

**Discussão sobre Complementaridade em Sistemas**

**Quânticos de dois q-dits**

Gabriel Augusto Pires de Pinho

2013



Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG  
Instituto de Ciências Exatas - ICEx  
Programa de Pós Graduação em Física

Discussão sobre Complementaridade em Sistemas Quânticos de dois q-dits

Gabriel Augusto Pires de Pinho

Orientadora: Prof. Dr<sup>a</sup>. Maria Carolina Nemes

Co-Orientador: Prof. Dr. José Geraldo G. de Oliveira Junior

Dissertação apresentada ao departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais, para a obtenção de Título de Mestre em Física  
Área de Concentração: Fundamentos de Mecânica Quântica.

2013

*“As limitações não são apenas restritivas, mas também criativas.”*

Gyorgy Doczi

# Dedicatória

À Carolina, por amar o que faz, fazer o que ama e assim nos motivar e nos ensinar a viver livres, com os pés nos chão e a cabeça nas estrelas.

# Agradecimentos

À minha incrível orientadora Carolina Nemes, pela ajuda, orientação e suporte infinitos.

Aos professores da banca, Sebastião José Nascimento de Pádua, José Geraldo G. de Oliveira Junior e Romeu Rossi Júnior, pela incrível ajuda durante todo o estudo e sugestões durante a defesa.

À minha mãe, minha orientadora da vida.

Aos meus familiares, pelo amor, apoio e suporte.

Aos meus amigos, pelas incríveis tardes e madrugadas estudando física e discutindo sobre a existência, pelos jogos de RPG, pelas risadas, pelos ombros na hora de chorar, pelos filmes compartilhados, por me fazer me confrontar e crescer como ser humano, por serem os melhores amigos do mundo, por fazer a vida valer a pena, por me fazer sentir saudade, pelo amor.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

# Resumo

Nessa dissertação trataremos de sistemas quânticos puros, bipartidos de dois q-dits (dimensões arbitrárias). Nesses sistemas, estudaremos a complementaridade entre as grandezas locais Previsibilidade e Visibilidade (que quantificam as propriedades de partícula e onda de cada subsistema) e a Concorrência (que quantifica o emaranhamento entre os q-dits). Em um trabalho anterior [*Quantitative complementarity relations in bipartite systems*. Optics Communications, Vol 283, (2010); e arXiv.org, e-print quant-ph/0302075 (2003)] que trata de sistemas de dois q-bits (2x2), Jakob e Bergou descobriram que esta complementaridade pode ser quantificada por uma igualdade à unidade. Mas quando o sistema é de dois q-dits há um desacordo na literatura em relação à normalização da informação local (Previsibilidade e Visibilidade) dos subsistemas [*Quantitative wave-particle duality in multibeam interferometers*. Phys. Rev. A, Vol 64, 042113 (2001)] e [*Complementarity and entanglement in bipartite qudit systems*. Phys. Rev. A, Vol 76, 052107 (2007)]. Neste último artigo, Jakob e Bergou escolheram a não normalização e encontraram uma expressão que quantifica a complementaridade entre as informações locais e não locais, porém uma não tão simples, como no caso de dois q-bits. Tentamos ver o que acontece se escolhermos versões normalizadas da Previsibilidade, Visibilidade e Concorrência e encontramos uma fórmula alternativa que quantifica a complementaridade em termos de uma igualdade à unidade.

**Palavras-chave:** Complementaridade, Visibilidade, Previsibilidade, Concorrência, Emaranhamento, q-dits, sistemas bipartidos.

# Abstract

In this work, we will deal with pure, bipartite quantum systems of two q-dits (arbitrary dimensions). In these systems, we will study the complementarity between the local entities Predictability and Visibility (that quantifie the properties of particle and wave of each subsystem) and the Concurrence, (that quantifies the entanglement between the q-dits). In a previous work [*Quantitative complementarity relations in bipartite systems*. Optics Communications, Vol 283, (2010); and arXiv.org, e-print quant-ph/0302075 (2003)] concerning systems of two q-bits (2x2), Jakob and Bergou have found that this complementarity can be quantified by a beautiful equality to one. But when the system is two q-dits there is a disagreement in the literature concerning the normalization of the local information (Predictability and Visibility) of the subsystems [*Quantitative wave-particle duality in multibeam interferometers*. Phys. Rev. A, Vol 64, 042113 (2001)] e [*Complementarity and entanglement in bipartite qudit systems*. Phys. Rev. A, Vol 76, 052107 (2007)]. In this last paper, Jakob and Bergou have chosen the non-normalization and have found an expression that quantifies the complementarity between local and non-local information, but not a so simple one, like it has been found in the two q-bits case. We have tried to see what happens if we choose normalized versions of the Predictability, Visibility and Concurrence and we have found an alternative relation that quantifies the complementarity, in terms of an equality to one.

**Keywords:** Complementarity, Visibility, Predictability, Concurrence, Entanglement, q-dits, bipartite systems.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>V</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Complementaridade em sistemas de dois q-bits</b>	<b>4</b>
2.1 Previsibilidade e Visibilidade . . . . .	5
2.1.1 Considerações sobre a Previsibilidade . . . . .	6
2.1.2 Considerações sobre a Visibilidade . . . . .	7
2.1.3 Dualidade onda-partícula . . . . .	8
2.1.4 Pureza . . . . .	9
2.2 Complementaridade em sistemas de dois q-bits . . . . .	10
2.2.1 Emaranhamento e Concorrência . . . . .	10
2.2.2 Complementaridade . . . . .	11
<b>3 Complementaridade em sistemas de dois q-dits</b>	<b>13</b>
3.1 Visibilidade e Previsibilidade por Durr . . . . .	13
3.1.1 Visibilidade . . . . .	13
3.1.2 Previsibilidade . . . . .	17
3.1.3 Dualidade Onda-Partícula . . . . .	18
3.2 Complementaridade por Jakob e Bergou . . . . .	19
3.2.1 Previsibilidade e Visibilidade a partir de $SU(n)$ . . . . .	19
3.2.2 Concorrência e Complementaridade . . . . .	22

<b>4</b>	<b>Uma visão alternativa da relação de Complementaridade de dois q-dits</b>	<b>24</b>
4.1	Uma Concorrência Normalizada . . . . .	25
4.2	Outra fórmula para a Complementaridade em sistemas de dois q-dits . . . . .	26
4.2.1	Interpretação de $\xi(l, k)$ . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>29</b>
<b>A</b>	<b>Conceitos Importantes</b>	<b>31</b>
A.1	Sistemas Quânticos Compostos . . . . .	31
A.2	Estados Emaranhados . . . . .	32
A.3	Traço Parcial e Operador Densidade Reduzido . . . . .	33
A.4	Decomposição de Schmidt . . . . .	35
A.5	Medidas de Emaranhamento . . . . .	38
A.5.1	Medidas Entrópicas de Emaranhamento . . . . .	38
A.5.2	Concorrência . . . . .	39
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>40</b>

# Lista de Figuras

2.1	Interferômetro Mach-Zehnder . . . . .	5
3.1	Interferômetro de $n$ fendas . . . . .	14

# Capítulo 1

## Introdução

Ondas e Partículas tem um papel muito bem definido e distinto na física clássica. Porém vários experimentos no regime quântico, (isto é, com poucas partículas) mostram que isso nem sempre é verdade. Em experimentos de interferometria de dois caminhos, como a fenda dupla de Young e o interferômetro de Mach-Zender, observa-se que quando não se possui informação sobre o caminho percorrido (característica de partícula), há um padrão de interferência, uma *visibilidade* das franjas de interferência da "entidade quântica"(quantum)<sup>1</sup> submetida ao experimento. Isso foi observado experimentalmente para fótons [1], [2]; e para entidades que se acreditava ter somente comportamento corpuscular como elétrons [3], [4]; neutrons [5], ions [6], átomos [7]; e até mesmo moléculas [8].

Curiosamente, se uma informação completa sobre o caminho do quantum é obtida, então perde-se o padrão de interferência do quantum. O que nos leva a crer que as características de onda e partícula não podem ser medidas mutualmente e completamente em um mesmo aparato experimental.

Em 1928, Niels Bohr introduziu o conceito de Complementaridade [9]:

---

<sup>1</sup>*Quantum* é um termo que tem sido usado para designar a partícula, já que "partícula" geralmente é usado para designar elementos corpusculares e estamos lidando justamente com o comportamento dual onda-partícula da matéria.

"... Embora agora os fenômenos físicos (quânticos) transcendem o âmbito da explicação segundo a física clássica, todas as provas devem ser expressas em termos clássicos. O argumento é simplesmente que pela palavra "experiência" nos referimos a uma situação na qual podemos dizer aos outros o que aprendemos e que, portanto, tudo que diz respeito às disposições experimentais e resultados das observações deve ser expresso em linguagem inequívoca com a aplicação adequada da terminologia da física clássica.

Este ponto crucial (...) implica na impossibilidade de qualquer separação nítida entre o comportamento de objetos atômicos e a interação com os instrumentos de medição que servem para definir as condições em que os fenômenos aparecem... Por isso, as provas obtidas sob diferentes condições experimentais não podem ser compreendidas dentro de um único cenário, mas devem ser consideradas como *complementares*, no sentido de que apenas a totalidade dos fenômenos esgota as informações possíveis sobre os objetos."<sup>2</sup>

Embora a Complementaridade, como introduzida por Bohr, seja um princípio qualitativamente demonstrado, seria importante quantificá-lo para casos que forem possíveis. Desta forma, recentemente descobriu-se que princípios de complementaridade poderiam ser quantificados [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]. E no que diz respeito a Dualidade Onda-Partícula, para sistemas bipartidos de dois q-bits (em geral, um subsistema sendo o sistema a ser estudado e o outro o aparato de medição), descobriu-se [17] que ela está intimamente relacionada com a medida de emaranhamento Concorrência [18], [19], na forma de uma igualdade para sistemas puros (equação 2.14).

O objetivo dessa dissertação é discutir a generalização desta complementaridade para dimensões arbitrárias (discretas, finitas e numeráveis) nos sub-sistemas. Trataremos de sistemas bipartidos, cujo sistema global é puro e os subsistemas possuem dimensões finitas, discretas e arbitrárias (q-dits) e estudaremos a complementaridade entre as grandezas locais Previsibilidade, Visibilidade (que quantificam as informações locais sobre o caminho e inter-

---

<sup>2</sup>Tradução própria de: "...however far the (quantum physical) phenomena transcend the scope of classical physical explanation, the account of all evidence must be expressed in classical terms. The argument is simply that by the word "experiment" we refer to a situation where we can tell others what we have learned and that, therefore, the account of the experimental arrangements and of the results of the observations must be expressed in unambiguous language with suitable application of the terminology of classical physics.

This crucial point (...) implies the impossibility of any sharp separation between the behaviour of atomic objects and the interaction with the measuring instruments which serve to define the conditions under which the phenomena appear.... Consequently, evidence obtained under different experimental conditions cannot be comprehended within a single picture, but must be regarded as *complementary* in the sense that only the totality of the phenomena exhausts the possible information about the objects."

ferência, respectivamente) e a grandeza não local Concorrência, que mede o emaranhamento entre os dois sub-sistemas.

Há uma divergência na literatura quanto a normalização ou não dessas grandezas, em [20], Jakob e Bergou chegam em uma relação de Complementaridade para sistemas de dois q-dits, porém por não usarem de normalizações a relação de complementaridade encontrada possui uma interpretação não tão clara como no caso de dois q-bits. Nesse trabalho será investigado o que ocorre quando normalizamos a Previsibilidade, Visibilidade e Concorrência. Descobrimos que é possível encontrar uma relação de complementaridade nos mesmos moldes do caso de dois q-bits, uma expressão com interpretação mais imediata e passível de ser testada experimentalmente.

No capítulo 2 será feito o estudo para um sistema bipartido de dois q-bits ( $2 \times 2$ ), onde aproveitaremos para introduzir o significado das grandezas envolvidas, explicando porque podemos considerar a Previsibilidade como uma medida do caráter de partícula e a Visibilidade como uma medida do caráter de onda do sistema quântico.

No capítulo 3, será mostrado como Dürr em [21] generalizou a Previsibilidade e Visibilidade para um sistema de dimensão discreta, finita e arbitrária. Será mostrado também como Jakob e Bergou em [20] chegaram em uma generalização equivalente para a Previsibilidade e Visibilidade e usando a I-Concorrência [22] (a generalização da Concorrência para subsistemas de dimensões arbitrárias) chegaram em uma fórmula para a complementaridade de um sistema quântico de dois q-dits.

O capítulo 4 se trata da principal parte deste trabalho, nele será feita uma discussão sobre usar ou não de normalização para a Previsibilidade, Visibilidade e Concorrência generalizadas. Será mostrado que, caso seja feita a normalização, é possível chegar em uma igualdade que quantifica a Complementaridade de um sistema quântico puro de dois q-dits.

No capítulo 5 será feita a conclusão.

Por fim, no apêndice A é feita uma revisão dos conceitos básicos de sistemas quânticos compostos e emaranhamento.

## Capítulo 2

# Complementaridade em sistemas de dois q-bits

Nesse capítulo serão primeiramente introduzidos os conceitos de Previsibilidade, que nos dá uma medida das propriedades de partícula do quantum e Visibilidade, que nos dá uma medida das propriedades de onda do quantum.

Para tanto, usaremos um estado quântico (quantum) de dois níveis que modela um interferômetro de Mach-Zender [23], onde cada caminho possível do fóton é um nível do quantum. Para os casos de um quantum puro ou misto será mostrado como a Previsibilidade e a Visibilidade se relacionam, isto é, a quantificação da famosa relação de Dualidade Onda-Partícula.

Posteriormente passaremos a tratar de um sistema quântico composto (dois q-bits), no qual o outro subsistema pode ser, por exemplo, um medidor de caminho ao longo do interferômetro. Será mostrado como o emaranhamento influencia o caráter de onda ou de partícula do quantum, relação conhecida como Complementaridade.

É importante que o leitor esteja familiarizado com o estudo de Sistemas Quânticos Compostos e Emaranhamento, esses conceitos são discutidos no Apêndice A.

## 2.1 Previsibilidade e Visibilidade

Considere um fóton em um interferômetro *Mach-Zehnder* (MZ).

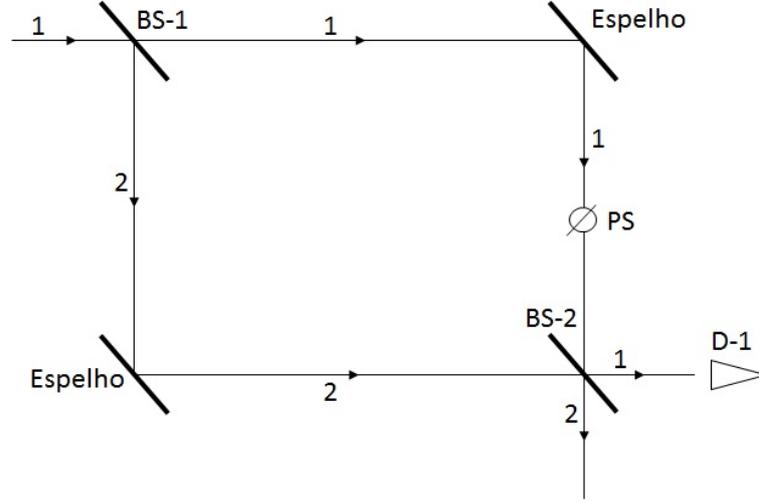


Figura 2.1: Interferômetro Mach-Zehnder

O feixe de fótons entra pelo caminho 1 no primeiro divisor de feixe<sup>1</sup> (BS-1) não necessariamente simétrico, isto é, ele pode dividir o feixe em proporções desiguais. Em seguida os feixes são refletidos pelos espelhos e, no deslocador de fase<sup>2</sup> (PS) é implementada uma diferença de fase  $\phi$  entre os feixes dos caminhos 1 e 2. No segundo divisor de feixe (BS-2) os feixes serão divididos simetricamente e observaremos a intensidade de fótons no detector D-1. O efeito de qualquer reflexão (BS ou espelhos) é acrescentar uma fase de  $\pi/2$  no feixe refletido.

Modelamos o interferômetro por um sistema quântico de dimensão dois (um q-bit). De forma que cada dimensão/nível representa um dentre os dois caminhos possíveis para o fóton.

Desta forma, considere um sistema quântico de dois níveis, puro ou não. O seu estado será representado por um operador densidade  $\hat{\rho} \in \mathcal{HS}$  (Hilbert-Schmidt).

A Previsibilidade  $\mathcal{P}_{\hat{\rho}}$  e a Visibilidade  $\mathcal{V}_{\hat{\rho}}$  são assim definidas (tomando-se as raízes positivas):

$$\mathcal{P}_{\hat{\rho}}^2 = [\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_z)]^2 = (\rho_{11} - \rho_{22})^2 \quad (2.1)$$

$$\mathcal{V}_{\hat{\rho}}^2 = 4[\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_+)]^2 = |2\rho_{12}|^2, \quad (2.2)$$

<sup>1</sup>Do inglês *Beam Splitter*.

<sup>2</sup>Do inglês *Phase Shifter*.

onde  $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ;  $\hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\rho_{ij}$  é o elemento  $ij$  de  $\hat{\rho}$ .

Se o sistema em questão for puro, então ele pode ser representado por um vetor  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ , digamos na base ortonormal "caminho":  $|\Psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$ , com  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Então o seu operador densidade será:

$$\hat{\rho}_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi| = |a|^2 |1\rangle\langle 1| + ab^* |1\rangle\langle 2| + a^*b |2\rangle\langle 1| + |b|^2 |2\rangle\langle 2| = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \langle 1| & \langle 2| \end{matrix} \\ \begin{matrix} |1\rangle \\ |2\rangle \end{matrix} & \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Assim, utilizando 2.1 e 2.2, teremos a Previsibilidade e a Visibilidade, nesta base, para um estado puro de dois níveis:

$$\mathcal{P}_\Psi^2 = (|a|^2 - |b|^2)^2 \quad (2.3)$$

$$\mathcal{V}_\Psi^2 = |2ab|^2. \quad (2.4)$$

### 2.1.1 Considerações sobre a Previsibilidade

Repare que se  $|a|^2 = 1$  ( $\Rightarrow |b|^2 = 0$ ) ou  $|b|^2 = 1$  ( $\Rightarrow |a|^2 = 0$ ) então o quantum<sup>3</sup> encontra-se com probabilidade 1 em um nível/caminho ou em outro, ou seja, temos total conhecimento de que o quantum está em algum nível (consequentemente ele não se encontra em um estado superposto) e  $\mathcal{P}_\Psi = 1$  ( $\mathcal{V}_\Psi = 0$ ). Por outro lado, se  $|a|^2 = |b|^2 = 1/2$  então o quantum se encontra com igual probabilidade nos dois níveis (em um estado perfeitamente superposto) e  $\mathcal{P}_\Psi = 0$  ( $\mathcal{V}_\Psi = 1$ ).

Além disso, pode-se ver por 2.3 que a Previsibilidade é o módulo do valor esperado do observável  $\hat{\sigma}_z$ , que mede o caminho do quantum (com autovalor 1 para o caminho  $|1\rangle$  e autovalor  $-1$  para o caminho  $|2\rangle$ ). De forma que a Previsibilidade é uma medida do conhecimento acerca de que o ente quântico se encontra em algum nível/caminho (mesmo que não saibamos em qual nível/caminho), isto é, uma medida da informação que obtemos sobre o caminho, ou de forma mais geral, sobre as populações dos níveis.

Esses níveis podem representar além dos caminhos em um interferômetro Mach-Zehnder (MZ) [23], fendas em um experimento de interferometria de fenda dupla, níveis de energia

<sup>3</sup>A partir daqui, passaremos a tratar o "fóton" por "quantum", para fins de generalização.

em um átomo de Rydberg [24] ou ainda populações de fótons em cavidades em um modelo de Jaynes-Cummings [25].

Temos a idéia intuitiva de que elementos corpusculares não se encontram em dois lugares ao mesmo tempo, portanto a sua permanência em um nível exclui a possibilidade de sua permanência em outro nível. Isso significa dizer que, intuitivamente, objetos corpusculares se encontram com certeza (probabilidade 1) em algum nível. Essa idéia, aparentemente óbvia, nos leva a associar a previsibilidade com o caráter de partícula do ente quântico em questão.

### 2.1.2 Considerações sobre a Visibilidade

De forma análoga, associaremos a visibilidade com o caráter ondulatório do ente quântico. Vimos que quando o quantum se encontra em um estado perfeitamente superposto:  $\mathcal{V}_\Psi = 1$  e quando temos total conhecimento de o quantum se encontra em algum nível  $\mathcal{V}_\Psi = 0$ .

Considere novamente o fóton no interferômetro MZ mostrado na figura 2.1. Modelado por um sistema quântico de dimensão dois (um q-bit) na base ortonormal "caminhos"  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ . O quantum está inicialmente no estado  $|1\rangle$  e a ação de cada aparato está especificada a seguir:

$$\begin{aligned} |1\rangle &\xrightarrow{\text{BS-1}} a|1\rangle + ib|2\rangle \xrightarrow{\text{espelhos} + \text{PS}} ie^{i\phi}a|1\rangle - b|2\rangle \\ &\xrightarrow{\text{BS-2}} ie^{i\phi}a\frac{1}{\sqrt{2}}(i|1\rangle + |2\rangle) - b\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle). \end{aligned}$$

Portanto, após passar pelo interferômetro MZ, o estado final  $|\Psi_f\rangle$  do nosso quantum será:

$$|\Psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-ae^{i\phi} - b)|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(iae^{i\phi} - ib)|2\rangle. \quad (2.5)$$

A intensidade  $I$  detectada em D-1 será proporcional à probabilidade  $P_1$  de encontrarmos o quantum em  $|1\rangle$ . Pelos postulados da Mecânica Quântica temos:

$$\begin{aligned} P_1 &= |\langle 1|\Psi_f\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ |a|^2 + |b|^2 + 2 \operatorname{Re}(ab^* e^{i\phi}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ |a|^2 + |b|^2 + 2 \operatorname{Re}(|a||b|e^{i(\phi_a - \phi_b + \phi)}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \cos(\phi_a - \phi_b + \phi) \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Variando  $\phi$  obtemos diferentes probabilidades, calculemos então a grandeza:

$$\frac{I^{max} - I^{min}}{I^{max} + I^{min}} = \frac{P_1^{max} - P_1^{min}}{P_1^{max} + P_1^{min}} = 2|a||b|.$$

Lembrando de 2.4, observamos que a grandeza acima é idêntica à Visibilidade do quantum (fóton) logo após sair de BS-1. Ou seja, a Visibilidade (como foi definida) é uma previsão do padrão das franjas de interferência do quantum, caso este passe por um processo de interferência. Essa consideração justifica o nome Visibilidade (das franjas) e podemos escrever:

$$\mathcal{V} = \frac{I^{max} - I^{min}}{I^{max} + I^{min}}. \quad (2.7)$$

De fato, experimentalmente é assim que medimos a visibilidade de um quantum. Se, ao invés de um interferômetro MZ usássemos um experimento de interferometria de fenda dupla (Young), a análise seria análoga. O estado logo após BS-1 seria equivalente ao estado logo após a fenda dupla e variar  $\phi$  em um PS é equivalente à variar a posição em quem analisamos choques no anteparo, isto é, a diferença de fase em um experimento de fenda dupla é dada pela diferença de caminhos percorridos pelo quantum ao sair de cada fenda.

Essa definição de Visibilidade 2.7 foi usada por Dürr em [21] para generalizar a Visibilidade para um sistema de  $n$  níveis, como será mostrado na seção 3.1.1.

### 2.1.3 Dualidade onda-partícula

Considere um estado puro  $\Psi \in \mathcal{H}$ . Observe que, por 2.3 e 2.4, temos:

$$\mathcal{P}_\Psi^2 + \mathcal{V}_\Psi^2 = (|a|^2 - |b|^2)^2 + 4|a|^2|b|^2 = (|a|^2 + |b|^2)^2 = 1. \quad (2.8)$$

Desta forma, vemos que o conhecimento sobre o caminho ( $\mathcal{P}_\Psi$ ) e a possibilidade de superposição e, conseqüentemente, obter um padrão de interferência ( $\mathcal{V}_\Psi$ ) são grandezas **complementares** no caso puro, isto é, o sistema quântico se comporta "em parte" como onda, "em parte" como partícula. De maneira que essas características obedeçam a equação 2.8.

Considere agora um sistema misto representado por  $\hat{\rho} \in \mathcal{HS}$ . Nesse caso, usando 2.1 e

2.2 teremos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\hat{\rho}}^2 + \mathcal{V}_{\hat{\rho}}^2 &= (\rho_{11} - \rho_{22})^2 + 4|\rho_{12}|^2 \\
&= \rho_{11}^2 + \rho_{22}^2 - 2\rho_{11}\rho_{22} + 4\rho_{12}\rho_{21} \\
&= \underbrace{\rho_{11}^2 + \rho_{22}^2 + 2\rho_{12}\rho_{21}}_{\text{Tr}(\hat{\rho}^2)} + 2 \underbrace{(|\rho_{12}|^2 - \rho_{11}\rho_{22})}_{-\det(\rho) \leq 0} \\
&\leq \text{Tr}(\hat{\rho}^2) \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

A igualdade, como já visto, valendo para o caso puro. Esse resultado será analisado no final da próxima sub-seção, onde será definida a Pureza de um sistema quântico.

A desigualdade

$$\mathcal{P}_{\hat{\rho}}^2 + \mathcal{V}_{\hat{\rho}}^2 \leq 1 \quad (2.9)$$

é batizada como *Relação de Dualidade* para um q-bit.

### 2.1.4 Pureza

Observe que podemos escrever:

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y), \quad (2.10)$$

$$\text{onde } \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, usando 2.10 em 2.2, vemos que a Visibilidade de um sistema de um q-bits pode ser escrita como:

$$\mathcal{V}_{\hat{\rho}}^2 = [\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_x)]^2 + [\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_y)]^2 \quad (2.11)$$

E então a Pureza  $\mathcal{Q}_{\hat{\rho}}$  de um estado quântico  $\hat{\rho}$  de um sistema de um q-bit é definida por:

$$\mathcal{Q}_{\hat{\rho}}^2 = \mathcal{P}_{\hat{\rho}}^2 + \mathcal{V}_{\hat{\rho}}^2 = [\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_z)]^2 + [\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_x)]^2 + [\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_y)]^2. \quad (2.12)$$

Essa grandeza (a soma quadrática dos valores esperados dos observáveis representados pelas matrizes de Pauli) é justamente o módulo do vetor da esfera de Bloch [26] para um sistema de dois níveis <sup>4</sup>.

<sup>4</sup>observe que  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  juntamente com  $I_2$  (Identidade 2x2), são geradores de SU(2). Bergou e Jakob, em [20] usaram desse fato para generalizar a Previsibilidade e a Visibilidade para sistemas de  $n$ , isto é, usando geradores de SU( $n$ ). Essa demonstração está feita na seção 3.2.1.

Desta forma,  $\mathcal{Q}_{\hat{\rho}}$  não deve ultrapassar a unidade (como já havia sido demonstrado) e é invariante sob transformação unitária. Isso é importante, pois a evolução temporal de um sistema isolado é uma transformação unitária, o que significa dizer que a Pureza é conservada quando a evolução do sistema é desse tipo.

Além disso, essa invariância nos mostra que apesar de a Previsibilidade e a Visibilidade serem medidas locais no quantum, isto é, dependentes da base utilizada para modelagem do sistema, a sua soma quadrática (Pureza) não é, e independe da escolha de base. Isso é esperado, já que a Pureza se trata de uma medida sobre o conhecimento (informação) total possível de se obter sobre o quantum [27]. Isto é, quando o estado é puro é possível prever o resultado do experimento.

Observamos que, no caso misto, a Previsibilidade e a Visibilidade continuam sendo parcialmente excludentes, porém a anulação de uma já não mais implica na unitariedade da outra. De fato, no caso extremo (estado completamente misto), se  $\rho_{11} = \rho_{22} = \frac{1}{2}$  e  $\rho_{12} = \rho_{21} = 0$ , teremos  $\mathcal{Q} = 0$  e nenhuma informação sobre o caminho ou possibilidade de interferência. Tal fato pode estar relacionado com o emaranhamento e será explicado na próxima seção.

## 2.2 Complementaridade em sistemas de dois q-bits

Nessa seção abordaremos a questão que fecha a seção anterior. Antes de prosseguir, o leitor deve estar habituado com estudo de sistemas quânticos compostos, uma breve revisão é dada no apêndice A.

### 2.2.1 Emaranhamento e Concorrência

Considere um sistema quântico bipartido puro, cada subsistema de dois níveis (dois q-bits). o sistema composto será representado por  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , onde  $\dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B) = 2$ . Cada subsistema é representado por sua respectiva matriz densidade reduzida:  $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$  e  $\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$ , onde  $\text{Tr}_B$  é o traço parcial sobre o subsistema B (idem para A).

Os subsistemas A e B serão separáveis se, e somente se  $\text{Tr}(\hat{\rho}_A^2) = \text{Tr}(\hat{\rho}_B^2) = 1$ . Complementarmente o sistema estará emaranhado se, e somente se  $\text{Tr}(\hat{\rho}_A^2) = \text{Tr}(\hat{\rho}_B^2) < 1$ .<sup>5</sup> Desta

---

<sup>5</sup>A igualdade dos traços dos quadrados dos operadores densidade reduzidos é garantida pela invariância do traço sob permutação cíclica e uso da base de Schmidt, para melhores esclarecimentos veja o apêndice

forma, um bom quantificador do emaranhamento no caso de um sistema de dois q-bits é a Concorrência ([18], [19])  $\mathcal{C}_\Psi$ :

$$\mathcal{C}_\Psi = \sqrt{2(1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_A^2))}. \quad (2.13)$$

Observe que  $0 \leq \mathcal{C}_\Psi \leq 1$ , sendo  $\mathcal{C}_\Psi = 0$  no caso em que  $|\Psi\rangle$  é separável e  $\mathcal{C}_\Psi = 1$  no caso completamente emaranhado, ie,  $\text{Tr}(\hat{\rho}_A^2) = \frac{1}{2}$ .

## 2.2.2 Complementaridade

O que será apresentado aqui foi originalmente publicado por Jakob e Bergou em [17]. Uma forma geral de escrever o estado  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , onde  $\dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B) = 2$  é:

$$|\Psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle,$$

onde foi adotada a base ortonormal formada pelos produtos diretos dos auto-vetores do observável de interesse de cada subsistema (*i.e.*,  $|ij\rangle \equiv |i\rangle \otimes |j\rangle$ , com  $|i\rangle \in \mathcal{H}_A$  e  $|j\rangle \in \mathcal{H}_B$ ) e  $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$ . Assim, o operador densidade do sistema composto será:

$$\hat{\rho}_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{array}{c} \langle 00| \quad \langle 01| \quad \langle 10| \quad \langle 11| \\ |00\rangle \left( \begin{array}{cccc} |a|^2 & ab^* & ac^* & ad^* \\ |01\rangle \left( \begin{array}{cccc} ba^* & |b|^2 & bc^* & bd^* \\ |10\rangle \left( \begin{array}{cccc} ca^* & cb^* & |c|^2 & cd^* \\ |11\rangle \left( \begin{array}{cccc} da^* & db^* & dc^* & |d|^2 \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \end{array}$$

e os operadores densidade reduzidos de cada sub-sistema serão:

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \begin{array}{c} \langle 0| \quad \langle 1| \\ |0\rangle \left( \begin{array}{cc} |a|^2 + |b|^2 & ac^* + bd^* \\ |1\rangle \left( \begin{array}{cc} a^*c + b^*d & |c|^2 + |d|^2 \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array}$$

$$\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \begin{array}{c} \langle 0| \quad \langle 1| \\ |0\rangle \left( \begin{array}{cc} |a|^2 + |c|^2 & ab^* + cd^* \\ |1\rangle \left( \begin{array}{cc} a^*b + c^*d & |b|^2 + |d|^2 \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array}$$

Podemos usar 2.1 e 2.2 para calcular a Previsibilidade e Visibilidade de cada sub-sistema:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_A &= |\text{Tr}(\hat{\rho}_A \hat{\sigma}_z)| = |(|a|^2 + |b|^2) - (|c|^2 + |d|^2)| \\ \mathcal{P}_B &= |\text{Tr}(\hat{\rho}_B \hat{\sigma}_z)| = |(|a|^2 + |c|^2) - (|b|^2 + |d|^2)| \\ \mathcal{V}_A &= 2|\text{Tr}(\hat{\rho}_A \hat{\sigma}_+)| = 2|ac^* + bd^*| \\ \mathcal{V}_B &= 2|\text{Tr}(\hat{\rho}_B \hat{\sigma}_+)| = 2|ab^* + cd^*|.\end{aligned}$$

Por 2.13 podemos calcular a Concorrência para o sistema composto:

$$\mathcal{C}_\Psi = 2|ad - bc|.$$

Finalmente, é um fácil exercício mostrar que  $\mathcal{C}_\Psi^2 + \mathcal{P}_A^2 + \mathcal{V}_A^2 = 1$  e  $\mathcal{C}_\Psi^2 + \mathcal{P}_B^2 + \mathcal{V}_B^2 = 1$  ou

$$\mathcal{C}_\Psi^2 + \mathcal{Q}_k^2 = 1, \text{ com } k = A, B. \quad (2.14)$$

A equação 2.14 é chamada de *Equação da Complementaridade* para um sistema de dois q-bits. Com ela podemos tentar responder a questão do final da sub-seção 2.1.4: a informação está sendo compartilhada entre os subsistemas e esse emaranhamento pode ser visto como o responsável pela perda de pureza de cada subsistema. Extrapolando um pouco, pode-se dizer que um sistema completamente emaranhado com outro (sendo o global puro), de dimensão maior ou igual à sua, não possui nem Previsibilidade nem Visibilidade, não possui "propriedades individuais".<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>Veja os próximos capítulos.

## Capítulo 3

# Complementaridade em sistemas de dois q-dits

### 3.1 Visibilidade e Previsibilidade por Durr

Nessa seção será descrito como em 2001 Durr [21] generalizou a Previsibilidade e Visibilidade para um sistema quântico de dimensão finita arbitrária.

#### 3.1.1 Visibilidade

Como visto em 2.1.2, para um interferômetro de 2 fendas/caminhos ( $n = 2$ ), que configuram estados quânticos ortogonais  $ij$  (isto é,  $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ ) a probabilidade do quantum sair do interferômetro no estado (caminho)  $|1\rangle$  é<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} I_1 &= |\langle 1|\Psi_f\rangle|^2 = \langle 1|\Psi_f\rangle\langle\Psi_f|1\rangle = \langle 1|\hat{\rho}_f|1\rangle \\ &= \frac{1}{2} \{1 + 2|\rho_{12}| \cos[\arg(\rho_{12}) + \phi]\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $\rho_{12}$  é elemento  $ij$  de  $\hat{\rho}$ , que representa o estado logo após o primeiro divisor de feixes (BS-1). A Visibilidade de  $\hat{\rho}$  é dada por <sup>2</sup>:

$$\mathcal{V} = \frac{I^{max} - I^{min}}{I^{max} + I^{min}} = 2|\rho_{12}|, \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup>Repetindo 2.6, em termos dos elementos da matriz densidade  $\hat{\rho}_\Psi$

<sup>2</sup>Repetindo 2.7, só que novamente em termos dos elementos da matriz densidade  $\hat{\rho}_\Psi$

onde os valores de máximo e mínimo são obtidos variando a fase  $\phi$  no deslocador de fase(PS).

Será feito algo semelhante para o caso de múltiplas fendas/caminhos ( $n$  arbitrário).

Considere um interferômetro de  $n$  fendas como o da figura:

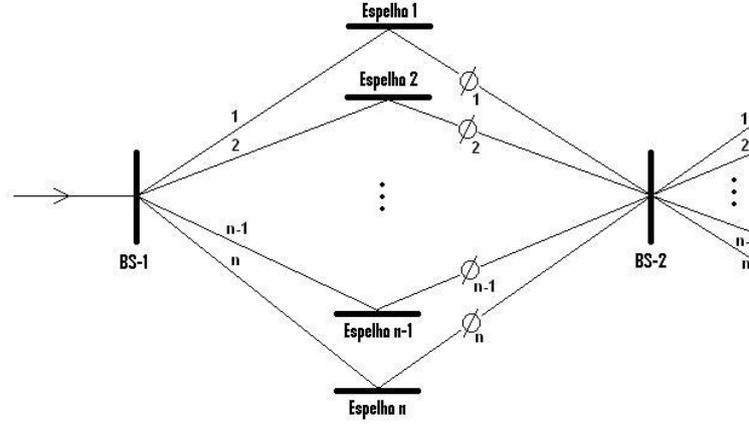


Figura 3.1: Interferômetro de  $n$  fendas

Analogamente ao caso de 2 fendas, o primeiro divisor de feixes (BS-1) divide o quantum em razões arbitrárias, gerando o estado puro  $|\Psi\rangle$  a ser analisado e representado pelo operador hermitiano de densidade  $\hat{\rho}$  (O sistema  $n$ -partido após BS-1 é o escolhido para base de estados na representação matricial).

Em seguida "espelhos"(ou algo similar) redireciona os feixes e antes de entrar no segundo divisor de feixes (BS-2), cada feixe é submetido a um deslocador de fase<sup>3</sup> (PS) que lhe aplicará um deslocamento de fase  $\phi_k$  ao  $k$ -ésimo feixe, que pode ser controlada. O BS-2 tem uma razão de separação igual a  $\frac{1}{n}$  para cada feixe e aplica um deslocamento de fase que depende dos índices dos feixes de entrada e saída<sup>4</sup>. O efeito de cada aparato segue abaixo:

$$\begin{aligned} \hat{BS}_1 &= |\Psi\rangle\langle 1| \\ \hat{PS} &= \sum_{k=1}^n e^{-i\phi_k} |k\rangle\langle k| \\ \hat{BS}_2 &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{e^{-i\phi_{kj}}}{\sqrt{n}} |j\rangle \right) \langle k|, \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Do inglês *Phase Shifter*.

<sup>4</sup>Como no caso de dois q-bits, no qual o BS-2 aplica uma fase de  $\frac{\pi}{2}$  ao feixe refletido e uma fase 0 ao feixe transmitido.

onde  $|1\rangle$  é o estado inicial,  $|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |i\rangle$ , ou em termos do operador densidade:  $\hat{\rho} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} |i\rangle\langle j|$ ,  $\rho_{ij} = a_i a_j^*$ .

Desta forma, o estado final será<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned}
|\Psi_f\rangle &= B\hat{S}_2 \hat{P}S |\Psi\rangle \\
&= \left[ \sum_k \left( \sum_j \frac{e^{-i\phi_{kj}}}{\sqrt{n}} |j\rangle \right) \langle k| \right] \left[ \sum_l e^{-i\phi_l} |l\rangle \langle l| \right] \sum_m a_m |m\rangle \\
&= \left[ \sum_k \left( \sum_j \frac{e^{-i\phi_{kj}}}{\sqrt{n}} |j\rangle \right) \langle k| \right] \sum_l e^{-i\phi_l} a_l |l\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{k,j} e^{-i(\phi_k + \phi_{kj})} a_k \right) |j\rangle.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Assim como no caso de duas fendas (caminhos), a intensidade do feixe do quantum será proporcional à probabilidade deste deixar o interferômetro em uma das saídas, digamos o estado  $|t\rangle$ :

$$\begin{aligned}
I &= \langle t|\Psi_f\rangle\langle\Psi_f|t\rangle \\
&= \frac{1}{n} \left( \sum_k e^{-i(\phi_k + \phi_{kt})} a_k \right) \left( \sum_l e^{+i(\phi_l + \phi_{lt})} a_l^* \right),
\end{aligned}$$

como temos controle sobre as fases aplicadas  $\phi_k$  e  $\phi_l$  nos deslocadores de fase, para simplificar faremos a renomeação:  $\phi_k + \phi_{kt} \rightarrow \phi_k$  e  $\phi_l + \phi_{lt} \rightarrow \phi_l$ . Assim a Intensidade I será:

$$I = \sum_{k,l} e^{-i(\phi_k - \phi_l)} \underbrace{a_k a_l^*}_{\rho_{kl}} = \frac{1}{n} \sum_{l,k} \rho_{kl} e^{-i(\phi_k - \phi_l)},$$

ainda podemos usar  $\rho_{kl} = |\rho_{kl}| e^{i \arg(\rho_{kl})}$  e o fato de  $\hat{\rho}$  ser hermitiano, isto é,  $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger \Rightarrow \rho_{lk} = \rho_{kl}^* \Rightarrow \arg(\rho_{lk}) = -\arg(\rho_{kl})$  e  $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$  para escrever:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{\substack{k,l \\ k=l}} \rho_{kl} + \sum_{\substack{k,l \\ k \neq l}} |\rho_{kl}| e^{-i[\phi_k - \phi_l - \arg(\rho_{kl})]} \right\} \\
&= \frac{1}{n} \left\{ 1 + 2 \sum_{\substack{k,l \\ k < l}} |\rho_{kl}| \cos[\phi_k - \phi_l - \arg(\rho_{kl})] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Note que quando  $n = 2$  teremos 3.1, como esperado. Da mesma forma que 3.2, gostaríamos de ter uma fórmula para a Visibilidade generalizada que seja continua dos elementos do estado do quantum  $\hat{\rho}$ , mas que seja baseada no padrão de interferência I 3.4 e reflita o caráter ondulatório do quantum, isto é, a Visibilidade  $\mathcal{V}$  deve:

<sup>5</sup>A partir de agora, os superescritos nos somatórios serão omitidos para simplificação.

- Atingir o mínimo global quando  $I = \frac{1}{n}$ :

A visibilidade deve ser mínima quando não há nenhum padrão de interferência, ou seja, o quantum se comporta exclusivamente como partícula. O comportamento esperado de um feixe de  $n$  partículas ao passar com um aparato de  $n$  fendas é se dividir igualmente pelas fendas sem interferência, isso corresponde à uma intensidade (número de partículas) de  $\frac{1}{n}$  para cada fenda.

- Atingir o máximo global quando  $\hat{\rho}$  for puro e  $\rho_{jj} = \frac{1}{n}, \forall j$ :

O fato de  $\hat{\rho}$  ser puro ( $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ ) significa que podemos prever completamente o resultado do experimento de interferência, se todas as populações forem iguais ( $\rho_{jj} = \frac{1}{n}, \forall j$ ) isto é, não obtivermos nenhuma informação sobre qual caminho o quantum percorreu, então esperamos o máximo padrão de interferência e portanto a maior Visibilidade.

- Ser insensível ao se redefinir os pontos zeros das fases  $\phi_i$  e a numeração dos estados:

De fato, a Visibilidade deve ser independente do sistemas de coordenadas escolhido.

Considere  $\langle f \rangle_\phi$  a média da função  $f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  sobre todas as fases  $\phi_i$ 's:

$$\langle f \rangle_\phi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \dots \int_0^{2\pi} d\phi_n f.$$

Assim, usando 3.4 obtemos a média de  $I$ :  $\langle I \rangle_\phi = \frac{1}{n}$  e sua variância:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta I)^2 \rangle_\phi &= \langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle_\phi \\ &= \left\langle \left\{ \frac{1}{n} \sum_{l \neq k} |\rho_{kl}| \cos[\phi_k - \phi_l - \arg(\rho_{kl})] \right\}^2 \right\rangle_\phi \\ &= \frac{1}{n^2} \left\langle \sum_{l \neq k} |\rho_{kl}|^2 \cos^2[\phi_k - \phi_l - \arg(\rho_{kl})] \right\rangle_\phi \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \left\langle \sum_{l \neq k} |\rho_{kl}| \cos[\phi_k - \phi_l - \arg(\rho_{kl})] |\rho_{lk}| \cos[\phi_l - \phi_k - \arg(\rho_{lk})] \right\rangle_\phi + 0 \\ &= \frac{1}{n^2} \left\langle \sum_{l \neq k} 2|\rho_{kl}|^2 \cos^2[\phi_k - \phi_l - \arg(\rho_{kl})] \right\rangle_\phi = \frac{1}{n^2} \sum_{l \neq k} 2|\rho_{kl}|^2 \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{l \neq k} |\rho_{kl}|^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Observe que se os feixes são incoerentes, isto é,  $\rho_{kl} = 0$  para  $k \neq l$ , então  $\langle (\Delta I)^2 \rangle_\phi = 0$ . Por outro lado, se  $|\rho_{kl}| = \frac{1}{n} \forall l, k | k \neq l$  então  $\langle (\Delta I)^2 \rangle_\phi$  atinge seu máximo:  $\frac{n-1}{n^3}$ .

Assim, a variância da intensidade  $\langle(\Delta I)^2\rangle_\phi$  é uma medida da quantidade de interferência e então da característica de onda do quantum.

Normalizando-a chegamos na proposta para a Visibilidade, que atende aos requisitos desejados:

$$\mathcal{V} = \sqrt{\left(\frac{n^3}{n-1}\right) \langle(\Delta I)^2\rangle_\phi} \quad (3.6)$$

ou ainda em termos dos elementos de  $\hat{\rho}$

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \sum_{l \neq k} |\rho_{lk}|^2}. \quad (3.7)$$

Observe que 3.7 se reduz ao caso conhecido para um q-bit (equação 2.2) quando  $n = 2$ .

Uma observação importante é que essa fórmula obtida por Durr é relacionada com uma grandeza experimental, a variância da intensidade, o que é intuitivo e fornece uma aplicabilidade experimental imediata.

### 3.1.2 Previsibilidade

De forma análoga à Visibilidade, para representar o caráter de partícula de um quantum de dimensão  $n$  procuramos uma função contínua  $\mathcal{P}$  das probabilidades  $\rho_{ii}$ 's, tal que:

- Deve atingir seu máximo global quando  $\rho_{ii} = 1$  para algum  $i$  (o que, pela unitariedade do traço de  $\hat{\rho}$ , todos os outros elementos da diagonal principal serão nulos): Nesse caso, sabemos com certeza o caminho do quantum, o que é esperado do comportamento de uma partícula.
- Deve atingir seu mínimo global quando  $\rho_{jj} = \frac{1}{n} \forall j$ : Caso em que todos os caminhos são igualmente prováveis e, então, não temos nenhum conhecimento sobre o caminho do quantum.
- Qualquer mudança no sentido de equalizar as probabilidades  $\rho_{ii}$ 's deve contribuir para uma diminuição de  $\mathcal{P}$ : Qualquer mudança deste tipo implica numa diminuição do conhecimento sobre os caminhos e, portanto, deve implicar em uma diminuição da Previsibilidade.

Façamos então um estudo sobre a distribuição de probabilidade dos caminhos  $\rho_{jj}$ . Denotemos a média por:

$$\langle f_j \rangle_j = \frac{1}{n} \sum_j f_j$$

onde  $f_j$  é uma distribuição de probabilidade discreta. Assim, o valor médio das probabilidades de cada caminho será:

$$\langle \rho_{jj} \rangle_j = \frac{1}{n} \sum_j \rho_{jj} = \frac{1}{n} \text{Tr}(\hat{\rho}) = \frac{1}{n}.$$

O espalhamento rms (isto é, o desvio padrão da probabilidade de cada caminho) é uma possível medida da Previsibilidade, por satisfazer as condições citadas anteriormente. Desta forma, a medida de Previsibilidade sugerida por Durr é o espalhamento rms normalizado:

$$\mathcal{P} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \sum_j \left( \rho_{jj} - \frac{1}{n} \right)^2}. \quad (3.8)$$

Observe que podemos usar  $\text{Tr}(\hat{\rho}) = \sum_j \rho_{jj} = 1$  para manipular 3.8 e reescrevê-la como segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2 &= \frac{n}{n-1} \sum_j \left( \rho_{jj} - \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{n}{n-1} \left[ -\frac{1}{n} + \sum_j \rho_{jj}^2 \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left[ -\left( \sum_j \rho_{jj} \right)^2 + \sum_j n \rho_{jj}^2 \right] = \frac{1}{n-1} \left[ -\left( \sum_j \rho_{jj}^2 + \sum_{j>i} 2\rho_{jj}\rho_{ii} \right) + \sum_j n \rho_{jj}^2 \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left[ \sum_j \left( n-1 \right) \rho_{jj}^2 - \sum_{j>i} 2\rho_{jj}\rho_{ii} \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{j>i} (\rho_{jj} - \rho_{ii})^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Assim, vemos que a Previsibilidade generalizada calcula explicitamente a soma das diferenças quadráticas entre as populações. Por 3.9 é fácil verificar também que a Previsibilidade assim definida se reduz ao caso conhecido de um q-bit (equação 2.1) quando  $n = 2$ .

### 3.1.3 Dualidade Onda-Partícula

Sobre a Pureza  $\mathcal{Q}_{\hat{\rho}}^2 = \mathcal{P}_{\hat{\rho}}^2 + \mathcal{V}_{\hat{\rho}}^2$  esperamos duas coisas (como no caso de dois q-bits): primeiro que ela respeite a relação de Dualidade Onda-Partícula  $\mathcal{Q}_{\hat{\rho}} \leq 1$ , a igualdade valendo no caso puro; segundo que  $\mathcal{Q}_{\hat{\rho}}$  seja invariante sob transformação unitária e, desta forma, não depender da base em que escrevemos  $\hat{\rho}$ .  $\mathcal{Q}_{\hat{\rho}}$  de fato satisfaz esses pré-requisitos, observe:

$$\begin{aligned}
Q_{\hat{\rho}}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j>i} (\rho_{ii} - \rho_{jj})^2 + 2 \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \sum_{j>i} |\rho_{ij}|^2 \\
&= \sum_i \rho_{ii}^2 - \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \rho_{ii} \rho_{jj} + \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \rho_{ij} \rho_{ji} + \sum_{j \neq i} \rho_{ij} \rho_{ji} \\
&= \sum_{i,j} \rho_{ij} \rho_{ji} + \frac{1}{n-1} \sum_{i,j} (\rho_{ij} \rho_{ji} - \rho_{ii} \rho_{jj}) \\
&= \text{Tr}(\hat{\rho}^2) + \frac{1}{n-1} \left[ \text{Tr}(\hat{\rho}^2) - (\text{Tr} \hat{\rho})^2 \right] \\
&= \frac{1}{n-1} [n \text{Tr}(\hat{\rho}^2) - 1]. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Como  $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$  é invariante sob transformação unitária, então  $Q_{\hat{\rho}}$  também será. Além disso, como  $\frac{1}{n} \leq \text{Tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1$ , os extremos valendo nos casos de menor e maior Pureza, teremos para os valores de  $Q_{\hat{\rho}}$ :  $0 \leq Q_{\hat{\rho}} \leq 1$ , como esperado. Portanto, as condições para a medida de Pureza foram satisfeitas.

Assim como no caso de dois níveis, aqui também  $Q_{\hat{\rho}}$  será o módulo normalizado do vetor na esfera de Bloch generalizada para  $n$  níveis.<sup>6</sup>

## 3.2 Complementaridade por Jakob e Bergou

Nessa seção será descrito como em 2007 Mathias Jakob e Janos Bergou (que serão referidos como os autores) chegaram em uma relação de complementaridade para sistemas bipartidos de dimensões arbitrárias. O aqui descrito é uma adaptação do artigo original dos autores [20].

### 3.2.1 Previsibilidade e Visibilidade a partir de $SU(n)$

Observe que no caso de um sistema quântico um q-bit (dimensão 2), na sub-seção 2.1.4 a pureza do sistema, dada pela equação 2.12, é também o módulo do vetor de Bloch (no espaço de dimensão 3).  $Q_{\hat{\rho}}^2$  é ainda a soma quadrática dos valores esperados para os geradores de  $SU(2)$ .

Baseados nessas observações, para generalizar a Previsibilidade e Visibilidade para um sistema quântico de dimensão  $n$ , os autores usaram o vetor de Bloch no espaço de dimensão

---

<sup>6</sup>De fato, esse foi o caminho tomado por Jakob e Bergou em [20] para generalizar a Previsibilidade e a Visibilidade para dimensões arbitrárias. Essa demonstração encontra-se na próxima seção.

$n^2 - 1$ , que está unicamente relacionado, de forma completa e determinante a um sistema quântico de dimensão  $n$  ([26], [28], [29] e [30]).

Foi feito o uso de um conjunto de operadores obtido em [?], que formam três grupos  $\{\hat{\lambda}\} = (\{\hat{u}\}, \{\hat{v}\}, \{\hat{w}\})$  denotados por  $u, v, w$  e definidos por:

$$\begin{aligned}\hat{u}_{jk} &= |j\rangle\langle k| + |k\rangle\langle j| \\ \hat{v}_{jk} &= -i(|j\rangle\langle k| - |k\rangle\langle j|) \\ \hat{w}_l &= \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \left( \sum_{j=1}^l |j\rangle\langle j| - l|l+1\rangle\langle l+1| \right).\end{aligned}\tag{3.11}$$

A relação entre  $\hat{\lambda}_i$  e os  $\hat{u}$ 's,  $\hat{v}$ 's e  $\hat{w}$ 's é dada pelo ordenamento  $(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_{n^2-1}) = (\hat{u}_{12}, \dots, \hat{v}_{12}, \dots, \hat{w}_{n-1}) \equiv \vec{\lambda}$ . Onde  $1 \leq j < k \leq n$  e  $1 \leq l \leq n-1$ , de forma que sejam  $2\binom{n}{2} + (n-1) = n^2 - 1$  operadores  $\hat{\lambda}_k$ , onde  $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-1)!}$ .

Tais operadores são chamados de matrizes de Pauli generalizadas, são também operadores que geram a algebra  $SU(n)$ . Eles satisfazem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\hat{\lambda}_k) &= 0 \\ \text{Tr}(\hat{\lambda}_j \hat{\lambda}_k) &= \delta_{jk} \\ \hat{\lambda}_k &= \hat{\lambda}_k^\dagger\end{aligned}$$

Assim, qualquer matriz densidade  $\hat{\rho}$  pode ser expressa como uma combinação linear de matrizes  $\hat{\lambda}_k$ :

$$\hat{\rho} = \frac{1}{n} \mathbb{I}_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^2-1} \langle \hat{\lambda}_k \rangle \hat{\lambda}_k = \frac{1}{n} \left( \mathbb{I}_n + \frac{1}{2} \vec{r} \cdot \vec{\lambda} \right),$$

onde o vetor de Bloch associado é <sup>7</sup>:

$$\vec{r} = (\langle \hat{\lambda}_1 \rangle, \dots, \langle \hat{\lambda}_{n^2-1} \rangle).\tag{3.12}$$

O comprimento do vetor de Bloch não normalizado  $|\vec{r}|^2$  representa uma medida da quantidade de informação contida no sistema:

$$|\vec{r}|^2 = \sum_{k=1}^{n^2-1} \langle \hat{\lambda}_k \rangle^2 = 2 \left( \text{Tr}(\hat{\rho}^2) - \frac{1}{n} \right) \leq \frac{2(n-1)}{n}.\tag{3.13}$$

<sup>7</sup>Alguns autores ([32], [33]) preferem normalizar o vetor de Bloch, desta forma teríamos  $\hat{\rho} = \frac{1}{n} \left( \mathbb{I}_n + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \vec{r} \cdot \vec{\lambda} \right)$ .

Já o seu comprimento normalizado nos dá uma medida da pureza  $\mathcal{Q}$  do sistema, fórmula idêntica à obtida na seção anterior 3.10:

$$\mathcal{Q}^2 = \frac{n}{2(n-1)} |\bar{r}|^2 = \frac{n}{n-1} \left( \text{Tr}(\hat{\rho}^2) - \frac{1}{n} \right). \quad (3.14)$$

A igualdade em 3.13 é obtida se o sistema for puro. É sabido que nem todos os vetores de Bloch representam estados quânticos (para vetores normalizados a maior esfera que só contém estados válidos [31] tem raio  $\frac{n}{2}$ ), pois os elementos da matriz densidade devem obedecer  $|\rho_{jk}|^2 \leq \rho_{jj}\rho_{kk}$ .

Os autores se referem a  $|\bar{r}|^2$  como "propriedade de partição única"<sup>8</sup> e propõem que a uma parcela de  $|\bar{r}|^2$  deve ser atribuída o caráter de partícula (Previsibilidade)  $\mathcal{P}^2$  do sistema quântico, enquanto ao restante deve ser atribuído o caráter de onda (Visibilidade)  $\mathcal{V}^2$ .

Reescrevendo  $|\bar{r}|^2$  em termos das matrizes de Pauli generalizadas temos: 3.11:

$$|\bar{r}|^2 = \sum_{l=1}^{n-1} |\langle \hat{w}_l \rangle|^2 + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \leq k}}^n (|\langle \hat{u}_{jk} \rangle|^2 + |\langle \hat{v}_{jk} \rangle|^2). \quad (3.15)$$

Os autores argumentam que obviamente a Previsibilidade deve estar relacionada com os valores esperados do grupo  $\{\hat{w}\}$ , que detectam populações. Já a Visibilidade deve estar relacionada com os valores esperados dos grupos de geradores  $\{\hat{u}\}$  e  $\{\hat{v}\}$ , que medem correlações. Assim, segue a proposta dos autores para a generalização da Previsibilidade  $\mathcal{P}_b$  e Visibilidade  $\mathcal{V}_b$  para um sistema de  $n$  níveis:

$$\mathcal{P}_b^2 = \sum_{l=1}^{n-1} |\langle \hat{w}_l \rangle|^2 = 2 \left( \sum_{j=1}^n \rho_{jj}^2 - \frac{1}{n} \right) \quad (3.16)$$

$$\mathcal{V}_b^2 = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \leq k}}^n (|\langle \hat{u}_{jk} \rangle|^2 + |\langle \hat{v}_{jk} \rangle|^2) = 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n |\rho_{jk}|^2. \quad (3.17)$$

Já a relação de Dualidade Onda-Partícula entre  $\mathcal{P}_b$  e  $\mathcal{V}_b$  será:

$$\mathcal{D}^2 \equiv \mathcal{P}_b^2 + \mathcal{V}_b^2 = 2 \left( \text{Tr}(\rho^2) - \frac{1}{n} \right) \leq \frac{2(n-1)}{n}. \quad (3.18)$$

A igualdade valendo no caso de  $\rho$  puro.

Observe que as definições de Previsibilidade e Visibilidade, assim como a relação de Dualidade obtida pelos autores são idênticas às obtidas por Durr na seção anterior, exceto pela normalização que os autores preferiram não usar para preservar a interpretação de que  $\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}^2$  representa uma quantidade (e não porcentagem) de informação contida no sistema.

---

<sup>8</sup> *single partite property*

### 3.2.2 Concorrência e Complementaridade

Considere agora um sistema quântico bipartido  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  cujos subsistemas possuem dimensões finitas e arbitrárias  $n_A$  e  $n_B$ . Para generalizar a Concorrência, os autores usam um artifício de "engenharia reversa", isto é, supõe que deve existir uma relação de Complementaridade entre as propriedades de partição única (locais)  $\mathcal{D}^2 = \mathcal{P}^2 + \mathcal{V}^2$  e o emaranhamento do sistema composto medido pela concorrência generalizada  $\mathcal{C}_{AB}^2$ . Essa relação deve ser da forma:

$$\mathcal{P}_k^2 + \mathcal{V}_k^2 + \left(\mathcal{C}_{AB}^{(n)}\right)^2 = \mathcal{D}_k^2 + \left(\mathcal{C}_{AB}^{(n)}\right)^2 \leq \frac{2(n_k - 1)}{n_k}, \quad (3.19)$$

onde  $k = A, B$ . A igualdade é satisfeita se, e somente se, o sistema global for puro. Outra forma de escrever essa relação seria:

$$\mathcal{P}_A^2 + \mathcal{V}_A^2 + \mathcal{P}_B^2 + \mathcal{V}_B^2 + 2\left(\mathcal{C}_{AB}^{(n)}\right)^2 \leq \frac{2(n_A - 1)}{n_A} + \frac{2(n_B - 1)}{n_B}. \quad (3.20)$$

Considere o sistema global puro. Nessa situação a relação 3.19 é saturada e podemos chegar na fórmula para a Concorrência generalizada:

$$\left(\mathcal{C}_{AB}^{(n)}\right)^2 = \frac{2(n_k - 1)}{n_k} - \mathcal{D}_k^2 = \frac{2(n_k - 1)}{n_k} - 2\left(\text{Tr}(\rho_k^2) - \frac{1}{n_k}\right) = 2(1 - \text{Tr}(\rho_k^2)). \quad (3.21)$$

Observe que para um sistema global puro<sup>9</sup> temos  $0 \leq \text{Tr}(\rho_A^2) = \text{Tr}(\rho_B^2) \leq \frac{1}{n}$ , onde  $n = \min(n_A, n_B)$ . Então, a Concorrência assim definida terá os valores:

$$0 \leq \left(\mathcal{C}_{AB}^{(n)}\right)^2 \leq \frac{2(n - 1)}{n}.$$

A Concorrência obtida por Jakob e Bergou é idêntica à I-Concorrência, obtida à partir do inversor universal por Rungta *et al* em [22]:

$$\left(\mathcal{C}_{AB}^{(n)}\right) = \sqrt{2\nu_A\nu_B(1 - \text{Tr}\rho_A^2)} \quad (3.22)$$

contanto que a escolha das constantes seja  $\nu_A = \nu_B = 1$ . Jakob e Bergou argumentam que esta deve ser a escolha correta, pois assim a Concorrência se reduz ao caso conhecido no caso de dois q-bits e não depende explicitamente das dimensões dos subsistemas<sup>10</sup>.

De acordo com os autores, a Concorrência, assim como a Previsibilidade e a Visibilidade, não devem ser normalizadas, e então ter uma dependência explícita em suas fórmulas das

<sup>9</sup>O que segue é garantido pela decomposição de Schmidt

<sup>10</sup>Nesse caso, como se trata de sistema global puro, pela decomposição de Schmidt, se vê que só importaria a dimensão do sub-espço de menor dimensão

dimensões dos sub-espacos pois, caso contrário, uma simples adição de uma dimensão extra não utilizável em algum sub-espaco mudaria seus valores. Essa normalização é a diferença entre as generalizações da Visibilidade e Previsibilidade feita por Durr, em [21] e os autores. Essa discussão sobre a dimensão é o tema principal desta dissertação e será elaborada no próximo capítulo.

## Capítulo 4

# Uma visão alternativa da relação de Complementaridade de dois q-dits

A discussão que se segue é divergente na literatura e talvez seja o principal ponto deste trabalho.

Ao generalizar a Previsibilidade e a Visibilidade para um sistema de dimensão discreta e arbitrária, Jakob e Bergou em [20] chegam em expressões que não dependem da dimensão do espaço de estados não sendo também normalizadas entre 0 e 1, desta forma a soma entre a Visibilidade e a Previsibilidade é idêntica ao módulo do vetor de Bloch para o estado e representa a quantidade de informação contida nele. Porém, é esperado que a Previsibilidade nos traga uma informação sobre o caráter de partícula do quântico e a Visibilidade sobre o caráter de onda, de forma que só podemos interpretar os números oriundos dessas expressões se tivermos em mãos os valores máximos possíveis para elas, e estes valores dependem da dimensão do espaço de estados.

Já em [21], Durr obtém as mesmas expressões para Previsibilidade e Visibilidade porém dependentes da dimensão do espaço de estados de forma a serem normalizadas entre 0 e 1.

Desta forma, essas expressões para Previsibilidade e Visibilidade fornecem imediatamente a porcentagem do conhecimento respectivamente sobre os caminhos/populações (caráter de partícula) e interferências (caráter de onda). O leitor pode questionar: "é estranho e não faz sentido que a Previsibilidade ou Visibilidade mudem simplesmente por adicionarmos dimensões não utilizáveis (eg. uma fenda tampada em um experimento de Young ou um nível atômico que não será ocupado) no modelo do sistema". Porém, ao modelar o sistema, se for adicionada uma dimensão não utilizável estaremos adicionando uma informação sobre as populações (ou caminhos), estaremos dizendo que existe uma população zero em determinado nível (ou um caminho não percorrido) de forma que é esperado que isso altere o valor a Previsibilidade.

Considerando então importante a normalização da Previsibilidade e Visibilidade, seria possível imaginar uma expressão também normalizada para a Concorrência e, consequentemente, uma nova relação de Complementaridade. Isso será feito a seguir.

Tendo em vista a discussão que nos precede, é imperativo ressaltar que no que se segue todas as dimensões consideradas são **utilizáveis**. Uma dimensão utilizável é aqui definida como uma dimensão capaz de armazenar uma informação relevante para a modelagem do sistema, o que em geral se faz na prática. Por exemplo, em um sistema composto por uma cavidade eletromagnética e um átomo de Rydberg, este possui vários níveis, mas ao descrever o espaço de Hilbert para o seu quantum (modelar o sistema), o descrevemos com dimensão igual a 2, pois somente dois níveis (o fundamental e o excitado, em geral descritos por  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ ) são interagentes com a cavidade.

## 4.1 Uma Concorrência Normalizada

Como já dito anteriormente, a generalização da Concorrência 2.13 para sistemas bipartidos de dimensões arbitrárias se chama a I-concorrência, e foi feita originalmente por Rungta et al em [22], por meio do inversor universal.

De acordo com [22], para um sistema bipartido  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  com dimensões arbitrárias  $\dim(\mathcal{H}_A) = l$  e  $\dim(\mathcal{H}_B) = k$ , com  $l \leq k$ , a Concorrência será:

$$\mathcal{C}_\Psi = \sqrt{\nu_A \nu_B [1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_A^2)]} \quad (4.1)$$

onde  $\nu_A$  e  $\nu_B$  são constantes que aqui serão escolhidas de forma que a Concorrência seja normalizada, isto é,  $0 \leq \mathcal{C}_\Psi \leq 1$ . Assim, a nova proposta para Concorrência de um sistema de dois q-dits será:

$$\mathcal{C}_\Psi = \sqrt{\frac{l}{l-1} [1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_A^2)]} \quad (4.2)$$

Observe que tal definição se reduz ao caso conhecido de dois q-bits 2.13 quando  $l = 2$ . É importante ressaltar que  $l$  é a menor dimensão **utilizável** entre os subespaços  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ <sup>1</sup>.

Jakob e Bergou, em [20], definem uma Concorrência que mede a quantidade de informação compartilhada entre os subsistemas, a nossa escolha de  $\nu_A$  e  $\nu_B$  nos permite interpretar a Concorrência como a porcentagem de informação compartilhada em relação à quantidade de informação passível de compartilhamento.

## 4.2 Outra fórmula para a Complementaridade em sistemas de dois q-dits

Com essa nova proposta de interpretação para a Concorrência generalizada, podemos sugerir uma outra fórmula para a Complementaridade, uma que talvez se assemelhe mais à conhecida no caso de dois q-bits.

Para um sistema bipartido puro  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  com dimensões arbitrárias e utilizáveis  $\dim(\mathcal{H}_A) = l$  e  $\dim(\mathcal{H}_B) = k$ , com  $l \leq k$ . Utilizando as seguintes fórmulas para a Visibilidade  $\mathcal{V}_{\hat{\rho}_C}$ , Previsibilidade  $\mathcal{P}_{\hat{\rho}_C}$ , Pureza  $\mathcal{Q}_{\hat{\rho}_C}$  e Concorrência  $\mathcal{C}_\Psi$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\hat{\rho}_C}^2 &= 2 \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right) \sum_{j>i} |\rho_{ij}|^2, & \mathcal{P}_{\hat{\rho}_C}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j>i} (\rho_{ii} - \rho_{jj})^2, \\ \mathcal{Q}_{\hat{\rho}_C}^2 &= \mathcal{P}_{\hat{\rho}_C}^2 + \mathcal{V}_{\hat{\rho}_C}^2, & \mathcal{C}_\Psi^2 &= \frac{l}{l-1} [1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_A^2)]. \end{aligned}$$

Onde  $n = \begin{cases} l & \text{se } C = A \\ k & \text{se } C = B \end{cases}$ . As relações de complementaridade sugeridas são:

$$\mathcal{C}_\Psi^2 + \mathcal{Q}_{\hat{\rho}_A}^2 = 1 \quad (4.3)$$

$$\xi(l, k) \mathcal{C}_\Psi^2 + \mathcal{Q}_{\hat{\rho}_B}^2 = 1, \quad (4.4)$$

<sup>1</sup>A dependência somente da menor dimensão entre os sub-espaços pode ser entendida pela decomposição de Schmidt, pois estamos lidando com um espaço global puro

onde

$$\xi(l, k) = \frac{1 - \frac{1}{l}}{1 - \frac{1}{k}}. \quad (4.5)$$

Observa-se que para o sub-sistema de maior dimensão surge a necessidade de se acrescentar um "termo de escala" menor que a unidade  $\xi(l, k)$ . Isso ocorre porque o sub-sistema de menor dimensão não é capaz de "roubar" toda a pureza do sistema de maior dimensão, em outras palavras, mesmo que os quantons estejam totalmente emaranhados, não é possível obter toda a informação sobre o quanton de maior dimensão realizando medidas no quanton de menor dimensão. Uma melhor interpretação desse fator  $\xi(l, k)$ , em termos da informação compartilhada entre os quantons será dada na sub-seção que se segue.

Para demonstrar 4.3, basta usar 4.2 e 3.10 para o subsistema A (dimensão  $l$ ):

$$\mathcal{C}_{\Psi}^2 + \mathcal{Q}_{\rho_A}^2 = \frac{l}{l-1} [1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_A^2)] + \frac{1}{l-1} [l \text{Tr}(\hat{\rho}_A^2) - 1] = 1.$$

A demonstração de 4.4 é simples se for observada a ação de  $\xi(l, k)$ .

#### 4.2.1 Interpretação de $\xi(l, k)$

A informação mútua compartilhada entre os dois subsistemas é dada por <sup>2</sup>:

$$S(A : B) = S(A) + S(B) - S(A, B).$$

Considerando a entropia linear, teremos para os subsistemas e o sistema composto <sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} S(A) &= 1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_A^2) \\ S(B) &= 1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_B^2) \\ S(A, B) &= S(\hat{\rho}_{\Psi}) = 1 - \text{Tr}\left(\left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Considere agora que o sistema esteja maximamente emaranhado, isto é,  $\mathcal{C}_{\Psi} = 1 \Rightarrow \text{Tr}(\hat{\rho}_A^2) = \text{Tr}(\hat{\rho}_B^2) = \frac{1}{l}$ . Teremos então para a máxima informação compartilhada entre os subsistemas:

$$S^{max}(A : B) = 2 \left(1 - \frac{1}{l}\right). \quad (4.6)$$

Agora imagine que, ao invés de estar completamente emaranhado com o subsistema A de dimensão  $l$ , o subsistema B esteja completamente emaranhado com um subsistema A' de

<sup>2</sup>Para o leitor que não esteja acostumado com teoria da informação é recomendada a leitura de [27].

<sup>3</sup>Este resultado para o sistema composto é esperado já que no caso ele é puro e, portanto, possui entropia (desinformação) nula.

dimensão igual a sua, isto é,  $\dim(\mathcal{H}_{A'}) = k$ . Então a informação compartilhada entre eles será:

$$S^{max}(A' : B) = 2 \left( 1 - \frac{1}{k} \right). \quad (4.7)$$

Desta forma, identificamos  $\xi(l, k)$  e somos capazes de dar uma interpretação para ele:

$$\xi(l, k) = \frac{S^{max}(A : B)}{S^{max}(A' : B)}. \quad (4.8)$$

Percebemos que  $\xi(l, k)$  representa uma quantificação (em termos de uma porcentagem) da máxima informação que o subsistema de maior dimensão é capaz de compartilhar com o subsistema de menor dimensão. Ou ainda, representa a proporção da máxima pureza que o sistema de menor dimensão consegue "roubar" do subsistema de maior dimensão.

## Capítulo 5

# Conclusão

Nesse trabalho estudamos a quantificação do princípio da complementaridade para interferômetros. Analisamos a Complementaridade entre as características de onda (Visibilidade), de partícula (Previsibilidade) e o emaranhamento (Concorrência) com um possível aparato de medida.

Vimos no capítulo 2 que, no caso em que o interferômetro possui dois caminhos/fendas e o detector também tem dimensão 2 (2 q-bits), essas grandezas se relacionam de forma complementar por uma igualdade "pitagórica" 2.14. Tal fato quantifica a complementaridade como proposta por Bohr em [9].

Em seguida, no capítulo 3, fizemos uma revisão da literatura sobre a generalização desta relação de complementaridade para interferômetros com  $n$  caminhos/fendas e detectores de dimensão também arbitrária (dois q-dits). Vimos que Jakob e Bergou em [20] generalizam a Previsibilidade e Visibilidade através dos geradores de  $SU(n)$  e discutem o caso em que há emaranhamento com outro subsistema. Usando a I-Concorrência generalizada [22], chegam a uma relação de complementaridade 3.19. Porém tal relação não é tão elegante quanto a igualdade "pitagórica" no caso de um sistema de dois q-bits. Já Durr, em [21], generaliza as fórmulas para a Visibilidade e Previsibilidade para um interferômetro de  $n$  fendas, obtendo fórmulas com conteúdo idêntico às obtidas por Jakob e Bergou, porém normalizadas à unidade, o que facilita sua interpretação e aplicabilidade experimental. Porém Durr não discute o caso em que há emaranhamento com um outro subsistema.

No capítulo 4, fizemos uma discussão sobre a normalização ou não dessas grandezas,

e estudamos o que acontece quando normalizamos também a I-Concorrência, no caso em que há emaranhamento com outro subsistema (por exemplo, um aparato de medida). Descobrimos que fazendo isso é possível obter uma fórmula para complementaridade entre a Previsibilidade, Visibilidade e Concorrência em um sistema quântico bipartido de dimensões discretas, finitas e arbitrárias (dois q-dits) que se assemelha à relação "pitagórica" obtida no caso de dois q-bits. Ao fazer isso surge naturalmente um termo de escala que chamamos de  $\xi(l, k)$ , onde  $l$  e  $k$  são as dimensões dos subsistemas.

As nossas relações de Complementaridade 4.3 e 4.4 não diferem em conteúdo da obtida por Jakob e Bergou em 3.19, mas facilitam a interpretação e aplicabilidade experimental. Assim, o próximo passo deste trabalho seria sugerir um experimento que pudesse testar as relações 4.3 e 4.4. Isso talvez possa ser feito usando fibras óticas para construir um interferômetro de  $n$  caminhos como o da figura 3.1.

# Apêndice A

## Conceitos Importantes

Nesse apêndice será feita uma revisão sobre temas importantes para a leitura desta dissertação. Serão abordados temas inerentes ao estudo de sistemas quânticos compostos. Grande parte do aqui presente foi inspirado na referência [34]. É necessário que o leitor esteja familiarizado com fundamentos de Mecânica Quântica, notação de Dirac, operador densidade e fundamentos de Álgebra Linear. Outro assunto importante para o bom entendimento dessa dissertação (que não será abordado nesse apêndice) é fundamentos de Informação Quântica, para tanto é recomendada a leitura de [27].

### A.1 Sistemas Quânticos Compostos

Sistemas quânticos compostos são aqueles constituídos de duas ou mais partes, como duas partículas de spin  $\frac{1}{2}$  (dois q-bits);  $n$  partículas de spin 1 ( $n$  q-trits); um átomo de hidrogênio com um próton e um elétron; ou ainda um elétron passando por uma fenda dupla com um detector de caminho nas fendas (também dois q-bits). Nesse trabalho serão tratados somente sistemas bipartidos com sub-sistemas de dimensões discretas e sistema global puro. O ente quântico (partícula, fóton, etc) caracterizado pelo sistema será chamado de quanton.

Considere  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  os espaços de Hilbert<sup>1</sup> dois subespaços tomados separadamente, com dimensões arbitrárias (mas finitas) e bases ortonormais  $\{|m^{(1)}\rangle\}, m = 1, 2, \dots, N_1$  e  $\{|n^{(2)}\rangle\}, n = 1, 2, \dots, N_2$ .

O espaço de Hilbert para o sistema composto é dado pelo produto tensorial dos subespaços:  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  e pode ser construído a partir das bases de  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ , isto é, qualquer vetor  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$  pode ser escrito como:

$$|\Psi\rangle = \sum_{m,n} |m^{(1)}\rangle \otimes |n^{(2)}\rangle \equiv \sum_{m,n} C_{mn} |mn\rangle.$$

Os produtos internos de  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  levam a um produto interno em  $\mathcal{H}$  dado por:

$$\langle mn|m'n'\rangle \equiv \langle m|m'\rangle \langle n|n'\rangle = \delta_{mm'}\delta_{nn'}. \quad (\text{A.1})$$

Assim, o produto interno de  $|\Psi\rangle$  com outro elemento de  $\mathcal{H}$ , digamos  $|\Psi'\rangle = \sum C'_{mn} |mn\rangle$ , será:

$$\langle \Psi|\Psi'\rangle = \sum_{m,n} C_{mn}^* C'_{mn} = \langle \Psi'|\Psi\rangle^*.$$

## A.2 Estados Emaranhados

Observe que todos os pares de estados pertencentes aos subespaços  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  fazem parte de  $\mathcal{H}$ , isto é, para todos os pares  $|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$  com  $|\phi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$  e  $|\phi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$  é fácil encontrar os coeficientes  $C_{mn}$ , basta escrever  $|\phi_1\rangle$  e  $|\phi_2\rangle$  nas bases  $\{|m^{(1)}\rangle\}$  e  $\{|n^{(2)}\rangle\}$ :

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle &= \sum_m \gamma_m |m^{(1)}\rangle, \quad |\phi_2\rangle = \sum_n \gamma_n |n^{(2)}\rangle \\ \Rightarrow |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle &= \sum_{m,n} \gamma_m \gamma_n |mn\rangle. \end{aligned}$$

Reciprocamente, um estado de  $\mathcal{H}$  poderá ser escrito na forma fatorada, isto é, como produto direto de estados das partições, se seus coeficientes de expansão  $C_{mn}$  forem da forma  $\gamma_m \gamma_n$ . Por exemplo, considerando o caso de dois q-bits, o estado  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |00\rangle)$  pode ser escrito como  $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes (|1\rangle + |0\rangle)$  e, portanto, é considerado um estado produto. Já o estado  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  não pode ser escrito de forma fatorada.

Os estados do espaço composto  $\mathcal{H}$  que não podem ser escritos de forma fatorada são chamados de **estados emaranhados**. Esta denominação foi dada por Schrodinger em 1936.

---

<sup>1</sup>Espaço vetorial completo, (isto é, toda sequência de Cauchy é convergente) com produto interno.

Para dois q-bits, os estados maximamente emaranhados<sup>2</sup> são os chamados estados de Bell:

$$\begin{aligned} |B_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|++\rangle + |--\rangle) , & |B_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) \\ |B_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle) & e & |B_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|++\rangle - |--\rangle) . \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A existência dos estados emaranhados se torna mais curiosa e assustadora se considerarmos o postulado do Colapso. A medida em um subsistema (quanton) faria com que o estado global colapsasse e então poderíamos inferir o estado do outro subsistema (quanton), independente de onde ele estiver, essa troca instantânea de informação, de caráter não local, incomodou (e incomoda) muita gente, levando Einstein, Podolski e Rosen a elaborarem o famoso paradoxo EPR [35], que anseia por caracterizar a Mecânica Quântica como teoria incompleta. Em 1964, Bell [36] desenvolveu suas famosas desigualdades, que tornaram passíveis de comprovação os caracteres de realidade e localidade da mecânica quântica. Para um apanhado histórico e melhor compreensão do assunto é aconselhável a leitura de [37].

### A.3 Traço Parcial e Operador Densidade Reduzido

Quando um estado  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  não está emaranhado, isto é, podemos escrevê-lo da forma fatorada  $|\Psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$ , então o estado de cada subsistema pode ser representado por seu respectivo vetor de estado  $|\phi_1\rangle$  ou  $|\phi_2\rangle$ . Mas e quando  $|\Psi\rangle$  for emaranhado? Como representar os subsistemas?

Para responder a essa pergunta, primeiramente lembre-se que o estado global, digamos  $|\Psi\rangle = \sum_{m,n} C_{mn} |mn\rangle$  também pode ser representado pelo seu operador densidade

$$\hat{\rho}_\Psi = \frac{|\Psi\rangle\langle\Psi|}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = \sum_{\substack{m,n \\ m',n'}} C_{mn} C_{m'n'}^* |mn\rangle\langle m'n'| \quad (\text{A.3})$$

de forma que o valor esperado de um observável  $\hat{O}$  é dado por  $\langle\hat{O}\rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}_\Psi\hat{O})$ . Calculemos então o valor esperado de um observável  $\hat{A}$  que atue somente no subespaço  $\mathcal{H}_1$ , isto é,  $\hat{A} = \hat{A}_1 \otimes \hat{\mathbb{1}}_2$ :

---

<sup>2</sup>O emaranhamento será quantificado nas seções seguintes.

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{A} \rangle &= \text{Tr} \left( \hat{A} \hat{\rho}_\Psi \right) = \sum_{m,n} \langle mn | \hat{A} \hat{\rho}_\Psi | mn \rangle \\
 &= \sum_{\substack{m,n \\ m',n'}} \langle mn | \hat{A}_1 \otimes \hat{\mathbb{I}}_2 | m'n' \rangle \langle m'n' | \hat{\rho}_\Psi | mn \rangle = \sum_{\substack{m,n \\ m',n'}} \langle mn | \left( | \hat{A}_1 m' \rangle \otimes | n' \rangle \right) \langle m'n' | \hat{\rho}_\Psi | mn \rangle \\
 &= \sum_{\substack{m,n \\ m',n'}} \langle m | \hat{A}_1 | m' \rangle \delta_{nn'} \langle m'n' | \hat{\rho}_\Psi | mn \rangle = \sum_{\substack{m,n \\ m'}} \langle m | \hat{A}_1 | m' \rangle \langle m'n | \hat{\rho}_\Psi | mn \rangle \\
 &= \sum_{m,m'} \langle m | \hat{A}_1 | m' \rangle \langle m' | \hat{\rho}_\Psi^{(1)} | m \rangle = \sum_m \langle m | \hat{A}_1 \hat{\rho}_\Psi^{(1)} | m \rangle \\
 &= \text{Tr}_1 \left( \hat{A}_1 \hat{\rho}_\Psi^{(1)} \right). \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

Onde  $\text{Tr}_1$  indica o traço sobre o subsistema 1 e  $\hat{\rho}_\Psi^{(1)}$  é a **matriz densidade reduzida** do subsistema 1, que é obtida tomando-se o traço parcial sobre o subsistema 2, isto é,

$$\langle m | \hat{\rho}_\Psi^{(1)} | m' \rangle \equiv \sum_n \langle mn | \hat{\rho}_\Psi | m'n \rangle, \tag{A.5}$$

ou explicitamente (usando A.3):

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_\Psi^{(1)} &\equiv \text{Tr}_2(\hat{\rho}_\Psi) \equiv \sum_{n''} \langle n'' | \hat{\rho}_\Psi | n'' \rangle \\
 &= \sum_{n''} \langle n'' | \left( \sum_{\substack{m,n \\ m',n'}} C_{mn} C_{m'n'}^* | mn \rangle \langle m'n' | \right) | n'' \rangle \\
 &= \sum_{\substack{m,n \\ m',n' \\ n''}} C_{mn} C_{m'n'}^* \delta_{n''n} \delta_{n''n'} | m \rangle \langle m' | \\
 &= \sum_{\substack{m,m' \\ n}} C_{mn} C_{m'n} | m \rangle \langle m' |.
 \end{aligned}$$

Por A.4, vemos que operador densidade reduzido  $\hat{\rho}_\Psi^{(1)}$  desempenha para o subsistema 1 o mesmo papel que o operador densidade  $\hat{\rho}_\Psi$  desempenha para o sistema global, nesse sentido pode-se dizer que  $\hat{\rho}_\Psi^{(1)}$  representa o subsistema 1. O subsistema 2 é tratado de forma análoga. Observe que o traço parcial sobre o subsistema 2 não depende da escolha particular da base de  $\mathcal{H}_2$ , de forma que o operador densidade reduzido  $\hat{\rho}_\Psi^{(1)}$  também não dependerá e a notação  $\hat{\rho}_\Psi^{(1)} = \text{Tr}_2(\hat{\rho}_\Psi)$  é justificada.

O operador densidade reduzido possui as mesmas propriedades de **hermiticidade**<sup>3</sup>, **não negatividade** e **unitariedade do traço** que o operador densidade global, porém nem sempre

<sup>3</sup>Portanto, autovalores reais.

o operador densidade reduzido é idempotente<sup>4</sup>, quando for, existirá um vetor pertencente ao subespaço em questão, digamos  $|\phi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ , tal que  $\hat{\rho}_\Psi^{(1)} = |\phi_1\rangle\langle\phi_1|$  e  $\hat{\rho}_\Psi^{(1)}$  representará o estado puro  $|\phi\rangle$ .

Veremos pela decomposição de Schimidt que se o estado global for puro, então os operadores densidade reduzidos dos subsistemas possuem os mesmos autovalores e, portanto, a idempotência de um implicará na idempotência do outro<sup>5</sup>, desta forma ambos os estados dos subespaços serão puros e poderão ser representados por vetores em  $\mathcal{H}_1(|\phi_1\rangle)$  e  $\mathcal{H}_2(|\phi_2\rangle)$ . Isso implicará que o estado global é fatorável ( $|\Psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$ ) e, assim, não emaranhado.

## A.4 Decomposição de Schmidt

Considere um sistema quântico puro, bipartido  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ , cujos subsistemas possuem dimensões arbitrárias de forma que (sem perda de generalidade)  $\dim(\mathcal{H}_1) \leq \dim(\mathcal{H}_2)$ . Sejam  $\{|m\rangle\}$  e  $\{|n\rangle\}$  bases de  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  respectivamente. O vetor de estado  $|\Psi\rangle$  pode ser escrito como a soma dupla:

$$|\Psi\rangle = \sum_{m,n} C_{mn} |mn\rangle,$$

onde  $C_{mn} = \langle mn|\Psi\rangle$  e  $\langle\Psi|\Psi\rangle = \sum |C_{mn}|^2 = 1$ .

A decomposição de Schimidt para o estado  $|\Psi\rangle$  trata-se de uma escolha (muito) particular de bases de  $\mathcal{H}_1(|\mu^{(1)}\rangle)$  e de  $\mathcal{H}_2(|\mu^{(2)}\rangle)$ , escolhidas especialmente para o estado global  $|\Psi\rangle$ , tal que a sua expansão se torne uma soma simples:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\mu} \gamma_{\mu} |\mu^{(1)}\rangle \otimes |\mu^{(2)}\rangle. \quad (\text{A.6})$$

Essas bases especiais são as bases dos autovetores dos operadores densidades reduzidos  $\hat{\rho}_\Psi^{(1)}$  e  $\hat{\rho}_\Psi^{(2)}$  e a soma simples só é possível porque esses operadores hermitianos, não negativos, de traço 1, possuem os mesmos autovalores. Esses fatos serão demonstrados a seguir.

O primeiro passo é obter os autovetores do operador densidade  $\hat{\rho}_\Psi^{(1)}$  do subespaço de menor dimensão  $\mathcal{H}_1$ . Como  $\hat{\rho}_\Psi^{(1)}$  é hermitiano, pelo Teorema Espectral, existe uma base ortonormal de  $\mathcal{H}_1$  formada pelos autovetores de  $\hat{\rho}_\Psi^{(1)}$ , digamos  $\{|\mu^{(1)}\rangle\}$ . As outras propriedades de  $\hat{\rho}_\Psi^{(1)}$  (não negatividade e traço unitário) garantem que seus autovalores (digamos,  $\{P_{\mu}\}$ ) sejam

<sup>4</sup>Isto é, um projetor. Ou seja,  $(\hat{\rho}_\Psi^{(1)})^2 = \hat{\rho}_\Psi^{(1)}$

<sup>5</sup>Um operador idempotente possui um autovalor igual a 1 e os demais nulos.

não negativos e somem 1. Resumindo:

$$\hat{\rho}_{\Psi}^{(1)} |\mu^{(1)}\rangle = P_{\mu} |\mu^{(1)}\rangle \quad (\text{A.7})$$

$$\langle \mu'^{(1)} | \mu^{(1)} \rangle = \delta_{\mu'\mu} \quad (\text{A.8})$$

$$\sum_{\mu} P_{\mu} = 1. \quad (\text{A.9})$$

Para obter a base ortonormal do espaço de maior (ou igual) dimensão  $\mathcal{H}_2$ , formada pelos autovetores de  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(2)}$ , será usada uma aplicação (que depende do estado global  $|\Psi\rangle$ )  $S_{\Psi} : \{|\mu^{(1)}\rangle\} \rightarrow \mathcal{H}_2$  definida em uma base ortonormal  $\{|n^{(2)}\rangle\}$  de  $\mathcal{H}_2$  por:

$$S_{\Psi} |\mu^{(1)}\rangle = \sum_n |n^{(2)}\rangle \langle \mu^{(1)} n^{(2)} | \Psi \rangle \equiv |\tilde{\mu}^{(2)}\rangle. \quad (\text{A.10})$$

A seguir será demonstrado que os vetores  $|\tilde{\mu}^{(2)}\rangle$  são autovetores de  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(2)}$  com autovalores iguais aos autovalores de  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(1)}$ .

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\Psi}^{(2)} |\tilde{\mu}^{(2)}\rangle &= \text{Tr}_1 (|\Psi\rangle\langle\Psi|) \left( \sum_n |n^{(2)}\rangle \langle \mu^{(1)} n^{(2)} | \Psi \rangle \right) \\ &= \sum_{\mu', n', n''} \langle \mu'^{(1)} n'^{(2)} | \Psi \rangle \langle \Psi | \mu'^{(1)} n''^{(2)} \rangle |n'^{(2)}\rangle \langle n''^{(2)} | \left( \sum_n |n^{(2)}\rangle \langle \mu^{(1)} n^{(2)} | \Psi \rangle \right) \\ &= \sum_{\substack{\mu', n', n'' \\ n}} \langle \mu'^{(1)} n'^{(2)} | \Psi \rangle \langle \Psi | \mu'^{(1)} n''^{(2)} \rangle \delta_{n''n} \langle \mu^{(1)} n^{(2)} | \Psi \rangle |n'^{(2)}\rangle \\ &= \sum_{n', \mu'} \overbrace{\sum_n \langle \mu'^{(1)} n'^{(2)} | \Psi \rangle \langle \Psi | \mu'^{(1)} n''^{(2)} \rangle}^{[\hat{\rho}_{\Psi}^{(1)}]_{\mu\mu'} = \langle \mu | \hat{\rho}_{\Psi}^{(1)} | \mu' \rangle = P_{\mu'} \delta_{\mu\mu'}} \langle \mu^{(1)} n^{(2)} | \Psi \rangle |n'^{(2)}\rangle \\ &= \sum_{n', \mu'} P_{\mu'} \delta_{\mu\mu'} \langle \mu^{(1)} n^{(2)} | \Psi \rangle |n'^{(2)}\rangle \\ &= P_{\mu} \sum_{n'} \langle \mu^{(1)} n^{(2)} | \Psi \rangle |n'^{(2)}\rangle \\ &= P_{\mu} |\tilde{\mu}^{(2)}\rangle. \quad \text{c. q. d.} \end{aligned}$$

Resta demonstrar que os autovetores  $\{|\tilde{\mu}^{(2)}\rangle\}$  de  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(2)}$  são ortogonais, de fato:

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\mu}'^{(2)} | \tilde{\mu}^{(2)} \rangle &= \sum_{n',n} \langle \Psi | \mu'^{(1)} n'^{(2)} \rangle \overbrace{\langle n'^{(2)} | n^{(2)} \rangle}^{\delta'_n n} \langle \mu^{(1)} n^{(2)} | \Psi \rangle \\
 &= \sum_n \langle \Psi | \mu'^{(1)} n^{(2)} \rangle \langle \mu^{(1)} n^{(2)} | \Psi \rangle \\
 &= \sum_n \langle \mu^{(1)} n^{(2)} | \Psi \rangle \langle \Psi | \mu'^{(1)} n^{(2)} \rangle \\
 &= [\text{Tr}_2(\hat{\rho}_{\Psi})]_{\mu\mu'} = \langle \mu | \hat{\rho}_{\Psi}^{(1)} | \mu' \rangle \\
 &= P_{\mu'} \delta_{\mu\mu'}. \quad \text{c. q. d.}
 \end{aligned}$$

Assim, os autovetores de  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(1)}$  são levados por  $S_{\Psi}$  aos autovetores de  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(2)}$ , com os mesmos autovalores. Mas a dimensão de  $\mathcal{H}_2$  pode ser maior que a de  $\mathcal{H}_1$ , e os restantes autovetores de  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(2)}$ ? Por A.9, a soma dos autovalores compartilhados é 1, portanto, devido as condições sobre  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(2)}$  de não-negatividade e traço unitário, os autovetores restantes de  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(2)}$  possuem autovalores nulos e pertencem ao seu núcleo.

Outra propriedade importante decorrente do fato dos operadores densidade compartilharem os mesmos autovalores é que, como  $\text{Tr} [(\hat{\rho}_{\Psi}^{(1)})^2] = \sum_{\mu} P_{\mu}^2$ , então<sup>6</sup>

$$\text{Tr} [(\hat{\rho}_{\Psi}^{(1)})^2] = \text{Tr} [(\hat{\rho}_{\Psi}^{(2)})^2]. \quad (\text{A.11})$$

Podemos então definir uma base ortonormal de  $\mathcal{H}_2$  normalizando  $\{\tilde{\mu}^{(2)}\}$ , isto é (para  $P_{\mu} \neq 0$ :

$$|\mu^{(2)}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{P_{\mu}}} |\tilde{\mu}^{(2)}\rangle \Rightarrow \langle \mu^{(2)} | \mu'^{(2)} \rangle = \delta_{\mu\mu'}.$$

Assim, o estado puro  $|\Psi\rangle$  terá a seguinte expansão, conhecida como **decomposição de Schimdt**:

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle &= \sum_{\mu,n} |\mu^{(1)} n^{(2)}\rangle \langle \mu^{(1)} n^{(2)} | \Psi \rangle = \sum_{\mu} |\mu^{(1)}\rangle \otimes |\tilde{\mu}^{(2)}\rangle \\
 &= \sum_{\mu} \sqrt{P_{\mu}} \left( |\mu^{(1)}\rangle \otimes |\mu^{(2)}\rangle \right). \quad (\text{A.12})
 \end{aligned}$$

Observe que se  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(1)}$  for idempotente<sup>7</sup>, então possui somente um autovalor não nulo e igual a 1, o mesmo ocorrerá com  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(2)}$ , que possui os mesmos autovalores, assim os estados dos subespaços  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  serão puros e a decomposição de Schimdt para o estado global será:

$$|\Psi\rangle = |\mu^{(1)} = 1\rangle \otimes |\mu^{(2)} = 1\rangle. \quad (\text{A.13})$$

<sup>6</sup>Lembrando que nesse caso o estado global é puro.

<sup>7</sup>Ou seja,  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(1)} = \left(\hat{\rho}_{\Psi}^{(1)}\right)^2$

Ou seja, o estado global  $|\Psi\rangle$  não será emaranhado. Por outro lado, é imediato que se  $|\Psi\rangle$  não for emaranhado então os estados dos subespaços serão puros e terão operadores densidades idempotentes. Desta forma, temos uma condição necessária e suficiente para o emaranhamento de um estado global puro, bipartido:

$$|\Psi\rangle \text{ emaranhado} \Leftrightarrow \hat{\rho}_{\Psi}^{(j)} \neq (\hat{\rho}_{\Psi}^{(j)})^2, \text{ onde } j \in \{1, 2\}. \quad (\text{A.14})$$

## A.5 Medidas de Emaranhamento

Pode-se pensar que o estado  $|\Psi\rangle$  está tão mais emaranhado quanto mais "diferente"  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(j)}$  é de  $(\hat{\rho}_{\Psi}^{(j)})^2$ , ou quanto mais distante  $\text{Tr} \left[ (\hat{\rho}_{\Psi}^{(j)})^2 \right]$  está de 1, já que o traço é independente da base em que os  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(j)}$ 's são representados. Assim, o emaranhamento nulo ocorre quando  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(j)}$  for puro, isto é, temos o máximo de informação possível sobre os subsistemas tomados separadamente, nesse caso,  $\text{Tr} \left[ (\hat{\rho}_{\Psi}^{(j)})^2 \right] = 1$ .

Por outro lado, o emaranhamento máximo ocorrerá quando  $\hat{\rho}_{\Psi}^{(1)}$  representar uma mistura estatística, isto é,

$$\hat{\rho}_{\Psi}^{(1)} = \frac{1}{\dim(\mathcal{H}_1)} \mathbb{I}^{(1)},$$

nesse caso possuímos o mínimo de informação possível dos subsistemas separadamente e

$$\text{Tr} \left[ (\hat{\rho}_{\Psi}^{(1)})^2 \right] = \text{Tr} \left[ (\hat{\rho}_{\Psi}^{(2)})^2 \right] = \frac{1}{\dim(\mathcal{H}_1)},$$

seu valor mínimo<sup>8</sup>.

### A.5.1 Medidas Entrópicas de Emaranhamento

Desta forma, como entropias medem incertezas associadas a sistemas, medidas entrópicas dos operadores densidades reduzidos são boas medidas de emaranhamento. Dois exemplos comuns de entropia são a **entropia linear**<sup>9</sup>:

$$S_1(\hat{\rho}_{\Psi}^{(j)}) = \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_{\Psi}^{(j)} \right] - \text{Tr} \left[ (\hat{\rho}_{\Psi}^{(j)})^2 \right] = 1 - \sum_{\mu} P_{\mu}^2, \quad (\text{A.15})$$

<sup>8</sup>Lembrando que  $\dim(\mathcal{H}_1) \leq \dim(\mathcal{H}_2)$ .

<sup>9</sup>Limitada e não aditiva

com alcance  $0 \leq S_1 \leq \frac{N-1}{N}$ , onde  $N$  é a dimensão do menor subespaço; e a **entropia de Von Neumann**<sup>10</sup>:

$$S_{vn}(\hat{\rho}_{\Psi}^{(j)}) = -\text{Tr} \left[ \hat{\rho}_{\Psi}^{(j)} \log_2 \left( \hat{\rho}_{\Psi}^{(j)} \right) \right] = \sum_{\mu} P_{\mu} \log_2 (P_{\mu}), \quad (\text{A.16})$$

com alcance  $0 \leq S_{vn} \leq \log_2(N)$ .

Para um bem fundamentado estudo sobre entropias e teoria da informação quântica é aconselhada a leitura de [27].

### A.5.2 Concorrência

Para sistemas de dois q-bites, uma simples medida de emaranhamento é a Concorrência ([18], [19]), intimamente relacionada com a entropia linear.

Considere um estado puro  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ , com  $\dim(\mathcal{H}_1) = \dim(\mathcal{H}_2) = 2$ . a Concorrência de  $|\Psi\rangle$  é definida por:

$$C_{\Psi} = \sqrt{2 \left[ 1 - \text{Tr} \left( \left( \hat{\rho}_{\Psi}^{(j)} \right)^2 \right) \right]}, \text{ com } j \in \{1, 2\}, \quad (\text{A.17})$$

possuindo valores entre 0 e 1. Um bom exercício é verificar a unitariedade da Concorrência para os estados de Bell A.2.

Para um melhor estudo sobre sistemas quânticos compostos e emaranhamento, que inclui casos em que o sistema global não é puro, é aconselhável a leitura de [34].

---

<sup>10</sup>Não limitada e aditiva

# Referências Bibliográficas

- [1] G. Taylor, Proc. Camb. Phil. Soc. 15, 114 (1909).
- [2] A. J. Dempster e H. F. Batho, Phys. Rev. 30, 644 (1927).
- [3] G. Moellenstedt e C. Joesnsson, Zeitschrift fuer Physik A Hadrons and Nuclei 155, 472 (1959).
- [4] A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki, e H. Ezawa, Am. J. Phys. 57, 117 (1989).
- [5] A. Zeilinger, R. Gahler, C. G. Shull, W. Treimer, e W. Mampe, Rev. Mod. Phys. 60, 1067 (1988).
- [6] U. Eichmann, J. C. Bergquist, J. J. Bollinger, J. M. Gilligan, W. M. Itano, D. J. Wineland, e M. G. Raizen, Phys. Rev. Lett. 70, 2359 (1993).
- [7] O. Carnal e J. Mlynek, Phys. Rev. Lett. 66, 2689 (1991).
- [8] M. Arndt, O. Nairz, J. Voss-Andreae, C. Keller, G. V. der Zouw, e A. Zeilinger, Nature 401, 680 (1999).
- [9] N. Bohr, Naturwiss. 16, 245 (1928).
- [10] W. K. Wothers e W. H. Zurek, Phys. Rev. D 19, 473 (1979).
- [11] L. S. Bartell, Phys. Rev. D 21, 1698 (1980).
- [12] D. M. Greenberger e A. Yasin, Phys. Lett. A 128, 391 (1988).
- [13] L. Mandel, Opt. Lett. 16, 1882 (1991).
- [14] G. Jaeger, A. Shimony, e L. Vaidman, Phys. Rev. A 51, 54 (1995).

- [15] B. G. Englert, Phys. Rev. Lett. 77, 2154 (1996).
- [16] B. G. Englert e J. A. Bergou, Opt. Comm. 179, 337 (2000).
- [17] M. Jakob e J. Bergou, *Quantitative complementarity relations in bipartite systems*. Optics Communications, Vol 283, (2010); e arXiv.org, e-print quant-ph/0302075 (2003).
- [18] W. K. Wootters, Phys. Rev. Letters 80, 2245 (1998).
- [19] W. K. Wootters, Quantum Inf. Comput. 1, 27 (2001).
- [20] M. Jakob e J. Bergou *Complementarity and entanglement in bipartite qudit systems*. Phys. Rev. A, Vol 76, 052107 (2007).
- [21] S. Durr *Quantitative wave-particle duality in multibeam interferometers*. Phys. Rev. A, Vol 64, 042113 (2001).
- [22] P. Rungta, V. Buzek, C.M. Caves, M. Hillery, and G. J. Milburn, Phys. Rev. A, Vol 64, 042315 (2001).
- [23] Zehnder, Ludwig "*Ein neuer Interferenzrefraktor*". Zeitschrift für Instrumentenkunde 11: 275285 (1891).
- [24] Gallagher, Thomas *Rydberg Atoms*. Cambridge University Press. ISBN 0-521-02166-9. (1994).
- [25] E.T. Jaynes, F.W. Cummings. "*Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*". Proc. IEEE 51 (1): 89109 (1963)
- [26] Bloch, Felix . "*Nuclear induction*". Phys. Rev. 70(7-8) (460). (1946)
- [27] Cunha, M. O. T. . *Noções de Informação Quântica*, Rio de Janeiro: IMPA-SBM, 2007. v. 1. 114p.
- [28] R. Alicki e K. Lendi, *Quantum Dynamical Semigroups and Application*, Lecture Notes in Physics, Vol. 286 (Springer-Verlag, Berlin, 1987).
- [29] G. Mahler e V. A. WeberruB, *Quantum Networks* (Springer-Verlag, Berlin, 1995).
- [30] M. S. Byrd and e N. Khaneja, Phys. Rev. A 68, 062322 (2003).

- [31] Kimura, Kossakowski, *The Bloch Vector Space for N-Level Systems: the Spherical-Coordinate Point of view*, Open Systems Information Dynamics 12, 3 (2005), 207-229.
- [32] Byrd, Khaneja, *Characterization of the positivity of the density matrix in terms of the coherence vector representation*, Phys. Rev. A 68, 062322 (2003).
- [33] Māris Ozols, Laura Mancinska, *Generalized Bloch Vector and the Eigenvalues of a Density Matrix*, Dissertação de Mestrado, University of Latvia, Latvia.
- [34] A. F. R. de Toledo Piza, *Sistemas Quânticos Compostos e Emaranhamento* Instituto de Física, Universidade de São Paulo, <https://fma.if.usp.br/piza/EFT/2009.pdf> (2009)
- [35] A. Einstein, B. Podolski and N. Rosen, Phys. Rev. 47, 777 (1935).
- [36] J. S. Bell, Physics 1, 195 (1964). Reproduzido em J. S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge U Press, Cambridge (1987).
- [37] Salinas, Silvio R. A., Hussein, Mahir S., *100 Anos de Física Quântica*, Livraria da Física.