_2(z)$  é igual ao termo  $V_2(z,i)$  definido em (3.9) com  $Q_i = Q$  e que  $\bar{V}_4(z)$  é igual ao termo  $V_4(z)$  definido em (3.10). Dessa forma, agrupando os termos  $\bar{V}_1(z,i)$ ,  $\bar{V}_2(z)$  e  $\bar{V}_4(z)$  em uma forma matricial, podemos reescrever o funcional (3.29) como:

$$\begin{aligned}\bar{V}(z,i) &\geq \eta^T \begin{bmatrix} P_i & Q \\ * & \frac{1}{\tau}S \end{bmatrix} \eta \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\zeta}^t \bar{z}^T(\xi)\bar{R}\bar{z}(\xi)d\xi d\zeta \\ &\quad + \sum_{k \in K_i} \int_{-\mu_m}^{\mu_m} \int_{t+\zeta-\tau}^t \dot{z}^T(\xi)Z_k \dot{z}(\xi)d\xi d\zeta,\end{aligned}$$

com  $\eta^T = \left[ z^T(t) \ \int_{-\tau}^0 z^T(t+\xi)d\xi \right]$ .

Portanto, uma condição suficiente para garantir  $\bar{V}(z,i) \geq \alpha z^T(t)z(t)$  com  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$ , é que o lado direito da desigualdade acima seja positivo. Então, fica demonstrado que se as LMIs (3.24), (3.25) e (3.26) forem satisfeitas a condição  $\bar{V}(z,i) \geq \alpha z^T(t)z(t)$  com  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$  também será. Note que as LMIs (3.24) e (3.25) garantem respectivamente, que o primeiro e o segundo termo da desigualdade acima sejam positivo e que  $Z = \sum_{k \in K_i} Z_k$  na LMI (3.26) garanta a positividade do terceiro termo.

O próximo passo da demonstração mostra que se as LMIs (3.24), (3.25) e (3.26) forem satisfeitas a condição  $\mathcal{L}\bar{V}(z,i) \leq -\alpha z^T(t)z(t)$  com  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$  também será.

Aplicando o operador do gerador infinitesimal ao longo das trajetórias no funcional (3.8), obtém-se:

$$\mathcal{L}\bar{V}(z,i) = \mathcal{L}\bar{V}_1(z,i) + \mathcal{L}\bar{V}_2(z) + \mathcal{L}\bar{V}_3(z) + \mathcal{L}\bar{V}_4(z) + \mathcal{L}\bar{V}_5(z). \quad (3.30)$$

O termo  $\mathcal{L}\bar{V}_1(z,i)$  é dado por:

$$\mathcal{L}\bar{V}_1(z,i) = \dot{z}^T(t)P_i z(t) + z^T(t)P_i \dot{z}(t) + z^T(t) \left( \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j \right) z(t).$$

Substituindo  $\pi_{ij}$  por  $\bar{\pi}_{ij} + \epsilon_{ij}$ , podemos reescrever  $\mathcal{L}\bar{V}_1(z,i)$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\bar{V}_1(z(t),i) &= \dot{z}^T(t)P_i z(t) + z^T(t)P_i \dot{z}(t) + z^T(t) \left[ \sum_{j=1}^s (\bar{\pi}_{ij} + \epsilon_{ij}) P_j \right] z(t) \\ &= \dot{z}^T(t)P_i z(t) + z^T(t)P_i \dot{z}(t) + z^T(t) \left( \sum_{j=1}^s \bar{\pi}_{ij} P_j + \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij} P_j \right) z(t) \\ &= \dot{z}^T(t)P_i z(t) + z^T(t)P_i \dot{z}(t) + z^T(t) \left( \sum_{j=1}^s \bar{\pi}_{ij} P_j \right) z(t) \\ &\quad + z^T(t) \left( \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij} P_j \right) z(t). \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.2 ao termo

$$z^T(t) \left( \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij} P_j \right) z(t),$$

podemos reescrevê-lo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} z^T(t) \left( \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij} P_j \right) z(t) &= z^T(t) \left[ \sum_{j=1}^s \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (P_j + P_j) \right] z(t) \\ &\leq z^T(t) \sum_{j=1}^s \left[ \left( \frac{\epsilon_{ij}}{2} \right)^2 T + P_j T^{-1} P_j \right] z(t), \end{aligned}$$

como  $\epsilon_{ij} \in [-\delta_{ij}, \delta_{ij}] \forall i,j \in \mathcal{S}$ , tem-se que  $\epsilon_{ij}^2 \leq \delta_{ij}^2$  e assim

$$z^T(t) \left( \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij} P_j \right) z(t) \leq z^T(t) \sum_{j=1}^s \left( \frac{\delta_{ij}^2}{4} T + P_j T^{-1} P_j \right) z(t).$$



Fazendo  $T = \frac{1}{\delta_{ij}}P_j$ , temos que

$$\begin{aligned} z^T(t) \left( \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij} P_j \right) z(t) &\leq z^T(t) \sum_{j=1}^s \left[ \frac{\delta_{ij}}{4} P_j + \delta_{ij} P_j \right] z(t) \\ &\leq z^T(t) \left( \sum_{j=1}^s \frac{5\delta_{ij}}{4} P_j \right) z(t). \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever o termo  $\mathcal{L}\bar{V}_1(z, i)$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\bar{V}_1(z, i) &\leq \dot{z}^T(t) P_i z(t) + z^T(t) P_i \dot{z}(t) + z^T(t) \left( \sum_{j=1}^s \bar{\pi}_{ij} P_j \right) z(t) \\ &\quad + z^T(t) \left( \sum_{j=1}^s \frac{5\delta_{ij}}{4} P_j \right) z(t). \end{aligned}$$

O termo  $\mathcal{L}\bar{V}_2(z, i)$  é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\bar{V}_2(z) &= \dot{z}^T(t) Q \int_{-\tau}^0 z(t + \xi) d\xi + \int_{-\tau}^0 z^T(t + \xi) d\xi Q^T \dot{z}(t) \\ &\quad + z^T(t) Q z(t) + z^T Q^T z(t) - z^T(t) Q z(t - \tau) - z^T(t - \tau) Q^T z(t). \end{aligned}$$

Os termos  $\mathcal{L}\bar{V}_3(z)$ ,  $\mathcal{L}\bar{V}_4(z)$  e  $\mathcal{L}\bar{V}_5(z)$  são respectivamente iguais a  $\mathcal{L}V_3(z)$ ,  $\mathcal{L}V_4(z)$  e  $\mathcal{L}V_5(z)$  definidos em (3.11).

Adicionando o termo nulo definido em (3.13) e agrupando tal resultado em forma matricial, reescrevemos (3.30) como:

$$\mathcal{L}\bar{V}(z, i) \leq \Upsilon^T \bar{\Phi}_i \Upsilon + \sum_{k \in K_i} \mu_m (\Lambda \bar{L}_{ki}) Z_k^{-1} (\Lambda \bar{L}_{ki})^T, \quad (3.31)$$

sendo  $\Upsilon^T = \begin{bmatrix} z^T(t) & \dot{z}^T(t) & z^T(t - \tau) & \int_{-\tau}^0 z^T(t + \xi) d\xi \end{bmatrix}$  e  $\bar{\Phi}_i$  definida em (3.27).

Como definido anteriormente, sabe-se que  $\Lambda \bar{L}_{ki} = \Upsilon^T \Gamma_{ki}$  com  $\Gamma_{ki}$  definido em (3.28).

Dessa forma podemos reescrever (3.31) como

$$\mathcal{L}\bar{V}(z, i) \leq \Upsilon^T \bar{\Phi}_i \Upsilon + \sum_{k \in K_i} \mu_m \Upsilon^T \Gamma_{ki} Z_k^{-1} \Gamma_{ki}^T \Upsilon. \quad (3.32)$$

Novamente, lembrando que  $\kappa_i$  indica a quantidade de elementos do conjunto  $K_i$ , reescrevemos (3.32) como

$$\mathcal{L}\bar{V}(z, i) \leq \Upsilon^T \left[ \sum_{k \in K_i} \left( \frac{1}{\kappa_i} \bar{\Phi}_i + \Gamma_{ki} \mu_m Z_k^{-1} \Gamma_{ki}^T \right) \right] \Upsilon. \quad (3.33)$$

Portanto, uma condição suficiente para garantir  $\mathcal{L}\bar{V}(z,i) \leq -\alpha z^T(t)z(t)$  com  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$  é que o termo entre chaves em (3.33) seja negativo. Utilizando o complemento de Schur, tal condição é equivalente a

$$\sum_{k \in K_i} \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa_i} \bar{\Phi}_i & \mu_m \Gamma_{ki} \\ * & -\mu_m Z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_i & \mu_m \Gamma_i \\ * & -\mu_m Z \end{bmatrix} < 0$$

exatamente como a LMI (3.26), sendo  $Z = \sum_{k \in K_i} Z_k$  e  $\Gamma_i = \sum_{k \in K_i} \Gamma_{ki}$ . Então, fica demonstrado que se as LMIs (3.24), (3.25) e (3.26) forem satisfeitas a condição  $\mathcal{L}\bar{V}(z,i) \leq -\alpha z^T(t)z(t)$  com  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$  também será.

Portanto, utilizando os mesmos procedimentos adotados para a demonstração do Teorema 3.1, fica demonstrado que se as LMIs impostas pelo Teorema 3.2 forem satisfeitas, temos que pelo Lema 3.1 o SLSSM (2.14), considerando taxas de transição incertas, será estocasticamente estável e consequentemente pelo Lema 2.1 o SMA (2.11), considerando topologia variável incerta, atingirá o consenso estocasticamente.

□

Usando como base o que foi apresentado nas Subseções 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3, tem-se que o consenso do sistema (2.11) pode ser analisado a partir de testes de factibilidade das condições LMIs impostas pelo Teorema 3.1 para casos de topologia variável, pelo Corolário 3.1 para casos de topologia fixa e pelo Teorema 2 para casos de topologia variável com taxas de transição incertas. Neste ponto, portanto, encerra-se o problema de análise de consenso.

## Estudos de Caso

*Bons resultados não acontecem por acaso.*

*Fernando Lapolli*

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com a aplicação dos métodos propostos (Teorema 3.1, Corolário 3.1 e Teorema 3.2) na análise do consenso de SMAs sujeitos a atrasos no tempo com topologia fixa ou variável. Tais resultados são apresentados por meio de exemplos numéricos na forma de estudos de caso e obtidos por meio de testes de factibilidade das LMIs apresentadas nos métodos propostos utilizando o LMI *Control Toolbox* no MATLAB e ilustrados por meio de simulações temporais realizadas com auxílio do *Simulink* também no MATLAB. São utilizados ainda métodos propostos em trabalhos relacionados para comparação.

### 4.1 Caso 1: Sistema com Topologia Fixa e Atrasos Constantes

Considere que os SMAs apresentados na Figura 4.1 estão sujeitos a atrasos constantes e uniformes, ou seja,  $d_k(t) = \tau \forall k \in K$  e  $\mu_m = 0$ . Assim, para fins de comparação, o método proposto por esta dissertação para esta situação (Corolário 3.1) e os métodos apresentados em Lin et al. (2008), Kecai et al. (2011), Bettoni et al. (2012), Savino et al. (2013) e Xi, Li, Cai & Zhong (2013), são utilizados para determinar qual o máximo atraso em que o método garante que o SMA atinge consenso.

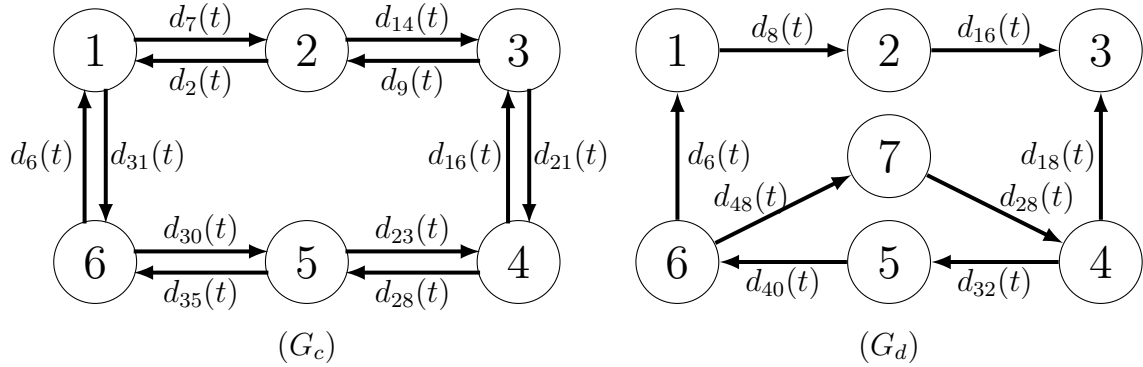


Figura 4.1:  $G_c$  SMA com grafo não direcionado e  $G_d$  SMA com grafo direcionado.

Os resultados obtidos com os testes de factibilidade e os resultados analíticos para  $G_c$  e  $G_d$ , determinados respectivamente em Bliman & Ferrari-Trecate (2008) e Xi et al. (2013), são apresentados na Tabela 4.1. É importante ressaltar que uma das finalidades deste teste é a de verificar o quão próximo do resultado analítico o método proposto está, uma vez que as condições impostas pelo método são apenas suficientes.

Tabela 4.1: Maior atraso constante  $\tau$ , considerando  $d_k(t) = \tau \forall k \in K$  e  $\mu_m = 0$

Método	$\tau$ máximo	
	$G_c$	$G_d$
Lin et al. (2008) [Teor. 3]	0,24	-
Kecai et al. (2011) [Teor. 1]	0,353	-
Bettoni et al. (2012) [Teor. 1]	0,353	-
Savino et al. (2013) [Cor. 1]	0,353	-
Xi et al. (2013) [Teor. 2]	0,353	0,54
Corolário 3.1	0,353	0,54
Analítico	0,3927	0,5554

Pela Tabela 4.1, os resultados mostram que para as características dos sistemas em questão (rede não direcionada e direcionada com atrasos constantes e uniformes), o método proposto possui resultados próximos aos resultados analíticos e iguais aos melhores resultados apresentados por outros métodos na literatura. Ademais, é válido ressaltar que entre os métodos apresentados na Tabela 4.1 apenas o método proposto (Corolário 3.1) e o método apresentado em Xi et al. (2013) podem ser aplicados em

SMA com redes não direcionadas ou direcionadas. Além disso, vale salientar também que somente o método proposto (Corolário 3.1) e os métodos apresentados em Bettoni et al. (2012) e Savino et al. (2013) podem ser aplicados em SMA com atrasos variantes e não diferenciáveis o que coloca o método proposto dentre os métodos mais gerais presentes na literatura.

Além dos testes de factibilidade, foram realizadas simulações temporais para ilustrar o efeito dos atrasos no comportamento do sistema e verificar a eficiência do método proposto quanto a garantia do consenso.

A Figura 4.2 apresenta a trajetória dos estados de um SMA definido pelo grafo  $G_c$  considerando o atraso máximo ( $\tau = 0,353$  e  $\mu_m = 0$ ) garantido pelo método (Corolário 3.1) como apresentado na Tabela 4.1.

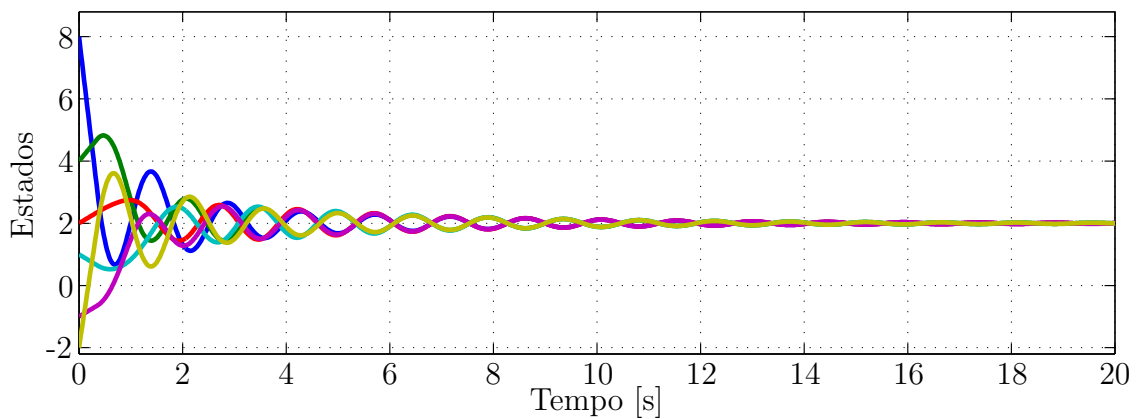


Figura 4.2: Trajetória dos estados do SMA com topologia do grafo  $G_c$  sujeito a atrasos constantes dados por  $d_k(t) = \tau$  com  $k \in K$  sendo  $\tau = 0,353$  e condições iniciais dadas por  $X(0) = [8, 4, 2, 1, -1, -2]$ .

Analisando o comportamento das trajetórias da Figura 4.2, percebe-se que o SMA atinge o consenso com o atraso garantido pelo método.

A Figura 4.3 apresenta a trajetória dos estados de um SMA definido pelo grafo  $G_c$  considerando o atraso como  $\tau = 0,4$  e  $\mu_m = 0$ .

Analisando o comportamento das trajetórias apresentados na Figura 4.3, como era de se esperar, o sistema não atinge o consenso visto que o valor do atraso está acima do valor máximo analítico.

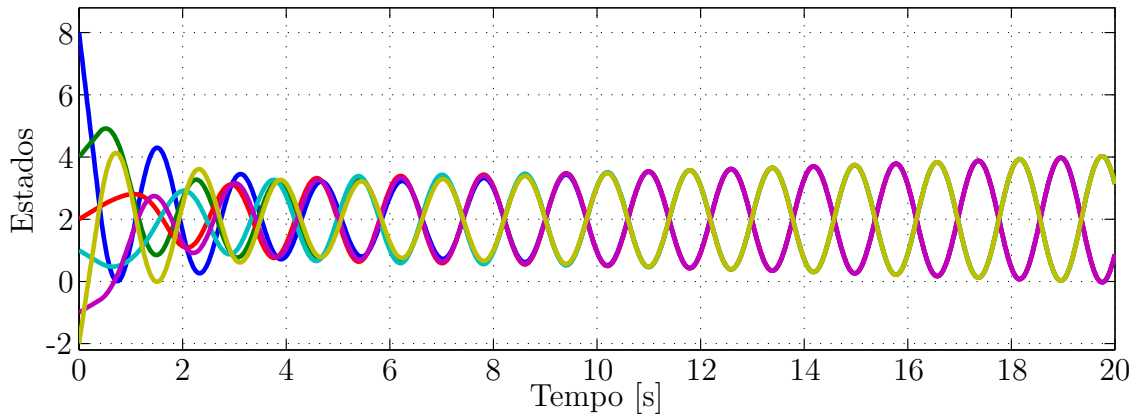


Figura 4.3: Trajetória dos estados do SMA com topologia do grafo  $G_c$  sujeito a atrasos constantes dados por  $d_k(t) = \tau$  com  $k \in K$  sendo  $\tau = 0,4$  e condições iniciais dadas por  $X(0) = [8, 4, 2, 1, -1, -2]$ .

## 4.2 Caso 2: Sistema com Topologia Fixa e Atrasos Variantes

Agora, considerando que os sistemas com topologias fixas apresentadas na Figura 4.1 estão sujeitos a atrasos variantes não diferenciáveis e não uniformes pertencentes ao intervalo  $d_k(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m]$  com  $k \in K$ . Dessa forma, os métodos propostos em Bettoni et al. (2012), Savino et al. (2013) e o método proposto por esta dissertação para esta situação (Corolário 3.1) são aplicados para determinar qual o maior valor da perturbação  $\mu_m$  para diferentes valores de  $\tau$  em que os métodos garantem o consenso dos sistemas. É importante lembrar que os demais métodos considerados não são aplicáveis para este caso. Os resultados obtidos com os testes de factibilidade são apresentados na Tabela 4.2.

Os resultados apresentados na Tabela 4.2 revelam que o método proposto se iguala aos mais recentes métodos apresentados na literatura para SMAs com rede não direcionada (caso do  $G_c$ ) e ainda mostra-se aplicável em sistemas com rede direcionada (caso do  $G_d$ ), o que torna o método proposto por esta dissertação mais geral que os presentes na literatura.

Além dos testes de factibilidade, para este estudo de caso também foram realizadas simulações temporais para ilustrar o efeito dos atrasos no comportamento do sistema

Tabela 4.2: Maior perturbação  $\mu_m$  para diferentes atrasos  $\tau$ , considerando que  $d_k(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m]$  com  $k \in K$ .  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  e  $\mathcal{M}_3$  indicam, respectivamente, os métodos propostos em Bettoni et al. (2012) [Teor. 1], Savino et al. (2013) [Cor. 1] e o Corolário 3.1.

$\tau$	$G_c$		$G_d$	
	$\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$	$\mathcal{M}_3$	$\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$	$\mathcal{M}_3$
	$\mu_m$ máximo	$\mu_m$ máximo	$\mu_m$ máximo	$\mu_m$ máximo
0,15	0,095	0,095	-	0,150
0,20	0,070	0,070	-	0,200
0,25	0,047	0,047	-	0,181
0,30	0,024	0,024	-	0,148
0,35	0,001	0,001	-	0,116

e verificar a eficiência do método quanto a garantia do consenso.

A Figura 4.4 apresenta a trajetória dos estados de um SMA definido pelo grafo  $G_d$  considerando o atraso como  $\tau = 0,35$  e  $\mu_m = 0,116$ .

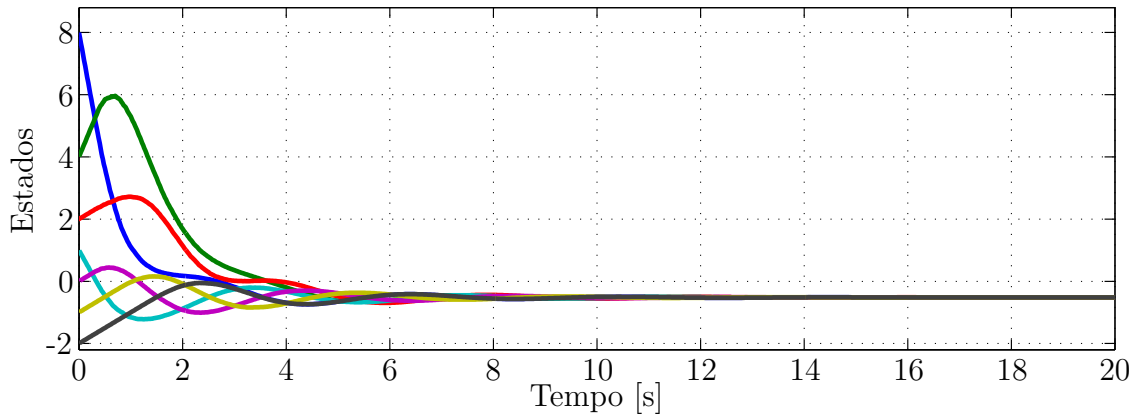


Figura 4.4: Trajetória dos estados do SMA com topologia do grafo  $G_d$  sujeito a atrasos variantes, não diferenciáveis e não uniformes pertencentes ao intervalo  $d_k(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m]$  com  $k \in K$  sendo  $\tau = 0,35$  e  $\mu_m = 0,116$  e condições iniciais dadas por  $X(0) = [8, 4, 2, 1, 0, -1, -2]$ .

Analisando o comportamento das trajetórias da Figura 4.4, percebe-se que o SMA atinge o consenso com o atraso e a perturbação garantida pelo método.

A Figura 4.5 apresenta a trajetória dos estados de um SMA definido pelo grafo  $G_d$  considerando o atraso como  $\tau = 0,6$  e  $\mu_m = 0,116$ .

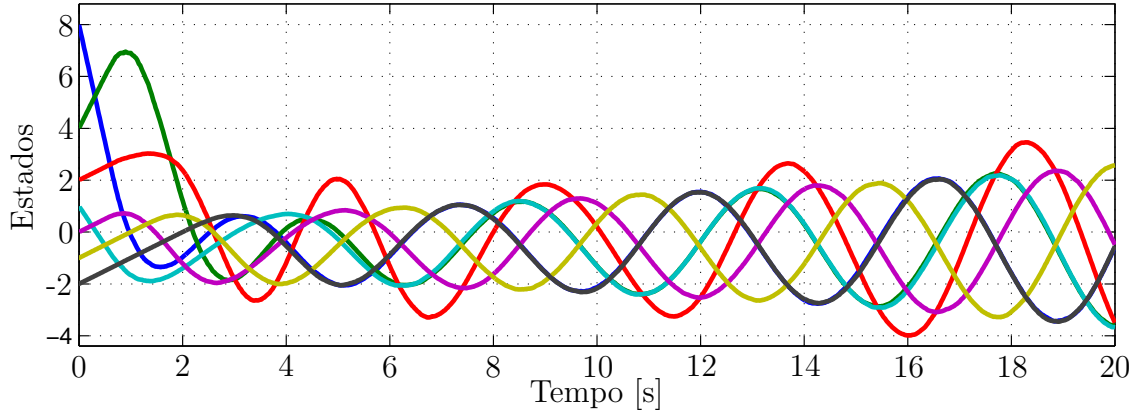


Figura 4.5: Trajetória dos estados do SMA com topologia do grafo  $G_d$  sujeito a atrasos variantes, não diferenciáveis e não uniformes pertencentes ao intervalo  $d_k(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m]$  com  $k \in K$  sendo  $\tau = 0,6$  e  $\mu_m = 0,116$  e condições iniciais dadas por  $X(0) = [8, 4, 2, 1, 0, -1, -2]$ .

Analisando o comportamento das trajetórias apresentados na Figura 4.5, como era de se esperar, o sistema não atinge o consenso visto que o valor do atraso está acima do valor máximo analítico.

Por fim, a Figura 4.6 ilustra o comportamento do atraso  $d_{48}(t)$  na simulação temporal do grafo  $G_d$  para o caso onde  $\tau = 0,6$  e  $\mu_m = 0,116$ . É importante ressaltar que na simulação dos atrasos foram considerados sinais aleatórios.

### 4.3 Caso 3: Sistema com Topologia Variável e Atrasos Variantes

Considere um SMA com topologia variável que chaveia entre os grafos  $G_a$  e  $G_b$  (Figura 2.5) de acordo com uma cadeia de Markov de tempo contínuo com matriz de taxas de transição dada por

$$\Pi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$



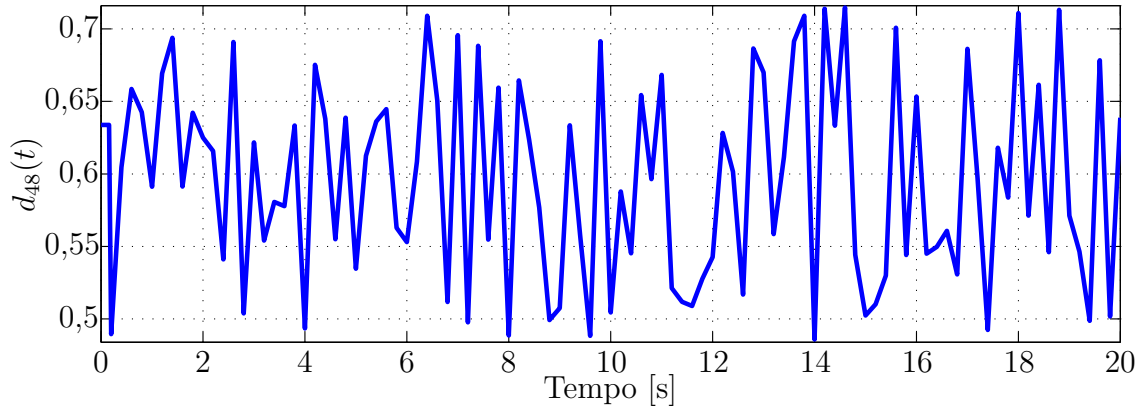


Figura 4.6: Comportamento do atraso  $d_{48}(t)$  na simulação temporal do grafo  $G_d$  para o caso onde  $\tau = 0,6$  e  $\mu_m = 0,116$ .

Considere ainda que tal sistema está sujeito a atrasos variantes, não diferenciáveis e não uniformes pertencentes ao intervalo  $d_k(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m]$  com  $k \in K_i$ . É válido ressaltar que para este caso, entre os métodos considerados nas seções anteriores, apenas o método proposto por esta dissertação (Teorema 3.1) é aplicável. Para avaliar a eficiência do método proposto com futuras comparações, é determinado o maior valor de  $\mu_m$ , para diferentes valores de  $\tau$  mantendo fixo os valores das taxas de transição, na qual o método garante o consenso do sistema. Os resultados obtidos com esse teste são apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Maior perturbação  $\mu_m$  para diferentes atrasos  $\tau$  e matriz de taxas de transição (4.1).

$\tau$	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
$\mu_m$ máximo	0,150	0,128	0,104	0,082	0,057

Além dos testes de factibilidade, para este estudo de caso também foram realizadas simulações temporais para ilustrar o efeito dos atrasos no comportamento do sistema e verificar a eficiência do método quanto a garantia do consenso.

A Figura 4.7 ilustra a trajetória dos estados de um SMA que varia sua topologia entre os grafos  $G_a$  e  $G_b$  de acordo com uma CMTC com taxas de transição conhecidas dadas por (4.1); e está sujeito a atrasos variantes, não diferenciáveis e não uniformes pertencentes ao intervalo  $d_k(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m]$  com  $k \in K_i$  sendo  $\tau = 0,35$  e

$\mu_m = 0,057$ . Tal figura ilustra também o comportamento da cadeia de Markov utilizada nesta simulação. É importante ressaltar que para a simulação da cadeia de Markov foi utilizada como referência a implementação apresentada em Feres (2007).

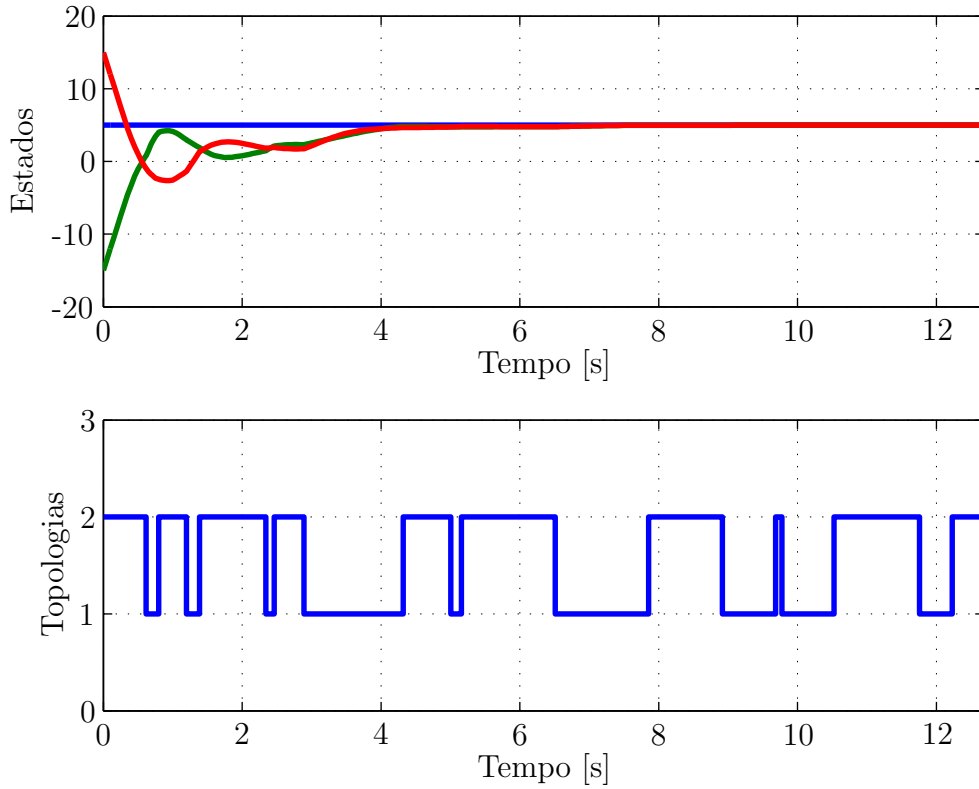


Figura 4.7: Na parte superior: trajetória dos estados do SMA com topologia que varia entre os grafos  $G_a$  e  $G_b$  considerando que o sistema está sujeito a atrasos variantes, não diferenciáveis e não uniformes pertencentes ao intervalo  $d_k(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m]$  com  $k \in K_i$  sendo  $\tau = 0,35$  e  $\mu_m = 0,057$  e condições iniciais dadas por  $X(0) = [15, 5, -15]$ . Na parte inferior: dinâmica de mudança de topologia, na qual o valor 1 do sinal de topologia indica que o sistema assume o comportamento do grafo  $G_a$  e o valor 2, o comportamento do grafo  $G_b$ .

Analisando o comportamento das trajetórias da Figura 4.7, percebe-se que o SMA atinge o consenso com o atraso e com a taxa de transição garantida pelo método.

A Figura 4.8 ilustra a trajetória dos estados de um SMA que varia sua topologia entre os grafos  $G_a$  e  $G_b$  de acordo com uma CMTC com taxas de transição conhecidas dadas por (4.1); e está sujeito a atrasos variantes, não diferenciáveis e não uniformes

pertencentes ao intervalo  $d_k(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m]$  com  $k \in K_i$  sendo  $\tau = 0,7$  e  $\mu_m = 0,057$ . Tal figura ilustra também o comportamento da cadeia de Markov utilizada nesta simulação.

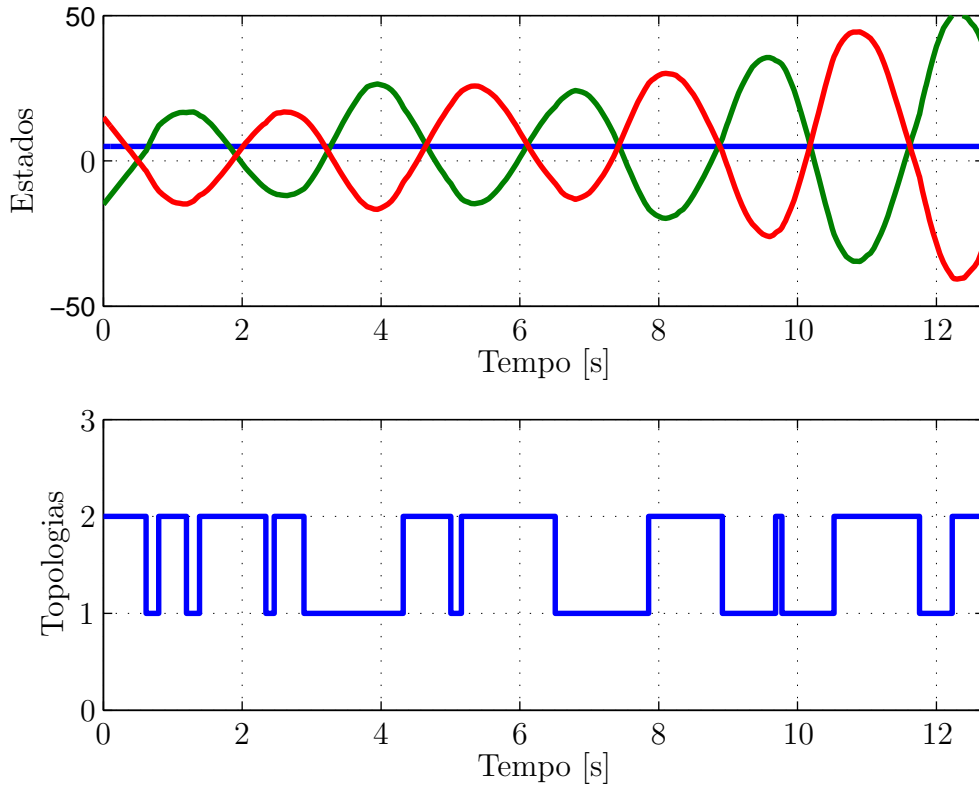


Figura 4.8: Na parte superior: trajetória dos estados do SMA com topologia que varia entre os grafos  $G_a$  e  $G_b$  considerando que o sistema está sujeito a atrasos variantes, não diferenciáveis e não uniformes pertencentes ao intervalo  $d_k(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m]$  com  $k \in K_i$  sendo  $\tau = 0,7$  e  $\mu_m = 0,057$  e condições iniciais dadas por  $X(0) = [15, 5, -15]$ . Na parte inferior: dinâmica de mudança de topologia, na qual o valor 1 do sinal de topologia indica que o sistema assume o comportamento do grafo  $G_a$  e o valor 2, o comportamento do grafo  $G_b$ .

Analisando o comportamento das trajetórias apresentados na Figura 4.5, como era de se esperar, o sistema não atinge o consenso visto que o valor do atraso está bem acima do valor máximo garantido pelo método.

Por fim, a Figura 4.9 ilustra o comportamento do atraso  $d_6(t)$  na simulação temporal do SMA que varia sua topologia entre os grafos  $G_a$  e  $G_b$  para o caso onde  $\tau = 0,7$  e

$\mu_m = 0,057$  e a matriz de taxas de transição dada por (4.1). É importante ressaltar que na simulação dos atrasos foram considerados sinais aleatórios.

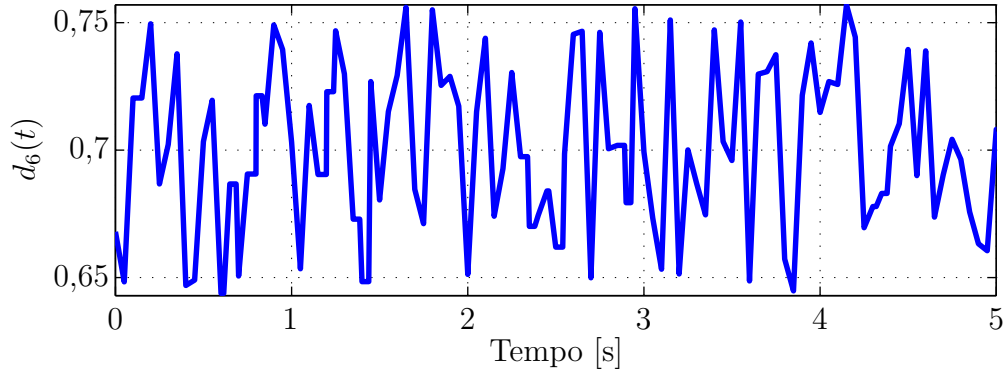


Figura 4.9: Comportamento do atraso  $d_6(t)$  na simulação temporal do SMA que varia sua topologia entre os grafos  $G_a$  e  $G_b$  para o caso onde  $\tau = 0,7$  e  $\mu_m = 0,057$  e a matriz de taxas de transição é dada por (4.1)

#### 4.4 Caso 4: Sistema com Topologia Variável Incerta e Atrasos Variantes

Considere um SMA com topologia variável incerta que chaveia entre os grafos  $G_a$  e  $G_b$  (Figura 2.5) de acordo com uma cadeia de Markov de tempo contínuo com matriz de taxas de transição incerta dada por

$$\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} -1 + \epsilon_{11} & 1 + \epsilon_{12} \\ 1 + \epsilon_{21} & -1 + \epsilon_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

tal que  $\epsilon_{ij} \in [-0,2, 0,2] \forall i, j \in \mathcal{S}$ . Considere ainda que tal sistema está sujeito a atrasos variantes, não diferenciáveis e não uniformes pertencentes ao intervalo  $d_k(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m]$  com  $k \in K_i$ . É válido ressaltar que para este caso também, entre os métodos considerados nas seções anteriores, apenas o método proposto por esta dissertação (Teorema 3.2) é aplicável. Novamente, como na seção anterior, para avaliar a eficiência do método proposto com futuras comparações, é determinado o maior valor de  $\mu_m$ , para diferentes valores de  $\tau$  mantendo fixo os valores das taxas de transição, em

que o método garante o consenso do sistema. Os resultados obtidos com esse teste são apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Maior perturbação  $\mu_m$  para diferentes atrasos  $\tau$  e matriz de taxas de transição (4.2).

$\tau$	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
$\mu_m$ máximo	0,150	0,125	0,100	0,075	0,050

## Considerações Finais e Perspectivas

*Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim.*

*Chico Xavier*

Esse trabalho apresentou métodos, com caráter suficiente baseados em LMIs, para análise do consenso em sistemas multi-agentes sujeitos a atrasos variantes no tempo e topologia variável com uma extensão para casos com topologia variável incerta. Os resultados apresentados no Capítulo 4 mostram que o método proposto é eficiente, no sentido de garantir o consenso para o modelo proposto, apresentando resultados melhores ou iguais aos métodos mais recentes da literatura e, além disso, mostrou-se mais geral pelo fato de também tratar sistemas com atrasos variantes no tempo e topologia variável, o que até então, no melhor conhecimento do autor deste trabalho, não havia sido tratado na literatura.

Apesar do método ser proposto inicialmente para sistemas com topologia variável, ele também se aplica a sistemas com topologia fixa que é um caso particular da topologia variável, o mesmo vale para sistemas com atrasos iguais e constantes, se considerarmos que a variação do atraso é nula e que eles são iguais entre os canais de comunicação. Outra característica importante do método proposto, é que ele foi modelado para redes direcionadas, portanto se aplica também a problemas de redes não direcionadas (caso particular das redes direcionadas). Tais características foram apresentadas e analisadas

no Capítulo 4.

Esta dissertação apresenta contribuições relevantes para o campo de pesquisa dos SMAs. Dentre as principais contribuições estão:

- um método para análise de consenso em SMAs sujeitos a atrasos variantes no tempo com topologia fixa e direcionada;
- um método para análise de consenso em SMAs sujeitos a atrasos variantes no tempo com topologia variável baseada em uma cadeia de Markov de tempo contínuo com taxas de transição conhecidas;
- um método para análise de consenso em SMAs sujeitos a atrasos variantes no tempo com topologia variável baseada em uma cadeia de Markov de tempo contínuo com taxas de transição incertas.

Como extensão para trabalhos futuros sugere-se a investigação dos seguintes tópicos:

- análise de consenso considerando uma taxa de convergência pré-especificada, importante quando deseja-se verificar se o consenso ocorre em um intervalo de tempo finito pré-estabelecido;
- sistemas multi-agentes com dinâmicas diferentes visto que a dinâmica considerada nesta dissertação é simples e não serve como modelo para uma grande diversidade de sistemas dinâmicos;
- nova representação para as incertezas da topologia, uma vez que a forma utilizada ainda necessita de conhecimento parcial dos parâmetros da matriz de taxas de transição;
- nova modelagem para o problema da topologia variável visando uma maior abrangência de modelos para sistemas reais.

Por fim, é importante ressaltar que parte dos resultados desta dissertação deram origem ao aceite de um artigo (dos Santos Junior, Souza & Savino 2014) na edição de 2014 do tradicional Congresso Brasileiro de Automática.

# Referências Bibliográficas

- Albert, A. (1969). Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 17, pp. 434–440.
- Beard, R. & Stepanyan, V. (2003). Synchronization of information in distributed multiple vehicle coordinated control, *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 49, pp. 2029–2034.
- Beard, R. W., McLain, T. W., Goodrich, M. & Anderson, E. P. (2002). Coordinated target assignment and intercept for unmanned air vehicles, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 18, pp. 911–922.
- Bettoni, S. S., Souza, F. O. & Pimenta, L. C. A. (2012). Consenso de múltiplos agentes sujeitos a múltiplos retardos variantes no tempo, *XIX Congresso Brasileiro de Automática - CBA2012*, Campina Grande - PB, Brasil.
- Bliman, P. A. & Ferrari-Trecate, G. (2008). Average consensus problems in networks of agents with delayed communications, *Automatica*, Vol. 44, pp. 1985–1995.
- Boukas, E. K. (2005). *Stochastic switching systems: Analysis and Design*, Basel, Berlin.
- Cao, Y., Yu, W., Ren, W. & Chen, G. (2013). An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination, *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Vol. 9, pp. 427–438.
- DeGroot, M. H. (1974). Reaching a consensus, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 69, pp. 118–121.



- dos Santos Junior, C. R. P., Souza, F. O. & Savino, H. J. (2014). Consenso em sistemas multiagentes sujeitos a atraso no tempo e topologia variável, *XX Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2014*, Belo Horizonte - MG, Brasil. Por aparecer.
- Dynkin, B. O. (1965). *Markov Processes*, Springer-Verlag.
- Fax, J. A. & Murray, R. M. (2004). Information flow and cooperative control of vehicle formations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 49, pp. 1465–1476.
- Fei, Z., Gao, H. & Shi, P. (2009). New results on stabilization of markovian jump systems with time delay, *Automatica*, Vol. 45, pp. 2300–2306.
- Ferber, J. (1999). *Multi-Agent Systems: An Introduction to Distributed Artificial Intelligence*, Addison-Wesley, New York.
- Feres, R. (2007). Notes for math 450 - continuous-time markov chains and stochastic simulation. Disponível em <<http://www.math.wustl.edu/~feres/Math450Lect05.pdf>>.
- Ferreira, A. B. H. (2013). *Mini Aurélio - O Dicionário da Língua Portuguesa*, Editora Positivo.
- Gahinet, P. (1995). LMI control toolbox: For use with matlab. Disponível em <<http://www.mathworks.de/releases/R13sp2/pdf-doc/lmi/lmi.pdf>>.
- Giulietti, F., Pollini, L. & Innocenti, M. (2000). Autonomous formation flight, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 20, pp. 34–44.
- Godsil, C. & Royle, G. (2001). *Algebraic Graph Theory*, Springer-Verlag.
- Gu, K. (2000). An integral inequality in the stability problem of time-delay systems, *Proceedings of the 39th IEEE*, pp. 2805–2810.
- Gu, K., Kharitonov, L. V. & Chen, J. (2003). *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhu-ser, Boston.

- Jadbabaie, A., Lin, J. & Morse, A. S. (2003). Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, pp. 988–1001.
- Jesus, T. A., Pimenta, L. C. A., Tôrres, L. A. B. & Mendes, E. M. A. M. (2013). On the coordination of constrained fixed-wing unmanned aerial vehicles, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Vol. 24, pp. 585–600.
- Kecai, C., Chunxiang, L., Xiang, G. & Yang, H. (2011). Consensus in multi-agent with time-varying delays, *EEE International Conference on Computer Science and Automation Engineering*, Vol. 4, pp. 313–317.
- Li, Y., Xiang, J. & Wei, W. (2011). Consensus problems for linear time-invariant multi-agent systems with saturation constraints, *IET Control Theory and Applications*, Vol. 5, pp. 823–829.
- Lin, P., Jia, Y., Du, J. & Yu, F. (2009). Average consensus for networks of continuous-time agents with delayed information and jointly-connected topologies, *American Control Conference, ACC*, pp. 3884–3889.
- Lin, P., Jia, Y. & Li, L. (2008). Distributed robust  $H_\infty$  consensus control in directed networks of agents with time-delay, *Systems & Control Letters*, Vol. 57, pp. 643–653.
- Lynch, N. A. (1997). *Distributed Algorithms*, Morgan Kaufmann, San Mateo, CA.
- Matei, I., Martins, N. C. & Baras, J. S. (2009). Consensus problems with directed markovian communication patterns, *Proc. American Control Conf.*, pp. 1298–1303.
- Mesbahi, M. & Egerstedt, M. (2010). *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*, Princeton University Press, Princeton.
- Mesbahi, M. & Hadaegh, F. (1999). Formation flying control of multiple spacecraft via graphs, matrix inequalities and switching, *IEEE International Conference on Control Applications*, Vol. 2, pp. 34–44.

- Moreau, L. (2004). Stability of continuous-time distributed consensus algorithms, *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 4, pp. 3998–4003.
- Moreau, L. (2005). Stability of multi-agent systems with time-dependent communications links, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50, pp. 169–182.
- Olfati-Saber, R. (2006). Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, pp. 401–420.
- Olfati-Saber, R. & Murray, R. M. (2004). Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 49, pp. 1520–1533.
- Ren, W. (2007). On consensus algorithms for double-integrator dynamics, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 53, pp. 1503–1509.
- Ren, W., Beard, R. W. & Atkins, E. M. (2007). Information consensus in multivehicle cooperative control: Collective group behavior through local interaction, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 27, pp. 71–82.
- Russell, S. & Norving, P. (2003). *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, Prentice Hall.
- Savino, H. J., Cota, A. P. L., Souza, F. O., Pimenta, L. C. A., Mendes, E. M. A. M. & Mozelli, L. A. (2013). Consensus of multi-agent systems with nonuniform non-differentiable time-varying delays, *European Control Conference - ECC*, pp. 1884–1889.
- Seuret, A., Dimarogonas, D. & Johansson, K. (2008). Consensus under communication delays, *IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 4, pp. 4922–4927.
- Souza, F. O. (2008). *Estabilidade e Síntese de Controladores e Filtros Robustos para Sistemas com Retardo no Tempo: Novas Fronteiras*, Tese de Doutorado - UFMG.
- Sturm, J. F. (1998). Using sedumi 1.02 - a matlab toolbox for optimization over symmetric cones.

- Sun, Y. G. & Wang, L. (2009). Consensus of multi-agent systems in directed networks with nonuniform time-varying delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, pp. 1607–1613.
- Trofino, A. (2000). Controle robusto. Disponível em <<http://www.das.ufsc.br/~trofino/disciplinas-/das-6600/apostila-robusto.pdf>>.
- Vicsek, T., Czirók, A., Ben-Jacob, E., Cohen, O. & Shochet, I. (1995). Novel type of phase transition in a system of self-derived particles, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 75, pp. 1226–1229.
- Wentzell, A. D. (1981). *A course in the theory of stochastic processes*, McGraw-Hill.
- Xi, J., Li, H., Cai, N. & Zhong, Y. (2013). Consensus of swarm systems with time delays and topology uncertain, *IET Control Theory and Applications*, Vol. 7, pp. 1168–1178.
- Xiong, J. & Lam, J. (2009). Robust  $H_2$  control of markovian jump systems with uncertain switching probabilities, *International Journal of Systems Science*, Vol. 40, pp. 255–265.
- Xiong, J., Lam, J., Gao, H. & Ho, D. W. C. (2005). On robust stabilization of markovian jump systems with uncertain switching probabilities, *Automatica*, Vol. 41, pp. 897–903.
- Yu, J. & Wang, L. (2010). Group consensus in multi-agent systems with switching topologies and communication delays, *Systems and Control Letters*, Vol. 59, pp. 340–348.
- Zhang, L. & Boukas, E. (2009). Stability and stabilization of markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities, *Automatica*, Vol. 45, pp. 463–468.
- Zhang, L., Boukas, E. & Lam, J. (2008). Analysis and synthesis of markov jump linear systems with time-varying delays and partially known transition probabilities, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 53, pp. 2458–2464.

- Zhang, Q., Niu, Y., Wang, L., Shen, L. & Zhu, H. (2011). Average consensus seeking of high-order continuous-time multi-agent systems with multiple time-varying communication delays, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, Vol. 9, pp. 1209–1218.
- Zhang, Y. & Tian, Y.-P. (2009). Consentability and protocol design of multi-agent systems with stochastic switching topology, *Automatica*, Vol. 45, pp. 1195–1201.
- Zhao, H., Xu, S. & Yuan, D. (2011). An lmi approach to consensus in second-order multi-agent systems, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, Vol. 9, pp. 1111–1115.
- Zhiyun, L., Broucke, M. & Francis, B. (2003). Local control strategies for groups of mobile autonomous agents, *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1006–1011.

## Ferramentas Matemáticas

*É preferível conhecer alguma coisa sobre tudo  
do que tudo sobre apenas alguma coisa.*

*Blaise Pascal*

Neste apêndice é apresentada uma breve descrição das principais ferramentas matemáticas utilizadas no decorrer do trabalho, incluindo Lemas e Definições. São apresentados conceitos referentes à teoria algébrica dos grafos, gerador infinitesimal, desigualdades matriciais lineares, complemento de Schur, desigualdade de Jensen e a fórmula de Dynkin.

### A.1 Teoria Algébrica dos Grafos

Um grafo é uma representação de um conjunto de nós (ou vértices) e um conjunto de arestas. Ele pode ser classificado como direcionado ou não direcionado e conectado ou não conectado. Em um grafo direcionado as arestas que ligam os nós são unidirecionais, diferente dos grafos não direcionados (caso particular dos grafos direcionados) onde as arestas são bidirecionais. O grafo é dito conectado (ou conexo) quando existe um caminho (sequência de arestas direcionadas) de um nó para qualquer outro, caso contrário, diz-se que o grafo é não conectado (ou não conexo).

Matematicamente, um grafo é descrito por  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , sendo que  $\mathcal{V}$  representa o conjunto dos  $n$  nós e  $\mathcal{E}$  o conjunto das arestas. A princípio, um grafo possui três

representações matriciais, são elas a matriz de adjacências, a matriz de grau e a matriz laplaciana. A matriz de adjacências  $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ , é uma matriz quadrada e seus elementos são definidos por  $a_{ij} = 0$  se  $i = j$  ou se não existir uma aresta conectando o nó  $v_j$  ao  $v_i$  e  $a_{ij} = 1$  se existir uma aresta conectando o nó  $v_j$  ao  $v_i$ . A matriz de grau  $\mathcal{D} = [d_{ii}]$  é uma matriz diagonal relacionada a matriz de adjacências e seus elementos são definidos por  $d_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ . Já a matriz laplaciana  $L = [l_{ij}]$  é dada por  $L = \mathcal{D} - \mathcal{A}$ , ou seja,  $l_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}$  e  $l_{ij} = -a_{ij}$ .

Uma característica importante da matriz laplaciana é que a soma dos elementos de suas linhas é nula. Assumindo esta característica podemos dizer que:

$$L\mathbf{1} = 0, \tag{A.1}$$

sendo  $\mathbf{1}$  um vetor coluna unitário com dimensão apropriada.

É importante ressaltar que essas definições de grafo aqui apresentadas se restringem apenas a grafos simples (caso tratado por esta dissertação) e sem pesos. Informações mais detalhadas sobre a Teoria Algébrica dos Grafos pode ser vista em Godsil & Royle (2001).

## A.2 O Gerador Infinitesimal

O gerador infinitesimal é o correspondente estocástico da derivada. A seguir é apresentada sua definição:

**Definição A.1** (Fei, Gao & Shi 2009): *Seja um processo estocástico definido por  $\{\theta_t, t \in [0, +\infty)\}$ , o gerador infinitesimal aplicado a uma função  $f(\theta_t)$  qualquer, é dado por*

$$\mathcal{L}f(\theta_t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \frac{f(\theta_{t+\Delta}) - f(\theta_t)}{\Delta} \right].$$

sendo que  $\mathcal{L}$  representa o operador do gerador infinitesimal e  $\mathbb{E}$  a esperança matemática. □

Adiante são apresentados dois exemplos para facilitar o entendimento da aplicação do gerador infinitesimal.

**Exemplo A.1** Considere uma cadeia de Markov  $\theta_t \in \mathcal{S} = \{1, 2, \dots, s\}$  com matriz de taxas de transição  $\Pi = [\pi_{ij}]$ . Dessa forma, tomando uma função  $P(\theta_t)$ , vamos calcular o seu gerador infinitesimal tal que  $\theta_t = i$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}P &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \frac{P(\theta_{t+\Delta}) - P(\theta_t)}{\Delta} \middle| \theta_t = i \right] \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j \Delta + (1 + \pi_{ii} \Delta) P_i - P_i}{\Delta} \\ &= \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j. \end{aligned}$$

□

**Exemplo A.2** Novamente, considere uma cadeia de Markov  $\theta_t \in \mathcal{S} = \{1, 2, \dots, s\}$  com matriz de taxas de transição  $\Pi = [\pi_{ij}]$ . Agora vamos verificar a aplicação do gerador infinitesimal em um funcional de Lyapunov estocástico na forma  $V(x(t), \theta_t) = x^T(t)P(\theta_t)x(t)$ , sendo  $x(t)$  dado pelo sistema  $\dot{x} = A(\theta_t)x(t)$ .

Aplicando o gerador infinitesimal em  $V(x(t), \theta_t)$  com  $\theta_t = i$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x(t), \theta_t) &= \dot{x}^T(t)P(\theta_t)x(t) + x^T(t)\mathcal{L}P(\theta_t)x(t) + x^T(t)P(\theta_t)\dot{x}(t) \\ &= \dot{x}^T(t)P(\theta_t)x(t) + x^T(t) \left( \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j \right) x(t) + x^T(t)P(\theta_t)\dot{x}(t) \\ &= x^T(t) \left( A_i^T P_i + \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j + P_i A_i \right) x(t). \end{aligned}$$

□

Observe que, como relatado anteriormente, o gerador infinitesimal de uma função  $f(\theta_t)$  pode ser interpretado também como a derivada no sentido tradicional de  $\mathbb{E}[f(\theta_t)]$ .

### A.3 Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Uma LMI é uma desigualdade matricial do tipo  $F(g) > 0$ , no qual  $F(g)$  é simétrica e afim nas variáveis de busca que são representadas pelo vetor  $g$ . Assim, uma LMI pode ser genericamente apresentada na forma

$$F(g) = F_0 + \sum_{i=1}^m g_i F_i > 0 \quad (\text{A.2})$$



sendo  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes dadas e  $g_i$  variáveis escalares a serem determinadas de forma a satisfazer a desigualdade (se possível). Quando existe uma solução  $g = [g_1 \cdots g_m]^T$  para  $F(g) > 0$ , dizemos que a LMI é factível (Trofino 2000).

É importante enfatizar que uma LMI pode ser representada de várias formas e dificilmente aparece em um problema na forma genérica afim (A.2), por exemplo: dada uma matriz  $A$  e uma matriz  $Q > 0$ , a função matricial  $F(P) = A^T P + PA + Q$ , que aparece em diversos problemas de estabilidade, é afim na variável  $P$  e, portanto, a desigualdade  $F(P) < 0$  é uma LMI que pode ser facilmente reescrita na forma (A.2) onde  $g$  é o vetor contendo os elementos da matriz  $P$  a ser determinada (Trofino 2000).

Para a resolução de problemas na forma de LMIs, existem vários pacotes de otimização disponíveis na literatura. Entre eles estão o *LMI Control Toolbox* Gahinet (1995) e o *SeDuMi* Sturm (1998), ambos desenvolvidos para uso no *MATLAB*.

## A.4 O Complemento de Schur

Em geral, algumas propriedades são usadas para a formulação de LMIs a partir de inequações não lineares. Dentre tais propriedades está o complemento de Schur, apresentado no lema a seguir.

**Lema A.1** (Albert 1969) *Seja a matriz de blocos*

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2^T & \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

onde  $\Phi_1$  e  $\Phi_3$  são matrizes simétricas. Então

- para  $\Phi_1 > 0$ ,  $\Phi > 0$  se, e somente se,  $\Phi_3 - \Phi_2^T \Phi_1^{-1} \Phi_2 > 0$ ;
- para  $\Phi_3 > 0$ ,  $\Phi > 0$  se, e somente se,  $\Phi_1 - \Phi_2 \Phi_3^{-1} \Phi_2^T > 0$ .

□

Essa propriedade pode ser utilizada, por exemplo, para transformar a desigualdade

$$A^T X + XA + XBX + C < 0 \quad (\text{A.4})$$

com  $B > 0$  e  $X = X^T$ , que aparece frequentemente em problemas de controle, em uma LMI, bastando fazer  $\Phi_1 = A^T X + XA + C$ ,  $\Phi_2 = X$  e  $\Phi_3 = B$ . Com isso, obtém-se

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C & X \\ X & -B^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

Se  $B \geq 0$ , podemos escrever  $B = QQ^T$ . Dessa forma, usando a mesma ideia aplicada anteriormente, obtém-se a relação

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C & XQ \\ Q^T X & -I \end{bmatrix} < 0.$$

que é também equivalente a (A.4).

Por fim, caso  $B$  não seja definida nem semidefinida positiva, a desigualdade (A.4) não será convexa e portanto, não pode ser expressa em termos de LMIs.

## A.5 Desigualdade de Jensen

Desigualdades em integrais quadráticas são uma ferramenta importante no tratamento de problemas de sistemas sujeitos a atrasos no tempo formulados por meio de LMIs dada a necessidade da utilização de limitantes superiores para que o problema em questão possa ser formulado como um problema convexo. Uma dessas desigualdades, também conhecida como Desigualdade de Jensen, utilizada nesta dissertação é apresentada no lema a seguir:

**Lema A.2** (Gu 2000) *Para qualquer matriz  $M = M^T > 0$  constante e um escalar  $\tau > 0$  a seguinte desigualdade é verdadeira:*

$$\int_{t-\tau}^t x^T(\xi) M x(\xi) d\xi \geq \int_{t-\tau}^t x^T(\xi) d\xi \frac{1}{\tau} M \int_{t-\tau}^t x(\xi) d\xi.$$

□

## A.6 Estabilidade via Lyapunov-Krasovskii

O método de análise de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii corresponde a uma extensão do método de Lyapunov para o tratamento de sistemas sujeitos a atrasos no

tempo. Esse método se baseia na proposição de um funcional quadrático e limitado, que leve em conta não só a evolução temporal do sistema mas também o seu histórico temporal (Souza 2008).

O teorema a seguir apresenta as condições impostas pelo método de análise de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii.

**Teorema A.1** (Gu, Kharitonov & Chen 2003) *Um sistema sujeito a atrasos no tempo é assintoticamente estável se para algum  $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$  exista um funcional de Lyapunov-Krasovskii quadrático e limitado  $V(z(t))$  que satisfaça:*

$$\begin{aligned} V(z(t)) &\geq \alpha z^T(t)z(t), \\ \dot{V}(z(t)) &\leq -\alpha z^T(t)z(t), \end{aligned}$$

na qual  $z(t)$  corresponde ao valor de  $z(\xi)$  com  $\xi \in [t - \tau, t]$  sendo  $\tau > 0 \in \mathbb{R}$  o atraso máximo que o sistema está sujeito e  $\dot{V}(z(t))$  a derivada do funcional ao longo das trajetórias do sistema.

□

## A.7 A Fórmula de Dynkin

De maneira simples, a fórmula de Dynkin pode ser vista como uma generalização estocástica do segundo teorema fundamental do cálculo. Sua definição é dada por

$$\mathbb{E}[f(X(\theta_t))] = f(0) + \mathbb{E} \left[ \int_0^t \mathcal{L}f(X(\xi)) d\xi \right]$$

sendo  $f(X(\theta_t))$  uma função com parâmetros estocásticos. Mais detalhes a respeito da fórmula de Dynkin podem ser encontrados em Dynkin (1965).