Maria Cristina Costa Ferreira

CONHECIMENTO MATEMÁTICO ESPECÍFICO PARA O ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: A ÁLGEBRA NA ESCOLA E NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR

Belo Horizonte
Faculdade de Educação
2014

Maria Cristina Costa Ferreira

CONHECIMENTO MATEMÁTICO ESPECÍFICO PARA O ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: A ÁLGEBRA NA ESCOLA E NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Educação.

Área de concentração: Educação

Linha de Pesquisa: Educação Matemática

Orientadora: Prof[a]. Dra. Maria Manuela Martins Soares David

Coorientador: Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira

Belo Horizonte

Faculdade de Educação da UFMG

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS- GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO: CONHECIMENTO E INCLUSÃO SOCIAL

Tese intitulada CONHECIMENTO MATEMÁTICO ESPECÍFICO PARA O ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: A ÁLGEBRA NA ESCOLA E NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR, de autoria de MARIA CRISTINA COSTA FERREIRA, analisada pela banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

Profª. Dra. Maria Manuela Martins Soares David
Faculdade de Educação - UFMG

Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas - UFOP

Profª. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Centro de Ciências Exatas – UEL

Profª. Dra. Helena Noronha Cury
Mestrado em Ensino de Física e Matemática - UNIFRA

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro
Centro de Matemática, Computação e Cognição – UFABC

Prof ª. Dra. Maria Laura Magalhães Gomes
Instituto de Ciências Exatas – UFMG

Belo Horizonte, 29 de Julho de 2014

Para o Xande e meus pais
(in memoriam)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que participaram dessa minha caminhada e que me ajudaram durante esse percurso. São muitas as pessoas que estiveram comigo ao longo desse processo e nomeá-las não seria uma tarefa fácil. Espero poder agradecer a cada uma delas pessoalmente.

RESUMO

Há certo consenso em torno da ideia de que professores de matemática da Educação Básica deveriam possuir um conhecimento “mais aprofundado” do conteúdo a ser ensinado. No entanto, o aprofundamento da formação em matemática por si só, isto é, destituído do objetivo de estabelecer interações e conexões, também profundas, com outros componentes de saber da profissão docente, tem sido visto como insuficiente e até mesmo inócuo, em termos de uma preparação adequada do professor para atuar em um espaço tão complexo como a sala de aula de matemática da Escola Básica. Assim, a discussão do tema “Qual matemática para formar o professor de matemática?” tem despertado o interesse de pesquisadores e formadores de professores de matemática. Shulman introduziu na literatura o termo conhecimento pedagógico do conteúdo para designar um tipo especial de saber profissional docente: um amálgama entre conhecimentos pedagógicos e conhecimentos disciplinares que constituiria uma forma específica de o professor conhecer sua disciplina. Pesquisadores da Universidade de Michigan, liderados por Deborah Ball, a partir da noção de conhecimento pedagógico do conteúdo, proposta por Shulman, desenvolveram o conceito de conhecimento matemático para o ensino, que é um conhecimento matemático específico do professor de matemática da escola básica, com uma composição e características próprias, em geral distintas do conhecimento matemático utilizado no exercício de outras profissões. O objetivo desta pesquisa é identificar elementos constituintes desse conhecimento matemático específico do professor, no que se refere particularmente ao trabalho com a álgebra na Educação Básica. Observamos as aulas de dois professores de uma escola pública da rede federal de ensino em Belo Horizonte, de abril a agosto de 2012, período em que a álgebra foi o principal assunto abordado. A partir da observação das aulas, procurou-se identificar elementos de saber, específicos do professor de matemática, que foram efetivamente mobilizados ou que seriam potencialmente mobilizáveis na prática concreta de sala de aula de álgebra. Diversas questões relevantes apontadas nas pesquisas sobre ensino e aprendizagem de álgebra se fizeram notar durante o processo de observação e coleta de dados, tendo ficado claras a necessidade e a conveniência de analisá-las do ponto de vista do conhecimento matemático específico do professor. Duas questões se sobressaíram, adquirindo posição de destaque em nossa análise: a utilização da argumentação e da demonstração para justificar a extensão de resultados obtidos nos processos de generalização na álgebra e a dualidade processo-objeto presente na construção de noções abstratas, em particular, daquelas associadas às expressões algébricas. Foi possível explicitar tensões entre os processos de validação aceitos no desenvolvimento formal dedutivo, característico da matemática acadêmica, e aqueles adequados ao desenvolvimento lógico dos conteúdos escolares, de acordo com o contexto da sala de aula da Educação Básica. A dualidade processo-objeto se manifestou na tensão identificada entre a concepção estrutural do professor e a concepção procedimental dos alunos na compreensão das expressões algébricas. O estudo realizado identifica saberes importantes e fundamentais que compõem o conhecimento matemático específico do professor da Educação Básica e que não são mencionados nas recomendações para a formação de professores de matemática no Brasil.

Palavras – chave: Educação Matemática; Formação de Professores; Conhecimento Matemático Específico do Professor; Educação Algébrica; Ensino de Álgebra na Escola Básica; Pensamento Algébrico.

ABSTRACT

There is some consensus around the idea that mathematics teachers must know the subject they teach in a “deeper” way. However, just knowing more advanced mathematics, not connected to other dimensions of teacher’s professional knowledge, has been seen as insufficient and even innocuous in terms of adequate teacher preparation to work in a setting as complex as a mathematics school classroom. Thus, the discussion about “What mathematics is needed to prepare mathematics school teachers?” has been of great interest for researchers and teachers who work in teacher preparation programs. Shulman introduced the notion of pedagogical content knowledge to designate a particular type of professional teaching knowledge, “that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding”. Drawing on Shulman’s idea of Pedagogical Content Knowledge, researchers at the University of Michigan, led by Deborah Ball, developed the concept of Mathematical Knowledge for Teaching, which is a special kind of professional mathematical knowledge needed to carry out the work of teaching mathematics, as Ball herself puts it. In this research we sought to identify elements of mathematical knowledge for teaching related to actual algebra’s work in school. The observations took place in 8^{th} and 9^{th} grade classrooms, with two different teachers, at a public school in Brazil, from April to August 2012. We focused on specific mathematics knowledge which were effectively mobilized or might have been mobilized by those teachers in their algebra’s classroom. Along the process of data collection, we were able to notice that several important issues raised in current algebra’s teaching and learning research literature actually came about in the observed classrooms’ setting. This shows the convenience and the relevance of analyzing them in terms of specific mathematical knowledge for teaching. In our analysis, two issues stood out, acquiring a prominent position: the justification of results obtained in the generalization process in school algebra classrooms and the process-object duality in the construction of abstract concepts, in particular those associated to algebraic expressions. We were able to highlight tensions between validation processes used according to the structure of mathematics, as conceived by professional mathematicians, and those appropriate to the process of concept acquisition in school mathematics classrooms. The process-object duality has been unfolded and our analysis illuminates the tension between the structural and procedural ways teachers and students signify algebraic expressions. This study identifies important and fundamental mathematical knowledge for teaching which are not mentioned in the recommendations for mathematics teacher preparation programs in Brazil.

Keywords: Mathematics Education; Teacher Education; Mathematical Knowledge for Teaching; Algebraic Education; Teaching of Algebra; Algebraic Thinking.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

Uma questão apontada recorrentemente na literatura sobre formação de professores para a Escola Básica no Brasil (DINIZ-PEREIRA, 2006; LUDKE, 1994) é a falta de articulação entre a formação específica, a formação pedagógica e a prática profissional. Há uma separação entre as disciplinas de conteúdo (normalmente a cargo dos docentes dos institutos ou faculdades de conteúdos específicos) e as disciplinas pedagógicas (de responsabilidade das faculdades de educação).

Na década de 1980, na tentativa de promover uma integração entre as disciplinas pedagógicas e as de conteúdo específico e estabelecer um vínculo com a prática docente na Escola Básica, foram introduzidas nos currículos disciplinas denominadas *integradoras*. Na UFMG, seguindo essa tendência, foram criadas, na reforma curricular do Curso de Matemática de 1987, as disciplinas Matemática e Escola (GOMES, 1997), na expectativa de se estabelecer um espaço institucionalizado para aproximação do curso com o cotidiano da profissão de professor de matemática e de promover uma integração dos profissionais pertencentes aos dois espaços distintos de formação, já que essas disciplinas deveriam ser lecionadas simultaneamente por um professor do Departamento de Matemática e um da Faculdade de Educação juntos em sala de aula. No entanto, a constituição desse novo bloco de disciplinas teve alcances limitados, pois ocorreu em um momento muito específico e localizado no curso de licenciatura, tendo prevalecido a lógica do somatório de conteúdos para o percurso geral. Assim sendo, essa experiência não conseguiu superar o *dilema* da separação entre as disciplinas de conteúdo e pedagógicas que "somado a outros dois – a dicotomia entre Bacharelado e Licenciatura e a desarticulação entre formação acadêmica e realidade prática – contribuem para a fragmentação dos atuais cursos de formação de professores". (DINIZ-PEREIRA, 2006, p.59).

Gatti (2010) afirma que, apesar das análises e reflexões de pesquisadores, as universidades têm se restringido a propor reformulações de um ou outro aspecto sem tocar "no âmago da questão, tão bem salientado nas análises: sua estrutura institucional e a distribuição de seus conteúdos curriculares." (GATTI, 2010, p.485). Segundo a pesquisadora, mesmo após os ajustes para atendimento às Diretrizes Curriculares para a formação de professores, nas licenciaturas dos professores especialistas prevalece o modelo "3+1" consagrado no início do século XX, constituído primordialmente pelo oferecimento de formação na área disciplinar específica e com pequeno espaço para a formação pedagógica. A autora argumenta que a formação de professores para a educação básica tem ocupado lugar secundário nas preocupações das universidades brasileiras, que não possuem um perfil claro de professor, e que os currículos não se voltam para as questões da prática profissional. Ela propõe, então, uma "integração interdisciplinar na direção de uma formação em que se tenham elementos para compreender e integrar conhecimentos disciplinares, fundamentos educacionais e atividades didáticas." (GATTI, 2010, p.505-506).

De acordo com Saviani (2009), quando se afirma que a universidade não se interessa pela formação de professores, o que se quer dizer é que ela não se preocupa com o preparo pedagógico-didático dos professores. No caso específico do problema da fragmentação dos cursos de formação de professores dos quatro últimos anos do ensino fundamental e do ensino médio, o pesquisador argumenta que esse não será resolvido apenas pelas Faculdades de Educação nem "pela justaposição, aos atuais currículos dos cursos de bacharelado, de um currículo pedagógico-didático organizado e operado pelas Faculdades de Educação." (SAVIANI, 2009, p.150). Saviani afirma que a formação profissional dos professores requer competências e objetivos específicos e, consequentemente, uma estrutura organizacional adequada e própria para o cumprimento dessa tarefa, superando a dualidade existente entre bacharelado e licenciatura.

Vivenciando esse dilema bacharelado *versus* licenciatura no processo de formação dos licenciandos em Matemática, foi desenvolvido, no Departamento de Matemática da UFMG, um projeto visando à redefinição do conteúdo matemático na licenciatura. Apresentamos (SOARES, FERREIRA, MOREIRA, 1997) uma discussão sobre a necessidade de mudança de referencial da formação específica nos cursos de Licenciatura em Matemática da prática do matemático profissional para a prática do professor do ensino básico, de modo que a formação se desse intrinsecamente integrada a essa prática. Explicitamos (SOARES, FERREIRA, MOREIRA, 1999) conflitos entre a abordagem axiomática dos números reais, apresentada nos cursos de Análise presentes nos currículos das licenciaturas, e as imagens conceituais (TALL, VINNER, 1981) dos alunos, mostrando a desorganização e inconsistência dos modelos que esses alunos possuíam associados a esses conjuntos.

Em sua tese de doutorado, Moreira (2004), analisando o processo de formação matemática do licenciando em Matemática na UFMG, conclui que o conhecimento matemático na licenciatura é trabalhado a partir dos valores da matemática produzida pelos matemáticos profissionais, ignorando-se questões importantes da prática escolar. Na mesma direção, na tentativa de distinguir as formas de conhecimento da disciplina matemática que são próprias do matemático e do professor de matemática da escola, Moreira (2004) e Moreira e David (2005, 2008) utilizam a expressão *matemática acadêmica* para se referir ao conjunto de práticas e saberes associados à constituição de um corpo científico de conhecimento, conforme produzido pelos matemáticos profissionais e reconhecido como tal e a expressão *matemática escolar* para se referir ao conjunto de práticas e saberes específicos associados ao desenvolvimento do processo de educação escolar em matemática. De acordo com essa caracterização, a matemática escolar incluiria o conhecimento produzido pelos professores de matemática em sua prática escolar, assim como conhecimentos produzidos pelas pesquisas sobre ensino e aprendizagem escolar de tópicos particulares da matemática. Os trabalhos de Moreira e David avançam na sistematização dos conceitos de conhecimento matemático escolar e conhecimento matemático acadêmico e, também, na elaboração do conhecimento matemático escolar relativamente ao ensino de números. Como em seus trabalhos Moreira e David têm se concentrado no estudo dos números reais, julgamos que uma ampliação dessa discussão para a álgebra poderá ser conveniente para melhor compreender a dimensão e extensão desses conflitos entre matemática acadêmica e matemática escolar.

Há certo consenso em torno da ideia de que professores de matemática da Educação Básica deveriam possuir um conhecimento mais "aprofundado" do conteúdo a ser ensinado. No entanto, o aprofundamento da formação em matemática, por si só, destituído do objetivo de estabelecer interações e conexões, também profundas, com outros componentes de saber da profissão docente, tem sido visto como insuficiente e até inócuo, em termos de uma preparação adequada do professor para atuar em um espaço tão complexo como a sala de aula da Escola Básica. Assim, a discussão do tema "Qual matemática para formar o professor de matemática?" tem despertado o interesse de pesquisadores e formadores de professores de matemática. No Brasil, o interesse por essa temática motivou a sua escolha, na reunião anual da Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação (ANPED) em 2011, no Grupo de Trabalho de Educação Matemática (GT19), como o foco de trabalho encomendado para a reunião anual de 2012 (MOREIRA; FERREIRA, 2013). A constituição do que seria esse corpo de conhecimento específico para os professores da Escola Básica encontra-se em processo de discussão entre educadores e pesquisadores em educação matemática.

Shulman (1986, 1987) introduziu na literatura o termo conhecimento pedagógico do conteúdo (*pedagogical content knowledge*) para designar um tipo especial de conhecimento profissional docente: um amálgama entre conhecimentos pedagógicos e conhecimentos disciplinares que constituiria uma forma específica de o professor conhecer sua disciplina. Para Shulman (1987), o conhecimento do professor deveria incluir sete categorias:

conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico geral, conhecimento do currículo, conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento das características cognitivas dos alunos, conhecimento dos contextos educacionais e conhecimento dos objetivos educacionais e de seus valores, além de suas bases históricas e filosóficas. Essas categorias constituem o que ele denominou base de conhecimento para o ensino (*knowledge base for teaching*).

Diversos pesquisadores (BALL, BASS, 2002; BALL, THAMES, PHELPS, 2008; BALL, BASS, SLEEP, THAMES, 2005; SILVERMAN, THOMPSON, 2008), liderados por Deborah Ball, a partir da noção de conhecimento pedagógico do conteúdo, proposto por Shulman, desenvolveram o conceito de *conhecimento matemático para o ensino*[1], que se estruturaria em seis domínios:

- *conhecimento comum do conteúdo*,
- *conhecimento especializado do conteúdo*,
- *conhecimento do conteúdo e dos alunos*
- *conhecimento do conteúdo e do ensino*
- *horizonte do conhecimento do conteúdo*
- *conhecimento do conteúdo e do currículo*[2].

De maneira abreviada, poderíamos dizer que o conhecimento comum do conteúdo incluiria o que é usualmente ensinado na sala de aula da Escola Básica, enquanto o conhecimento especializado do conteúdo incluiria, por exemplo, a compreensão de diferentes interpretações das operações que os alunos não precisam saber distinguir, mas os professores sim. O conhecimento do conteúdo e dos alunos incluiria o conhecimento das relações entre os alunos e a matemática (dificuldades dos alunos com determinados conteúdos ou erros mais comuns cometidos por eles, por exemplo) e o conhecimento do conteúdo e do ensino envolveria estratégias para o ensino dos conteúdos na escola. O horizonte do conhecimento do conteúdo incluiria o conhecimento da maneira como os tópicos matemáticos presentes no currículo se relacionam ao longo do processo de escolarização. Por exemplo, os professores do ensino básico precisariam saber como a matemática ensinada por eles nesse nível de ensino está relacionada com a matemática que os alunos estudarão no ensino superior, de modo que eles possam dar a fundamentação necessária para os estudos posteriores. Esse

[1] No original, em inglês, *mathematical knowledge for teaching (MKT).*
[2] No original, em inglês, *common content knowledge (CCK), specialized content knowledge (SCK), knowledge of content and students (KCS), knowledge of content and teaching (KCT*), *horizon content knowledge (HCK)* e *knowledge of content and curriculum (KCC)*, respectivamente.

domínio encontra-se ainda em processo de investigação e os pesquisadores têm dúvidas se ele deveria se constituir como um dos domínios ou se não é um conhecimento que perpassaria os outros domínios. Ball e seus colegas também têm dúvida se o conhecimento do conteúdo e do currículo deveria fazer parte do domínio do conhecimento do conteúdo e do ensino, se é uma categoria que perpassa os outros domínios ou se deveria se constituir em uma categoria própria. Em suma, o conhecimento matemático para o ensino é um conhecimento específico do professor da Escola Básica, com características próprias e distintas do conhecimento matemático para outras profissões.

No que diz respeito ao ensino de álgebra, pesquisas sobre o conhecimento específico do professor também fazem distinção entre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico desse conteúdo.

Pesquisadores franceses desenvolveram uma estrutura denominada Grade Multidimensional para Competência Profissional em Álgebra Elementar, em inglês Multidimensional Grid for Professional Competence in Elementary Algebra - MGPCA - (ARTIGUE, ASSUDE, GRUGEON & LENFANT, 2001) com dimensões similares às de Shulman, porém elaboradas especificamente para o ensino de álgebra. Como citado em Doerr (2004), Artigue e sua equipe definem três dimensões inter-relacionadas para descrever o conhecimento da álgebra para o ensino: *dimensão epistemológica*, *dimensão cognitiva* e *dimensão didática*. De forma abreviada, pode-se dizer que a dimensão epistemológica incluiria o processo de aquisição do conhecimento do conteúdo e da estrutura da álgebra; o papel e o lugar da álgebra dentro da Matemática e as conexões entre a álgebra e outras áreas da matemática e os fenômenos físicos. A dimensão cognitiva incluiria o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, as interpretações dos conceitos algébricos e das notações pelos alunos, as concepções inadequadas e dificuldades dos alunos em álgebra (obstáculos cognitivos e epistemológicos). A dimensão didática incluiria o processo de aquisição do conhecimento relativo ao currículo (relações entre o conteúdo matemático, os objetivos específicos do ensino, métodos ou estratégias de ensino), de utilização de recursos (livros-texto, tecnologia, materiais manipulativos e outros materiais curriculares), diferentes práticas e propostas de ensino de álgebra, conexões entre os diferentes níveis escolares, em termos do ensino de álgebra, e a natureza e o desenvolvimento de um discurso algébrico efetivo na sala de aula. Um ponto importante presente nessa dimensão seria a integração do conhecimento algébrico de diversos professores, que constituiria a base para a construção do conhecimento profissional do professor.

Doerr (2004) afirma que certamente seria desejável que os professores da escola básica tivessem conhecimento dessas dimensões do conhecimento de álgebra para o ensino, como proposto por Artigue e seus colegas; no entanto, essa lista de competências não capta a complexa inter-relação entre elas. Mais ainda, ela argumenta que o conhecimento e a prática dos professores no ensino da álgebra não têm sido pesquisados, o que aponta para a necessidade de realização de estudos sobre exemplos da prática dos professores. Para Doerr (2004), existe a necessidade da construção de uma teoria para descrever e explicar o que seria o conhecimento da álgebra para o ensino estabelecendo princípios gerais, mas também de conhecer casos individuais de práticas; só assim será possível ter uma compreensão melhor sobre o desenvolvimento profissional do professor.

De acordo com Kieran (2007), houve um crescimento no número de pesquisas relacionadas ao ensino ou ao professor de álgebra. Algumas pesquisas trataram da prática do professor em aulas de álgebra, outras foram conduzidas no contexto do desenvolvimento profissional do professor ou em capacitação em serviço e ainda outras envolvendo futuros professores. No entanto, os pesquisadores conhecem ainda muito pouco sobre o ensino de álgebra. Além disso, segundo a pesquisadora, ainda existe uma separação entre as pesquisas sobre a aprendizagem de álgebra e aquelas sobre o ensino da álgebra escolar. Ainda segundo Kieran (2007), os referenciais teóricos utilizados nas pesquisas sobre o professor de álgebra são muito diferentes entre si. A perspectiva teórica utilizada mais amplamente nas pesquisas envolvendo o professor de álgebra é baseada no construto do conhecimento base do professor (*knowledge base for teaching*) elaborado por Shulman (1986). Segundo Kieran (2007), a perspectiva adotada por Ball e Bass (2002) coloca o foco no que o professor faz e não no que ele precisa saber. E essa distinção entre o que o professor sabe ou precisa saber e o que ele efetivamente faz, pode ser útil para examinar as pesquisas que colocam o foco no professor e no ensino de álgebra. Ainda de acordo com a autora, as pesquisas sobre a prática do professor de álgebra se concentram em duas áreas: a primeira sobre o conhecimento, a segunda sobre o ensino, com as pesquisas sobre crenças ligando as duas áreas. Para a pesquisadora, no entanto, algumas áreas importantes ainda têm sido pouco pesquisadas, como, por exemplo, a prática do ensino de álgebra e como os professores aprendem a serem professores de álgebra. Para Kieran (2007), há necessidade de se pesquisar a interação entre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo dos professores, em conjunto com a maneira como eles compreendem como se desenvolve o conhecimento específico do assunto pelos alunos. E, relacionada a essa sugestão, há a recomendação de que as pesquisas focalizem simultaneamente o ensino e a aprendizagem de álgebra, além da relação entre os dois.

Assim, tendo em vista a minha prática profissional como formadora de professores de matemática para a educação básica, realizei a presente pesquisa, levando em consideração a necessidade de caracterizar o conhecimento específico para o ensino, como feito por Ball e sua equipe; de caracterizar também o conhecimento específico para o ensino no campo da álgebra, relacionando-o com as discussões específicas sobre o ensino de álgebra, como proposto por Artigue e sua equipe; de avançar na descrição do que seria o conhecimento da álgebra para o ensino, a partir do conhecimento da prática de alguns professores da escola básica, como defendido por Doerr; e de conhecer a prática de professores no ensino de álgebra na Escola Básica, como proposto por Kieran.

Como vimos, parte significativa da literatura defende a ideia geral de que existe uma forma de conhecimento matemático específico do professor (de matemática) da Educação Básica, forma essa que inclui, entre outros elementos, as relações entre o saber puramente disciplinar e as necessidades de conhecimento postas pelo exercício da profissão docente. Embora não haja consenso nem quanto ao que comporia essa forma de conhecimento matemático específico nem quanto aos nomes utilizados para se referir a ela, o que se pode garantir é a existência de um conjunto de autores e trabalhos que defendem essa ideia geral, com a qual concordo. No texto, utilizo diferentes expressões para me referir a essa forma específica de conhecimento, e, dentre essas, como apenas as de Shulman (conhecimento pedagógico do conteúdo) e de Deborah Ball (conhecimento matemático para o ensino) possuem alguma universalidade na literatura específica sobre formação de professores, quando essas duas expressões forem utilizadas, estarei me referindo às formas particulares desenvolvidas por esses autores. As demais serão utilizadas livremente para me referir à ideia geral de uma forma específica de conhecimento matemático do professor de matemática da Educação Básica, sem implicar um compromisso com essa ou aquela formulação. Como essa ideia ainda está em movimento de construção e consolidação na literatura, no meu modo de ver, não cabe atar de modo definitivo a minha pesquisa a qualquer dessas formas, quase todas ainda incipientes, de conceber o conhecimento matemático específico do professor de matemática da Educação Básica.

O objetivo desta pesquisa é identificar elementos constituintes do conhecimento matemático específico do professor, no que se refere particularmente ao trabalho com a álgebra na Escola Básica.

A construção da pesquisa foi feita a partir da análise de diferentes fontes: a literatura específica em Educação Matemática para a identificação de questões fundamentais relativas ao ensino e à aprendizagem da álgebra escolar apontada pelos pesquisadores, as recomendações para formação de professores de matemática em cursos de licenciatura no Brasil e a observação da prática de professores na Escola Básica. Observamos as aulas de dois professores de uma escola pública da rede federal de ensino em Belo Horizonte, e, a partir dessa observação, procuramos identificar elementos do saber[3], específicos do professor de matemática, que foram mobilizados ou que seriam potencialmente mobilizáveis na prática concreta de sala de aula de álgebra dos sujeitos da pesquisa. Além disso, analisamos a maneira como esses saberes são tratados nas recomendações oficiais para a formação de professores de matemática nos cursos de licenciatura.

Decidimos por um formato diferente daquele normalmente utilizado na apresentação escrita de uma tese acadêmica na área de Educação. Os dados coletados em relação aos dois professores, sujeitos da pesquisa, são muito diferenciados e, para garantir o registro da especificidade da prática de cada um deles, foram elaborados dois textos distintos, um para cada um deles. Assim este trabalho está estruturado em três capítulos, seguidos de um pequeno texto de considerações finais.

No capítulo I, apresentamos a abordagem teórica contendo uma discussão sobre o conhecimento específico do professor, as recomendações para a formação de professores de matemática nos cursos de licenciatura e uma descrição do trabalho de campo da pesquisa.

No capítulo II, apresentamos um estudo sobre a álgebra e o conhecimento matemático específico, com ênfase no trabalho com o desenvolvimento do pensamento algébrico. Discutimos e analisamos as questões que mais se destacaram durante o processo de observação e coleta de dados na turma do 8º ano.

No capítulo III, apresentamos um estudo sobre a álgebra e o conhecimento matemático específico, com ênfase no ensino das expressões e equações algébricas. Discutimos e analisamos as questões que mais se destacaram durante o processo de observação e coleta de dados na turma do 9º ano.

Nas considerações finais, retomamos brevemente as conclusões de cada um dos estudos e apresentamos as limitações do trabalho e algumas questões que dele emergem.

---

[3] Alguns autores utilizam conceituações diferentes para saber (saberes) e conhecimento (conhecimentos), mas, neste trabalho, esses termos serão considerados como sinônimos.

2. A PESQUISA: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E O TRABALHO DE CAMPO

Neste capítulo, constituído de duas seções, apresentaremos a fundamentação teórica da pesquisa e o relato sobre o trabalho de campo. Na primeira seção, abordamos concepções sobre a forma de conhecimento específica do professor e fazemos uma síntese sobre as recomendações existentes hoje para a formação de professores de matemática no Brasil. Na segunda seção, abordamos os aspectos metodológicos relacionados ao trabalho de campo de nossa pesquisa.

2.1 Fundamentação teórica

Esta seção, subdividida em duas subseções, discorre inicialmente sobre perspectivas sobre o conhecimento específico do professor que fundamentam nossa análise. Em seguida, fazemos uma síntese das recomendações sobre a formação de professores de matemática no Brasil.

2.1.1 Conhecimento Matemático Específico do Professor

A partir da análise da literatura existente na época sobre a atuação e desenvolvimento do professor da escola básica nos Estados Unidos, Lee Shulman (1986) e seus colegas perceberam a inexistência de pesquisas abordando o conteúdo efetivamente lecionado nas salas de aula, a maneira como os professores explicavam os conteúdos ou o que os levava a escolher uma determinada estratégia para abordar diferentes conteúdos. Segundo eles, os programas de pesquisa continuavam a tratar o ensino de maneira genérica ou como se o conteúdo específico de ensino não tivesse grande importância, e a psicologia cognitiva da aprendizagem se preocupava com essas questões específicas, mas do ponto de vista da aprendizagem do aluno. Analisando de maneira mais profunda a complexidade do processo de compreensão do conhecimento do conteúdo pelos professores, esses pesquisadores propuseram a diferenciação de três categorias no conhecimento do conteúdo para o ensino:

- o *conhecimento do conteúdo específico;*
- o *conhecimento pedagógico do conteúdo;*

- o *conhecimento curricular*[4].

No que diz respeito ao *conhecimento do conteúdo*, esses pesquisadores afirmam que as maneiras de discutir a estrutura desse conhecimento diferem de acordo com as diferentes áreas. De acordo com Shulman (1986), esse conteúdo vai além do conhecimento dos fatos ou dos conceitos da área e deve incluir, além da capacidade do professor de apresentar aos estudantes as verdades aceitas na área, a capacidade de explicar porque um determinado resultado é considerado verdadeiro, como ele se relaciona com outros resultados ou porque vale a pena conhecê-lo. Deveria compreender, também, porque um determinado tópico tem papel central ou periférico na disciplina.

Para Shulman (1986), o *conhecimento pedagógico do conteúdo* inclui as formas de representação, as analogias, as ilustrações, os exemplos e as explicações mais eficazes para o ensino dos conteúdos específicos usualmente ensinados na Escola Básica. Inclui também a compreensão do que torna a aprendizagem de determinados tópicos fácil ou difícil; as concepções e as concepções prévias dos alunos de diferentes faixas etárias e classes sociais. A compreensão das concepções prévias ou equivocadas dos alunos exige do professor diferentes estratégias de ensino que possibilitem ao aluno ultrapassá-las. Segundo o autor, nesse ponto há uma convergência entre as pesquisas sobre ensino e aprendizagem e o conhecimento advindo dos resultados dessas pesquisas é um componente importante para a compreensão pedagógica do conteúdo específico, devendo ser incluído como parte fundamental do que ele denomina conhecimento pedagógico do conteúdo.

O *conhecimento curricular* deve incluir a programação dos conteúdos de acordo com os diferentes níveis escolares, os materiais utilizados para o ensino desses conteúdos, as indicações e contraindicações para a utilização de determinados materiais ou abordagens para o ensino de tópicos específicos e em diferentes circunstâncias. Esse domínio deve contemplar o conhecimento de diferentes textos, *softwares*, materiais didáticos, assim como o que foi ensinado nos anos anteriores sobre o assunto e o que será ensinado posteriormente.

Ao discutir o que deveria constituir uma base de conhecimento para o ensino[5], Shulman (1987) apresenta sete categorias que deveriam ser necessariamente consideradas, aí incluídas as três apresentadas anteriormente:

- Conhecimento do conteúdo, que se refere à disciplina específica a ser lecionada;

[4] No original, em inglês, *subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge e curricular knowledge,* respectivamente.
[5] No original, em inglês: *knowledge base for teaching*.

- Conhecimento pedagógico geral, com referência especial aos princípios e estratégias de gestão e organização da sala de aula que parecem transcender o conhecimento do conteúdo;
- Conhecimento do currículo, que inclui os programas das disciplinas para os diferentes níveis escolares, as recomendações curriculares etc.;
- Conhecimento pedagógico do conteúdo, *esse amálgama especial do conteúdo e didática* que é exclusivamente do domínio dos professores e constitui uma maneira especial de compreensão profissional;
- Conhecimento dos alunos e de suas características;
- Conhecimento do contexto educacional, contemplando a composição dos grupos de alunos da turma, a organização escolar, as características das comunidades e de suas culturas;
- Conhecimento dos objetivos, propósitos e valores educacionais e seus fundamentos históricos e filosóficos.

Ele enfatiza que, entre essas categorias, o conhecimento pedagógico do conteúdo é de especial interesse, já que agrega os diferentes corpos de conhecimento necessários para o ensino. Segundo Shulman (1987), essa categoria representa o amálgama entre o conteúdo e a didática para a compreensão da maneira como tópicos específicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados para serem ensinados, de acordo com os diferentes interesses e habilidades dos estudantes. Para Shulman,“O conhecimento pedagógico do conteúdo é a categoria mais apropriada para distinguir a compreensão do especialista em conteúdo da do pedagogo” (SHULMAN, 1987, p. 8).

Ball, Thames e Phelps (2008) afirmam que todos concordam que a compreensão do conteúdo é importante para o ensino, mas o que constitui essa compreensão é definido de maneira vaga. Daí a proposta, feita por Shulman e seus colegas, de um novo domínio para o conhecimento do professor - conhecimento pedagógico do conteúdo - ter provocado um interesse geral. E a razão pela qual esse interesse se mantém ainda hoje é porque ele conecta o conhecimento do conteúdo com a prática pedagógica.

No entanto, segundo Ball e colegas (2008), apesar de esse termo ser largamente utilizado, ainda falta dar-lhe uma conceituação e fundamentação teórica, o que limita a sua utilização. Tem-se a impressão que muitos acham que sua natureza e conteúdo são óbvios e poucos são os estudos que testaram efetivamente a existência de um corpo distinto de conhecimento do conteúdo específico para o ensino. Para esses autores, sem pesquisas empíricas sobre esse tema, essas ideias continuam sendo hipóteses sobre o que se acredita ser o conhecimento necessário para os professores. O objetivo geral das pesquisas realizadas por Ball e seus colegas tem sido construir, a partir das ideias de Shulman, uma teoria sobre o conhecimento matemático para o ensino (Mathematical Knowledge for Teaching – MKT), tomando por base a prática dos professores.

A partir das demandas matemáticas para o ensino, as pesquisas desses autores indicam pelo menos dois subdomínios perceptíveis no conhecimento do conteúdo específico:

- *conhecimento comum do conteúdo (common content knowledge- CCK)*;
- *conhecimento especializado do conteúdo (specialized content knowledge-SCK);*

e dois para o conhecimento pedagógico do conteúdo:

- c*onhecimento do conteúdo e dos alunos(knowledge of content and the students-KCS);*
- c*onhecimento do conteúdo e do ensino (knowledge of content and teaching-KCT).*

Como dissemos anteriormente, dois outros subdomínios encontram-se em processo de investigação teórica e empírica:

- *horizonte do conhecimento do conteúdo (horizon of content knowledge – HCK);*
- *conhecimento do conteúdo e do currículo (knowledge of content and curriculum – KCC).*

Provisoriamente, Ball e seus colegas decidiram alocar o horizonte do conhecimento do conteúdo como um subdomínio da categoria do conhecimento do conteúdo específico e o conhecimento do conteúdo e do currículo como um subdomínio da categoria conhecimento pedagógico do conteúdo. Para esses pesquisadores, o mais importante, nesse momento, não é saber se essas categorias propostas por eles são as corretas, pois elas necessitam ainda de revisão e de refinamento.

A partir da análise da prática de professores, eles buscaram identificar o conhecimento matemático que é exigido para o trabalho que os professores executam em seu dia a dia. Nessa busca, eles definiram o conhecimento matemático dos professores para o ensino como o conhecimento matemático advindo do ensino, ou seja,

> o conhecimento matemático necessário para realizar as tarefas recorrentes de ensinar matemática para os alunos. Para evitar uma perspectiva estritamente reducionista e utilitarista, entretanto, nós buscamos uma concepção generosa

> de "necessitar" que permita, para essa perspectiva, hábitos mentais e de apreciação que são importantes para um ensino efetivo da disciplina (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 399).

O *conhecimento comum do conteúdo* é o conhecimento do conteúdo disciplinar ensinado pelos professores e que outros profissionais também possuem. Ele inclui saber resolver exercícios e problemas, saber utilizar notações e termos corretamente, saber identificar definições incorretas, assim como respostas incorretas dos exercícios. Os pesquisadores esclarecem que "comum" não está sendo utilizado para sugerir que todos possuem esse conhecimento, mas para explicitar que esse é um tipo de conhecimento utilizado em outras situações que não somente a de ensinar.

O *conhecimento especializado do conteúdo* é um conhecimento do conteúdo que é específico para o ensino, não sendo necessário para outras atividades ou profissões que não o ensino. Professores estão fazendo matemática específica para o ensino quando reconhecem padrões nos erros dos alunos, quando analisam se determinadas estratégias não usuais utilizadas pelos alunos podem ser generalizadas etc.. Muitas das tarefas diárias dos professores são características desse trabalho que é único do professor: apresentar ideias matemáticas, responder os porquês dos alunos, avaliar rapidamente se afirmações feitas pelos alunos são pertinentes etc.. Incluem também: a escolha e desenvolvimento de definições úteis para o que se pretende ensinar, o reconhecimento das consequências da utilização de uma representação específica, a avaliação e adaptação do conteúdo matemático presente nos livros didáticos, a modificação das atividades de modo a torná-las mais fáceis ou mais difíceis etc.. Essas tarefas executadas diariamente pelos professores demandam uma compreensão e raciocínio matemáticos únicos. O ensino requer do professor um conhecimento que está além do que está sendo efetivamente ensinado e esse conhecimento é específico do professor porque não é objetivo do ensino de matemática que todo aluno possua esse tipo de conhecimento. As demandas colocadas pelo trabalho de ensinar matemática apontam para a necessidade de criação de um corpo de conhecimento matemático específico para o ensino.

O *conhecimento do conteúdo e dos alunos* combina o conhecimento sobre os alunos e o conhecimento do conteúdo. De acordo com Ball e seus colegas (2008), os professores devem ser capazes de antecipar o que é possível que os alunos pensem sobre o que está sendo ensinado e o que eles acharão confuso; de prever o que os alunos acharão interessante ou motivador ao escolher um exemplo, assim como prever o que eles serão capazes de fazer com facilidade e com dificuldade ao propor uma atividade. Os professores devem ser capazes de escutar e interpretar o pensamento incompleto que está emergindo dos alunos e é expresso em uma linguagem ainda imprecisa. Cada uma dessas habilidades exige uma interação entre a compreensão dos conteúdos matemáticos específicos e familiaridade com a maneira de pensar matematicamente dos alunos. Uma tarefa central do professor é o conhecimento das concepções e das concepções equivocadas dos alunos sobre conteúdos matemáticos específicos. Para esses autores, "o conhecimento dos alunos e do conteúdo é um amálgama, envolvendo uma ideia matemática ou um procedimento específico e a familiaridade com o que os alunos normalmente pensam ou fazem" (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 401).

O *conhecimento do conteúdo e do ensino* combina o conhecimento sobre ensinar e conhecimento sobre matemática. Para ensinar um conteúdo específico, os professores usualmente utilizam sequências de ensino, escolhem quais devem ser os exemplos para iniciar o conteúdo e quais são mais propícios para aprofundamento. Eles também avaliam vantagens e desvantagens na utilização de determinadas representações e analisam as contribuições que diferentes métodos e procedimentos proporcionam para a aprendizagem. Cada uma dessas tarefas requer interação entre compreensão matemática dos conceitos específicos envolvidos e estratégias pedagógicas que influenciam a aprendizagem pelos alunos. De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), muitas vezes o professor deve tomar decisões relacionadas ao ensino como, por exemplo, quais contribuições dadas pelos alunos devem ser acatadas, quais devem ser ignoradas e quais devem ser guardadas para um momento posterior. Também durante uma exposição, o professor deve decidir qual o momento propício para fazer uma interrupção e dar mais esclarecimentos sobre o assunto, quando utilizar um comentário feito por um estudante para discutir uma questão matemática, quando propor uma pergunta ou uma nova tarefa para os alunos. Esses pesquisadores argumentam que todas essas decisões requerem uma integração entre a matemática que está sendo apresentada e os objetivos e as opções de ensino presentes naquele contexto escolar. O conhecimento do conteúdo e do ensino "é um amálgama, envolvendo uma ideia matemática ou procedimento e familiaridade com princípios pedagógicos para o ensino desse conteúdo em particular" (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p.402).

De acordo com Ball e seus colaboradores, eles não pretendem apresentar outra teoria em substituição ao "conhecimento pedagógico do conteúdo" proposto por Shulman, mas sim detalhar os fundamentos desse construto. Para esses pesquisadores, os domínios "conhecimento do conteúdo e dos alunos" e "conhecimento do conteúdo e do ensino" possuem características em comum com o conhecimento pedagógico do conteúdo. No entanto, argumentam que estão desenvolvendo de forma mais detalhada os fundamentos do conhecimento do conteúdo específico (Shulman, 1986). Para Ball e seus colaboradores, o que diferencia esse tipo de conhecimento matemático de outros tipos de conhecimento matemático é que ele é um conhecimento do conteúdo específico necessário para o professor realizar atividades matemáticas de ensino.

Ball, Thames e Phelps (2008) chamam a atenção para a necessidade de refinamento dessa teoria, a partir da análise da prática dos professores, para uma compreensão melhor do que é o conhecimento matemático para o ensino. Reconhecem que a categorização proposta não é formada por conjuntos disjuntos, e que uma mesma situação pode ser analisada a partir de diferentes perspectivas. E que, algumas vezes, pode ser difícil diferenciar o conhecimento especializado do conteúdo do conhecimento do conteúdo e dos alunos.

Mais do que isso, essa categorização pode não ser considerada conveniente por um pesquisador para investigar uma determinada questão. Por exemplo, Cury (2012) argumenta que se um professor ao analisar um erro cometido por um aluno sabe o que aconteceu porque já viu esse mesmo tipo de erro ocorrer outras vezes, ele estaria utilizando o que Ball, Thames e Phelps (2008) chamam de conhecimento do conteúdo e dos estudantes. Mas a autora diz preferir considerar que esse saber está incluído na categoria mais ampla do conhecimento pedagógico do conteúdo, proposta por Shulman (1986), “pois faz um amálgama entre conhecimento do conteúdo e de pedagogia, o que mostra sua compreensão da tarefa de ensinar” (CURY, 2012, p. 33). Cury propõe uma conceituação para conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros que envolveria

> conhecer o conteúdo no qual o erro foi cometido, as razões pelas quais tal conteúdo gera erros, as formas de trabalhar com os erros para desestabilizar as concepções errôneas dos alunos e as estratégias de ensino que podem auxiliar os alunos a superar as dificuldades de aprendizagem (CURY, 2012, p.38)

Assim, nessa conceituação, a autora considera que nenhum desses itens é isolado, todos se relacionam entre si e que esse tipo de conhecimento faz parte do conhecimento pedagógico do conteúdo, conforme proposto por Shulman (1987).

Ball, Thames e Phelps (2008) concordam que os professores devem conhecer o conteúdo que vão ensinar, porém, o conhecimento do conteúdo por si só pode não ser suficiente para o ensino. Para eles, é suficiente sentar em uma sala de aula por poucos minutos para perceber que a matemática utilizada pelos professores na Educação Básica não é a mesma matemática ensinada e aprendida nas aulas na faculdade. Além disso, argumentam que é pouco provável que a matemática avançada seja suficiente para responder às necessidades do conhecimento matemático para o ensino. Esses pesquisadores concluem que o mais importante é conhecer e ser capaz de usar a matemática que é necessária para o trabalho do professor em sala de aula. E, segundo eles, é preciso focalizar o tipo de matemática presente no trabalho dos professores em sua prática docente.

Acreditamos que essa ideia proposta originalmente por Shulman e ampliada por Ball e colaboradores de que existe uma forma de conhecimento matemático específico para o ensino traz avanços para a discussão sobre formação de professores de matemática, em especial nos cursos de licenciatura.

Na próxima seção, faremos uma síntese das recomendações para a formação de professores de matemática no Brasil.

2.1.2 Recomendações para a formação de professores de matemática no Brasil

Os cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil são regidos pela Resolução CNE/CES nº 3[6], de 18 de fevereiro de 2003 (BRASIL, 2003), que estabelece as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Matemática (Anexo C), baseada no Parecer CNE/CNS nº 1302/2001 (BRASIL, 2001), homologado pelo Ministro de Educação em quatro de março de 2002[7] (Anexo A). Eles devem obedecer também ao disposto na Resolução CNE/CP 1[8], de 18 de fevereiro de 2002 (BRASIL, 2002), do Conselho Nacional de Educação que institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena (Anexo B).

O inciso 3º do artigo 6º Resolução CNE/CP 1 (BRASIL, 2002) estabelece que, na construção do projeto pedagógico dos cursos de formação dos docentes, a definição dos conhecimentos exigidos para a constituição de competências deverá contemplar: cultura geral e profissional; conhecimentos sobre crianças, adolescentes, jovens e adultos; conhecimento sobre dimensão cultural, social, política e econômica da educação; conteúdos das áreas de conhecimento que serão objeto de ensino; conhecimento pedagógico e conhecimento advindo da experiência

Essa lista de conhecimentos possui semelhanças com as sete categorias que, segundo Shulman (1987), deveriam constituir uma base para o conhecimento do professor. Mas essas categorias de conhecimento são apresentadas de forma genérica, o que permite que diferentes

---

[6] Resolução CNE/CES 3/2003. Diário Oficial da União, Brasília, 25 de fevereiro de 2003, Seção 1, p. 13.
[7] Parecer CNE/CES 1.302/2001. Diário Oficial da União, Brasília, 5 de março de 2002, Seção 1, p. 15.
[8] Resolução CNE/CP 1/2002. Diário Oficial da União, Brasília, 4 de março de 2002. Seção 1, p. 8.

interpretações possam ser dadas sobre a constituição de cada uma delas e se continue com uma concepção difusa do que deva ser o conhecimento específico para o ensino.

No que diz respeito especificamente aos cursos de licenciatura em Matemática, de acordo com esses documentos, na parte comum sobre os conteúdos curriculares para o bacharelado e licenciatura, consta que

> os currículos devem assegurar o desenvolvimento de conteúdos dos diferentes âmbitos do conhecimento profissional de um matemático, de acordo com o perfil, competências e habilidades anteriormente descritos, levando-se em consideração as orientações apresentadas para a estruturação do curso. (BRASIL, 2002, p. 5)

As Diretrizes Curriculares também estabelecem que os currículos de todos os cursos de Licenciatura devem contemplar:

> Cálculo Diferencial e Integral; Álgebra Linear; Fundamentos de Análise; Fundamentos de Álgebra; Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica. A parte comum deve ainda incluir: a)conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise; b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias; c) conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática. Para a licenciatura serão incluídos, no conjunto dos conteúdos profissionais, os conteúdos da Educação Básica, consideradas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores em nível superior, bem como as Diretrizes Nacionais para a Educação Básica e para o Ensino Médio. (BRASIL, 2002, p. 6)

Em abril de 2010, o Ministério da Educação-MEC publicou os Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura[9], sistematizando denominações e descrições, identificando as efetivas formações de nível superior no Brasil e cuja construção foi pautada nas Diretrizes Curriculares aprovadas pelo Conselho Nacional de Educação. Nesse documento consta no perfil do egresso que

> A atribuição central do Licenciado em Matemática é a docência na Educação Básica, que requer sólidos conhecimentos sobre os fundamentos da matemática, sobre seu desenvolvimento histórico e suas relações com diversas áreas; assim como sobre estratégias para transposição do conhecimento matemático em saber escolar. (BRASIL, 2010, p. 79)

Na listagem dos temas que devem ser abordados na formação, além dos seis conteúdos apresentados anteriormente e presentes nas Diretrizes Curriculares, foram explicitados outros

[9] Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura/Secretaria de Educação Superior – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Superior, 2010, 99 p.

temas, tais como: Probabilidades e Estatística; Modelagem Matemática; Física Geral; História e Filosofia das Ciências Naturais e da Matemática; História, Filosofia e Sociologia da Educação; Metodologia e Prática de Ensino de Matemática; Psicologia da Educação; Legislação Educacional etc..

O documento explicita que não se deve interpretar as diretrizes curriculares como o antigo currículo mínimo, pois cada instituição de ensino tem autonomia para a construção de seus projetos pedagógicos. No entanto, a lista de temas apresenta os conteúdos das áreas de Matemática, de Física, da Educação que devem fazer parte dos currículos, mas não há a presença de temas que contemplem o conhecimento matemático específico para o ensino na Educação Básica, a não ser referências genéricas a "conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise" e a "estratégias para transposição do conhecimento matemático em saber escolar" (BRASIL, 2010, p.79).

Em abril de 2011, durante a realização do IV Fórum Nacional de Licenciaturas em Matemática na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, foi constituída uma comissão paritária composta por membros da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com o objetivo central de elaborar um documento com análise crítica dos Referenciais Curriculares Nacionais para os Cursos de Licenciatura em Matemática.

Em fevereiro de 2013, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) publicou o documento "A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM"[10]. De acordo com os presidentes das duas comissões, o texto contempla as discussões estabelecidas e se configura em elemento consensual do longo debate empreendido. Ele está estruturado em quatro partes:

- Apresentação de um breve panorama sobre a formação de professores no Brasil;
- Reflexão sobre a licenciatura enquanto espaço inicial de formação de professores para a prática docente escolar em matemática;
- Reflexão sobre alguns elementos constituintes do currículo da licenciatura em matemática;
- Reflexão sobre dezessete temas considerados essenciais para a formação do futuro professor de matemática em um curso de licenciatura.

[10] Boletim da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, nº 21, fevereiro de 2013.

Os autores ressaltam que não se pretendeu propor uma grade curricular padrão nem mesmo um currículo mínimo para o curso de Licenciatura em Matemática, devido à grande diversidade das regiões do país. Porém, acreditam ser necessário estabelecer um horizonte comum como forma de orientar as diversas formas de se organizar o processo de formação do professor de matemática, “buscando, por um lado, favorecer o avanço na identificação/conceituação dos saberes matemáticos relevantes para a formação docente na licenciatura ...” (SBEM, 2013, p. 3)

No que concerne ao conteúdo de Aritmética e Álgebra, o documento propõe a retomada desses conteúdos no sentido de aprofundar e solidificar os conhecimentos matemáticos nessa área e ampliar as discussões referentes ao ensino desse tema na Educação Básica. Propõe também mostrar aos licenciandos, a partir dos conteúdos abordados nesse tema, situações que contemplem o pensamento matemático e que sejam exploradas nos diversos níveis de ensino, por exemplo, ao planejar e trabalhar nas disciplinas de prática as atividades de investigação, a resolução de problemas, a argumentação e generalização que tenham relação direta com a prática.

Argumentam ainda que, para alcançar esses objetivos, as disciplinas de Aritmética e Álgebra necessitam de fundamentação. Um ponto considerado de “extrema importância no ensino de Álgebra (e no de matemática em geral) é mostrar a fecundidade da própria ideia de estrutura, isto é, por trás de “objetos” matemáticos, estão no fundo, estruturas algébricas.” (SBEM, 2013, p.23). Segundo esse documento

> Não só é importante, mas fundamental o ensino de estruturas algébricas em um curso de licenciatura em matemática. Sem esta disciplina, o aluno sai do curso sem o alicerce básico para ensinar os princípios fundamentais da matemática (SBEM, 2013, p.24).

Entre as temáticas propostas nessa área para os cursos de licenciatura em matemática estão: o papel da lógica matemática na distinção entre “explicação e prova” e “demonstração”; o conjunto dos números naturais: axiomas de Peano, múltiplos e divisores, números primos, algoritmo euclidiano da divisão e aplicações; a aritmética modular e suas aplicações: equações diofantinas e o Teorema Chinês do Resto; Grupos e Anéis: definições, homomorfismos e exemplos tais como o anel dos polinômios, o grupo de permutações, o grupo de simetrias das figuras planas e espaciais, o grupo das matrizes e o Teorema de Cayley.

Segundo esse documento, “o conhecimento específico na formação do professor de matemática envolve a aprendizagem de conceitos matemáticos avançados e a ressignificação de conceitos elementares, de modo a contemplar tanto uma fundamentação e argumentação matemáticas, quanto sua prática profissional futura.” (SBEM, 2013, p. 12) E propõe-se que temas próprios da docência, que são aqueles que envolvem currículos, gestão de classe, avaliação da aprendizagem dos alunos, dificuldades na compreensão de conceitos etc., sejam tratados de modo integrado aos diversos conteúdos que compõem o curso de licenciatura em matemática.

Nos capítulos de análise dos dados coletados retomamos a discussão de alguns pontos presentes nessas recomendações.

A seguir apresentamos a descrição do trabalho de campo da pesquisa.

2.2 Relato sobre o trabalho de campo

Nesta seção, subdividida em quatro subseções, abordamos os aspectos metodológicos relacionados ao trabalho de campo de nossa pesquisa. Na primeira subseção, esclarecemos os procedimentos metodológicos adotados. Na segunda subseção, apresentamos uma breve descrição da escola, campo da nossa investigação, esclarecendo os motivos que nos levaram à escolha da instituição. Na terceira subseção, apresentamos uma breve descrição das turmas que foram alvo da investigação. Finalmente, na quarta subseção, apresentamos os professores que foram sujeitos da pesquisa.

2.2.1 Abordagem metodológica

A abordagem metodológica utilizada na pesquisa foi o estudo observacional de cunho etnográfico, com o acompanhamento da prática de dois professores do Centro Pedagógico da Escola de Educação Básica e Profissional da UFMG, por um período de quatro meses.

Tendo em vista que a pesquisa qualitativa visa menos a uma generalização numérica do que à generalização teórica (FLICK, 2009), o estudo aqui proposto é de natureza qualitativa. Não se pretende responder a perguntas de generalização dos dados obtidos durante a observação da prática do professor, mas sim produzir uma reflexão dentro do contexto dos estudos teóricos sobre o conhecimento matemático específico do professor para o ensino.

Os instrumentos utilizados para a coleta de material empírico foram: observação direta em sala de aula, diário de campo, gravações em vídeo, entrevista com os professores (Apêndice) e com um aluno.

O Comitê de Ética em Pesquisa da UFMG aprovou, em 22 de março de 2012, o projeto de pesquisa bem como os Termos de Consentimento Livre e Esclarecido e o roteiro para as entrevistas. Esses documentos também foram encaminhados à escola escolhida como campo da investigação, para análise pelo seu Núcleo de Assessoramento à Pesquisa e pela Coordenação Pedagógica da escola, tendo sido o projeto aprovado em ambas as instâncias. Todos os cuidados éticos foram tomados de modo a garantir aos sujeitos a integridade de suas identidades e deixou-se claro que as informações coletadas são sigilosas e serão utilizadas apenas para os fins da pesquisa.

Tendo em vista o objetivo de identificar elementos constituintes do conhecimento matemático específico do professor, no que se refere ao trabalho com a álgebra na Educação Básica, as observações de aulas são fundamentais para registrar a prática de sala de aula no ensino de álgebra dos sujeitos da pesquisa. Assim, a inserção do pesquisador na escola deve ser a mais integral possível, sendo necessário que ele conheça os ritos e normas da escola e da sala de aula. Com esse objetivo em mente, além de apresentar a proposta da pesquisa à Diretoria da escola, a qual foi aprovada pelos respectivos órgãos internos, em 19/10/2011 foi realizada uma reunião com o Núcleo de Matemática, quando foi feita uma breve apresentação do projeto. Os professores aceitaram, a princípio, participar da pesquisa. No entanto, como a observação em sala de aula deveria ocorrer no primeiro semestre de 2012 e a distribuição dos professores para 2012 não havia sido feita, ficou decidido que uma apresentação mais detalhada da proposta da pesquisa seria realizada no ano seguinte.

Para me familiarizar com o ambiente escolar, solicitei à coordenadora do Núcleo, que também era a professora de Matemática das turmas do 7º ano, autorização para assistir algumas aulas de álgebra dessas turmas no final do ano de 2011 sem, no entanto, fazer uma coleta de dados para a minha pesquisa. No período de 25 de outubro a 21 de novembro, assisti cinco aulas de álgebra nas turmas, sendo duas na turma do 7º A e três na do 7º B. O conteúdo de álgebra abordado no período foi resolução de equações de 1º grau e problemas (envolvendo inclusive razões, proporções e porcentagem) que recaíam em equações de 1º grau. Apesar do curto período de tempo, foi possível ter uma ideia da maneira como a aula de Matemática transcorria nas turmas. Usualmente, a professora fazia uma apresentação sucinta do conteúdo da aula e os alunos faziam os exercícios em grupo, auxiliados pela professora e por estagiários. Posteriormente, a professora passava à correção dos mesmos, dialogando o tempo todo com os alunos e, sempre que possível, relembrando os procedimentos e justificativas para os cálculos.

A observação das aulas, que compõe um dos instrumentos da pesquisa, ocorreu de 04 de abril a 09 de agosto de 2012. As observações realizadas foram não estruturadas (ALVES-

MAZZOTTI, 1999), uma vez que os comportamentos foram observados e relatados da forma como foram ocorrendo, para posterior análise.

As entrevistas realizadas com os professores tiveram o objetivo de conhecer a formação e a experiência profissional de cada um deles, além de saber qual o contato que tiveram com propostas de ensino de álgebra durante o processo de formação, inicial ou continuada. Além disso, elas visavam compreender a relação deles com a escola, com as turmas, ou, ainda, esclarecer questões surgidas durante as aulas gravadas em vídeo. Portanto, são entrevistas semiestruturadas, com perguntas definidas a partir de dados coletados na observação das aulas. A entrevista com o professor do 8º ano foi realizada em 29 de abril de 2013 e a com o professor do 9º ano em 03 de dezembro de 2012, tendo algumas informações complementares sobre a turma sido dadas, por mensagem eletrônica, em 18 de março de 2013. Em 29 de novembro de 2012, foi realizada, também, uma entrevista com um aluno do 9º ano, que tinha uma participação destacada nas aulas, com o objetivo de esclarecer alguns comentários feitos por ele durante as aulas. Nesse último caso, o vídeo de parte de uma aula foi mostrado ao aluno para que ele explicasse as observações feitas por ele durante essa aula.

Como visto anteriormente, diversos são os pesquisadores que defendem a ideia que existe uma forma de conhecimento que é específica do professor. De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), o conhecimento matemático para o ensino inclui tarefas rotineiras no trabalho do professor, tais como apresentar ideias matemáticas, responder aos porquês dos alunos, relacionar o tópico que está sendo abordado com outros já lecionados, fazer perguntas que sejam produtivas para a sequência que está sendo ensinada etc., que podem ser incluídas no domínio *conhecimento especializado do conteúdo*. Já a capacidade do professor de antecipar o que é possível que os alunos pensem sobre o que está sendo ensinado e de escutar e interpretar o pensamento incompleto do aluno e expresso em uma linguagem imprecisa está incluída no *conhecimento do conteúdo e dos alunos.* O conhecimento matemático para o ensino inclui também as escolhas feitas pelo professor durante uma discussão em sala de aula, como, por exemplo, decidir quando parar para esclarecer melhor o que está sendo apresentado, quando utilizar a observação de um aluno para levantar alguma questão ou decidir quando deve fazer uma nova pergunta ou apresentar uma nova tarefa para aprofundar o conhecimento dos alunos, que fazem parte do domínio *conhecimento do conteúdo e do ensino.*

Tendo em vista a inter-relação entre a matemática, o professor e os alunos, presente no conhecimento matemático específico do professor, especialmente nos domínios do conhecimento do conteúdo e dos alunos e do conhecimento do conteúdo e do ensino, optamos por registrar as interações do professor com o coletivo da sala de aula. Assim, apesar de não desconhecer a importância das interações entre os alunos ou entre o professor e um aluno em particular para o desenvolvimento da atividade como um todo, a filmagem das aulas focalizou principalmente o professor e o quadro negro.

Ressaltamos que os momentos de interação dos professores com o coletivo de alunos eram muito frequentes. Eles ocorriam especialmente quando os professores faziam a apresentação do assunto da aula e também durante a correção no quadro negro das atividades e exercícios realizados pelos alunos. Além disso, sempre que os professores percebiam a presença recorrente de um erro ou de uma interpretação equivocada de um conceito ou procedimento pelos alunos, eles estendiam a discussão para toda a turma. Havia uma alternância entre os momentos de interação do professor com toda a classe e de trabalho em grupo pelos alunos, com o professor e os monitores atendendo às dúvidas surgidas nos grupos. No entanto, frequentemente as discussões presentes nos grupos eram levadas para o coletivo dos alunos.

Só vamos nos referir à participação de um determinado aluno em particular, quando o acompanhamento do processo de interação desse aluno com o professor ou com a turma é necessário para uma melhor compreensão do processo de discussão que está ocorrendo na sala de aula. Nesse caso, o aluno é identificado por um pseudônimo, e sua participação na pesquisa foi autorizada conforme os procedimentos regulamentados pelo Comitê de Ética em Pesquisa – COEP – da UFMG. No entanto, algumas vezes, não foi possível identificar quem foi o autor de uma determinada fala, e, nesse caso, na transcrição dos dados, ele é nomeado simplesmente como aluno. Os professores também são identificados por pseudônimos e deram seu consentimento por escrito. Os pseudônimos dos alunos foram escolhidos por eles mesmos e os dos professores pela pesquisadora.

Como a escola faz parte de uma universidade federal, a presença, em sala de aula, de estagiários e de pesquisadores é muito comum. Os alunos não mostraram constrangimento com a presença da filmadora em sala e tampouco com a da pesquisadora.

2.2.2 O campo de investigação

O trabalho de campo foi realizado em uma escola de educação básica vinculada à rede federal de ensino, localizada em Belo Horizonte.

Durante o processo de seleção para o doutorado, uma das examinadoras, professora aposentada dessa escola, me perguntou se eu não teria interesse em realizar minha pesquisa nela. Achei a sugestão conveniente, uma vez que a escola está localizada no *campus* da universidade onde trabalho, o que facilitaria o meu acesso e possibilitaria um período mais longo de inserção no ambiente escolar. Além disso, uma das finalidades dessa escola é "*constituir um campo de experimentação para a formação de professores para a Educação Básica e Profissional*"[11], servindo como um dos campos de estágio para os alunos dos cursos de licenciatura da Universidade.

Desde 2006, o ensino fundamental na escola tem a duração de nove anos; como uma escola pública, "*adota o sorteio para ingresso dos alunos, por considerá-lo a forma mais democrática, evitando mecanismos de seletividade que favoreçam quaisquer grupos sociais"*[12].

Trata-se de uma escola pública de prestígio, cujo processo de seleção é muito concorrido, possibilitando que seu corpo discente seja formado por alunos de diferentes classes socioculturais e das mais diversas regiões da cidade. Por fazer parte de uma universidade federal, essa instituição não é considerada uma escola pública típica, sendo vista por muitos como uma escola "especial". Realmente, uma diferença entre essa escola e a maioria das escolas de ensino básico da rede pública, apontada inclusive pelo professor Wagner[13] durante a sua entrevista, é o fato de ela não estar inserida fisicamente em uma comunidade. Isso faz com que, por exemplo, problemas sociais que ocorrem nas comunidades nas quais as escolas estão inseridas e que influenciam fortemente o cotidiano dessas escolas não aconteçam lá. A distância entre o que ocorre na vida escolar dos alunos e o que ocorre nas comunidades às quais os alunos e suas famílias pertencem é muito grande. Consequentemente, os alunos convivem em seu dia a dia com dois mundos completamente separados.

Outro ponto que, a meu ver, torna essa escola diferenciada diz respeito às condições de trabalho e à formação acadêmica de seu corpo docente. Por exemplo, em 2012, o Núcleo de Matemática, formado pelos professores responsáveis pelo ensino de Matemática para as turmas do 4º ao 9º ano, contava com seis professores efetivos e dois substitutos. Todos os professores efetivos possuíam, pelo menos, o título de mestre, e trabalhavam em regime de 40 horas com dedicação exclusiva, lecionando uma média de 12 horas/aula por semana. Dos dois

---

[11] De acordo com o inciso I do artigo 4º da Resolução nº 05/2007, de 03 de maio de 2007, do Conselho Universitário, que aprova o regimento interno da Escola.

[12] http://www.cp.ufmg.br/index.php/historico, acesso em 29/04/2013.

[13] O professor Wagner foi um dos dois sujeitos da pesquisa.

professores substitutos, um também possuía o título de mestre, e o regime de trabalho de ambos era de 40 horas semanais. Portanto, a escolha dessa escola se deu também pelo perfil e pelas condições de trabalho de seu corpo docente, que poderia contribuir para uma discussão das distintas dimensões do conhecimento matemático para o ensino.

A escola, desde 1995, é organizada em ciclos de Formação Humana, e em 2012 possuía oito turmas no 1º ciclo (duas turmas de 1º ano, três de 2º ano e três de 3º ano); nove turmas no 2º ciclo (três turmas de cada um dos 4º, 5º e 6º anos) e sete turmas do 3º ciclo (duas do 7º ano, duas do 8º e três do 9º ano).

A escola funciona em período integral, e o horário de aulas do 3º ciclo é composto de três módulos pela manhã: de 7:30 às 9:00; de 9:20 às 10:50 e de 11:00 às 12:30. O período da tarde constitui-se de um módulo de 13:40 às 15:10. As turmas do 3º ciclo da escola têm três aulas semanais de Matemática, cada uma delas com 90 minutos de duração. Além das disciplinas regulares, as turmas são rearranjadas em grupos menores e com alunos dos diferentes anos, denominados GTD's – Grupo de Trabalho Diferenciado, que podem ser dirigidos para ampliação dos conteúdos escolares ou para reforço para os alunos com deficiências em determinados conteúdos.

Durante o ano de 2012, a coleção de livros didáticos adotada na escola era “Matemática na Medida Certa”, de Marília Centurión e José Jakubovic (Jakubo), da Editora Scipione, 11ª edição, de 2011. De acordo com informações obtidas durante a entrevista com o professor Wagner, a escolha desse livro foi anterior à contratação dos professores que, em 2012, atuavam nos 2º e 3º ciclos. A coleção já estava sendo adotada desde 2011 e deveria ser mantida até 2013. Ao final desse período, os professores procederão a um novo processo de escolha do livro didático dentro do Programa Nacional do Livro Didático e pode ser que o Núcleo de Matemática decida escolher outra coleção.

O livro didático era muito utilizado na escola. Em ambas as turmas, usualmente, os professores iniciavam a apresentação dos conteúdos pela leitura de um capítulo do livro adotado, por um dos alunos, o qual explicava o que compreendeu da leitura do texto, com a complementação da explicação pelo professor, quando necessário. Os alunos disputavam bastante a escolha para ler o texto. Os professores exigiam que os estudantes tivessem o livro-texto durante as aulas e normalmente a maioria dos alunos utilizava o livro em sala para leitura e para a realização dos exercícios. Praticamente todos os exercícios do livro eram feitos em casa ou em sala pelos alunos. A correção dos exercícios era feita em sala.

2.2.3 Sobre as turmas pesquisadas

Conforme proposto inicialmente no projeto, os sujeitos da pesquisa deveriam ser professores em exercício no 3º ciclo do ensino fundamental e a observação deveria ocorrer durante o período de ensino de conteúdos de álgebra. Tendo em vista que, nas turmas do 7º ano, o conteúdo de álgebra só seria dado no segundo semestre e a pesquisa de campo deveria ter início ainda no 1º semestre de 2012, decidimos realizar a observação somente nas turmas de 8º e 9º anos.

Meu objetivo era acompanhar as aulas de álgebra de dois professores distintos durante o período aproximado de um semestre letivo e, devido ao horário das aulas de Matemática das turmas em 2012, havia uma única escolha possível, contemplando uma turma do 8º ano (turma B) e uma do 9º ano (turma A), que permitiria a observação de todas as aulas semanais de matemática.

A partir desse momento, passarei a me referir ao professor do 8º ano como Professor Wagner e ao do 9º ano como Professor Antônio[14].

2.2.3.1 A turma do 8º B

O período de observação de aulas na turma do 8º ano foi de 04 de abril a 09 de agosto de 2012, quando foram filmadas 32 aulas.

O conteúdo de Álgebra do 8º ano está distribuído em quatro capítulos do livro-texto: Capítulo 4- Álgebra: usando variáveis; Capítulo 5- Equações e sistemas de equações: resoluções algébricas; Capítulo 8-Multiplicação e fatoração de polinômios e Capítulo 9-Reunindo geometria e álgebra.

O Capítulo 4 foi desenvolvido no período de 4 de abril a 30 de maio (em 22 aulas) e o Capítulo 5 no período de 6 de junho até 09 de agosto (em 14 aulas). O estudo dos outros dois capítulos estava previsto para os meses de outubro e novembro de 2012, mas decidi não acompanhar as aulas nesse período, pois me parecia que os dados já coletados seriam suficientes para a elaboração da pesquisa.

A turma do 8º ano tinha trinta alunos, 14 meninas e 16 meninos, as idades variando de 13 a 17 anos.

As duas turmas do 8º ano, em 2012, tiveram um acompanhamento diferenciado tanto pela direção da escola quanto pelos professores, e uma das razões para isso foi o fato de haver

[14] Os nomes foram modificados.

um grande número de alunos nessas turmas com deficiência nos conteúdos básicos de Matemática (e de Português também, segundo o professor Wagner) e com problemas de comportamento. Segundo o professor da turma, no início do ano, antes da minha inserção no campo, foi necessário despender parte considerável do tempo para o estabelecimento de regras de comportamento e convivência em sala de aula e, segundo ele, foi possível perceber uma mudança positiva no comportamento nas turmas ainda no início do semestre.

Um exemplo desse atendimento diferenciado foi que, durante o período de observação, em várias ocasiões, havia na sala de aula, além do professor e da pesquisadora, mais três estagiários. Um deles, denominado residente da turma, era uma aluna de graduação do Curso de Letras, que era responsável pelo acompanhamento da turma em todas as disciplinas. Ela fazia anotações em um diário de campo, que depois eram repassadas aos professores, sugerindo, por exemplo, mudanças de lugar dos alunos e atendimento específico para algum aluno em particular. A turma possuía, também, um residente de Matemática (responsável também pela outra turma do 8º ano), um licenciando do Curso de Ciências Biológicas que deveria auxiliar os alunos nas aulas de Matemática. E durante dois meses do 1º semestre, uma aluna do Curso de Licenciatura em Matemática fez o estágio da disciplina Análise da Prática Pedagógica nessa mesma turma. Acostumados com a presença de diferentes pessoas na sala de aula, os alunos solicitavam constantemente o auxílio de quem estivesse presente em sala quando tinham dificuldades.

Uma questão que chamou minha atenção, especialmente nessa turma do 8º ano, foi a estratégia desenvolvida pelos alunos quando o professor solicitava que eles fizessem os exercícios ou que apresentassem oralmente as soluções encontradas. Eles realizavam normalmente as atividades em grupo e, quando não conseguiam fazer uma atividade, logo recorriam à ajuda do professor ou de algum estagiário que estivesse em sala. Muitas vezes, após receber uma dica de um estagiário, por exemplo, iam atrás de outro ou do professor solicitando outra dica para fazer o passo seguinte, de tal modo que, com as respostas que obtinham para as suas dúvidas, conseguiam “resolver” os exercícios propostos. Quando não conseguiam ser atendidos pelo professor, iam atrás dos alunos que já haviam conseguido resolver os exercícios e perguntavam as soluções, copiando-as no caderno.

O hábito de trabalhar sempre em grupo parecia impedir que eles se concentrassem na resolução individual das atividades. À primeira dificuldade que surgia, eles solicitavam a ajuda de alguém; ficavam muito impacientes quando tinham que esperar para serem atendidos e então costumavam recorrer aos colegas para obter as soluções das atividades. Normalmente, ao final da aula, todos os alunos tinham as atividades escritas no caderno; no entanto, nem todos haviam compreendido o que havia sido feito. Deste modo, os próprios estudantes não tinham uma percepção clara de suas dificuldades.

Na tentativa de impedir que os alunos solicitassem ajuda a cada momento a uma pessoa diferente e não se esforçassem em resolver os exercícios, o professor desenvolveu diversas estratégias. Por exemplo, nas aulas nas quais estavam presentes também o residente e a estagiária de Matemática, o professor dividia a sala em três grupos, para que cada um desses grupos fosse sempre atendido pela mesma pessoa e para que essa pudesse acompanhar todo o desenvolvimento das atividades realizadas e a produção do grupo.

A partir do dia 5 de maio, o professor apresentou uma nova proposta de trabalho: os alunos deveriam conferir as respostas dos exercícios feitos em casa e o professor faria a correção no quadro somente dos exercícios em que os alunos não tivessem conseguido chegar ao resultado correto ou daqueles que não tivessem compreendido como fazer.

A partir de 12 de junho, outra estratégia empregada pelo professor, em algumas atividades, foi designar o residente de Matemática e a estagiária do curso de Matemática para atender, cada um deles, um grupo específico de alunos que tinham muita dificuldade com o conteúdo, enquanto ele atendia o resto da turma.

Em 20 de junho, após a aula na turma, em conversa não gravada, o professor disse que um grande número de alunos não estava dominando procedimentos básicos, e que esses alunos eram divididos em grupos de 10 com um professor para revisão de conteúdos básicos nos GTD’s. Estavam sendo revistos conteúdos de frações e equações cujas soluções eram números fracionários, mas os alunos tinham a sensação que era uma repetição do que eles já haviam estudado anteriormente e não era possível perceber uma melhoria no domínio desses conteúdos por um grupo razoavelmente grande de alunos. Segundo informações do professor Wagner, ao final do ano letivo de 2012, após análise do desempenho dos alunos não somente em Matemática como também nas outras disciplinas, 11 dos 30 alunos da turma foram reprovados.

2.2.3.2 A turma do 9º A

A observação das aulas da turma do 9º ano ocorreu no período de 23 de abril a 08 de agosto de 2012 e foram filmadas 28 aulas.

O conteúdo de Álgebra do 9º ano está distribuído em três capítulos do livro adotado: Capítulo 3- Equações e sistemas do 2º grau; Capítulo 6 - Funções e Capítulo 8 – Complementos de Álgebra.

O Capítulo 3 foi desenvolvido durante 17 aulas, de 23 de abril até 04 de junho, e o Capítulo 8, envolvendo basicamente equações fracionárias, durante 12 aulas, de 11 de junho a 12 de agosto.

Os professores do Núcleo de Matemática da escola, em conjunto com os professores do colégio que atuam no ensino médio e técnico e que recebe os alunos oriundos do Centro Pedagógico, decidiram não abordar o conteúdo de Funções no 9º ano do ensino fundamental, uma vez que, no 1º ano do ensino médio, ele é focalizado durante um longo período de tempo e com muito mais profundidade.

A turma do 9º ano era constituída por vinte e cinco alunos, 12 meninas e 13 meninos, com idades variando de 14 a 16 anos. A turma era heterogênea, e, de acordo com o professor Antônio, pode-se estimar que aproximadamente um terço dos estudantes tinha grandes dificuldades com conteúdos básicos de Matemática e um terço possuía um domínio razoável desses conteúdos, de modo que podiam acompanhar o conteúdo do 9º ano sem dificuldades. O restante terço da turma, na região intermediária, oscilava, às vezes apresentando dificuldades e outras vezes com uma participação efetiva na sala de aula. De acordo com informações do professor Antônio, dos cinco alunos que estavam repetindo o 9º ano, dois estavam obtendo, em 2012, um desempenho em Matemática acima da média da turma.

Segundo o professor Antônio, o hábito de sempre trabalhar em grupo e sempre ter alguém em sala, além do professor, fazia com que os alunos não tivessem paciência para tentar resolver individualmente as dificuldades que surgiam, procurando sempre ajuda quando não conseguiam resolver de imediato alguma questão[15].

---

[15] Em ambas as turmas observadas, o processo de argumentação e discussão do professor com um aluno específico, tanto das soluções dos exercícios como da exploração de determinados conceitos que não estavam claros, apresentava uma característica comum. Os colegas do aluno que estava sendo “arguido” ficavam “soprando” as respostas, e era possível perceber que muitas vezes ele estava simplesmente repetindo o que o colega dizia. Esse tipo de procedimento tornava obscuro para o próprio aluno seu grau de compreensão do que estava em discussão. Os dois professores fizeram diversas tentativas de proposição de estratégias para que os alunos tivessem conhecimento de suas próprias dificuldades e se tornassem mais

Para possibilitar um momento individual do aluno com o conteúdo que estava sendo estudado e para que os alunos pudessem tomar consciência de suas dificuldades e limitações, o professor Antônio decidiu aplicar testes individuais semanais sobre o conteúdo abordado durante a semana. Esses testes representavam momentos de tensão na sala de aula, uma vez que os alunos continuavam tentando obter auxílio do professor ou dos estagiários.

De acordo com o professor Antônio, as tentativas que fez de propor atividades envolvendo problemas mais "abertos", que exigiam discussão e que não possuíam um roteiro pronto para a solução, produziram um alto grau de ansiedade e impaciência nos alunos, tornando esse tipo de atividade muito estressante.

Ao final do ano letivo de 2012, nove alunos tiveram um desempenho acima de 70%, nove alunos entre 60% e 70% e sete alunos foram reprovados.

2.2.4 Os sujeitos da pesquisa

Como dito anteriormente, a escolha dos dois professores para a realização da pesquisa se deu unicamente em função dos horários das aulas de Matemática das turmas do 8º e do 9º anos da escola, em que eles lecionavam.

Esses professores possuíam diferentes formas de vínculo empregatício com a escola e diferentes trajetórias profissionais, mas isso ocorreu de forma não proposital. O professor Wagner é efetivo na escola e é um professor experiente, tendo atuado na Educação Básica e no ensino superior por mais de 12 anos, enquanto o professor Antônio atuava como substituto e essa era a sua primeira experiência no ensino regular de Matemática.

Vale a pena ressaltar, também, a minha relação com esses professores e com a escola. Apesar de não ter dado aulas para o professor Antônio durante sua graduação, o que não aconteceu simplesmente devido ao fato de terem sido ofertadas duas turmas de algumas disciplinas e ele ter se matriculado na turma que não era a minha, eu o conhecia como aluno participante de projetos de ensino e extensão e havia lecionado para muitos de seus colegas, tendo, inclusive, sido homenageada pela sua turma na solenidade de formatura.

Em relação ao professor Wagner, não tinha tido contato com ele antes da pesquisa, mas como a escola de ensino básico pertence à instituição onde trabalho e tenho atuado na

---

independentes da ajuda do professor, do estagiário, dos colegas e aprendessem a ter mais concentração e persistência na resolução das atividades.

licenciatura, tinha lecionado para outros professores de Matemática da escola, que são seus colegas de trabalho.

Além disso, durante minha trajetória profissional, participei de diversas comissões e órgãos colegiados com professores dessa escola, tendo exercido, no período março de 2004 a novembro de 2005, a coordenação do Colegiado Especial da Educação Básica e Profissional da UFMG, instância superior de gestão acadêmica da educação básica e profissional na Universidade, da qual essa escola faz parte.

Ressalto, portanto, a existência de uma relação minha com a escola, anterior à realização da pesquisa, desenvolvida em duas vertentes: a de formação de seus professores de Matemática e a de participante de sua administração acadêmica, na condição de docente da UFMG.

2.2.4.1 O professor Wagner

O Professor Wagner, do 8º ano, possui licenciatura em Matemática (2003) pela Pontifica Universidade Católica de Minas Gerais – PUC Minas, Especialização (2005) em Educação Matemática pela PUC Minas e mestrado profissionalizante (2011) em Educação e Ensino de Matemática pela Universidade Federal de Ouro Preto.

Tinha, em 2012, aproximadamente 13 anos de experiência docente. Atuou no ensino fundamental e médio de escolas das redes de ensino pública e particular de Minas Gerais e no ensino técnico da rede federal de ensino. O professor lecionou para turmas do 6º ano do ensino fundamental até o 3º ano do ensino médio. Foi também docente e coordenador de um curso de licenciatura em Matemática da rede estadual de ensino.

É professor efetivo da escola, tendo sido aprovado em concurso público para o cargo em 2011. O regime de trabalho do professor é de 40 horas semanais com dedicação exclusiva.

Quando ele foi contratado pela escola, a coordenação do Núcleo de Matemática considerou a possibilidade de designá-lo para lecionar para as turmas do 4º ano, mas, em vista de sua atuação nos últimos anos, somente no ensino médio, técnico e superior, ficou decidido que ele começaria dando aula nos $9^{\underline{os}}$ anos, depois nos $8^{\underline{os}}$ etc.. Assim, em 2011, ele lecionou para os $9^{\underline{os}}$ anos e, em 2012, para os $8^{\underline{os}}$ anos.

Em 2012, ele lecionou 12 horas semanais de aula para as duas turmas do 8º ano, além de coordenar o Núcleo de Matemática da escola, formado pelos professores de Matemática atuantes nos 2º e 3º ciclos, e atuar no Curso de Pedagogia à distância ofertado pela UFMG.

O professor Wagner faz muitas ressalvas ao livro adotado na escola. Ele acha que o livro tenta introduzir os assuntos através de problemas, mas que não são realmente problemas, que possibilitem a investigação. Para ele, há uma ênfase em questões mecânicas, que não fazem o aluno pensar. Mas, mesmo assim, o professor diz que utiliza muito o livro, porque é um material didático, pago pelo governo federal, e que, portanto, deve ser utilizado. Além disso, ele acha fundamental que os alunos aprendam a ler o livro, para que possam recorrer a ele quando tiverem dúvidas.

Em relação ao ensino de álgebra, o professor Wagner diz que acha a transição da aritmética para a álgebra muito complicada. Para ele, esse é um ponto em que a escolha do material didático é importante, pois a introdução da álgebra deve ser feita a partir de uma situação problema que o aluno não consiga resolver utilizando somente a aritmética.

Quanto à presença de conteúdos sobre o ensino de álgebra durante a sua formação, o professor afirma que teve pouco contato com propostas para o ensino de álgebra durante a sua formação inicial e continuada. Ele diz não se lembrar de nenhuma discussão durante o curso de Licenciatura em Matemática. Quando foi aluno do Curso de Especialização em Ensino de Matemática, lembra-se de ter feito um trabalho sobre a utilização de material concreto para trabalhar com produtos notáveis. Ele diz que foi aprendendo como ensinar álgebra na prática da sala de aula, fazendo algumas pesquisas, lendo alguns materiais.

2.2.4.2 O professor Antônio

O professor Antônio, do 9º ano, possui licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (2010) e Mestrado em Educação (2012) pela mesma universidade, na linha de pesquisa em Educação Matemática.

Atuou como professor substituto na escola em 2012, com contrato de um ano, com possibilidade de renovação por mais um ano. Essa foi sua primeira experiência docente no ensino regular de Matemática. Havia trabalhado anteriormente, durante quase três anos, com alunos de 7 a 15 anos em atividades extraclasse no projeto Escola Integrada da Prefeitura de Belo Horizonte, tendo sido coordenador da área de Matemática do mesmo.

Em 2012, o contrato de trabalho do professor era de 40 horas semanais e ele lecionou para três turmas regulares: uma de 5º, uma de 6º e uma de 9º ano, totalizando 18 horas aula. Além disso, era responsável pela oferta de três disciplinas de ampliação curricular - Grupo de Trabalho Diferenciado- ofertadas para grupos de 10 alunos e com carga horária de 2 horas cada, totalizando uma carga horária semanal de 24 horas. Uma dessas disciplinas foi sobre

Ensino de Matemática por meio de Jogos, a outra sobre o NEPSO (Nossa Escola Pesquisa Sua Opinião), cujo objetivo era ensinar os alunos o processo de formação em pesquisa, e a terceira disciplina era para reforço escolar para os alunos do 5º, do 6º e do 9º ano. Das turmas regulares, a que mais o marcou foi a do 5º ano; ele disse que foi um desafio, pois precisava organizar o seu pensamento para explicar as coisas elementares.

Em relação à sua formação, o professor Antônio disse que durante o curso de graduação sempre escolheu, quando possível, disciplinas que tivessem um vínculo com a prática da sala de aula. Cursou as disciplinas optativas Fundamentos de Metodologia de Ensino de Matemática II, da grade curricular do Curso de Pedagogia, e a disciplina Tópicos de Matemática: Laboratório de Ensino de Matemática. Participou dos projetos de extensão vinculados à participação de alunos da Escola Básica, tais como “Visitas Programadas de Alunos e Professores ao Laboratório de Ensino de Matemática” e Programa de Vocação Científica - PROVOC do Colégio Técnico da UFMG. E, também, foi monitor de oficinas de Matemática do Projeto Escola Integrada da Prefeitura de Belo Horizonte.

Quanto à presença de conteúdos sobre o ensino de álgebra durante a sua formação, o professor afirma se lembrar de haver estudado, em uma das disciplinas Matemática e Escola, diferentes significados das letras em álgebra e os papéis das variáveis.

3. A ÁLGEBRA E O CONHECIMENTO MATEMÁTICO ESPECÍFICO PARA O ENSINO: PENSAMENTO ALGÉBRICO

Neste capítulo, dividido em três seções, apresentamos um estudo sobre a álgebra e o conhecimento matemático específico com ênfase no trabalho do desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da análise das questões surgidas na sala de aula do professor Wagner. Na primeira seção, fazemos uma síntese sobre o que constitui o pensamento algébrico segundo alguns pesquisadores. Na segunda seção, apresentamos os resultados obtidos ao analisar o material empírico do trabalho de campo da pesquisa tendo como referência o conhecimento matemático específico do professor. Na terceira seção, apresentamos elementos constituintes do conhecimento matemático específico do professor para o trabalho com a álgebra na Escola Básica, que foram identificados ao longo da análise empreendida, relacionando-os com a maneira como são tratados nas recomendações oficiais para a formação de professores no Brasil.

3.1 Introdução

A identificação do que constitui o conhecimento matemático específico do professor para o trabalho com álgebra na Escola Básica pressupõe uma discussão mais aprofundada sobre a concepção de álgebra na formação do professor e os sinais dessa concepção em sua prática.

De acordo com Bednarz, Kieran e Lee (1996), para tornar a aprendizagem de álgebra significativa para os alunos, diferentes abordagens para o ensino têm sido propostas: generalização de padrões numéricos e geométricos, entre outros, e das relações numéricas, resolução de problemas, resolução de equações com o auxílio de modelos concretos, introdução de situações funcionais e modelagem de fenômenos físicos e matemáticos. Cada uma dessas abordagens pode ser associada a diferentes modos de conceber a álgebra:

- estudo da linguagem (matemática) e sua sintaxe;
- estudo de procedimentos para resolver determinados tipos de problemas, sendo que, nesse caso, a álgebra serve não somente como ferramenta para resolver problemas, mas também como ferramenta para expressar soluções genéricas;
- estudo de regularidades presentes nas relações numéricas, que é uma concepção de álgebra centrada em generalizações e que pode ser ampliada pela introdução de

componentes de demonstração e validação dos resultados obtidos, assim como o estudo de relações entre quantidades que variam.

Usualmente, considera-se que o ensino da álgebra escolar tem início com a utilização de expressões com letras representando números, e de transformações com essas expressões. O ensino tradicional da álgebra "se sustenta na crença de que o pensamento algébrico só se manifesta e se desenvolve a partir do cálculo literal ou através da linguagem simbólica." (FIORENTINI, FERNANDES, CRISTOVÃO, 2005, p.4). No entanto, o pensamento algébrico pode se manifestar e se desenvolver sem a utilização da linguagem algébrica padrão e, portanto, ele pode ocorrer desde os primeiros anos de escolarização.

Radford (2011) argumenta que, infelizmente, os documentos curriculares e pesquisas sobre as relações entre o pensamento aritmético e o algébrico tendem a associar o pensamento algébrico ao uso de letras, o que é inadequado. Para ele, o pensamento algébrico não está relacionado ao uso de letras, mas sim, a determinadas maneiras de raciocinar. Para esse autor o que distingue, do ponto de vista epistemológico, o pensamento aritmético do algébrico é que, nesse último, quantidades indeterminadas são concebidas de maneira analítica, isto é, como se elas fossem conhecidas, e efetuamos cálculos com elas da mesma maneira que fazemos com números. E, apesar de, usualmente, a indeterminação ser expressa através de letras, existem outras maneiras para expressá-la. Ou seja, do ponto de vista semiótico, existem diferentes maneiras de pensar e expressar indeterminação, o que pode ser feito utilizando outros signos (diagramas, desenhos etc.) além dos alfanuméricos, característicos do simbolismo algébrico moderno convencional.

Para Radford (2011), a indeterminação e a analiticidade podem adquirir várias formas, porque o pensamento algébrico pode operar em diferentes níveis de generalidade, os quais podem ser diferenciados em termos dos signos a que os estudantes recorrem ao pensar algebricamente. A generalização de padrões tem sido muito utilizada para introdução da álgebra para os estudantes, mas a falta de distinção clara entre os pensamentos algébrico e aritmético pode trazer alguns equívocos. De acordo com esse pesquisador, o pensamento algébrico não é de maneira alguma algo "natural", algo que surgirá e se desenvolverá uma vez que os alunos adquiram amadurecimento suficiente. Para ele, o pensamento algébrico é um tipo cultural de reflexão e ação muito sofisticado, um modo de pensar que foi sendo refinado durante séculos até chegar à forma atual.

Lins e Kaput (2004) afirmam que definir álgebra é difícil, pois depende de muitos fatores culturais, mas concordam quanto a duas características fundamentais do pensamento algébrico. Primeiramente, ele envolve atos de generalização deliberada e expressão de generalidade. Em segundo lugar, envolve o raciocínio baseado nas formas de generalização estruturadas sintaticamente, incluindo ações guiadas sintática e semanticamente. Segundo esses autores, essa caracterização tão ampla permite a discussão sobre formas do pensamento algébrico apropriadas para as crianças pequenas e as condições necessárias para promovê-las. Enfatizam que o objetivo da algebrização nos anos iniciais, segundo essa concepção, é promover o desenvolvimento de um pensamento flexível, articulado e eficaz, com ênfase na generalidade, que é um aspecto central do pensamento matemático, e não simplesmente melhorar o desempenho dos alunos na manipulação algébrica.

Blanton e Kaput (2011) focalizam o pensamento funcional como um caminho para a construção, nos currículos, da generalidade, segundo uma concepção que incorpora a construção e generalização de padrões e relações, utilizando diversas ferramentas linguísticas e representacionais e tratando as relações generalizadas ou as funções resultantes, como objetos matemáticos úteis por si mesmos. Segundo esses autores, o conteúdo aritmético dos anos iniciais de escolarização pode ser estendido, criando oportunidades para a construção de padrões, conjecturando, generalizando e justificando relações matemáticas. Essa seria a maneira de inserir a matemática nos tipos de normas sociomatemáticas, que permitem às crianças a construção da generalidade matemática.

Kieran (2011), ao fazer uma síntese geral do conteúdo presente no livro “Early Algebraization” (CAI, KNUT, 2011) conclui que os autores dos capítulos desse livro defendem que a ênfase do trabalho com a álgebra na Escola Básica não deve ser sobre os símbolos literais, mas sim sobre as maneiras de pensar. Os processos que constituem essas maneiras de pensar incluem, entre outros, generalizar, antecipar, conjecturar, justificar e expressar linguisticamente.

Kieran (2004b, 2007), baseando-se na ideia de álgebra como atividade, desenvolveu um modelo que sintetiza as atividades da álgebra escolar em três tipos ou níveis: geracional (*generational*), transformacional (*transformational*) e metaglobal (*global-metal level*). De forma resumida, as atividades geracionais são aquelas que envolvem a formação de expressões e equações, que são objetos da álgebra. Aí estariam incluídas as equações contendo uma incógnita, expressões de generalidade que surgem dos padrões geométricos ou das sequências numéricas, assim como as expressões das regras que regem as relações numéricas. As atividades transformacionais incluem, por exemplo, fatoração, adição e multiplicação de polinômios, simplificação de expressões, resolução de equações e inequações etc.. A maior parte desse tipo de atividade diz respeito à mudança na forma de uma expressão ou equação, de modo a manter a equivalência entre elas. As atividades no nível metaglobal são aquelas nas quais a álgebra é utilizada como ferramenta, mas não em um contexto especificamente algébrico. Segundo Kieran (2007), elas são do nível metaglobal porque sugerem o envolvimento em processos matemáticos mais globais, ao mesmo tempo que propõem o engajamento em atividades do tipo geracional e/ou transformacional. Essas atividades incluem resolução de problemas, modelagem, trabalho com padrões generalizáveis, justificativas e provas, elaboração de previsões e conjecturas, busca de relações estruturais etc.. De acordo com sua concepção de atividade do nível metaglobal, Kieran (2004a) conceitua pensamento algébrico nos anos iniciais como aquele que se realiza dentro de atividades para as quais a álgebra simbólica literal poderia ser utilizada como uma ferramenta, mas que não são necessariamente exclusivas da álgebra. Essas atividades podem ser desenvolvidas sem a linguagem algébrica, tais como, analisar relações entre quantidades, perceber estrutura, estudar mudança, generalizar, resolver problema, modelar, justificar, provar e fazer previsões.

As concepções de álgebra, de pensamento algébrico e de atividade algébrica apresentadas destacam a generalização, a expressão da generalização e o processo de justificação como características da álgebra escolar e da matemática em geral.

Stylianides e Ball (2008) afirmam que a literatura sugere três importantes elementos do conhecimento sobre demonstrações para o ensino, relativos a dois aspectos inter-relacionados da demonstração: suas estruturas lógica e linguística.

O primeiro elemento é a habilidade de compreender que o desenvolvimento de demonstrações representa um conhecimento matemático, que é utilizado por uma comunidade particular, para comunicar e justificar suas afirmativas para os outros membros dessa comunidade. As componentes desse corpo de conhecimento estão relacionadas aos três requisitos necessários para uma demonstração, a saber: “conjunto de afirmações aceitáveis (definições, axiomas etc.), modos de argumentação (uso de regras lógicas de inferências, construção de contraexemplos etc.) e modos de representação da argumentação (pictórico, simbólico etc.).” (STYLIANIDES e BALL, 2008, p. 310).

O segundo elemento se refere à habilidade de utilizar e compreender o papel da linguagem matemática nas demonstrações. Nesse caso, o elemento do conhecimento sobre a linguagem matemática está relacionado a duas componentes da argumentação que estão presentes na definição dada de demonstração: conjunto de afirmações aceitáveis e modos de representação da argumentação.

O terceiro elemento diz respeito à habilidade de compreender e distinguir entre as formas de argumentação empírica e dedutiva. Martin e Harel (1989) ponderam que

> a principal fonte de experiência das crianças com verificação e demonstração é o professor da escola. A compreensão dos professores da escola básica sobre o que constitui uma demonstração matemática é importante, apesar de eles não ensinarem esse tópico diretamente. (MARTIN, W. G.; HAREL. G, 1989, p. 41).

Esse elemento está relacionado à componente da argumentação denominada modos de argumentação. De acordo com a definição utilizada, os argumentos empíricos não podem ser aceitos como demonstrações porque utilizam maneiras inválidas de argumentação, permitindo que afirmativas matemáticas sejam aceitas com base em evidências incompletas. Martin e Harel (1989) afirmam que pessoas com experiência limitada em matemática aceitam que um argumento indutivo (como a apresentação de exemplos) possa ser uma demonstração matemática. Esse ponto de vista pode ser reforçado pelo ensino, principalmente nas séries iniciais, em que é frequente o uso de exemplos para verificar a veracidade de afirmações matemáticas. Mas isso não precisa ocorrer necessariamente dessa maneira, e as pesquisadoras Russel, Schifter e Bastable (2011), mostram como, a partir da análise de casos particulares, é possível construir formas de argumentação que podem ser estendidas para modelar e justificar afirmações gerais, como detalharemos na próxima seção.

À luz das pesquisas sobre ensino e aprendizagem de álgebra, aqui discutidas, analisaremos a construção/desenvolvimento do pensamento algébrico e a concepção de álgebra que emerge dos dados coletados, tendo em vista a identificação de elementos constituintes do conhecimento matemático específico do professor, no trabalho com a álgebra.

A seguir, apresentamos a introdução da álgebra na turma do 8º ano, através de generalizações de relações numéricas, da maneira como foi discutida pelo professor Wagner e pelos alunos.

3.2 Ensino e aprendizagem de álgebra na turma do 8º ano

A observação das aulas nessa turma ocorreu no período de 04 de abril a 09 de agosto de 2012. Parte significativa das aulas nessa turma envolveu a realização de atividades em grupo, pelos alunos, e a utilização de procedimentos padronizados na resolução de exercícios e a discussão, feita posteriormente pelo professor com os alunos, das soluções encontradas.

Assim, neste estudo, os dados analisados foram retirados da primeira aula, que foi considerada representativa da prática desse professor e permitia a identificação de questões presentes nas pesquisas sobre ensino e aprendizagem escolar de álgebra. A escolha da data de início das filmagens foi definida de comum acordo com o professor, porque, segundo ele, esse seria o dia em que ele começaria a trabalhar especificamente com o conteúdo de álgebra do 8º ano: expressões algébricas e equações e sistemas de equações de 1º grau: resoluções algébricas.

3.2.1 O que é Álgebra?

No dia 03 de abril, imediatamente anterior ao início das filmagens, havia ido à sala de aula para prestar os esclarecimentos necessários sobre a pesquisa, que seria realizada na turma, e solicitar a autorização dos alunos e de seus pais para participação na investigação.

As atividades realizadas nessa aula, conforme anotações no diário de campo, estavam relacionadas às operações com números reais e os exercícios propostos envolviam números irracionais e potências. Um dos exercícios resolvidos em sala pelos alunos solicitava a aplicação das propriedades operatórias para escrever de maneira mais simples algumas expressões como: $a.(b+1)-a$; $a^5.a \div a^4$. Ou seja, os alunos tinham tido contato com a notação algébrica na aula anterior e também com equações do primeiro grau desde o 7º ano e, portanto, o assunto não era desconhecido para eles.

O professor Wagner utilizava muito o livro didático adotado na escola, “Matemática na Medida Certa” (CENTURIÓN, JAKUBOVIC, 2011a) e, usualmente, a introdução dos temas era feita pela leitura do capítulo por um dos alunos da turma. O capítulo se chama “Álgebra: usando variáveis” e tem início com Expressões algébricas. Logo na introdução do capítulo, surge a pergunta: O que é álgebra?

1. Professor: Bem, página 62... Nós vamos começar hoje o estudo de álgebra... O que nós vamos fazer? Nós vamos fazer a [leitura] do livro. Se for preciso a gente completa o que falta no livro, tá joia? Página 62. Por que a gente faz a leitura do livro? Gente... É necessário a gente aprender a ler matemática, porque se amanhã, Manuella, você precisar estudar sozinha, você já sabe aonde você vai procurar o que você quer, está joia? Então vamos lá... Começa. Você lê para a gente, Mariana?
2. Mariana: “**O que é Álgebra?** A Matemática é uma criação do pensamento humano. Uma de suas características é a linguagem, que é universal, porque pode ser entendida em qualquer

parte do mundo. Por exemplo, qualquer criança entende a sentença $2 + 3 = 5$, seja na Índia, em Cuba ou na Austrália."

3. Algum aluno: [inaudível].
4. Professor: Continua.
5. Mariana: "A Matemática tem várias ramificações, como a aritmética, que estuda os números e as operações, e a geometria, que estuda o espaço e as formas. Agora vamos iniciar o estudo de uma parte da Matemática que, em sua linguagem, faz uso de letras no lugar dos números: a álgebra. Usar letras no lugar de números parece esquisito e você pode perguntar por que se faz isso. Bem, uma parte da resposta você vai conhecer neste capítulo."
6. Professor: Vamos parar aqui. Mariana, o que você entendeu daí?
7. Mariana: Que a álgebra ... ela vai usar letras [inaudível] números.
8. Professor: Que vai usar letras em vez de números...Na verdade ...
9. Aluno: Vai usar letra e o número.
10. Professor: Ela vai usar letras e números. Mas na verdade ela vai usar letras para representar números... O que seria isso? Vamos pensar o seguinte... É... Se vocês observarem determinados fenômenos... Ontem por exemplo...

Logo no primeiro parágrafo do capítulo, a linguagem é apresentada como uma característica primordial da Matemática e a álgebra como a parte da Matemática que utiliza *letras* no lugar de números. Há, a nosso ver, uma valorização da linguagem em detrimento da formação do pensamento matemático, reduzindo o papel da álgebra ao estudo sintático da linguagem. Nessa perspectiva, o trabalho com a álgebra fica centrado na aprendizagem das regras para o uso das letras, nas simplificações, fatorações, resolução de equações etc.. Além disso, desconsidera-se a experiência anterior dos alunos com atividades algébricas, como se fosse essa a primeira vez que a álgebra aparece para os alunos. Há também uma ênfase na linguagem matemática como forma universal e sem ambiguidades.

Na aula imediatamente anterior ao início da coleta de dados, no dia 03 de abril, o último exercício (CENTURIÓN, JAKUBOVIC, 2011a, nº 60, p. 60), resolvido pelos alunos, consistia na pergunta: É verdade que $(\sqrt{10})^{-2} = 0{,}1$? E, como alguns alunos não se lembravam do significado de um número real elevado a um expoente negativo, o professor havia feito uma breve revisão, no dia 03 de abril, do significado das potências, que ele iria relembrar:

11. Professor: Bem... Vamos lá. O que seria isso? Vamos pegar a nossa aula de ontem... Ontem... o quê a gente fez? A gente foi testando... a gente fez assim ... dois elevado a quatro ... 16 ... depois... dois elevado a três ... 8 ... dois elevado a dois ... 4 ... dois elevado a um ... 2 ... dois

elevado a zero ... 1. E depois... dois elevado a menos um... a gente concluiu que seria um meio... não é isso? Por que a gente concluiu que seria um meio? Porque a gente observou que toda hora estava sendo dividido por dois... não foi isso que a gente fez? Isso que nós fizemos em matemática com vocês... a gente não pode considerar aquilo como válido... nós pegamos o quê? Nós pegamos exemplos ... e achamos que... beleza!... como aconteceu com cinco vai acontecer com todo mundo. Não foi isso que a gente pensou? Eu não levei vocês a pensar dessa forma? Na verdade, na matemática a gente tem que aprender algumas coisas... uma delas chama generalizações.O que são generalizações ? O que você falou?

12. Aluno: [inaudível]
13. Professor: Não, não te enganei não. Mas naquele momento era preciso. O que são generalizações? É quando a gente vai pegar alguma coisa e provar que essa alguma coisa é verdade... Então um dos caminhos que a pessoa utiliza aí é a álgebra... Não é trabalhando com números... não é colocando lá o 2 ... oh! ... aconteceu com o 2 ... com o 4 ... com o 6 ... com o 8 ... então vai acontecer com todos os números. A gente tem que aprender o quê?... a pensar algebricamente para ter certeza que aquilo acontece com todos os números, beleza? Então a álgebra agora vai entrar nisso... no lugar dos números nós vamos utilizar letras?Às vezes ... às vezes nós vamos utilizar letras e números. Beleza! Continua para nós então.

Para Radford (1996), a generalização não é uma atividade livre de contexto e os diversos tipos de generalização podem ser muito distintos. O objetivo na generalização de padrões numérico-geométricos é a obtenção de um novo resultado. Dessa forma, a generalização não seria um conceito, mas sim um procedimento ou uma atividade mental que permite a obtenção de novos resultados, dentro de uma teoria e a partir de outros resultados. No excerto (linha 11) vemos um exemplo desta concepção de generalização quando o professor Wagner diz: *"Por que a gente concluiu que seria um meio? Porque a gente observou que toda hora estava sendo dividido por dois... não foi isso que a gente fez?*" Ou seja, o professor chama a atenção dos alunos para a lógica que rege a generalização, isto é, o fato de que, ao diminuir o expoente de 1, a nova potência pode ser vista como a anterior dividida por 2, ou seja, $2^3 = \frac{2^4}{2}$; $2^2 = \frac{2^3}{2}$; $2^1 = \frac{2^2}{2}$; $2^0 = \frac{2^1}{2} = 1$, e consequentemente, $2^{-1} = \frac{2^0}{2} = \frac{1}{2}$. Esse é um exemplo de como se pode trabalhar a construção do pensamento algébrico a partir da aritmética, pois apesar de não se utilizarem letras, fica explícita a relação que permite a obtenção do termo seguinte a partir do anterior.

No entanto, o professor aparenta se sentir desconfortável (linha 11) com o processo utilizado por ele para justificar que $2^{-1} = \frac{1}{2}$, a partir de um número finito de exemplos, dizendo que esse tipo de procedimento não é adequado, e introduz pela primeira vez o termo "generalização". Um aluno parece perceber o desconforto do professor dizendo que ele os havia enganado (linha 12), o professor diz que fez isso (linha 13) porque era necessário naquele momento.

Como afirma Vinner (1991), a definição poderia criar um problema sério na aprendizagem da matemática e representa, talvez mais do que qualquer outra coisa, o conflito entre a estrutura da matemática, conforme concebida pelos matemáticos profissionais, e os processos cognitivos de aquisição dos conceitos. E a maneira como a matemática é apresentada nos livros didáticos do ensino superior, na maioria das vezes, não reflete o seu processo de criação. Usualmente, a apresentação de novos resultados e conceitos é feita partindo de axiomas e noções primitivas, ou de noções e teoremas já conhecidos, através de um processo lógico dedutivo. Segundo Vinner, essa maneira de apresentação da matemática acaba influenciando a concepção do professor sobre como ela deve ser desenvolvida na escola: apresentação da definição, propriedades, resultados etc., o que, na maioria das vezes, não é o procedimento mais adequado, se o que se pretende é a construção dos conceitos pelos alunos.

No caso em questão, o processo desenvolvido pelo professor para justificar $2^{-1} = \frac{1}{2}$ é legítimo, mesmo segundo os pressupostos da matemática acadêmica, estando de acordo com a definição formal de potência. Uma maneira de definir a^n, em que a é um número real, por recorrência é: para $a \neq 0$, define-se $a^0 = 1$, $a^1 = a$ e $a^k = a \times a^{k-1}$, para $k \geq 2$, e para expoentes negativos definimos $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, para $m \geq 1$. A partir dessa definição, usando indução, é possível demonstrar as propriedades usuais de potências. A estratégia utilizada pelo professor foi de estender a definição para expoentes negativos, mostrando que a notação preserva a definição, por recorrência, de potência para expoentes positivos, isto é, se definimos $a^k = a \times a^{k-1}$, para expoentes positivos, então temos que $a^{k-1} = \frac{a^k}{a}$, o que deve ser preservado para expoentes negativos. O mais importante na extensão da definição de potências para expoentes negativos é preservar algumas propriedades que já eram válidas para os expoentes positivos. Caraça (1975), no livro Conceitos Fundamentais da Matemática, apresenta o que ele denomina Princípio de Economia, segundo o qual "convém que as novas definições sejam dadas de modo tal que as leis formais das operações lhes sejam aplicáveis" (CARAÇA, 1975, p. 27). Ou seja, trata-se de uma questão de conveniência, e a argumentação apresentada pelo professor enfatiza exatamente isso.

Radford (1996) complementa sua visão sobre generalização dizendo que, no contexto de extensão de resultados, a característica mais importante do processo de generalização é a sua natureza lógica, que torna possível a conclusão obtida. E diz que o procedimento lógico de obtenção do resultado depende da maturidade matemática do aluno. Para alguns alunos, a apresentação de poucos exemplos pode ser suficiente para justificar a generalização obtida. Para outros, a descoberta do termo geral a partir de termos iniciais de uma sequência é suficiente para justificar a conclusão. Para outros alunos ainda, o resultado obtido é válido, se ao testá-lo para um termo de ordem muito grande, verifica-se a sua validade. É possível identificar um saber do professor Wagner sobre as maneiras como os alunos usualmente obtêm generalizações, a partir de um número qualquer de casos, quando ele diz que é necessário ter cuidado com esse tipo de procedimento.

Radford (1996) se pergunta se é necessário provar uma afirmativa quando ela aparenta ser óbvia e também quem decide sobre a sua validade. Segundo esse autor, a generalização como um instrumento didático não pode evitar a questão da validação dos resultados obtidos. Não é que a generalização não seja uma ponte útil para a álgebra, mas o professor deve estar preparado para trabalhar com esse outro elemento que é a lógica na sala de aula, diferenciando os argumentos que são válidos dos que não o são, e mesmo se são necessários ou não.

Como podemos ver (linha 13), a concepção de generalização do professor está intrinsecamente relacionada à possibilidade de demonstração formal do resultado obtido, e a álgebra é apresentada como um caminho para demonstrar a veracidade do resultado. O professor apresenta como justificativa para a aprendizagem da álgebra a certeza de que determinado resultado vai acontecer sempre. Entretanto, no caso em foco, não há o que ser provado, já que não se demonstra uma definição.

Um aluno continua a ler o texto:

14. Aluno: "**Letras e generalizações**. Você sabe que a adição de quaisquer números reais é comutativa. Há muitos exemplos desse fato: $2+\sqrt{5}=\sqrt{5}+2$; $-\pi+0{,}25=0{,}25+(-\pi)$; $3+4=4+3$. Entretanto, mesmo com um milhão de exemplos, não teríamos apresentado essa propriedade para todos os números reais. Mas há uma maneira bem simples de apresentá-la para todos os números reais de uma só vez. É só escrever: Se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são números reais, então $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$. Usando letras, podemos escrever **generalizações**, isto é, fatos que valem para todos os números de certo conjunto. Nesses casos, as letras são chamadas de **variáveis**. Quando representam números reais, são chamadas de **variáveis reais**".

(...)

19. Professor: Quem conseguiu entender alguma coisa e podia tentar explicar para a gente? Fala, Isabel, balançou a cabecinha ... Vão lá. O que você entendeu do que está escrito aí?
20. Isabel: Que a gente pode usar letra ao invés de número para representar [...]
21. Professor: para representar uma determinada situação. Por exemplo, o que ele tentou mostrar para a gente? Uma das coisas que ele tentou mostrar para a gente foi a propriedade ... Qual foi a propriedade?
22. Alunos: Comutativa.

Para os autores do livro didático em tela (linha 14), ao que parece, as letras são utilizadas para escrever generalizações, que seriam fatos válidos para todos os elementos de um conjunto, e a ênfase está no aspecto sintático da álgebra. Para esses autores, a questão da validação não se coloca, uma vez que a veracidade da propriedade comutativa seria um fato aceito pela comunidade da sala de aula, sem necessidade de apresentação de justificativas.

Em suas pesquisas sobre o conhecimento matemático para o ensino, no caso das demonstrações, Stylianides e Ball (2008) utilizam o termo *demonstração* para descrever uma argumentação matemática no contexto de uma comunidade de uma sala de aula em um determinado momento, que preencha três requisitos:

- utiliza afirmações, aceitas pela comunidade da sala de aula, que são verdadeiras e disponíveis sem necessidade de apresentação de justificativas, que formam o *conjunto de afirmações aceitáveis*;
- emprega formas de raciocínio que são válidas e conhecidas ou dentro do alcance conceitual da comunidade da sala de aula, denominadas *modos de argumentação;*
- é passível de ser comunicada por formas de expressão que são próprias e conhecidas ou dentro do alcance conceitual da comunidade, denominadas *modos de representação da argumentação.*

Portanto, para que uma argumentação seja considerada como uma demonstração, ela tem que satisfazer essas três condições. Essa definição (de demonstração) segundo os autores, "procura alcançar um equilíbrio defensável entre duas (muitas vezes contraditórias) considerações: *matemática como disciplina* e *alunos como aprendizes de matemática*.[16]" (STYLIANIDES e BALL, 2008, p. 309). De acordo com essa conceituação de demonstração, a propriedade comutativa, nesse momento, faria parte do *conjunto de afirmações aceitáveis.*

[16] No original em inglês: "seeks to achieve a defensible balance between two (often competing) considerations: *mathematics as a discipline* and *students as mathematical learners.*"

23. Professor: Comutativa. [O professor vai ao quadro para explicar o que foi dito no livro e escreve a propriedade comutativa]. Se a e b pertencem aos reais [escreve $a, b \in R$]. Ele [o livro] primeiro começou com alguns exemplos que são exemplos numéricos, não é isso? Dois mais três é igual a três mais dois, raiz de cinco mais um é igual a um mais raiz de cinco. Ele mesmo fala no texto que ... "Eu poderia fazer com um milhão de números, mas eu teria que ter certeza que vale para qualquer número e que em nenhum momento vai ter nenhuma falha." Aí ele trabalha com números reais. Se a e b pertencem aos reais, ou seja, quem é o a para mim? Quem que ele está indicando que é o a ? ...
24. Aluno: Um elemento.
25. Professor: Um elemento de onde?
26. Aluno: Um elemento dos números naturais.
27. Professor: Um elemento dos números ...?
28. Alunos (em coro): Um elemento dos números reais.
29. Professor: Um elemento dos números reais. Então a é um número real qualquer. Que a é esse? É qualquer número... O número que você conseguir imaginar vai ser ele. E b também é um número real. Ótimo... Se a é um número real e b é um número real ... então aí ele está falando o seguinte ... a mais b é igual a b mais a. [O professor escreve no quadro: $a + b = b + a$]. Será que isso é verdade?
30. Alunos (em coro): É.

Nas linhas acima (23 a 29), mais uma vez está presente o papel sintático da álgebra como linguagem para expressar uma generalização. Segundo Usiskin (1995), "**as finalidades da álgebra** são determinadas por, ou relacionam-se com, **concepções** diferentes **da álgebra** que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos **usos das variáveis**" (USISKIN, 1995, p.13, negritos no original). Nesse caso, as variáveis podem ser pensadas como generalizadoras de modelos, pois as igualdades $2 + \sqrt{5} = \sqrt{5} + 2$; $-\pi + 0{,}25 = 0{,}25 + (-\pi)$; $3 + 4 = 4 + 3$, nas quais a ordem das parcelas não altera a soma, são generalizadas escrevendo-se $a + b = b + a$, e o autor denomina essa concepção de álgebra por aritmética generalizada. O professor Wagner enfatiza a linguagem de conjuntos (pertence) e mostra um cuidado em explicitar o conjunto que está sendo considerado (o conjunto dos números reais). A linguagem algébrica é utilizada para expressar uma propriedade na linguagem matemática simbólica. Aí o professor introduz a necessidade de argumentação para garantir a veracidade da propriedade.

31. Professor: Mas como é que eu poderia provar que isso é verdade? O que eu posso fazer para garantir que isso aqui é verdade?
32. Aluno: [inaudível] ... três mais cinco é igual a oito.
33. Professor: Mas aí você não está generalizando. Você tem que chegar a essa conclusão. Você já está pensando em números. Quando eu quero chegar a uma conclusão, eu tenho que usar uma coisa que seja verdade, tipo é ... Eu vou dar um exemplo numérico... Eu não peguei aquele exemplo ... $\sqrt{16} + \sqrt{9} = \sqrt{25}$. Mas aí, no final, se eu calcular as raízes separadas não deu $3 + 4 = 5$? Então eu concluí que é falso, não é? Por quê? Porque deu uma igualdade falsa. Eu quero conseguir chegar numa igualdade verdadeira, para eu tentar mostrar que isso aqui é verdadeiro... Pode falar, Gabriel.
34. Gabriel: [inaudível] o a e o b valem $\frac{1}{2}$. Do lado esquerdo tem um a, do lado direito tem um b ... é ... [inaudível] as letras têm o mesmo valor ...

Podemos ver (linhas 32 e 34) exemplos de argumentação de dois alunos para justificar a comutatividade da adição. Apesar de, aparentemente, ambos estarem utilizando a existência de alguns exemplos para justificar a validade da generalização, o procedimento do aluno Gabriel é um pouquinho mais geral do que aquele utilizado pelo outro aluno. Apesar de, inicialmente, tomar a e b iguais a $\frac{1}{2}$, ao dizer que as letras têm o mesmo valor, ele esboça um argumento que permitiria a demonstração para um número infinito de casos, apesar de claramente não ser suficiente para abranger todos os casos. Isto indica que há uma diferença na maturidade matemática desses alunos, mas o professor não aceita nenhuma das formas de argumentação apresentadas, e introduz exemplos de formas de argumentação que ele julga aceitáveis. Há uma grande preocupação do professor em mostrar que o uso de exemplos para verificar a veracidade de uma afirmação não é aceitável. No entanto, o professor não argumenta explicitamente quanto ao porquê de a apresentação de exemplos numéricos pelos alunos (linhas 32 e 34) não ser suficiente para justificar o resultado, enquanto que o exemplo numérico dado pelo professor foi suficiente para provar que a afirmativa era falsa (linha 33).

A construção de um contraexemplo, feita na aula anterior, para justificar que a adição de raízes quadradas de dois números não é igual à raiz quadrada da soma desses dois números é um *modo de argumentação* de natureza lógica diferente da demonstração de uma propriedade dos números reais, como é o caso da comutatividade da adição, no mínimo porque o *modo de representação da argumentação* no primeiro caso reside no campo da aritmética, bastando mostrar que os resultados das operações são distintos. Em síntese, para demonstrar que uma afirmativa não é válida para todos os números reais, basta dar um exemplo numérico, enquanto que a existência de um grande número de exemplos não é suficiente para provar um resultado sobre os números reais.

O diálogo acima entre o professor e os alunos sobre formas de argumentação aceitáveis apresenta um exemplo do conhecimento específico do professor no caso de demonstrações. Ele pode ser visto como *conhecimento do conteúdo e do ensino*, pois combina o conhecimento sobre o ensinar (escolha de formas de demonstração acessíveis a essa comunidade escolar) e conhecimento sobre matemática (em particular, a estrutura lógico-linguística de demonstrações em Matemática).

35. Professor: Aí as letras têm o mesmo valor. Aí nós não estamos nos apegando ao conhecimento aritmético que a gente tem, não? Eu quero que a gente tente sair um pouco desse conhecimento aritmético. Será que se a gente não fizesse assim não seria o início do caminho? Eu tenho que provar que esse lado [apontando $a + b$] é igual a esse [apontando $b + a$], não é isso? Se eu fizer isso aqui? Passa esse a (apontando para o a que está à direita do sinal de igualdade) para cá, e passa esse b (apontando para o b que está à esquerda do sinal de igualdade?) para lá ... [escrevendo no quadro: $a + b = b + a \quad a - a = b - b$]. Quanto que é a menos a ?
36. Aluno: É a.
37. Professor: É a?
38. Outro aluno: É zero.
39. Professor: É a ou é zero?
40. Alunos (em coro): É zero.
41. Professor: Aí eu vou chegar que zero é igual a zero? [E escreve no quadro $0 = 0$]. Zero é igual a zero?
42. Alunos (em coro): É.
43. Aluno (voz ao fundo): É zero a.
44. Professor: Mas zero a é zero...., ou seja, eu chego à conclusão que zero é igual a zero? Isso aqui [apontando a igualdade $0 = 0$] é uma verdade? Então se isso aqui é uma verdade [apontando para $0 = 0$] então eu posso concluir que a de cima [apontando $a + b = b + a$] é uma verdade. É um início que a gente tá vendo .... Aí, vocês podem falar ... Mas é tão óbvio. Eu também acho. É óbvio para a gente hoje.

No livro texto (linha 14) a álgebra está sendo utilizada como aritmética generalizada e as variáveis são utilizadas para generalizar modelos (USISKIN, 1995). O que se pretende é escrever que a adição de números reais é sempre comutativa e as letras a e b são utilizadas para designar números reais quaisquer. A igualdade $a + b = b + a$ generaliza as igualdades

$2 + 3 = 3 = 2$ e $\sqrt{5} + 1 = 1 + \sqrt{5}$. Como, para o professor, a generalização está intrinsecamente relacionada à possibilidade de demonstração utilizando álgebra (linha 13), ele passa a apresentar argumentos para justificar a propriedade comutativa.

Ferrini-Mundi e colegas (2005) afirmam que o conhecimento de álgebra para o ensino envolve conhecimento sobre a natureza da matemática, o que inclui conhecimento sobre formas de argumentação e justificação usadas em matemática e o nível de rigor que é apropriado para a comunidade formada pela sala de aula. Há uma grande distância entre a argumentação formal presente nos cursos de formação de professores e outras formas de argumentação propícias ao desenvolvimento dos conteúdos no contexto da Escola Básica. Talvez a distância entre os tipos de argumentação na matemática acadêmica e na matemática escolar possibilite a utilização pelo professor, em sua prática, de argumentos inaceitáveis do ponto de vista formal, sem que ele se dê conta.

No excerto apresentado anteriormente, observa-se o processo abreviado utilizado pelo professor para provar a comutatividade da adição, em que ele não escreve todos os passos necessários para chegar à conclusão desejada, dizendo apenas o que se deve fazer. Dessa forma, a utilização da comutatividade da adição para provar que ela é comutativa não aparece explicitamente (linha 35): o professor diz que deve "passar" o a de um lado para outro e o b também, escrevendo no quadro: $a + b = b + a$ e depois $a - a = b - b$. Na medida em que ele não detalha a escrita matemática de todos os passos para chegar à ultima expressão, não fica explícito que para "passar" o a para o outro lado foi necessário somar $(-a)$ à direita a ambos os lados da equação, o que acarretaria $(a + b) - a = (b + a) - a$, e pela propriedade associativa, chegaria à igualdade $(a + b) - a = b$, e não seria possível cancelar o a que está no primeiro membro da igualdade.

Observa-se, além disso, que do ponto de vista de conhecimento do conteúdo sobre demonstrações, o *modo de argumentação* apresentado pelo professor não é adequado: o procedimento "partir da afirmativa que se pretende demonstrar e chegar a uma afirmativa que se sabe verdadeira" não garante que a afirmativa que se pretendia provar seja verdadeira. Esse procedimento só está correto se as afirmativas intermediárias forem equivalentes umas às outras, e esse tipo de conhecimento faz parte, de acordo com os domínios propostos por Ball e sua equipe, do *conhecimento comum do conteúdo*.

O tipo de argumentação utilizado pelo professor nesse episódio reflete, a nosso ver, a prática corrente na Escola Básica, com ênfase no transformismo algébrico, isto é, a partir de uma expressão algébrica e mediante a utilização de regras e propriedades válidas, obtêm-se outras expressões equivalentes umas às outras. Entretanto, o que se pretende, no ensino da Escola Básica, é que os alunos compreendam o significado e o comportamento das operações aritméticas, o que pode ser feito através de outro tipo de argumentação, que não a demonstração formal dos resultados, como discutiremos na próxima seção.

Em sua tese de doutorado, Moreira (2004) apresenta um episódio ocorrido com um formando da licenciatura diurna do Curso de Matemática da UFMG que tem alguns pontos em comum com esse apresentado acima. A questão 3 de um questionário aplicado aos alunos foi “Como você justificaria o fato de que o produto de números reais é comutativo? Em outras palavras, por que se pode acreditar que $ab = ba$ para quaisquer dois números reais a e b?” (p. 155). Na tentativa de apresentar uma justificativa formal, o formando expôs o seguinte argumento:

$$a \times b = c \Rightarrow a \times \frac{1}{b} \times b = \frac{1}{b} \times c \Rightarrow a \times 1 = \frac{c}{b} \Rightarrow a = \frac{c}{b} \Rightarrow b \times a = b \times \frac{c}{b} \Rightarrow b \times a = c.$$

Neste episódio, o aluno considera que a justificativa deve ser rigorosa, e, ao tentar demonstrar a comutatividade do produto de números reais, também faz uso do transformismo algébrico e parece não estar consciente da utilização da propriedade comutativa, que pretende demonstrar, ao inserir $\frac{1}{b}$ entre os fatores a e b.

Nas tentativas de demonstrar a propriedade comutativa da adição e da multiplicação, tanto o professor Wagner quanto o formando do curso de licenciatura da UFMG utilizaram, sem se dar conta, a propriedade que desejavam demonstrar. Além disso, a afirmativa do livro didático “mesmo com um milhão de exemplos, não teríamos apresentado (grifo nosso) essa propriedade para todos os números reais” foi interpretada, pelo professor Wagner, como “Ele mesmo fala no texto que ... Eu poderia fazer com um milhão de números, mas eu teria que ter certeza que vale para qualquer número e que em nenhum momento vai ter nenhuma falha” (linha 23). E, no caso do formando da UFMG, à pergunta do questionário “por que se pode acreditar que $ab = ba$ para quaisquer dois números reais a e b?” o aluno apresenta o que acredita ser uma demonstração formal. Em ambos os casos, o papel da demonstração formal, segundo o desenvolvimento lógico dedutivo, está associado fortemente aos modos de argumentação que legitimam as afirmações feitas sobre as propriedades das operações.

O professor Wagner diz que generalizar é provar que alguma coisa é verdadeira e que um dos caminhos para provar é utilizando álgebra (linha 13), reforçando o papel da álgebra como linguagem matemática. Diversos pesquisadores, entre eles Radford, Kieran, Lins e Kaput, enfatizam que o pensamento algébrico inclui generalizar, justificar, validar, expressar a generalidade. No entanto, os processos de validação dos resultados obtidos devem incluir outras formas de argumentação, além do desenvolvimento lógico formal, que levem em conta o contexto da sala de aula da Escola Básica. E a definição de demonstração, conforme proposta por Stylianides e Ball (2008), preserva princípios da matemática como disciplina e considera a aprendizagem da matemática pelos estudantes como o ponto fundamental.

Na próxima seção apresentaremos diferentes formas de argumentação para a propriedade comutativa da adição, segundo a matemática acadêmica e a matemática escolar.

3.2.2 A comutatividade da adição, na matemática acadêmica e na matemática escolar

Nos anos iniciais de escolarização, associamos um número natural à quantidade de elementos de um conjunto finito e associamos a operação de adição de números naturais a situações que envolvem ações de reunir, juntar ou acrescentar. E a operação de adicionar é feita considerando a quantidade de objetos de cada um dos conjuntos (disjuntos) que estão sendo reunidos. Sabe-se que a união de dois conjuntos é comutativa, ou seja, tanto faz acrescentar aos elementos de um conjunto A os elementos de um conjunto B ou aos elementos do conjunto B acrescentar os elementos do conjunto A, ou utilizando a linguagem de conjuntos, $A \cup B = B \cup A$. Dessa forma, se a denota a quantidade de elementos do conjunto A, e b a quantidade de elementos do conjunto B, então, conclui-se que $a + b = b + a$, isto é, a adição de números naturais é comutativa. Essa abordagem é utilizada, por exemplo, em livros para formação de professores dos anos iniciais (CENTURIÓN, 1995), se bem que de forma mais detalhada e com vários exemplos envolvendo conjuntos com poucos elementos. E, a partir de experimentos envolvendo conjuntos específicos, os alunos dos anos iniciais de escolarização podem perceber que a mudança na ordem dos números em uma adição não altera a soma. Como esse tipo de atividade pode levar os alunos à generalização dessa propriedade?

Russel, Schifter e Bastable (2011) realizaram uma pesquisa, em conjunto com professores do ensino básico, sobre a maneira como os alunos realizam generalizações sobre o comportamento das operações e relatam um experimento realizado para explorar a propriedade comutativa da adição. Os alunos utilizam dois conjuntos de cubos, juntando os dois conjuntos, trocando suas posições e investigando a quantidade de cubos presentes nos diferentes casos. Ao tomar a regularidade, presente nos exemplos, como foco explícito de investigação, o professor leva os alunos a pensar em termos de generalização, solicitando que eles pensem se, ao mudar a ordem das parcelas, a soma continua a mesma somente para casos particulares, ou se o resultado é sempre válido, e pedindo que justifiquem o que acham. Os alunos concluem que a soma seria sempre a mesma, porque nada estava sendo retirado ou adicionado. Esse modo de argumentação está dentro do alcance conceitual dessa comunidade, e, a partir daí, a comutatividade da adição passa a ser uma afirmação aceita por todos, sem necessidade de apresentação de nenhum outro tipo de justificativa.

Nas séries finais do Ensino Fundamental, usualmente, um número real positivo é associado à medida de um segmento e, dessa forma, dados dois segmentos de medidas a e b, a soma $a + b$ pode ser definida como a medida do segmento obtido pela justaposição dos segmentos de medidas a e b. Como a medida do segmento obtido pela justaposição dos segmentos de medidas a e b independe da ordem em que eles são justapostos (primeiro o de medida a e depois o de medida b, ou primeiro o de medida b e depois o de medida a), é fácil ver que a adição é comutativa. No caso geral, associam-se os números reais às abscissas dos pontos de uma reta orientada, com origem O, de tal modo que pontos à esquerda da origem estão associados aos números negativos e os à direita aos números positivos. Ou seja, se um ponto está à esquerda da origem, sua abscissa é a medida do segmento que o liga à origem com o sinal negativo. Lima, Carvalho, Wagner e Morgado afirmam que "a interpretação dos números reais como abscissas dos pontos de uma reta fornece uma visão intuitiva bastante esclarecedora sobre a soma $x + y$ e a relação de ordem $x < y$, com $x, y \in R$" (LIMA et al., 1996, p.57). A soma de números reais pode ser interpretada como uma translação do segmento que representa o primeiro número de um comprimento igual ao comprimento do segmento que representa o segundo número real, no sentido positivo ou negativo da reta, conforme o segundo número seja positivo ou negativo. Neste caso, a justificativa geométrica da comutatividade da adição não é mais tão evidente como no caso de números reais positivos.

Portanto, uma pergunta que se coloca é: como a demonstração da comutatividade da adição de números reais, por exemplo, pode ser apresentada na Escola Básica? Poderia ser apresentada de acordo com a matemática acadêmica? Ou ainda, como esse tema é abordado nas recomendações oficiais para a formação de professores de matemática no Brasil?

O Parecer CNE/CNS nº 1302 (BRASIL, 2001), sobre as Diretrizes Curriculares para os cursos de Licenciatura em Matemática, estabelece, de maneira genérica, que todos esses cursos devem contemplar conteúdos de Fundamentos de Álgebra e conteúdos de álgebra presentes na Educação Básica. Já o documento "A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM"[17], publicado em fevereiro de 2013, apresenta uma reflexão sobre dezessete temas que considera essenciais para a formação do futuro professor de matemática. No que diz respeito à aritmética e álgebra, a proposta é que esses conteúdos, presentes na Educação Básica, sejam aprofundados, sendo fundamental o ensino das estruturas algébricas nos cursos de Matemática, tanto na licenciatura como no bacharelado. E entre as temáticas consideradas consta que seria interessante desenvolver, entre outros temas, o conjunto dos números naturais, incluindo os axiomas de Peano, múltiplos e divisores etc.. De acordo com esse documento, "Ao trabalhar com os axiomas de Peano resgatamos a essência do conjunto dos números naturais ..." (SBEM, 2013, p. 24).

Vejamos como poderíamos provar, por exemplo, a comutatividade da adição, a partir dos axiomas de Peano, conforme enunciados no livro Fundamentos de Aritmética de Hygino H. Domingues (1991, p. 80):

P_1: Zero é um número natural.

P_2: Se a é um número natural, então a tem um único sucessor que também é um número natural.

P_3: Zero não é sucessor de nenhum número natural.

P_4:Dois números naturais que têm sucessores iguais são, eles próprios,iguais.

P_5: Se uma coleção S de números naturais contém o zero, e também, o sucessor de todo elemento de S, então S é o conjunto de todos os números naturais.

Utilizando o símbolo 0 para indicar o zero, a letra N para indicar o conjunto dos números naturais e, denotando o sucessor de a por a^+, os axiomas de Peano podem ser reescritos como (p. 81):

P_1: $0 \in N$.

P_2: $a \in N \Rightarrow a^+ \in N$.

P_3: $(\forall a)(a \in N \Rightarrow a^+ \neq 0)$.

P_4: $a^+ = b^+ \Rightarrow a = b$.

P_5: Se $S \subset N$ e (i) $0 \in S$ (ii) $a \in S \Rightarrow a^+ \in S$, então $S = N$.

A adição de números naturais é então definida (p. 82) como uma operação em N, de acordo com as seguintes condições:

1) $a + 0 = a$.

2) $a + b^+ = (a + b)^+$.

[17] Boletim da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, nº 2, fevereiro de 2013.

Denotando por 1 o sucessor de 0, por 2 o sucessor de 1, por 3 o sucessor de 2 etc. , obtemos a sucessão dos números naturais e, pela definição de adição, pode-se demonstrar, utilizando os axiomas anteriores, que qualquer que seja o número natural n, o seu sucessor é o número natural $n + 1$.

A partir dessas definições e dos axiomas, é possível deduzir logicamente as propriedades da adição, tais como:

A_1: Associatividade: $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall\, a, b, c \in N$.

A_2 : O zero é o elemento neutro da adição: $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in N$.

A_3 : Comutatividade: $a + b = b + a,\ \forall a, b \in N$.

A demonstração da associatividade pode ser feita, por exemplo, utilizando indução (propriedade P_5) sobre c.

A seguir, vamos mostrar que o zero é o elemento neutro da adição, a partir das definições e dos axiomas listados. Para isso, falta mostrar que $0 + a = a, \forall a \in N$, o que pode ser feito por indução em a:

Se $a = 0$ então $0 + 0 = 0$, pela condição 1). Supondo que $0 + a = a$, para um determinado a, temos pela condição 2) que $0 + a^+ = (0 + a)^+$. Como, pela hipótese de indução, $0 + a = a$, obtemos $0 + a^+ = (0 + a)^+ = a^+$. Pelo axioma P_5, podemos concluir que a propriedade A_2 vale para todo número natural a.

Utilizando indução em a, é possível provar também que $0^+ + a = a + 0^+, \forall a \in N$.

A demonstração da comutatividade da adição pode ser feita por indução em b, da seguinte maneira:

Se $b = 0$ então $a + 0 = 0 + a$, conforme demonstrado anteriormente. Supondo que $a + b = b + a$, para um determinado b, devemos provar que $a + b^+ = b^+ + a$. Mas, $a + b^+ = a + (b + 0)^+ = a + (b + 0^+) = (a + b) + 0^+ = (b + a) + 0^+ =$ $b + (a + 0^+) = b + (0^+ + a) = (b + 0^+) + a = b^+ + a$. Pelo axioma P_5 , concluímos que a adição é comutativa.

Como mostramos acima, para demonstrar a propriedade comutativa, a partir dos axiomas de Peano, utilizamos, entre outros resultados, a propriedade associativa diversas vezes, a existência do elemento neutro, além do princípio de indução (axioma P_5).

O Parecer CNE/CNS nº 1302 (BRASIL, 2001) estabelece que todos os cursos de licenciatura em Matemática devem contemplar conteúdos de Fundamentos de Análise e também conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica na área de Análise. O documento da SBEM/SBM sobre a formação de professores de matemática propõe, no tema

Noções de Análise para a Licenciatura, que seja feita a construção dos números reais usando classes de equivalência, sequências de Cauchy ou cortes de Dedekind. E na parte relativa à álgebra e aritmética, propõe a construção dos números inteiros e a construção dos números racionais.

Utilizando classes de equivalência, é possível fazer a construção lógico-formal do conjunto dos números inteiros a partir do conjunto dos números naturais, e a comutatividade da adição de inteiros segue da comutatividade da adição de números naturais. O mesmo ocorre no conjunto dos números racionais, construído como uma extensão dos inteiros, utilizando classes de equivalência. O conjunto dos números reais pode ser construído como uma extensão do conjunto dos números racionais, utilizando-se cortes de Dedekind ou classes de equivalência de intervalos racionais encaixantes, por exemplo, e é possível demonstrar a comutatividade da adição de números reais a partir de sua validade no conjunto dos racionais. Portanto, de acordo com o documento elaborado pela comissão paritária SBEM/SBM, a formação dos professores de matemática deveria incluir a construção formal dos números naturais a partir dos axiomas de Peano, dos inteiros a partir dos naturais, dos racionais a partir dos inteiros e, finalmente, a construção do conjunto dos números reais, a partir dos racionais.

O conteúdo de Álgebra Linear também faz parte dos conteúdos recomendados, tanto nas Diretrizes Curriculares para os cursos de licenciatura em matemática, quanto no documento elaborado pela comissão paritária SBEM/SBM. E uma preocupação da matemática acadêmica é que um conjunto de axiomas deve ser mínimo, ou seja, que cada axioma não é consequência dos demais, não podendo ser obtido dos outros através de um processo dedutivo. Um espaço vetorial V sobre um corpo K é um conjunto no qual estão definidas duas operações: a adição, que a cada par de vetores $u, v \in V$ associa o vetor $u + v \in V$, e a multiplicação por escalar, que a cada escalar $\alpha \in K$ e a cada vetor $v \in V$, associa o vetor αv, chamado o produto de α e v. Essas operações devem satisfazer os axiomas de espaço vetorial:

1) $u + v = v + u, \ \forall\, u, v \in V$;
2) $(u + v) + w = u + (v + w), \ \ \forall\, u, v, w \in V$;
3) $\exists\ 0 \in V$, chamado vetor nulo, tal que $0 + v = v + 0 = v$, $\forall v \in V$;
4) Para cada $v \in V$, existe um vetor $-v \ \in V$, tal que $(-v) + v = v + (-v) = 0$;
5) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v), \ \forall \alpha, \ \beta \in K$ e $v \in V$;
6) $\exists\ 1 \in K$, tal que $1v = v$, $\forall v \in V$;
7) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall \alpha \in K, \ \forall u, v \in V$.

8) $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v\ , \forall\alpha,\beta\in K\ , \forall v\in V$;

Um exercício, usualmente proposto em livros de Álgebra Linear (HOWARD, RORRES, 2001, p.162), consiste em demonstrar que esse conjunto de oito axiomas não é independente, porque o axioma da comutatividade da adição pode ser deduzido dos demais. Para isso, basta considerar o produto $(1+1)(u+v)$:

$$(1+1)(u+v)=1(u+v)+1(u+v)=(1u+1v)+(1u+1v)=(u+v)+(u+v),$$

$$(1+1)(u+v)=(1+1)u+(1+1)v=(1u+1u)+(1v+1v)=(u+u)+(v+v).$$

Portanto:

$$(u+v)+(u+v)=(u+u)+(v+v);$$

somando $-u$ à esquerda de ambos os membros, obtemos:

$$v+(u+v)=u+(v+v);$$

e somando $-v$ à direita de ambos os membros, chegamos ao resultado desejado.

Como o conjunto dos números reais com as operações usuais de adição e multiplicação é um espaço vetorial sobre o corpo dos números racionais, é possível demonstrar a comutatividade da adição a partir dos outros axiomas. No entanto, foi necessária a utilização da propriedade distributiva, que, a meu ver, é menos evidente do que a propriedade comutativa da adição, do ponto de vista de uma argumentação intuitiva para o ensino na Escola Básica.

Na apresentação lógica dos resultados válidos sobre espaços vetoriais, a propriedade $0u=0$ é um item de um teorema, que deve ser demonstrado a partir dos axiomas que definem um espaço vetorial.

Na aula analisada, esse ponto foi levantado por um aluno, quando o professor perguntou aos alunos o valor da expressão $a-a$ (linha 35). Um aluno disse que era a; outro disse que era zero e outro disse ainda que era "zero a" (linha 43). Por fim, o professor respondeu (linha 44) que "zero a é zero" e prosseguiu na sua explanação. Esse resultado faz parte, na visão do professor, do *conjunto de afirmações aceitáveis* nessa comunidade da sala de aula e, portanto, sem necessidade de apresentação de justificativas. No entanto, no caso da comutatividade da adição, ele achou necessário apresentar uma prova ou justificativa.

A seleção do que pode ser aceito como verdadeiro sem necessidade de demonstração e do que deve ser demonstrado é um conhecimento que é específico para o ensino, fazendo parte dos domínios *conhecimento do conteúdo e dos alunos* e *conhecimento do conteúdo e do ensino*. E, como parece claro pela exposição que acaba de ser feita, nem sempre o desenvolvimento lógico-formal dos conteúdos, conforme proposto para os cursos de formação de professores, é adequado para o ensino na Escola Básica. Dessa forma, a *matemática acadêmica* pode entrar em conflito com a *matemática escolar*, uma vez que as formas de argumentação podem partir de pressupostos diferentes, razão pela qual Stylianides e Ball (2008) propõem uma definição de demonstração de acordo com o contexto da sala de aula da Escola Básica (conferir comentários sobre essa definição na página 53 deste trabalho).

No caso da comutatividade da adição, então, o que parece mais adequado para a Escola Básica seria usar a intuição até onde for possível, como nos casos exemplificados, e a partir daí considerá-la como uma *afirmação aceitável*, sem necessidade de justificativa.

3.2.3 Expressões algébricas para os números pares e ímpares

Na aula do dia 04 de abril, após a discussão inicial sobre álgebra, generalização e a propriedade comutativa da adição, o professor solicita a uma aluna que continue a leitura do livro didático, que dá exemplo de uma fórmula.

53. Aluna: "**Letras e fórmulas**. Uma fórmula matemática é uma igualdade com variáveis. Exemplo 2: Na Matemática e no dia a dia são úteis fórmulas para calcular áreas e volumes. Uma fórmula bem conhecida é a da área de um trapézio como o da ilustração - ilustração de um trapézio com base menor b, base maior B, altura h e ao lado da figura a fórmula $\boldsymbol{A = \frac{(b+B).h}{2}}$ - As variáveis são **A**, que indica a área, **b**, que indica o comprimento do menor lado paralelo, **B**, que indica o comprimento do maior lado paralelo e **h**, que indica o comprimento do segmento perpendicular que une os lados paralelos. Essas variáveis indicam números reais positivos. Se, em um terreno com forma de trapézio, tem-se b=12, B=15, h=20, dados em metros, a área, em metros quadrados, será: $A = \frac{(12+15).20}{2} = 270$. Ou seja, a área do terreno é 270 m^2".
54. Professor: Bem, vamos lá. Então, ele começa falando o quê? Que uma fórmula matemática ...
55. Aluno: é uma igualdade com variáveis.
56. Professor: É uma igualdade com variáveis. O que é isso? Cada letra, cada incógnita aí... cada letrinha que é chamada de incógnita ou de variável... [inaudível] Incógnita por quê? Incógnita porque você tem que descobrir, e variável porque naquele momento ele assume um papel de um número, e que ele pode ser modificado. Por exemplo, vamos imaginar isso aqui, por exemplo –aponta para um quadrado desenhado no quadro - ... Isso aqui é um quadrado. Qual a área desse quadrado aqui? Qual seria? Vamos imaginar que aquela área, então... Um lado é l. A área seria então... l^2... Beleza... [O professor escreve no quadro $A = l^2$]. Qual é o perímetro desta figura? O que é perímetro?

O livro didático apresenta uma definição de fórmula (linha 53), que, no contexto da sala de aula do ensino básico, não apresenta uma contribuição significativa para o processo de aquisição de conhecimento pelos alunos, reforçando a influência da matemática acadêmica na apresentação das definições nos livros didáticos. Além disso, não é a primeira vez que os alunos estão vendo uma fórmula matemática; mesmo na coleção adotada pela escola, as fórmulas já aparecem desde o 6º ano. O que caracteriza uma fórmula não é a presença de variáveis e do sinal de igualdade. A expressão $x^2 + x^2 = 2x^2$ é uma igualdade envolvendo variáveis, mas não é uma fórmula. O mais importante é o significado do sinal de "=" e das variáveis. De acordo com a categorização de Usiskin (1995), nesse caso, a álgebra é concebida como o estudo de relações entre grandezas (no exemplo dado, as grandezas são A, b, B e h), que pode ser visto como um tipo especial de generalização, mas uma questão crucial nessa concepção é que as letras são variáveis, elas representam valores que variam. Para esse autor, essa concepção é fundamentalmente diferente da concepção de álgebra como estudo de procedimentos para resolver problemas que envolvem a resolução de equações, em que letras representam incógnitas. Ribeiro (2012) apresenta outra categorização dos diferentes significados de equação que, analisada segundo o modelo teórico proposto por Ball, indica, segundo o autor, potencialidades que a abordagem dos diferentes significados de equação pode propiciar para a constituição do conhecimento matemático para o ensino de equações. Diferentemente do que o professor diz (linha 56), nesse caso as letras presentes na fórmula não representam incógnitas. O professor apresenta outra fórmula, já conhecida pelos alunos, da área de um quadrado em função do lado. Quando pergunta qual é o perímetro de um quadrado de lado l, uma aluna responde:

57. Professor: Bem ... [inaudível] O que é que nós temos ali? Qual que seria o perímetro? Perímetro é o quê mesmo?
58. Aluna: É usado como contorno.
59. Professor: Quanto mede esse contorno?
60. Aluna: l^4.
61. Professor: l^4. Você falou que o perímetro é l^4. [O professor escreve no quadro $P = l^4$]. O que significa l^4?
62. Aluna: vezes 4.
63. Professor: O que significa? Então vamos voltar à pergunta. O que significa para você 3^2?
64. Aluna: [inaudível]
65. Professor: 3 vezes 3. O que significa l^4? $l \times l \times l \times l$. Qual é o perímetro aqui? $l \times l \times l \times l$?

66. Aluna: Não. É....
67. Professor: O perímetro é o quê? .... É o contorno.
68. Aluno: $4l$.
69. Professor: $l + l + l + l$. Que é o quê? [se dirigindo ao aluno que havia dito $4l$]. $4l$. [Professor corrige a fórmula que está no quadro escrevendo $P = 4l$].

...

77. Professor: Mais um l? Então, você não concorda que o perímetro é $4l$? [Professor escreve no quadro $P = 4l$] ... O perímetro é $4l$ para o quê? Para quê que o perímetro é $4l$?
78. Aluno: Quadrado.
79. Professor: Para esse quadrado ou para qualquer quadrado?
80. Alunos: Para esse quadrado. Só para esse. [inaudível].
81. Professor: Só para esse?
82. Aluno: Só esse [inaudível]
83. Outro aluno: Para todos....
84. Professor: Por que pra todos?
85. Aluno: Porque os lados são sempre iguais.
86. Professor: Porque os lados são sempre iguais. O l ali pra mim está representando apenas um número qualquer. Que número é aquele que ele está representando ali?
87. Aluno: Qualquer número real.
88. Professor: Qualquer número que seja real. Então esse l para mim representa uma variável.

Alguns alunos apresentam dificuldades com a notação algébrica (linhas 61 e 62) e o professor dá um exemplo numérico (linha 63) para explicar a notação de potência. Quando um aluno não dá a resposta correta (linhas 80, 82), o professor usualmente repete a pergunta (linha 81) até que alguém dê a resposta correta (linha 83) e a partir dessa resposta o professor justifica o resultado. Ele finaliza a explicação reforçando que, nesse caso, a letra é uma variável (linha 86). Ele, então, apresenta as fórmulas da área e do perímetro de um retângulo em função de seus lados.

Em seguida, o professor solicita a um aluno que continue a leitura do livro didático:

165. Hudson: [continuando a leitura na página 63, logo após o exemplo da fórmula da área do trapézio]. "**Vocabulário**. As expressões que apresentam uma ou mais variáveis e também as expressões que só têm números são chamadas de **expressões algébricas**. Nas expressões algébricas, costuma-se omitir o sinal de multiplicação. Por exemplo, $2x + 3y$ indica $2.x + 3.y$. Substituindo as variáveis de uma expressão algébrica por números e efetuando os

cálculos, obtemos o **valor numérico** da expressão. Por exemplo, o **valor numérico** da expressão $\frac{(b+B).h}{2}$ para $b = 12$, $B = 15$ e $h = 20$ é 270 ”.

166. Professor: Não vira a página. Primeiro ele falou das expressões algébricas ... O que são expressões algébricas, Hudson?
167. Aluno: [silêncio] ... uma ou mais variáveis.
168. Professor: São expressões que têm uma ou mais variáveis. Por exemplo, se eu pegar isso aqui [desenhando um retângulo no quadro]. Nós não falamos da área do retângulo ... a, b? [denotando por a e b os lados do retângulo no quadro]. [inaudível] Qual o perímetro desse retângulo?
169. Alunos: $2a + 2b$.
170. Professor: $2a + 2b$ [escrevendo no quadro]. Então... ou seja, a e b nós chamamos de quê? Variáveis. Agora, na hora que eu analiso isso tudo aqui [apontado para $2a + 2b$], eu vou chamar de quê? Expressões Algébricas. Numa expressão você tem letras e números.
171. Aluno: [inaudível]
172. Professor: Se fosse só número? Também. [vários alunos falando ao mesmo tempo].
173. Professor: Dois ou mais. Pode ter um apenas. $2a$ é uma expressão algébrica ... Não deixa de ser... Agora, quando ele fala, por exemplo, qual o valor numérico dessa expressão? O valor numérico é quanto? Eu vou atribuir valores para as minhas variáveis, por exemplo, imagine que eu fale que $a = 3$ e $b = 2$. Se $a = 3$ e $b = 2$, qual seria o valor dessa minha expressão algébrica?
174. Aluno: 9...
175. Professor: Quanto?
176. Aluno: $9 + 4$.

O livro apresenta a definição de expressões algébricas e valor numérico de uma expressão (linha 165), mas o fato de afirmar que uma expressão numérica também é uma expressão algébrica parece causar certo estranhamento entre os alunos, o que pode ser inferido pela resposta do professor (linha 172). Não é a primeira vez que os alunos têm contato com expressões algébricas, no entanto, quase não há referências no capítulo a essa experiência anterior dos alunos. Os assuntos são tratados seguindo um desenvolvimento lógico, a partir da apresentação das definições, mostrando a influência dos valores da matemática acadêmica na estruturação do livro. Na entrevista realizada com o professor Wagner, ele disse que, de maneira geral, não gostava das atividades e dos exercícios propostos no livro adotado (a escolha da coleção foi feita antes de seu ingresso na escola), pois ele tem muitas questões mecânicas, é tecnicista e, apesar de introduzir os assuntos com problemas, não se pode dizer que o livro utiliza a metodologia de Resolução de Problemas. Mas, apesar disso, ele achava importante utilizar o livro em sala de aula, para que os alunos aprendessem a ler o livro e adquirissem autonomia para resolver suas dúvidas. Apesar de o professor não concordar com a proposta do livro adotado, provavelmente a maneira como a matemática é apresentada no texto acaba influenciando a prática do professor, principalmente porque ele utiliza muito o livro em sala. O reflexo na prática do professor, da forma como as concepções e os conceitos são apresentados e desenvolvidos no livro, não foi objeto desta pesquisa, mas mereceria um aprofundamento em pesquisas futuras.

O parágrafo lido pelo aluno Hudson finaliza a primeira seção (Expressões Algébricas), do capítulo 4 (Álgebra: usando variáveis) do livro. Antes de os alunos começarem a fazer os exercícios, o professor decide retomar a construção de algumas expressões algébricas:

207. Professor: [inaudível] Agora vamos pensar o seguinte. Agora vamos mudar a pergunta. Imagina que uma lapiseira ... um lápis custa 90 centavos. Um lápis custa 90 centavos. Quanto você paga por dois lápis?
208. Alunos: Um e oitenta.
209. Professor: Por três?
210. Alunos: Dois e setenta.
211. Professor: Por quatro?
212. Alunos: [silêncio].
213. Professor: Três e ...?
214. Alunos: Sessenta.
215. Professor: Três e sessenta. Se cada um custa noventa centavos, se eu comprar dez lápis, eu vou pagar quanto?
216. Aluno: Oito reais.
217. Alunos: Nove reais.
218. Professor: Nove reais. E se eu comprar muitos lápis? Quanto que eu vou pagar?
219. Aluno: Depende de quantos lápis.
220. Professor: Eu comprei *x* lápis.
221. Aluno: Vai pagar *x* vezes ...
222. Professor: *x* vezes ...?
223. Aluno: *x* vezes ... noventa centavos.
224. Professor: *x* vezes ... noventa centavos. Porque eu vou pagar *x* vezes ... noventa?
225. Alunos: [muitos falando ao mesmo tempo]
226. Professor: Porque eu não sei a quantidade. Opa! Dez falando já [inaudível] muito cheio. Fala.

227. Aluna: Agora já esqueci. [inaudível]

228. Professor: Ou seja, eu peguei a quantidade, que é x, e multipliquei pelo ...

229. Aluno: Preço.

230. Professor: Beleza. Então, ou seja ... aí então nós vamos aprender a generalizar essas situações, tá joia? Bem, vamos fazer o seguinte, tem um tempo agora. Peguem os exercícios, do 1 ao 8. Vamos fechar esses. Vão ver que eles são simples ... Antes de vocês continuarem, deixa-me fazer uma pergunta: qual é o antecessor de 3?

231. Alunos: 2.

232. Professor: E o de 10?

233. Alunos: 9.

234. Professor: Qual é o antecessor de x?

235. Aluno: $-x$.

236. Professor: $-x$ é o antecessor?

237. Alunos: [silêncio].

238. Aluna: x menos ...

239. Aluno: $x - 1$.

240. Professor: x menos ... ? menos 1. E o triplo de x ?

241. Aluna: x menos 3.

242. Professor: Triplo?

243. Aluno: $3x$.

O professor diz o preço de um lápis e os alunos vão respondendo o total gasto na compra de 1, 2, 3, 4 e 10 lápis, fazendo cálculos aritméticos. Na tentativa de generalizar esse procedimento, o professor pergunta o total gasto na compra de muitos lápis (linha 218), e um aluno responde, corretamente, que depende da quantidade de lápis a ser comprada (linha 219). O professor, então, introduz a variável x, explicitando que comprou x lápis, os alunos dão a resposta esperada, mas nesse momento a expressão algébrica não é escrita no quadro. Em seguida, o professor pergunta quais são os antecessores de alguns números (linhas 230 e 232) e os alunos respondem corretamente, indicando que, pelo menos, parte deles compreende o significado de antecessor. Quando Wagner pergunta qual é o antecessor de x, um aluno diz que é $-x$, o professor pergunta se é $-x$, os alunos ficam em silêncio, até que um aluno responde que é $x - 1$, e o professor reafirma que é $x - 1$. Em seguida, ele pergunta para a turma qual é o triplo de x, uma aluna responde que é $x - 3$. O professor pergunta outra vez: triplo? Outro aluno responde que é $3x$, o professor reafirma que é $3x$. Claramente, os alunos apresentam dificuldade em representar por uma expressão algébrica o antecessor de um número qualquer. No caso do triplo de x, não é possível dizer se a dificuldade dos alunos é com o significado de triplo ou com a representação no caso genérico, uma vez que o professor não solicitou que eles dessem o triplo de alguns números específicos. O diálogo entre o professor e os alunos é bastante rápido, talvez porque esses conceitos já tenham sido trabalhados anteriormente na sala de aula. O professor passa, então, a fazer perguntas sobre números pares:

244. Professor: $3x$. Triplo. $3x$. Representa para mim um número par. Como é que é todo número par? Não é 2, 4, 6, 8? Se eu quero generalizar um número par?
245. Aluno: É...
246. Aluno: Múltiplo de 2.
247. Professor: Múltiplo de 2. Ótimo! E aí?
248. Aluno: x vezes 2.
249. Professor: x vezes 2, 2 vezes x [escreve no quadro $2x$]. Isso aqui representa para mim um número? Par. Porque todo número par tem que ser múltiplo de quem?
250. Alunos: 2.

Na discussão, o professor apresenta uma sequência finita de números pares (linha 244), um aluno caracteriza número par como múltiplo de 2, e logo após, outro aluno chega à expressão esperada pelo professor (linha 248). De acordo com a classificação de Usiskin (1995), a álgebra está sendo utilizada como aritmética generalizada e as variáveis são utilizadas para generalizar modelos. O professor inicia, então, a discussão sobre a expressão algébrica dos números ímpares:

251. Professor: ... E agora, se eu quero representar um número ímpar?
252. Aluno: Múltiplo de 1.
253. Professor: Múltiplo de 1?
254. Alunos: Não. Não.
255. Aluna: Múltiplo de 3 ...
256. Professor: De 3? 6 é múltiplo de 3? É. Mas não é ímpar. Se eu quero representar um número ímpar como é que eu posso fazer? ... Olha só, se eu colocar qualquer número... cinco [apontando para a expressão $2x$], que número que vai dar aqui?
257. Alunos: 10.
258. Professor: 10. É par?
259. Alunos: É.
260. Professor: Se eu chamar o x de 3? Vai dar quanto?

261. Alunos: 6.
262. Professor: É par?
263. Alunos: É.
264. Professor: Se eu chamar o x de 7? Vai dar quanto?
265. Alunos: 14.
266. Professor: É par?
267. Alunos: É.

Como a fórmula para os números pares foi obtida, diretamente, do fato de eles serem múltiplos de 2, os alunos tentam obter a fórmula dos números ímpares, trocando "ser múltiplo de 2" por ser múltiplo de outro número (linhas 252, 255), e o professor refuta esse argumento, apresentando um contraexemplo (linha 256). E, como nesse nível de ensino, o número ímpar pode ser caracterizado como aquele que não é par, a obtenção da fórmula para expressar os números ímpares não é tão imediata:

268. Professor: Agora eu quero que vocês consigam representar para mim um número ímpar.
269. Aluno: 2 ... mais ... 1 vezes x.
270. Professor: 2 ... mais ...1 vezes x, assim? [escreve no quadro $2 + 1.x$].
271. Outro aluno: Vai ficar $3x$.
272. Professor: Olha só, se eu chamar o x de 1, isso aqui vai dar 4, não é ímpar. [não sei qual a conta que o professor fez]
273. Aluno: 2 vezes 1 mais x.
274. Professor: 2 vezes 1 mais x? Assim? [referindo-se a $2 + 1.x$]
275. Aluno: Com a propriedade distributiva.
276. Professor: Com a propriedade distributiva. Assim? [escreve $2(1 + x)$] Chama o x de 1? 1 mais 1? 2 ... 2 vezes 2? 4. Eu quero que você consiga representar para mim um número ímpar.
277. Aluno: Difícil, professor.
278. Professor: Não, é muito simples.
279. Alunos: [vários alunos falando ao mesmo tempo].
280. Professor: [se dirigindo a um aluno]. Repete de novo ... fala de novo.
281. Aluno: [inaudível]
282. Professor: mas como é que eu vou representar um número ímpar?
283. Aluno:[inaudível]
284. Professor: vezes 0,5... 0,5 vezes quanto?
285. Aluno: 0,5 vezes x.

286. Professor: Então 0,5 vezes x. Chama o x de 4. Quanto que é 0,5 vezes 4? 2. Deu par. Eu tenho que conseguir representar de uma maneira ... que eu vou generalizar todos os números ímpares, beleza?

287. Alunos: [inaudível]

288. Professor: Bem, beleza? Eu não vou responder não. Depois a gente responde isso. Vocês vão pensar nisso. Eu consegui representar aqui um número o quê?

289. Alunos: Par.

290. Professor: Par. Esse é par, eu tenho certeza. Oh, x. Se eu chamar x de qualquer número pertencente aos naturais [escreve $x \in N$], chamar de $1, 2, 3, 4$ sempre vai dar um resultado o quê?

291. Alunos: Par.

292. Professor: Par. E se eu quero que sempre dê um resultado ímpar?

293. Aluno: Multiplicar por 3.

294. Professor: Você falou $3x$, chama o x de 2, quanto vai dar esse resultado?

295. Alunos: 6.

296. Professor: É par, não é ímpar. Eu quero conseguir representar um número ímpar.

297. Alunos: [vários alunos falando ao mesmo tempo].

298. Professor: Você tem que generalizar o quê? Qualquer número que eu colocar lá, vai ter que dar ímpar.

299. Aluno: E se o x for 3?

300. Professor: Aqui? [apontando para $2x$]

301. Aluno: [inaudível]

302. Professor: vai ter que dar ímpar. Aí deu par para um e deu ímpar para outro. Não. Eu quero que sempre dê ímpar.

303. Aluno: $3x + 1$.

304. Professor: $3x + 1$?

305. Outro aluno: $4x$.

306. Professor: $3x + 1$. Chama o x de 3. Vê se deu certo: 3 vezes 3?

307. Alunos: 9.

308. Professor: Mais 1?

309. Alunos: 10.

310. Professor: Agora olha só. Chama de 2 ... 3 vezes 2? ... 6 Mais 1? ... 7. Ou seja, para o 2 deu certo, mas para o 3 não deu. Você está assim ... foi o que chegou mais perto até agora. Eu quero representar um número ímpar. Eu já ia nem responder ... mas agora [inaudível]. Ímpar. Aquele ali é o quê? $2x$ é o quê?

311. Alunos: Par.

312. Aluno: $2x + 1$.

313. Professor: $2x + 1$. Esse número sempre vai ser um número ímpar. Sabe por que ele vai ser sempre um número ímpar?

314. Aluno: [inaudível] par mais 1 é sempre ímpar.

315. Professor: Esse número [apontando para $2x$] vai ser sempre par, mais 1, sempre eu vou ter o quê? Ímpar. Legal. Boa. Detalhe, você chegou nisso rápido, por quê? Por causa do ... $3x + 1$. Por isso que eu falo com vocês que é importante todo mundo dar sua contribuição... Aí ele falou algo, não era a resposta correta, mas, através da resposta dele, agora ... Quando você faz um trabalho em grupo, você pensa assim ... eu não vou falar não, porque fulano sabe mais do que eu. Não. Às vezes é o que você sabe, mesmo que não seja aquilo certo, é através daquilo ali que nós vamos para a frente.... Todo número aqui é o quê? Pode chamar x de qualquer número ... quando eu chamar x de qualquer número, esse número [apontando para $2x$] vai dar sempre o quê? Par. Aí na hora que eu somar 1 ele vai dar sempre o quê? Ímpar. Beleza? Então vamos pegar aí. Vamos trabalhar um pouquinho. Do [exercício] 1 ao 8, para eu não ficar só falando.

Diferentemente do que foi feito com os números pares, não houve a tentativa de discutir propriedades comuns dos números ímpares, para tentar obter a generalização da sua expressão algébrica. Ao que parece, os alunos já haviam visto a expressão para os números ímpares e se esforçam para relembrá-la. Alguns alunos tentam combinar os termos da fórmula $(1,2,x)$ mas não conseguem agrupá-los corretamente, um diz $2 + 1.x$ (linha 269); outro diz $2(1 + x)$ (linha 273) . Alguns alunos ainda tentam escrever a expressão utilizando múltiplos: $0{,}5x$ (linha 286); novamente $3x$ (linha 293) e $4x$ (linha 305). Um aluno diz $3x + 1$ (linha 303) e pouco tempo depois, outro aluno diz a expressão correta (linha 312). Nesse caso, não podemos dizer que a expressão para os números ímpares foi obtida por um processo de generalização. O que ocorre é que os alunos apresentam algumas expressões algébricas, e há um processo de argumentação para decidir se elas representam os números ímpares. No caso de expressões que não representam os números ímpares, o professor utiliza contraexemplos, e no caso da expressão correta, além do professor, um aluno argumenta que a soma de um número par e 1 é sempre ímpar (linha 314). Vale a pena ressaltar como o professor valoriza a participação dos alunos na aula, dizendo que muitas vezes, a partir de uma resposta, mesmo que incorreta, pode-se chegar à conclusão correta, e é muito forte o processo coletivo de construção da expressão algébrica para os números ímpares. Do ponto de vista da argumentação, o procedimento do professor é diferente daquele utilizado para provar a comutatividade da adição. Após obter a expressão algébrica para os números pares, ela passa a fazer parte do conjunto das afirmações aceitáveis, assim como o resultado da soma de qualquer número par com 1, concluindo que todo número da forma $2n + 1$ é impar.

3.3 Conhecimento matemático específico para o ensino: pensamento algébrico na escola e na formação de professores

É importante ressaltar que o objetivo desta pesquisa foi trazer à luz, a partir do contexto da sala de aula, elementos do conhecimento matemático específico para o trabalho com álgebra na Escola Básica. Reconhecemos que, entre outros fatores, a formação dos professores, tal como se dá atualmente no Brasil, ao lado da organização curricular da escolarização básica e a própria cultura escolar favorecem a fragmentação do ensino de matemática na escola. Assim, o ensino da aritmética e da álgebra não são desenvolvidos de forma integrada e a obrigação de cumprir o programa, que paira sobre o professor, dificulta a retomada das discussões, em níveis mais refinados, relativas a aspectos trabalhados em anos anteriores.

Durante o acompanhamento da prática do professor Wagner, diversas questões referidas em pesquisas sobre ensino e aprendizagem escolar de álgebra emergiram e foram apontadas no decorrer da análise apresentada neste capítulo. A título de síntese, destacamos os seguintes elementos do conhecimento matemático específico do professor para o trabalho com álgebra da Educação Básica:

1. Um conjunto de situações didáticas “reais” (i.e. de sala de aula escolar) que demandam do professor o reconhecimento de diferentes fontes de desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da aritmética, entre elas, a generalização de formas de expressão de relações numéricas e a produção de justificativas de validade dessas relações;
2. Um conjunto de situações de sala de aula que demandam do professor uma percepção do processo de generalização (de natureza algébrica) como procedimentos e ações mentais que visam a expansão do campo de validade de um determinado conceito, procedimento, resultado etc., e/ou criação de novos objetos, procedimentos, estruturas, resultados etc., a partir de outros já conhecidos;
3. Um conjunto de situações de sala de aula que demandam do professor o conhecimento e a produção de formas de argumentação (referidas à validação do processo e procedimentos algébricos) que sejam legítimas e adequadas ao contexto e à cultura escolar;

4. Um conjunto de situações de sala de aula que demandam do professor o reconhecimento dos diferentes significados das letras na álgebra e do sentido de utilização delas nas expressões, equações, funções, fórmulas etc.;
5. Um conjunto de situações de sala de aula que demandam do professor a análise do papel das definições e da organização lógica do conhecimento matemático escolar, tendo em vista a promoção da aprendizagem segundo as necessidades e limitações correspondentes aos diversos estágios do processo de educação escolar.

A seguir, situamos brevemente alguns desses elementos em relação à literatura pertinente. O livro editado por Cai e Knuth (2011) apresenta o estado da arte das pesquisas sobre a introdução da álgebra nos anos iniciais. No capítulo em que comenta esse livro, Kieran resume as tendências das pesquisas em torno de sete temas:

- Pensar sobre o geral no particular;
- Pensar sobre padrões;
- Pensar relacionalmente sobre quantidades, números e operações numéricas;
- Pensar representacionalmente sobre as relações em situações-problema;
- Pensar conceitualmente sobre o procedimental;
- Antecipar, conjecturar e justificar;
- Gesticular, visualizar e falar (KIERAN, 2011, p. 581).

Diversos desses temas surgiram nas situações de sala de aula observada, mais especificamente o pensamento sobre o geral no particular, pensar sobre padrões, assim como antecipar, elaborar conjecturas e justificá-las. Isso confirma a pertinência dos resultados da análise feita neste capítulo.

As situações didáticas que sugeriram o processo de obtenção das potências com expoentes inteiros a partir das potências com expoentes positivos, como desenvolvido pelo professor Wagner, envolve o pensar sobre padrões e também o pensar relacionalmente sobre números e operações numéricas. Nesse caso, o professor chama a atenção dos alunos para a lógica subjacente ao comportamento das potências com expoentes positivos e que pode ser utilizada para a obtenção da generalização: ao diminuir o expoente de 1, a nova potência pode ser vista como a anterior dividida por 2.

No que diz respeito ao pensamento sobre padrões, Radford (2011) argumenta que o processo de perceber algo comum em uma sequência e conseguir estendê-la para os próximos elementos não significa necessariamente que os alunos estejam pensando algebricamente. No entanto, se eles são capazes de responder perguntas sobre elementos que estejam muito mais longe na sequência, aí o pensamento algébrico estaria presente. Segundo esse autor, é a mudança de algo puramente numérico para a elaboração de uma regra ou um método de cálculo envolvendo quantidades indeterminadas tratadas de maneira analítica que constitui uma generalização algébrica. No exemplo apresentado anteriormente, é possível perceber que o professor fornece elementos para a elaboração da definição e das operações com potências, contemplando o desenvolvimento do pensamento algébrico através de generalizações.

Quanto à questão do processo de elaboração de justificativas e argumentação, observamos, em nossa análise, que o professor Wagner não considerou legítimo o processo de generalização das potências utilizado por ele. Além disso, no caso da propriedade comutativa da adição de números reais, a proposta do livro didático consistia na apresentação da expressão dessa propriedade, a partir da generalização de igualdades numéricas, na linguagem matemática simbólica. No entanto, esse não foi o encaminhamento dado pelo professor. Ele sentiu a necessidade de apresentar uma demonstração formal desse fato, o que, como mostramos anteriormente, não nos parece adequado no contexto da Escola Básica.

Acreditamos que a discussão sobre a validade de propriedades numéricas pode ser inserida no pensar relacionalmente sobre quantidades, números e operações numéricas. Como mencionamos anteriormente, a pesquisa realizada por Russel, Schifter e Bastable (2011) descreve como os alunos podem se beneficiar do estudo explícito das operações examinando os procedimentos de cálculos como objetos matemáticos, que podem ser descritos de modo geral em termos de suas propriedades e comportamentos. Essas pesquisadoras também descrevem a construção de argumentos matemáticos pelos alunos para justificar afirmações gerais sobre classes de números. Elas ressaltam o fato de que, apesar de os alunos não possuírem as ferramentas matemáticas para demonstrações formais, eles utilizam outras formas de argumentação e representação.

A análise da aula do professor Wagner aponta para a necessidade de conhecimento sobre formas de argumentação e demonstração no contexto da sala de aula. Em particular, para a necessidade de desenvolvimento de processos de validação das generalizações obtidas. Para Stylianides e Ball (2008), o conhecimento sobre a estrutura lógica e linguística da demonstração é importante, mas eles argumentam que esse conhecimento não capta adequadamente, "o conhecimento sobre demonstração utilizado pelos professores *em ação,* quando eles mobilizam oportunidades para seus alunos se engajarem em demonstrar."

(STYLIANIDES e BALL, 2008, p. 311). E esses pesquisadores propõem que a argumentação matemática no contexto escolar deve também preencher três requisitos, todos eles dentro do alcance conceitual de uma comunidade de sala de aula: utilizar afirmações aceitáveis (que são verdadeiras), empregar modos de argumentação (formas de raciocínio válidas) e modos de representação da argumentação (formas de expressão).

E, por fim, perguntamos: como o conhecimento sobre o pensamento algébrico, generalizações e formas de argumentação adequadas ao ensino na Escola Básica é abordado nos documentos para a formação de professores de matemática em cursos de licenciatura?

Como dissemos anteriormente, as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Matemática, baseadas no Parecer CNE/CNS nº 1302/2001, indicam que os currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática devem contemplar conteúdos de Álgebra Linear, Fundamentos de Álgebra e conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra. Os Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura, publicados em abril de 2010, indicam que a “atribuição central do Licenciado em Matemática é a docência na Educação Básica, que requer sólidos conhecimentos sobre os fundamentos da matemática, sobre seu desenvolvimento histórico e suas relações com diversas áreas; assim como sobre estratégias para transposição do conhecimento matemático em saber escolar” (BRASIL, 2010, p. 79). Esses documentos não especificam como esses conteúdos devem ser abordados nem se (e como) essa transposição pode ser feita.

Um detalhamento dos conteúdos que devem fazer parte dos currículos para formação de professores de matemática pode ser encontrado no documento “A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM” (SBEM, 2013) publicado pela SBEM em fevereiro de 2013. Segundo esse documento, conforme citado anteriormente, o conhecimento específico na formação do professor de matemática envolve a aprendizagem de “conceitos matemáticos avançados e a ressignificação de conceitos matemáticos elementares, de modo a contemplar tanto uma fundamentação e argumentação matemáticas, quanto sua prática futura” (SBEM, 2013, p. 12). Entre os tópicos considerados fundamentais na abordagem crítica da matemática básica, constam: a modelagem algébrica e geométrica nas resoluções de problemas, o reconhecimento de padrões, o raciocínio indutivo por meio de experiências empíricas de investigação, o estímulo do raciocínio lógico na dedução de passos na resolução de problemas, o pensamento algébrico. Essas são as únicas referências a pensamento algébrico e reconhecimento de padrões. No tema referente à Aritmética e Álgebra, há referência a argumentação e a generalizações que tenham relação direta com a sala de aula, tendo em vista a necessidade de desenvolvimento de processos de fundamentação que permitam o entendimento dos conceitos e não apenas o domínio dos algoritmos e dos procedimentos. Por fim, observa-se no documento publicado pela SBEM, no geral, uma clara assimetria entre os níveis de detalhamento dos conhecimentos (considerados relevantes para a formação do professor) referentes às Estruturas Algébricas/ Álgebra Linear e os que se referem ao trabalho didático pedagógico com a Aritmética e a Álgebra.

4. A ÁLGEBRA E O CONHECIMENTO MATEMÁTICO ESPECÍFICO PARA O ENSINO: EXPRESSÕES E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Neste capítulo, dividido em três seções, apresentamos um estudo sobre o conhecimento matemático específico no ensino das expressões e equações algébricas, a partir da análise das questões surgidas na sala de aula do professor Antônio. Na primeira seção, fazemos uma síntese de algumas questões apontadas na literatura sobre o ensino e aprendizagem das expressões e equações algébricas. Na segunda seção, apresentamos os resultados obtidos ao analisar o material empírico do trabalho de campo da pesquisa, tendo como referência o conhecimento matemático específico do professor. Na terceira seção, apresentamos elementos constituintes do conhecimento matemático específico do professor, em seu trabalho com a álgebra na Escola Básica, que foram identificados ao longo da análise empreendida, relacionando-os com a maneira como são tratados nas recomendações oficiais para a formação de professores no Brasil.

4.1 Introdução

A Comissão Internacional de Ensino de Matemática (International Commission on Mathematical Instruction- ICMI) promoveu, no período de 2000 a 2004, estudo sobre ensino e aprendizagem de matemática – The Future of Teaching and Learning of Algebra- The 12th ICMI Study (STACEY; CHICK; KENDAL, 2004), onde estão presentes reflexões sobre dificuldades cognitivas para a aprendizagem da álgebra. Stacey e Chick (2004) argumentam que essas dificuldades têm diferentes origens, relacionadas ao nível de abstração, à relação problemática e multifacetada com o conhecimento anterior da aritmética, às necessidades de fluência na manipulação simbólica e à necessidade de transposição do pensamento procedimental para o estrutural. Esses temas são abordados por diversos pesquisadores e, por exemplo, no capítulo sobre símbolos e linguagem, Drouhard e Teppo (2004) afirmam que aspectos importantes da escrita simbólica em álgebra são a compacidade e o poder de síntese que ela possui. E que são esses aspectos que permitem movimentar-se com fluência através de diferentes níveis de abstração e comprimir pensamentos matemáticos complexos através da escrita de cadeias simbólicas. Para eles, são exatamente essas características que tornam a escrita simbólica obscura para quem se inicia em álgebra. Além disso, existem ambiguidades presentes no uso dos símbolos, que são muito vantajosas para o especialista, mas extremamente difíceis para o iniciante. Uma das ambiguidades que têm sido estudadas por diversos pesquisadores (GRAY, TALL, 1993; GRAY, TALL, 1994; SFARD, 1991; SFARD, LINCHEVSKI, 1994) é a dualidade processo/objeto presente nos símbolos e que está relacionada ao papel e significado atribuído aos símbolos, trazendo muitas dificuldades para os estudantes no processo de aprendizagem da matemática. Antes de apresentar a maneira como esses pesquisadores explicam essa dualidade é necessário discutir a relação entre conceitos e procedimentos no processo de aquisição de conhecimento.

No caso específico da matemática, a discussão sobre o conhecimento conceitual e procedimental tem sido alvo de muitos estudos (HIEBERT, LEFEVRE, 1986). De acordo com esses autores, o conhecimento conceitual é caracterizado como o conhecimento que é rico em relações, que pode ser pensado como uma teia conectada de conhecimentos, em que as relações de ligação são tão importantes como cada uma das partes que compõem a informação. Já o conhecimento procedimental é, segundo eles, constituído de duas partes. A primeira delas é composta pela linguagem formal, ou pelo sistema de representação simbólica, da matemática. A segunda parte consiste dos algoritmos, regras ou procedimentos utilizados para a resolução de exercícios de matemática. A primeira inclui a familiaridade com os símbolos utilizados para representar as ideias matemáticas e o domínio das regras de sintaxe para a escrita desses símbolos. Em geral, "o conhecimento dos símbolos e da sintaxe matemática implica somente a percepção das características superficiais da linguagem e não necessariamente a compreensão dos significados"[18] (HIEBERT, LEFEVRE, 1986, p.6). A segunda parte inclui instruções que devem ser seguidas passo a passo para que os exercícios sejam resolvidos. Uma característica central dos procedimentos é que eles são executados segundo uma sequência linear pré-determinada e podem ou não ser adquiridos com significado. Hiebert e Lefevre argumentam que o conhecimento matemático inclui relações fundamentais e significativas entre os conhecimentos procedimental e conceitual. Para eles, a vinculação entre os conhecimentos procedimental e conceitual tem muitas vantagens, pois o conhecimento procedimental pode proporcionar uma linguagem formal e sequências de ações que podem aumentar o nível de compreensão e a aplicabilidade do conhecimento conceitual. E o conhecimento procedimental que está baseado no conhecimento conceitual resulta em símbolos que possuem significados e procedimentos que podem ser relembrados e utilizados de maneira mais efetiva.

[18] Tradução livre, do inglês: "knowledge of the symbols and syntax of mathematics implies only an awareness of surface features, not a knowledge of meaning".

Sfard (1991) afirma que as discussões existentes costumam tratar conceitos e procedimentos como duas formas distintas de conhecimento, apesar de mutuamente relacionadas. No entanto, para a pesquisadora,

> ao contrário de "conceitual" e "procedimental", ou "algorítmico" e "abstrato", os termos "operacional" e "estrutural" dizem respeito a facetas inseparáveis, apesar de drasticamente diferentes, da mesma coisa. Assim, estamos lidando aqui com *dualidade* em vez de *dicotomia*[19] (SFARD, 1991, p.9).

De acordo com essa perspectiva, sem diminuir a importância do aspecto estrutural recupera-se o papel do aspecto operacional na formação dos conceitos matemáticos. Pois para a pesquisadora, uma compreensão profunda dos processos subjacentes aos conceitos matemáticos e até mesmo um determinado grau de domínio na execução desses processos devem ser vistos como uma base para a compreensão desses conceitos, não podendo ser vistos simplesmente como um resultado da aplicação dos conceitos.

Para Sfard (1991), algumas noções abstratas, como, por exemplo, número ou função, podem ser concebidas de duas maneiras fundamentalmente diferentes: *estruturalmente* como objetos e *operacionalmente* como processos, e essas duas abordagens aparentemente incompatíveis são, na verdade, complementares. Existe uma dualidade processo-objeto inerente à maioria dos conceitos matemáticos. Usualmente a concepção operacional (orientada pelos processos) aparece primeiramente, e os objetos matemáticos, concebidos estruturalmente, se desenvolvem posteriormente através da *reificação* dos processos, isto é, os objetos matemáticos são "um resultado da *reificação* - da capacidade da nossa mente para imaginar o resultado de processos como entidades permanentes com características próprias[20]" (SFARD, LINCHEVSKI, 1994, p.194). Portanto, quando operando com símbolos algébricos, o que nós realmente vemos neles "depende do que estamos preparados para observar e somos capazes de perceber" [21] (SFARD, LINCHEVSKI, 1994, p. 192).

Para Gray e Tall (1993, 1994), existe uma diferença sutil no significado dos símbolos em matemática: para alguns, o símbolo é um objeto matemático, algo que pode ser manipulado mentalmente, e para outros, o símbolo significa um procedimento a ser realizado. Eles introduziram o termo *procepto* para descrever os símbolos que representam tanto o

---

[19] Tradução livre, em inglês: "unlike "conceptual" and "procedural", or "algorithmic" and "abstract", the terms "operational" e "structural" refer to inseparable, though dramatically different, facets of the same thing. Thus, we are dealing here with *duality* rather than *dichotomy"*.
[20] Tradução livre, em inglês: "our mind's eye's ability to envision the result of processes as permanent entities in their own right".
[21] Tradução livre, em inglês: "depends on what one is prepared to notice and able to perceive".

processo como o objeto que é o produto desse processo. Utilizam o termo “processo” com um sentido mais geral, para designar processo cognitivo ou matemático ou ambos, como em “processo da adição”, “processo de resolver uma equação”, e “procedimento” para se referir a um algoritmo específico para implementar um determinado processo (GRAY, TALL,1994).

Esses autores definem “um *procepto* como um objeto mental combinado, consistindo de um processo, de um conceito produzido por esse processo, e de um símbolo que pode ser utilizado para designar um deles ou ambos[22]” (GRAY, TALL, 1993, p. 6).

Eles argumentam que nem todos os símbolos matemáticos são *proceptos*, mas que esses ocorrem frequentemente, em particular na aritmética, na álgebra etc.. Um exemplo de *procepto* em álgebra é a expressão $3a + 4b$, que possui um duplo significado: o processo de adicionar o triplo de a ao quádruplo de b, assim como a expressão algébrica que pode ser manipulada, segundo as regras da álgebra, como um objeto de uma estrutura algébrica. De acordo com esses autores, quem possui uma visão apenas *procedimental* da notação fica confuso com uma expressão envolvendo letras, pois ela não pode ser finalizada antes de os valores das letras serem conhecidos, mas, por outro lado, quando esses valores são conhecidos, as letras são redundantes e a expressão pode ser calculada pela aritmética, utilizando-se os valores numéricos. Já o pensamento *proceptual* inclui o uso de procedimentos quando apropriado e o uso de símbolos como objetos que podem ser manipulados quando apropriado. No que diz respeito ao ensino, esses pesquisadores chamam atenção para o fato que a questão central não é dar significado para o processo ou conceito, mas sim a habilidade de dar significado de uma maneira flexível que permita que o processo e o conceito sejam utilizados alternadamente sem que haja necessidade de se fazer uma distinção entre eles. Aspectos procedimentais da matemática tendem a focalizar a manipulação rotineira de objetos que podem ser representados por materiais concretos, símbolos escritos etc.. Aqueles que se concentram nos procedimentos podem ter sucesso nos cálculos imediatos, mas não alcançam a flexibilidade necessária para ultrapassar com sucesso essa etapa. “A experiência inicial com procedimentos pode, mais tarde, desenvolver flexibilidade ou pode fixar-se numa maneira rígida de aprendizagem das regras”[23] (GRAY, TALL, 1993, p. 6).

Tendo em vista o objetivo da nossa pesquisa, qual seja, “identificar elementos constituintes do conhecimento matemático específico do professor, no que se refere

---

[22] Tradução livre, em inglês: “a *procept* to be a combined mental object consisting of a process, a concept produced by that process, and a symbol which may be used to denote either or both”.

[23] Tradução livre, em inglês: “Initial experience with procedures may later either develop flexibility and power, or may become fixed in a rigid mode of learning rules”.

particularmente ao trabalho com a álgebra na Educação Básica", e, também, as questões analisadas em pesquisas sobre ensino e aprendizagem de álgebra, discutiremos, neste capítulo, questões relativas às expressões e equações algébricas que mais se destacaram durante o processo de observação e coleta de dados.

4.2 Ensino e aprendizagem de álgebra na turma do 9º ano

A observação das aulas na turma do 9º ano ocorreu no período de 23 de abril a 08 de agosto de 2012, mas os dados analisados neste estudo foram retirados principalmente de quatro aulas, três delas ocorridas sequencialmente nos dias 23, 24 e 26 de abril, e a última no dia 19 de junho. Episódios utilizando parte desses mesmos dados foram analisados em David, Tomaz e Ferreira (2014), que teve como objetivo discutir como um dispositivo visual (chuveirinho), introduzido em uma atividade na sala de aula para representar um procedimento algébrico específico, se transforma, adquirindo um papel central e modificando a atividade em curso. Nesse trabalho, a teoria da atividade foi utilizada para iluminar as tensões que emergem do contato entre a maneira como o professor dá significado ao procedimento algébrico e o uso inadequado, feito pelos alunos, do dispositivo visual associado ao procedimento.

A seguir, apresentamos a descrição das aulas que serviram de base para a análise, entremeada com a análise dos dados e apoiada na literatura pertinente sobre ensino e aprendizagem de álgebra.

4.2.1 A aula do dia 23 de abril

A observação das aulas nessa turma teve início no dia 23 de abril de 2012, quando, de acordo com o professor Antônio, ele começaria a trabalhar especificamente com o conteúdo de álgebra do 9º ano – equações e sistemas de equações do 2º grau e equações fracionárias. Em fevereiro de 2012, período anterior ao início do trabalho de campo na escola, o professor havia feito uma revisão de equações e sistemas de equações do 1º grau, durante duas semanas, tópico esse que já havia sido abordado no ano anterior.

O novo assunto foi introduzido a partir da tradução de problemas para a linguagem algébrica, sendo que as expressões obtidas envolviam equações polinomiais de 1º e 2º graus, e o professor aproveitou a oportunidade para discutir o conceito de raiz de uma equação e como testar se um determinado número é ou não raiz de uma equação dada.

O professor dá início às atividades escrevendo no quadro o seguinte problema, proposto no livro-texto adotado:

A) Existe algum número que somado com 5 seja igual a esse mesmo número multiplicado por 5? Existe mais de um número?

Inicialmente, o professor mostra aos alunos que, nem sempre, a soma de um número com um valor fixo e o produto desse mesmo número pelo mesmo valor fixo são iguais, tendo a preocupação de não utilizar letras para representar um número qualquer:

18. Professor: Por exemplo, quando a gente faz uma soma, tem jeito de a gente somar... imagina que eu fizesse isso aqui... número qualquer mais 7 [escreve no quadro: número qualquer $+7$]. Se eu pegar esse mesmo número vezes 7 [escreve no quadro: número qualquer $\times$ 7], em geral vai dar a mesma coisa?
19. Alunos: Não .... [inaudível]
20. Professor: Você já percebeu que ... é possível... em geral isso não acontece não ... [inaudível]. Por exemplo, $7 + 2$ é quanto?
21. Alunos: 9.
22. Professor: 7×2 é quanto?
23. Alunos: 14.
24. Professor: Em geral, isso acontece diferente. Só que pode acontecer algum caso especial em que esse "número $+7$" seja igual a esse "número $\times$ 7".

Um aluno apresenta um caso especial em que a igualdade ocorre $(2 + 2 \text{ e } 2 \times 2)$,e o professor pergunta como descobrir esses casos sem ser por tentativas, e conduz os alunos na tradução do problema, proposto no livro didático, para a linguagem algébrica:

30. Professor: Existem alguns casos em que isso acontece, não é? A minha pergunta é: "Existe algum número que somado com 5 seja igual a esse mesmo número multiplicado por 5?"
31. Alunos: Não//existe//não.
32. Professor: Se existe, existe mais de um número ou é só um?
33. Aluno: ... irracional...[inaudível]
34. Professor: Você já me mostrou um, por exemplo, que é natural.
35. Alunos: [inaudível]
36. Professor: Pessoal, será que existe um jeito esperto ... ou, por exemplo, a gente está fazendo tentativas, não é? ... Você acabou de descobrir um por tentativa. Será que existe um jeito de

descobrir qual é esse número sem ser por tentativa? [Vários alunos falando ao mesmo tempo]

37. Aluno: Se multiplicar um número ...
38. Professor: Por exemplo, nesse problema aqui, vamos tentar, vamos pensar....
39. Aluno: Sistema de equações.
40. Professor: Hã?
41. Aluno: Sistema de equações.
42. Professor: Será que vai cair em um sistema de equações ou será uma coisa mais simples do que isso? Um sistema de equações tem que ter no mínimo... o quê?
43. Aluno: Duas.
44. Professor: Será que eu vou precisar de duas equações para resolver isso aqui?
45. Aluno: Não.
46. Professor: Uma só será que vai dar? Será que o mais simples é fazer equação?
47. Alunos: [inaudível]
48. Professor: Então, Laura, fala para mim... Quando a gente olha para um problema desses, qual é a primeira coisa que você tem que [inaudível] se você tivesse que resolver ele agora?
49. Laura: [inaudível] $x + 5$ é igual a ...
50. Professor: Antes, x é o quê?
51. Aluno: É qualquer número.
52. Professor: É, mas você está procurando um número, não está? Então para resolver isso aqui, a Laura falou que faz assim: x é o quê? É o número que eu estou procurando, não é? x é igual ao número procurado, não é? [Professor escreve no quadro: x = número procurado e escuta-se um aluno dizendo $x + 5 = y$ e $x.5 = y$]
53. Professor: x é o número procurado, não é? Será que precisa colocar outra letra na história?
54. Aluno: É, olha: $x + 5 = y$ e $x.5 = y$.
55. Professor: A sugestão é fazer isso aqui: $x + 5.$ De onde você tirou isso aqui? $x + 5$?
56. Aluno: Porque você não sabe qual é o número...
57. Professor: Que parte do problema fez você pensar isso?
58. Outro aluno: A primeira parte lá: algum número somado com 5.
59. Professor: Existe algum número, que eu não sei qual, somado com 5. E você quer que eu faça isso aqui igual a quanto? Será que precisa? Você falou para eu fazer isso aqui? [Professor escreve no quadro $x + 5 = y$]
60. Alunos: [todos falando]
61. Professor: O Rodrigo está falando isso aqui. Rodrigo?
62. Professor: O que você sugere fazer aqui?
63. Rodrigo: $5x$.

64. Professor: Porque $5x$? O Rodrigo sugeriu fazer isso aqui [escrevendo no quadro $x + 5 = 5x$]
65. Aluno: Também acho.
66. Professor: $x + 5$ é qual parte do problema, Rodrigo? Qual parte daquele problema é $x + 5$?
67. Alunos: [todos falando ao mesmo tempo].
68. Professor: Um número somado com 5. E depois fala assim: seja igual... seja igual [apontando para o sinal de igual] ... o mesmo número multiplicado por 5. Então vamos só escrever assim. Tá certo, mas vamos fazer na ordem que aparece lá: esse mesmo número multiplicado por 5 [escreve no quadro: $x.5$]. Essa equação aqui retrata o que está escrito nesse problema? Ler isso aqui [apontando o problema que está escrito no quadro] é o mesmo que ler isso aqui [apontando a equação]?
69. Alunos: É.
70. Professor: É? Então vamos lá. Uma vez ... quando a gente está fazendo um problema e a gente está procurando uma solução para ele ... a gente pegou o problema e o transformou em linguagem matemática, não foi? Está aqui. Qual que é o próximo passo para a gente descobrir o número?

...

74. Professor: Isso aqui é uma equação, não é? Resolver a ... equação. De que grau é essa equação aqui?
75. Alunos: Primeiro//Segundo.
76. Professor: Porque tem uma letra só que é de primeiro grau?
77. Aluno: Segundo.
78. Professor: Olha o Rodrigo aqui. Rodrigo, por que é que é de primeiro grau?
79. Rodrigo: Expoente é um.
80. Professor: O expoente maior é um. Aqui tem $5x$ e aqui tem x. O expoente desse x aqui [apontando para $x + 5$] é o quê?
81. Alunos: 1.
82. Professor: E desse [apontando para $5x$] aqui?
83. Alunos: 1.
84. Professor: Então o expoente que aparece ali é 1. É o maior expoente que aparece, não é? Então essa equação é de que grau? Equação de ... primeiro grau. Pergunta: a gente já sabe resolver equação de primeiro grau, Hannah?

Para ajudar os alunos na transcrição do problema para a linguagem matemática, o professor primeiramente mescla a linguagem natural com alguns símbolos matemáticos (linhas 18 e 24), até que Laura dá início à escrita da equação (linha 49). Obtida a equação (linha 64), o professor inicia o processo inverso de tradução da equação para o problema, verificando se ela retrata o enunciado do problema (linha 68).

Nesse excerto é possível identificar também a estratégia utilizada pelo professor para saber qual o significado dado pelos alunos à definição de equação de 1º grau: o professor dá uma interpretação equivocada (linha 76) do significado de grau da equação para que os alunos explicitem o que eles entendem (linha 79) e o professor, então, apresenta os elementos que ele julga significativos na definição (linha 84). Mais adiante, voltaremos à definição de equação de 1º grau apresentada pelo professor.

A resolução da equação, aparentemente, não apresenta maiores problemas, uma vez que, no início do ano escolar, o professor já havia feito uma revisão sobre solução de equações e sistemas de equações do 1º grau. Mesmo assim, o professor aproveita, sempre que possível, as oportunidades surgidas, para apresentação das justificativas para os procedimentos utilizados pelos alunos, como ocorre no diálogo a seguir:

88. Professor: Então fala para mim como é que vai ficar?
89. Hannah: x menos x.
90. Professor: Menos x? Isso aqui [apontando para $x.5$] é o quê? É $5x$, não é?
91. Aluno: Então é mais $5x$.
92. Hannah: Menos $5x$.
93. Professor: Menos $5x$ [professor escreve no quadro $x - 5x =$]
94. Professor: É igual o quê? Hannah, dá o quê?
95. Hannah: menos 5. [Professor escreve $x - 5x = -5$]
96. Professor: De novo, aquela história da balança que a gente já conversou, mas que vocês preferem falar o seguinte “se eu mudei de lado...”

O professor retoma a imagem da balança (que para ficar em equilíbrio, o que for feito de um lado da equação deve também ser feito do outro), de maneira muito rápida, para justificar a mudança de sinal quando uma expressão é transposta de um lado para o outro da equação. Em outro momento, relembra a propriedade simétrica da igualdade:

134. Kleber: Passar o x para cá é muito mais fácil.
135. Professor: Vale também. O Kleber está chamando a atenção para o seguinte: Em vez de pegar o $5x$ e passar para o lado de cá, o Kleber quis pegar o x e passar para o lado de cá. Pode?
136. Alunos: Pode.

137. Professor: Pode. O que a gente já falou de igualdade? Quando a gente estava até falando de potências nas propriedades. Se uma coisa é igual ..., por exemplo, a gente pega lá assim: se $a = b$ então ...
138. Aluna: $b = a$.
139. Professor: b é igual a a, mesma coisa, não é?

Tendo em vista a discussão que ele pretende fazer posteriormente, relacionada ao número máximo de raízes de uma equação do 2º grau, o professor apresenta o seguinte exemplo:

140. Professor: Nós vamos para a segunda pergunta do dia .... Exatamente, é obrigado sempre a ter solução? Às vezes, pode dar o conjunto ... o quê? Vazio, não pode? Olha para mim, isso aqui: $x + 2 = x + 3$. Ela é uma equação de que grau?
141. Alunos: Primeiro.
142. Professor: Primeiro. Tem algum número que somado com 2 seja igual ao mesmo número somado com 3?
143. Aluno: Não. [inaudível]
144. Professor: Essa equação ... tem solução? Se a gente for resolvê-la como a gente resolveu a outra, fala para mim, o que a gente faz.
145. Aluna: Passa o x para lá.
146. Professor: Muda o x de lado, como você falou. Vai ficar $x - x$. E do lado de cá?
147. Kleber: Vai dar solução vazia.
148. Professor: Olha aqui: $x - x$?
149. Alunos: Zero.
150. Professor: E do lado de lá: $3 - 2$?
151. Professor: Zero é igual a um?
152. Alunos: Não.
153. Professor: Faz sentido?
154. Alunos: Não//Nenhum.
155. Professor: Essa equação tem solução?
156. Alunos: Não.
157. Professor: Ela é de primeiro grau?
158. Alunos: É.
159. Professor: Toda equação de primeiro grau tem solução? Não. Quando ela tem, ela pode ter, no máximo?
160. Alunos: Uma.

Anteriormente (linhas 74 a 84), o professor já havia argumentado que a equação $x + 5 = 5x$ possuía grau 1, porque " o maior expoente que aparece" é 1, e no livro-texto adotado consta a afirmação que $x + 5 = 5x$ "é uma equação do 1º grau. Seus termos são números ou então monômios de grau 1, em que o expoente de x é 1" (CENTURIÓN, JAKUBOVIC, 2011b, p. 58). Realmente, a equação mencionada possui grau 1, no entanto, a justificativa apresentada no livro não está correta. E no trecho transcrito anteriormente (linhas 140 a 160), percebemos a presença de um erro conceitual, talvez induzido pela definição apresentada no livro-texto, que merece discussão: certamente a expressão $x + 2 = x + 3$, representa uma equação algébrica, mas ela não tem grau 1, e, mais ainda, de acordo com a definição apresentada pelo professor, a equação $x + 2 = x + 2$ também possuiria grau 1 e teria infinitas raízes, que não é, de maneira alguma, a conclusão a que o professor pretende chegar.

Do ponto de vista da matemática escolar, se o objetivo é resolver equações e, se as únicas equações conhecidas até então pelos alunos são as de grau 1, todas têm soluções reais, porque é sempre possível "isolar o x". Além disso, nesse caso, não parece haver necessidade de se apresentar uma definição formal de grau.

Nas recomendações oficiais para a formação do professor de matemática, há uma ênfase no aprofundamento do conhecimento dos conteúdos matemáticos da escola básica do ponto de vista da matemática acadêmica. E, segundo a álgebra do ensino superior, uma equação algébrica é de grau 1 se ela pode ser escrita na forma $ax + b = 0;\ a, b\ \in R, a \neq 0$ e, no caso geral, define-se uma equação algébrica como uma equação da forma $p(x) = 0,$ em que $p(x)$ é uma função polinomial, e o grau da equação é o grau do polinômio $p(x)$. Assim, definir o grau de uma equação algébrica como o expoente máximo da variável presente na equação, sem escrevê-la na forma canônica $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0;\ a_n \neq 0,$ não é adequado. Na verdade, é um resultado estabelecido na matemática acadêmica que equações algébricas de primeiro grau, $ax + b = 0;\ a, b \in K; a \neq 0,$ em que K é um corpo, possuem exatamente uma raiz em K, a saber, $x = -\frac{b}{a}$ e, modificar a definição de grau de equação algébrica, da maneira como foi feito, levaria a que as de primeiro grau nem sempre tivessem solução e implicaria, em última análise, que as equações algébricas de qualquer grau poderiam ter infinitas soluções. Além disso, a apresentação do resultado relacionando o grau de uma equação algébrica e o número máximo de suas raízes, antes mesmo de introduzir as equações do 2º grau, parece prematura e, provavelmente, influenciada pela estrutura formal da matemática acadêmica presente na formação do professor.

Vinner (1991) afirma que a definição poderia criar sérios problemas na aprendizagem da matemática e que “ela representa, talvez, mais do que qualquer outra coisa o conflito entre a estrutura da matemática, tal como concebida pelos matemáticos profissionais, e os processos cognitivos da aquisição do conceito”[24] (VINNER, 1991, p.65). De acordo com esse autor, nos livros do ensino superior, usualmente a matemática é apresentada segundo um desenvolvimento lógico e dedutivo, partindo de noções e teoremas já conhecidos e definindo novas noções e provando novos teoremas. E para ele, essa forma de apresentação, presente também nos cursos de formação de professores, tem consequências na maneira como os professores organizam e ensinam a matemática. No entanto, nem sempre os conceitos são adquiridos por meio das definições e pela organização lógica dos resultados. Faz parte do saber docente analisar a conveniência de dar uma definição, algumas vezes postergando ou mesmo evitando a sua apresentação e, assim discernir o papel das definições no ensino e aprendizagem.

Para introduzir as equações de 2º grau, o livro-texto apresenta o seguinte problema, que o professor escreve no quadro:

B) Qual é o número que quando dividimos 4,5 por ele, dá o mesmo resultado que 4,5 menos ele? Existe mais de um número?

Do ponto de vista do enunciado, esse problema (B) apresenta uma estrutura semelhante à do problema (A) apresentado anteriormente, que indagava sobre a existência de um número que somado com 5 fosse igual a esse mesmo número multiplicado por 5. O enunciado do primeiro envolve adição e multiplicação e o do segundo divisão e subtração. Inicialmente, o professor conduz a turma no processo de tradução do problema para a linguagem matemática, chegando à equação $\frac{4,5}{x} = 4,5 - x,$ que é uma equação fracionária, e cujo processo de resolução até chegar à equação de 2º grau, utiliza técnicas mais sofisticadas do que o primeiro exemplo apresentado, que recaía diretamente em uma equação de 1º grau.

Kleber sugere escrever o membro da direita da equação na forma de fração com denominador 1 e “multiplicar cruzado”. O professor aceita a sugestão do aluno e continua:

[24] Em inglês: “Definition creates a serious problem in mathematics learning. It represents, perhaps, more than anything else the conflict between the structure of mathematics, as conceived by professional mathematicians, and the cognitive processes of concept acquisition.”

209. Professor: Agora, olha. Tem uma pergunta antes. Tenho uma pergunta para fazer. Calma. Olha a minha pergunta. Esse x aqui, eu tenho certeza que ele não pode ser um número. Qual é o único número que eu tenho certeza absoluta que ele não pode ser?

210. Alunos: Zero.

211. Professor: Zero, não é? Está no denominador, pode ser zero? Beleza? Não pode ser zero. Do jeito que está ... a sugestão do Kleber é multiplicar cruzado. Pode fazer isso?

212. Alunos: Pode.

213. Professor: Alguém discorda disso?

214. Alunos: Não.

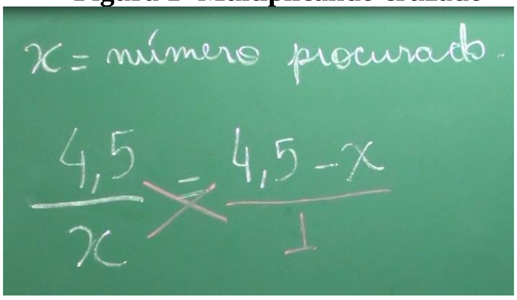
215. Kleber: Pode. É uma igualdade.

216. Professor: Essa fração é igual a essa fração, não é? Quando você tem uma igualdade de frações, a gente pode fazer isso que o Kleber chamou de multiplicar cruzado?

217. Kleber: Pode.

218. Professor: A minha sugestão é a seguinte: vocês lembram quando a gente fazia uma igualdade, sei lá, vocês falavam para mim: a gente tira o mmc, não tem um negócio assim? Vai dar a mesma coisa, não vai? Agora, olha, como a gente tem uma igualdade de frações, Kleber sugeriu fazer isso aqui. Vale? Vale. [inaudível] Essa é a sugestão do Kleber. Qual é a sua, Laura? [Muitos alunos falando simultaneamente]

Figura 1- Multiplicando cruzado



Fonte: Vídeo turma 9º A, 23/04/2012, filme 104

219. Professor: Esse caminho vai ser mais rápido [referindo-se à sugestão de multiplicar cruzado]. Mas vamos ver o que a Maria sugeriu. O que você quer fazer?

220. Maria: [inaudível]

221. Professor: Você quer que faça isso aqui, não é? Que passe o x para cá. Como é que vai ficar?

222. Alunos: x ao quadrado.

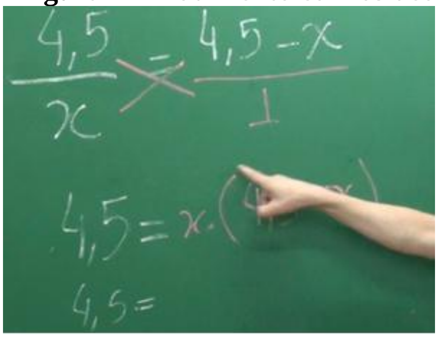
223. Professor: x elevado a dois? Só se estivesse multiplicando x por x. Tem alguma multiplicação aqui? [Muitos alunos falando ao mesmo tempo]

224. Professor: 4,5? Mas, porque multiplicado por 2?
225. Aluna: [inaudível]
226. Professor: [inaudível] mas multiplicar por 2 não é fazer isso. Mexendo de um lado da equação, para a gente não alterar o resultado, o que a gente tem que fazer do outro lado? [Muitos alunos falando simultaneamente]
227. Professor: Vamos ver a sugestão do Kleber para a gente ver se concorda com ela. Olha aqui, oh: 4,5 vezes 1 dá quanto?

No diálogo apresentado anteriormente, o aluno Kleber apresenta como justificativa para a utilização da multiplicação cruzada o fato de se tratar de uma igualdade (linha 215). Já o professor chama atenção para o fato, visto anteriormente em sala, de que, como se trata de uma igualdade de frações, tirando o mmc "vai dar a mesma coisa" (linha 218). Ele não se aprofunda na explicação da justificativa e a turma parece aceitar o resultado sem questionamentos. Nesse momento, o professor não chega a propor que se multipliquem ambos os lados da equação pelo mínimo múltiplo comum, para justificar a multiplicação cruzada. Somente uma aluna (Maria) propõe um procedimento alternativo - transpor a expressão do lado direito da igualdade para o esquerdo - mas ela se confunde e o professor retoma a sugestão do Kleber, na tentativa de abreviar a discussão e chegar ao objetivo do exemplo, que é introduzir equações do 2º grau:

231. Professor: OK? Isso que o Kleber fez aqui está beleza. Todo mundo entendeu o que eu fiz daqui [apontando $\frac{4,5}{x} = \frac{4,5-x}{1}$] para cá [apontando $4,5 = x.(4,5 - x)$], seguindo a sugestão do Kleber?
232. Alunos: Isso. [inaudível]
233. Professor: Agora, vamos lá. Vamos resolver o máximo que a gente consegue aqui. O que eu posso fazer aqui? [Professor aponta para o produto $x.(4,5 - x)$ e já faz o movimento de um arco ligando o x ao 4,5 e de outro ligando o x ao x].

Figura 2 - Movimento com os dedos

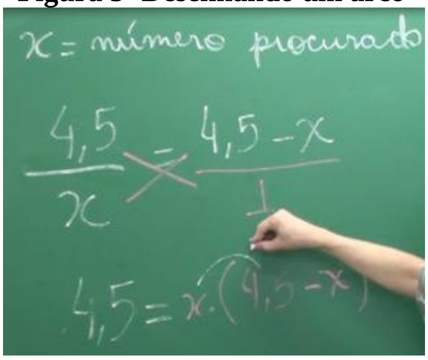


Fonte: Vídeo turma 9º A, 23/04/2012, filme 104

234. Kleber: Chuveirinho[25].

235. Professor: Chuveirinho, não pode [professor desenha os arcos]? Assim? Vai ficar como?

Figura 3- Desenhando um arco



Fonte: Vídeo turma 9º A, 23/04/2012, filme 104

O professor pergunta o que pode ser feito com a expressão $x.(4,5 - x)$, fazendo um movimento com as mãos (fig. 2) como se desenhasse um arco ligando x a $4,5$ dando uma "dica" para os alunos para a utilização da propriedade distributiva. Imediatamente, Kleber responde que é o chuveirinho, o professor aceita a indicação do aluno, inclusive repetindo a palavra chuveirinho, desenha os arcos (figura 3) e aplica a propriedade distributiva, chegando à expressão de 2º grau:

---

[25] Palavra utilizada informalmente no ensino básico para designar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma ou subtração, que pode estar associada ao desenho de arcos: $a \cdot (b \pm c)$.

239. Professor: $4{,}5\ x$ menos x ao quadrado [professor escreve no quadro: $4{,}5x - x^2$]. Pessoal, olha para cá. Alguém não entendeu como daqui [apontando para $x.(4{,}5 - x)$] chegou aqui [apontando para $4{,}5x - x^2$]?
240. Um aluno: Eu já entendi.
241. Professor: Alguém não entendeu?
242. Alunos: [inaudível]
243. Professor: Isso aqui tudo vocês entenderam? Então vamos lá. Do jeito que a gente está aqui, a gente tem uma igualdade aqui, não tem? A gente tem uma equação, não tem? Pergunta: essa equação é de qual grau?

Ao fazer os gestos indicando o uso da propriedade distributiva, o professor antecipa a resposta, sem verificar se os alunos iriam fazer a distribuição por eles mesmos. Assim, quando o professor pergunta diretamente se alguém não compreendeu a utilização da propriedade distributiva, ninguém se manifesta, já que o que há a fazer é seguir, passo a passo, o procedimento da aplicação da propriedade. A equação é escrita no quadro, o professor justifica que ela é do 2º grau, diz que os alunos ainda não conhecem ferramentas para resolvê-la, e é possível escutar alguns alunos, que estão repetindo o 9º ano, dizendo a fórmula para a solução geral da equação:

253. Professor: Então olha aqui: a gente tem uma equação que, salvo alguns casos, que algumas pessoas aí já falaram o nome, já tem uma ferramenta para resolver aquela equação ali. A gente ainda, nesse momento, não aprendeu essa ferramenta. A gente não sabe como, por exemplo, a equação ...
254. Aluno: A gente não pode passar o 4,5 para lá, não?
255. Professor: Podemos até fazer isso.
256. Alunos: [vários alunos falando ao mesmo tempo, o professor pede calma]
257. Professor: Mas do jeito que está ali, quando a gente tinha uma equação do primeiro grau, aí beleza. A gente isolava a letra, não era assim? Vocês falavam para passar a letra para um lado e o número para o outro, não era assim? Isolava a letra e resolvia. Do jeito que está ali, sem outras ferramentas que a gente ainda não conhece, a gente não sabe resolver, sabe? Não sabe. E aí é isso que a gente vai fazer daqui para a frente. A gente vai aprender uma ferramenta ou umas ferramentas para resolver este tipo de equação. Vocês acabaram de falar que é equação de que grau?
258. Alunos: Segundo grau.

259. Professor: Equação de ... segundo grau, não é? Segundo grau por causa do expoente, não é? Aí alguém falou assim: eu podia passar o $4{,}5$ para lá? Podia. Mandei o $4{,}5$ para lá, sobrou alguma coisa de cá?
260. Alunos: Não.
261. Professor: O que eu ponho aqui?
262. Aluno: Zero.
263. Professor: Zero. Zero é igual a quê? $4{,}5x - x^2 - \cdots$. Ajudou alguma coisa desse jeito? Por enquanto oh ...
264. Aluno: [inaudível] b ao quadrado menos $4ac$...
265. Professor: No fundo, a gente vai acabar vendo que é legal deixar a equação ....
266. Aluno: b ao quadrado menos $4ac$ sobre ...
267. Professor: No fundo, a gente vai descobrir que esse jeito que você está falando vai ser bom para a gente fazer o que o Kleber já citou lá atrás. Só que daqui a pouco. Antes de chegar nisso, a gente vai ver que algumas equações do segundo grau a gente consegue resolver, Kleber, sem usar Bhaskara, certo? A gente precisa entender que a gente quer uma solução. No fundo olha o que a gente quer. A gente quer um número que quando eu elevo ... quando eu pego aqui um número elevado ao quadrado ... menos um número elevado ao quadrado mais $4{,}5$ vezes ele dá igual a ...? $4{,}5$. É isso que eu estou querendo saber. Por hora ... por hora eu vou informar para vocês que tem dois números que respondem a isso aqui. Vamos testar para ver se pode mesmo. Quais são eles?
268. Alunos: 3 e $1{,}5$.
269. Professor: Você já calculou?
270. Aluno: Não, está no livro.

O professor diz que, para resolver a equação de 2º grau, nesse caso, não dá para isolar a incógnita, como no caso da equação de 1º grau, o que os alunos chamam, segundo ele, de "passar a letra para um lado e o número para o outro" (linha 257), que foi o procedimento utilizado pelos alunos, com sucesso, na resolução do primeiro problema. No caso da equação de 2º grau, o professor diz quais são os valores das raízes da equação e que os alunos devem testar que realmente os números resolvem a equação. No entanto, antes de fazer a tarefa proposta pelo professor, há a seguinte discussão:

384. Professor: Essa é a boa pergunta da aula de hoje. Qual é a sua pergunta?
385. Aluno: De onde que tirou o $1{,}5$ e o *3*?
386. Professor: Eu também me perguntaria isso. Eles chegam com dois números ali e falam que ... tirei de onde? Na aula de hoje, eu tirei de onde esses números?

387. Aluno: Do bolso.

388. Professor: Do bolso, inventei. Deve ter um jeito ... olha ... a pergunta é essa ...deve ter um jeito mais esperto de deduzir esses números, não deve? É isso que a gente vai descobrir daqui para a frente. É isso que a gente vai estudar daqui para a frente. Um jeito de não ter que ficar testando números para ver qual é a resposta certa. Um jeito de chegar a esses números e só testar as soluções encontradas. Entenderam? Todo mundo entendeu então um motivo para a gente estudar equações do 2º grau? Com isso aqui a gente já tem instrumentos para resolver alguns problemas e é isso que a gente vai fazer aqui agora.

....

419. Professor: Aqui oh, pessoal, mais uma vez, mais uma, já é a segunda! Hannah falou o seguinte: o incômodo dela não é com fração não. O incômodo dela é igual ao do .... Como é que eu vou descobrir que o número é 1,5 e o número é 3? [inaudível]

...

421. Professor: Olha aqui rapidinho .... antes da gente começar a ficar ... evidente que é uma preocupação razoável. A pergunta é muito boa de ... onde que a gente tirou ... mas antes de ir direto para aplicar a fórmula, calma. Vai chegar até ...vai falar sobre esse nome que apareceu hoje, mas existem algumas equações que a gente consegue resolver sem ter que usar isso. Vamos entender: primeiro, a gente já viu que precisa de um jeito para encontrar esses números que eu já falei para vocês. Isso a gente vai ver daqui para a frente. Outra coisa é: vamos ver quando a gente precisa de fato desse negócio aí que até tem um nome e quando a gente tem condições de resolver sem isso, está certo? Sem stress. Tem um bom motivo para a gente aprender isso ... Nesse momento eu vou passar alguns exercícios só para a gente, primeiro, tirar da linguagem do problema e transformar em equação.

É possível perceber o incômodo de alguns alunos com o fato de o professor não ter apresentado um procedimento para encontrar as raízes da equação de 2º grau, sobretudo porque outros alunos já conheciam a fórmula geral de resolução, que seria apresentada posteriormente, pois o objetivo principal da aula era equacionar os problemas.

Vale a pena ressaltar que, apesar da aparente semelhança entre os dois exemplos apresentados no livro-texto, a utilização de um problema envolvendo uma equação fracionária, para se chegar a uma equação do 2º grau, antecipa algumas dificuldades técnicas que são específicas do trabalho com funções racionais. Com isso, a atividade dá prioridade ao domínio de procedimentos operatórios, deixando em segundo plano a apresentação de problemas que recaem em equações do 2º grau, que era supostamente o objetivo central da aula.

Analisando as falas dos alunos e do professor, é possível listar diversas regras, utilizadas pelos alunos, na resolução desses exercícios, que ressaltam o aspecto procedimental da álgebra: “multiplicar cruzado”; “passar para o outro lado, mudando de sinal”, “tirar o mmc” etc.. O professor faz algumas tentativas para justificar os procedimentos utilizados, mas de maneira muito rápida, como se já existisse um entendimento prévio entre alunos e professor sobre aquilo a que ele está se referindo. No entanto, em geral, as justificativas apresentadas ainda ficam no nível de um detalhamento dos procedimentos e não necessariamente ajudam os alunos a compreender que há uma lógica nesses procedimentos. Se essa lógica nunca chegar a ser explicitada, corre-se o risco de trocar uma regra por outra, sem que os alunos atribuam um sentido próprio para o que estão fazendo.

É possível observar também a utilização de gestos e desenhos para representar alguns procedimentos, como o desenho de um X (figura 1) para indicar a multiplicação cruzada, os gestos com as mãos, para cima e para baixo, para indicar o equilíbrio da balança e, em especial, aqueles associados à propriedade distributiva. Nessa aula, como vimos, após chegar à equação $4{,}5 = x(4{,}5 - x)$, o professor pergunta aos alunos o que pode ser feito para resolvê-la, e, ao mesmo tempo, ele faz gestos com os dedos (figura 2), como se desenhasse arcos sobre a expressão. Um aluno responde “chuveirinho” e imediatamente o professor desenha os arcos ligando os fatores que devem ser multiplicados na aplicação da propriedade distributiva e os alunos vão repetindo os resultados das multiplicações.

Na análise realizada em David, Tomaz e Ferreira (2014), não percebemos, nesse ponto, nenhuma tensão ocorrendo na atividade, originada pela sugestão do aluno (fazer o chuveirinho). O professor aceita naturalmente o uso da palavra chuveirinho pelo aluno, e como os alunos acompanham as indicações do professor (nos gestos e nos desenhos) para efetuar os cálculos, parece que, nesse momento, eles estão usando o procedimento representado pelo chuveirinho sem necessariamente o relacionar com a lógica que valida a propriedade distributiva.

4.2.2 A aula do dia 24 de abril

Na aula do dia 24 de abril, o professor fez a correção das atividades (exercícios do livro-texto) que os alunos haviam iniciado na aula anterior. Elas envolviam a resolução de problemas que recaíam em equações do 1º grau e, no caso de equações de 2º grau, a verificação se determinados números eram ou não soluções das equações dadas.

Os enunciados dos problemas são semelhantes aos da aula anterior:

1) Qual o número que somado com 11 ou multiplicado por 11 dá, nos dois casos, o mesmo resultado?
2) Qual é o número x, tal que 4 menos x é igual a $4x$?

Os alunos parecem não ter dificuldades na resolução dos exercícios e vão dizendo quais são os procedimentos necessários para resolvê-los e o professor vai escrevendo o que eles dizem no quadro:

58. Professor: Calma, já vi que você fez, calma, calma. Fala para mim, Pedro: como é que é?
59. Pedro: Primeiro você troca, ajeita a equação para ficar $4x$ no primeiro termo ... $-4x$, na verdade ...
60. Professor: $-4x$ ...
61. Pedro: ... x ...
62. Professor: ... $-x$ ...
63. Pedro: ... é igual a -4.
64. Professor: ... é igual a?
65. Pedro: -4.
66. Professor: Ok, aqui vai ficar o quê?
67. Pedro: Aí ... [Escuta-se a voz de outro aluno]
68. Professor: Pedro!
69. Pedro: $-3x$.
70. Professor: Oh, $-4x - 1x$, dá quanto?
71. Pedro: Ah, $-5x$.
72. Professor: -5, o quê?
73. Pedro: x.
74. Professor: $-5x$?
75. Pedro: É igual a -4...
76. Aluno: Não dá para ir mais rápido não?
77. Pedro: ... multiplica por -1.
78. Professor: Multiplica?
79. Vários alunos: Por -1.
80. Professor: Vai ficar como?
81. Aluna: $5x$ é igual a 4.
82. Professor: $5x$ é igual a 4, x é igual a quanto?
83. Kleber: 4 sobre 5.
84. Professor: Ou?

85. Alunos: 0,8 ... x é igual a 0,8 .

O aluno Pedro explicita claramente os procedimentos utilizados: "ajeita a equação para ficar $4x$ no primeiro termo ... $-4x$, na verdade ..." (linha 59) para deixar a incógnita no lado esquerdo da igualdade; multiplica por -1 (linha 77) e obtém o resultado. Um aluno se mostra impaciente (linha 76), achando que Pedro está resolvendo o exercício muito devagar. Uma aluna faz uma proposta mais eficaz (linha 100), pois, dessa forma, não há necessidade de multiplicar por (-1):

100. Aluna: ... com esse tanto de trem negativo, você não podia pegar o $4 - x = 4x$, passar o x para lá e ficar $4 = 4x + x$?
101. Professor: Pergunta: faz alguma diferença o x estar do lado direito ou do lado esquerdo da igualdade?
102. Kleber: A ordem dos fatores não altera o produto.
103. Professor: Não é por isso não, Kleber. Na verdade, a gente não falou que a igualdade é uma balança? Faz diferença o prato da balança que a gente está falando?
104. Alunos: Não.
105. Professor: Não. Se a é igual a b, ou seja, se o que está na direita é igual ao que está na esquerda ...
106. Aluno: o que está à esquerda é igual o da direita.
107. Professor: o que está à esquerda é igual o da direita. Se você quiser passar isso para cá, dá no mesmo, ok? Tranquilo?

O professor aproveita a oportunidade para apresentar uma justificativa física (a imagem dos pratos de uma balança) para a propriedade simétrica da igualdade. Na verdade, o professor já havia enunciado essa propriedade anteriormente, para justificar a estratégia proposta por Kleber (linhas 134 a 139) para resolver uma equação. De acordo com Sfard e Linchevski (1994), quando expressões algébricas são vistas como processos e não como objetos, o sinal de igualdade é interpretado como um comando para efetuar alguma coisa. "A expressão no lado esquerdo é um processo, enquanto a expressão no lado direito deve ser um resultado" (SFARD, LINCHEVSKI, 1994, p. 208). Essa ideia tem origem na aritmética, onde o sinal de igual é utilizado para expressar a execução de um comando, presente no lado esquerdo do sinal. Nesse caso, o sinal de igual opera só no sentido da esquerda para a direita. Por isso, equações escritas na forma $ax + b = c$ são mais fáceis de ser resolvidas pelos alunos do que equações na forma $ax + b = cx + d$. Na primeira, o sinal de igual funciona da mesma forma que na aritmética. Quando as expressões algébricas são vistas como objetos, aí o sinal de igual representa uma equivalência entre os termos que estão à esquerda e à direita dele. De acordo com Kieran (1992), a compreensão do sinal de igual é fundamental na passagem do pensamento aritmético para o pensamento algébrico. O papel do sinal de igual no ensino e aprendizagem da álgebra (e da matemática) é um elemento importante do conteúdo matemático específico para o ensino de álgebra, e poderá ser aprofundado em trabalhos futuros, até mesmo utilizando os dados já coletados para esta pesquisa.

Kleber cita a propriedade comutativa da multiplicação para justificar a simetria da igualdade, o que não faz sentido, e o comentário é imediatamente descartado pelo professor, sem apresentar uma explicação ou justificativa. Nem sempre é possível responder a todas as questões levantadas pelos alunos, e faz parte do saber do professor decidir quando é necessário responder a uma pergunta ou comentário de um aluno e quando é possível deixar para um momento posterior.

Após resolver as equações, os alunos devem testar os resultados obtidos, substituindo os valores encontrados nas equações, o que causa, inicialmente, um pequeno desconforto, pois eles não percebem qual a necessidade dessa etapa de verificação:

86. Professor: Olha! Agora a gente vai testar para ver se está certo.
87. Aluno: Precisa testar, não?
88. Professor: Precisa. Teste. E agora como é que a gente faz para testar?
89. Kleber: Substitui o 0,8 por x.
90. Professor: $4 - 0{,}8$ dá quanto?
91. Kleber: Deu 3,2.
92. Aluna: 3,2.
93. Professor: 3,2. Agora de cá [aponta para o $4x$ escrito no quadro]. $4 \times 0{,}8$ ... deu quanto?
94. Alunos: 3,2.
95. Professor: Certo?
96. Alunos: Certo.
97. Professor: Testado.

Os exercícios subsequentes envolvem testar se alguns números dados são raízes de determinadas equações de 2º grau. Por exemplo, para determinar se 4 é solução da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$, o seguinte diálogo ocorre:

185. Professor: x igual a 4. Como é que vai ficar? Fala para mim, Laura, como é que vai ficar montado aqui?
186. Laura: 4^2...
187. Professor: Quatro ao quadrado,4^2 ...
188. Laura: ... -7 vezes 4 ...
189. Professor: ... $-7(4)$ ...
190. Laura: ... $+10 = 0$.
191. Professor: $+10$. Igual a zero?
192. Laura: É.
193. Professor: Não. A gente está querendo ver se é igual a zero. Então, a gente substitui e vê onde é que chega, para depois ver se vai chegar lá, tá bom? Então, vamos lá, e aí como é que vai ficar?
194. Laura: 16 ...
195. Professor: 16 ...
196. Laura: ... -28 ...
197. Professor: ... -28 ...
198. Laura: ... $+10$.
199. Professor: $+10$. Então, vamos lá. $16 + 10$?
200. Alunos: 36 // 26.
201. Professor: $16 + 10$?
202. Alunos: 26.
203. Professor: $26 - 28$?
204. Alunos: -2.
205. Professor: -2. Chegou ao zero?
206. Alunos: Não.
207. Professor: Podia ter colocado igual a zero antes?
208. Alunos: Não.
209. Professor: Não. É solução?
210. Alunos: Não.

...

451. Professor: Tranquilo? Até aqui, até aqui todo mundo entendeu o exercício? Está entendendo o espírito de substituir? O que a gente precisa encontrar, então? As soluções da equação ou o número que a gente coloca no lugar do x, da letra, da incógnita, para chegar a zero, não foi isso? A gente pode igualar a zero antes da hora?
452. Alunos: Não.
453. Professor: Não, não é? A gente quer ver se isso acontece, não é?

454. Aluno: É.

455. Professor: O que a gente vai ver na aula de hoje é um método de resolver equação, que a gente até já viu ... Oh pessoal, olha para cá, sem conversar. O que a gente vai ver hoje é um método que a gente até já discutiu um pouco para resolver equações, a gente já resolveu equações ...

456. Aluno: É a fórmula de Bhaskara.

457. Professor: A gente já resolveu equações de primeiro grau fazendo isso, isolando uma incógnita, a gente resolvia assim. Tem jeito de resolver equações de segundo grau isolando a incógnita?

458. Kleber: Não.

459. Professor: A gente vai ver aqui hoje ...

460. Aluno: O que é incógnita?

461. Professor: Incógnita é a letra, é o que a gente está procurando. A gente não está procurando isso aqui? É a incógnita. O que é a incógnita dessa equação?

462. Alunos: x.

463. Professor: x.

464. Professor: Então, a gente vai ver que, isolando a incógnita, algumas equações de segundo grau tem jeito de resolver, ou seja, eu tenho que usar essa palavra que o povo está falando todo dia aí na aula? Tem que ser Bhaskara? Não. Tem algumas equações que a gente consegue resolver já e é isso que a gente vai ver hoje. É o método de isolar as incógnitas. Beleza?

A aluna Laura substitui x por 4 na expressão e a iguala a zero (linha 191), o que não é aceito pelo professor, que argumenta que não se sabe ainda se o resultado é igual a zero ou não (linha 193). Aqui observamos a escolha, feita pelo professor, do uso do sinal de igual de acordo com a aritmética, no sentido unidirecional, da esquerda para a direita. Nesses exercícios, o professor está explorando o conceito de solução de uma equação e ele tem a preocupação de calcular os valores das expressões algébricas para, somente ao final do processo, decidir se o número é solução da equação, dependendo do resultado ser nulo, ou não. O professor é cuidadoso com o registro dos cálculos, na tentativa de explicitar os conceitos, de forma não automática (linhas 205, 207 e 451).

Após a correção dos exercícios, o professor dá início à apresentação do método de isolar a incógnita, por meio de diversos exemplos, envolvendo não apenas equações de 1º e 2º graus. Inicialmente apresenta uma equação do 1º grau, $3x - 2 = 16$, com o objetivo de exemplificar o método de resolução, uma vez que, no início da aula, os alunos já haviam resolvido algumas equações de 1º grau. Aqui vale uma ressalva, o método geral de resolução de equações consiste em isolar a incógnita, e o que ocorre é que no caso das equações de 1º grau, é fácil isolar a incógnita. No caso de uma equação completa de 2º grau, o método não é tão simples, pois é necessário utilizar a técnica de completar quadrados para conseguir isolar a incógnita. O que ocorre na prática é que, conhecida a fórmula geral de resolução da equação de 2º grau, o procedimento de isolar a incógnita (completando quadrados) passa a ser abandonado, reduzindo a solução dessas equações à substituição na fórmula obtida dos valores dos coeficientes da equação.

Em seguida, o professor dá início ao seguinte diálogo:

502. Professor: Nós vamos ver isso. A gente vai ver hoje alguns exemplos para a gente entender em que circunstâncias a gente pode usar esse método para resolver as equações de ... segundo grau. Primeiro exemplo que a gente pode utilizar o método. Olha: $3y^2 + 7 = 82$. Vamos fazer isso? Paula, o que você sugere para começar a resolver aquela equação ali?
503. Paula: Isolando o 3 ...

A aluna utiliza os procedimentos necessários para isolar a incógnita, chegando à equação $y^2 = 25$, quando o professor faz a seguinte intervenção:

519. Professor: Oh, pessoal, muita calma ... calma, muito calma, quando a gente chegar aqui, a gente acabou de descobrir que y^2 é igual a quanto? A 25. A gente já estudou potência, não?
520. Alunos: Já.
521. Professor: A gente já estudou raiz, não?
522. Alunos: Já.
523. Professor: Quando a gente olha ... eu tenho aqui ... $y^2 = 25$. Existe algum número que eu coloque no lugar do y que dá 25?
524. Alunos: 5.

Com a ajuda do professor, os alunos chegam também à raiz negativa. A seguir, o aluno Kleber levanta a discussão sobre quais equações do 2º grau podem ser resolvidas por esse método:

609. Kleber: Antônio, então, desse jeito aqui dá para resolver equação do segundo grau só se tiver uma incógnita só, na equação?
610. Professor: Aqui a gente tem ... olha. Cuidado com esse “uma incógnita” porque, por exemplo, ...

611. Kleber: Porque se tiver mais $2x$, aí mais $2x$ ...

612. Professor: Pois é, mas olha, se tiver $y^2 + 2y - 3$ ... , quantas incógnitas a gente tem nessa equação?

613. Alunos: Duas. [Professor sinaliza que não]

614. Professor: Quem é que é a incógnita?

615. Aluna: É o y.

616. Professor: A pergunta do Kleber é a seguinte: quando a gente tem a equação nessa forma, por exemplo, $y^2 + 2y + 13$ ...

617. Kleber: Isso.

618. Professor: ... a gente tem uma incógnita, mas a gente tem uma equação na forma o quê? Completa. A gente até vai falar sobre isso. Quando ela estiver na forma completa, um dos jeitos é esse outro que você falou aí, que a gente vai fazer daqui a pouco. Mas nesse caso aqui é uma incógnita só, mas a minha equação está o que? [referindo-se a $3y^2 + 7 = 82$]

619. Kleber: Incompleta.

620. Professor: Incompleta.

O professor aproveita a fala do aluno para retomar, com a turma, o significado de incógnita e dar a definição de forma completa e incompleta de uma equação. Em seguida, o professor apresenta o exemplo $2\sqrt{x} + 3 = 11$, os alunos conseguem isolar a incógnita chegando, sem dificuldade, à expressão $\sqrt{x} = 4$:

650. Professor: 8 sobre 2 . Que dá igual a ... ? Olha aqui, $\sqrt{x} = 4$.

651. Aluno: Ah, é só isso?

652. Professor: Não. Eu quero saber. O que eu quero saber?

653. Alunos: Dois//dois//é dois.[Vários alunos afirmam que vai dar dois. A turma fica agitada e os alunos discutem sobre o que estava escrito no quadro]

654. Professor: Espera um pouquinho. A raiz do número que eu estou procurando é quatro. Que número que eu estou procurando, então?

655. Aluna: Dois.

656. Professor: $\sqrt{2}$ é 4?

657. Aluna: Não.

658. Professor: A raiz do número que eu estou procurando é quatro.

659. Aluno: Raiz de dezesseis é quatro.

660. Professor: Então, qual é o número? Então, eu vou escrever aqui. [O professor escreveu no quadro $x = 16$] [Muitos alunos falando simultaneamente]

Alguns alunos acham que essa última equação deveria ter também duas soluções, sugerem -16, o professor justifica porque um número negativo não pode ser raiz da equação, e encontra o conjunto solução da equação:

661. Professor: Olha para cá então, pessoal. Eu ouvi duas respostas. Antes de copiar, escuta para não copiar errado. Eu escutei duas respostas. Não copia. A Letícia falou isso aqui [professor escreve no quadro $x = -16$].
662. Letícia: [inaudível]. Eu não falei isso não.
663. Professor: Ah, bom. x igual a ... ? Raiz de dezesseis é quanto? Dezesseis resolve essa equação?
664. Alunos: Resolve.
665. Professor: Vamos testar.
666. Aluno: Na prova vai ter que testar.
667. Professor: $\sqrt{16}$ é ...? Quanto que é?
668. Rodrigo: 4 .
669. Professor: Por que é 4 , Rodrigo?
670. Rodrigo: Porque 4^2 é 16.
671. Professor: Porque 4^2 é 16, certo. Então, resolve?
672. Alunos: Resolve.
673. Professor: Então, 16 é uma das possíveis respostas, das possíveis soluções. Tem outra?
674. Aluno (1): Menos [inaudível] 16 .
675. Professor: $-\sqrt{16}$?
676. Aluna (2): Mas, ali não tem menos como é que você vai tirar dali?
677. Professor: Pois é, de onde você tirou isso?
678. Aluna (1): Ah, não sei não.
679. Professor: A sugestão foi, olha aqui: x igual a ... sugestão: $-\sqrt{16}$.
680. Aluno: Menos quatro ao quadrado.
681. Aluna: Porque $2\sqrt{16}$ é 8 e $11 - 3$ é 8.
682. Professor: A sua sugestão é fazer isso aqui? [professor apagou $-\sqrt{16}$ e escreveu -4^2]
683. Aluna: Não, professor.
684. Professor: Muito cuidado porque olha aqui ... olha aqui oh! ... cuidado com o que a gente tem que ter nesse caso aqui [aponta para $\sqrt{x}$] ... o cuidado: o x, o número que a gente está procurando, ele está dentro de quê? Pode ter número negativo aqui? [apontando para $\sqrt{x}$]
685. Aluna: Pode.
686. Professor: Dentro da raiz?
687. Alunos: Não.

688. Professor: Dentro pode ter?

689. Aluna: Não.

690. Professor: O x pode ser negativo?

691. Alunos: Não.

692. Professor: ... se alguém pensasse na solução, por exemplo, -16 , podia?

693. Alunos: Não, não,...

694. Professor: -16, podia?

695. Alunos: Não, não, ...

696. Professor: Por que não podia? Porque não existe ...

697. Alunos: Raiz quadrada de número negativo.

698. Professor: Ótimo, essa é nossa única solução [aponta para $x = 16$]. O que é que é nossa solução, então?

699. Alunos: Dezesseis.

700. Professor: Solução igual a ... [escreve no quadro $S = \{16\}$]

Entretanto, uma aluna não fica convencida da solução apresentada e argumenta:

701. Aluna: Oh professor, mas, na outra não tinha nada de menos também e você colocou menos cinco.

702. Professor: Boa pergunta... fala para mim como é que estava antes da resposta. y ao quadrado igual a?

703. Aluna: $y^2 = 25$, aí você colocou y...

704. Professor: Olhe aqui, agora olhem bem: $y^2 = 25$. Olha a pergunta que eu faço: qual é o número que elevado ao quadrado dá 25? $(-5)^2$ ... 25; 5^2... 25. Aí o jeito que a gente ...

705. Aluna: [inaudível] raiz.

706. Professor: A raiz até entra aqui. Mas, olha onde é que entra a raiz: $y = \sqrt{25}$ ou $y = -\sqrt{25}$. O menos está aqui dentro? [apontando para dentro do sinal da raiz de $-\sqrt{25}$]

707. Alunos: Não.

708. Professor: Lá é diferente, não é? A pergunta aqui é outra. A pergunta é: a raiz de um número é quatro, que número é esse? Percebeu a diferença? Do que ter um exemplo assim [o caso da $y^2 = 25$] e em sequência aparecer um exemplo assim [$\sqrt{x} = 4$], para a gente não confundir na hora de dar a resposta.

Esses dois últimos exemplos envolvem o conceito de funções inversas, e parecem ter sido escolhidos pelo professor, porque ele sabe que os alunos têm dificuldade em compreendê-lo e ele pretende explicitá-lo, razão pela qual os exemplos foram colocados sequencialmente. (linha 708).

O professor apresenta o próximo exemplo, $5ax - 7a^2 = 2a^2 + 2ax$, como um desafio, explicitando que a incógnita é x:

709. Professor: Então olha aqui. Exemplo 4, desafio: considere a equação seguinte na incógnita x. Por que eu tive que escrever isso aqui [grifou na incógnita x] nesse exemplo e não escrevi nos outros?
710. Letícia: Porque tem mais de uma incógnita.
711. Aluno (1): ... porque senão não vai dar igual ...
712. Aluno (2): Você tem que achar os valores ...
713. Professor: A Letícia passou perto ali. Como é que você falou?
714. Letícia: Que tem mais de uma incógnita.
715. Professor: Tem mais de uma o quê? [Várias vozes]
716. Professor: Tem mais de uma letra, não tem? Eu precisava dizer ... eu quero achar o quê?
717. Aluno (2): x.
718. Professor: Não é?
719. Aluno (2): a.
720. Professor: Na verdade a está funcionando aqui como se fosse ... ?
721. Alunos: [inaudível]
722. Professor: Não. Podia ser o quê? Se no lugar do a tivesse um 5 aqui? Se tivesse um 8? Então, o a está funcionando como ... ?
723. Aluno: Nada.
724. Professor: Um número, não é? Quem é que é a incógnita aqui?
725. Alunos: x.
726. Professor: É. OK. Você tem razão. Na hora de isolar, a gente vai isolar a incógnita. Quem é que a gente vai isolar?
727. Aluno: O x.
728. Professor: O x.

Nessa parte, o professor diz que x é a incógnita e que a pode representar qualquer número. Segundo a classificação das diversas concepções para as letras usadas em álgebra, proposta por Küchemann (1981), o professor está interpretando a letra a como um número generalizado, isto é, como representante de vários números ou que pode ser substituída por mais de um valor (linha 722). Ele definiu "incógnita como a letra, é o que a gente está procurando" (linha 461) e quando Kleber diz que a equação $y^2 + y - 3 = 0$ possui duas incógnitas (linha 613), o professor sinaliza com a cabeça que não é assim, e enfatiza que nessa expressão há uma única incógnita (y). Parece haver um entendimento na turma sobre o significado de incógnita e que está de acordo com a conceituação proposta por Küchemann (1981), ou seja, uma letra representando um número específico, mas desconhecido, com a qual é possível efetuar operações e cujo valor, que está sendo procurado, pode ser calculado, considerando as restrições impostas pelo problema. De acordo com os estudos de Küchemann (1981), a maioria dos alunos com idades variando entre 13 e 15 anos trata as letras nas equações e expressões primeiramente como incógnitas específicas, antes de tratá-las como números generalizados ou como variáveis nas relações funcionais. Os diferentes significados das letras na álgebra, assim como a passagem do uso da letra como incógnita para o uso como variável, fazem parte do saber docente específico do professor de matemática.

O professor Antônio toca nessa diferenciação, mas não aprofunda a discussão, dando prioridade ao objetivo proposto para a aula, que é resolver equações isolando a incógnita. Os alunos chegam à expressão: $x = \frac{9a^2}{3a}$, quando ocorre o seguinte diálogo do professor com a turma:

760. Professor: Vê se vocês concordam comigo: 9 vezes a vezes a, não é isso aqui? $9a^2$.
761. Alunos: É.
762. Professor: Embaixo é 3 vezes a ...
763. Aluno: Vai dar $3a$.
764. Aluno: 9 dividido por 3 ...
765. Professor: ... simplifica, a simplifica com a ... [corta o a de cima com o a de baixo]
766. Aluna: 9 com 3.
767. Professor: ... o 9 com o 3 [corta o 9 de cima, corta o 3 de baixo e escreve o 3 para substituir o 9]. Fica 3 o quê?
768. Alunos: $3a$.
769. Professor: Quem é que é a solução dessa equação?
770. Alunos: $3a$.

...

822. Professor: Onde você não entendeu?
823. Aluna: Você cortou o 9 ...
824. Professor: Não é cortei ... qual é a palavra que a gente combinou que vai usar?
825. Alunos: Dividiu.
826. Professor: 9, simplifiquei ou dividi por 3 ...
827. Aluna: Ah, 9 por 3 é 3.

O professor enfatiza o significado de procedimentos utilizados na resolução de equações, relembrando a turma sobre o combinado de não utilizar a palavra “cortar”, mesmo que visualmente se indique a simplificação de frações fazendo um traço sobre os números ou letras que foram divididos.

Para continuar a apresentação do método de resolução de equações isolando incógnitas, o professor escolhe o seguinte exemplo, proposto pelo próprio professor: $\frac{5(x-2)}{2} = \frac{(x-2)(x-3)}{3} - \frac{x^2}{3}$:

849. Aluna: Professor, esses $(x-2)$ e $(x-3)$, é para multiplicar um pelo outro?
850. Professor: Calma lá. Não sai multiplicando antes da hora não.
851. Kleber: Vai ter que fazer mmc.

Kleber sugere calcular o mínimo múltiplo comum (mmc), o que não é considerado pelo professor nesse momento, pois ele pretende, primeiramente, justificar a necessidade de simplificar a equação:

852. Professor: Pessoal! Espera aí. A gente tem uma equação ... aparentemente, quando a gente olha para ela assim, você acha que ela é uma equação de que grau?
853. Alunos: Segundo//Segundo porque... [Várias vozes dos alunos afirmando que a equação é de segundo grau.]
854. Professor: Será que dá para a gente resolvê-la? [Os alunos afirmam que é possível resolvê-la.]
855. Professor: Para a gente saber ... se pelo menos ... dá para a gente tentar melhorar a aparência dela, simplificar um pouco, para ver se a gente dá conta, não é?
856. Kleber: Mas, não vai dar resultado ...
857. Professor: Vamos ver o que a gente pode fazer para melhorar.
858. Letícia: Deixa-me fazer?
859. Professor: Letícia, primeira coisa, o que é que você sugere para a gente fazer para começar a resolver?
860. Letícia: Resolve primeiro o que está entre parênteses.
861. Professor: A sugestão da Letícia ...
862. Aluno: Tirar dos parênteses.
863. Professor: é multiplicar... é tirar dos parênteses. Vocês acham que isso aqui é a melhor coisa para fazer? [Alguns alunos concordam e outros não.]
864. Kleber: Não.

865. Professor: Você acha que eu tenho que fazer o quê? [dirigindo-se ao Kleber]
866. Kleber: Tirar o mmc, depois você sai cortando os números do denominador.
867. Professor: Espera aí, calma.

Letícia propõe resolver primeiro o que está dentro dos parênteses, mas como essa não parece ser a estratégia planejada pelo professor, ele retoma a sugestão do Kleber e indica que esse é o procedimento adequado:

869. Professor: Primeira sugestão sua foi o quê? A primeira sugestão do Kleber foi a seguinte, vamos colocar... Aqui eu tenho uma fração, não tenho? [lado esquerdo da fração]
870. Alunos: Tem.
871. Professor: De cá eu tenho duas frações não tenho? [lado direito] ...Vamos colocar ...
872. Aluna: Já sei, vai achar o mmc de 2 e 3.
873. Professor: ... vamos tentar colocar todo mundo em um mesmo denominador e depois que a gente tiver o mesmo ... olha aqui, para a gente poder ... aqui tem uma igualdade não tem?
874. Kleber: Tem.
875. Professor: Se a gente chegar em uma fração aqui e uma fração de cá com o mesmo denominador ... [referindo-se aos dois lados da equação]
876. Kleber: Dá para cortar.

É interessante observar que (linha 852) ao iniciar a discussão do exemplo $\frac{5(x-2)}{2} = \frac{(x-2)(x-3)}{3} - \frac{x^2}{3}$, o professor utiliza uma abordagem diferente da que foi usada na aula anterior (linha 140, aula do dia 23/04), para concluir que essa equação tem grau 2. Ele pergunta aos alunos "aparentemente ... você acha que ela é uma equação de que grau?", já sugerindo que o seu grau pode não ser o que parece à primeira vista (linha 852), porque ela não está escrita na forma canônica. Isto pode indicar que talvez o professor tenha sentido algum estranhamento com o desenrolar da discussão na aula anterior, que não chegou a explicitar, mas influenciou na discussão desse novo exemplo.

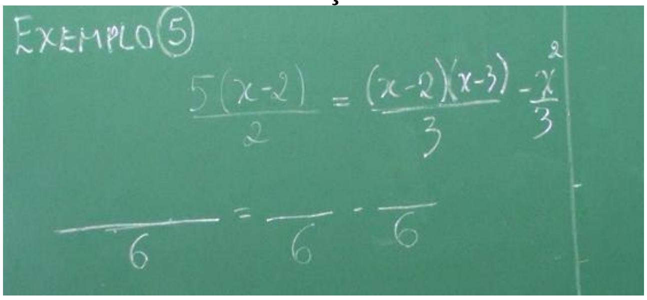
A resolução dessa equação inclui, além do domínio de operações com expressões algébricas, um conhecimento anterior sobre frações. Imediatamente após o professor escrever a equação no quadro, uma aluna pergunta (linha 849) se é para multiplicar as expressões $(x-2)$ e $(x-3)$. O professor pede para esperar antes de "sair multiplicando antes da hora" e Kleber já diz que vai ter "que fazer mmc" (linha 851). Mas o professor não leva em conta a sugestão do aluno nesse momento, pois pretende inicialmente justificar a necessidade de simplificar a equação. Percebe-se, mais uma vez, o incômodo do professor com a utilização mecânica de algumas regras por parte dos alunos, que ele não consegue evitar. Outra aluna, Letícia, é taxativa (linha 860): “Resolve primeiro o que está entre parênteses”. Essa é uma regra muito utilizada na resolução de expressões numéricas, e muito enfatizada pelos professores: primeiro se resolve o que está dentro dos parênteses, depois dos colchetes e finalmente o que está dentro das chaves. No presente caso, a estratégia proposta pela aluna levaria ao cancelamento dos termos de 2º grau presentes no numerador, e, portanto, poderia ter sido utilizada, sem causar maiores transtornos.

Kleber retoma a sugestão dada e resume o procedimento a ser utilizado: tira o mmc e depois sai “cortando os números do denominador” (linha 866). Ele não respeita a combinação de evitar o uso da palavra “cortar”, e realmente algumas combinações não conseguem se impor e o professor acaba tendo que ceder, como nesse caso, até porque usualmente cortam-se os denominadores, desenhando traços oblíquos sobre eles.

Definida a estratégia para a resolução dessa equação, tem início o processo de construção coletiva da resolução:

877. Professor: ... a gente fica com uma vida boa, já. Por enquanto a gente tem denominador diferente, isso complica um pouquinho a vida, não complica?
878. Professor: Vamos colocar todo mundo em um mesmo denominador ... calma lá, antes ... para a gente não fazer conta à toa. O mmc de 2 e 3 é ... ?
879. Alunos: 6.
880. Professor: 6. Então, eu vou colocar todas essas frações com denominador ...?
881. Alunos: 6.
882. Professor: ... antes da igualdade você tem quantas frações?
883. Alunos: Uma.
884. Professor: Uma [escrevendo: $\frac{}{6}$]
885. Aluno: 6 dividido por 2 ...
886. Professor: Depois da igualdade você tem quantas frações?
887. Alunos: Uma// duas// uma// só uma ...

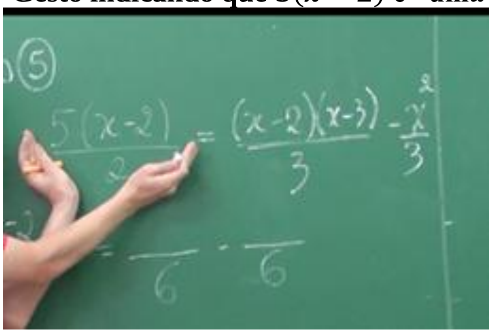
Figura 4 - Colocando todas as frações com o mesmo denominador



Fonte: Vídeo turma 9º A, 24/04/2012, filme 108

888. Professor: Tudo bem. Agora aqui oh, vamos lá. Eu fiz com o mesmo denominador. Vamos ver então: mmc ... 6 por 2?
889. Alunos: 3.
890. Professor: 3 vezes 5?
891. Alunos: 15.
892. Professor: 15 [escrevendo no quadro: $\frac{15}{6} = \frac{}{6} - \frac{}{6}$].
893. Kleber: 6 por 2 ... 3 ... vezes x ... $3x$ [escuta-se ao fundo durante a fala do professor].
894. Professor: E aqui [referindo-se à expressão $x - 2$] repete, não é? Certo? [escrevendo no quadro: $\frac{15(x-2)}{6} = \frac{}{6} - \frac{}{6}$]
895. Aluno: E não multiplica, não?
896. Professor: Porque ... olha aqui, isso aqui não é um produto? Não é uma coisa só?

Figura 5- Gesto indicando que $5(x-2)$ é "uma coisa só"

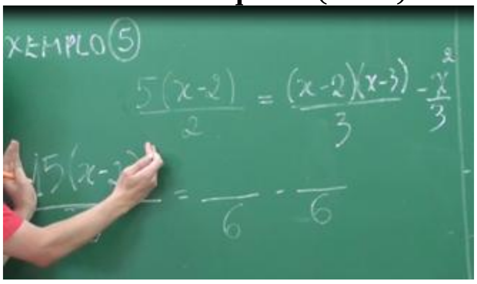


Fonte: Vídeo turma 9º A, 24/04/2012, filme 108

897. Kleber: Não multiplica por dentro, não?
898. Professor: Olha bem! [O professor pede para os alunos escutarem, vários falando ao mesmo tempo]. Se tirar dos parênteses a gente vai arrumar uma fração [apontando para $\frac{5x}{2}$] e outra fração, não é? Aí a gente vai ter uma subtração, não é? Aí a gente vai fazer o primeiro

e o segundo, não é? Mas aqui [apontando para $15(x-2)$] a gente tem o quê? Um produto, não é? Então, a gente faz o seguinte: a gente faz 6 por 2 ... 3 ... 3 vezes 5 ... 15, só depois que a gente distribui.

Figura 6 - Gesto indicando que $\mathbf{15(x-2)}$ é um produto



Fonte: Vídeo turma 9º A, 24/04/2012, filme 108

899. Kleber: Professor, dentro dos parênteses ... faz assim ... 6 dividido por 2 ... 3 ... abre parênteses $3x$ menos 6
900. Professor: Pergunta, mas olhe aqui, isso aqui [apontando para $5(x-2)$] é um produto, não é? A gente não tem um produto aqui?
901. Kleber: É.
902. Professor: Então é um número só, não é, na hora que multiplica os dois porque ... [inaudível]. Só depois é que distribui, certo?
903. Aluno: Deixa eu perguntar ...
904. Professor: Pode perguntar.
905. Aluno: [inaudível]
906. Professor: Vou chegar lá. Então, vamos ... 6 por 3 ...
907. Alunos: 2.
908. Professor: 2, aqui [fazendo o movimento de escrever 1 antes de $(x-2)(x-3)$] é o quê?
909. Aluno: Não muda nada.
910. Alunos: 1.
911. Professor: 1.
912. Professor: Então, 6 por 3 ... 2. É só repetir aqui [referindo-se a $(x-2)(x-3)$, não é?
913. Alunos: 2.
914. Professor: 2 vezes o quê? ... x ....
915. Aluno: Dá na mesma.
916. Kleber: Eu achei que multiplicava dentro dos parênteses também.
917. Professor: Então, vamos lá. 6 por 3 ...
918. Alunos: 2.

919. Aluna: 2 vezes x^2.

920. Kleber: Agora corta aí, professor.

O aluno Kleber tem uma visão geral do procedimento a ser utilizado para a resolução da equação, foi dele a sugestão de tirar o mmc para ao final cortar os denominadores. No entanto, para ele (linha 893), após dividir o mmc (6) pelo denominador da 1ª fração (2), o resultado (3) deveria ser multiplicado por ambos os fatores que compõem o numerador: 5 e $(x-2)$. E ele repete isso outras vezes (linhas 897, 899 e 916). O professor argumenta que a expressão $5(x-2)$ é um produto, é uma "coisa só" e que só depois é que distribui (linhas 898, 900, 902). No entanto, ao multiplicar 3 por $5(x-2)$ o professor não está considerando a expressão como uma coisa só, porque ele multiplica o 3 apenas pelo 5. Ele não indica a multiplicação $3.[5(x-2)]$, mas já efetua o cálculo $3.5(x-2) = 15(x-2)$, tratando diferentemente o número 5 e a expressão algébrica $(x-2)$. Em seguida, o professor diz que só depois é que distribui, ou seja, deixando de considerar a expressão $15(x-2)$ como "uma coisa só".

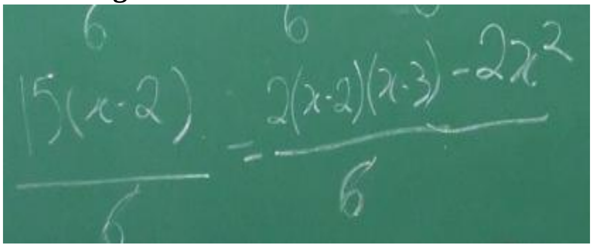
O professor considera as expressões algébricas transitando livremente entre as concepções estrutural e procedimental, aparentando não se dar conta que os alunos não possuem a mesma flexibilidade que ele, e que não percebem uma expressão algébrica como "uma coisa só", um objeto, mas sim como um procedimento a ser efetuado. Outro ponto que merece discussão nessa aula é a "regra" enfatizada pelo professor para a resolução da equação: primeiro tira o mmc para depois usar a distributividade. A regra está correta, mas está desligada do objetivo (resolver a equação) e, dependendo da equação, nem sempre esse é o melhor procedimento. Alguns alunos sugeriram multiplicar as expressões $(x-2)$ e $(x-3)$ primeiramente (linhas 849, 860, 862), e o professor ignorou essa sugestão, preferindo a que foi proposta pelo Kleber. No caso em questão, a regra estabelecida pelo professor pode ser vista como arbitrária, uma vez que os dois procedimentos propostos têm o mesmo grau de dificuldade, sendo indiferente a utilização da propriedade distributiva antes ou depois de tirar o mmc, e o professor não apresenta para os alunos uma justificativa para não tirar os parênteses das expressões em primeiro lugar nem porque é necessário tirar o mmc antes. O modo de lidar com essas regras em sala de aula requer um conhecimento complexo por parte do professor, que poderia ter sido mobilizado de forma mais efetiva e explícita no episódio acima. Esse conhecimento se constrói a partir da interação entre a compreensão dos conteúdos matemáticos específicos e a familiaridade com a maneira de pensar matematicamente dos alunos. Esse tipo de conhecimento pode ser visto como parte do domínio conhecimento do conteúdo e dos alunos, conforme proposto por Ball, Thames e Phelps (2008).

O professor, então, continua os cálculos, chegando à expressão $\frac{15(x-2)}{6} = \frac{2(x-2)(x-3)}{6} - \frac{2x^2}{6}$. Outro aluno pergunta quando eles irão multiplicar o que está dentro dos parênteses e o professor responde que isso deverá ser feito posteriormente. E, mais uma vez, ele justifica porque é possível cortar os denominadores:

932. Professor: Calma! Antes de resolver a conta ...
933. Kleber: Pode cortar?
934. Professor: Calma. Agora aqui [referindo-se às duas frações no lado direito da igualdade] está com o mesmo denominador, não está?
935. Aluno: Ah, você já repetiu isso aí.
936. Professor: É isso que eu vou fazer. Concordam? Vocês concordam com o que eu fiz aqui?
937. Aluno: ... é o mesmo denominador, sei.
938. Outro aluno: Não, é porque é uma igualdade.
939. Professor: Está certo aqui?
940. Alunos: Está.
941. Professor: Agora, olha. O que eu tenho do lado de cá da igualdade? [lado esquerdo da igualdade]
942. Aluno: *6*.
943. Kleber: Uma fração.
944. Professor: Uma fração. O que eu tenho do lado de cá da igualdade? [lado direito da igualdade]
945. Alunos: Uma fração, outra fração.
946. Professor: Denominador igual, não é?
947. Alunos: É.
948. Professor: Para essa fração ser igual, o que é que tem que acontecer?
949. Um aluno: Cortar.
950. Professor: Isso aqui [apontando para o numerador da fração que está no 1º membro da igualdade] tem que ser igual a isso [apontando para o numerador da fração que está no 1º membro da igualdade] aqui. Aí o pessoal usou uma palavra aí ... que é falar assim: cortar.
951. Kleber: Isso.
952. Professor: ... não é cortar não, a gente está só fazendo uma igualdade de frações, não é? Acaba que, para isso ser igual, já que o denominador é igual, o numerador tem que ser igual.

Aí tem gente que fala cancela ... [nesse momento o professor passa um traço nos denominadores]

Figura 7- Denominadores "cortados"



Fonte: Vídeo turma 9º A, 24/04/2012, filme 108

Mais uma vez é possível perceber o empenho do professor (desde a linha 869) para justificar (linha 952) o procedimento utilizado para "cortar" os denominadores: se os denominadores de duas frações iguais são iguais, então os numeradores delas também são iguais. Ele diz que o uso das palavras "cortar" ou "cancelar" nesse contexto é inadequado, apesar de não apresentar uma razão para isso. Em nenhum momento, ele propõe multiplicar as frações iguais pelo mínimo múltiplo comum ou produto dos denominadores.

Sempre que possível, o professor apresenta as justificativas matemáticas que ele julga adequadas para os procedimentos utilizados pelos alunos, muitas vezes retomando as falas dos próprios alunos, tais como "passar para o outro lado da equação", "multiplicar cruzado" etc.

Do ponto de vista do domínio dos procedimentos para resolver as equações dadas anteriormente, a aula parece se desenvolver segundo o planejamento e as expectativas do professor. Ele conduz a sala na construção coletiva das soluções, escolhendo um determinado aluno para resolver um exemplo dado, ou escolhendo a intervenção de um aluno que irá levá-lo na direção desejada e, muitas vezes, antecipando concepções inadequadas dos alunos, para esclarecer as dúvidas que eles porventura possam ter. Essas ações refletem um saber importante do professor, que também pode ser identificado com o domínio conhecimento do conteúdo e dos alunos, conforme proposto por Ball, Thames e Phelps (2008).

Após apresentar a justificativa, o professor "corta" os denominadores, e chega à expressão $15(x-2) = 2(x-2)(x-3) - 2x^2$ no quadro. Para "tirar" os parênteses, conforme proposto pelos alunos, ele utiliza a propriedade distributiva, repetindo a fala dos alunos e escrevendo no quadro as operações sugeridas por eles:

955. Professor: Agora sim. E aí, Kleber? E agora?

956. Kleber: $15x$ ...

957. Professor: Agora, isso aqui, não é? [o professor desenha um arco ligando 15 a x e outro arco ligando 15 a 2]. $15x - 30$ é igual a ... [escrevendo no quadro, repetindo a fala dos alunos]

958. Alunos: É igual a $2x$ menos 4 ... [Várias vozes dos alunos]

959. Professor: Vai ficar assim primeiro, não é? Oh, $2x$ ... [desenhando arcos ligando 2 a x e 2 a 2]

960. Alunos: ... menos 4 ...

961. Professor: Vezes?

962. Kleber: $x - 3$.

963. Professor: Menos?

964. Kleber: $2\ x^2$.

965. Professor: Assim, não é?

966. Kleber: Isso.

967. Professor: Repetindo ... $15x - 30$. E agora? Agora vai ser ...

968. Kleber: $2\ x^2$...

969. Professor: Assim, não é? [desenhando arcos ligando $2x$ a x e $2x$ a 3]

970. Alunos: $2\ x^2$ menos ...

971. Professor: $2\ x^2$ ...

972. Alunos: ... menos $6x$ ...

973. Professor: ... $-6x$ ...

974. Kleber: ... menos $4x$ ... [professor desenha arcos ligando 4 a x e 4 a 3]

975. Aluna: ... menos $4x$ mais ...

976. Kleber: ... menos $4x$ menos ... mais 12 ...

977. Professor: ... mais 4×3?

978. Kleber: ... 12 ...

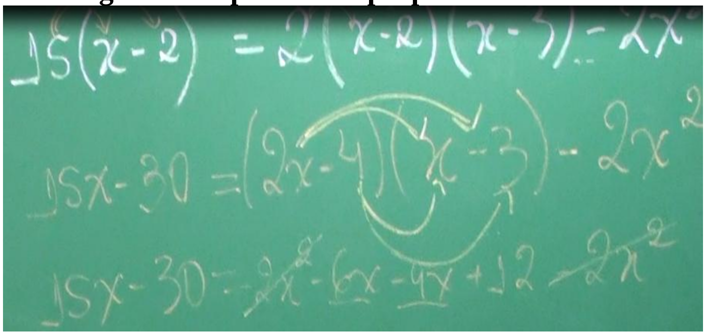
979. Professor: Menos?

980. Aluna: $2x^2$.

981. Aluno: Cancela, cancela.

982. Kleber: Cancela $2x^2$ ...

Figura 8 – Aplicando a propriedade distributiva



Fonte: Vídeo turma 9º A, 24/04/2012, filme 108

983. Professor: Olha aqui, $15x - 30$. Olha aqui, menos, oh, $2x^2$...

984. Kleber: Cancela.

985. Aluna: $-2x^2$ ...

986. Professor: $-2x^2$ ...

987. Professor: Pode cancelar, Kleber?

988. Alunos: Pode.

989. Professor: Aqui a palavra cancela é boa, aqui pode ...

990. Aluno: Ali pode ...

991. Professor: ... é aqui pode. 6 e 4 deu quanto?

992. Alunos: 10//-10.

993. Professor: Menos ...

994. Alunos: 10.

995. Professor: ... -10.

996. Alunos: -10.

Na utilização da propriedade distributiva, é o professor quem desenha os arcos ligando os termos das expressões algébricas que devem ser multiplicados e os alunos vão dizendo os resultados das multiplicações, tornando a aplicação da propriedade automatizada.

O professor faz marcas (traços oblíquos) sobre os termos que podem ser cancelados, ressaltando, inclusive, que o termo “cancela” foi utilizado corretamente por Kleber, sem, no entanto, dizer por qual razão. Anteriormente, na resolução de uma equação, uma aluna disse não haver entendido porque o professor “cortou” o 9 (linha 823) na expressão $x = \frac{9a^2}{3a} = \frac{9.a.a}{3.a}$, e ele disse que já havia sido combinado na turma não utilizar a palavra “cortar” mas sim “simplificar” ou “dividir”. Mas, na prática, é comum fazer marcas, traços, sobre as simplificações efetuadas, de modo que realmente estamos cortando, no sentindo de riscar, os denominadores ou os termos opostos nas expressões e o problema principal é saber quando "cortar". Certamente as palavras "simplificar" ou "dividir", propostas pelo professor, estão relacionadas ao contexto matemático e podem evocar o significado dos procedimentos que estão sendo utilizados, enquanto que "cortar" pode significar simplesmente o fato de riscar.

Nessa aula, alguns alunos não estavam utilizando corretamente a propriedade associativa do produto de expressões algébricas, o que foi explicitado pelo aluno Kleber, que disse (linha 899) que achava que $3.(5(x-2)) = (3.5)(3(x-2))$, ou seja, para ele, a multiplicação deveria ser distributiva em relação à multiplicação. Como dissemos anteriormente, o professor argumenta que a expressão $5(x-2)$ é uma "coisa" só, ou que após multiplicar as expressões 5 e $x-2$, o resultado obtido é um único número. No entanto, ao multiplicar o 3 somente pelo 5, ele não está considerando $5(x-2)$ como o resultado da multiplicação dos dois fatores 5 e $(x-2)$, mas sim cada um separadamente, pois em vez de escrever $3.[5(x-2)]$, ele fez a multiplicação $(3.5)(x-2)$, utilizando a propriedade associativa: $3.[5(x-2)\,] = (3.5)(x-2) = 15(x-2)$. Nesse momento, o professor não explicita o uso da propriedade associativa, dando ênfase somente ao uso da propriedade distributiva. Os argumentos do professor não respondem à questão colocada por Kleber, pois ele simplesmente diz qual o procedimento que deve ser adotado. Nesse dia, o professor encerra a discussão, dizendo que eles deveriam utilizar a propriedade distributiva somente ao final do procedimento, e, os alunos, então, passam a fazer os cálculos necessários para encontrar a solução da equação dada. Como dissemos anteriormente, o professor não apresenta justificativa para a utilização da distributividade somente ao final do procedimento. O professor parece estar preso a essa regra, que nem sempre faz sentido na resolução de equações algébricas, impedindo o desenvolvimento, pelos alunos, de outras estratégias, propostas por eles, para a resolução da equação dada, e que poderiam ser tão eficazes como a que foi desenvolvida em sala. Muitas vezes são os livros didáticos que reforçam esses "passos" que devem ser seguidos, literalmente passo a passo, para se chegar a bom termo nessas situações que requerem muitos cálculos, antes de permitir flexibilidade nos procedimentos. Por outro lado, saber escolher uma estratégia pressupõe maturidade dos alunos, o que, nem sempre, é o caso.

O último exemplo apresentado pelo professor vai trazer à tona algumas dificuldades dos alunos com os conceitos e propriedades de potências e raízes:

1012. Professor: Pessoal, último exemplo do dia ... $x^2 + 10 = 1$, ou seja, eu quero achar um número que elevado ao quadrado somado com 10 dá quanto?

1013. Aluna: 1.

1014. Professor: Será que existe esse número?

1015. Alunos: Existe// não// existe// ... [Várias vozes dos alunos]

1016. Professor: x^2 é igual a? [escrevendo no quadro]

1017. Aluna: 1.[Várias vozes]

1018. Professor: 1 menos...

1019. Aluna: 10.

1020. Professor: x^2... ?

1021. Aluno: Vai dar raiz quadrada. [Professor escreve no quadro $x^2 = -9$]

1022. Professor: Calma lá, calma lá ...

1023. Aluno: Não existe $\sqrt{-9}$.

1024. Aluna: Claro que sim, $-\sqrt{9}$ ...

1025. Professor: ... olha aqui, a gente chegou, quando a gente isolou a incógnita que $x^2 = -9$, no fundo ... interpreta o que está escrito aqui, o que eu estou querendo achar?

1026. Aluna: x.

1027. Professor: O número ...

1028. Alunos: que elevado a dois é igual a menos nove.

1029. Professor: Você conhece algum número, nos reais, que elevado ao quadrado dá menos nove?

1030. Alunos: Não//Não existe

1031. Professor: ... não. Alguém virou e falou assim ... Ah! ... ... porque que você não tira a raiz de -9... existe $\sqrt{-9}$?

1032. Aluna: Não, era uma impressão que eu tinha antes.

1033. Kleber: Não existe raiz de número negativo, não existe.

1034. Aluno: Não existe raiz quadrada de número negativo.

O professor traduz a equação para a linguagem natural (linha 1029), numa tentativa de dar significado à equação e assim conseguir estabelecer um diálogo com os alunos. Um argumento utilizado por alguns alunos para a não existência de soluções é o fato inquestionável de que não existe raiz quadrada de número negativo, mas outro aluno argumenta que nos complexos tem solução sim:

1036. Aluno: Dá $3i$.

O professor é, então, levado a explicitar o conjunto numérico com o qual estão trabalhando:

1037. Professor: ... olha aqui, $x^2 = -9$, a gente está trabalhando no conjunto dos reais, a gente já viu que nos reais a gente não consegue encontrar uma solução para isso, não é? A solução nos reais vai ser o quê?
1038. Aluna: $x^2 - 9$ ...
1039. Kleber: Vazia.
1040. Professor: Existe solução?
1041. Kleber: Vazia.
1042. Kleber: Zero cortado.
1043. Professor: Então, olha aqui oh! ... primeiro, a gente viu que a gente não consegue encontrar um número que elevado ao quadrado é menos nove, isso significa que a gente não consegue achar uma solução para a nossa equação, ou seja, nossa equação não tem solução ...
1044. Aluno: E Bashkara resolve?
1045. Aluno: Não.
1046. Professor: ... não existe solução. Bashkara não faz milagre, entendeu, é uma ferramenta para achar as soluções, quando elas existem. Existe solução aqui?
1047. Aluna: Não.
1048. Professor: Não. Aí oh, lembra ...
1049. Aluno: Existe solução, só não existe nos números reais.

O professor termina fazendo um resumo do conteúdo da aula:

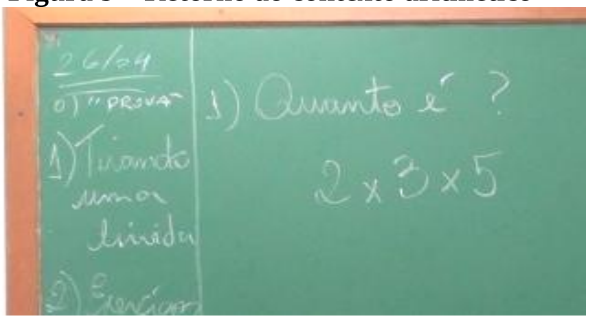
1069. Professor: Olha aqui pessoal, para o nosso esquema agora de entender as equações de 2º grau e entender algumas equações que a gente consegue resolver sem precisar usar essas ferramentas, e aí foi importante alguém perguntar: a gente explica que não tem solução, adianta eu usar outra ferramenta estilo essa daqui, Bashkara? Não, essa equação aqui ... [Várias vozes de alunos]
1070. Aluno: No conjunto dos números reais.
1071. Professor: No conjunto dos números reais esta equação aqui ... então, o que eu já tinha falado, a gente tem equação com uma solução, com duas soluções ...
1072. Aluno: Com nenhuma nos números reais.

O professor resume o plano dele para essa aula: apresentar o método de isolar incógnitas e mostrar que os alunos já sabiam resolver algumas equações, além das de 1º grau, sem necessidade de recorrer a novas ferramentas. O seu objetivo parece ter sido alcançado.

4.2.3 A aula do dia 26 de abril

Tendo percebido que muitos alunos estavam extrapolando o uso da propriedade distributiva, para o caso de expressões algébricas contendo três fatores, no dia 26 de abril, o professor Antônio inicia a aula dizendo que vai tentar responder uma pergunta surgida na aula anterior com um exemplo:

Figura 9 – Retorno ao contexto aritmético

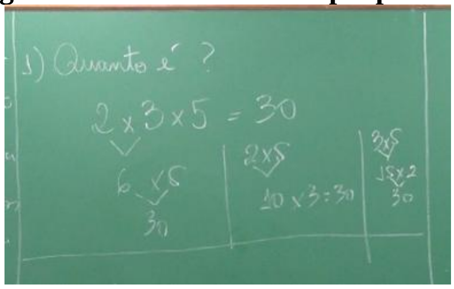


Fonte: Vídeo turma 9º A, 26/04/2012, filme 116

1. Professor: Oh, pessoal! Se não olhar ... isso aqui vai atrapalhar a gente daqui para frente. Esse erro está sendo cometido em uma série de exercícios.
2. Professor: Quando você olha para isso aqui, oh, olha [apontando para o que está escrito no quadro]. Quanto é que é $2 \times 3 \times 5$?
3. Alunos: 30.
4. Professor: Ninguém tem problema para falar que é 30, tem?
5. Alunos: Não.
6. Professor: Como é que a gente pode fazer essa conta?
7. Alunos: 2 vezes 3, 6 ... [neste momento é possível escutar vários alunos falando as possibilidades para fazer a conta]
8. Professor: Um jeito é fazer isso aqui, não é? 2 vezes 3 que dá 6, depois multiplicar por 5 que dá 30. É o único jeito?
9. Alunos: Não, 2 vezes 5 ... 10, ... vezes 3 ... 30.
10. Professor: 2 vezes 5 ... 10, vezes 3, ... 30. [várias vozes dos alunos, propondo outras maneiras para efetuar os cálculos, enquanto o professor escreve no quadro as sugestões dos alunos]

11. Professor: 3 vez 5? ... 15 vezes 2? ... 30.

Figura 10 – Calculando o duplo produto



Fonte: Vídeo turma 9º A, 26/04/2012, filme 116

12. Kleber: A ordem dos fatores não altera o produto. [O aluno fala enquanto o professor está escrevendo no quadro]
13. Professor: Pessoal, está certo?
14. Aluna: Está.
15. Professor: Quando você vê três números em uma multiplicação, a gente pode multiplicar o primeiro pelo segundo, depois vezes o terceiro. Ou fazer: multiplicar os dois últimos e depois o primeiro. Ou então, pegar o primeiro com o terceiro e depois o segundo. Não pode?
16. Alunos: Pode.
17. Professor: Muda o resultado?
18. Alunos: Não.
19. Professor: Então, desse jeito aqui não tem problema nenhum, tem?
20. Alunos: Não.

Como alguns alunos não estavam utilizando corretamente a propriedade associativa, quando operando com expressões algébricas, o professor Antônio decide utilizar expressões numéricas para exemplificar as consequências desse uso inadequado da propriedade com exemplo numérico. Na verdade, ao escrever o duplo produto na forma $2 \times 3 \times 5$, o professor está utilizando fortemente a propriedade associativa, pois define-se inicialmente a multiplicação de dois elementos e pela associatividade, como $(2 \times 3) \times 5 = 2 \times (3 \times 5)$, o resultado independe das associações feitas, fazendo com que o duplo produto $2 \times 3 \times 5$ esteja bem definido. Ele também utiliza a propriedade comutativa para efetuar os cálculos, e a principal justificativa apresentada, quanto à possibilidade de utilização dessas propriedades, é que o resultado não muda (linha 17). Esse é um argumento poderoso na aritmética, uma vez que podemos comparar os resultados (os produtos) para verificar se as operações foram efetuadas corretamente. O aluno Kleber resume as diferentes maneiras de cálculo, repetindo mais uma vez a frase "a ordem dos fatores não altera o produto" (linha 12), que diz respeito somente à propriedade comutativa e não à associativa.

O professor faz uma síntese dos pontos comuns a todos os procedimentos:

22. Professor: Pergunta: Quantos fatores a gente tinha aqui? [apontando para $2 \times 3 \times 5$].
23. Alunos: Três.
24. Professor: Quantos fatores?
25. Alunos: Três.
26. Professor: Três. Três fatores [escreve no quadro].
27. Professor: Quantas multiplicações ou quantas operações a gente fez?
28. Alunos: Três//duas. [várias vozes dos alunos]
29. Kleber: Duas.
30. Professor: Quantas, Kleber?
31. Alunos: Duas.
32. Professor: Duas operações, não foi? Uma aqui [apontando para 2×3] e outra aqui [apontando para 6×5], não foi?
33. Aluna: É, professor.
34. Professor: Em qualquer um dos casos, operamos duas vezes, não foi? Então, beleza. Olha aqui. Nisso aqui a gente não tem dúvida, não é? [aponta para o que estava escrito no quadro]
35. Professor: Os três fatores eram quais?
36. Alunos: 2, 3, 5.
37. Professor**:** 2, 3 e 5 [escreve no quadro].

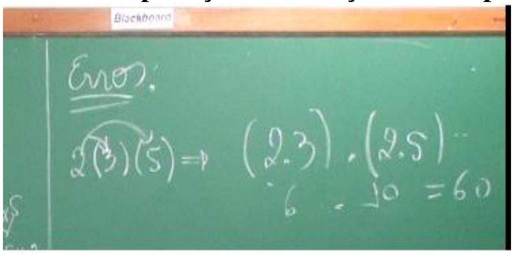
Neste caso, o número de fatores e de operações envolvidas na expressão não oferece dúvidas para os alunos. Em seu resumo, o professor enfatiza a permanência do número de fatores e de operações de multiplicação. Observamos que ele não nomeia as propriedades (associativa e comutativa), utilizadas para efetuar os cálculos, e nem tampouco diferencia quando está utilizando somente a associativa (linha 8), ou a associativa combinada com a comutativa (linhas 9, 10 e 11).

Na tentativa de fazer uma aproximação com o produto das expressões algébricas, presentes na aula anterior, o professor reescreve o duplo produto $2 \times 3 \times 5$ na forma $2(3)(5)$, iniciando o seguinte diálogo:

46. Professor: Olha aqui! A gente já viu lá ... Vê se eu posso fazer isso aqui? Tem alguma diferença disso aqui [apontando para $2 \times 3 \times 5$] para isso aqui [apontando para $2(3)(5)$] ?

47. Alunos: Não.
48. Aluna: 2 vezes 3 ... 6 ....
49. Professor: Agora, pergunta: vê se eu posso fazer isso aqui? Eu posso fazer assim? Olha! Duas vezes três [desenhando um arco ligando 2 a 3 e escrevendo (2.3)] vezes, duas vezes cinco [desenhando um arco ligando 2 a 5 e escrevendo (2.5)]?
50. Alunos: Não.
51. Professor: Olha o que é que vai acontecer: duas vezes três?
52. Alunos: 6.
53. Professor: Duas vezes cinco?
54. Alunos: 10.
55. Professor: 6 vezes 10?
56. Alunos: 60.
57. Professor: Eu posso fazer isso? [quadro abaixo]

Figura 11– Distribuindo a multiplicação em relação à multiplicação, na aritmética



Fonte: Vídeo turma 9º A, 26/04/2012, filme 116

58. Alunos: Não.
59. Professor: De novo: os fatores são? Três, não é? Eu posso pegar o primeiro e sair distribuindo com os outros fatores?
60. Alunos: Não.
61. Kleber: Não ... porque eles não estão no mesmo :: mesmo parênteses [o professor não parece ter escutado o argumento do aluno]. [outras falas dos alunos]
62. Professor: Certo, então? Não posso fazer isso aqui [apontando para $2(3)(5) = (2.3)(2.5)$], posso?
63. Alunos: Não.
64. Professor: [...] o que acontece? [se eu fizer isso].
65. Aluno: Dá errado.
66. Kleber: Vai dobrar o resultado. O resultado dobra.

Novamente, vemos a ênfase dada pelo professor à constância do número de fatores (linha 59), enquanto os alunos justificam a não validade de “sair distribuindo” o 2, pela alteração do resultado (linhas 65 e 66). O aluno Kleber apresenta um argumento diferente, o fato de os números 3 e 5 não estarem dentro dos parênteses (linha 61), que parece não ter sido ouvido pelo professor. Este retorna, então, às expressões algébricas:

96. Professor: Agora é que vai ficar divertido, olhem aqui. Vou pegar meu exemplo aqui. Antes de fazer a conta, vou fazer as perguntas ... [o professor escreve no quadro a expressão $7\,(x-3)(x-2)$].
97. Professor: Pessoal, quando a gente olha para aquilo ali, oh: 7 que multiplica $(x-3)$ que multiplica $(x-2)$, quantos fatores eu tenho ali?
98. Kleber: Dois.
99. Alunos: Três, três.
100. Professor: Olha lá, quantos fatores?
101. Alunos: Quatro, cinco, quatro, ... [várias vozes]

O professor passa a comparar $2 \times 3 \times 5$ com $7(x-3)(x-2)$:

102. Professor: Quantos fatores eu tinha aqui [apontando para $2 \times 3 \times 5$] ?
103. Alunos: Três.
104. Aluno: Lá tem quatro.

Ele escreve, no quadro, $(2)(3)(5)$, diretamente acima da expressão $2 \times 3 \times 5$.

105. Professor: Quantos fatores eu tenho aqui? [apontando para $(2)(3)(5)$].
106. Alunos: Três.
107. Professor: Quantos fatores eu tenho aqui [apontando para $7(x-3)(x-2)$] ?
108. Alunos: Três, cinco, três, quatro...
109. Professor: Fator é o quê [se dirigindo a um aluno] ... em uma multiplicação?
110. Alunos: Três ... quatro.
111. Kleber: Três.
112. Aluno: Quatro.
113. Professor: Quais são eles, Kleber?
114. Kleber: $7, 3$ e 2.
115. Professor: Primeiro fator aqui é quem?
116. Alunos: 7.

Figura 12– Gesto identificando o fator $(x - 3)$

Fonte: Vídeo turma 9º A, 26/04/2012, filme 116

117. Professor: Segundo fator aqui é quem?
118. Kleber: -3.
119. Professor: xis .... menos ... 3.
120. Professor e alunos: $x - 3$.
121. Professor: Terceiro fator aqui é quem?
122. Alunos: $x - 2$ [inclusive Kleber].

Nessa aula, após trabalhar com a expressão numérica $2 \times 3 \times 5$, o professor pergunta qual é o número de fatores presentes na expressão $7(x - 3)(x - 2)$, que ele lê como 7 que multiplica x menos 3, que multiplica x menos 2 (linha 97). Há uma grande variedade de respostas: 2, 3, 4 e 5 fatores (linhas 98,99, 101). O professor retoma o contexto aritmético, perguntando o número de fatores na expressão numérica $2 \times 3 \times 5$ (linha 102), os alunos respondem três, mas um aluno, em particular, completa a resposta dizendo que lá (na expressão algébrica) tem quatro (linha 104). O professor reescreve a expressão numérica introduzindo parênteses, $(2)(3)(5)$, representação essa mais próxima da maneira como a expressão algébrica está escrita, mas ainda sem obter sucesso (linha 108).

É difícil saber o que os alunos estavam considerando, uma vez que nenhum aluno respondeu qual era o significado de fator em uma multiplicação. Uma interpretação possível para quatro fatores (a mais comum) seria a identificação de 4 símbolos diferentes presentes na expressão: $7, x, 3, 2$. A tentativa feita pelo professor, de fazer uma analogia entre os números e os objetos algébricos, representados pelas expressões algébricas, parece infrutífera. Quando o aluno Kleber diz, com muita convicção, que são três fatores (linha 111), o professor pergunta quais são e o aluno responde: $7, 3, 2$, que são os números presentes na expressão algébrica. Para os alunos, a passagem do contexto aritmético para o algébrico não parece ser natural, e eles continuam presos às expressões numéricas. O professor pergunta qual é o primeiro fator (7), que é facilmente reconhecido pelos alunos, pois é um número. No entanto, ao perguntar qual é o segundo fator, somente Kleber responde (linha 118), dizendo que é -3, o professor inclui o x (linha 119) e os alunos aceitam a fala do professor, dizendo que é $x - 3$ (fala 120).

É bom observar que, durante esse processo, o professor aponta cada uma das expressões no quadro, fazendo um movimento com a mão envolvendo cada uma delas.

Além da tentativa feita usando a aparente semelhança das expressões numérica e algébrica, o professor apresenta outro argumento:

123. Professor: Na verdade, quando a gente substitui o valor de x aqui [apontando para $(x-3)$] não vai aparecer um número?
124. Alunos: Sim.
125. Professor: Quando eu substituo o valor de x aqui [apontando para $(x-2)$] não vai aparecer outro número?
126. Alunos: Sim.
127. Professor: Então, quantos números eu tenho multiplicados ali?
128. Alunos: Três.
129. Professor: Três.
130. Professor e alunos: 7, $(x-3)$ e $(x-2)$.
131. Professor: Está claro? Igual estava lá [referindo-se a $2 \times 3 \times 5$]?
132. Professor: Ok, aqui? Então, vejam bem. A gente já descobriu que tem quantos fatores aqui?
133. Alunos: Três.
134. Professor: Três fatores, não é? Quais são eles?
135. Professor e alunos: 7, $x-3$, $x-2$. [O professor escreve no quadro: 3 fatores: 7, $x-3, x-2$].
136. Aluno: Faz x vezes x ...
137. Professor: Calma, calma, antes de fazer a conta.
138. Professor: Aqui [referindo-se a $2 \times 3 \times 5$] tinha quantos fatores?
139. Alunos: Três.
140. Professor: Quantas operações a gente fez?
141. Alunos: Duas.

O professor volta para o caso $7(x-3)(x-2)$.

142. Professor: Aqui a gente tem três fatores. Quantas operações a gente vai fazer?
143. Um aluno: Não sei.
144. Alguns alunos: Duas.
145. Professor: Duas operações. Pergunta: Se eu pegar o 7 e multiplicar por esse parêntese [aponta para $(x-2)$], pegar o resultado e multiplicar por esse [aponta para $(x-3)$], vai dar um resultado, não vai?
146. Alunos: Vai.

147. Professor: Se eu pegar o 7 e multiplicar pelo primeiro [aponta para $(x-3)$], chegar num resultado e multiplicar por esse parêntese [aponta para $(x-2)$], vai mudar o resultado?
148. Alunos: Não.
149. Professor: Não é uma multiplicação que eu tenho aqui e aqui [neste momento o professor coloca o ponto indicando a multiplicação entre os fatores]?
150. Alunos: Sim.
151. Professor: Então, eu multiplico o primeiro vezes o segundo, depois vezes o terceiro. Ou, o primeiro vezes o terceiro, depois vezes o segundo. Ou, o segundo vezes o terceiro, depois vezes o primeiro.
152. Kleber: Ou o segundo vezes o primeiro e depois pelo terceiro.

Na aula anterior, o professor havia chamado a atenção para o fato de a expressão algébrica $5(x-2)$ ser um produto, "uma coisa só", que "é um número só" após a multiplicação, enfatizando sua concepção estrutural dos objetos algébricos: o produto de dois polinômios é um polinômio, ou seja, na linguagem acadêmica, a multiplicação de dois polinômios é uma operação no anel de polinômios em uma variável.

Nessa aula, para relacionar as expressões algébricas com as numéricas, ele diz que, ao substituir x por um número, o resultado também será um número. A ação de substituir a variável por um número pode evocar o caráter operacional das expressões algébricas, e talvez essa seja a razão pela qual um aluno diz (linha 143) não saber quantas operações estão presentes na expressão $7(x-3)(x-2)$. Outro aluno já começa a fazer (linha 136) o produto das expressões $(x-3)$ e $(x-2)$, que resultaria em efetuar quatro multiplicações.

Quando operando com expressões algébricas, o que os alunos percebem é diferente daquilo que o professor vê: os alunos estão presos ao caráter operacional das expressões, enquanto o professor transita entre os aspectos operacional e estrutural, talvez sem se aperceber da ambiguidade presente no uso que faz das expressões algébricas. Para quem utiliza a matemática com outro propósito, que não o ensino, o mais importante é fazer esse trânsito entre objeto e procedimento quando necessário, mesmo que não conscientemente. No entanto, para o professor, o conhecimento dessa dualidade é fundamental, para que ele possa reconhecer a maneira como os alunos estão utilizando esses símbolos e possa orientá-los na construção do pensamento proceptual (GRAY, TALL, 1994), que é a capacidade do uso flexível desses símbolos como processo e objeto.

Finalmente, o professor justifica as propriedades comutativa e associativa das operações com as expressões algébricas, utilizando o fato de elas representarem um número real quando a letra é substituída por um número real. O argumento utilizado para mostrar que a propriedade distributiva da multiplicação em relação à multiplicação não é válida foi porque dá errado, quando aplicada às expressões numéricas. Houve uma ênfase na apresentação dos procedimentos corretos e não na lógica subjacente a eles. Na organização curricular vigente, o ensino da álgebra é feito separadamente do ensino da aritmética e em um momento posterior. O professor tende a pressupor que esse significado já foi construído na aritmética, o que nem sempre é verdade. De acordo com Lins e Gimenez (1997), o ensino tradicional da aritmética escolar coloca em primeiro plano o ensino de técnicas de cálculo e deixa de fora "uma discussão das lógicas das operações subjacentes ao uso do cálculo aritmético como ferramenta" (LINS, GIMENEZ, 1997, p. 159), impedindo o desenvolvimento, nas crianças, da capacidade de refletir sobre o que há de genérico sobre as situações e sobre a lógica das operações. Para esses autores

> a educação algébrica precisa passar a considerar também o fato de que qualquer aspecto técnico só pode se desenvolver se, ao modo de produção de significado que o sustenta – e, portanto, à lógica das operações subjacente-, o aluno confere legitimidade (LINS, GIMENEZ, 1997, p. 160).

Daí a importância de se trabalhar as propriedades da aritmética visando a generalização e as maneiras de expressar a generalidade observada. O conhecimento da lógica das operações e de suas propriedades, do ponto de vista da construção do pensamento algébrico, é um conhecimento matemático específico do professor.

Após a discussão sobre as diferentes maneiras de realizar os produtos indicados na expressão algébrica em questão, o professor retoma a dúvida de Kleber sobre o uso da propriedade distributiva no contexto das expressões algébricas:

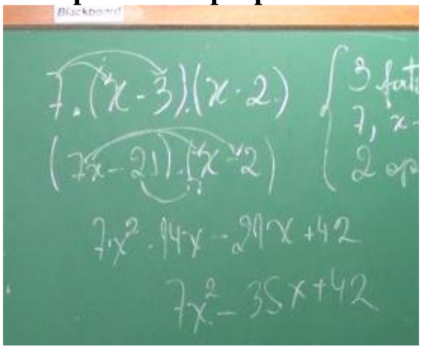
153. Professor: Está certo? Está tranquilo? Kleber, você me perguntou isso. Você pode até ter esquecido. Por quê? O que acontece? O quê é que tem gente que está fazendo, ainda mais quando aparece uma raiz aqui [aponta para o 7]? Vem e faz isso aqui: multiplica o 7 aqui [ligando o 7 com o x, desenhando um arco] e o 7 aqui [desenhando um arco ligando o 7 com o 3].
154. Professor: A operação é uma só: é o primeiro fator vezes o segundo. Mas, como é que a gente faz para distribuir isso? Aí sim, aí faz $7x - 21$ [escreve no quadro]. Mas, aqui a gente fez uma operação, não foi?
155. Alunos: Foi.
156. Professor: E aí distribuiu, não é assim?
157. Alunos: Sim.
158. Professor: Pronto, fecha os parênteses, continua mais uma multiplicação, não é?

159. Alunos: É.

160. Professor: $x - 2$ [escrevendo no quadro $(7x - 21)(x - 2)$].

Nesse momento, o professor começa a aplicar a propriedade distributiva, desenhando as setas (arcos) ligando os termos que devem ser multiplicados, enquanto os alunos vão dizendo os resultados das multiplicações indicadas pelo professor.

Figura 13 – Aplicando a propriedade distributiva



Fonte: Vídeo turma 9º A, 26/04/2012, filme 116

O professor busca saber se todos entenderam o que foi feito anteriormente:

178. Kleber: Professor, quando for tirar o mmc, você não multiplica o que está dentro dos parênteses, só o que está fora?

179. Professor**:** Como assim, me dá um exemplo, Kleber [...]

Kleber dita e o professor escreve o exemplo no quadro, chegando à seguinte expressão:

Figura 14 – Exemplo proposto por Kleber

Fonte: Vídeo turma 9º A, 26/04/2012, filme 116

180. Kleber: O mmc é 6. Aí eu vou multiplicar o 6 pelo 7 e o 6 pelo [inaudível]?

181. Professor: Deixa eu explicar, deixa eu responder a dúvida dele, que a gente vai comentando. O que é que a gente faz primeiro? Tira o mmc, não é? [apontou para os denominadores 2 e 3]. Aqui a gente tem quantas operações, Kleber?

182. Kleber: Duas.

183. Professor: Aqui a gente tem uma multiplicação e uma soma [apontando com as mãos], não é assim? Primeiro se a gente quiser fazer qualquer coisa, a gente olha para cá $\left[\frac{7.(x-3)}{2}\right]$, depois a gente olha para cá $\left[\frac{(x-2)}{3}\right]$. Então, você resolveu colocar todo mundo no mesmo denominador, não foi? Então, vamos lá.

184. Professor: 6 por 2?

185. Kleber e outros alunos: 3.

186. Professor: 3, aí a gente vem aqui em cima multiplicando [aponta para o 7]. Então, olha aqui, vai ficar assim: 3 vezes 7 vezes...

187. Aluna: $(x-3)$. [O professor escreve no quadro: $\left[\frac{3.7.(x-3)}{6}\right]$.

187. Kleber: Porque eu achava que ia multiplicar o que estava dentro dos parênteses também.

188. Professor: Você entendeu agora o que que acontece? Aí você vai sair multiplicando todo mundo aqui? [descreve o percurso das setas].

189. Kleber**:** Não.

190. Professor: Quem é que você multiplica aqui?

191. Kleber: 7 vezes 3 que vai dar 21.

192. Professor: E depois faz o que?

193. Kleber: Distribui.

194. Professor: Tranquilo? Então está bom. Tranquilo isso aqui, pessoal? Todo mundo entendeu?

Rodrigo diz não haver compreendido o que foi feito e o professor escreve o exemplo $\frac{7.(x-3)}{3}+\frac{x-2}{2}$ no quadro, para explicar novamente o procedimento:

196. Professor: Pode falar, Rodrigo. Eu faço de novo. Aqui, eu fiz isso aqui, Rodrigo. Então, o que eu fiz, Rodrigo? Quando você tem uma soma de frações ...?

197. Rodrigo: ... mmc.

198. Professor: mmc.

199. Professor: 6 dividido por 3? Na verdade, era 2. 6 dividido por 3?

200. Aluno: 2.

201. Professor: Coloco o 2 aqui ... 2 vezes 7, vezes o quê?

202. Rodrigo: $x-3$.

203. Professor: Aí continua ... mais 6 dividido por 2 ... 3, que multiplica $x-2$. Entendeu? Ok?

204. Professor: Duas vezes 7?

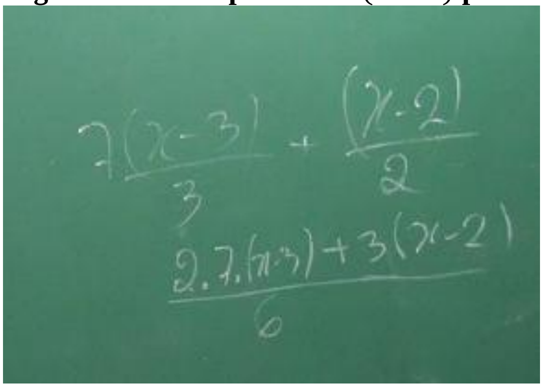
205. Alunos: 14.

206. Professor: 14, depois faz o chuveirinho aqui. Depois 3, tem algum número aqui na frente [apontando o espaço entre 3 e $(x-2)$] ? Se quiser, coloca o 1 e faz 3 vezes 1?

207. Aluno: 3.

208. Professor: 3 e depois faz o chuveirinho, entendeu agora?

Figura 15 – Multiplicando $7(x-3)$ por 2



Fonte: Vídeo turma 9º A, 26/04/2012, filme 116

209. Professor: Chuveirinho é a propriedade distributiva, tá?

210. Aluno:Professor [inaudível]?

211. Professor: Não sei. É que o nome da propriedade [desenhando arcos no ar com as mãos] é propriedade distributiva, entendeu?

Quando o professor pergunta se todos entenderam o procedimento, Kleber faz uma pergunta para verificar se compreendeu direito (linha 178): tira o mmc e "não multiplica o que está dentro dos parênteses, só o que está fora?". E ele reafirma o que pensava anteriormente (linha 187): "Porque eu achava que ia multiplicar o que estava dentro dos parênteses também". Aparentemente, o aluno parece estar mais seguro do procedimento a ser utilizado para a resolução desse tipo de equação, apesar de os parênteses ainda ocuparem um lugar de destaque em sua fala. Quando Rodrigo diz que ainda tem dúvidas, o professor refaz o exemplo, apresentando os passos que devem ser seguidos para obter as soluções. Diferentemente do que foi feito na aula do dia 24 de abril, dessa vez o professor escreve $3.7.(x-3)$, não efetuando diretamente o produto $3.7 = 21$, deixando claro que 3 está multiplicando a expressão toda $7.(x-3)$ (linhas 186 e 187).

Kleber utiliza a palavra "distribui" (linha 193) e o professor "chuveirinho" (linhas 206 e 208 e 209) e esse último encerra a aula chamando atenção para o fato de "chuveirinho" ser a propriedade distributiva (linhas 209 e 211).

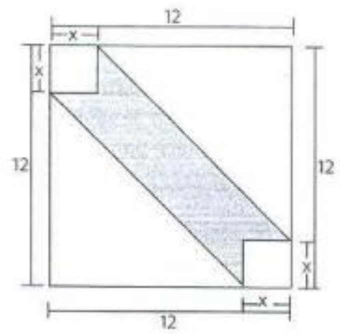
Em David, Tomaz e Ferreira (2014), o papel do chuveirinho no desenvolvimento da resolução da equação $\frac{5(x-2)}{2} = \frac{(x-2)(x-3)}{3} - \frac{x^2}{3}$ foi analisado. Inicialmente, ele foi considerado simplesmente como um conjunto de arcos, utilizado para expressar a sequência de passos que deveriam ser seguidos, para aplicação da propriedade distributiva a uma determinada expressão algébrica. Ele foi visto como um artefato mediador, isto é, uma representação visual de uma sequência de ações coordenadas para facilitar a aplicação da propriedade algébrica. Mas a partir da aula do dia 24 de abril, observa-se que a imagem visual dos parênteses, juntamente com o chuveirinho, desencadeia uma série de ações levando à generalização do uso do chuveirinho em situações nas quais ele não poderia ser aplicado. A associação do chuveirinho com a visualização dos parênteses leva os estudantes à aplicação da propriedade distributiva às expressões contendo três fatores, consistindo de letras e números, associados por parênteses, independentemente das operações indicadas na expressão. De acordo com David, Tomaz e Ferreira (2014), isso provoca uma tensão nessa atividade, à medida que duas perspectivas diferentes entram em contato: o uso da propriedade distributiva pelo professor e a extrapolação do uso (*overgeneralized use*) do chuveirinho associado à imagem visual dos parênteses pelos alunos. Conforme análise realizada em David, Tomaz e Ferreira (2014),na aula do dia 26 de abril, o professor destaca o uso dos parênteses, mas ainda não enfatiza quais são as operações envolvidas na propriedade distributiva, apenas menciona as multiplicações. A associação que os alunos fazem entre os parênteses e o chuveirinho é reforçada, uma vez que a visualização dos parênteses é utilizada, pelos alunos, como uma “dica” ou um comando para o uso da propriedade distributiva. Podemos perceber que as tensões se acumulam, uma vez que o professor permanece focado nas semelhanças entre as propriedades estruturais dos números reais e das expressões algébricas, e os alunos continuam presos aos aspectos visuais do chuveirinho, associados aos procedimentos.

4.2.4 Sobre as aulas no período de 03 de maio a 18 de junho

Nas aulas seguintes, o professor apresenta o método da fatoração para resolver equações do 2º grau, relembra produtos notáveis, utiliza a propriedade distributiva, sempre desenhando os arcos para identificar as multiplicações efetuadas, e os alunos não apresentam dificuldades, pois eles precisam apenas identificar os trinômios que são quadrados perfeitos. O professor apresenta o método de completar quadrados. Os alunos fazem uma atividade em grupo, utilizando recursos geométricos para fatoração. O professor demonstra a fórmula que relaciona os coeficientes de uma equação do 2º grau com a soma e o produto das raízes. Esse método é amplamente utilizado pelos alunos na resolução de equações. E, finalmente, o professor demonstra a fórmula geral para a resolução de equações do 2º grau e também a relação entre o sinal do discriminante e o número de raízes reais. São realizadas diversas atividades envolvendo problemas que recaem em equações de 2º grau e também resolução dessas equações, utilizando os diversos métodos. Do ponto de vista dos alunos, eles ficam muito envolvidos com os procedimentos, identificando os coeficientes para utilizar a fórmula de resolução, e suas dúvidas são, muitas vezes, resolvidas por eles mesmos, quando percebem que, na maioria das vezes, fizeram alguma conta errada. Alguns alunos ainda têm dificuldade para reescrever, por exemplo, a equação $14x + 4\,x^2 = 30$ na forma $a\,x^2 + bx + c = 0$. Alguns problemas apresentados são não rotineiros e a maior dificuldade dos alunos é na transcrição do problema para a linguagem algébrica. Um dos exercícios propostos é o seguinte (CENTURION, JAKUBOVIC; exercício 35, p. 70, 2011b):

> A figura representa um quadrado com lados de *12* cm. Em dois cantos opostos, temos dois quadrados iguais, com lados de x cm (sendo $x < 6$). As medidas estão indicadas em centímetros.

Figura 16 – Quadrado referente ao exercício 35



Fonte: CENTURION E JAKUBOVIC; 2011b,p.70

a) Qual é a expressão que dá a soma das áreas, em cm^2, dos dois quadrados com lados de x cm?
b) Juntando-se os dois triângulos da figura, obtemos um quadrado. Qual é a expressão que dá a medida, em centímetros, dos lados desse quadrado? E a que dá a área, em cm^2, desse quadrado?
c) Para encontrar a expressão que dá a área do polígono assinalado na figura, você pode calcular a área do quadrado maior, subtrair a soma das áreas dos dois quadrados dos cantos e, depois, subtrair ainda a área do quadrado obtido com a junção dos dois triângulos. Fazendo isso, que expressão se obtém?

d) Para que valores de x o polígono assinalado terá uma área de 45 cm^2?
e) Para cada valor de x que você encontrou no item d, redesenhe a figura inicial, indicando a área das cinco regiões em que ela está dividida.

Os alunos resolveram o exercício em casa e deram a resposta dos dois primeiros itens sem dificuldade. No primeiro item, inicialmente, o professor escreve, no quadro, a resposta $x^2 + x^2 = 2x^2$, mas imediatamente ele a reescreve como $x^2 + x^2$ ou $2x^2$, explicitando que são duas formas diferentes para expressar a área pedida, e que a primeira maneira de escrever poderia ser confundida com uma equação. Essa atitude do professor mostra que ele percebe a necessidade de explicitar o uso do sinal de igual, significando a equivalência entre as duas expressões algébricas. Esse é um exemplo de conhecimento matemático específico, mobilizado pelo professor, relevante para a compreensão do significado "=" pelos alunos.

Alguns alunos ainda não estavam se sentindo confortáveis em dar como respostas expressões algébricas. Na resolução do item c, após obter a expressão da área do polígono azul ($-3x^2 + 24x$), um aluno diz que falta igualar a zero, para achar o valor de x. O professor pergunta ao aluno qual o valor da área no caso de se igualar a expressão a zero, ele responde que é zero, mas sem muita convicção. Percebemos a dificuldade do aluno em trabalhar com expressões algébricas porque, nesse caso, as letras indicam variáveis e não incógnitas. No item d, obtida a equação, os alunos se sentem confortáveis aplicando o procedimento para resolvê-la. Outro aluno apresentou uma solução diferente daquela encaminhada, no livro, para calcular a área do polígono. Ele completa o polígono com dois triângulos isósceles, formando um retângulo, e depois retira a área do quadrado de lado x obtido pela junção dos dois triângulos. Apesar de o problema estar proposto de forma a ter um único caminho para a sua solução, esse aluno não segue o roteiro, apresentando uma solução alternativa. A resolução desse problema reflete várias questões analisadas em pesquisas sobre ensino e aprendizagem de álgebra. Conforme Sfard e Linchevski (1994), as expressões algébricas são, em geral, introduzidas antes de se tornarem parte de uma equação, tal como no problema apresentado. Nele, a atividade algébrica tem início pela modelagem de um problema, portanto inicialmente, não é necessário calcular nenhum valor, mas somente descrever a situação em estudo (no caso, encontrar a fórmula que representa a área do polígono). Assim, as letras são utilizadas inicialmente como variáveis e não como incógnitas, pois as equações são introduzidas um pouco mais tarde. Quando a letra é apresentada como variável, a expressão algébrica é uma função dessa variável, indicando uma abordagem estrutural dessa expressão. Em uma equação, a letra representa uma incógnita a ser calculada e a resolução da equação passa a ter um caráter procedimental. Claramente o uso da letra como incógnita é mais fácil para os alunos, que propõem igualar a expressão a zero, para calcular a raiz, mesmo que o objetivo da atividade seja encontrar a expressão da área do polígono. Para Lins e Gimenez (1997), tanto no caso da educação aritmética quanto algébrica, "a mudança de perspectiva mais importante refere-se a passarmos a pensar em termos de significados sendo produzidos no interior de atividades, e não, como até aqui, pensarmos em termos de técnicas ou conteúdos" (LINS, GIMENEZ, 1997, p.161). A produção de significados pelos alunos no desenvolvimento de atividades em sala de aula é um elemento importante para o conhecimento matemático específico do professor, mas não foi analisada em profundidade neste trabalho, podendo ser mais explorada em trabalhos futuros.

No dia 11 de junho de 2012, o professor introduziu equações fracionárias, o que trouxe à tona a discussão de algumas questões ainda obscuras para os alunos, tais como o significado da simplificação de frações, produtos notáveis, fatoração de polinômios etc.. Inicialmente, o professor apresenta uma equação mais simples $\frac{1}{3}+\frac{x}{5} = \frac{4}{7}$, e os alunos mesmos propõem tirar o mmc para resolvê-la. O professor apresenta, então, o segundo exemplo: $\frac{2x-1}{4}+\frac{1}{x}=\frac{3x-1}{6}$, e os alunos percebem que o mmc, nesse caso, é $12x$, e que o domínio é $x \neq 0$. O último exemplo é a equação $1+\frac{2}{(x-2)}=\frac{x^2+4}{(x^2-4)}$, e quando o professor pergunta "se for para tirar o mmc de alguém, de quem deve ser" um aluno responde que tem que ser de 2 e 4. O professor pergunta ao aluno se em uma fração o denominador for $7-3$, escrevendo $\frac{1}{7-3}$, se ele pode tirar o mmc só do 3, só de parte do denominador. Os alunos dizem que não, outro aluno propõe multiplicar os dois lados por "alguma coisa", e, após algumas tentativas, os alunos identificam o produto notável $(x^2-4)=(x-2)(x+2)$ e o professor encaminha a resolução da equação dada, indicando, inclusive, os passos na utilização da propriedade distributiva. O último exemplo é não trivial, pois após chegar à equação $2x=4$, cuja solução é $x=2$, os alunos devem verificar que esse valor não pertence ao domínio da equação fracionária, e, portanto o conjunto solução é vazio.

Na aula seguinte, dia 12 de junho, ao resolver um exercício, Pedro Augusto pergunta ao professor se, na equação $\frac{x+3}{x-2}=\frac{x+6}{x-7}$, ele poderia simplificar o x com x, o que foi explicado individualmente ao aluno. Perante essa dúvida, no dia 14 de junho, o professor inicia a aula dizendo que iria discutir uma questão importante: o que significa "cortar"? São notáveis o cuidado e a persistência que o professor Antônio demonstra, criando frequentemente momentos especiais em suas aulas para retomar as dúvidas recorrentes dos alunos e discuti-las com toda a turma. Ele apresenta e discute vários exemplos numéricos: $\frac{4}{16}$; $\frac{9}{9}$; $\frac{5-2}{2-1}$; $\frac{8-3}{8-3}$, para mostrar o que acontece quando cortamos números comuns ao numerador e denominador. Antes de passar aos cálculos, ele diz que “cortar”, quando se está operando com frações, é uma forma de simplificá-las. No caso dos dois primeiros exemplos, o professor divide o numerador e denominador pelo mesmo número e, nos dois últimos casos, o professor efetua as subtrações antes de simplificar as frações, mostrando que as frações obtidas simplesmente cortando os números comuns ao numerador e denominador não são equivalentes às frações dadas. Posteriormente, o professor dá exemplos envolvendo expressões algébricas: $\frac{x}{2x}$; $\frac{x-3}{x-2}$; $\frac{x-3}{2x-6}$, explicitando os fatores comuns ao numerador e denominador, quando existem, que podem ser simplificados.

4.2.5 A aula do dia 19 de junho

Na aula do dia 19 de junho, o professor apresenta uma lista de problemas e exercícios envolvendo equações fracionárias, com o intuito de rever algumas ideias centrais relacionadas a esse conteúdo. Quando têm alguma dificuldade, os alunos solicitam a ajuda do professor e, ao perceber que uma dúvida está aparecendo com frequência, ele decide discuti-la com a turma toda:

1. Pessoal, olha para cá. Todo mundo, olha para cá ... olha para cá. Todo mundo, olha para cá. Aqui [apontando para $3.(x+5).(x-5)$] tem quantas multiplicações para a gente fazer?
2. Alunos: Três.
3. Kleber: Duas.
4. Alunos: Três.
5. Outro aluno: Duas. Duas. Duas.
6. Professor: Uma pessoa só. [inaudível] Uma pessoa levanta a mão e diz para mim quantas multiplicações a gente tem aqui.
7. Laura: Eu acho que são duas ... eu vou fazer 3 vezes aquele número e aquele número vezes o outro.
8. Professor: Isso [apontando para $(x+5)$] aqui ... é um número só, não é?
9. Laura: É.
10. Professor: Está dentro dos parênteses ... apesar de ter uma adição ali, aquilo está representando um número, não é? Então a gente faz primeiro isso aqui [apontando para $3.(x+5)$] e acha quanto dá ...
11. Professor: E aí eu pergunto: como eu resolvo isso?

12. Aluno: Tanto faz a ordem. [o professor faz um movimento com a cabeça concordando com o aluno]
13. Kleber: Distributiva.
14. Professor: ... como resolvo isso aqui?
15. Outro aluno: Chuveirinho.
16. Professor: Chuveirinho. 3 vezes x dá ...?
17. Alunos: $3x$.
18. Professor: mais 3 vezes 5 ...?
19. Alunos: 15.
20. Professor: Pronto ...
21. Aluno: Fecha parênteses.
22. Professor: Aqui, ponho parênteses aqui [desenhando parênteses em volta da expressão $3x + 15$] para não confundir ... e multiplico pelo que ficou faltando ... a segunda multiplicação, não é? E eu faço aqui [apontando $(3x + 15).(x - 5)$] e aí tem outro chuveirinho e aí resolvo.
23. Professor: Posso fazer primeiro essa multiplicação [apontando para $(x + 5).(x - 5)$] aqui para depois multiplicar por 3?
24. Professor: Pode. Aí eu vou falar a frase que o Jemes gosta: a ordem dos fatores ...
25. Alunos: não altera o produto.
26. Professor: Não é assim? Quantas multiplicações então eu tenho ali?
27. Alunos: Duas.
28. Professor: Duas, não é? Aqui pode falar assim: Ah! professor, duas nada. Para fazer isso [$3.(x + 5)$] aqui, eu não tenho que fazer assim [desenhando no ar arcos ligando 3 a x e 3 a 5, indicando as multiplicações $3.x$ e 3.5]? Mas é uma propriedade da multiplicação, não é? De fazer a distribuição?
29. Professor: Entendido? Vai precisar disso em algum exercício aí e tem um tanto de gente confundindo isso aí.

Nessa aula, o professor pergunta explicitamente quantas operações de multiplicação (linha 1) estão presentes na expressão algébrica, menciona a propriedade distributiva (linha 28), mas ainda não chama atenção quando utiliza a propriedade associativa (linha 23) da multiplicação. A aluna Laura se apropria da linguagem do professor, se referindo a $(x + 5)$ como um número (linha 7), parecendo considerar as expressões como objetos e não mais somente como procedimentos. O professor retoma a fala da aluna, mas imediatamente destaca a presença da operação de adição na expressão (linha 8), talvez porque daí a pouco pretenda utilizar a propriedade distributiva. Apesar disso, ele reafirma o caráter estrutural da expressão, dessa vez, sem utilizar a estratégia de substituir o x por algum valor numérico, o que poderia ressaltar o caráter operacional da expressão algébrica, transitando entre as concepções estrutural e procedimental.

Ao final dessa aula, o professor solicita ao aluno Rodrigo que leia, para a turma, a maneira como ele resolveu a equação fracionária $\frac{x+7}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=5$, enquanto o professor vai escrevendo o que ele diz no quadro. Ao chegar à igualdade $(x+7)(x-2)+(x-3)(x+2)=5(x+2)(x-2)$, o professor diz ao aluno que ele pode dizer diretamente cada pedaço, significando o resultado final da multiplicação das expressões algébricas envolvidas após a utilização da propriedade distributiva. Apesar de o professor dizer que muitos alunos ainda tinham dúvidas para operar com produtos envolvendo expressões algébricas, na apresentação oral da resolução dos exercícios, as equações foram resolvidas corretamente. Aparentemente, os alunos estão utilizando corretamente a propriedade distributiva, ainda que de acordo com um procedimento automatizado.

Para melhor compreender o papel dos parênteses na generalização inadequada da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (nesse caso, em relação à própria multiplicação), realizamos uma entrevista, em 29 de novembro de 2012, com o aluno Kleber. Mostramos ao aluno a gravação em vídeo do seguinte diálogo, ocorrido na aula do dia 26 de abril, durante a discussão do exemplo numérico $2 \times 3 \times 5$:

58. Professor: De novo: os fatores são? Três, não é? Eu posso pegar o primeiro e sair distribuindo com os outros fatores?
59. Alunos: Não.
60. Kleber: Não ... porque eles não estão no mesmo :: mesmo parênteses [o professor não parece ter escutado o argumento do aluno].

Inicialmente, solicitamos ao aluno que explicasse o que queria dizer com o comentário anterior (linha 60):

1. Entrevistadora: O que você pensou, não é? É isso que eu quero saber. O professor está tentando explicar porque você não pode pegar o 2 e ir distribuindo com o 3 e o 5.
2. Kleber: É porque o 3 e o 5 não estão nos mesmos parênteses. Eu vou ter que multiplicar o 2 pelo 3 [desenhando no ar um arco com as mãos]. Multiplicar o 2 pelo 5 não precisa porque os dois não estão ... os dois estão fora dos parênteses.
3. Entrevistadora: Mas aí a minha pergunta é a seguinte: e se eu tivesse escrito 2, abre parênteses e o 3 e o 5 estivessem os dois lá dentro [escrevendo $2(3.5)$]?

4. Kleber: Aí você faz a multiplicação dos dois dentro dos parênteses e depois multiplica o resultado por 2.
5. Entrevistadora; Depois dessas aulas, você já sabe quando é que pode distribuir e quando não pode? Ficou claro para você quando é que você pode distribuir?
6. Kleber: Ficou, só quando estiver dentro dos parênteses.
7. Entrevistadora: Mas pode ter qualquer operação dentro dos parênteses?
8. Kleber: Deixa eu ver aqui ... pode. Pode ter qualquer operação dentro dos parênteses. Você pode distribuir se os dois números estiverem dentro dos mesmos parênteses.
9. Entrevistadora: Eu vou escrever aqui. Se tiver aqui $2\ (3 + 5)$ e $2(3.5)$?
10. Kleber: Vou fazer ... vou somar aqui vai dar 5 [o aluno confundiu o 5 com 2] e vai dar 10 [escrevendo $2(5) = 10$]. Aqui vai dar 15 [referindo-se ao produto 3.5] que vai dar [escrevendo $2(15)$] que vai dar ... 30.
11. Entrevistadora: Aqui, agora escreve assim ... se for 2 abre parênteses x vezes y aqui dentro [aluno escreve $2(xy)$].
12. Kleber: Assim?
13. Entrevistadora: Sim. Como é que você faz?
14. Kleber: Eu faço isso aqui [desenhando um arco ligando 2 a x e outro arco ligando 2 a y] ... $2x$ ... $2x$ ... esqueci ... $2x$ vezes ... esqueci ...
15. Entrevistadora: Compara com esse aqui [apontando para $2(3.5)$]
16. Kleber: Ah! vai ficar ... $2xy$.
17. Entrevistadora: E se for 2 abre parênteses $x + y$ dentro dos parênteses?
18. Kleber: Vai ficar $2x + 2y$.

Para Kleber, quando operando com expressões numéricas,a presença dos parênteses indica a ordem em que as operações devem ser feitas, e, nesse caso, a utilização da propriedade distributiva não se coloca. Quando operando com expressões algébricas, Kleber chega a desenhar os arcos indicando o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à multiplicação, mas ele para, não distribui o 2 e não chega a escrever o produto $2x.2y$. O que podemos afirmar é que ele parece perceber que há alguma coisa aí que merece reflexão, mesmo que ainda não tenha certeza sobre quando pode distribuir o 2. Como se sabe, concepções equivocadas dos alunos sobre determinados resultados são muito resistentes e superá-las exige um longo processo de idas e vindas, sendo necessária a utilização de diferentes abordagens, como vimos que esse professor procura fazer.

Na análise realizada em David, Tomaz e Ferreira (2014), concluímos que o papel do chuveirinho como um artefato para representar a propriedade distributiva foi modificado, sobretudo para os estudantes, que começam a utilizá-lo ainda procedimentalmente, mas de uma maneira menos mecânica. No ensino de álgebra, a visualização pode estar direcionada para as propriedades de objetos algébricos ou para procedimentos, e alguns dispositivos visuais podem ser eficientes para ajudar os alunos na visualização de algumas noções algébricas. Mas, se eles enfatizam somente o aspecto procedimental, como é o caso do chuveirinho, não causa nenhuma surpresa o fato de alguns alunos tenderem a extrapolar o seu uso mecanicamente para outras situações, que tenham uma semelhança visual com aquelas em que o seu uso é adequado.

4.3 Conhecimento matemático específico para o ensino de expressões e equações algébricas: na escola e na formação do professor

Primeiramente é fundamental esclarecer que em nenhum momento tivemos o intuito de julgar a prática do professor. Nosso objetivo foi trazer à luz, a partir da sala de aula, elementos que consideramos fundamentais no ensino e aprendizagem de álgebra, para que pudessem ser compreendidos e analisados na perspectiva do conhecimento matemático específico do professor. Foi possível identificar as diversas tentativas feitas pelo professor para retomar questões surgidas em aulas, com novas alternativas de abordagem, como um caminho para levar os alunos à superação de suas concepções equivocadas. Entretanto, não é possível desconsiderar a organização escolar em vigor no Brasil, que, por exemplo, apresenta a aritmética de maneira desvinculada da álgebra e pressupõe que determinados assuntos tratados anteriormente já foram vencidos e compreendidos, tornando difícil para o professor retomá-los recorrentemente, pois há um programa a ser cumprido. Em particular, nessa turma, conforme entrevista realizada com o professor Antônio, havia um número significativo de alunos (aproximadamente um terço) com grandes dificuldades com os conteúdos básicos de matemática. Apesar dos esforços e da grande dedicação do professor, é possível notar que não é fácil abandonar o trabalho com roteiros passo a passo para garantir a execução correta de determinados procedimentos. Por exemplo, isso ocorre quando ele insiste com os alunos para primeiro tirar o mmc, depois colocar as funções racionais com os mesmos denominadores, para então levar os alunos à conclusão de que, como elas são iguais, então os numeradores são iguais. Acreditamos que o professor teve sucesso ao levar pelo menos alguns alunos a abandonar o uso do chuveirinho desconectado da propriedade distributiva.

Destaca-se também a atuação do aluno Kleber na sala de aula. Ao explicitar suas dúvidas e esclarecer a maneira como estava compreendendo os assuntos tratados, ele se torna, de certa forma, a voz dos alunos, dando visibilidade ao processo de construção do conhecimento que está ocorrendo na sala de aula. A participação desse aluno, associada à atuação do professor, sempre procurando outras estratégias para abordar as dificuldades dos alunos, traz à luz os diversos domínios do conhecimento matemático para o ensino, conforme proposto por Ball e seus colegas, em especial, o conhecimento do conteúdo e dos alunos e o conhecimento do conteúdo e do ensino.

Durante o acompanhamento da prática do professor Antônio, diversas questões referidas em pesquisas sobre ensino e aprendizagem escolar de álgebra emergiram e foram apontadas no processo de análise de suas aulas. Sintetizando, destacamos os seguintes elementos do conhecimento matemático específico do professor para o trabalho com álgebra na Educação Básica:

1. Um conjunto de situações didáticas "reais" (i.e de sala de aula escolar) em que se faz presente a dualidade processo-objeto e que mostram a importância do trabalho de promoção de uma visão flexível dos significados da simbologia algébrica (processo, procedimento, estrutura, objeto, conceito) de acordo com as instâncias específicas de uso;
2. Um conjunto de situações didáticas que demandam do professor o conhecimento dos diversos significados das operações aritméticas e da lógica das suas propriedades, assim como um olhar para os procedimentos de cálculo que estimule a produção de uma visão deles como ações estruturais a serem eventualmente objeto de generalização no trabalho com as expressões algébricas e com as equações;
3. Um conjunto de situações didáticas que demandam do professor o reconhecimento do papel de atividades envolvendo modelagem e resolução de problemas, como forma de dar sentido, em contextos significativos, ao trabalho de formação das equações e das expressões algébricas, assim como à necessidade de transformá-las, simplificá-las, resolvê-las etc., conforme seja o caso;
4. Um conjunto de situações didáticas que demandam do professor o reconhecimento dos diferentes papéis do sinal da igualdade, tanto na aritmética como na álgebra;
5. Um conjunto de situações de sala de aula que demandam do professor o reconhecimento dos diferentes significados das letras na álgebra e do sentido de utilização delas nas expressões, equações, funções, fórmulas etc.;
6. Um conjunto de situações de sala de aula que demandam do professor a análise do papel das definições e da organização lógica do conhecimento matemático

escolar, tendo em vista a promoção da aprendizagem segundo as necessidades e limitações correspondentes aos diversos estágios do processo de educação escolar.

Esses dois últimos elementos foram identificados também na análise desenvolvida no capítulo anterior, mostrando que são elementos importantes do conhecimento matemático específico do professor para o trabalho com a álgebra.

A seguir, comentamos e situamos alguns desses elementos em relação à literatura pertinente.

A extensão inadequada da propriedade distributiva da multiplicação em relação à multiplicação é um erro muito comum entre os alunos do ensino fundamental e um fato bastante conhecido pelos professores da Escola Básica. Para Russel, Schifter e Bastable (2011), quando os alunos utilizam a propriedade $2(xy) = (2x)(2y)$, eles podem estar aplicando a regra "multiplicar tudo o que estiver dentro dos parênteses pelo número que estiver fora dos parênteses". Essa regra funciona muito bem para o caso $2(x + y) = 2x + 2y$, mas não para $2xy.$ É possível que os alunos que cometem esse tipo de erro estejam focando o aspecto visual da expressão, que tem o mesmo padrão daquela a que se aplica a regra corretamente. Esse é um erro persistente, mesmo em face de repetidas correções, o que ficou evidente nos episódios analisados. Os alunos aplicam, inadequadamente, o que eles pensam ser a propriedade distributiva, e não reconhecem que nesse caso se aplicaria a propriedade associativa da multiplicação, como visto também na nossa pesquisa.

Em trabalho conjunto com professores do ensino básico, Russel, Schifter e Bastable (2011) têm pesquisado como o estudo explícito das operações no campo da aritmética pode trazer benefícios para os alunos, como, por exemplo, examinando os procedimentos de cálculo como objetos matemáticos que podem ser descritos de maneira geral em termos de suas propriedades e comportamentos. Elas enfatizam que isso não significa que os alunos devam aprender os nomes das propriedades e saber repeti-las como regras, como feito em outras épocas. Trabalhando com exemplos específicos para explorar a propriedade comutativa da adição, o professor pode tomar a regularidade presente nos exemplos como um foco explícito de investigação, levando os alunos a pensar em termos de generalização, pedindo que eles pensem se, ao mudar a ordem das parcelas, a soma continua a mesma somente para casos particulares ou se esse resultado continua verdadeiro no caso geral, e pedindo que justifiquem as suas conclusões. No experimento relatado no artigo, como os alunos estavam ajuntando dois conjuntos de cubos, a troca das posições dos conjuntos não modificava a quantidade de cubos. Além disso, conforme ressaltamos anteriormente, o modelo utilizado poderia representar qualquer par de números, levando os alunos à conclusão de que a soma seria sempre a mesma porque “você não estava adicionando nada nem retirando nada” (RUSSEL et al., 2011, p. 47). Essas autoras concluem que o cálculo com números naturais, feito de maneira sólida, pode ser estendido aos símbolos algébricos, fornecendo ligações cruciais entre a aritmética e a álgebra. Na verdade, há um crescente consenso em torno da ideia de que a divisão do estudo da aritmética e da álgebra como feito tradicionalmente, em que a aritmética é ensinada nos anos iniciais e a álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental, torna a aprendizagem da álgebra mais difícil. As situações didáticas sugeriram que os alunos ainda estão pensando aritmeticamente e há a necessidade de fazer um deslocamento desse pensamento para o algébrico, e que um novo olhar para o comportamento das operações e de suas propriedades precisa ser construído. Mas, esse é um processo longo, que, segundo muitos pesquisadores, deve ser iniciado mais cedo, e que ainda não é uma prática corrente no ensino de Matemática.

Diversas pesquisas (CAI, KNUTH, 2011) têm apontado a necessidade de expor os alunos às ideias algébricas à medida que eles desenvolvem competência computacional na aritmética. A pesquisa de Russel e suas colegas faz parte desse movimento que propõe a algebrização desde os anos iniciais , segundo a perspectiva de desenvolvimento das ideias algébricas o mais cedo possível, não significando, de maneira alguma, simplesmente transladar o conteúdo de álgebra que é ensinado nos anos finais do ensino fundamental para os anos iniciais.

A maneira como o professor Antônio tratou o uso inadequado da propriedade distributiva pelos alunos pode ser analisada sob outro ponto de vista, também relacionado à transição da aritmética para a álgebra. Ao utilizar um exemplo numérico para explicar a não validade da propriedade distributiva do produto em relação ao produto, os alunos identificam na multiplicação $2 \times 3 \times 5$, ou escrita na forma $2(3)(5)$, duas operações de multiplicação e três fatores. O professor espera que, após esse exemplo, os alunos façam a transição do contexto aritmético para o algébrico, no caso específico do exemplo $7(x-2)(x-3)$. Mas isso não ocorre de maneira tão direta, uma vez que, no contexto aritmético, a expressão numérica 2×3 pode representar o *processo computacional* da multiplicação como adição repetida $3+3$ e o *produto* 2×3 é facilmente associado ao número 6. E, realmente, o principal argumento utilizado pelos alunos para justificar a não validade da propriedade distributiva do produto em relação ao produto, ou seja, que $2(3)(5) \neq (2.3)(2.5)$, foi que os resultados eram diferentes, que esse último era o dobro do anterior, ou que, a utilização da distributividade nesse caso dava a resposta errada. No contexto aritmético, utilizando o conceito de produto, que pode ser associado à resposta numérica, eles podiam comparar os resultados.

A expressão algébrica $7(x-2)$ pode também ser vista como um *processo*: subtrair 2 de x e multiplicar o resultado obtido por 7; ou, estruturalmente, como um *objeto* que representa um certo número. Entretanto, para identificar a existência de duas operações de multiplicação e de três fatores no produto $7(x-2)(x-3)$, os alunos deveriam ver as expressões algébricas $(x-2)$ e $(x-3)$ estruturalmente como objetos, em vez de operacionalmente, como processos. Mas, para eles, uma expressão como $(x-2)$ não é um número, pois a operação de subtração não foi finalizada.

Como afirmam Gray e Tall (1993), para o aluno que possui apenas uma visão procedimental da notação, uma expressão envolvendo letras é algo estranho, pois ela só pode ser finalizada quando os valores das letras são conhecidos, mas aí o resultado da substituição da letra por um número é também um número que obedece às leis da aritmética, e as letras passam a ser redundantes.

De acordo com Sfard (1991), os processos de aprendizagem e resolução de problemas consistem de uma interação entre as concepções operacional e estrutural das mesmas noções. Usualmente, a concepção operacional é o primeiro passo para a aquisição de novas noções matemáticas e, no que diz respeito aos estágios da formação de conceitos, a transição das operações computacionais para os objetos abstratos é um processo longo e inerentemente difícil. Para Sfard e Linchevski (1994), a álgebra é uma estrutura hierárquica, na qual a dualidade processo/objeto pode ser explicada em termos hierárquicos: o que é concebido operacionalmente em um nível precisa ser percebido estruturalmente em um nível superior e a transição de um nível para o outro envolve um processo cognitivo de reestruturação que é a reificação.

Nos episódios analisados anteriormente, é possível perceber claramente as diferenças entre as concepções das expressões algébricas dos alunos e do professor.

Do ponto de vista das estruturas algébricas, as expressões algébricas podem ser vistas como elementos do anel de polinômios em uma variável com coeficientes reais, $R[x]$, com as operações usuais de adição e multiplicação. Dessa forma, a multiplicação é uma operação $m: R[x] \times R[x] \to R[x]$, que associa a cada par $(p(x), q(x)) \in R[x] \times R[x]$, um elemento $m(p(x), q(x)) = p(x)q(x)$. Assim, do ponto de vista das estruturas algébricas, o produto $5(x-2)$, é o resultado da multiplicação dos elementos 5 e $(x-2)$ de $R[x]$, e, portanto, é também um elemento de $R[x]$, razão pela qual, em sua fala, o professor diz que, como $5(x-2)$ é um produto, então "é uma coisa só".

No entanto, para os alunos, que operam com os símbolos operacionalmente como processos, a expressão $7(x-2)(x-3)$ contém quatro operações: subtrair 3 de x; subtrair 2 de x; multiplicar os dois números obtidos e, finalmente, multiplicar o resultado dessa multiplicação por 7.

Essa diferença entre o que é visto pelos alunos e pelo professor nos símbolos algébricos, segundo Sfard e Linchevski (1994), decorre do que cada um de nós está preparado para observar e é capaz de perceber. Os autores acrescentam ainda que os objetos matemáticos, concebidos estruturalmente, se desenvolvem em um estágio posterior à concepção operacional e são originados da capacidade de imaginar o resultado dos processos como entidades com características próprias, que é o processo de reificação.

Gray e Tall (1994) utilizam o termo *procepto* para designar o amálgama entre conceito e processo representados pelo mesmo símbolo. Eles definem um *procepto elementar* como o amálgama de três componentes: o *processo* que produz um *objeto* matemático e um *símbolo* que é usado para representar o processo ou o objeto. Essa definição permite que o simbolismo evoque tanto o processo (que pode ser o processo de adição) quanto o conceito (o conceito de soma, por exemplo). No entanto, para abranger a compressão crescente do conhecimento característico dos matemáticos e refletir a flexibilidade da noção e a versatilidade dos processos de pensamento, eles estendem essa definição e dão o nome de *procepto* para uma coleção de *proceptos elementares* que possuem o mesmo *objeto*. Dessa forma, segundo essa definição, o *procepto* 6 inclui não somente o processo de contar 6 elementos como a coleção de outras representações como $3+3, 4+2, 2\times 3, 8-2$ etc. Matematicamente, um procepto é a classe de equivalência de proceptos elementares, considerando que dois proceptos elementares são equivalentes se eles possuem o mesmo objeto. Eles mesmos dizem que essa definição matemática precisa é muito complicada e que, no que diz respeito ao processo cognitivo das crianças, um procepto elementar pode ser visto como o primeiro estágio de um procepto. E o *pensamento proceptual* é caracterizado como a capacidade de manipular o simbolismo flexivelmente como processo e conceito, trocando livremente os simbolismos diferentes para o mesmo objeto. Para esses pesquisadores, é o pensamento proceptual que permite a possibilidade do uso flexível e ambíguo do simbolismo representando a dualidade do processo e do conceito presentes na mesma notação. Para eles, o matemático profissional, em vez de ter de lidar conscientemente com a dualidade conceito-processo, utiliza de forma ambígua o simbolismo para produto e processo. Eles afirmam que o matemático simplifica essa questão substituindo a complexidade da dualidade processo - conceito pela conveniência da ambiguidade processo-produto. Mas, o professor de matemática da Educação Básica não pode simplesmente aceitar essa ambiguidade porque ela é conveniente, se pretende que os alunos utilizem a álgebra de uma maneira não mecânica e com significado.

No que diz respeito às recomendações para a formação de professores de matemática no Brasil, específicas para o ensino de álgebra, o Parecer CNE/CNS nº 1302/2001[26] estabelece que os currículos de todos os cursos de Licenciatura devem contemplar conteúdos de Fundamentos de Álgebra e conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica na área de álgebra. Nos Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura[27], publicados em abril de 2010, consta no perfil do egresso que a “atribuição central do Licenciado em Matemática é a docência na Educação Básica, que requer sólidos conhecimentos sobre os fundamentos da matemática, sobre seu desenvolvimento histórico e suas relações com diversas áreas; assim como sobre estratégias para transposição do conhecimento matemático em saber escolar” (BRASIL, 2010, p. 79). Como se pode notar, tais documentos apresentam princípios genéricos que devem ser observados na construção do projeto pedagógico dos cursos, mas não avançam na consideração da educação algébrica escolar.

Como dissemos anteriormente, o documento “A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM”[28], publicado em fevereiro de 2013, é mais específico e apresenta uma reflexão sobre alguns elementos constituintes do currículo da licenciatura em matemática e também sobre dezessete temas considerados essenciais para a formação do futuro professor de matemática em um curso de licenciatura, entre eles, os seguintes: Abordagem crítica da matemática básica; Aritmética e Álgebra.

O documento propõe a retomada dos conteúdos de aritmética e álgebra no sentido de aprofundar e solidificar os conhecimentos matemáticos nessa área e ampliar as discussões referentes ao ensino desse tema na Educação Básica. Apresentam-se como conteúdos indispensáveis para a formação de professores temas referentes à Teoria dos Números, Grupos, Anéis, Corpos etc., seguindo os pressupostos da matemática acadêmica.

---

[26] CNE. Parecer CNE/CES 1.302/2001. Diário Oficial da União, Brasília, 5 de março de 2002, Seção 1, p. 15.
[27] Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura/Secretaria de Educação Superior – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Superior, 2010, 99 p.
[28] Boletim da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, nº 2, fevereiro de 2013.

No item abordagem crítica da matemática básica, o documento afirma que as disciplinas de fundamentos da matemática básica, instrumentação para o ensino, resolução de problemas etc., "são exemplos de oportunidades de enriquecer a formação do licenciando, ao explicitar o conteúdo específico de matemática necessário à prática docente, equilibrando com o conhecimento de cunho pedagógico constante em seu currículo" (SBEM, 2013, p. 18). Há também referências à necessidade de abordar as conexões entre os níveis de aprofundamento dos tópicos dentro do currículo da escola básica, para interpretar corretamente as dificuldades e os erros dos estudantes, mas todas elas apresentadas de maneira genérica. Nesse documento, das questões apontadas pelas pesquisas sobre ensino e aprendizagem de álgebra, há uma única referência ao pensamento algébrico e ao reconhecimento de padrões, mas nenhuma associada especificamente à educação algébrica, à linguagem algébrica, aos diferentes significados das letras etc..

Apesar do propósito anunciado de buscar "romper a dicotomia entre o conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico, a matemática da universidade e a matemática da escola" (SBEM, 2013, p. 11), ao apresentar os temas considerados essenciais na formação do futuro professor de Matemática em um curso de Licenciatura, a ênfase está no desenvolvimento dos conteúdos, segundo os pressupostos da matemática acadêmica e não está clara a maneira como esses conteúdos deveriam ser tratados, tendo em vista a prática futura do professor. Mesmo que a intenção não tendo sido essa, é possível depreender da discussão sobre os temas propostos, as ementas e programas das disciplinas de aritmética e álgebra, da perspectiva da matemática acadêmica, que devem compor o currículo de um curso de licenciatura em matemática. Apresentar uma lista com esse mesmo nível de detalhamento, do que poderia constituir, por exemplo, o conhecimento matemático para o ensino, conforme proposto por Ball, Thames e Phelps (2008), em especial, os domínios do conhecimento especializado do conteúdo, do conhecimento do conteúdo e dos estudantes e do conhecimento do conteúdo e do ensino, talvez não seja possível, dada a natureza dessa forma de conhecimento. Acreditamos que a análise realizada neste trabalho mostra que é possível avançar na identificação de saberes importantes e fundamentais que compõem o conhecimento matemático específico do professor, no trabalho com a álgebra na Educação Básica.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, a partir da análise da prática de dois professores da Educação Básica, identificamos elementos constituintes do conhecimento matemático específico para o ensino, no contexto do trabalho com a álgebra na Educação Básica.

Partimos do pressuposto, defendido por parte significativa da literatura sobre formação de professores, de que existe uma forma de conhecimento matemático específico do professor (de matemática) da Educação Básica que inclui, entre outros elementos, a consideração das relações entre o saber puramente disciplinar e as necessidades colocadas pelo exercício da profissão docente. Esclarecemos que, embora não haja consenso sobre o que comporia esse corpo de conhecimento matemático específico, há um conjunto de estudos e pesquisas que dão suporte a essa ideia, justificando-se assim a nossa escolha de realizar a investigação a partir da análise da prática de professores. Nós nos apoiamos nos trabalhos de Ball e sua equipe de pesquisa, em função de algumas ideias que defendem, em especial a de que o conhecimento matemático para o ensino é um tipo de conhecimento matemático que se diferencia de outros porque contempla de modo fundamental as necessidades específicas da prática docente escolar em matemática.

Tendo em vista a nossa convicção de que existe um conhecimento matemático específico da profissão docente escolar, fomos para o trabalho de campo na expectativa de trazer à tona elementos desse saber presentes, de alguma forma, na prática concreta da sala de aula de álgebra dos dois professores que abriram espaço, em suas salas de aula, para nossas observações.

Escolhemos um formato diferente daquele normalmente utilizado em teses na área de Educação para a apresentação do relato da pesquisa. Com o intuito de garantir o registro da especificidade da prática dos dois professores pesquisados, foram desenvolvidos dois estudos mais ou menos independentes, um para cada um deles.

No primeiro estudo, exploramos a questão do desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir das generalizações de relações numéricas e a concepção de álgebra subjacente, conforme foram tratadas numa turma de 8º ano. Situações didáticas reais (i.e de sala de aula) que envolviam o trabalho com generalizações vinculadas a procedimentos para obtenção de novos resultados matemáticos compõem um dos elementos do conhecimento matemático específico para o trabalho com a álgebra escolar que identificamos.

A base lógica subjacente aos processos de generalização consiste em justificar a conclusão obtida através de formas de validação que sejam legitimadas no contexto da sala de aula da Educação Básica. Assim, a descrição e a compreensão do conhecimento sobre as generalizações e sobre as formas de argumentação e demonstração apropriadas ao contexto da Educação Básica são fundamentais para o professor de matemática em sua prática na sala de aula. Conforme visto, o processo apresentado pelo professor Wagner para a obtenção da definição de potências com expoentes inteiros, a partir da generalização da definição e das regras das operações das potências com expoentes positivos, continha os elementos necessários para justificar a sua validade no contexto da sala de aula. No entanto, o professor não reconhece a validade do processo de argumentação utilizado, por entender que não está de acordo com o desenvolvimento formal da matemática.

Argumentamos também que a propriedade comutativa da adição poderia ter sido considerada como um conhecimento aceitável no contexto daquela sala de aula, sem necessidade de apresentação de uma tentativa de demonstração formal, conforme feito pelo professor Wagner. Além disso, mostramos como o desenvolvimento lógico formal dos conteúdos conforme os preceitos da matemática acadêmica é, muitas vezes, inadequado para o processo de construção e sistematização dos conhecimentos que ocorrem na Escola Básica. O conhecimento de diferentes formas de argumentação e demonstração, assim como a avaliação da adequação (ou não) dessas formas ao contexto do trabalho com a educação matemática escolar faz parte do conhecimento matemático específico do professor.

Ainda nesse primeiro estudo, analisamos e discutimos a conveniência ou não da apresentação das definições de objetos como expressão algébrica e fórmula, conforme feitas no livro didático e trabalhadas pelo professor Wagner. A apresentação dessas definições, refletindo, talvez, a influência dos valores da matemática acadêmica no desenvolvimento do trabalho docente escolar, foi analisada e discutida, concluindo-se que é, no mínimo, inócua no contexto em tela. Uma das questões fundamentais nesse contexto parece ser o reconhecimento dos diferentes significados das letras em diferentes situações didáticas, envolvendo expressões algébricas, equações ou fórmulas.

A aula analisada fornece um conjunto de exemplos concretos de situações didáticas que demandam a mobilização de saberes docentes de natureza algébrica e que constituem, por si só, elementos do conhecimento específico do professor no trabalho escolar com o desenvolvimento do pensamento algébrico em geral, e, em particular, com as definições, com as generalizações ou com a validação de procedimentos e formas de raciocínio matemático, além de confirmarem a relevância, na prática docente escolar, do conhecimento, por parte do professor, dos diferentes significados do sinal de igualdade, tanto na aritmética como na álgebra.

No segundo estudo, analisamos a abordagem das expressões e das equações algébricas durante o ensino das equações de segundo grau na turma do 9º ano. A dualidade processo-objeto das expressões algébricas esteve presente no diálogo entre o professor Antônio e seus alunos durante uma sequência de aulas, tendo sido possível observar o professor fazendo uso flexível de formas de entendimento das expressões algébricas, ou seja, transitando, de acordo com as necessidades, entre as concepções estrutural e procedimental dessas expressões (possivelmente sem se dar conta disso), enquanto os estudantes permaneciam presos unicamente à forma procedimental.

O uso equivocado da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (no episódio, o equívoco se refere ao uso da distributividade em relação à própria multiplicação) mostrou a necessidade de uma abordagem das operações aritméticas em que se analise o que há de geral e de particular nos procedimentos e propriedades, tendo em vista o desenvolvimento das ideias da álgebra. A análise por nós empreendida mostrou também situações didáticas reais em que a necessidade de discussão dos significados das operações e da lógica subjacente à validade das suas propriedades no campo da aritmética se fez presente. O objetivo foi, na maior parte das situações, a construção eventual de formas de pensamento algébrico que favorecessem o reconhecimento da validade dessas propriedades no contexto mais geral das expressões envolvendo letras, por exemplo.

Neste segundo estudo, observamos a utilização, pelo professor Antônio, dos diferentes significados das letras nas expressões e nas equações algébricas. Aqui vale ressaltar que não se trata da apresentação das “definições” dos diferentes significados, mas de promover o reconhecimento por parte do aluno, ainda que tacitamente, dos diferentes significados das letras nas expressões, equações, fórmulas, funções etc.. Identificamos, também, na prática desse professor, uma situação didática característica em que se faz necessário o reconhecimento dos diferentes papeis do sinal de igual nas expressões funcionais e nas equações: na resolução de um problema, ao obter a expressão $x^2 + x^2$ para uma determinada área, o professor a iguala a $2x^2$ (igualdade de expressões algébricas) e, imediatamente após, a reescreve na forma $x^2 + x^2$ ou $2x^2$, para evitar a possibilidade de que os alunos interpretem o sinal de igual como o fazem em contextos de natureza aritmética ou no estudo das equações. A resolução desse mesmo problema apontou a pertinência e a importância do estudo do papel das atividades envolvendo modelagem e resolução de problemas, como forma de contextualizar a necessidade de construção e transformação de expressões algébricas de maneira significativa.

Nos dois estudos realizados, identificamos importantes elementos constituintes do conhecimento matemático específico do professor, a partir da prática real da sala de aula. Tais elementos foram sintetizados ao final dos capítulos II e III deste trabalho e constituem, numa forma extremamente abreviada, os resultados deste estudo.

Conforme afirmamos, parte significativa da literatura sobre formação de professores dá sustentação à ideia de que existe uma forma de conhecimento matemático específico do professor da Educação Básica, a qual inclui, entre outros elementos, a consideração das complexas relações entre o saber puramente disciplinar e as necessidades de conhecimento postas pelo exercício da profissão docente. Por outro lado, esse corpo de conhecimentos matemáticos específicos do professor ainda se encontra num plano de elaboração essencialmente teórico, embora com fundamento na prática, podendo-se observar uma explicitação ainda incipiente dos seus componentes elementares. Acreditamos que nosso trabalho contribui para explicitar elementos da composição desse corpo de conhecimentos, a partir da análise de dados coletados na prática concreta da sala de aula. Essas aulas analisadas fornecem um conjunto de situações reais da prática do professor que, o nosso ver, contribuem simultaneamente para o enriquecimento do corpo de conhecimentos específicos para o trabalho com álgebra na Educação Básica e também para uma melhor compreensão das diferentes formas de manifestação do conhecimento profissional docente. A eventual incorporação dos nossos resultados à literatura de pesquisa e à prática efetiva no campo de formação de professores pode contribuir para a consolidação dessa ideia geral da existência de um conhecimento matemático que é específico do professor de matemática da Educação Básica.

Acreditamos que uma das limitações do nosso trabalho é a quantidade de aulas observadas e o pequeno número de professores cujas práticas foram analisadas, além da especificidade do trabalho docente na escola estudada. Assim, uma ampliação da pesquisa para outras escolas, envolvendo professores com diferentes experiências e “estilo de atuação” em sala de aula de matemática, em diferentes níveis de ensino, poderia vir a situar melhor este estudo em relação ao alcance de seus resultados.

A nosso ver, a forma de utilização do livro didático na escola pesquisada é também muito particularizada, com a leitura sistemática em sala de aula dos assuntos abordados no texto, o que nos leva a crer que as concepções presentes no livro adotado podem ter influenciado a prática dos professores. Uma análise das concepções de álgebra, de pensamento algébrico, subjacentes às atividades algébricas propostas no livro adotado na escola e em outros materiais pode auxiliar na compreensão do papel dos materiais didáticos na determinação das situações de sala de aula que produziram nossos resultados.

Neste trabalho, relacionamos as questões associadas ao ensino e aprendizagem de álgebra presentes na prática dos professores participantes da pesquisa com a maneira como esses temas são abordados nas recomendações para a formação de professores de matemática no Brasil. Mostramos como as referências aos saberes associados ao trabalho com a aritmética e a álgebra no contexto escolar são genéricas, diferentemente do que ocorre com os conteúdos da matemática acadêmica. Da leitura do documento elaborado pela SBEM e SBM, é possível inferir que as ementas e programas das disciplinas de aritmética e álgebra que devem compor o currículo de um curso de licenciatura em matemática são analisados criticamente a partir de uma visão que privilegia os valores próprios do conhecimento matemático acadêmico, enquanto, em momento algum, se analisam criticamente esses valores a partir das necessidades concretas da prática docente escolar.

Por outro lado, considerando-se que a constituição do conhecimento matemático específico para o ensino encontra-se ainda em processo de construção, a apresentação de uma lista com alto nível de detalhamento dos conhecimentos relevantes para a formação inicial de professores de matemática poderia não ser possível neste momento. Entretanto, acreditamos que nossos resultados se agregam ao de outras pesquisas e estudos científicos para mostrar a potencialidade de uma formação matemática na licenciatura que ultrapasse recomendações genéricas baseadas em opiniões e impressões. Em suma, o que parece se tornar cada vez mais claro no horizonte é a possibilidade de construir um currículo de licenciatura em matemática que tenha como fundamento as pesquisas consolidadas sobre os saberes (e a necessidade de saberes) da prática docente escolar em matemática.

No que se refere especificamente à álgebra, provavelmente a ampliação das pesquisas sobre o conhecimento matemático específico do professor poderia sugerir a inclusão de novas temáticas no trabalho na Escola Básica. Como o tempo de formação dos professores em cursos de licenciatura é limitado e muitos são os conteúdos presentes nos currículos, não é possível contemplar tudo o que se deseja. No capítulo que sintetiza as discussões presentes no estudo sobre ensino e aprendizagem de álgebra - The Future of the Teaching and Learning of Algebra- The 12th ICMI Study (STACEY, CHICK, KENDAL, 2004), Kendal e Stacey concluem que a álgebra e seu ensino compreendem uma extensa relação de conteúdos e que não é possível incluir todos eles no currículo da Escola Básica e escolhas precisam ser feitas. Esses autores dizem que, mais do que isso, a álgebra é um campo muito rico, com muitas possibilidades de aplicações e abordagens de objetivos metamatemáticos. O mesmo pode ser dito sobre o conhecimento matemático específico do professor para o trabalho com a álgebra na Escola Básica. Provavelmente, a cada tema da álgebra escolar poderiam ser associados outros correspondentes, no campo do conhecimento matemático específico do professor. Assim, escolhas precisariam ser feitas e elas deveriam contemplar, entre outros elementos, temáticas que possam se adequar melhor aos objetivos mais amplos da educação matemática escolar.

6. REFERÊNCIAS

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas ciências sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSNAJDER,F. *O método nas ciências naturais e sociais:*Pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Editora Pioneira, parte II, p. 108-188, 1999.

ARTIGUE, M.; ASSUDE, T.; GRUGEON, B.; LENFANT, A. Teaching and learning algebra: approaching complexity through complementary perspectives. In: CHICK, H.; STACEY, J.; VINCENT, J. (Eds) *The future of the teaching and learning of algebra*. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, Melbourne, Australia: The University of Melbourne, p.21-32, 2001.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, v.59, n.5, p. 389-407, 2008.

BALL, D.L.; BASS, H. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: SIMMT,E.;DAVIS, B. (Eds.). *Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*.Kingston, Canada: CMESG Program Committee,p.3-14, 2002.

BALL, D.L.; BASS, H.; SLEEP, L.; THAMES, M. A theory of mathematical knowledge for teaching. Work-session apresentada no ICMI Study 15, Lindoia, Brazil, 2005. On line access: http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. *Parecer nº 1.302, de 6 de novembro de 2001 - CNE/CES.* Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Disponível em: <htpp://portal.mec..gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 19 ago. 2013.

BRASI. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. *Resolução nº 1, de 18 de fevereiro de 2002 – CNE/CP*. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. Disponível em: <htpp://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf>. Acesso em 02 jul. 2014.

BRASIL. Ministério da Ecucação. Conselho Nacional de Educação. *Resolução nº 3, de 18 de fevereiro de 2003 – CNE/CES.* Estabelece as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Matemática. Disponível em: <htpp://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/ces032003.pdf>.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Superior. *Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura.* Brasília, abril de 2010.

BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE,L. *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

BLANTON, M.L.; KAPUT, J.J. Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.). *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer, p. 5-23, 2011.

CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.). *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer, 2011.

CARAÇA, B.J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: 1975.

CENTURIÓN, M. *Números e operações*. São Paulo: Editora Scipione, 1995.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. *Matemática na medida certa*: 8º ano, 11ª ed. São Paulo: Scipione, 2011a.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. *Matemática na medida certa*: 9º ano, 11ª ed. São Paulo: Scipione, 2011b.

CURY, H.N. O conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros. In: CURY, H. N.; VIANNA, C. R. (Eds.) *Formação do Professor de Matemática:* reflexões e propostas.Santa Cruz do Sul: Editora IPR, p.19-48, 2012.

DAVID, M.M; TOMAZ, V.S.; FERREIRA, M.C.C. How visual representations participate in algebra classes' mathematical activity. *ZDM Mathematics Education*, v.46, n.1, p.95-107, 2014.

DINIZ-PEREIRA, J. E. *Formação de professores:* pesquisas, representações e poder. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

DOERR, H. M. Teacher's knowledge and the teaching of algebra. In: STACEY, K.; CHICH, H.; KENDAL, M. (Eds). *The Future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 267-290, 2004.

DOMINGUES, H.H. *Fundamentos de Aritmética*. São Paulo: Atual, 1991.

DROUHARD, J. P.; TEPPO, A. R. Symbols and language. In: STACEY, K.; CHICH, H.; KENDAL, M. (Eds). *The Future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 227-264, 2004.

FERRINI-MUNDI, J.; FLODEN, R.; McCRORY, R.; BURRIL, G.; SANDOW, D. A. Conceptual Framework for Knowledge for Teaching School Algebra. Michigan State University. 2005.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: SEMINÁRIO LUSO- BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO. 2005, Portugal. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminário_lb.htm. Acesso em 05/03/2013.

FLICK, U. *Desenho da pesquisa qualitativa.*Porto Alegre: Artmed, 2009.

GATTI, B.A. Licenciaturas: crise sem mudança? In: DALBEN, A.; DINIZ, J.; LEAL, L.; SANTOS,L. (Org.) *Convergências e tensões no campo da formação e do trabalho docente:* didática, formação docente, trabalho docente. Belo Horizonte: Autêntica, p.485-508, 2010.

GOMES, M. L. M. . Matemática e Escola: uma experiência integradora na Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais. *Zetetike* (UNICAMP), Campinas, v. 5, n.7, p. 95-109, 1997.

GRAY, E.; TALL, D. Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), p.115-141, 1994.

GRAY, E.; TALL, D. Success and failure in mathematics: the flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching*, n. 142, p.6-10, 1993.

HIEBERT, J.; LEFEVRE, P. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In: HIEBERT, J. (Ed). *Conceptual and procedural knowledge*: the case of mathematics. London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, p. 1-27, 1986.

HOWARD, A.; RORRES,C. *Álgebra Linear com Aplicações*. 8ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2001.

KENDAL, M.; STACEY, k. Algebra: a world of difference. In: STACEY, K.; CHICH, H. Solving the problem with algebra. In: STACEY, K.; CHICH, H.; KENDAL, M. (Eds). *The Future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p.329-346, 2004.

KIERAN, C. Overall commentary on early algebraization: perspectives for research and teaching. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.). *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer, p. 579-593, 2011.

KIERAN, C. Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulations. In: LESTER Jr., F.K. (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC: Information Age Publishing, p. 707-762, 2007.

KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades: what is it? *The Mathematics Educator*, v. 8, n.1, p. 139-151, 2004a.

KIERAN, C. The core of algebra: reflections on its main activities. In: STACEY, K.; CHICH, H.; KENDAL, M. (Eds.). *The Future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p.21-33, 2004b.

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. In: GROUWS, D.A.(Eds.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan, p.390-419, 1992.

KÜCHEMANN, D. Algebra. In: HART, K. (Ed.). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray, p. 102-119, 1981.

LIMA, E.L. et al. *A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.* Rio de Janeiro: SBM, 1996.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas, SP: Papirus, 1997.

LINS, R.; KAPUT, J. The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. In: *The Future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 47-70, 2004.

LÜDKE, M. *Formação de docentes para o ensino fundamental e médio*: As Licenciaturas. Rio de Janeiro: CRUB, 1994.

MARTIN, W.G.; HAREL, G. Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 20, n.1, p. 41-51, 1989.

MOREIRA, P.C. *O conhecimento matemático do professor*: formação na licenciatura e prática docente na escola básica. 2004. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

MOREIRA, P.C.; DAVID, M.M.M.S. *A formação matemática do professor*: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MOREIRA, P.C.; DAVID, M.M.M.S. Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: some conflicting elements. *Journal of Mathematics Teacher Education,* v.11, p.23-40, 2008.

MOREIRA, P.C.; FERREIRA, A.C. O lugar da matemática na licenciatura em matemática. *Bolema, Boletim de Educação Matemática,* UNESP, Rio Claro, v.27, p.981-1006, 2013.

RADFORD, L. Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.). *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer, p. 303-322, 2011.

RADFORD, L. Some reflections on teaching algebra through generalization. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds). *Approaches to Algebra*: Perspectives for Research and Teaching. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 107-111, 1996.

RIBEIRO, A. J. Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. *Bolema, Boletim de Educação Matemática,* UNESP, Rio Claro, v.26, p.535-557, 2012.

RUSSELL, S.; SCHIFTER, D.; BASTABLE, V. Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In Cai, J., & Knuth, E. (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives.* Berlin: Springer, p. 43-69, 2011.

SAVIANI, D. Formação de professores: aspectos históricos e teóricos do problema no contexto brasileiro. *Revista Brasileira de Educação,* v.14, n.40, p.143-155, 2009.

SBEM. *A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM.* Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Boletim nº 21, fevereiro, p. 1-42, 2013.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, v. 22, n.1, p.1-36, 1991.

SFARD, A.; LINCHEVSKI, L. The gains and the pitfalls of reification: the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, v.26, n.2/3, p. 191-228, 1994.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, v.57, n.1, p.1-22, 1987.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v.15, n.2, p.4-14, 1986.

SILVERMAN, J.; THOMPSON, P. W. Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v.11, p.499-511, 2008.

SOARES, E.F.; FERREIRA, M.C.C.; MOREIRA, P.C. Números reais: concepções de licenciandos e formação matemática na licenciatura. *Zetetiké*, v.7, n.12, p.95-117, 1999.

SOARES, E.F.; FERREIRA, M.C.C.; MOREIRA, P.C. Da prática do matemático para a prática do professor: mudando o referencial da formação matemática do licenciando. *Zetetiké*, v.5, n.25, p.25-36, 1997.

STACEY, K.; CHICH, H. Solving the problem with algebra. In: STACEY, K.; CHICH, H.; KENDAL, M. (Eds). *The Future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004.

STACEY, K.; CHICH, H.; KENDAL, M. (Eds). *The Future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004.

STYLIANIDES, A. J.; BALL, D.L. Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v.11, p.307-332, 2008.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*,v.12, p.151-169,1981.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P.(Org). *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, p.65-81, 1991.

APÊNDICE

APÊNDICE – Roteiro para entrevista dos professores

A entrevista a ser realizada é semiestruturada e, portanto, as questões abaixo poderão sofrer pequenas modificações ao longo da mesma e outras questões poderão ser acrescentadas.

1. Qual é a sua idade e há quanto tempo você leciona?
2. Em quais escolas você leciona e qual a sua carga horária semanal de trabalho?
3. Em que anos do Ensino Fundamental você leciona atualmente e em quais já lecionou em anos anteriores?
4. Qual é seu nível de formação (Graduação, Especialização, Mestrado ou Doutorado)?
5. Do seu ponto de vista, quais os principais objetivos para o ensino de Álgebra no 3º ciclo do ensino fundamental?
6. Quais os conteúdos de Álgebra você acha mais relevantes no trabalho com alunos do 3º ciclo?
7. Como você vê a passagem da Aritmética para a Álgebra para os alunos nesse nível de ensino? Quais as maiores dificuldades dos alunos?
8. Ao escolher um livro didático quais pontos relativos ao ensino de Álgebra você julga fundamental?
9. Quais as razões que o(a) levaram a escolher os livros e materiais didáticos para o ensino de Álgebra nesse ano escolar?
10. Quais os critérios que você utiliza para a seleção de exercícios relativos aos conteúdos de Álgebra?
11. Em sua formação inicial ou continuada você teve contato com propostas para ensino de Álgebra? (Se sim, pedir para apresentar exemplos de propostas).

ANEXOS

ANEXO A

PARECER CNE/CES 1.302/2001 - HOMOLOGADO
Despacho do Ministro em 4/3/2002, publicado no Diário Oficial da União de 5/3/2002, Seção 1, p. 15.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

INTERESSADO: Conselho Nacional de Educação / Câmara de Educação Superior		**UF:** DF
ASSUNTO: Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura		
RELATOR(A): Francisco César de Sá Barreto (Relator), Carlos Alberto Serpa de Oliveira, Roberto Claudio Frota Bezerra		
PROCESSO(S) N.º(S): 23001.000322/2001-33		
PARECER N.º: CNE/CES 1.302/2001	**COLEGIADO:** CES	**APROVADO EM:** 06/11/2001

I – RELATÓRIO

Os cursos de Bacharelado em Matemática existem para preparar profissionais para a carreira de ensino superior e pesquisa, enquanto os cursos de Licenciatura em Matemática tem como objetivo principal a formação de professores para a educação básica.

As aplicações da Matemática têm se expandido nas décadas mais recentes. A Matemática tem uma longa história de intercâmbio com a Física e as Engenharias e, mais recentemente, com as Ciências Econômicas, Biológicas, Humanas e Sociais.

As habilidades e competências adquiridas ao longo da formação do matemático tais como o raciocínio lógico, a postura crítica e a capacidade de resolver problemas, fazem do mesmo um profissional capaz de ocupar posições no mercado de trabalho também fora do ambiente acadêmico, em áreas em que o raciocínio abstrato é uma ferramenta indispensável.

Conseqüentemente os estudantes podem estar interessados em se graduar em Matemática por diversas razões e os programas de graduação devem ser bastante flexíveis para acomodar esse largo campo de interesses.

Assim essas diretrizes têm como objetivos:

– servir como orientação para melhorias e transformações na formação do Bacharel e do Licenciado em Matemática;

– assegurar que os egressos dos cursos credenciados de Bacharelado e Licenciatura em Matemática tenham sido adequadamente preparados para uma carreira na qual a Matemática seja utilizada de modo essencial, assim como para um processo contínuo de aprendizagem.

II – VOTO DO(A) RELATOR(A)

Diante do exposto e com base nas discussões e sistematização das sugestões apresentadas pelos diversos órgãos, entidades e Instituições à SESu/MEC e acolhida por este Conselho, voto favoravelmente à aprovação das Diretrizes Curriculares para os cursos de Matemática, Bacharelado, e do projeto de resolução, na forma ora apresentada.

Brasília(DF), 06 de novembro de 2001.

Conselheiro(a) Francisco César de Sá Barreto – Relator(a)

Conselheiro(a) Carlos Alberto Serpa de Oliveira

Conselheiro(a) Roberto Claudio Frota Bezerra

III – DECISÃO DA CÂMARA

A Câmara de Educação Superior aprova por unanimidade o voto do(a) Relator(a).

Sala das Sessões, em 06 de novembro de 2001.

Conselheiro Arthur Roquete de Macedo – Presidente

Conselheiro José Carlos Almeida da Silva – Vice-Presidente

DIRETRIZES CURRICULARES PARA CURSOS DE MATEMATICA

1. Perfil dos Formandos

Um curso de Bacharelado em Matemática deve ter um programa flexível de forma a qualificar os seus graduados para a Pós-graduação visando a pesquisa e o ensino superior, ou para oportunidades de trabalho fora do ambiente acadêmico.

Dentro dessas perspectivas, os programas de Bacharelado em Matemática devem permitir diferentes formações para os seus graduados, quer visando o profissional que deseja seguir uma carreira acadêmica, como aquele que se encaminhará para o mercado de trabalho não acadêmico e que necessita além de uma sólida base de conteúdos matemáticos, de uma formação mais flexível contemplando áreas de aplicação.

Nesse contexto um Curso de Bacharelado deve garantir que seus egressos tenham:

- uma sólida formação de conteúdos de Matemática
- uma formação que lhes prepare para enfrentar os desafios das rápidas transformações da sociedade, do mercado de trabalho e das condições de exercício profissional.

Por outro lado, desejam-se as seguintes características para o Licenciado em Matemática:

- visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos
- visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania
- visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina.

2. Competências e Habilidades

Os currículos dos cursos de Bacharelado/Licenciatura em Matemática devem ser elaborados de maneira a desenvolver as seguintes competências e habilidades.

a) capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão;

b) capacidade de trabalhar em equipes multi-disciplinares

c) capacidade de compreender, criticar e utilizar novas idéias e tecnologias para a resolução de problemas.

d) capacidade de aprendizagem continuada, sendo sua prática profissional também fonte de produção de conhecimento

e) habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema

f) estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento

g) conhecimento de questões contemporâneas

h) educação abrangente necessária ao entendimento do impacto das soluções encontradas num contexto global e social

i) participar de programas de formação continuada

j) realizar estudos de pós-graduação

k) trabalhar na interface da Matemática com outros campos de saber

No que se refere às competências e habilidades próprias do educador matemático, o licenciado em Matemática deverá ter as capacidades de:

a) elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a educação básica;

b) analisar, selecionar e produzir materiais didáticos;

c) analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a educação básica;

d) desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos;

e) perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente;

f) contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica.

3. Estrutura do Curso

Ao chegar à Universidade, a aluno já passou por um longo processo de aprendizagem escolar e construiu para si uma imagem dos conceitos matemáticos a que foi exposto, durante o ensino básico. Assim, a formação a formação do matemático demanda o aprofundamento da compreensão dos significados dos conceitos matemáticos, a fim de ele possa contextualizá-los adequadamente. O mesmo pode-se dizer em relação aos processos escolares em geral: o aluno chega ao ensino superior com uma vivência e um conjunto de representações construídas. É preciso que estes conhecimentos também sejam considerados ao longo de sua formação como professor.

Os conteúdos curriculares dos cursos de Matemática deverão ser estruturados de modo a contemplar, em sua composição, as seguintes orientações:

a) partir das representações que os alunos possuem dos conceitos matemáticos e dos processos escolares para organizar o desenvolvimento das abordagens durante o curso
b) construir uma visão global dos conteúdos de maneira teoricamente significativa para o aluno

Adicionalmente, as diretrizes curriculares devem servir também para otimização da estruturação modular dos cursos, com vistas a permitir um melhor aproveitamento dos conteúdos ministrados.

Da mesma maneira almeja-se ampliar a diversidade da organização dos cursos, podendo a IES definir adequadamente a oferta de cursos seqüenciais, previsto no inciso I do artigo 44 da LDB, que possibilitariam tanto o aproveitamento de estudos, como uma integração mais flexível entre os cursos de graduação.

4. Conteúdos Curriculares

Os currículos devem assegurar o desenvolvimento de conteúdos dos diferentes âmbitos do conhecimento profissional de um matemático, de acordo com o perfil, competências e habilidades anteriormente descritos, levando-se em consideração as orientações apresentadas para a estruturação do curso.

A organização dos currículos das IES deve contemplar os conteúdos comuns a todos os cursos de Matemática, complementados com disciplinas organizadas conforme o perfil escolhido do aluno.

4.1 Bacharelado

Os conteúdos descritos a seguir, **comuns a todos os cursos de Bacharelado**, podem ser distribuídos ao longo do curso de acordo com o currículo proposto pela IES:

- Cálculo Diferencial e Integral
- Álgebra Linear
- Topologia
- Análise Matemática
- Álgebra
- Análise Complexa
- Geometria Diferencial

A parte comum deve ainda incluir o estudo de Probabilidade e Estatística.

É necessário um conhecimento de Física Geral e noções de Física Moderna como forma de possibilitar ao bacharelando o estudo de uma área na qual historicamente o uso da matemática é especialmente significativo.

Desde o início do curso o bacharelando deve adquirir familiaridade com o uso do computador como instrumento de trabalho, incentivando-se sua utilização para formulação e solução de problemas.

Para complementar a formação do bacharel, conforme o perfil escolhido, as IES poderão diversificar as disciplinas oferecidas, que poderão consistir em estudos mais avançados de Matemática ou estudo das áreas de aplicação, distribuídas ao longo do curso.

Em caso da formação em área de aplicação, a IES deve organizar seu currículo de forma a garantir que a parte diversificada seja constituída de disciplinas de formação matemática e da área de aplicação formando um todo coerente. É fundamental o estabelecimento de critérios que garantam essa coerência dentro do programa.

4.2 Licenciatura

Os conteúdos descritos a seguir, **comuns a todos os cursos de Licenciatura**, podem ser distribuídos ao longo do curso de acordo com o currículo proposto pela IES:

- Cálculo Diferencial e Integral
- Álgebra Linear
- Fundamentos de Análise
- Fundamentos de Álgebra
- Fundamentos de Geometria
- Geometria Analítica

A parte comum deve ainda incluir:

a) conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise;

b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias;

c) conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática.

Para a licenciatura serão incluídos, no conjunto dos conteúdos profissionais, os conteúdos da Educação Básica, consideradas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores em nível superior, bem como as Diretrizes Nacionais para a Educação Básica e para o Ensino Médio.

Desde o início do curso e licenciando deve adquirir familiaridade com o uso do computador como instrumento de trabalho, incentivando-se sua utilização para o ensino de matemática, em especial para a formulação e solução de problemas. É importante também a familiarização do licenciando, ao longo do curso, com outras tecnologias que possam contribuir para o ensino de Matemática.

As IES poderão ainda organizar os seus currículos de modo a possibilitar ao licenciado uma formação complementar propiciando uma adequação do núcleo de formação específica a outro campo de saber que o complemente.

5. Estágio e Atividades Complementares

Algumas ações devem ser desenvolvidas como atividades complementares à formação do matemático, que venham a propiciar uma complementação de sua postura de estudioso e pesquisador, integralizando o currículo, tais como a produção de monografias e a participação em programas de iniciação científica e à docência.

No caso da licenciatura, o educador matemático deve ser capaz de tomar decisões, refletir sobre sua prática e ser criativo na ação pedagógica, reconhecendo a realidade em que se insere. Mais do que isto, ele deve avançar para uma visão de que a ação prática é geradora de conhecimentos. Nessa linha de abordagem, o estágio é essencial nos cursos de formação de professores, possibilitando desenvolver:

a) uma seqüência de ações onde o aprendiz vai se tornando responsável por tarefas em ordem crescente de complexidade, tomando ciência dos processos formadores;

b) uma aprendizagem guiada por profissionais de competência reconhecida.

PROJETO DE RESOLUÇÃO , de de de

Estabelece as Diretrizes Curriculares para os cursos de Matemática

O Presidente Câmara de Educação Superior, no uso de suas atribuições legais e tendo em vista o disposto na Lei 9.131, de 25 de novembro de 1995, e ainda o Parecer CNE/CES , homologado pelo Senhor Ministro de Estado da Educação em ,

RESOLVE:

Art. 1º. As Diretrizes Curriculares para os cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática, integrantes do Parecer CNE/CES , deverão orientar a formulação do projeto pedagógico do referido curso.

Art. 2º. O projeto pedagógico de formação profissional a ser formulado pelo curso de Matemática deverá explicitar:

a) o perfil dos formandos;
b) as competências e habilidades de caráter geral e comum e aqueles de caráter específico;
c) os conteúdos curriculares de formação geral e os conteúdos de formação específica;
d) o formato dos estágios;
e) as características das atividades complementares;
f) as estrutura do curso;
g) as formas de avaliação.

Art. 3º. A carga horária do curso de Matemática deverá obedecer ao disposto em Resolução prórpria que normatiza a oferta de cursos de bacharelado e licenciatura

Art. 4º. Esta Resolução entra em vigor na data de sua publicação, revogadas as disposições em contrário.

Presidente da Câmara de Educação Superior

ANEXO B

CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

CONSELHO PLENO

RESOLUÇÃO CNE/CP 1, DE 18 DE FEVEREIRO DE 2002. (*) (**) (***)

Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena.

O Presidente do Conselho Nacional de Educação, no uso de suas atribuições legais e tendo em vista o disposto no Art. 9º, § 2º, alínea “c” da Lei 4.024, de 20 de dezembro de 1961, com a redação dada pela Lei 9.131, de 25 de novembro de 1995,e com fundamento nos Pareceres CNE/CP 9/2001 e 27/2001, peças indispensáveis do conjunto das presentes Diretrizes Curriculares Nacionais, homologados pelo Senhor Ministro da Educação em 17 de janeiro de 2002, resolve:

Art. 1º As Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, constituem-se de um conjunto de princípios, fundamentos e procedimentos a serem observados na organização institucional e curricular de cada estabelecimento de ensino e aplicam-se a todas as etapas e modalidades da educação básica.

Art. 2º A organização curricular de cada instituição observará, além do disposto nos artigos 12 e 13 da Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996, outras formas de orientação inerentes à formação para a atividade docente, entre as quais o preparo para:

I - o ensino visando à aprendizagem do aluno;

II - o acolhimento e o trato da diversidade;

III - o exercício de atividades de enriquecimento cultural;

IV - o aprimoramento em práticas investigativas;

V - a elaboração e a execução de projetos de desenvolvimento dos conteúdos curriculares;

VI - o uso de tecnologias da informação e da comunicação e de metodologias, estratégias e materiais de apoio inovadores;

VII - o desenvolvimento de hábitos de colaboração e de trabalho em equipe.

((*) CNE. Resolução CNE/CP 1/2002. Diário Oficial da União, Brasília, 9 de abril de 2002. Seção 1, p. 31. Republicada por ter saído com incorreção do original no D.O.U. de 4 de março de 2002. Seção 1, p. 8.

((**) Alterada pela Resolução CNE/CP n.º 2, de 27 de agosto de 2004, que adia o prazo previsto no art. 15 desta Resolução.

((***) Alterada pela Resolução CNE/CP n.º 1, de 17 de novembro de 2005, que acrescenta um parágrafo ao art. 15 da Resolução CNE/CP nº 1/2002

Art. 3º A formação de professores que atuarão nas diferentes etapas e modalidades da educação básica observará princípios norteadores desse preparo para o exercício profissional específico, que considerem:

I - a competência como concepção nuclear na orientação do curso;

II - a coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro professor, tendo em vista:

a) a simetria invertida, onde o preparo do professor, por ocorrer em lugar similar àquele em que vai atuar, demanda consistência entre o que faz na formação e o que dele se espera;

b) a aprendizagem como processo de construção de conhecimentos, habilidades e valores em interação com a realidade e com os demais indivíduos, no qual são colocadas em uso capacidades pessoais;

c) os conteúdos, como meio e suporte para a constituição das competências;

d) a avaliação como parte integrante do processo de formação, que possibilita o diagnóstico de lacunas e a aferição dos resultados alcançados, consideradas as competências a serem constituídas e a identificação das mudanças de percurso eventualmente necessárias.

III - a pesquisa, com foco no processo de ensino e de aprendizagem, uma vez que ensinar requer, tanto dispor de conhecimentos e mobilizá-los para a ação, como compreender o processo de construção do conhecimento.

Art. 4º Na concepção, no desenvolvimento e na abrangência dos cursos de formação é fundamental que se busque:

I - considerar o conjunto das competências necessárias à atuação profissional;

II - adotar essas competências como norteadoras, tanto da proposta pedagógica, em especial do currículo e da avaliação, quanto da organização institucional e da gestão da escola de formação.

Art. 5º O projeto pedagógico de cada curso, considerado o artigo anterior, levará em conta que:

I - a formação deverá garantir a constituição das competências objetivadas na educação básica;

II - o desenvolvimento das competências exige que a formação contemple diferentes âmbitos do conhecimento profissional do professor;

III - a seleção dos conteúdos das áreas de ensino da educação básica deve orientar-se por ir além daquilo que os professores irão ensinar nas diferentes etapas da escolaridade;

IV - os conteúdos a serem ensinados na escolaridade básica devem ser tratados de modo articulado com suas didáticas específicas;

V - a avaliação deve ter como finalidade a orientação do trabalho dos formadores, a autonomia dos futuros professores em relação ao seu processo de aprendizagem e a qualificação dos profissionais com condições de iniciar a carreira.

Parágrafo único. A aprendizagem deverá ser orientada pelo princípio metodológico geral, que pode ser traduzido pela ação-reflexão-ação e que aponta a resolução de situações-problema como uma das estratégias didáticas privilegiadas.

Art. 6º Na construção do projeto pedagógico dos cursos de formação dos docentes, serão consideradas:

I - as competências referentes ao comprometimento com os valores inspiradores da sociedade democrática;

II - as competências referentes à compreensão do papel social da escola;

III - as competências referentes ao domínio dos conteúdos a serem socializados, aos seus significados em diferentes contextos e sua articulação interdisciplinar;

IV - as competências referentes ao domínio do conhecimento pedagógico;

V - as competências referentes ao conhecimento de processos de investigação que possibilitem o aperfeiçoamento da prática pedagógica;

VI - as competências referentes ao gerenciamento do próprio desenvolvimento profissional.

§ 1º O conjunto das competências enumeradas neste artigo não esgota tudo que uma escola de formação possa oferecer aos seus alunos, mas pontua demandas importantes oriundas da análise da atuação profissional e assenta-se na legislação vigente e nas diretrizes curriculares nacionais para a educação básica.

§ 2º As referidas competências deverão ser contextualizadas e complementadas pelas competências específicas próprias de cada etapa e modalidade da educação básica e de cada área do conhecimento a ser contemplada na formação.

§ 3º A definição dos conhecimentos exigidos para a constituição de competências deverá, além da formação específica relacionada às diferentes etapas da educação básica, propiciar a inserção no debate contemporâneo mais amplo, envolvendo questões culturais, sociais, econômicas e o conhecimento sobre o desenvolvimento humano e a própria docência, contemplando:

I - cultura geral e profissional;

II - conhecimentos sobre crianças, adolescentes, jovens e adultos, aí incluídas as especificidades dos alunos com necessidades educacionais especiais e as das comunidades indígenas;

III - conhecimento sobre dimensão cultural, social, política e econômica da educação;

IV - conteúdos das áreas de conhecimento que serão objeto de ensino;

V - conhecimento pedagógico;

VI - conhecimento advindo da experiência.

Art. 7º A organização institucional da formação dos professores, a serviço do desenvolvimento de competências, levará em conta que:

I - a formação deverá ser realizada em processo autônomo, em curso de licenciatura plena, numa estrutura com identidade própria;

II - será mantida, quando couber, estreita articulação com institutos, departamentos e cursos de áreas específicas;

III - as instituições constituirão direção e colegiados próprios, que formulem seus próprios projetos pedagógicos, articulem as unidades acadêmicas envolvidas e, a partir do projeto, tomem as decisões sobre organização institucional e sobre as questões administrativas no âmbito de suas competências;

IV - as instituições de formação trabalharão em interação sistemática com as escolas de educação básica, desenvolvendo projetos de formação compartilhados;

V - a organização institucional preverá a formação dos formadores, incluindo na sua jornada de trabalho tempo e espaço para as atividades coletivas dos docentes do curso, estudos e investigações sobre as questões referentes ao aprendizado dos professores em formação;

VI - as escolas de formação garantirão, com qualidade e quantidade, recursos pedagógicos como biblioteca, laboratórios, videoteca, entre outros, além de recursos de tecnologias da informação e da comunicação;

VII - serão adotadas iniciativas que garantam parcerias para a promoção de atividades culturais destinadas aos formadores e futuros professores;

VIII - nas instituições de ensino superior não detentoras de autonomia universitária serão criados Institutos Superiores de Educação, para congregar os cursos de formação de professores que ofereçam licenciaturas em curso Normal Superior para docência multidisciplinar na educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental ou licenciaturas para docência nas etapas subseqüentes da educação básica.

Art. 8º As competências profissionais a serem constituídas pelos professores em formação, de acordo com as presentes Diretrizes, devem ser a referência para todas as formas de avaliação dos cursos, sendo estas:

I - periódicas e sistemáticas, com procedimentos e processos diversificados, incluindo conteúdos trabalhados, modelo de organização, desempenho do quadro de formadores e qualidade da vinculação com escolas de educação infantil, ensino fundamental e ensino médio, conforme o caso;

II - feitas por procedimentos internos e externos, que permitam a identificação das diferentes dimensões daquilo que for avaliado;

III - incidentes sobre processos e resultados.

Art. 9º A autorização de funcionamento e o reconhecimento de cursos de formação e o credenciamento da instituição decorrerão de avaliação externa realizada no *locus* institucional, por corpo de especialistas direta ou indiretamente ligados à formação ou ao exercício profissional de professores para a educação básica, tomando como referência as competências profissionais de que trata esta Resolução e as normas aplicáveis à matéria.

Art. 10. A seleção e o ordenamento dos conteúdos dos diferentes âmbitos de conhecimento que comporão a matriz curricular para a formação de professores, de que trata esta Resolução, serão de competência da instituição de ensino, sendo o seu planejamento o primeiro passo para a transposição didática, que visa a transformar os conteúdos selecionados em objeto de ensino dos futuros professores.

Art. 11. Os critérios de organização da matriz curricular, bem como a alocação de tempos e espaços curriculares se expressam em eixos em torno dos quais se articulam dimensões a serem contempladas, na forma a seguir indicada:

I - eixo articulador dos diferentes âmbitos de conhecimento profissional;

II - eixo articulador da interação e da comunicação, bem como do desenvolvimento da autonomia intelectual e profissional;

III - eixo articulador entre disciplinaridade e interdisciplinaridade;

IV - eixo articulador da formação comum com a formação específica;

V - eixo articulador dos conhecimentos a serem ensinados e dos conhecimentos filosóficos, educacionais e pedagógicos que fundamentam a ação educativa;

VI - eixo articulador das dimensões teóricas e práticas.

Parágrafo único. Nas licenciaturas em educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental deverão preponderar os tempos dedicados à constituição de conhecimento sobre os objetos de ensino e nas demais licenciaturas o tempo dedicado às dimensões pedagógicas não será inferior à quinta parte da carga horária total.

Art. 12. Os cursos de formação de professores em nível superior terão a sua duração definida pelo Conselho Pleno, em parecer e resolução específica sobre sua carga horária.

§ 1º A prática, na matriz curricular, não poderá ficar reduzida a um espaço isolado, que a restrinja ao estágio, desarticulado do restante do curso.

§ 2º A prática deverá estar presente desde o início do curso e permear toda a formação do professor.

§ 3º No interior das áreas ou das disciplinas que constituírem os componentes curriculares de formação, e não apenas nas disciplinas pedagógicas, todas terão a sua dimensão prática.

Art. 13. Em tempo e espaço curricular específico, a coordenação da dimensão prática transcenderá o estágio e terá como finalidade promover a articulação das diferentes práticas, numa perspectiva interdisciplinar.

§ 1º A prática será desenvolvida com ênfase nos procedimentos de observação e reflexão, visando à atuação em situações contextualizadas, com o registro dessas observações realizadas e a resolução de situações-problema.

§ 2º A presença da prática profissional na formação do professor, que não prescinde da observação e ação direta, poderá ser enriquecida com tecnologias da informação, incluídos o computador e o vídeo, narrativas orais e escritas de professores, produções de alunos, situações simuladoras e estudo de casos.

§ 3º O estágio curricular supervisionado, definido por lei, a ser realizado em escola de educação básica, e respeitado o regime de colaboração entre os sistemas de ensino, deve ser desenvolvido a partir do início da segunda metade do curso e ser avaliado conjuntamente pela escola formadora e a escola campo de estágio.

Art. 14. Nestas Diretrizes, é enfatizada a flexibilidade necessária, de modo que cada instituição formadora construa projetos inovadores e próprios, integrando os eixos articuladores nelas mencionados.

§ 1º A flexibilidade abrangerá as dimensões teóricas e práticas, de interdisciplinaridade, dos conhecimentos a serem ensinados, dos que fundamentam a ação pedagógica, da formação comum e específica, bem como dos diferentes âmbitos do conhecimento e da autonomia intelectual e profissional.

§ 2º Na definição da estrutura institucional e curricular do curso, caberá a concepção de um sistema de oferta de formação continuada, que propicie oportunidade de retorno planejado e sistemático dos professores às agências formadoras.

Art. 15. Os cursos de formação de professores para a educação básica que se encontrarem em funcionamento deverão se adaptar a esta Resolução, no prazo de dois anos.

§ 1º Nenhum novo curso será autorizado, a partir da vigência destas normas, sem que o seu projeto seja organizado nos termos das mesmas.

§ 2º Os projetos em tramitação deverão ser restituídos aos requerentes para a devida adequação.

Art. 16. O Ministério da Educação, em conformidade com § 1º Art. 8º da Lei 9.394, coordenará e articulará em regime de colaboração com o Conselho Nacional de Educação, o Conselho Nacional de Secretários Estaduais de Educação, o Fórum Nacional de Conselhos Estaduais de Educação, a União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação e representantes de Conselhos Municipais de Educação e das associações profissionais e científicas, a formulação de proposta de diretrizes para a organização de um sistema federativo de certificação de competência dos professores de educação básica.

Art. 17. As dúvidas eventualmente surgidas, quanto a estas disposições, serão dirimidas pelo Conselho Nacional de Educação, nos termos do Art. 90 da Lei 9.394.

Art. 18. O parecer e a resolução referentes à carga horária, previstos no Artigo 12 desta resolução, serão elaborados por comissão bicameral, a qual terá cinqüenta dias de prazo para submeter suas propostas ao Conselho Pleno.

Art. 19. Esta Resolução entra em vigor na data de sua publicação, revogadas as disposições em contrário.

ULYSSES DE OLIVEIRA PANISSET

Presidente do Conselho Nacional de Educação

ANEXO C

CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO
CÂMARA DE EDUCAÇÃO SUPERIOR

RESOLUÇÃO CNE/CES 3, DE 18 DE FEVEREIRO DE 2003.[*]

Estabelece as Diretrizes Curriculares para os cursos de Matemática.

O Presidente da Câmara de Educação Superior, no uso de suas atribuições legais e tendo em vista o disposto na Lei 9.131, de 25 de novembro de 1995, e ainda o Parecer CNE/CES 1.302/2001, homologado pelo Senhor Ministro de Estado da Educação em 4 de março de 2002, resolve:

Art. 1° As Diretrizes Curriculares para os cursos de bacharelado e licenciatura em Matemática, integrantes do Parecer CNE/CES 1.302/2001, deverão orientar a formulação do projeto pedagógico do referido curso.

Art. 2° O projeto pedagógico de formação profissional a ser formulado pelo curso de Matemática deverá explicitar:

a) o perfil dos formandos;
b) as competências e habilidades de caráter geral e comum e aquelas de caráter específico;
c) os conteúdos curriculares de formação geral e os conteúdos de formação específica;
d) o formato dos estágios;
e) as características das atividades complementares;
f) a estrutura do curso;
g) as formas de avaliação.

Art. 3° A carga horária dos cursos de Matemática deverá obedecer ao disposto na Resolução que normatiza a oferta dessa modalidade e a carga horária da licenciatura deverá cumprir o estabelecido na Resolução CNE/CP 2/2002, resultante do Parecer CNE/CP 28/2001.

Art. 4° Esta Resolução entra em vigor na data de sua publicação, revogadas as disposições em contrário.

ARTHUR ROQUETE DE MACEDO
Presidente da Câmara de Educação Superior