

**Propagação de feixes ópticos de correlação
em atmosfera turbulenta**

Marcelo Vítor da Cunha Pereira

28 de Outubro de 2014

Propagação de feixes ópticos de correlação em atmosfera turbulenta

Marcelo Vítor da Cunha Pereira
Orientador: Prof. Carlos Henrique Monken

Financiado pela Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
(CNPq)

e pela

Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais
(FAPEMIG)

Tese apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para
a obtenção do grau de doutor em Física.

28 de Outubro de 2014

Aos meus pais, Walter e Telma.

RESUMO

A turbulenta mistura de ar a diferentes temperaturas faz com que o índice de refração na atmosfera varie aleatoriamente. Juntamente com o espalhamento por neblina, essa flutuação figura entre os maiores obstáculos na transmissão de informação pelo ar com feixes ópticos. Nesta tese introduz-se um método passivo de atenuação das distorções geradas pela atmosfera, através do uso de feixes de correlação: entidades que descrevem correlações entre fótons e que se propagam formalmente como feixes típicos. A escolha correta das correlações mitiga algumas das aberrações mais severas e permite a codificação de informação em boa aproximação imune às flutuações.

Os modelos são demonstrados através de simulações de Monte Carlo e de um experimento em que a turbulência é gerada em laboratório com uma câmara emuladora e o feixe de correlação criado por meio do processo de conversão paramétrica descendente espontânea.

Uma das propriedades espaciais do feixe de correlação, a paridade, mostra-se particularmente robusta às flutuações e uma proposta de experimento é apresentada que explora essa capacidade. Estudos são feitos também acerca das outras implicações de um feixe de correlação robusto, que indicam que há ao menos uma contrapartida indesejável: a redução no sinal coletado por um receptor.

ABSTRACT

The turbulent mixing of air at different temperatures turns the refractive index of air in the atmosphere into a randomly varying quantity. Together with scattering by fog, this fluctuation figures among the greatest obstacles in information transmission through free-space optics. In this thesis, a passive method is introduced that attenuates the distortions created by the atmosphere through the use of correlation beams: entities which describe photon correlations and propagate formally as regular beams. The correct choice of correlation mitigates some of the most severe aberrations and allows for information coding immune to the fluctuations up to good approximation.

The models are demonstrated via Monte Carlo simulations and through an experiment in which turbulence is generated in the lab with a turbulence emulating chamber and the correlation beam is created using spontaneous parametric down-conversion.

One of the correlation beam's spatial properties, parity, is shown to be particularly robust against the fluctuations and an experimental proposal is presented that exploits this capability. Investigations are done concerning other implications of a robust correlation beam, which indicate at least one drawback: a reduction in the overall signal collected by a receiver.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Luz e comunicação	1
1.2	Turbulência atmosférica	3
1.3	Engenharia da fonte	6
1.4	Sumário da tese	7
2	Turbulência óptica	9
2.1	A teoria de Kolmogorov	9
2.2	Flutuação do índice de refração	13
2.2.1	Propagação de um feixe sob turbulência óptica	15
2.2.2	Alargamento do feixe	18
2.3	Emulador de turbulência	20
2.4	Simulação de Monte Carlo	23
	Apêndice 2A: Segundo momento de um feixe em atmosfera turbulenta	28
	Apêndice 2B: Conversão de parâmetros da simulação	31
3	Cancelamento de aberrações	33
3.1	Feixes de correlação e CPDE	33
3.1.1	Equações de Wolf	33
3.1.2	Conversão paramétrica descendente espontânea	34
3.1.3	Função de onda da CPDE	35
3.2	Propagação do bifóton na turbulência	39
3.3	Simulações	41
3.4	Experimento	42
3.4.1	Medições em coincidência	43
3.4.2	Medição direta da intensidade do He-Cd e do He-Ne	45
3.4.3	Resultados	45
4	Conservação de paridade espacial e cintilação	51
4.1	Conservação da paridade espacial	51
4.1.1	Proposta de experimento	53
4.2	Condições para conservação	56
4.3	Potência coletada e cintilação	60
4.3.1	Potência coletada	61

4.3.2 Cintilação	65
Apêndice 4A: Função de Wigner para a fluorescência da CPDE	70
Apêndice 4B: Aproximação da função $\tilde{\mathcal{V}}$ e largura de \mathcal{V}	71
5 Conclusão	73
Bibliografia	76

Capítulo 1

Introdução

1.1 Luz e comunicação

O fotofone, invenção de Alexander Graham Bell e patenteado em 1880, é possivelmente um dos primeiros dispositivos modernos em que a luz é usada para transmitir informação (neste caso som) a longas distâncias¹. O aparelho refletia a luz do sol com um espelho plano flexível que se tornava alternadamente côncavo e convexo em resposta ao som e com isso modulava a intensidade da luz que chegava ao receptor. Este, em sua forma original, era um material escuro que ao absorver luz modulada vibrava e gerava novamente o som que se queria transmitir. Embora engenhoso, o fotofone não explorava a imensa capacidade de transmissão de informação que ondas ópticas possibilitam e que despertaram o interesse das empresas de telecomunicação nos anos 60.

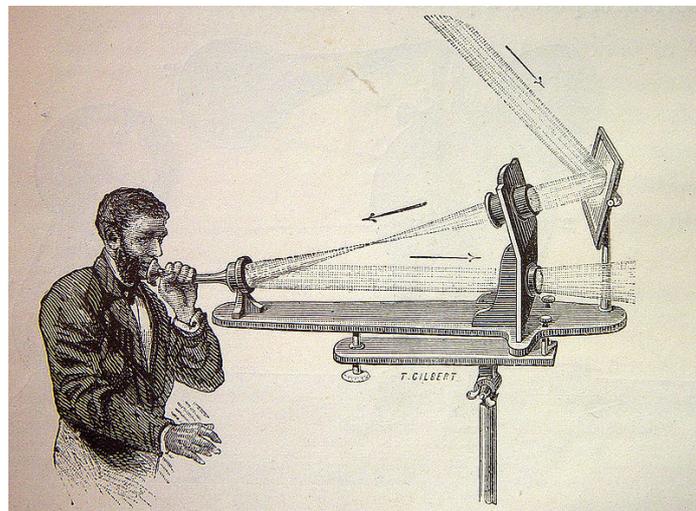


Figura 1.1: Fotofone inventado por Alexander Graham Bell e seu assistente Charles Sumner Tainter em 1880.

¹No Brasil, uma versão modificada do aparelho foi construída em 1894 pelo padre Landell de Moura [1].

A onda que carrega a informação a ser transmitida é chamada de sinal portador e a informação é codificada modulando sua amplitude, frequência ou fase. Em princípio não é possível modular o sinal portador a taxas maiores que sua própria frequência, se se deseja que a informação seja reconhecida no receptor (desmodulada). Isso está ilustrado nos gráficos da figura 1.2. O sinal portador (curvas senoidais no topo) tem sua amplitude modulada pelo sinal ao centro de acordo com os bits que se deseja enviar (representados pela sequência de zeros e uns sobre o sinal modulador) e, por efeito de um ruído branco aditivo, toma a forma da curva de baixo. No gráfico à esquerda, a modulação de amplitude ocorre a 1/4 da frequência do sinal portador, enquanto no gráfico à direita a razão é de 3. Note-se no último que, por exemplo, pouco se pode distinguir entre os sinais correspondentes ao terceiro e quarto bits, respectivamente “0” e “1”. A informação codificada se torna, logo, eventualmente ambígua e por conseguinte irre recuperável.

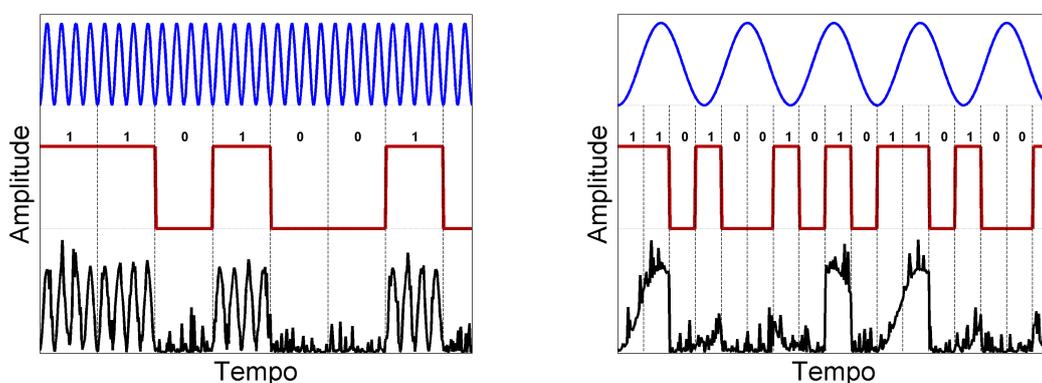


Figura 1.2: Modulação da amplitude do sinal portador (curva azul no topo), codificando uma série de bits. No gráfico à esquerda uma modulação a 1/4 da frequência do portador permite recuperação da série. À direita, devido a uma modulação com frequência 3 vezes maior que a do portador, a informação codificada se torna por vezes ambígua.

Frequências mais altas do sinal portador portanto possibilitam maiores taxas de transmissão de informação, um dos motivos pelos quais telecomunicação de longa distância se baseia largamente em frequências ópticas (especificamente pelo uso de fibras ópticas).

Respeitada a frequência máxima de modulação, no entanto, a taxa de transmissão de informação está diretamente ligada não à frequência do sinal portador, mas sim à *largura* da faixa de frequências usada pelo sinal de modulação [2, p. 232], chamada largura de banda. De fato, uma única banda (“banda C”) na chamada janela de telecomunicação, a faixa de comprimentos de onda próxima a 1550 nm para a qual absorção nas fibras de sílica fundida é a menor possível, possui largura de cerca de 4 THz, contra 60 GHz para a maior banda de microondas (“banda D”). Usando multiplexação por divisão densa de comprimentos de onda, em que faixas de comprimento

de onda de cerca de 0.8 nm de largura são tratadas como canais independentes de comunicação, cada um dos cerca de 40 canais disponíveis na “banda C” já atinge 100 GHz de largura.

Mesmo na ausência de guias de ondas como fibras ópticas, a alta frequência e conseqüente menor divergência por difração dos feixes de luz transmitidos oferece inúmeras vantagens para, por exemplo, comunicação entre satélites [3, 4]: sistemas menores, mais leves, que consomem menos energia e sofrem menos interferência por sinais espúrios².

1.2 Turbulência atmosférica

O grande entrave para o uso de ondas ópticas em comunicação sem guias de ondas é o clima. Neblina, nuvens e aerossóis atenuam os sinais, por absorção ou espalhamento, a ponto de impossibilitar transmissões. E, ainda que se lide com uma atmosfera límpida, flutuações do índice de refração que decorrem do permanente estado de turbulência nas correntes de ar [6] são suficientes para degradar seriamente os sinais enviados. São flutuações locais da ordem de $\delta n = 10^{-6}$, mas que acumuladas ao longo de todo o canal de transmissão geram desvios, distorções e cintilações. O cintilar das estrelas ou as trepidações de imagens próximas ao asfalto quente são manifestações comuns desses efeitos.

Pode-se ver nas imagens da figura 1.3, que registram os efeitos da passagem de um feixe de laser de He-Cd pelo ar turbulento³, um exemplo das típicas e severas distorções deflagradas pelas flutuações. Vê-se um feixe de perfil inicialmente gaussiano (imagem à esquerda) que, após se propagar pelo canal de índice de refração aleatório, aparece deslocado e distorcido se observado em curta exposição (ao centro) e alargado se observado em longa exposição (à direita).

Os efeitos da turbulência atmosférica são o principal motivo pelo qual observatórios astronômicos são construídos em locais áridos e de grandes altitudes (~ 5 km) e instrumentos astronômicos são lançados em satélites artificiais. Trajetórias verticais, contudo, são comparativamente menos deletérias do que as horizontais próximas ao solo, para as quais poucos quilômetros são suficientes para deflagrar as distorções mais severas [7, p. 1324]. Ainda assim, dispositivos de comunicação baseados em óptica sem guias de onda são comercializados [8, 9]. O custo de instalação de fibras ópticas é por vezes proibitivo, especialmente para instalação dos trechos finais entre pontos de distribuição e as casas ou empresas, um problema conhecido na literatura técnica americana [10, p. 16] como da “última milha”, e sistemas de comunicação

²Note-se porém que a menor divergência impõe fortes restrições sobre o alinhamento dos feixes, sendo importantes correções em tempo real que compensem tanto a trajetória dos satélites quanto suas vibrações. Esta dificuldade, entre outras, explica o porquê da baixa adoção comercial desses sistemas em relação aos de microondas mesmo após quase 40 anos de testes de viabilidade [5]. A alta demanda por maiores taxas de transmissão torna a sua adoção progressivamente mais certa.

³Esta medição foi feita em laboratório utilizando uma câmara com a qual emulamos os efeitos da atmosfera (ver seção 2.3).

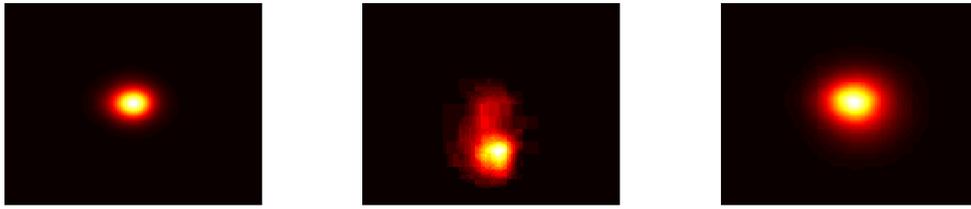


Figura 1.3: Efeito da turbulência atmosférica sobre a irradiância de um feixe. À esquerda o feixe de referência, sem influência da turbulência, ao centro uma imagem de curta exposição mostrando deslocamento e distorção e à direita o efeito acumulado da turbulência em uma imagem de longa exposição.

pelo ar capitalizam a demanda não suprida.

Os efeitos que persistem em observatórios terrestres podem ainda ser mitigados de várias maneiras através dos chamados métodos de “Speckle Imaging” [11, cap. 9]. Um deles, conhecido como “Lucky Imaging”, consiste em adquirir muitas imagens de curta exposição de um setor fixo do céu, filtrar apenas aquelas que sofreram distorções particularmente fracas (o que se pode medir através do contraste da imagem ou do brilho de uma estrela de referência [12]), e justapo-las, removendo a translação lateral variável causada pela atmosfera.

Correções feitas via pós-processamento, como essas, servem bem a aplicações astronômicas mas nem sempre a sistemas de comunicação, para os quais acumular dados antes de se extrair informação incorre em períodos de latência. Ainda, há certos métodos que podem e são usados [13], como “Interleaving”. Considere a cintilação, por exemplo. Este efeito em particular representa um sério problema em sistemas de comunicação: um canal cuja taxa de transmissão atinge 2.5 Gbps (gigabits por segundo), como é típico [13, 14], terá 2.5×10^6 bits perdidos durante um rotineiro desaparecimento de sinal que dura 1 ms [15]. O método de “interleaving” consiste em separar temporalmente bits de informação adjacentes e intercalá-los com bits inicialmente separados. Como ilustração, considere um operador que espera receber uma das duas seguintes mensagens

- ATACAR O POSTO.
- ATACAR O FORTE.

mas, por ação da turbulência, as cinco últimas letras não chegam ao detector. A situação está ilustrada na figura 1.4, onde os quadrados cinzas contêm os caracteres que não chegam ao detector. No primeiro caso, não há como distinguir quais das duas mensagens foi enviada. No segundo, devido ao embaralhamento dos caracteres, há como determinar se a última palavra é FORTE ou POSTO.

Outra forma de dirimir os efeitos degradantes da turbulência é a escolha da geometria da montagem. O local do observatório é uma tal escolha no caso da astronomia. Para comunicação é comum o uso de *diversidade espacial*: múltiplos emissores e/ou

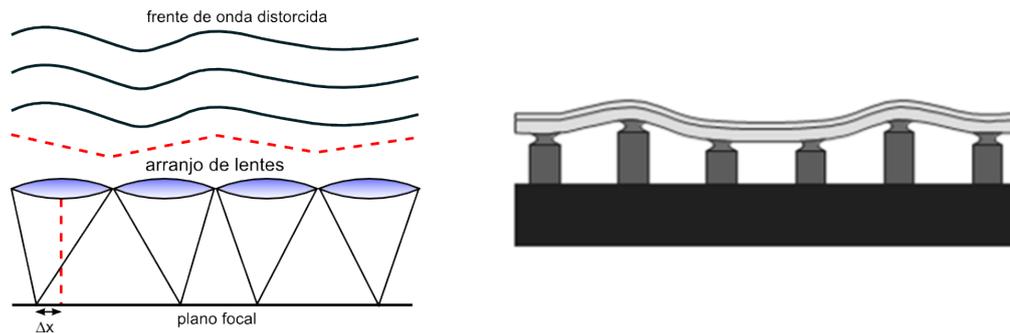


Figura 1.5: Óptica adaptativa: um sensor como o de Shack-Hartmann (à esquerda) determina a distorção na frente de onda que se compensa, por exemplo, com um espelho deformável (à direita).

no aumento de complexidade do sistema de detecção/transmissão e impõe restrições sobre seu tempo de resposta.

1.3 Engenharia da fonte

Em contraste com a astronomia, sistemas de comunicação dispõem de uma vantagem fundamental: a habilidade de manipular o emissor do campo. Isso permite, como mencionado, pré-compensar as distorções da turbulência alterando o perfil de emissão ou, tomando-se o caminho que é o escopo desta tese, arquitetar fontes naturalmente mais resistentes às degradações.

Há muitas maneiras de se codificar informação em campos propagantes e tipicamente isso é feito com a chamada óptica de segunda ordem, em que manipulações são efetuadas sobre os campos eletromagnéticos e ao fim detectadas por algum sensor cuja resposta depende do módulo quadrado desses campos (isto é, em segunda ordem no campo). A alternativa proposta e detalhada aqui recorre à codificação usando óptica de quarta ordem, isto é, informação que se acessa através de sinais cuja dependência é de quarta ordem no campo elétrico. A extração de informação via óptica de quarta ordem foi inaugurada nos trabalhos seminais de Hanbury-Brown e Twiss [20, 21], em que se demonstrou uma maneira mais eficaz [22, seção 9.10] de se fazer interferometria estelar [22, seção 7.2]. O sinal que se mede é o resultado da correlação de sinais de dois fotodiodos - cada um dependendo do módulo quadrado do campo - e portanto possui dependência em quarta ordem no campo.

Em terminologia quântica, pode-se dizer que a informação é codificada nas correlações entre fótons, não nos fótons em si. Grosso modo, o fato de dois fótons idênticos propagando-se simultaneamente pela atmosfera sofrerem as exatas mesmas perturbações permite que a correlação entre eles se mantenha.

O uso de correlações como forma de atenuar ou dirimir efeitos indesejáveis já fora utilizado outras vezes em situações diversas. Cito aqui tomografia quântica de coerência óptica [23], cancelamento de efeitos de dispersão [24, 25] e de aberrações

espaciais [26, 27]. Em particular o último efeito está diretamente relacionado com o resultado a ser exposto no capítulo 3. Correlações quânticas possibilitam em algumas situações um cancelamento mais completo das perturbações [28] do que o que se pode conseguir com fontes clássicas⁶.

Finalmente, a atenuação das distorções abre a possibilidade de se codificar informação no perfil transversal de irradiância da luz. Sabe-se que a polarização de um fóton é apenas marginalmente afetada⁷ pela turbulência atmosférica [31]. Ela, no entanto, habita um espaço bidimensional, em comparação com o espaço de dimensão infinita necessário na descrição dos modos espaciais [32], e logo tem menor potencial para carregar em si informação. Naturalmente, modos de ordem mais alta de uma família de distribuições ortogonais são mais divergentes [33], o que traz a necessidade de maior abertura numérica do sistema de transmissão e detecção. Ainda assim, se os diferentes modos espaciais forem tratados como canais independentes de comunicação, como diferentes faixas de frequência o são na multiplexação por divisão de comprimento de onda, um número n de modos potencialmente implicará uma multiplicação da taxa de transmissão de informação por n . Este conceito foi demonstrado em fibras ópticas de poucos modos usando três [34] e quatro [35] modos de propagação e em propagação livre e sem turbulência usando quatro modos [36], com taxas de transmissão da ordem de Terabits por segundo. Por fim, há na literatura [37, 38, 39] investigações experimentais sobre o efeito da turbulência na multiplexação de modos espaciais associados a momentos angulares orbitais definidos [40].

Em situações normais, em que óptica de segunda ordem é usada, independentemente da família de modos usada e para turbulências suficientemente fortes, apenas um modo será coletado no receptor [41]. As flutuações de índice de refração fazem com que modos originalmente ortogonais se sobreponham de tal modo a torná-los indistinguíveis. Apenas com a mencionada atenuação dos efeitos de distorção, através da óptica de quarta ordem, e uma escolha adequada dos modos de transmissão torna-se possível resguardar a ortogonalidade dos modos.

1.4 Sumário da tese

O capítulo 2 trata das bases da teoria de turbulência de Kolmogorov, como ela afeta campos ópticos propagantes, além de como emulá-la em laboratório e simular seus efeitos através de rotinas computacionais.

Primeiramente, a formulação da teoria de turbulência é descrita de forma simplificada, baseando-se primariamente no trabalho de Tatarski [6] e os mecanismos através dos quais se forma um regime de turbulência no campo de velocidade da atmosfera são enunciados. A propagação de um feixe não depende diretamente da velocidade do

⁶A distinção entre fontes clássicas e quânticas se faz entre campos que admitem ou não uma descrição pelo formalismo puramente clássico [29], [22, p. 625].

⁷A despolarização é pequena apenas em atmosfera límpida. Nuvens de gelo, não raras na atmosfera, podem gerar despolarizações de até 45% e de fato esse efeito é usado na sua prospecção [30].

ar, mas a mistura de porções a diferentes temperaturas que o constante fluxo gera faz com que sua densidade varie erráticamente e portanto também o índice de refração.

Os efeitos ópticos de um índice de refração aleatório são calculados como em [42], com particular atenção ao alargamento aparente que se percebe em imagens de longa exposição, tomando-se idéias de Gbur e Wolf [43, 44].

Como alternativa a experimentos de campo com longas propagações e maior estrutura, descrevemos em seguida uma maneira de emular em laboratório alguns dos efeitos de turbulência, induzindo artificialmente uma mistura de porções de ar a diferentes temperatura. O método emprega ventiladores e aquecedores em uma câmara de alumínio, por onde são feitos propagar os feixes de interesse [45].

Por fim, modelos e rotinas de simulação são introduzidos, largamente fundamentados sobre o trabalho de Schmidt [46], e que servem ao longo da tese como validadores da teoria apresentada, esta muitas vezes intratável analiticamente.

O texto do capítulo 3 objetiva introduzir ao leitor a idéia de um feixe de correlação, a teoria de conversão paramétrica descendente espontânea de modo sucinto (descrições completas da teoria são encontradas em profusão na literatura [47, 48, 49]), o modelo para sua propagação e com ele uma importante constatação de que feixes dessa natureza podem ser usados de maneira a mitigar efeitos indesejáveis da turbulência. A conjectura é em seguida testada em um experimento descrito em detalhes, que faz uso da câmara de turbulência, e cujos resultados são comparados com os de simulações de Monte Carlo. O mesmo resultado pode ser encontrado, com menos detalhes, em [50].

No capítulo 4, apresenta-se um estudo de viabilidade do uso de feixes de correlação em sistemas de comunicação, tendo como foco uma particular implementação das idéias do capítulo 3: o uso da paridade espacial como forma de codificar informação. A paridade dos feixes de correlação é mostrada como, sob certas aproximações, imune aos efeitos da turbulência e uma proposta de experimento é formulada que explora essa capacidade.

Algumas das presumidas aproximações são em seguida relaxadas e suas implicações debatidas. Em específico, argumenta-se como o forte cancelar dos efeitos implica contra-partidas indesejáveis na performance dos sistemas, como reduzida potência de sinal coletado. Adicionalmente, mostra-se como a aparente diminuição da cintilação de feixes de correlação é praticamente ofuscada por outras flutuações.

Por fim, conclusões sobre o presente trabalho são apresentadas bem como potenciais direções de pesquisa, dando conta do vasto e inexplorado campo que, espera-se, reste demonstrado aqui como promissor.

Todas as rotinas usadas para geração dos gráficos presentes nesta tese (diferentes daquelas utilizadas para implementar as simulações de Monte Carlo) podem ser encontradas em [51].

Capítulo 2

Turbulência óptica

A maneira estatística como se deve descrever o efeito da turbulência atmosférica sobre a luz será introduzida nesse capítulo, seguindo em boa medida os trabalhos de Tatarski [6] e de Fante [42]. A câmara de turbulência, baseada em [45], com a qual se emulou estes mesmos efeitos é em seguida descrita, antes de finalmente serem introduzidas as rotinas de simulação de Monte Carlo que nos permitem [46] uma maneira alternativa de aferir os modelos usados.

2.1 A teoria de Kolmogorov

A condição para que um fluido descreva movimentos turbulentos é que o seu número de Reynolds seja suficientemente grande. Este é um número adimensional definido por

$$Re_\ell = \frac{\text{Energia cinética}}{\text{Energia dissipada}} \approx \frac{V\ell}{\nu}, \quad (2.1.1)$$

onde V é a velocidade de escoamento do fluido, ℓ sua dimensão linear e ν a sua viscosidade cinemática (com unidades de m^2/s). Um alto número de Reynolds descreve um fluxo do qual, de toda sua energia cinética, apenas uma pequena parte é perdida por dissipação pela viscosidade. Regimes turbulentos de velocidade são desencadeados por flutuações que, pouco ou nada suprimidas por processos dissipativos, geram flutuações em outras escalas. A teoria de Kolmogorov, descrita abaixo, se baseia na constatação de que flutuações de velocidade, que aparecem naturalmente no escoamento do ar, não se dissipam em razão da sua baixa viscosidade. Turbilhões de larga escala, oriundos de variações topológicas e climáticas, transferem parte de sua energia a turbilhões de escalas gradativamente menores, até que a dissipação viscosa cesse injeções de energia em flutuações de escalas ainda menores. É necessário portanto que o número de Reynolds seja suficientemente grande ao menos em uma faixa de dimensões em que o escoamento ocorre.

A equação que descreve a dinâmica do fluido, a equação de Navier-Stokes, é não-linear e notoriamente sensível às condições de contorno [52]. Logo, o quão grande Re deve ser para satisfazer a condição de turbulência depende do sistema que se descreve. Em um cano cilíndrico, por exemplo, números de Reynolds acima de 4000

correspondem a fluidos turbulentos [53, p. 207]. No caso da atmosfera, substituindo os valores $1 \text{ m/s} < V < 20 \text{ m/s}$, $10 \text{ m} < \ell < 1000 \text{ m}$ e $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ teremos um número de Reynolds que satisfaz

$$10^6 < Re < 10^{10}, \quad (2.1.2)$$

sugerindo que o regime de turbulência é a situação típica na atmosfera, o que de fato se verifica empiricamente.

No caso da atmosfera, a turbulência é considerada totalmente consolidada e o movimento das massas de ar é extremamente irregular; o tratamento do campo de velocidades no ar deve assim ser estatístico. Ainda hoje não se descobriu como derivar, à partir de equações fundamentais, modelos tratáveis nesse regime. No entanto, a partir da observação e de considerações físicas, Kolmogorov, em seu artigo de 1941 (traduzido do russo em [54]), fundou algumas das bases para a teoria de turbulência atmosférica atual. Descreve-se abaixo qualitativamente a dinâmica da turbulência consolidada, segundo as considerações de Kolmogorov:

- Uma componente da velocidade do fluido v é descrita pela soma da velocidade média $\langle v \rangle$ e da parte v_ℓ que flutua $v(\mathbf{r}) = \langle v \rangle(\mathbf{r}) + v_\ell(\mathbf{r})$.
- A componente flutuante v_ℓ existe em uma região de tamanho ℓ e o campo total v se compõe de uma superposição de diversas componentes v_ℓ associadas a regiões de diferentes ℓ .
- Vemos em (2.1.1) que o tamanho ℓ entra na definição do número de Reynolds Re_ℓ para aquela escala específica, e que quanto menor ℓ , menor Re_ℓ , o que significa que quanto menor a escala, mais importante se torna o efeito da dissipação pela viscosidade.
- A energia cinética associada a regiões de escala maiores é transferida para regiões menores até que a energia se dissipe, por efeito da viscosidade do ar, na região com tamanho ℓ_0 - a chamada escala interna da turbulência, tipicamente da ordem de alguns milímetros [55, 56].
- Como para números de Reynolds altos a viscosidade tem pouca importância, a taxa de transferência de energia ϵ por unidade de massa e tempo (dimensões de m^2/s^3) da região de maior tamanho L_0 - a escala externa - para escalas menores não deve depender de nada além de L_0 , da densidade do fluido e da variação da parte flutuante $\Delta v_{L_0} = \max(v_{L_0}) - \min(v_{L_0})$ ao longo de suas dimensões, e por análise dimensional só há uma maneira de expressar essa taxa em termos dessas quantidades:

$$\epsilon \sim (\Delta v_{L_0})^3 / L_0 \quad (2.1.3)$$

- Estatisticamente, a energia flui das regiões maiores, nas quais é injetada, para as menores, nas quais é dissipada. A taxa de transferência é novamente ϵ , assim como a taxa a que se dissipa a energia nas regiões de tamanho ℓ_0 . Naturalmente,

para que se mantenha o estado de turbulência deve haver sempre uma fonte externa de energia abastecendo as flutuações de escala L_0 .

Essa descrição é compatível com uma escala ℓ tal que

$$\ell_0 \ll \ell \ll L_0, \quad (2.1.4)$$

escala em que o efeito da viscosidade é pequeno (ou número de Reynolds grande). Na faixa de escalas em que essas desigualdades são satisfeitas temos o que se chama de regime inercial, porque a dinâmica é regida basicamente pela inércia. A escala externa L_0 varia com a altitude mas, próximo ao solo é da ordem de metros [57] ou dezenas de metros [58].

É útil decompor o campo velocidade $v(\mathbf{r})$ em duas partes: sua média $\langle v \rangle(\mathbf{r})$ e um componente que flutua aleatoriamente $v_1(\mathbf{r})$ (e que, ao contrário de v_ℓ definido acima, não faz referência a uma escala específica ℓ de turbilhões). Além da decomposição, matematicamente descrita por

$$v(\mathbf{r}) = \langle v \rangle(\mathbf{r}) + v_1(\mathbf{r}), \quad (2.1.5)$$

é importante na caracterização do campo turbulento a chamada função de estrutura de velocidade

$$D_v(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \langle [v(\mathbf{r} + \mathbf{R}) - v(\mathbf{r})]^2 \rangle. \quad (2.1.6)$$

Em geral, esta depende de todas as componentes dos dois vetores \mathbf{r} e \mathbf{R} , porque a atmosfera não é homogênea nem isotrópica¹. No entanto, essa não-homogeneidade está contida essencialmente em $\langle v \rangle(\mathbf{r}, t)$, que é um campo que varia com o momento do dia e com características topográficas, dentre outras, e que varia pouco em pequenas escalas ($R \ll L_0$) quando comparado com a variação de v_1 . A parte que flutua v_1 satisfaz, esta sim, as condições de isotropia e homogeneidade, no sentido de que $\langle [v_1(\mathbf{r} + \mathbf{R}) - v_1(\mathbf{r})]^2 \rangle$ é uma função somente do módulo de \mathbf{R} , desde que se tome $R \ll L_0$. Diz-se que o campo v_1 é localmente homogêneo e isotrópico. Se nos restringirmos a valores pequenos de R teremos portanto (usando que $\langle v_1 \rangle = 0$ por definição)

$$\begin{aligned} D_v(R) &= \langle [(\langle v \rangle(\mathbf{r} + \mathbf{R}) + v_1(\mathbf{r} + \mathbf{R})) - (\langle v \rangle(\mathbf{r}) + v_1(\mathbf{r}))]^2 \rangle \\ &= \langle [\langle v \rangle(\mathbf{r} + \mathbf{R}) - \langle v \rangle(\mathbf{r})]^2 \rangle + \langle [v_1(\mathbf{r} + \mathbf{R}) - v_1(\mathbf{r})]^2 \rangle \\ &\approx \langle [v_1(\mathbf{r} + \mathbf{R}) - v_1(\mathbf{r})]^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

¹Em sua forma mais geral, a função de estrutura é um tensor diádico $D_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle (v_i - v'_i)(v_k - v'_k) \rangle$ composto por 9 elementos, correspondentes às combinações das três componentes das velocidades $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{v}' = \mathbf{v}(\mathbf{r}')$. Outras considerações, como a incompressibilidade do ar, possibilitam descrever quaisquer desses elementos em função de uma única componente de D_{ik} [6, seção 2.2], em termos das projeções das velocidades ao longo do vetor definido por $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. O tratamento aqui, logo, considera a velocidade como um escalar sem prejuízo à discussão.

Uma das consequências da teoria de Kolmogorov é que como a função de estrutura só pode depender de ϵ (dimensão de distância²/tempo³) e R (distância), temos

$$D_v(R) = C_v^2 R^{2/3} \quad , \quad \text{onde} \quad C_v^2 \propto \epsilon^{2/3} \quad (2.1.8)$$

A constante C_v^2 é chamada constante de estrutura da velocidade e é o que caracteriza a força da turbulência.

Antes de considerar o efeito da turbulência sobre a luz, é importante introduzirmos mais algumas funções. Uma delas é a função de autocorrelação de segunda ordem:

$$\Gamma_2^{(V)}(R) = \langle v_1(\mathbf{r} + \mathbf{R})v_1(\mathbf{r}) \rangle , \quad (2.1.9)$$

e a outra é a densidade espectral $\phi^{(V)}(\boldsymbol{\kappa})$ de v_1 , que se relaciona com $\Gamma_2^{(V)}$ através do teorema de Wiener-Khintchine [22, p. 56]

$$\phi^{(V)}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \Gamma_2^{(V)}(R) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{R}} d^3R = \frac{1}{2\pi^2 \kappa} \int_0^\infty \Gamma_2^{(V)}(R) \text{sen}(\kappa R) R dR \quad (2.1.10a)$$

$$\Gamma_2^{(V)}(R) = \iiint \phi^{(V)}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{R}} d^3\boldsymbol{\kappa} = \frac{4\pi}{R} \int_0^\infty \phi^{(V)}(\kappa) \text{sen}(\kappa R) \kappa d\kappa , \quad (2.1.10b)$$

e que, para o valor κ de seu argumento, está relacionada com as flutuações de velocidade em regiões de escala $\sim \kappa^{-1}$.

Note-se que embora $\boldsymbol{\kappa}$ seja um vetor de três componentes, como $\Gamma_2^{(V)}(R)$ depende apenas do módulo de \mathbf{R} , também deverá $\phi^{(V)}(\boldsymbol{\kappa})$ depender somente do módulo de $\boldsymbol{\kappa}$, o que nos leva às últimas expressões acima. A função de autocorrelação está relacionada com a função de estrutura da seguinte forma (usando (2.1.7))

$$\begin{aligned} D_v(R) &\approx \langle v_1^2(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \rangle + \langle v_1^2(\mathbf{r}) \rangle - 2\langle v_1(\mathbf{r} + \mathbf{R})v_1(\mathbf{r}) \rangle \\ &= 2\Gamma_2^{(V)}(0) - 2\Gamma_2^{(V)}(R) , \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

e por conseguinte

$$D_v(R) = 8\pi \int_0^\infty \kappa^2 \phi^{(V)}(\kappa) \left(1 - \frac{\text{sen}(\kappa R)}{\kappa R}\right) d\kappa . \quad (2.1.12)$$

Novamente, seguindo o receituário da teoria de Kolmogorov, $\phi^{(V)}(\boldsymbol{\kappa})$ só pode depender de ϵ e κ e, multiplicado por $\kappa^2 d\kappa$, deverá ter as mesmas dimensões de $D_v(R)$, ou seja,

$$\phi^{(V)}(\boldsymbol{\kappa}) \kappa^2 d\kappa \propto C_v^2 \quad (2.1.13a)$$

$$\phi^{(V)}(\boldsymbol{\kappa}) \kappa^2 d\kappa \propto R^{2/3} , \quad (2.1.13b)$$

o que implica $\phi^{(V)}(\boldsymbol{\kappa}) = a C_v^2 \kappa^{-11/3}$. Para determinar a constante de proporcionalidade adimensional a , inserimos $\phi^{(V)}(\boldsymbol{\kappa})$ em (2.1.12), obtendo com a mudança de variáveis $\kappa R = \eta$:

$$a = \left[8\pi \int_0^\infty \eta^{-5/3} \left(1 - \frac{\text{sen}(\eta)}{\eta}\right) d\eta \right]^{-1} = \frac{5}{18\pi \Gamma(\frac{1}{3})} \approx 0.033 , \quad (2.1.14)$$

onde $\Gamma(x)$ é a função gama. A densidade espectral segundo o modelo de Kolmogorov é portanto

$$\phi^{(V)}(\kappa) = 0.033C_v^2\kappa^{-11/3} . \quad (2.1.15)$$

É preciso ressaltar que essa função não possui transformada de Fourier e que a relação entre espectro e função de autocorrelação (2.1.10b) acima não é estritamente válida nesse caso, embora tenha sido utilizada na dedução². No entanto, novamente, essa teoria espera-se válida apenas em escalas l que satisfaçam $\ell_0 \ll l \ll L_0$; ou seja, o espectro $\phi^{(V)}(\kappa)$ acima é definitivamente incorreto nas flutuações de larga escala ($l \geq L_0$, ou $\kappa \leq L_0^{-1}$) e nas de pequena escala ($l \leq \ell_0$, ou $\kappa \geq \ell_0^{-1}$). Considerados os efeitos pertinentes nessas outras escalas, obtemos um espectro diferente que possui transformada de Fourier, mas que também se reduz apropriadamente ao da equação (2.1.15) acima quando $1/L_0 \ll \kappa \ll 1/\ell_0$.

2.2 Flutuação do índice de refração

Até o momento foi descrita a dinâmica do campo velocidade na atmosfera, mas velocidade do ar tem influência direta negligenciável sobre a luz que o atravessa. Quando, no entanto, se tem uma atmosfera de umidade e temperatura não uniformes, e estas características são determinantes no valor do índice de refração n , a mistura de massas de ar distintas, provocada pelo vento, terá como efeito uma flutuação aleatória de n , e essa flutuação “herdará” as características do campo turbulento v .

Nesta tese levaremos em conta apenas o efeito da temperatura, que está relacionada com n através da lei de Dale-Gladstone:

$$n - 1 = n_1 \sim \alpha_n P/T , \quad (2.2.16)$$

onde P é a pressão, que em comparação com a temperatura varia pouco na atmosfera, e $\alpha_n = 80 \cdot 10^{-8} K/Pa$.

A descrição da turbulência no campo de temperatura da atmosfera foi feita por Obukhov em [59] e está reproduzida em [6, cap. 3]. A temperatura é um dentre os “aditivos passivos e conservativos” aos quais a teoria se aplica. Por passivo entenda-se que o aditivo não afeta a dinâmica do campo de velocidade e por conservativo que sua quantidade se preserva quando do movimento da porção de ar que o contém³.

²Note-se que a equação (2.1.12) é válida não obstante, uma vez que a singularidade do espectro em $\kappa \rightarrow 0$ é removida no cálculo da função de estrutura. Fisicamente, esse efeito é esperado já que a função de estrutura é definida precisamente de forma a eliminar flutuações de larga escala, isto é, aquelas tais que $\kappa \approx 0$.

³Estritamente a temperatura não é passiva ou conservativa. Não é passiva porque o gradiente vertical de temperatura gera correntes convectivas e não conservativa porque ao mudar de altitude, a pressão à qual uma massa de ar é submetida muda, fazendo com que sua temperatura siga uma transformação adiabática. As correntes convectivas, no entanto, afetam o campo médio $\langle v \rangle$ e não as componentes v_l , e a transformação adiabática pode ser contornada definindo-se outra quantidade, conservativa, chamada temperatura potencial [6, p. 56]. Essa ressalva, contudo, não se aplica à presente tese, que concerne propagações horizontais apenas.

Uma das conclusões de Obukhov é a de que a turbulência de qualquer desses aditivos é resultado direto da mistura que se dá por conta da turbulência no campo de velocidade e a argumentação aplicada a este último também serve aos primeiros. Substitui-se apenas o mecanismo de dissipação em pequenas escalas: a viscosidade dá lugar à difusão. Ressalte-se porém, que todos os coeficientes de difusão relevantes - de temperatura, vapor d'água e dióxido de carbono - têm aproximadamente o mesmo valor da viscosidade do ar e portanto as escalas internas ℓ_0 são também as mesmas, o que nos permite tratá-las sem distinção.

Em virtude do efeito aleatório do vento sobre o índice de refração, este também pode ser separado em uma parte que é o seu valor médio $\langle n \rangle \approx 1$ e em outra que representa a flutuação em torno dessa média n_1 ,

$$n = 1 + n_1 . \quad (2.2.17)$$

Assim como fizemos com o campo v , definimos a função de estrutura do índice de refração como

$$D_n(\mathbf{R}) = \langle [n(\mathbf{r} + \mathbf{R}) - n(\mathbf{r})]^2 \rangle \approx \langle [n_1(\mathbf{r} + \mathbf{R}) - n_1(\mathbf{r})]^2 \rangle , \quad (2.2.18)$$

com o último passo sendo justificado por (2.2.17). Por ter sua flutuação regida pelas flutuações do campo de velocidade, $D_n(\mathbf{R}) = D_n(R)$, ou seja, as flutuações do índice de refração são isotrópicas e localmente homogêneas. Além disso,

$$D_n(R) = C_n^2 R^{2/3} . \quad (2.2.19)$$

Como D_n deve ser adimensional, C_n^2 terá dimensões de $(distância)^{-2/3}$. Considerando apenas o efeito da temperatura, podemos estabelecer que

$$C_n^2 \sim \left(\frac{\alpha_n P}{T} \right)^2 (\delta T)^2 , \quad (2.2.20)$$

onde T representa o valor médio da temperatura e $(\delta T)^2$ é a sua variância na região de passagem do feixe. Não utilizaremos essa relação para determinar os valores de C_n^2 em nossos experimentos; será utilizado um método mais direto. No entanto, ela serve pra ilustrar o princípio de funcionamento do aparato utilizado para emular no laboratório as condições reais da atmosfera: a mistura de massas de ar de diferentes temperaturas. Mais detalhes a respeito disso serão dados na seção 2.3.

O parâmetro C_n^2 é chamado constante de estrutura do índice de refração e assume valores com ordem de grandeza entre $10^{-13} \text{ m}^{-1/3}$ para turbulências extremamente fortes e $10^{-16} \text{ m}^{-1/3}$ para regimes de turbulência fraca [6, p. 79].

Podemos, usando a equação (2.2.19), obter a densidade espectral espacial $\phi(\kappa)$, como fizemos para o campo de velocidades, e ela deverá ser análoga ao que obtivemos em (2.1.15):

$$\phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3} . \quad (2.2.21)$$

2.2.1 Propagação de um feixe sob turbulência óptica

Até então, descreveu-se a estrutura da turbulência atmosférica, relegando as consequências das flutuações sobre os portadores de informação de que trata esta tese: os feixes ópticos. Expor-se-á aqui alguns resultados de [42] que concernem a dinâmica de propagação destes feixes.

A base do tratamento utilizado aqui é o princípio de Huygens-Fresnel, que descreve a propagação de um campo $E(\boldsymbol{\rho}, z)$ de número de onda k como o resultado da propagação das ondas esféricas que o compõem:

$$E(\boldsymbol{\rho}, z) = \iint E_0(\boldsymbol{\rho}') h_0^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; z) d^2 \rho', \quad (2.2.22)$$

onde $E_0(\boldsymbol{\rho}') = E(\boldsymbol{\rho}', 0)$. O eixo Z define a direção de propagação do feixe⁴. Denotamos por $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\rho}'$ os vetores bidimensionais contidos em planos perpendiculares a Z com $Z = z$ e $Z = 0$, respectivamente. Assumimos a aproximação escalar, em que a propagação de um componente vetorial do campo elétrico independe dos outros. Na propagação livre, isto é, sem consideração da turbulência, essa aproximação se justifica pelo caráter paraxial do feixe. Já na descrição de feixes que se propagam pela atmosfera, há efeitos que acoplam componentes vetoriais distintas apenas na presença de cristais de gelo e nuvens [31, 30], que desconsideramos aqui. O termo k denota o número de onda do feixe, não incluído como argumento de E em benefício da concisão das fórmulas que seguem.

A equação (2.2.22) descreve a propagação livre do campo elétrico e o propagador h_0^k tem a seguinte forma [60, p. 67]:

$$h_0^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; z) = \frac{k}{i2\pi z} \exp \left[ikz + i \frac{k}{2z} |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|^2 \right]. \quad (2.2.23)$$

A generalização de (2.2.22) que inclui os efeitos da turbulência é feita substituindo-se o propagador h_0^k pelo seguinte:

$$h^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; z) = h_0^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; z) \exp [\psi^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; z)], \quad (2.2.24)$$

onde $\psi^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; z)$ é uma variável aleatória e complexa. Não há expressão fechada que a represente, de sorte que normalmente se recorre a aproximações que levam em consideração a pequenez da flutuação no índice de refração em relação ao seu valor médio. Das aproximações tentadas, uma das que obteve maior sucesso na descrição dos fenômenos observados é a chamada aproximação de Rytov [6, cap. 7] ou das perturbações suaves. Sob essa aproximação, temos [42, (2.44)]:

$$\begin{aligned} \psi^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; z) = & \frac{k^2 z}{2\pi} \int_0^z dz' \iint d^2 \rho'' \frac{n_1(\boldsymbol{\rho}'', z')}{z'(z-z')} \\ & \times \exp \left\{ \frac{ik}{2} \left[\frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}''|^2}{z-z'} + \frac{|\boldsymbol{\rho}'' - \boldsymbol{\rho}'|^2}{z'} - \frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|^2}{z} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

⁴O termo feixe já implica propagação no regime paraxial, ou seja, a ângulos pequenos em relação à direção do eixo.

Vê-se pela forma do propagador livre em (2.2.23) que cada termo do integrando em z' descreve a propagação de uma onda esférica do plano da fonte até um plano $Z = z'$ que contém as flutuações de índice de refração $n_1(\boldsymbol{\rho}'', z')$, em seguida propagada até o plano de observação $Z = z$. Do resultado se subtrai a fase adquirida por uma onda esférica propagando-se livremente do plano fonte até $Z = z$, isto é, ψ^k envolve apenas a perturbação adicionada pela turbulência, não o efeito da propagação livre, como explicitado em (2.2.24).⁵

Assim como ψ^k , n_1 é uma variável aleatória e por consequência apenas suas propriedades estatísticas podem ser descritas. Ao tomarmos a média sob realizações da turbulência, representada aqui pelo símbolo $\langle \cdot \rangle$, de alguma quantidade envolvendo os campos propagados E , surgirão naturalmente médias do tipo $\langle \exp[\psi^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; z)] \rangle$. Se a distância de propagação é muitas vezes maior que a escala externa L_0 , ψ^k efetivamente é a soma de variáveis aleatórias descorrelacionadas (os índices $n_1(\boldsymbol{\rho}'', z')$ para diferentes z') e, pelo teorema central do limite, é uma variável gaussiana. Como mencionado anteriormente, L_0 é da ordem da altitude de propagação e essa hipótese portanto espera-se aplicável a propagações horizontais a baixas altitudes.

Para variáveis gaussianas X a seguinte relação, da qual faremos uso, é conhecida:

$$\langle \exp(X) \rangle = \exp \left[\langle X \rangle + \frac{1}{2} \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle \right]. \quad (2.2.26)$$

As quantidades que mais nos interessam são aquelas referentes a médias em segunda ordem no campo:

$$\begin{aligned} \langle E^*(\boldsymbol{\rho}_1, z) E(\boldsymbol{\rho}_2, z) \rangle &= \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho'_2 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho'_1 [h_0^k(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1; z)]^* h_0^k(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_2; z) \\ &\times E_0^*(\boldsymbol{\rho}'_1) E_0(\boldsymbol{\rho}'_2) \langle \exp[\psi^{k*}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_2; z) + \psi^k(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1; z)] \rangle. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Novamente, a média $\langle \cdot \rangle$ se refere apenas às realizações da turbulência, não à possível estocasticidade do campo em $Z = 0$. A média particular acima pode ser escrita como

$$\langle \exp[\psi^{k*}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1; z) + \psi^k(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_2; z)] \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} D^k(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2) \right], \quad (2.2.28)$$

em termos da função de estrutura de ψ^k , definida de forma análoga às funções de estrutura anteriores (2.1.6) e (2.2.18):

$$D^k(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2) = \langle |\psi^k(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1; z) - \psi^k(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_2; z)|^2 \rangle, \quad (2.2.29)$$

⁵A interpretação de ψ^k é similar à que se dá a outra aproximação recorrente na física: a aproximação de Born [22, p. 403]. Esta serve a processos em que o meio perturbador espalha fracamente o feixe propagado, de maneira que se considera apenas situações em que ele é espalhado apenas uma vez entre o plano fonte e o de observação, muito embora se tome a soma coerente dessas situações, o que corresponderia à integral em z' na equação (2.2.25). Esta similaridade já fora notada anteriormente [61, cap. 3].

e que, trabalhada, toma a forma [42, (2.82)]:

$$D^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = 2.92k^2z \int_0^1 dv C_n^2(zv) |v\boldsymbol{\rho} + (1-v)\boldsymbol{\rho}'|^{5/3}. \quad (2.2.30)$$

Especificamente para o cálculo da irradiância, em que $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}$ em (2.2.27), a função de estrutura (2.2.30) se reduz a

$$\begin{aligned} D_0^k &= D^k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2) \\ &= 2.92k^2z |\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2|^{5/3} \int_0^1 dv C_n^2(zv) (1-v)^{5/3}. \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Tomando em conta (2.2.28), a irradiância pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \langle E^*(\boldsymbol{\rho}, z)E(\boldsymbol{\rho}, z) \rangle &= \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho'_2 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho'_1 [h_0^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'_1; z)]^* h_0^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'_2; z) \\ &\times E_0^*(\boldsymbol{\rho}'_1)E_0(\boldsymbol{\rho}'_2) \exp \left[- \left| \frac{\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2}{\rho_t(z)} \right|^{5/3} \right], \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

onde introduzimos o parâmetro

$$\rho_t(z) = \left[1.46k^2z \int_0^1 dv C_n^2(zv) (1-v)^{5/3} \right]^{-3/5}, \quad (2.2.33)$$

que possui uma interpretação [10, p. 209] como o comprimento de coerência de uma onda esférica centrada em $-z$. Por comprimento de coerência entenda-se a distância transversal para a qual o grau de coerência de um feixe inicialmente coerente propagado pela turbulência cai a $1/e$ de seu máximo. Naturalmente, este comprimento diminui quanto maior a distância de propagação e a força da turbulência⁶.

Por fim, a partir da função de estrutura (2.2.31) e da relação (2.1.12) podemos, de maneira análoga ao que foi feito na seção 2.1, determinar o espectro das perturbações de fase $\phi(\kappa)$. Basta fazer a separação

$$D_0^k = \mathcal{C}^2 \left[k^2z |\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2|^{5/3} \right], \quad (2.2.34)$$

em que se define $\mathcal{C}^2 = 2.92 \int_0^1 dv C_n^2(zv) (1-v)^{5/3}$, que tem as mesmas unidades de C_n^2 . Análise dimensional mostra, como antes, que $\phi(\kappa) = a\mathcal{C}^2\kappa^{-11/3}$, onde $a \approx 0.033$. Com a definição de ρ_t o espectro pode ser escrito como

$$\phi(\kappa) = 0.066\rho_t^{-5/3}\kappa^{-11/3}. \quad (2.2.35)$$

⁶A dependência de ρ_t com k indica também que o efeito da turbulência é maior para comprimentos de onda menores. Resulta que fontes de luz de menor comprimento de onda, embora sofram menos com limitações difrativas em um sistema óptico, sejam mais degradadas por efeitos de turbulência óptica.

2.2.2 Alargamento do feixe

Nesta seção deduziremos a equação que descreve a largura transversal do feixe ao longo da direção de propagação. Para tanto, primeiramente definimos a densidade espectral cruzada de um feixe como

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z) = \overline{E^*(\boldsymbol{\rho}_1, z)E(\boldsymbol{\rho}_2, z)}, \quad (2.2.36)$$

onde a barra superior denota média sobre o estado do campo⁷. Nos convém adotar como definição de largura uma que se baseia nos segundos momentos transversais do feixe, por razões que ficarão claras ao longo desta tese. Explicitamente, se o perfil de irradiância do feixe é dado por $W(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z) = I(\boldsymbol{\rho}, z)$, onde $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$, a largura em uma direção (y , por exemplo) é

$$\sigma_y(z) = \sqrt{\frac{\iint_{-\infty}^{\infty} y^2 I(x, y, z) dx dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} I(x, y, z) dx dy}}. \quad (2.2.37)$$

Para um feixe circularmente simétrico $I(\boldsymbol{\rho}) = I(\rho)$, é conveniente definir a seguinte largura:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} \rho^3 I(\rho, z) d\rho}{\int_0^{\infty} \rho I(\rho, z) d\rho}}. \quad (2.2.38)$$

Por simplicidade, consideraremos feixes normalizados, isto é, aqueles tais que $\iint d^2\rho I(\boldsymbol{\rho}, z) = 1$. A propagação livre deste tipo de feixe segue a relação [43]

$$\sigma^2(z) = \sigma_0^2 + Bz + \Theta_0^2 z^2, \quad (2.2.39)$$

onde definimos $\sigma_0 = \sigma(0)$. A quantidade Θ_0 representa a divergência angular do feixe no plano $Z = 0$ e pode ser descrita em termos da transformada de Fourier \tilde{W}_0 da densidade espectral cruzada também em $Z = 0$:

$$\Theta_0^2 = \frac{1}{k^2} \iint \tilde{W}_0(-\mathbf{q}, \mathbf{q}) q^2 d^2q. \quad (2.2.40)$$

O vetor \mathbf{q} representa a componente transversal do momento do feixe, isto é, o momento do feixe é dado por $\mathbf{k} = (\mathbf{q}, \sqrt{k^2 - q^2})$. O termo B em (2.2.39) é dado por

$$B = \frac{1}{ik} \iint \{[-\boldsymbol{\rho}'_1 \cdot \nabla'_1 + \boldsymbol{\rho}'_2 \cdot \nabla'_2] W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2)\}_{\boldsymbol{\rho}'_1 = \boldsymbol{\rho}'_2 = \boldsymbol{\rho}'} d^2\rho', \quad (2.2.41)$$

onde $W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) = W(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2; 0)$ e $\nabla'_{1,2}$ são os operadores laplacianos bidimensionais sobre as variáveis $\boldsymbol{\rho}'_1$ e $\boldsymbol{\rho}'_2$. Note-se pela definição de densidade espectral cruzada

⁷Em um tratamento quântico, a média seria dada pelo traço $\text{tr} \{ \rho \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}_1, z) \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_2, z) \}$, onde ρ seria a matriz densidade a descrever o campo e $\hat{E}^{(+)}$ e $\hat{E}^{(-)}$ as partes de frequências positivas e negativas do operador de campo elétrico. Reservamos $\langle \cdot \rangle$ para médias no estado da turbulência.

(2.2.36) que W , e em particular W_0 , são hermiteanos, isto é, $W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) = W_0^*(\boldsymbol{\rho}'_2, \boldsymbol{\rho}'_1)$. Se ademais W_0 for real, teremos

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{ik} \iint \{[-\boldsymbol{\rho}'_1 \cdot \nabla'_1 + \boldsymbol{\rho}'_2 \cdot \nabla'_2] W_0^*(\boldsymbol{\rho}'_2, \boldsymbol{\rho}'_1)\}_{\boldsymbol{\rho}'_1=\boldsymbol{\rho}'_2=\boldsymbol{\rho}'} d^2 \rho' \\ &= \frac{1}{ik} \iint \{[-\boldsymbol{\rho}'_1 \cdot \nabla'_1 + \boldsymbol{\rho}'_2 \cdot \nabla'_2] W_0(\boldsymbol{\rho}'_2, \boldsymbol{\rho}'_1)\}_{\boldsymbol{\rho}'_1=\boldsymbol{\rho}'_2=\boldsymbol{\rho}'} d^2 \rho' \\ &= -B . \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

Portanto, $B = 0$ nesta situação, que ocorre quando a curvatura do feixe no plano $Z = 0$ é nula - exemplos típicos são a cintura de um feixe gaussiano e uma onda plana. Os resultados acima para a largura $\sigma(z)$ também se aplicam à largura em uma direção cartesiana (como $\sigma_y(z)$) desde que substituídos o módulo quadrado q^2 por q_x^2 ou q_y^2 em (2.2.40) e os vetores $\boldsymbol{\rho}' \cdot \nabla'$ no integrando de B por suas componentes cartesianas.

Da equação (2.2.32) se pode notar que se considerarmos como densidade espectral cruzada efetiva em $Z = 0$ o seguinte:

$$\begin{aligned} W_0^T(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2; z) &= \overline{E_0^*(\boldsymbol{\rho}'_1) E_0(\boldsymbol{\rho}'_2)} \exp - \left[\left| \frac{\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2}{\rho_t(z)} \right|^{5/3} \right] \\ &= W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) \exp - \left[\left| \frac{\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2}{\rho_t(z)} \right|^{5/3} \right] , \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

podemos utilizar os resultados para a propagação de segundo momento que a princípio serviam para propagação livre.

Denotando a largura do feixe após propagação pela turbulência por Σ , temos, como demonstrado no apêndice 2A,

$$\Sigma^2(z) = \sigma^2(z) + k^{2/5} \gamma^2(z) , \quad (2.2.44)$$

onde

$$\gamma(z) = \left[4.635 z^{8/3} \int_0^1 C_n^2(vz) (1-v)^{5/3} dv \right]^{3/5} . \quad (2.2.45)$$

A expressão (2.2.44) se baseia na aproximação $D^k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2)/2 \approx |\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2|^2 / \rho_t^2$, ou seja, com a substituição do expoente 5/3 por 2. Essa aproximação é desencorajada em [7, p. 1526] por negligenciar os efeitos das diferentes escalas de turbulência. Turbilhões maiores que a largura transversal do feixe desviam-no sem distorcê-lo e, por serem prevalentes segundo o espectro de Kolmogorov (2.2.35), regem em boa medida as flutuações de fase. Distorções e cintilações, por outro lado, são causados por estruturas de turbilhões menores que o feixe⁸. A substituição acima acopla artificialmente

⁸Cintilações são especialmente afetadas por turbilhões do tamanho da primeira zona de Fresnel !TODO!. Isto porque esses turbilhões geram desvios de raios que, combinados com raios não desviados, interferem-se destrutivamente.

a incidência dessas escalas distintas e, de fato, como demonstrado em [62], implica fisicamente o desprezo de todos os efeitos da turbulência que não o desvio da frente de onda (o chamado *wavefront tilt*).

Esta aproximação da função de estrutura é, no entanto, recorrente na literatura e foi já comparada com resultados experimentais. Em particular para o cálculo do segundo momento de um feixe ela provê resultados compatíveis com as observações [63, p. 1674].

A segunda aproximação utilizada concerne ao próprio feixe. A relação (2.2.44) vale em duas situações:

- O feixe é totalmente coerente e possui perfil gaussiano em $Z = 0$
- O comprimento de coerência transversal do feixe em $Z = 0$ é muito menor que o comprimento de coerência da atmosfera ρ_t .

Pelo segundo item entenda-se um feixe com densidade espectral cruzada do tipo Schell [22, p. 242]:

$$W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) = f(\boldsymbol{\rho}'_1)f(\boldsymbol{\rho}'_2)g(\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2) , \quad (2.2.46)$$

em que a coerência transversal, dada pela largura de g , é muito menor que ρ_t . Essas condições contemplam os diferentes cenários tratados nesta tese.

Por fim e para referência, segue a largura de um feixe ao longo de um eixo cartesiano (y , por exemplo), sob as restrições anteriores:

$$\Sigma_y^2(z) = \sigma_y^2(z) + k^{2/5}\gamma_y^2(z) , \quad (2.2.47)$$

onde

$$\gamma_y(z) = \left[2.601z^{8/3} \int_0^1 C_n^2(vz)(1-v)^{5/3} dv \right]^{3/5} . \quad (2.2.48)$$

2.3 Emulador de turbulência

Muitas são as maneiras de se emular as condições atmosféricas em laboratório [64]. Emprega-se, por exemplo, placas de fase transparentes e de espessuras não-uniformes que são postas a girar. A espessura determina o caminho óptico da luz que a atravessa e por consequência introduz um perfil de fase transversal também não-uniforme. A distribuição de fase deverá seguir a estatística do modelo de turbulência adotado e o giro fará com que a perturbação varie no tempo. Uma das vantagens deste método é a sua reprodutibilidade. No entanto, como a cada giro de 2π a perturbação passa a se repetir, faz-se necessário o uso de ao menos duas placas girando a velocidades angulares distintas; idealmente a razão entre as velocidades deve ser um número irracional para que o padrão não se repita. Outra desvantagem é a introdução de dispersão que, na atmosfera, é no máximo marginal⁹.

⁹Um vidro típico como o BK7 possui dispersão de $dn/d\lambda = -0.034246 \mu\text{m}^{-1}$ no comprimento $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ do laser de He-Ne, enquanto a dispersão do ar neste mesmo comprimento de onda é de $dn/d\lambda = -1.3 \times 10^{-5} \mu\text{m}^{-1}$.

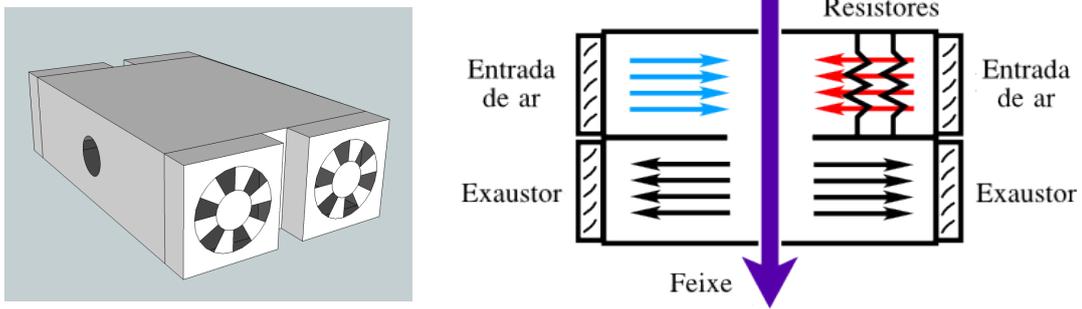


Figura 2.1: Câmara de turbulência.

Os resultados descritos nessa tese foram obtidos através de um emulador similar ao descrito em [45], e que mistura ar a diferentes temperaturas - o mesmo mecanismo que gera a turbulência na atmosfera. A mistura é feita no interior de uma caixa de alumínio, a câmara de turbulência, de dimensões $24.5 \text{ cm} \times 19 \text{ cm} \times 8.5 \text{ cm}$, e esboçada na figura 2.1.

Os feixes ópticos atravessam a caixa através de dois furos posicionados ao longo de um eixo paralelo à borda de 19 cm . Quatro ventiladores de computador são colocados nas laterais da caixa soprando ar ao longo do eixo paralelo à borda de 24.5 cm . Dois desses ventiladores injetam ar na câmara enquanto os outros dois o ejetam. Duas placas dividem internamente a câmara, separando as regiões dos injetores e ejetores. Na frente de um dos injetores um banco de resistores ligado a uma fonte elétrica estabilizada externa¹⁰ aquece o ar que o atravessa. A injeção de ar a temperatura ambiente de um lado e aquecido do outro gera turbulência no índice de refração. O banco de resistores possui resistência conjunta de 6.7Ω e a fonte pode fornecer tensões de até 40 V e correntes de 10 A .

A temperatura do ar foi medida, com termopar e multímetro¹¹, para a maior potência dissipada pelos resistores usada no experimento do capítulo 3, 185.5 W (correspondendo a uma tensão de 35 V e corrente de 5.3 A) e a uma temperatura ambiente de 22° C . Ela vai de 22° C próximo de um dos injetores a $\sim 490^\circ \text{ C}$ ao lado do banco de resistores, passando por $\sim 76^\circ \text{ C}$ no eixo de propagação, perto da janela de entrada do feixe.

Uma caracterização completa da câmara implica determinar a distribuição do espectro espacial das flutuações de índice de refração. A presença dos ventiladores resulta em um componente artificial na estatística da turbulência, assim como o próprio formato da caixa. Assumimos, no entanto, que a estatística da turbulência poderia ser modelada pelo espectro de Kolmogorov, o que se verificou a posteriori pela comparação entre resultados e simulações.

Assumido o modelo de Kolmogorov, há dois caminhos para se caracterizar as flutuações na câmara de turbulência:

¹⁰Fonte estabilizada modelo TCA 40-10, Tectrol.

¹¹Multímetro modelo ET-2076A, Minipa.

- Aferir, para a faixa de comprimentos de onda relevante, todos os parâmetros da câmara, como constante de estrutura $C_n^2(z)$ ao longo do eixo de propagação Z e escalas interna e externa, e derivar a partir daí os efeitos em um feixe de interesse.
- Determinar o efeito combinado da turbulência óptica nos feixes específicos que se deseja estudar, desconsiderando a distribuição longitudinal de C_n^2 .

O primeiro caminho permite inferir o comportamento de feixes arbitrários que atravessam a câmara. A alternativa, porém, é mais fácil e suficiente para a análise exposta nesta tese e foi portanto escolhida. Especificamente, foram determinados os valores de γ_y através da expressão (2.2.47).

Para tanto foi feita a montagem esboçada na figura 2.2. Um feixe de laser de He-Ne¹² passa por um sistema óptico, propaga-se pela câmara de turbulência e incide sobre uma câmara CCD¹³ (charge-coupled device). A turbulência faz com que o perfil transversal de irradiância do feixe seja desviado, se distorça e ocasionalmente se divida em múltiplos lobos, de modo que ao se tomar a média dos quadros registrados pela câmara (115.23 por segundo) ao longo de um período de 55 s, resulta um perfil ainda gaussiano, porém alargado.

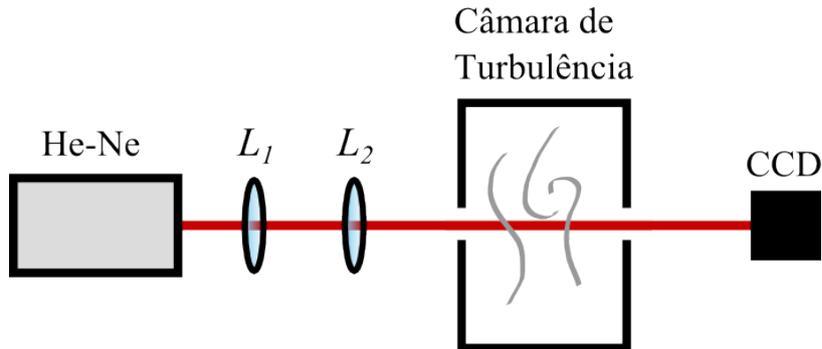


Figura 2.2: Esquema de calibração da câmara de turbulência.

O sistema óptico consiste em duas lentes, a primeira e segunda com distâncias focais de 25.4 mm e 200 mm, respectivamente, em configuração quase confocal. Seu objetivo é expandir o feixe e focalizá-lo no plano da câmara com uma cintura pequena o suficiente para que alargamentos causados pela turbulência sejam facilmente notados e medidos. Cada vídeo de 55 s é gravado com uma regulagem da tensão de saída da fonte, o que implica diferentes forças de turbulência e portanto diferentes γ_y . Após cada alteração na tensão de saída da fonte estabilizada espera-se cerca de cinco minutos para que a turbulência atinja o regime estacionário, a partir de quando se inicia a medição.

¹²Modelo 127, Stabilité™ Helium-Neon Laser, Spectra-Physics. Potência: 35 mW. Comprimento de onda: 632.8 nm.

¹³Câmera USB, Modelo DCU223C, Thorlabs. 1280 × 768 pixels quadrados de aresta 4.65 μm.

Para cada potência dissipada, toma-se a média da irradiância ao longo da direção vertical (além da média temporal mencionada acima), cujo resultado é usado para ajuste de uma curva Gaussiana do tipo

$$f(x) = A \exp \left[-(x - x_0)^2 / 2\Sigma_y^2 \right] + B, \quad (2.3.49)$$

em que os parâmetros são A , x_0 , Σ_y e B . Na figura 2.3 vê-se as medidas e ajustes correspondentes à ausência de turbulência (círculos e curva em azul) e à turbulência mais forte (círculos e curva em verde).

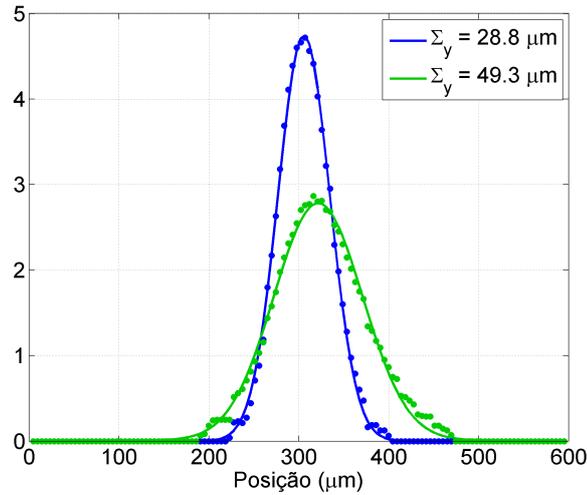


Figura 2.3: Médias temporais dos perfis de irradiância de um feixe laser de He-Ne (círculos) e ajustes Gaussianos correspondentes. Os dados em azul e em verde correspondem respectivamente à turbulência mais fraca (sem potência dissipada) e mais forte.

Através da relação (2.2.47) reescrita como

$$\gamma_y = \sqrt{\frac{\Sigma_y^2 - \sigma_y^2}{k^{2/5}}} \quad (2.3.50)$$

e substituindo o número de onda conhecido do laser, $k = 2\pi/0.633 = 9.93 \mu\text{m}^{-1}$, determinou-se a relação entre a potência dissipada pelos resistores da câmara e a força da turbulência mensurada por γ_y . Resultados na tabela 2.1.

2.4 Simulação de Monte Carlo

Uma das dificuldades associadas com o estudo de propagação em meios turbulentos é a intratabilidade das equações. Recorre-se a aproximações por vezes incorretas ou que só se justificam a posteriori, na comparação com resultados. Uma

Potência (W)	$\Sigma_y(\mu\text{m})$	$\gamma_y(\mu\text{m}^{6/5})$
0	28.8	0
14.9	29.3	3.21
33.6	30.7	6.64
59.7	33.2	10.5
93.3	38.9	16.5
134	43.3	20.4
183	49.3	25.3

Tabela 2.1: Tabela de calibração da câmara de turbulência.

alternativa a soluções analíticas aproximadas que não a medição direta é o uso de simulação numérica. A conhecida estatística das flutuações no índice de refração pode ser usada para gerar realizações da atmosfera turbulenta que, associadas a equações de propagação determinísticas, resultam em realizações do estado do feixe propagado. Tome-se realizações suficientes e se consegue determinar estatisticamente as propriedades de interesse.

Na propagação de feixes de correlação (descritos em detalhe no capítulo 3) em especial, as quantidades medidas estão associadas com detecções simultâneas em dois detectores, e portanto envolvem termos em quarta ordem no campo elétrico. Como se pode ver pela equação (2.2.24), a cada campo elétrico se associa um propagador, e a cada propagador se associa uma variável aleatória ψ que descreve a atmosfera turbulenta. O estudo da propagação de feixes de correlação portanto requer pelo menos tratamento em quarta ordem da turbulência¹⁴ e, no caso da cintilação, ou seja, da variância nos eventos de detecção simultânea, oitava ordem¹⁵.

Expressões nestes termos são difíceis de se conseguir sem aproximações, enquanto é fácil gerar múltiplas realizações para ψ . A simulação aqui segue próxima ao descrito em [46, cap. 9], e consiste em dividir a propagação total em múltiplas propagações entre planos intermediários. Em cada um desses planos um perfil de fase, cuja distribuição espacial segue a estatística de turbulência escolhida, é somado ao perfil de fase do feixe, enquanto a propagação entre os planos é a que ocorre no vácuo, sem influência da turbulência. Em suma se substitui a influência contínua da turbulência por uma sequência de perturbações através de placas de fase, como ilustrado na figura 2.4.

Os códigos utilizados nas simulações fazem amplo uso de funções escritas por Schmidt [46], com adições e generalizações, e podem ser encontrados completos em https://github.com/MarcPer/Turbulence_MonteCarlo. Os scripts usam funções disponíveis no programa MATLAB ou Octave e o apêndice 2B detalha como contornar

¹⁴Ordem aqui se refere apenas ao número de termos envolvendo ψ ; não a ordem do maior termo na expansão de Rytov, sempre o primeiro nesta tese.

¹⁵Há outras formas de se descrever propagação de feixes na atmosfera que não recorrem à equação de Huygens-Fresnel generalizada [65], mas menos validadas experimentalmente e pouco aplicáveis aos casos de estudo tratados aqui.

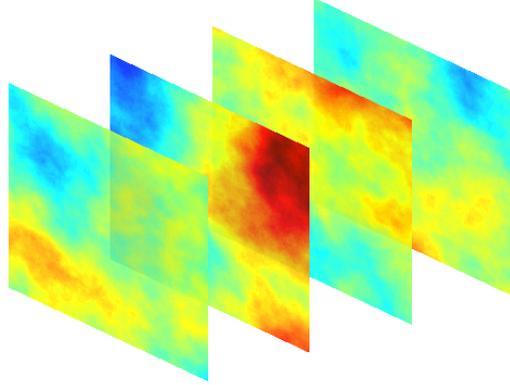


Figura 2.4: Telas de fase que simulam a turbulência e entre as quais se propaga o feixe como se na ausência das flutuações.

as disparidades entre algumas definições usadas na tese e nas funções de [46].

Nas propagações livres, recorre-se ao método do espectro angular, em que um perfil de irradiância $U_1(\boldsymbol{\rho})$ no plano $Z = z_1$ se escreve em função do perfil no plano $Z = z_0$ da fonte $U_0(\boldsymbol{\rho})$ da seguinte maneira [60, p. 55]:

$$U_1(\boldsymbol{\rho}) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{H}(\mathbf{f}) \mathcal{F} [U_0(\boldsymbol{\rho}')] \} . \quad (2.4.51)$$

Os operadores \mathcal{F} e \mathcal{F}^{-1} representam a transformada de Fourier direta e inversa nas variáveis $\boldsymbol{\rho}$ contidas nos planos dos perfis transversais. A transformada $\mathcal{F} [U_0(\boldsymbol{\rho}')]$, em particular, é denominada o espectro angular do campo U_0 , uma vez que representa o espectro de sua decomposição em ondas planas de mesmo número de onda, porém diferentes ângulos em relação ao eixo de propagação. A propagação do espectro angular consiste, em sistemas homogêneos e isotrópicos, apenas na sua multiplicação pela função $\mathcal{H}(\mathbf{f}) = \mathcal{F} [h(\boldsymbol{\rho}, 0, z)]$, onde h é o propagador do sistema. As operações computacionalmente mais dispendiosas na equação (2.4.51) são as duas transformadas de Fourier, realizadas pelo algoritmo da transformada de Fourier rápida (FFT).

Na propagação numérica, os planos da fonte, de observação e intermediários são divididos em elementos discretos, formando uma grade de tamanho finito. O uso de FFT torna, em parte, necessário o uso de grades de largura (leia-se número de elementos) que são potências de 2. Além disso, naturalmente há que se verificar uma série de condições, sobre por exemplo o espaçamento entre elementos na grade, a fim de se garantir a validade dos resultados, descartando efeitos de baixa amostragem (chamado “aliasing”) e outros.

A geração de cada tela de fase $\varphi(x, y)$ é feita usando sua decomposição de Fourier:

$$\varphi(x, y) = \iint \tilde{\varphi} \left(\sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} \right) e^{-i\kappa_x x - i\kappa_y y} d\kappa_x d\kappa_y , \quad (2.4.52)$$

onde $\langle |\tilde{\varphi}(\kappa)|^2 \rangle = \phi(\kappa)$, o espectro de fase descrito pela equação (2.2.35). Pelo teorema de Plancherel-Parseval,

$$\iint \langle |\varphi(x, y)|^2 \rangle dx dy = \iint \phi \left(\sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} \right) d\kappa_x d\kappa_y . \quad (2.4.53)$$

Uma vez que para a simulação é necessário o uso de variáveis discretas, convém aproximar a última integral por uma soma de Riemann

$$\iint \phi \left(\sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} \right) d\kappa_x d\kappa_y \approx \sum_{i,j} \phi \left(\sqrt{\kappa_{xi}^2 + \kappa_{yj}^2} \right) \Delta\kappa_{xi} \Delta\kappa_{yj} \quad (2.4.54)$$

e reescrever a decomposição (2.4.52) como uma série de Fourier

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j} \tilde{\varphi}_{ij} e^{-i\kappa_{xi}x - i\kappa_{yj}y} \quad (2.4.55)$$

cujos coeficientes $\tilde{\varphi}_{ij}$ deverão satisfazer, de acordo com (2.4.53),

$$\langle |\tilde{\varphi}_{ij}|^2 \rangle = \phi \left(\sqrt{\kappa_{xi}^2 + \kappa_{yj}^2} \right) \Delta\kappa_{xi} \Delta\kappa_{yj} . \quad (2.4.56)$$

Como argumentado após a equação (2.2.25), o fato de a distorção total ψ^k acrescida a uma onda esférica ser o resultado de muitas flutuações descorrelacionadas do índice de refração ao longo da propagação torna razoável considerar sua estatística gaussiana. Consideramos, pois, coeficientes $\tilde{\varphi}_{ij}$ também de estatísticas gaussianas¹⁶ com médias nulas e variâncias dadas por (2.4.56).

Uma realização de $\varphi(x, y)$ é portanto gerada sorteando-se os coeficientes $\tilde{\varphi}_{ij}$ para cada vetor de onda $(\kappa_{xi}, \kappa_{yj})$ da decomposição segundo uma distribuição normal de variância dada por (2.4.56).

Como ressalta Schmidt [46, p. 167], esta decomposição por si só é incorreta. A decomposição em série de Fourier, por menores que sejam os menores vetores de onda $\kappa_{x,y}$, negligencia turbilhões de grande escala (aqueles associados a $\kappa_{x,y} \rightarrow 0$) que, como se pode ver em (2.2.35), são predominantes no espectro. A solução adotada foi superpor a cada tela gerada segundo o método anterior, outras telas compostas de vetores $(\kappa_{xi}, \kappa_{yj})$ de menor magnitude [66]. Especificamente, se a menor componente cartesiana dos vetores de onda na decomposição (2.4.55) for κ_{min} , acrescenta-se m termos na decomposição associados a vetores de onda do tipo $\kappa_{x,y} = \kappa_{min}/m^p$, onde $p \in \{1, 2, \dots, m\}$. Isto é, acrescenta-se frequências espaciais que são sub-harmônicos da menor frequência, de sorte que este algoritmo é conhecido como sub-harmônico.

A escolha de m depende da precisão com que se deseja representar as telas de fase, o que é tipicamente verificado comparando a função de estrutura média que elas geram

¹⁶A particular estatística dos turbilhões ou, mais especificamente, dos coeficientes $\tilde{\varphi}_{ij}$, é menos importante já que tomadas em grande número ainda resultarão na desejada estatística gaussiana, contanto que possuam média nula e variância dada por (2.4.56).

com sua expressão teórica. Na figura 2.5 são traçadas as funções $\exp[-D_0^k(\boldsymbol{\rho})/2]$, presentes no integrando que descreve a propagação do feixe de segunda ordem em (2.2.32), segundo a expressão teórica e os resultados da geração numérica de telas de fase pelos algoritmos direto e sub-harmônico. A abscissa é descrita em termos da razão $|\boldsymbol{\rho}|/\rho_t$ e tanto as escalas interna $\ell_0 = 0$ e externa $L_0 \rightarrow \infty$ quanto o valor de $m = 3$ (o mesmo valor utilizado em [46, cap. 9]) são escolhidos em acordo com as simulações realizadas ao longo de toda a tese. A diferença entre os resultados da teoria e das simulações chega a 159% e 11%, respectivamente, para os algoritmos simples e sub-harmônico, mostrando clara vantagem na adoção do segundo.

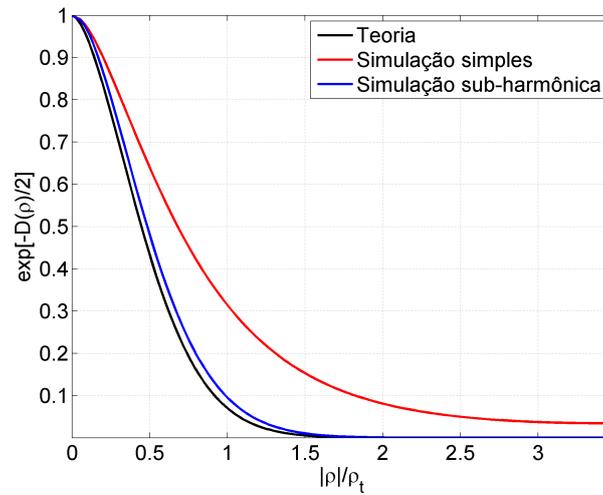


Figura 2.5: Comparação dos métodos de geração de telas de fase com a expressão teórica.

Apêndice 2A: Segundo momento de um feixe em atmosfera turbulenta

Este apêndice concerne à demonstração da relação (2.2.44), qual seja:

$$\Sigma^2(z) = \sigma^2 + k^{2/5}\gamma^2, \quad (2.A.1)$$

onde

$$\gamma(z) = \left[4.635z^{8/3} \int_0^1 C_n^2(vz)(1-v)^{5/3} dv \right]^{3/5}. \quad (2.A.2)$$

Começemos pela equação de propagação do segundo momento não trabalhada:

$$\Sigma^2(z) = (\sigma_0^T)^2 + B^T z + (\Theta_0^T)^2 z^2, \quad (2.A.3)$$

onde as quantidades com índice T são análogas às definidas em (2.2.39), exceto com a densidade espectral cruzada W_0 trocada por $W_0^T(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) = W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) \exp[-D_0^k/2]$. O primeiro termo, $\sigma_0^T = \sigma_0$, dado que $W_0^T(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}') = W_0(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}')$. O mesmo vale para B^T , ou seja, $B^T = B$ como se pode ver calculando um dos dois termos do integrando:

$$\begin{aligned} & \{(\boldsymbol{\rho}'_1 \cdot \nabla'_1) W_0^T(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2)\}_{\boldsymbol{\rho}'_1=\boldsymbol{\rho}'_2=\boldsymbol{\rho}'} = W_0(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}') \left\{ (\boldsymbol{\rho}'_1 \cdot \nabla'_1) \exp \left[\left| \frac{\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2}{\rho_t(z)} \right|^{5/3} \right] \right\}_{\boldsymbol{\rho}'_1=\boldsymbol{\rho}'_2=\boldsymbol{\rho}'} \\ & \quad + \{(\boldsymbol{\rho}'_1 \cdot \nabla'_1) W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2)\}_{\boldsymbol{\rho}'_1=\boldsymbol{\rho}'_2=\boldsymbol{\rho}'} \\ & = \left\{ W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) \frac{5}{3} \boldsymbol{\rho}'_1 \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2}{|\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2|^{1/3}} + (\boldsymbol{\rho}'_1 \cdot \nabla'_1) W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) \right\}_{\boldsymbol{\rho}'_1=\boldsymbol{\rho}'_2=\boldsymbol{\rho}'} \\ & = \{(\boldsymbol{\rho}'_1 \cdot \nabla'_1) W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2)\}_{\boldsymbol{\rho}'_1=\boldsymbol{\rho}'_2=\boldsymbol{\rho}'} \cdot \end{aligned} \quad (2.A.4)$$

A divergência Θ_0^T , porém, é diferente na presença de turbulência e só pode ser expressa analiticamente em uma forma aproximada. O desenvolvimento será feito para dois casos distintos: o de um feixe gaussiano coerente e o de um feixe com pouca coerência transversal. Em ambos, porém, será considerada como primeira aproximação a seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}D_0^k &= \left(\frac{|\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2|}{\rho_t} \right)^{5/3} \\ &\approx \left(\frac{|\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2|}{\rho_t} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.A.5)$$

No caso do feixe gaussiano coerente com variâncias $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_0^2$ ao longo das

direções x e y , a divergência se escreve:

$$\begin{aligned}
(\Theta_0^T)^2 &= \frac{\mathcal{N}}{(2\pi)^4 k^2} \int q^2 d^2 q \iint d^2 \rho'_1 d^2 \rho'_2 W_0^T(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) \exp[-i\mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2)] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4 k^2} \int q^2 d^2 q \iint d^2 \rho'_1 d^2 \rho'_2 \exp\left[-\frac{\rho'^2_1 + \rho'^2_2}{4\sigma_0^2}\right] \\
&\quad \times \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2)^2}{\rho_t^2}\right] \exp[-i\mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2)]. \tag{2.A.6}
\end{aligned}$$

A constante de normalização $\mathcal{N} = \int d^2 q \tilde{W}_0^T(-\mathbf{q}, \mathbf{q})$. Definindo novas variáveis de integração $\boldsymbol{\rho}_+ = \boldsymbol{\rho}'_1 + \boldsymbol{\rho}'_2$ e $\boldsymbol{\rho}_- = \boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2$, com o Jacobiano resultante $\partial(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2)/\partial(\boldsymbol{\rho}_+, \boldsymbol{\rho}_-) = 1/4$, a expressão toma uma forma mais simples:

$$\begin{aligned}
(\Theta_0^T)^2 &= \frac{\mathcal{N}}{4(2\pi)^4 k^2} \int d^2 \rho_+ \exp\left[-\frac{\rho_+^2}{8\sigma_0^2}\right] \\
&\quad \times \int q^2 d^2 q \int d^2 \rho_- \exp\left[-\rho_-^2 \left(\frac{1}{8\sigma_0^2} + \frac{1}{\rho_t^2}\right) - i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}_-\right] \\
&= \frac{\mathcal{N}'}{k^2} \int q^2 \exp\left[-\frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{4\sigma_0^2} + \frac{2}{\rho_t^2}\right)^{-1}\right] d^2 q, \tag{2.A.7}
\end{aligned}$$

de onde se conclui por inspeção que o resultado é

$$\begin{aligned}
(\Theta_0^T)^2 &= \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{4}{\rho_t^2}\right) \\
&= \Theta_0^2 + \frac{4}{k^2 \rho_t^2}. \tag{2.A.8}
\end{aligned}$$

Se, ao contrário, o feixe é pouco coerente, convém reescrever a divergência como

$$\begin{aligned}
(\Theta_0^T)^2 &= \frac{1}{(2\pi)^4 k^2} \int d^2 q \iint d^2 \rho'_1 d^2 \rho'_2 W_0^T(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) q^2 \exp[-i\mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2)] \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^4 k^2} \int d^2 q \iint d^2 \rho'_1 d^2 \rho'_2 W_0^T(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) \nabla^2 e^{-i\mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2)} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^4 k^2} \int d^2 q \iint d^2 \rho'_1 d^2 \rho'_2 e^{-i\mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2)} \nabla^2 W_0^T(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2), \tag{2.A.9}
\end{aligned}$$

onde definimos ∇^2 como o laplaciano sobre a variável $\boldsymbol{\rho}_- = \boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2$ e utilizamos a segunda identidade de Green na última passagem [67]. Por “pouco coerente” entenda-se que a variação de $W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2)$ com $\boldsymbol{\rho}_-$ é muito mais rápida que a variação de D_0^k com a mesma variável, de forma que esse último termo possa ser retirado do integrando

acima e avaliado em $\boldsymbol{\rho}_- = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
(\Theta_0^T)^2 &= -\frac{1}{(2\pi)^4 k^2} \iint d^2 \rho'_1 d^2 \rho'_2 \int d^2 q \exp[-i\mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2)] \\
&\quad \times \left\{ W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) \nabla^2 \exp\left[-\frac{1}{2} D_0^k\right] + \exp\left[-\frac{1}{2} D_0^k\right] \nabla^2 W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) \right\} \\
&\approx -\frac{1}{(2\pi)^4 k^2} \left\{ \left[\nabla^2 e^{-\frac{1}{2} D_0^k} \right]_{\boldsymbol{\rho}_-=0} \int d^2 q \tilde{W}_0(-\mathbf{q}, \mathbf{q}) \right. \\
&\quad \left. + \left[e^{-\frac{1}{2} D_0^k} \right]_{\boldsymbol{\rho}_-=0} \int d^2 q \iint d^2 \rho'_1 d^2 \rho'_2 e^{-i\mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2)} \nabla^2 W_0(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) \right\} \\
&= -\frac{1}{k^2} \left[\nabla^2 e^{-\frac{1}{2} D_0^k} \right]_{\boldsymbol{\rho}_-=0} + \Theta_0^2. \tag{2.A.10}
\end{aligned}$$

O primeiro termo à direita, desenvolvido, resulta

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{k^2} \left[\nabla^2 e^{-\frac{1}{2} D_0^k} \right]_{\boldsymbol{\rho}_-=0} &= -\frac{1}{k^2} \left[\nabla^2 e^{-\frac{\rho_-^2}{\rho_t^2}} \right]_{\boldsymbol{\rho}_-=0} \\
&= -\frac{1}{k^2} \nabla \cdot \left[-2 \frac{\boldsymbol{\rho}_-}{\rho_t^2} e^{-\frac{\rho_-^2}{\rho_t^2}} \right]_{\boldsymbol{\rho}_-=0} \\
&= -\frac{4}{k^2 \rho_t^2}. \tag{2.A.11}
\end{aligned}$$

A expressão final para Θ_0^T é portanto a mesma nas duas situações consideradas. Para deixar explícita a dependência da divergência com o vetor de onda, define-se γ como em (2.A.2), concluindo a demonstração de (2.A.1).

Apêndice 2B: Conversão de parâmetros da simulação

Em [46, cap. 9], Schmidt parametriza as quantidades que descrevem a turbulência atmosférica de modo distinto do apresentado no presente trabalho. Este apêndice detalha as conversões necessárias para se utilizar o código do repositório público https://github.com/MarcPer/Turbulence_MonteCarlo.

Um dos parâmetros utilizados em [46] é o chamado parâmetro de Fried de onda plana

$$r_{0pl} = \left[0.423k^2 \int_0^L C_n^2(z) dz \right]^{-3/5}, \quad (2.B.1)$$

definido na página 159. Note-se pela definição (2.2.33) de $\rho_t(z)$, reproduzida aqui em forma alternativa:

$$\rho_t(z) = \left[1.46k^2 \int_0^L dz C_n^2(z) \left(1 - \frac{z}{L}\right)^{5/3} \right]^{-3/5}, \quad (2.B.2)$$

que se a turbulência for considerada homogênea ao longo de Z , de sorte que C_n^2 é constante, as duas variáveis se relacionam através de

$$r_{0pl} \approx 1.17\rho_t. \quad (2.B.3)$$

Embora não explicitado pelo autor em [46], na geração das telas de fase o parâmetro de Fried para onda plana r_{0pl} - e não para onda esférica r_{0sw} - é utilizado. Mais especificamente, a i -ésima tela é criada, como descrito na seção 2.4, a partir de distribuições normais de variâncias que seguem o seguinte espectro¹⁷:

$$\phi_f(f) = 0.025r_{0i}f^{-11/3}, \quad (2.B.4)$$

escrito em termos de frequência espacial f (unidades de ciclos/distância), como em [46], ao invés de κ (unidades de radianos/distância). Os termos r_{0i} são os parâmetros de Fried de onda plana associados a cada placa e definidos como

$$r_{0i} = \left[0.423k^2 C_{ni}^2 \Delta z_i \right]^{-3/5}, \quad (2.B.5)$$

onde Δz_i é a separação entre as telas de fase dos planos $Z = z_i$ e $Z = z_{i+1}$ ao longo do eixo de propagação Z .

A turbulência da câmara é, como descrito na seção 2.3, caracterizada pelo fator

$$\gamma_y(z) = \left[2.601z^{5/3} \int_0^L C_n^2(z) \left(1 - \frac{z}{L}\right)^{5/3} dz \right]^{3/5}. \quad (2.B.6)$$

¹⁷O coeficiente 0.025 a seguir pode ser deduzido à partir da equação (2.1.15), substituindo-se $\kappa = 2\pi f$, o valor de ρ_t dado em (2.B.3) e multiplicando-se o resultado por $(2\pi)^3$ a fim de compensar a diferença nas definições de transformada de Fourier utilizadas nesta tese e em [46, p. 15].

Se se pretende comparar dados experimentais com resultados de simulação, o efeito combinado das telas de fase deve ser tal a resultar no mesmo conjunto de valores de γ_y . Para tanto, primeiro deve-se discretizar a integral em γ_y :

$$\gamma_y \approx \left[2.601L^{5/3} \sum_i C_{ni}^2 \left(1 - \frac{z_i}{L}\right)^{5/3} \Delta z_i \right]^{3/5}. \quad (2.B.7)$$

No caso de separações constantes $\Delta z_i = \Delta z$ e turbulência homogênea, ou seja, $C_{ni}^2 = C_n^2$, a relação entre r_{0i} e γ_y se torna patente:

$$r_{0i} = \left[\frac{0.423k^2}{2.601L^{5/3}} \frac{\gamma_y^{5/3}}{\sum_i (1 - z_i/L)^{5/3}} \right]^{-3/5}. \quad (2.B.8)$$

Mais informações sobre como usar as classes e funções podem ser encontradas no próprio repositório [68].

Capítulo 3

Cancelamento de aberrações

Neste capítulo demonstrar-se-á como um feixe de correlação, conceito a ser introduzido na seção 3.1, pode ser feito menos suscetível à ação da turbulência. A teoria é descrita na seção 3.2, logo após uma breve revisão do processo de conversão paramétrica descendente espontânea (CPDE) na subseção 3.1.3. Esse processo foi utilizado no experimento descrito na seção 3.4 para implementar a metodologia de cancelamento, baseada em óptica de quarta ordem; o mesmo experimento pode ser encontrado descrito também, embora com menos detalhe, em [50].

Alguns detalhes de implementação das simulações são expostos em 3.3, que esclarecem como uma rotina computacional destinada a propagações de feixes de segunda ordem pode ser adaptada à propagação de um feixe de quarta ordem.

3.1 Feixes de correlação e CPDE

3.1.1 Equações de Wolf

Na óptica, o termo “feixe” é tipicamente reservado a campos eletromagnéticos que se propagam paraxialmente. É possível porém generalizar o conceito, estendendo-o a outras quantidades que, similarmente, se propagam no regime paraxial.

Considere, por exemplo, a densidade espectral cruzada de segunda ordem, associada ao campo elétrico $E(\boldsymbol{\rho}, z)$ de número de onda k :

$$W_2(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) = \overline{E^*(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)E(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)} . \quad (3.1.1)$$

Se cada campo que a compõe satisfaz a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 E(\boldsymbol{\rho}, z) + k^2 E(\boldsymbol{\rho}, z) = 0 , \quad (3.1.2)$$

onde ∇^2 é o operador laplaciano em três dimensões, também a densidade espectral a satisfará para cada uma de suas variáveis $(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)$ e $(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)$, ou seja,

$$(\nabla_1^2 + k^2) W_2(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) = 0 , \quad (3.1.3a)$$

$$(\nabla_2^2 + k^2) W_2(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) = 0 . \quad (3.1.3b)$$

As equações (3.1.3) descrevem a propagação das correlação entre os campos, e são conhecidas como uma das formas das equações de Wolf [22, p. 183].

De maneira mais geral, podemos tratar da propagação de funções de correlação de ordens mais altas como W_4 , W_6 , etc. A função de correlação de quarta ordem

$$W_4(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) = \overline{E^*(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)E(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)E^*(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)E(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)}, \quad (3.1.4)$$

por exemplo, pode ser medida com um filtro óptico que apenas transmite luz com um determinado comprimento de onda, e que incide sobre dois detectores de intensidade cujos sinais de saída são direcionados a um correlacionador¹ [22, seção 9.4].

3.1.2 Conversão paramétrica descendente espontânea

Um ponto central desta tese é o estudo da influência da turbulência óptica em feixes de correlação, e uma das maneiras de se gerar tal feixe é através da conversão paramétrica descendente espontânea (CPDE). Na CPDE, um fóton de frequência angular ω_p e vetor de onda \mathbf{k}_p do feixe de bombeamento é convertido em dois, de frequências angulares ω_1 , ω_2 e \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 . Naturalmente, as leis de conservação de energia e momento impõem as seguintes condições sobre os fótons gerados:

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2, \quad (3.1.5a)$$

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (3.1.5b)$$

Essas restrições, logo, estabelecem correlações sobre os fótons gerados. Se as saídas de dois detectores de fótons forem transmitidas a um correlacionador que filtra detecções simultâneas, apenas eventos em que os ângulos de propagação e frequências dos fótons satisfazem as equações (3.1.5) serão medidos.

A descrição acima acerca da CPDE, embora rudimentar, expressa a base sobre a qual um desenvolvimento mais rigoroso segue. O processo de geração dos fótons envolve o acoplamento entre três campos, o do fóton convertido, chamado bombeador, e os dos fótons gerados, e portanto só se espera ocorrer em meios não-lineares. Tipicamente, cristais especificamente construídos para esse fim são usados, que as condições (3.1.5) em geral não podem ser satisfeitas.

Um dos obstáculos à geração é a dispersão dos meios geradores: a presença do índice de refração nos vetores de onda faz com que uma restrição de (3.1.5) impossibilite a outra [69, p. 79]. Se considerarmos um processo colinear, em que os vetores de onda \mathbf{k}_p , \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 só possuem a componente ao longo da direção de propagação Z não-nula, a equação (3.1.5b) pode ser reescrita como

$$n_p\omega_p = n_1\omega_1 + n_2\omega_2, \quad (3.1.6)$$

¹Uma configuração similar a esta foi demonstrada por Hanbury Brown e Twiss [20] como sendo útil na determinação do grau de coerência da luz de estrelas.

onde n_p , n_1 e n_2 são os índices de refração do meio gerador nas frequências ω_p , ω_1 e ω_2 (não se deve confundir n_1 como $n_1(\boldsymbol{\rho}', z')$ introduzido no capítulo anterior). Sob dispersão normal, $n_p > n_1$, n_2 . Se, por definição, assumirmos que $\omega_2 \geq \omega_1$ e utilizarmos (3.1.5a), vemos, ao reescrever (3.1.6) como

$$\omega_p(n_p - n_2) = (n_1 - n_2)\omega_1, \quad (3.1.7)$$

que o lado esquerdo é necessariamente maior do que zero enquanto, porque $n_2 \geq n_1$, o direito é negativo ou nulo. Conclui-se que nessas condições não se pode satisfazer simultaneamente as condições em (3.1.5).

Fisicamente, o campo de saída do cristal é o resultado da conversão ao longo de toda sua espessura e se os vetores de onda não satisfazem (3.1.5b), uma fase começa a se acumular entre as amplitudes de onda associadas aos fótons gerados em diferentes planos do cristal. A diferença de fase começa então a se manifestar como interferência destrutiva e os campos gerados passam a ser suprimidos. Essa interpretação nos permite notar que a igualdade em (3.1.5b) é relaxada quão mais fino é o cristal. Adicionalmente, ficam mais claras as duas soluções tipicamente usadas:

- Um cristal birrefringente é usado de forma que a mudança nos índices de refração dos fótons gerados devida à dispersão é compensada por índices diferentes para polarizações diferentes. Segue que um ou ambos os fótons gerados possuem polarização ortogonal ao do fóton convertido; processos designados tipo II e tipo I, respectivamente.
- O sinal do coeficiente de não-linearidade do cristal é periodicamente invertido de modo que componentes que seriam geradas com uma defasagem de π e passariam a interferir destrutivamente passam a gerar interferência construtiva, aumentando a potência de saída [70, 71].

O processo de evitar a interferência destrutiva é chamado de casamento de fase, uma condição seriamente restritiva sobre quais acoplamentos podem ser realizados e em que meios. Ainda assim, com um cristal adequadamente preparado, vários ângulos e frequências satisfazem as condições de geração dos fótons, como se pode ver na imagem 3.1, que mostra a luz emitida por um cristal de CPDE com casamento de fase do tipo I e detectada com uma câmera.

3.1.3 Função de onda da CPDE

A descrição teórica da CPDE se encontra desenvolvida repetidamente na literatura de óptica quântica [47, 48, 49] e portanto não será refeita aqui. Há que se ressaltar, porém, que a descrição dos campos dada até então é clássica, enquanto o processo de CPDE é fundamentalmente quântico². Em [74], são demonstradas equações para a

²Um tratamento clássico pode ser feito para a fluorescência da CPDE, descrevendo a influência do vácuo como uma variável estocástica [73]. Esta descrição, ao contrário da quântica, não parte de princípios fundamentais e ademais não provê informações sobre as correlações de quarta ordem [49].

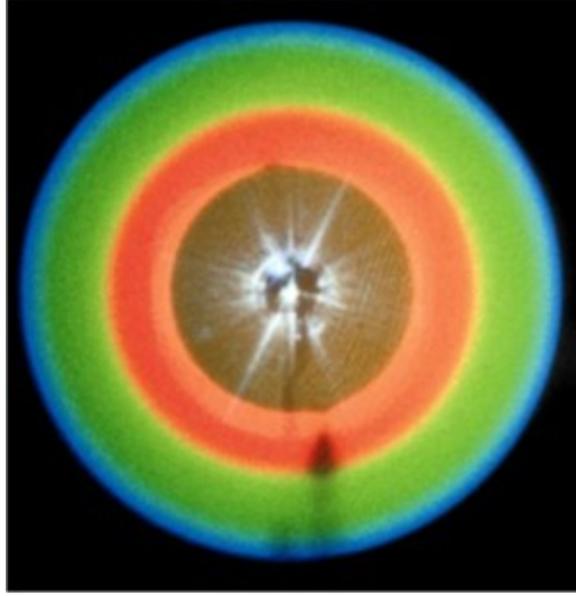


Figura 3.1: Fluorescência resultante da CPDE. O largo espectro angular e de frequência mostra como as condições (3.1.5) podem ser satisfeitas de muitas maneiras. Foto retirada de [72].

“função de onda” do feixe de correlação da CPDE, análogas às equações de Wolf ³, que nos permitem conciliar um tratamento rigorosamente quântico com o formalismo clássico utilizado até então, mais próximo do utilizado no estudo de propagações de feixes ópticos em atmosfera turbulenta.

A geometria da descrição é aquela exposta na figura 3.2: os fótons de interesse se propagam paraxialmente na direção Z , o plano $Z = 0$ é o do centro do cristal de conversão e o de detecção é descrito por $Z = L$. Por meio de filtros ópticos e ajuste do ângulo do cristal, no experimento a ser descrito foram detectados apenas fótons gerados no regime colinear e degenerado, isto é, com direções de propagação próximas à do feixe de bombeamento e de mesmas frequências ($\omega_1 = \omega_2$).

A amplitude de detecção associada à detecção coincidente de tais fótons, um em $\mathbf{r}_1 = (\boldsymbol{\rho}_1, z_1)$ e outro em $\mathbf{r}_2 = (\boldsymbol{\rho}_2, z_2)$, é dada por

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) = \langle 0 | \hat{E}^{k(+)}(\mathbf{r}_1) \hat{E}^{k(+)}(\mathbf{r}_2) | \psi \rangle . \quad (3.1.8)$$

Chamamos esta quantidade de bifóton [76] ou função de onda do par.

Vários elementos da formulação quântica são introduzidos aqui:

- O estado quântico do par de fótons gerados $|\psi\rangle$,
- o estado de vácuo $|0\rangle$ e

³Uma função de onda para o fóton não é estritamente válida, uma vez que não se pode definir um operador posição associado à luz [75]. O termo é convencionalmente atribuído a uma quantidade operacionalmente bem definida, como descrito no texto.

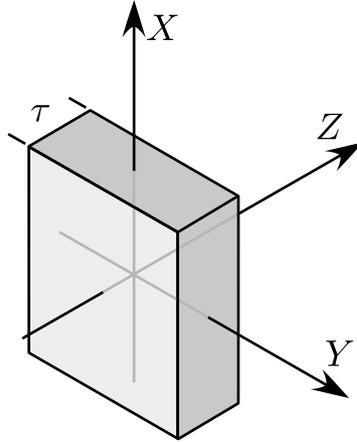


Figura 3.2: Geometria do problema de geração e propagação de fótons da CPDE. A origem do sistema de coordenadas fica no centro do cristal não-linear e à direção de propagação, definida pela direção do feixe de bombeamento, se atribui o eixo Z .

- o operador de campo elétrico $\hat{E}^{k(+)}$ (que se distingue do campo elétrico clássico pelo $\hat{}$)

O estado de vácuo representa a ausência de excitações nos modos do campo [77, cap. 10], enquanto $|\psi\rangle$ representa um estado com duas excitações. Cada operador $E^{k(+)}$ está associado com a detecção por aniquilação de um fóton [78] de número de onda k e a ação de dois deles em $|\psi\rangle$ resulta em um estado de vácuo⁴. Esta explicação, em particular, explica o porquê da introdução de $\langle 0|$ em \mathcal{A} , um artifício para passar a descrição por operadores a uma que envolve apenas escalares, e válida apenas na situação em que $|\psi\rangle$ descreve um estado de dois fótons. A quantidade objetivamente mensurável, que é a probabilidade de detecção, é dada pelo módulo quadrado $|\mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)|^2 = \langle \psi | E^{(-)}(\mathbf{r}_2)E^{(-)}(\mathbf{r}_1)E^{(+)}(\mathbf{r}_1)E^{(+)}(\mathbf{r}_2) | \psi \rangle$, onde $E^{(-)}$ é o operador complexo conjugado de $E^{(+)}$.

Como brevemente mencionado, Saleh, Teich e Sergienko [74] mostraram que a função $\mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)$ satisfaz equações de propagação como as equações de Wolf. Isto é evidente se se nota que os operadores de campo em (3.1.8) satisfazem equações de propagação do campo tais como (3.1.2). Uma vez estabelecido que a função de onda segue equações de propagação do campo eletromagnético, resulta também que a sua propagação pode ser descrita em forma integral pelo princípio de Huygens-Fresnel:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) &= \iint d^2\rho'_1 \iint d^2\rho'_2 \mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}'_1, z'_1; \boldsymbol{\rho}'_2, z'_2) \\ &\times h^k(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1; z_1 - z'_1)h^k(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_2; z_2 - z'_2) . \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

⁴É possível se detectar a presença de um fóton através da criação de outro. Detectores deste tipo são chamados detectores de emissão [79, p. 27].

A propagação descrita nestes termos nos permite utilizar o método de Huygens-Fresnel generalizado, como na seção 2.2.1, incluindo o efeito da turbulência nos propagadores h^k . Como antes salientado, os fótons gerados não necessariamente têm a mesma frequência. O fato de que se tenha escrito a equação anterior em termos de dois propagadores associados a um mesmo número de onda k é uma escolha que se deve ao cenário sobre o qual se irá trabalhar: o da conversão degenerada. Nessa situação são detectados apenas fótons cujos comprimentos de onda satisfazem $\lambda_1 = \lambda_2 = 2\lambda_p$, o que se faz por meio de filtros de interferência ópticos.

Finalmente, uma expressão para \mathcal{A} pode ser obtida à partir do Hamiltoniano que descreve a dinâmica da CPDE [47]. Uma forma especialmente conveniente para o trabalho desenvolvido aqui é a que se deduz em [49], uma vez que privilegia a descrição dos graus de liberdade espaciais associados ao bifóton. Ela se baseia na seguinte expressão do estado $|\psi\rangle$, calculado em $Z = 0$:

$$|\psi\rangle \propto \int d^2q_1 \int d^2q_2 \tilde{E}_p(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) |\mathbf{q}_1\rangle |\mathbf{q}_2\rangle, \quad (3.1.10)$$

onde $|\mathbf{q}\rangle$ representa um modo de onda plana com vetor de onda $\mathbf{k} = (\mathbf{q}, \sqrt{k^2 - q^2})$ e \tilde{E}_p é o espectro angular do feixe de bombeamento no plano $Z = 0$, cuja transformada de Fourier representa seu perfil transversal [60, seção 3.10]. A função

$$\tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{q}) = \text{sinc}\left(\frac{q^2\tau}{4k_p}\right), \quad (3.1.11)$$

onde $\text{sinc}(x) = \text{sen}(x)/x$ e τ representa a espessura do cristal ao longo de Z , é a chamada função de casamento de fase (veja o apêndice 4B). Os comprimentos transversais do cristal (isto é, ao longo dos eixos X e Y) são normalmente muito maiores que a largura do feixe de bombeamento e podem ser considerados efetivamente como sendo infinitos. O casamento de fase impõe, logo, que $\mathbf{q}_p = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$. A tolerância exigida sobre a componente restante Z da condição de conservação de momento linear (3.1.5b) fica determinada, porém, pela largura de \mathcal{V} . Um cristal espesso, isto é, com τ grande implica uma fina distribuição de $\tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{q})$. Isso por sua vez significa uma supressão de fótons gerados em que $\mathbf{q}_1 \not\approx \mathbf{q}_2$ ou, equivalentemente, $\sqrt{k^2 - q_1^2} \not\approx \sqrt{k^2 - q_2^2}$.

Pela expressão de $|\psi\rangle$ e definição do bifóton (3.1.8), este último pode ser calculado em $Z = 0$:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}_1, 0; \boldsymbol{\rho}_2, 0) = E_p \left(\frac{\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2}{2}\right) \mathcal{V}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2}{2}\right), \quad (3.1.12)$$

onde E_p é o perfil transversal do feixe de bombeamento em $Z = 0$ e $\mathcal{V}(\boldsymbol{\rho})$ a transformada de Fourier (bidimensional) da função $\tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{q})$. Pela equação de Huygens-Fresnel, a expressão de \mathcal{A} em outros planos pode em princípio ser determinada. No caso de propagação pelo vácuo, em que os termos h^k em (3.1.9) assumem a forma

$$h_0^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; z) = \frac{k}{i2\pi z} \exp\left[ikz + i\frac{k}{2z}|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|^2\right], \quad (3.1.13)$$

o resultado é particularmente simples [80]. Note-se que com as mudanças de variáveis

$$\boldsymbol{\rho}_+ = \frac{\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2}{2}, \quad (3.1.14a)$$

$$\boldsymbol{\rho}_- = \frac{\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2}{2}, \quad (3.1.14b)$$

e as análogas para $\boldsymbol{\rho}'_{1,2}$, devido à expressão quadrática dos termos envolvendo $\boldsymbol{\rho}$ nas exponenciais de h_0^k , a integral de Huygens-Fresnel para \mathcal{A} pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) &\propto \int d^2 \rho'_+ \int d^2 \rho'_- E_p(\boldsymbol{\rho}'_+) \mathcal{V}(\boldsymbol{\rho}'_-) \\ &\times \exp \left[\frac{ik_p}{2\zeta} \left(|\boldsymbol{\rho}_+ - \boldsymbol{\rho}'_+|^2 + |\boldsymbol{\rho}_- - \boldsymbol{\rho}'_-|^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

onde $k_p = 2k$ é o número de onda do feixe de bombeamento e o plano efetivo de propagação é dado por:

$$\frac{2}{\zeta} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}. \quad (3.1.16)$$

A propagação de \mathcal{A} pelo vácuo se separa então na propagação independente de cada um de seus fatores, E_p e \mathcal{V} e resulta em:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) = E_p \left(\frac{\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2}{2}, \zeta \right) \mathcal{V} \left(\frac{\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2}{2}, \zeta \right), \quad (3.1.17)$$

ou seja, no produto de suas partes propagadas até o plano $Z = \zeta$. Enfatizo que a propagação de E_p é precisamente a mesma que ocorre com o feixe de bombeamento, já que os perfis de ambos coincidem em $Z = 0$ e os propagadores envolvem o mesmo número de onda k_p . Ainda, para um cristal suficientemente fino, como o utilizado no experimento descrito na seção 3.2, a divergência de \mathcal{V} é muito maior que a de E_p , de modo que para distâncias ζ típicas a função de onda é aproximadamente constante no subespaço de $\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2$, ou seja, $\mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) \approx E_p \left(\frac{\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2}{2}, \zeta \right)$. Mais detalhes em [81].

Como veremos a seguir, a atmosfera turbulenta acrescenta termos envolvendo $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\rho}'$ de ordens superiores a 2 nos expoentes dos propagadores, de modo que a expressão (3.1.17) deixa de ser válida.

3.2 Propagação do bifóton na turbulência

À geometria exposta na figura 3.2 adicionamos a influência das flutuações de índice de refração causada pela turbulência atmosférica. Isto se faz pela inclusão de uma variável aleatória ψ no propagador de onda esférica, como em (2.2.24):

$$h^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; z) = h_0^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; z) \exp [\psi^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; z)]. \quad (3.2.18)$$

A propagação do bifóton sob esse regime passa a ser descrita portanto pelo princípio generalizado de Huygens-Fresnel:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}_1, L; \boldsymbol{\rho}_2, L) &\propto \int d^2 \rho'_1 \int d^2 \rho'_2 E_p \left(\frac{\boldsymbol{\rho}'_1 + \boldsymbol{\rho}'_2}{2} \right) \mathcal{V}(\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2) \\ &\times \exp \left[\frac{ik}{2L} (|\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}_1|^2 + |\boldsymbol{\rho}'_2 - \boldsymbol{\rho}_2|^2) \right] \\ &\times \exp [\psi^k(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}_1; L) + \psi^k(\boldsymbol{\rho}'_2, \boldsymbol{\rho}_2; L)]. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

As funções aleatórias $\psi^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L)$ representam, fisicamente, distorções de fase e amplitude infligidas sobre uma onda esférica originada em $(\boldsymbol{\rho}', 0)$ e observada em $(\boldsymbol{\rho}, L)$. É demonstrado em [82] que em geral ψ^k contém termos de todas as ordens nas suas variáveis $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\rho}'$, de sorte que o desenvolvimento que leva à forma (3.1.17) do bifóton não procede sob um regime de propagação turbulenta.

A expressão (3.2.19) é de pouca utilidade na forma em que está. O caminho usual seria calcular quantidades de interesse e tomar a média sobre as realizações da turbulência, o que levaria a expressões formidáveis envolvendo quatro ou mais variáveis ψ^k , suas médias e variâncias. Alternativamente, consideraremos a aproximação de cristal fino⁵, em que $\mathcal{V}(\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2) = \delta^2(\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2)$, e assumiremos os detectores posicionados ambos em $\mathbf{r} = (\boldsymbol{\rho}, L)$. Com isso, a expressão (3.2.19) se torna

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}, L; \boldsymbol{\rho}, L) \propto \iint d^2 \rho' E_p(\boldsymbol{\rho}') \exp \left[\frac{ik_p}{2L} |\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}|^2 \right] \exp [2\psi^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L)]. \quad (3.2.20)$$

A turbulência resulta na flutuação do índice de refração do ar mas, o caminho óptico é ainda linearmente proporcional ao número de onda do feixe. Explícitamente, considerada a dependência em k de (2.2.28), em efeito temos $2\psi^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L) = \psi^{k_p}(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L)$, o que nos mostra que a propagação descrita por (3.2.20) é formalmente a mesma do feixe de bombeamento sob as mesmas circunstâncias⁶. Por referência, esta última se escreve

$$E_p(\boldsymbol{\rho}, L) \propto \iint d^2 \rho' E_p(\boldsymbol{\rho}') \exp \left[\frac{ik_p}{2L} |\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}|^2 \right] \exp [\psi^{k_p}(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L)]. \quad (3.2.21)$$

Se introduzirmos uma reflexão adicional no fóton 2, por exemplo, efetivamente estaremos introduzindo uma inversão de suas coordenadas transversais $\boldsymbol{\rho}'_2 \rightarrow -\boldsymbol{\rho}'_2$. Feita essa operação e com uma nova escolha de posicionamento do detector 2, tal que $\mathbf{r}_2 = \tilde{\mathbf{r}}$, onde $\tilde{\mathbf{r}} = (-\boldsymbol{\rho}, L)$, chegamos à expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{inv}(\boldsymbol{\rho}, L; -\boldsymbol{\rho}, L) &\propto \iint d^2 \rho' E_p(\boldsymbol{\rho}') \exp \left[\frac{ik_p}{2L} |\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}|^2 \right] \\ &\times \exp [\psi^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L) + \psi^k(-\boldsymbol{\rho}', -\boldsymbol{\rho}; L)]. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

⁵A largura da função \mathcal{V} é da ordem de dezenas de microns para a faixa visível de comprimentos de onda e cristais de espessura de milímetros ou centímetros, em contraste com a largura do perfil transversal E_p , tipicamente da ordem de centenas de microns. Veja a seção 4.2 e referência [83].

⁶A assumida linearidade em k negligencia a dependência implícita no comprimento de onda da constante C_n^2 na definição (2.2.30) da função de estrutura D^k . A dispersão do ar é da ordem de 10^{-5} entre os comprimentos de onda de 325 nm e 650 nm [84, 85].

As perturbações ψ^k , assim como qualquer função, podem ser escritas em termos de suas partes par $\psi_{even}^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L) = [\psi^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L) + \psi^k(-\boldsymbol{\rho}', -\boldsymbol{\rho}; L)] / 2$ e ímpar $\psi_{odd}^k = [\psi^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L) - \psi^k(-\boldsymbol{\rho}', -\boldsymbol{\rho}; L)] / 2$. Podemos ver na segunda linha da equação (3.2.22) que a perturbação devida à turbulência é $2\psi_{even}^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L)$, ou seja, as perturbações ímpares são canceladas. Como se verá na expressão (3.3.24) adiante, (3.2.22) implica o cancelamento da parte ímpar de n_1 e provê a formulação sobre a qual se baseiam as simulações.

Dentre as perturbações ímpares canceladas estão a aberração de declinação $\psi_{tilt}(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; k) = (ik/2L)(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \cdot \mathbf{d}$, que desloca o feixe transversalmente por \mathbf{d} no plano focal do receptor e é uma das maiores causas de perda de resolução em imagens de longa exposição [86]. Em [82], Noll mostra que esta aberração sozinha pode responder por cerca de 87% de toda a perturbação de fase.

3.3 Simulações

A expressão geral (3.2.19) para a função de onda \mathcal{A} é intratável mesmo numericamente, pelas várias integrações e acoplamento entre variáveis. As formas aproximadas (3.2.20) e (3.2.22), ao contrário, são escritas de um modo especialmente adequado para o uso de simulações, uma vez que formalmente descrevem a propagação de um feixe de segunda ordem, muito embora com efeitos de turbulência se manifestando de maneira distinta daquela de feixes de segunda ordem típicos.

Pode-se trabalhar a expressão ψ_{even}^k à partir da definição de ψ^k , equação (2.2.25):

$$\psi^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; z) = \frac{k^2 z}{2\pi} \int_0^z dz' \iint d^2 \rho'' \frac{n_1(\boldsymbol{\rho}'', z')}{z'(z-z')} \times \exp \left\{ \frac{ik}{2} \left[\frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}''|^2}{z-z'} + \frac{|\boldsymbol{\rho}'' - \boldsymbol{\rho}'|^2}{z'} - \frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|^2}{z} \right] \right\}. \quad (3.3.23)$$

O resultado, após algumas manipulações, é:

$$\psi_{even}^k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; z) = \frac{k^2 z}{2\pi} \int_0^z dz' \iint d^2 \rho'' \frac{n_1(\boldsymbol{\rho}'', z') + n_1(-\boldsymbol{\rho}'', z')}{z'(z-z')} \times \exp \left\{ \frac{ik}{2} \left[\frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}''|^2}{z-z'} + \frac{|\boldsymbol{\rho}'' - \boldsymbol{\rho}'|^2}{z'} - \frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|^2}{z} \right] \right\}. \quad (3.3.24)$$

A distribuição espacial nas telas de fase φ está diretamente relacionada à variável n_1 . A presença do termo $n_1(\boldsymbol{\rho}'', z') + n_1(-\boldsymbol{\rho}'', z')$ indica portanto como adaptar a simulação para propagação do feixe de correlação com a inversão de coordenada:

- Telas de fase $\varphi_i(x, y)$ associadas ao comprimento de onda λ dos fótons gerados e aos planos $Z = z_i$ são criadas pelo algoritmo sub-harmônico da seção 2.4
- Novas telas são definidas à partir destas:

$$\hat{\varphi}_i(x, y) = \varphi_i(x, y) + \varphi_i(-x, -y). \quad (3.3.25)$$

- A propagação do perfil E_p é feita através das telas $\hat{\varphi}_i$.

No caso do feixe de correlação sem inversão de coordenadas, descrito por (3.2.20), basta mudar a definição de $\hat{\varphi}_i$ para a seguinte:

$$\hat{\varphi}_i(x, y) = 2\varphi_i(x, y) . \quad (3.3.26)$$

3.4 Experimento

Para medir o efeito degradante da turbulência atmosférica, emulamos sua dinâmica com a câmara descrita e caracterizada no capítulo anterior e fazemos com que um feixe gaussiano de interesse passe por ela. Como demonstrado no capítulo anterior, um feixe gaussiano de número de onda k que se propaga no vácuo e cuja largura (definido por seu segundo momento; ver (2.2.37)) ao longo do eixo Y no plano de detecção é $\sigma_y(L)$ permanecerá, quando sob efeito da turbulência, gaussiano se tomada uma média temporal, porém com uma largura dada por

$$\Sigma_y^2(z) = \sigma_y^2(z) + k^{2/5}\gamma_y^2(z) , \quad (3.4.27)$$

onde

$$\gamma_y(z) = \left[2.601z^{8/3} \int_0^1 C_n^2(vz)(1-v)^{5/3} dv \right]^{3/5} \quad (3.4.28)$$

caracteriza a força da turbulência.

O feixe gaussiano é focalizado em uma fenda de $50 \mu\text{m}$ orientada verticalmente, de modo que ao ter redistribuída sua irradiância em um perfil mais largo, uma fração menor de sua potência chega aos detectores em média. Alternativamente pode-se pensar que, durante o período em que se toma a média, o feixe é distorcido e desviado e portanto em uma fração maior do tempo deixará de incidir sobre a fenda. A idéia está ilustrada abaixo, na figura 3.3.

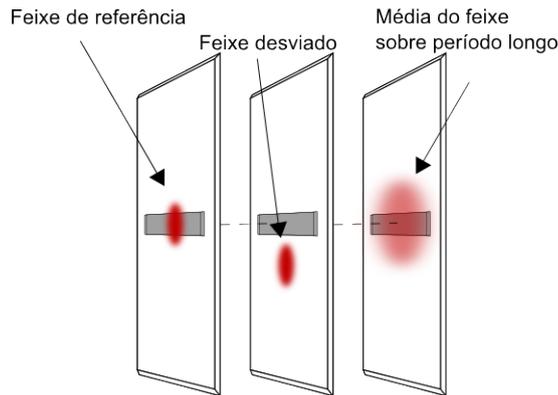


Figura 3.3: Influência da atmosfera reduz potência média da luz que atravessa uma fenda fixa.

Medimos então a queda no sinal como função da força da turbulência (quantificada pelo parâmetro γ_y) para diferentes situações:

- Medição em coincidência do bifóton com inversão de coordenada, correspondendo à eq. (3.2.22),
- medição em coincidência sem inversão de coordenada, correspondendo à eq. (3.2.20),
- medição direta da intensidade de um laser de He-Cd, de comprimento de onda $\lambda_p = 325$ nm, correspondendo à eq. (3.2.21) e
- medição direta da intensidade de um laser de He-Ne, também descrita por (3.2.21) com k_p substituído por $k_l = 2\pi/633$ nm⁻¹.

3.4.1 Medições em coincidência

O arranjo do experimento está esboçado na figura 3.4. Um laser de He-Cd⁷, que emite um feixe com comprimento de onda de $\lambda_p = 325$ nm, bombeia um cristal não-linear (NL na figura) de borato de bismuto monoclinico (BiB₃O₆) ou BiBO [87], de 5 mm de comprimento. Este é cortado de forma que os fótons gerados sejam degenerados em 650 nm e emitidos colinearmente ao laser. O cristal é do tipo I, isto é, os fótons gerados têm a mesma polarização entre si, e ortogonal à do laser.

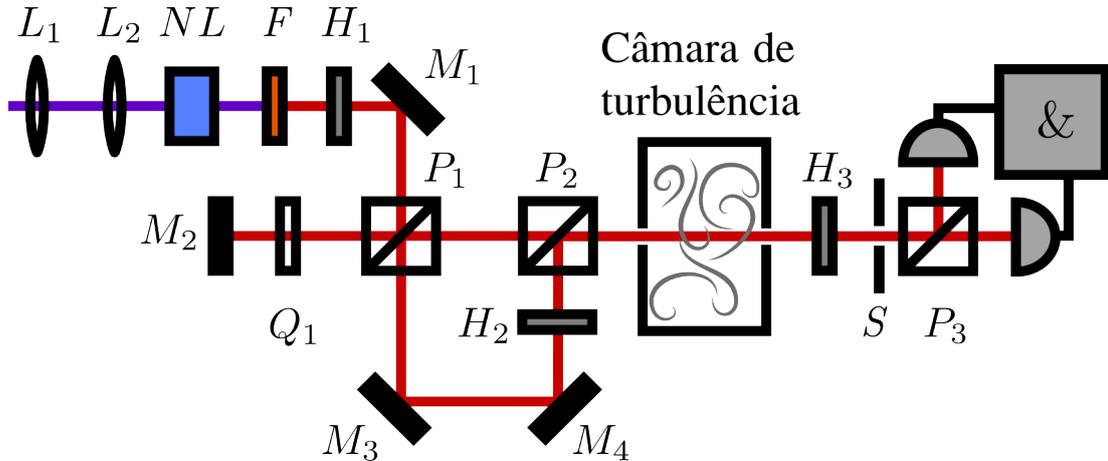


Figura 3.4: Esquema de cancelamento de aberrações no feixe de correlação. Fótons gerados no cristal não-linear (NL) passam por um aparato que inverte as coordenadas transversais de um dos componentes do par, sofrem os efeitos de turbulência ao se propagarem pela câmara e, após incidirem em uma fenda S , são detectados por dois foto-detectores ligados a um circuito de contagem em coincidência. Espelhos são denotados por M , placas de quarto de onda por Q , meia-onda por H , divisores polarizadores por P , lentes por L e um filtro dicróico que elimina o feixe de bombeamento por F .

⁷Modelo IK3401R-F, Kimmon Koha Co. Potência: 42 mW. Comprimento de onda: 325 nm.

Antes de incidir no cristal, o feixe de luz ultra-violeta é expandido e focalizado com uma cintura de $60 \mu\text{m}$ no plano da fenda (S) de largura $50 \mu\text{m}$, com o sistema de lentes L_1 e L_2 de distâncias focais 50.2 mm e 200 mm , respectivamente. Isto faz com que o termo σ_y^2 em (3.4.27) seja menor e o alargamento relativo devido à turbulência, maior, tornando-o mais facilmente mensurável.

Logo após o cristal, um espelho dicróico (F) deflete o feixe de bombeamento. Um aparato similar a um interferômetro de Mach-Zender assimétrico, o qual chamaremos de inversor, é colocado após uma placa de meia onda (H_1) e um espelho (M_1) e antes da câmara. Ele consiste de dois divisores de feixe polarizadores (P_1 e P_2), três espelhos (M_2 , M_3 e M_4), uma placa de um quarto de onda (Q_1) e uma placa de meia onda (H_2). Sua função é a de fazer com que um dos fótons de cada par sofra uma reflexão adicional. O fóton inicialmente refletido por P_1 tem sua polarização girada por 90° ao passar duas vezes pela placa Q_1 e é então transmitido por ambos P_1 e P_2 . O fóton inicialmente transmitido por P_1 tem também sua polarização girada de 90° por H_2 , sendo em seguida refletido por P_2 , em direção à câmara. Há duas reflexões no primeiro caso e três no segundo, resultando na inversão $q_{2y} \rightarrow -q_{2y}$ na componente horizontal do vetor \mathbf{q}_2 . A placa de meia onda H_3 só é usada na segunda parte do experimento, a ser descrita adiante.

Note-se que os fótons gerados têm, ao sair do cristal, a mesma polarização e portanto não seriam separados no inversor, mas a placa de meia onda H_1 fá-los ter a polarização de 45° com relação à mesa óptica (que corresponde ao plano ZY). Com isso, eles são separados com probabilidade $1/2$ e no restante das vezes seguem pelo mesmo braço do inversor. No entanto, antes de serem detectados, os fótons devem ser novamente separados pelo polarizador P_3 , o que só ocorre quando eles tomaram caminhos distintos no inversor. Os pares que percorrem o mesmo braço não são separados em P_3 e portanto não dão origem a coincidências.

O circuito de coincidências recebe pulsos TTL emitidos por dois detectores distintos⁸ e considera como contagens simultâneas aquelas para as quais as bordas de subida dos pulsos estão separadas temporalmente por menos de 9 ns , a chamada janela de coincidências. Ele se baseia numa FPGA (field-programmable gate array) integrada a uma saída USB que possibilita a conexão com um computador⁹, para interface e registro dos resultados.

O segundo experimento é análogo, porém sem a inversão do momento. Para isso, basta girar a placa de meia-onda H_1 de forma que ela não mude a polarização dos fótons gerados. Eles então seguem sempre pelo mesmo braço, sendo inicialmente refletidos em P_1 . A placa de meia-onda H_3 é orientada de forma que os fótons que passam por ela saem polarizados a 45° ; portanto com probabilidade $1/2$ os pares são separados e apenas quando isso acontece são computadas coincidências.

Em ambos experimentos, cada aferição do sinal foi feita tomando-se a média de 100 medidas, cada uma com um tempo de integração de 5 s . O erro de cada sinal

⁸Modelo SPCM-AQR-14, PerkinElmer.

⁹O projeto da placa contadora baseada em FPGA e utilizada no experimento pode ser encontrado em [88]. Outro projeto particularmente bem descrito e com software pronto está publicado em [89].

equivale ao desvio padrão. A tabela 3.1 abaixo mostra os resultados dessas médias, onde R_1 , R_2 e R_{12} se referem às taxas de detecção (número de fótons por segundo) dos detectores 1, 2 e das coincidências.

γ_y ($\mu\text{m}^{6/5}$)	Sem inversor			Com inversor		
	R_1	R_2	R_{12}	R_1	R_2	R_{12}
0	7343	7470	75.0	7664	7534	78.4
3.39	7303	7436	72.4	7754	7623	77.4
6.59	7259	7392	67.8	7750	7685	77.2
10.1	7243	7369	62.6	7828	7703	79.0
15.9	7225	7349	56.0	7768	7650	76.0
19.5	7370	7498	52.2	7929	7790	74.8
24.5	7252	7380	43.4	7880	7748	70.4

Tabela 3.1: Taxas de detecção de cada detector (R_1 e R_2) e de eventos em coincidência (R_{12}) para diferentes forças de turbulência (dadas por γ_y) e com os esquemas sem e com inversor.

3.4.2 Medição direta da intensidade do He-Cd e do He-Ne

Repetimos o experimento usando o mesmo laser He-Cd e em seguida um laser de He-Ne¹⁰, este com comprimento de onda de 632.8 nm e potência 32 mW. A distância entre L_1 e L_2 , no entanto, foi alterada quando usamos o He-Ne, de forma que o feixe se mantivesse focalizado em S . Neste caso sua cintura teve o valor medido de 58 μm .

Nas duas medições a fenda de 50 μm foi substituída por uma câmera CCD (charge-coupled device). Vídeos de 55 s foram gravados para cada força de turbulência e o valor do sinal foi calculado como a média neste tempo com erro dado pelo desvio padrão. Para simular o efeito da fenda, integramos a irradiância numa faixa vertical no centro da área ativa da câmera com largura de 11 pixels. Cada pixel é um quadrado de lado 4.65 μm , o que nos dá o efeito de uma fenda de 51.15 μm .

3.4.3 Resultados

Medições

Na figura 3.5 os sinais - número de coincidências ou irradiância integrada na área da fenda - normalizados pelos respectivos valores na ausência de turbulência ($\gamma_y = 0$), representados pelos marcadores menores que aparecem na legenda.

Note-se que as coincidências sem inversão se comportam como o He-Cd sob turbulência, como previsto em (3.2.20) e que o He-Ne se alarga pouco menos. O número de coincidências quando há inversão é notadamente robusto, decaindo visivelmente

¹⁰Modelo 127, Stabilité™ Helium-Neon Laser, Spectra-Physics.

apenas no regime de turbulência mais forte. Assumindo uma turbulência homogênea e moderada [7, p. 1526], $C_n^2(z) = C_n^2 = 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$, a distância percorrida para que o sinal original caia a 90% de seu valor original pode ser determinada utilizando a expressão (2.2.48) para γ_y e os valores correspondentes. No caso dos feixes de laser ou de correlação sem inversão, a queda a 90% ocorre aproximadamente em $\gamma_y = 9 \mu\text{m}^{6/5}$ e no caso do feixe de correlação com inversão, em $\gamma_y = 25.3 \mu\text{m}^{6/5}$. Isso nos dá distâncias propagadas de 3.4 e 6.4 km, aproximadamente, ou um aumento de 88%.

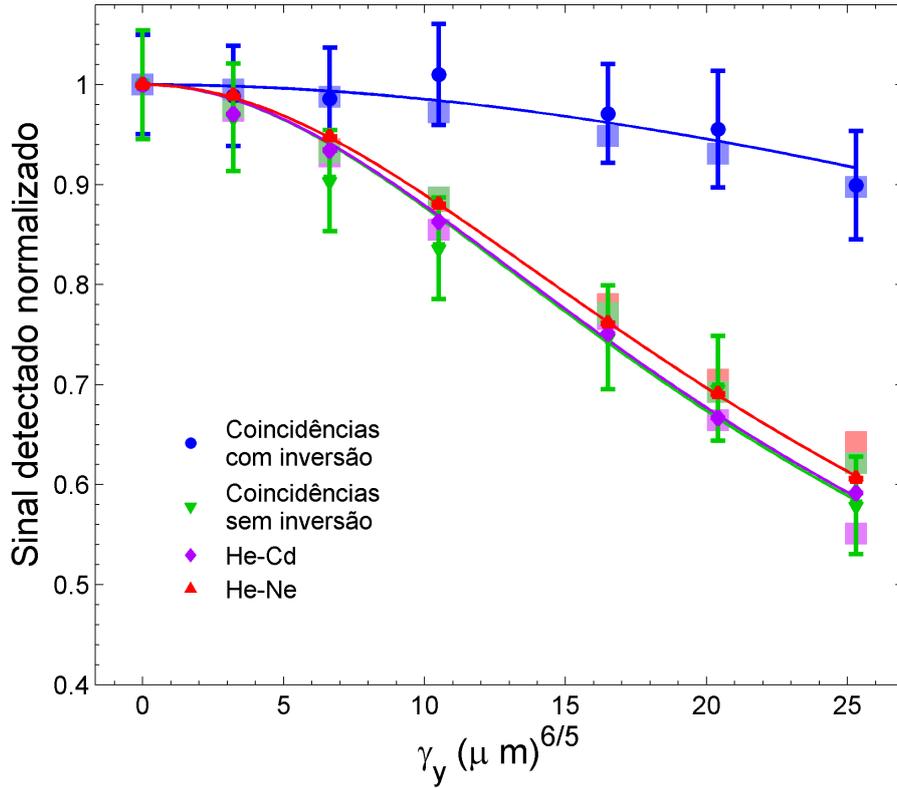


Figura 3.5: Taxa normalizada de detecção em função da força de turbulência. Marcadores menores correspondem a resultados experimentais, marcadores claros e quadrados são o resultado de simulações e as curvas correspondem a ajustes pelo modelo teórico (ver texto).

Simulação

Os marcadores quadrados maiores são o resultado de simulações de Monte Carlo, feitas de acordo com o que foi descrito nas seções 2.4 e 3.3, utilizando as funções do repositório público https://github.com/MarcPer/Turbulence_MonteCarlo. Suas cores são tonalidades mais claras das medições às quais correspondem; por exemplo, o marcador em azul claro corresponde à simulação da medição em coincidência

com inversão, representada por círculos azuis. Abaixo o conteúdo do arquivo `.dat` contendo os parâmetros da simulação para as propagações dos bifótons:

```
# Geometry
propagationDistance: 0.89
numberOfPhasePlanes: 40
turbulenceRegionStartPosition: 0.44
turbulenceRegionEndPosition: 0.63
slitWidth: 5e-2
# Turbulence Statistics
gammaRaw: 0, 3.39, 6.59, 10.1, 15.9, 19.5, 24.5
# Beam
wavelength: 650e-9
waistAtObservationPlane: 60e-6
# Simulation
numberOfRealizations: 150
transverseGridSize: 1024
gridSpacingSourcePlane: 0.0011
gridSpacingObservationPlane: 0.0014
```

A unidade padrão de distância no arquivo é o metro, exceto para o parâmetro `gammaRaw`, medido em $\mu\text{m}^{6/5}$. Dentre esses parâmetros, apenas o comprimento de onda é diferente nas simulações do laser de He-Cd e de He-Ne. Os planos de propagação, cuja quantidade é definida por `numberOfPhasePlanes`, são uniformemente distribuídos pela distância total percorrida `propagationDistance`, mas as telas de fase de distribuições aleatórias que simulam o efeito da turbulência se concentram na região

$$\text{turbulenceRegionStartPosition} < z < \text{turbulenceRegionEndPosition}.$$

Note-se que seu comprimento equivale a uma das dimensões da câmara de turbulência, aquela paralela ao eixo Z . Nessa região a turbulência é assumida uniforme.

Ajustes de curva

A fim de se atribuir um número à observada resistência do bifóton aos efeitos de alargamento da turbulência, definimos o parâmetro α pela relação seguinte:

$$\Sigma_y^2(z) = \sigma_y^2(z) + \alpha k^{2/5} \gamma_y^2(z). \quad (3.4.29)$$

O valor $\alpha = 1$ corresponde à influência normal da turbulência no alargamento do feixe, enquanto $\alpha < 1$ ocorre quando ela é parcialmente mitigada.

Para determinar os α associados a cada conjunto de medições, um ajuste de curvas é feito. Considerando a largura (3.4.29), a potência do feixe de segunda ordem que

passa por uma fenda de largura a é

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_2(\gamma_y) &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Pi_a(y) \exp[-y^2/2\Sigma_y^2] dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-y^2/2\Sigma_y^2] dy} \\
&= \frac{\int_{-a/2}^{a/2} \exp[-y^2/2\Sigma_y^2] dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-y^2/2\Sigma_y^2] dy} \\
&= \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{2}\Sigma_y}\right), \tag{3.4.30}
\end{aligned}$$

onde definimos a função fenda

$$\Pi_a(y) = \begin{cases} 1 & \text{para } |y| < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{do contrário.} \end{cases} \tag{3.4.31}$$

e utilizamos $\operatorname{erf}(x) = 2(\sqrt{\pi})^{-1} \int_0^x e^{-t^2} dt$, chamada função erro.

A potência (não normalizada) para o feixe de correlação é

$$\iint d^2\rho_1 \iint d^2\rho_2 |\mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}_1, L; \boldsymbol{\rho}_2, L)|^2 \Pi_a(y_1)\Pi_a(y_2). \tag{3.4.32}$$

Se assumirmos que a turbulência afeta apenas fracamente a forma funcional da função de onda, ou seja, se como na propagação pelo vácuo ela depender apenas de $\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2$, a equação anterior pode ser reescrita¹¹:

$$\begin{aligned}
&\iint d^2\rho_1 \iint d^2\rho_2 |\mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2, L)|^2 \Pi_a(y_1)\Pi_a(y_2) \\
&= \iint d^2\rho_+ \int dy_1 |\mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}_+, L)|^2 \left[\int dy_1 \Pi_a(y_1)\Pi_a(y_+ - y_1) \right], \tag{3.4.33}
\end{aligned}$$

onde foi definida a nova variável $\boldsymbol{\rho}_+ = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. A integral entre colchetes é a autoconvolução da função Π_a e possui solução analítica:

$$\Lambda_a(y) = \begin{cases} 1 - |y|/a & \text{para } |y| < a \\ 0 & \text{do contrário.} \end{cases} \tag{3.4.34}$$

A fração do feixe de quarta ordem que atravessa a fenda é dada portanto por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_4(\gamma_y) &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_a(y) \exp[-y^2/2\Sigma_y^2] dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-y^2/2\Sigma_y^2] dy} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\Sigma_y} \left\{ \int_0^a \exp[-y^2/2\Sigma_y^2] dy - \frac{1}{a} \int_0^a y \exp[-y^2/2\Sigma_y^2] dy \right\} \\
&= \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\Sigma_y}\right) - \frac{2\Sigma_y}{\sqrt{2\pi}a} \left[1 - \exp\left(-\frac{a^2}{2\Sigma_y^2}\right) \right]. \tag{3.4.35}
\end{aligned}$$

¹¹A inversão de coordenada de uma das configurações do experimento faz com que \mathcal{A} dependa predominantemente de $\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2$, o que porém não altera o desenvolvimento que segue.

Os dados do experimento são normalizados pelos valores em $\gamma_y = 0$, logo os ajustes são feitos com as funções $\mathcal{P}_2(\gamma_y)/\mathcal{P}_2(0)$ e $\mathcal{P}_4(\gamma_y)/\mathcal{P}_4(0)$. Os valores de α obtidos para cada conjunto de medições estão expostos na tabela 3.2.

Configuração	α
Bifóton com inversão	0.13 ± 0.05
Bifóton sem inversão	1.3 ± 0.2
He-Cd sem correção	1.06 ± 0.06
He-Ne sem correção	1.17 ± 0.02
He-Cd com correção	0.20 ± 0.01
He-Ne com correção	0.40 ± 0.02

Tabela 3.2: Parâmetros de ajuste α para diferentes montagens do experimento .

Pós-processamento e correção de declinação

Duas das configurações que compõem a tabela, “He-Ne com correção” e “He-Cd com correção”, ainda não foram mencionadas. A correção se refere a operações realizadas sobre os resultados das medições com os lasers He-Ne e He-Cd, ou seja, posteriormente às medições. O pós-processamento elimina efeitos referentes a desvios do centróide dos feixes (o chamado vaguear dos feixes) e consiste no seguinte:

- Um pixel fixo dos vídeos gravados é definido como o pixel de referência,
- A cada quadro dos vídeos, o centróide do perfil transversal é encontrado
- Cada quadro é deslocado transversalmente, de sorte que o centróide se situe no pixel de referência
- A média sobre os quadros deslocados é tomada.

O alargamento que persiste no perfil médio é então exclusivamente resultado de distorções de curta exposição. Na figura 3.6 os resultados das médias com e sem correção do feixe de He-Cd.

Embora pela tabela 3.2 se perceba que a correção diminui drasticamente o efeito da turbulência - redução de 81% para o He-Cd e 66% para o He-Ne - a melhoria é ainda menor que a conseguida pelo uso do bifóton e inversão de coordenada (90%), o que dá suporte à afirmação de que aberrações outras que não declinação são suprimidas no processo¹².

¹²O processo de correção é em parte similar a um método comumente utilizado em astronomia para aumentar a resolução de imagens de objetos celestes, chamado de “Lucky Imaging” [90]. Veja <http://www.ast.cam.ac.uk/research/instrumentation.surveys.and.projects/lucky.imaging/lucky.imaging.methods>.

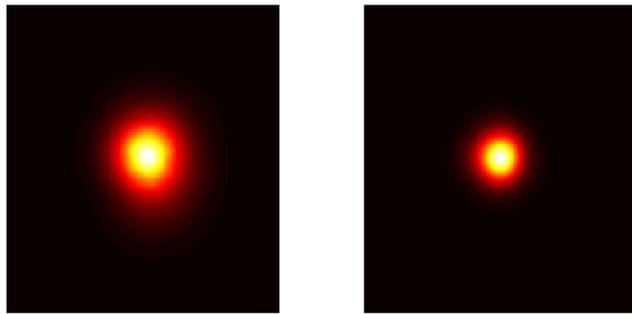


Figura 3.6: Perfil médio do feixe de He-Cd sem e com correção de desvio.

Capítulo 4

Conservação de paridade espacial e cintilação

O presente capítulo trata de outra característica do feixe de correlação introduzido anteriormente: a conservação de paridade espacial. A paridade espacial se refere a simetrias do perfil de irradiância em relação a inversões de coordenada ($\rho_x \rightarrow -\rho_x$ e $\rho_y \rightarrow -\rho_y$), simetrias estas degradadas pelas flutuações de índice de refração em feixes de segunda ordem, mas particularmente robustas em determinados feixes de correlação.

Outras questões são, porém, invocadas, como as implicações práticas de um feixe de correlação robusto. Nota-se por um lado que desvios de idealização na fonte de conversão paramétrica descendente espontânea levam a similares desvios da conservação completa da paridade espacial. Por outro lado, as condições que levam a uma conservação mais forte também resultam em perdas difrativas associadas à crescente incoerência espacial do campo de segunda ordem que carrega as correlações.

Por fim, um estudo sobre a cintilação das detecções coincidentes é feito. Contribuem para este efeito as cintilações do feixe de correlação e do mencionado campo de segunda ordem; cada uma destas pequenas quando tomadas por si só, mas manifestas quando consideradas em conjunto.

4.1 Conservação da paridade espacial

Um dos principais resultados do capítulo 3 é a equação (3.2.22):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{inv}(\boldsymbol{\rho}, L; -\boldsymbol{\rho}, L) &\propto \iint d^2\rho' E_p(\boldsymbol{\rho}') \exp\left[\frac{ik_p}{2L}|\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}|^2\right] \\ &\quad \times \exp\left[\psi^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L) + \psi^k(-\boldsymbol{\rho}', -\boldsymbol{\rho}; L)\right]. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Além da mitigação de aberrações infligidas sobre o feixe de correlação, esta forma revela que sua paridade transversal, ou seja, o comportamento de \mathcal{A} com as mudanças de coordenada $\rho_x \rightarrow -\rho_x$ e $\rho_y \rightarrow -\rho_y$, se preserva após a propagação, como acontece normalmente na propagação pelo vácuo. Explicitamente, se se fizer a inversão $\boldsymbol{\rho} \rightarrow$

$-\boldsymbol{\rho}$ em \mathcal{A}_{inv} , resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{inv}(-\boldsymbol{\rho}, L; \boldsymbol{\rho}, L) &\propto \iint d^2\rho' E_p(\boldsymbol{\rho}') \exp\left[\frac{ik_p}{2L} |-\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}|^2\right] \\ &\times \exp\left[\psi^k(\boldsymbol{\rho}', -\boldsymbol{\rho}; L) + \psi^k(-\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L)\right] \\ &= \iint d^2\rho' E_p(-\boldsymbol{\rho}') \exp\left[\frac{ik_p}{2L} |\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}|^2\right] \\ &\times \exp\left[\psi^k(-\boldsymbol{\rho}', -\boldsymbol{\rho}; L) + \psi^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L)\right], \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

onde na segunda passagem a variável de integração foi mudada de $\boldsymbol{\rho}'$ para $-\boldsymbol{\rho}'$.

Logo, se $E_p(\boldsymbol{\rho})$ possuir paridade definida, esta será herdada pelo feixe de correlação e se manterá após propagação pela atmosfera, ao contrário do que acontece com a paridade do feixe de bombeamento. Ademais, considere-se uma decomposição da função de onda em uma base ortonormal $\{u_m(\boldsymbol{\rho}, z)\}$ cujos componentes têm paridade definida¹ [isto é $u_m(-\boldsymbol{\rho}, z) = \pm u_m(\boldsymbol{\rho}, z)$ com o sinal podendo variar para diferentes m]:

$$\mathcal{A}_{inv}(\boldsymbol{\rho}_1, L; -\boldsymbol{\rho}_2, L) = \sum_{mn} c_{mn} u_m(\boldsymbol{\rho}_1, L) u_n(\boldsymbol{\rho}_2, L). \quad (4.1.3)$$

A paridade expressa por $\mathcal{A}_{inv}(-\boldsymbol{\rho}, L; \boldsymbol{\rho}, L) = \pm \mathcal{A}_{inv}(\boldsymbol{\rho}, L; -\boldsymbol{\rho}, L)$ se escreve, na forma acima, como

$$\sum_{mn} c_{mn} u_m(-\boldsymbol{\rho}, L) u_n(-\boldsymbol{\rho}, L) = \pm \sum_{mn} c_{mn} u_m(\boldsymbol{\rho}, L) u_n(\boldsymbol{\rho}, L). \quad (4.1.4)$$

Tomando em conta que a igualdade vale para qualquer valor de $\boldsymbol{\rho}$, segue que cada termo da soma satisfaz

$$u_m(-\boldsymbol{\rho}, L) u_n(-\boldsymbol{\rho}, L) = \pm u_m(\boldsymbol{\rho}, L) u_n(\boldsymbol{\rho}, L), \quad (4.1.5)$$

o que significa que um feixe de bombeamento par ou ímpar, e por conseguinte uma função de onda $\mathcal{A}_{inv}(\boldsymbol{\rho}, L; -\boldsymbol{\rho}, L)$ par ou ímpar, implicam pares de fótons cujos componentes têm paridades iguais ou opostas, respectivamente, quando a correlação é feita considerando $\boldsymbol{\rho}_2 = -\boldsymbol{\rho}_1$. Para determinar a paridade da função de onda basta portanto verificar como se correlacionam as paridades dos fótons de um par.

O grau de liberdade associado à paridade do perfil transversal oferece a possibilidade de se multiplexar sinais em quatro canais, correspondendo às diferentes combinações de paridade nos eixos X e Y , como ilustrado na figura 4.1.

Sob a aproximação de cristal fino, que levou à expressão (4.1.1), não há vazamento entre os diferentes canais, isto é, um feixe de correlação com uma paridade inicial específica jamais é detectado com outra após a propagação. Uma análise mais minuciosa se faz necessária, porém, a fim de aferir quão necessária ela é e se de fato se requer uma fonte de luz quântica como o cristal de conversão paramétrica descendente espontânea (CPDE). Esta análise é feita na seção 4.2. A seguir será descrita uma proposta de experimento para detecção de paridade do feixe de correlação.

¹Uma decomposição como esta, em que a base é composta por funções de Hermite-Gauss, foi feita por Walborn e coautores em [91].

X ímpar Y par	X par Y par
X ímpar Y ímpar	X par Y ímpar

Figura 4.1: Quatro canais separados pelas paridades nos eixos transversais.

4.1.1 Proposta de experimento

Descrevemos a seguir uma possível configuração, também esboçada na figura 4.2, para que se meça a paridade do feixe de correlação e que explora o efeito descrito no parágrafo que sucede a equação (4.1.5): a correlação de paridade dos fótons da CPDE. Por conveniência ela é dividida em três estágios: fonte, propagação e detecção.

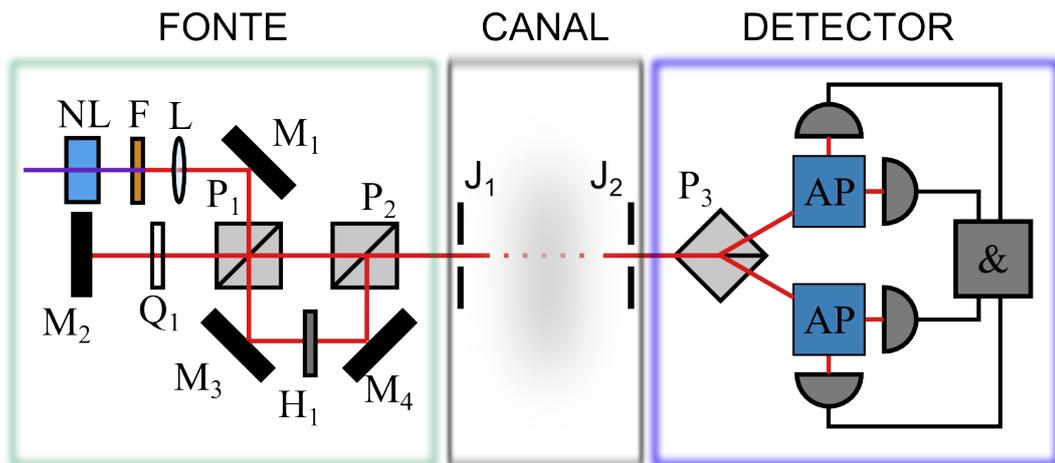


Figura 4.2: Esquema para transmissão e detecção de paridade espacial de um feixe propagado por um canal turbulento.

A fonte, como no experimento descrito na seção 3.4.1, é um cristal não-linear bombeado por um feixe e que gera pares de fótons correlacionados via CPDE. Consideraremos a conversão do tipo II, no entanto; nesse caso os fótons produzidos têm polarizações ortogonais entre si. Esses fótons, também como no experimento já descrito, passam por um aparato que impõe a inversão de coordenadas em um componente de cada par, o inversor. Este contém divisores de feixe polarizadores P_1 e P_2 , uma placa de quarto de onda Q_1 e uma de meia onda H_1 . Os fótons da CPDE são gerados no cristal não-linear NL por um feixe de bombeamento que é removido pelo filtro F . A

lente L faz a imagem do plano central do cristal na pupila de transmissão J_1 (a razão dessa escolha é esclarecida na seção 4.3).

Após propagação pelo canal turbulento, os fótons de cada par são separados com um divisor polarizador P_3 , e a paridade de cada um é determinada através de um analisador de paridade (AP na figura) seguido de foto-detecções, cujos pulsos de saída são encaminhados a um circuito que identifica detecções em coincidência. A idéia por trás de um medidor de paridade espacial [92] é superpor um perfil $F(y)$ com sua versão invertida $F(-y)$; a soma $F(y) + F(-y)$, por exemplo, será nula se F for ímpar. O analisador descrito aqui e esboçado na figura 4.3 compartilha com o inversor uma característica: a de efetuar inversão de coordenadas em apenas um de seus braços, através de uma reflexão adicional em relação ao outro braço. Ao contrário do inversor, os divisores de feixe balanceados na entrada e saída (D1 e D2 na figura) são *não-polarizadores*.

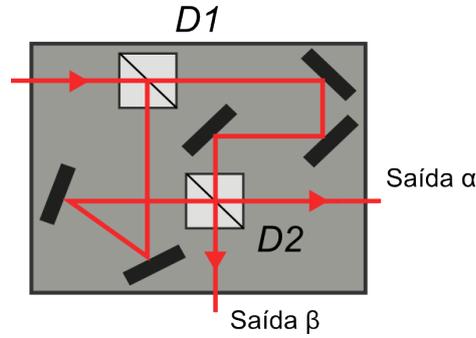


Figura 4.3: Analisador de paridade espacial. Os elementos $D1$ e $D2$ são divisores de feixe não-polarizadores.

Assumindo braços de mesmo tamanho, as saídas α e β correspondem a modos de saída par e ímpar, respectivamente, como será demonstrado adiante. Considerados os eventos em que foram detectados simultaneamente um fóton de polarização vertical e um de polarização horizontal (o que corresponde à detecção por um dos dois detectores superiores e um dos dois inferiores na figura 4.2), a paridade da função de onda $\mathcal{A}_{inv}(\boldsymbol{\rho}, L; -\boldsymbol{\rho}, L)$ ao longo de um dos eixos ficará determinada em acordo com o discutido após a equação (4.1.5):

- \mathcal{A}_{inv} par se detecções ocorrerem ambas nas saídas α ou ambas nas saídas β e
- ímpar para detecções em saídas diferentes.

Para descrever a ação do analisador de paridade, escrevem-se os modos em diferentes etapas da propagação, indexando-os da seguinte forma:

- Modos de entrada $\hat{E}_0(y)$ do primeiro divisor de feixes,
- Modos de entrada $\hat{E}_{1A}(y)$ e $\hat{E}_{1B}(y)$ do segundo divisor de feixes,

- Modos de saída $\hat{E}_{2\alpha}(y)$ e $\hat{E}_{2\beta}(y)$ do segundo divisor de feixes.

A polarização não muda o efeito do analisador e será portanto desconsiderada nesta análise.

As relações entre modos de etapas sucessivas são as seguintes:

$$\hat{E}_{1A}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{E}_0(-y) \quad (4.1.6a)$$

$$\hat{E}_{1B}(y) = \frac{i}{\sqrt{2}}\hat{E}_0(-y) . \quad (4.1.6b)$$

As inversões de sinal decorrem do número ímpar de reflexões sofridas ao longo da propagação e a fase i é resultado de reflexão no divisor de feixes [93, p. 67]. Adicionalmente,

$$\hat{E}_{2\alpha}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i\hat{E}_{1A}(-y) + \hat{E}_{1B}(y) \right) \quad (4.1.7a)$$

$$\hat{E}_{2\beta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{E}_{1A}(y) + i\hat{E}_{1B}(-y) \right) . \quad (4.1.7b)$$

Em termos dos modos de entrada, temos

$$\hat{E}_{2\alpha}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i\hat{E}_0(y) + i\hat{E}_0(-y) \right) \quad (4.1.8a)$$

$$\hat{E}_{2\beta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{E}_0(-y) - \hat{E}_0(y) \right) , \quad (4.1.8b)$$

confirmando que as saídas α e β correspondem às partes par e ímpar do modo de entrada.

Um desbalanço entre as distâncias propagadas em cada braço introduz uma fase adicional $e^{i\delta}$ nos segundos termos à direita em (4.1.8), o que leva à separação do modo de entrada em outros de paridade intermediária. A detecção de modos estritamente pares ou ímpares não necessária, uma vez que o feixe de bombeamento pode ser preparado em princípio com quaisquer proporções e fases entre suas componentes par e ímpar mas, é importante que estabelecida a base de medição, mantenha-se δ fixo. Isso pode ser feito por meio de estabilização; o esquema demonstrado por Jotzu e coautores [94], por exemplo, é capaz de limitar a variação de δ a um intervalo de cerca de 52 mrad.

Embora o feixe de correlação não sofra o efeito da aberração de declinação (“wavefront tilt”), os fótons que o compõem ainda são afetados. Resulta que sob propagação turbulenta o ângulo de incidência dos fótons sobre o sistema de detecção varia erráticamente e, devido à assimetria nas reflexões do analisador de paridade, um desvio no ângulo de entrada² de θ implica na separação angular dos modos de saída por um ângulo de 2θ . Esses desvios podem ser corrigidos ativamente com um sistema

²10 mrad é um valor típico desse desvio [7, p. 1524].

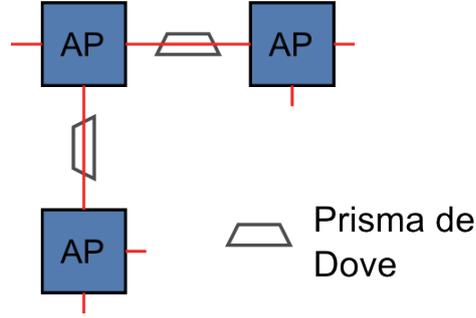


Figura 4.4: Sequência de analisadores de paridade e prismas de Dove são usados para determinar as paridades espaciais ao longo dos eixos X e Y.

de estabilização [95], o que é feito de forma corriqueira em sistemas de comunicação [13, 96, 3, 8].

Convém lembrar que para que haja preservação da paridade, a condição $y_2 = -y_1$ deve ser satisfeita. Atualmente é possível detectar fótons simultaneamente em um arranjo de pixels, utilizando câmeras EMCCD (CCD multiplicadora de elétron) [97], tornando desnecessárias varreduras com detectores de um pixel e ao mesmo tempo coletando em uma área maior fótons que chegam ao plano de detecção. O fato de que apenas coincidências associadas a pixels diametralmente opostos seja relevante permite a um correlacionador, no caso de uma câmera com N pixels, correlacionar apenas sinais de N pares de pixels, em contraste com N^2 operações de medições mais gerais.

Por fim, o analisador de paridade descrito apenas identifica a paridade espacial ao longo de um eixo. Para que se meça a paridade espacial na outra direção, pode-se utilizar um prisma de Dove [98] posicionado de forma a girar o modo do campo por um ângulo de 90° , seguido de um analisador adicional. O prisma mapeia os eixos de coordenadas $X \rightarrow Y$ e $Y \rightarrow -X$, e a subsequente medição da paridade ao longo de Y corresponde efetivamente a uma medição da paridade ao longo de X. Para que se resolva entre os quatro estados de paridade da figura 4.1, uma montagem como a esboçada na figura 4.4, com analisadores aninhados, se faz necessária.

4.2 Condições para conservação

A equação (4.1.1) prevê transferência perfeita da paridade espacial do feixe de bombeamento para o feixe de correlação e conservação dessa paridade após propagação pela atmosfera turbulenta. A expressão, contudo, foi derivada assumindo uma correlação do tipo $\delta^2(\boldsymbol{\rho}')$ no plano de geração da CPDE, aproximação usual para cristais finos (poucos milímetros de espessura). Nesta seção uma investigação será feita a respeito da necessidade dessa hipótese no que concerne a conservação de paridade.

Como já dito, a expressão geral (3.2.19) de propagação do feixe de correlação na

atmosfera turbulenta é intratável analítica e numericamente, porque envolve quatro integrações de variáveis acopladas entre si. Para estudar o efeito de uma correlação de largura finita, recorreremos à seguinte aproximação:

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{\rho}') = \delta^2(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\Delta}) , \quad (4.2.9)$$

o que corresponderia a pares de fótons perfeitamente correlacionados porém gerados a uma distância $|\boldsymbol{\Delta}|$ um do outro. Naturalmente, se a conservação de paridade se degrada significativamente - segundo um critério qualquer - para uma separação $\boldsymbol{\Delta}'$, é razoável inferir que a largura finita da correlação exata não deve exceder $|\boldsymbol{\Delta}'|$ a fim de que não se viole o mesmo critério.

Feita essa escolha, resta notar que a conservação da paridade de $E_p(\boldsymbol{\rho}')$ é implicação direta do fato de o termo

$$\Psi^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}) = \exp [\psi^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L) + \psi^k(-\boldsymbol{\rho}', -\boldsymbol{\rho}; L)] \quad (4.2.10)$$

ser par. Se a correlação for dada por (4.2.9), o efeito da turbulência no feixe de correlação passa a ser descrito por

$$\Psi_{\Delta}^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}) = \exp [\psi^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L) + \psi^k(-\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{\Delta}, -\boldsymbol{\rho}; L)] . \quad (4.2.11)$$

Formalmente esta expressão descreve o campo em $\boldsymbol{\rho}$ devido a uma onda esférica originada em $\boldsymbol{\rho}'$, descontada a fase referente à propagação pelo vácuo, multiplicado pelo campo em $-\boldsymbol{\rho}$ de onda similar originada em $-\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{\Delta}$. Essa descrição se transcreve facilmente para uma simulação nos moldes das efetuadas até então³.

Para cada realização da turbulência, os campos de duas fontes pontuais, uma em $\boldsymbol{\rho}' = 0$ e outra em $\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\Delta}$, são propagados pelas mesmas telas de fase e os resultados $U_0(\boldsymbol{\rho})$ e $U_{\Delta}(\boldsymbol{\rho})$ multiplicados entre si da seguinte maneira:

$$\mathcal{U}_{\Delta}(\boldsymbol{\rho}) = U_0(\boldsymbol{\rho})U_{\Delta}(-\boldsymbol{\rho}) . \quad (4.2.12)$$

Ainda para cada realização computam-se suas componentes pares e ímpares

$$\mathcal{U}^{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2} [\mathcal{U}_{\Delta}(\boldsymbol{\rho}) + \mathcal{U}_{\Delta}(-\boldsymbol{\rho})] \quad (4.2.13a)$$

$$\mathcal{U}^{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2} [\mathcal{U}_{\Delta}(\boldsymbol{\rho}) - \mathcal{U}_{\Delta}(-\boldsymbol{\rho})] \quad (4.2.13b)$$

e a razão de paridades, definida como

$$\Pi = \frac{\mathcal{K}^{\mathcal{I}}}{\mathcal{K}^{\mathcal{P}}} = \frac{\int |\mathcal{U}^{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\rho})|^2 d^2\rho}{\int |\mathcal{U}^{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\rho})|^2 d^2\rho} \quad (4.2.14)$$

³Pela natureza discreta da simulação, não há como se representar uma fonte estritamente pontual. A solução é estabelecer uma descrição que se sabe fornece os resultados esperados em uma região de interesse, como descrito em [46, p. 107].

e que, quando nula, corresponde à perfeita preservação da paridade. Valores maiores, por outro lado, indicam perda de paridade.

Para cada força da turbulência (medida por γ_y) e diferentes separações, calcula-se a média das razões $\langle \Pi \rangle$, com as separações Δ em unidades de parâmetros de Fried de onda esférica r_{0sw} , por dois motivos:

- O parâmetro já é computado como parte da rotina de simulação e
- é proporcional ao comprimento de coerência da atmosfera para ondas esféricas.

O conteúdo do arquivo de extensão `.dat` que especifica os parâmetros de simulação segue abaixo:

```
# Geometry
propagationDistance: 2000
numberOfPhasePlanes: 20
turbulenceRegionStartPosition: 0
turbulenceRegionEndPosition: 2000
# Turbulence Statistics
gammaRaw: 0, 5e3, 7.5e3, 1e4, 1.7e4, 2.5e4, 3.5e4, 4.2e4, 5e4
outerScale: Inf
innerScale: 0
# Beam
wavelength: 1550e-9
waistAtSourcePlane: 5e-2
# Simulation
numberOfRealizations: 150
transverseGridSize: 1024
gridSpacingSourcePlane: 0.0011
gridSpacingObservationPlane: 0.0014
transverseSeparationInR0Units: 0, 0.02, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 3
```

Novamente, `gammaRaw` contém valores de γ_y em unidades de $\mu\text{m}^{6/5}$, ao contrário de outros como `wavelength` e `propagationDistance`, dados em unidade de metros. O comprimento de onda dos fótons gerados $\lambda = 1550$ nm foi escolhido em adequação com a configuração mais comum⁴ para sistemas de comunicação ópticos [13].

Resultados da simulação na figura 4.5:

⁴Dois dos principais motivos pelos quais o comprimento de 1550 nm é mais comum são [8]:

1. esse comprimento de onda é absorvido pela córnea e pouco focalizado pelo cristalino de um olho humano, tornando-o mais seguro. Essa segurança, por sua vez, possibilita o uso de fontes até $50\times$ mais potentes.
2. devido a seu amplo uso em sistemas de fibra óptica, é mais fácil encontrar elementos bons e baratos que operam nessa faixa de frequência, como lasers, amplificadores e moduladores.

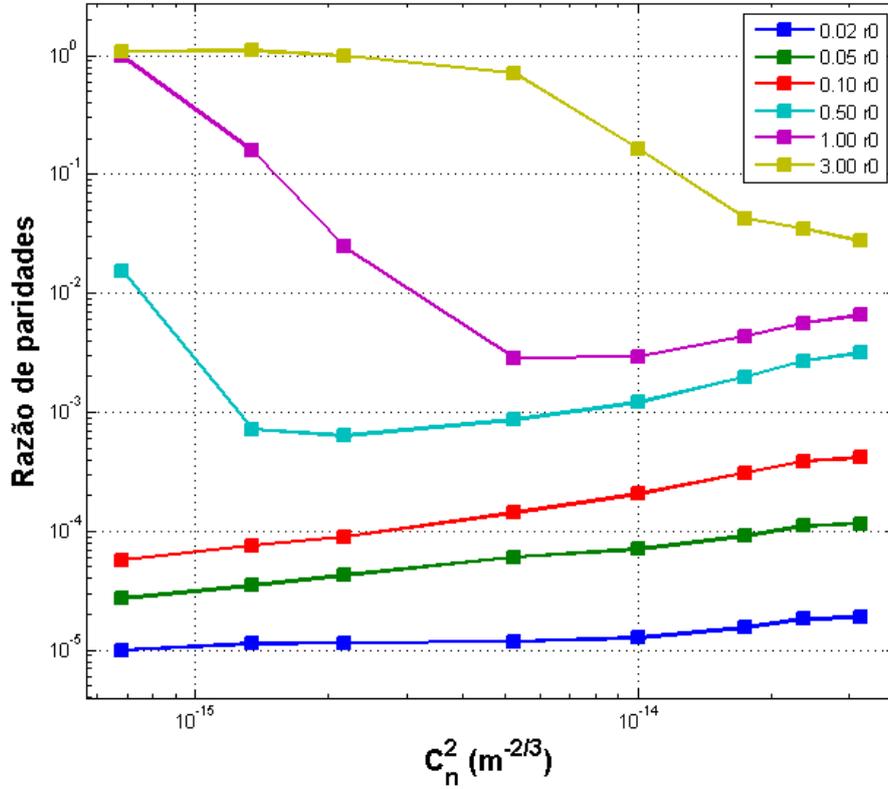


Figura 4.5: Resultados de simulações para a quantidade $\langle \Pi \rangle$, em função da força da turbulência C_n^2 , para diferentes separações transversais Δ entre as duas fontes pontuais.

É fisicamente razoável esperar que a degradação da paridade se acentue quanto menos correlacionadas forem as influências sofridas pelos dois campos, uma vez que distorções descorrelacionadas não se podem cancelar. Pode-se inferir, pois, que para uma separação que é um múltiplo fixo de r_{0sw} , ou seja, associada a um grau de correlação fixo, não há dependência do nível de degradação com a força da turbulência⁵. Isso de fato se observa nos regimes de turbulência mais forte, para os quais o parâmetro de Fried $r_{0sw} < 10$ cm.

A paridade ao longo de um eixo codifica um bit de informação, logo $\langle \Pi \rangle$ pode também ser relacionado com a fração de bits incorretos do total de bits enviados, conhecida como razão de erro de bits e designada BER , a sigla de seu nome em inglês (bit-error-ratio). Novamente, a componente ímpar de Ψ_{Δ}^k , $\mathcal{U}^I(\rho)$, leva a detecções errôneas de paridade. Uma vez que as probabilidades de detecção envolvem o módulo quadrado dos campos, a probabilidade de erro será proporcional a \mathcal{K}^I e a razão de

⁵Note-se que a degradação ainda depende da separação absoluta entre as fontes, uma vez que a dimensão r_{0sw} varia com a força da turbulência e distância de propagação.

erro de bits

$$BER = \left\langle \frac{\mathcal{K}^{\mathcal{I}}}{\mathcal{K}^{\mathcal{I}} + \mathcal{K}^{\mathcal{P}}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\Pi}{1 + \Pi} \right\rangle \quad (4.2.15)$$

$$\approx \langle \Pi \rangle, \quad (4.2.16)$$

onde a última passagem é válida para pequenos valores de Π .

O nível aceitável de BER depende do protocolo de transmissão e correção de erro: em [13], por exemplo, um canal com taxa de transmissão de 2.7 Gigabits/s e codificação Reed-Solomon RS(255,239) [99, p. 326] admite BER máximos da ordem de 10^{-3} , o que corresponderia a uma separação $|\Delta|$ entre $0.1 r_{0sw}$ e $0.5 r_{0sw}$ nas condições simuladas.

4.3 Potência coletada e cintilação

A análise da seção anterior leva a crer que quanto menor a largura da função \mathcal{V} , melhor será o desempenho do sistema de comunicação com feixes de correlação. Na prática, contudo, não há como se considerar a propagação da correlação de pares de fótons sem tomar em conta a propagação dos fótons individuais que a compõem. Como se detalha a seguir, a presença simultânea de fortes correlações de campos próximo e distante está associada a baixa coerência transversal da fluorescência (luz de segunda ordem) da CPDE, e baixa coerência implica grande divergência. Logo, muito embora o feixe de correlação se comporte como um feixe coerente de baixa divergência, os fótons portadores podem divergir a ponto do sinal coletado pelo receptor ser proibitivamente pequeno para aplicações.

Consideraremos a seguinte geometria, exposta na figura 4.6: a fonte é preparada de forma que a cintura do feixe (menor largura transversal) se situe no plano da pupila do transmissor. No caso de detecções de quarta ordem no campo elétrico, entenda-se a cintura do feixe como a cintura do feixe correlação, não da irradiância de segunda ordem a ele associado. O feixe então, seja de segunda ou quarta ordem, se propaga por um canal turbulento e incide sobre a pupila do sistema de recepção.

Interessa-nos aqui a cintilação e potência total coletada no receptor, não o processo de detecção ou o possível desmultiplexar da informação que chega. Similarmente, deixar-se-á de lado nesta seção os detalhes da propagação do feixe entre a fonte e a pupila de transmissão, cujo plano será considerado efetivamente como o da fonte - isto é, o plano $Z = 0$ - no uso das equações de propagação.

No caso de um feixe gerado via CPDE, será considerado ainda que uma imagem (possivelmente ampliada ou reduzida) do campo no plano central do cristal é feita sobre o plano da pupila de transmissão. A justificativa desta escolha é mais clara se enunciada em partes:

- Como demonstrado no apêndice 4A, a divergência da fluorescência é determinada pela largura de $\tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{q})$ enquanto a do feixe de correlação é determinada por

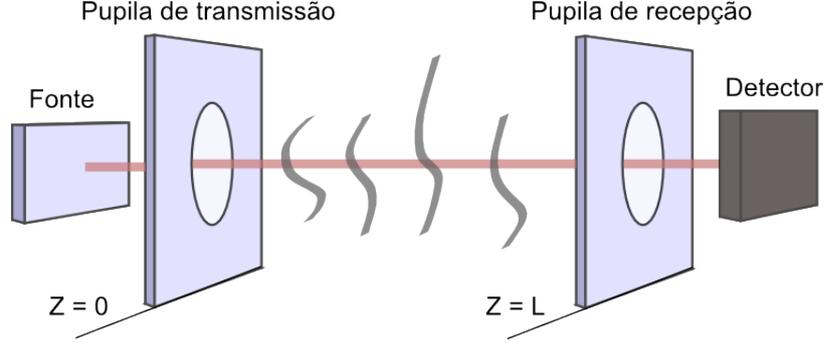


Figura 4.6: Geometria da descrição. Flutuações do índice de refração ocorrem entre as pupilas do transmissor e receptor, nos planos $Z = 0$ e $Z = L$, respectivamente.

$\tilde{E}_p(\mathbf{q})$. Logo, para maior coleção de pares e de fótons individuais é desejável que suas transformadas de Fourier $E_p(\boldsymbol{\rho})$ e $\mathcal{V}(\boldsymbol{\rho})$ sejam largas.

- Quanto mais fina for $\mathcal{V}(\boldsymbol{\rho}, \zeta)$ no plano da pupila do transmissor, melhor será a conservação da paridade de $E_p(\boldsymbol{\rho})$. Portanto, uma vez definidas as divergências, a melhor escolha de campo na pupila do transmissor é aquela em que a razão entre as larguras de $E_p(\boldsymbol{\rho}, \zeta = 0)$ e $\mathcal{V}(\boldsymbol{\rho}, \zeta = 0)$ é a maior possível.
- A razão entre as duas larguras porém, varia com o plano de propagação, uma vez que as funções têm divergências distintas⁶. Como a divergência de \mathcal{V} é tipicamente maior que a de E_p , a razão entre a largura da primeira e segunda é menor no plano do cristal.

4.3.1 Potência coletada

A equação (2.2.44) determina a largura do feixe em cada plano $Z = z$. Como descrito na discussão que sucede a equação (2.2.42), no caso da cintura do feixe estar em $Z = 0$ ela toma a seguinte forma:

$$\Sigma^2(z) = \sigma_0^2 + \Theta_0^2 z^2 + \alpha k^{2/5} \gamma^2, \quad (4.3.17)$$

onde σ_0^2 e Θ_0^2 são os segundos momentos do perfil de irradiância e de sua transformada de Fourier dividida pelo número de onda ao quadrado k^2 , como explicitado em (2.2.39) e (2.2.40). As raízes quadradas dessas quantidades representam a largura e a divergência do feixe no plano $Z = 0$.

Para um feixe de perfil gaussiano, a cujos parâmetros associamos o índice g , a irradiância é

$$I_g(\boldsymbol{\rho}) \propto \exp \left[-\frac{\rho^2}{\Omega_g^2} \right], \quad (4.3.18)$$

⁶Como demonstrado na seção 3.2, a premissa de que as funções E_p e \mathcal{V} se propagam de forma independente é válida apenas na ausência de turbulência, o que é o caso na região entre fonte e pupila do transmissor.

e o cálculo de σ_0 imediato:

$$\sigma_{g0} = \Omega_g . \quad (4.3.19)$$

Como a transformada de Fourier de uma função gaussiana é novamente uma função gaussiana, resulta que a divergência em $Z = 0$ é a seguinte:

$$\Theta_{g0} = \frac{\sqrt{2}}{k\Omega_g} . \quad (4.3.20)$$

O apêndice 4A demonstra que os perfis de irradiância da fluorescência da CPDE nos campos próximo e distante são dados respectivamente pelo perfil em $Z = 0$ do feixe bombeador $|E_p(\boldsymbol{\rho})|^2$ e pelo módulo quadrado da transformada de Fourier da função de casamento de fase $|\tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{q})|^2 = |\text{sinc}(q^2\tau/4k_p)|^2$.

Para um feixe bombeador gaussiano como o descrito por (4.3.18), exceto com a substituição $\Omega_g \rightarrow \Omega_f$ (o subíndice f se refere a fluorescência), a largura é

$$\sigma_{f0} = \Omega_f \quad (4.3.21)$$

como antes.

A função $\tilde{\mathcal{V}}$ é de difícil tratamento e portanto é aqui aproximada pela seguinte:

$$\tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{q}) = \exp\left[-\frac{q^4}{2\pi\nu^4}\right], \quad (4.3.22)$$

onde

$$\nu = 0.96\sqrt{\frac{4k_p}{\tau}}, \quad (4.3.23)$$

e $k_p = 2k$ é o número de onda do feixe de bombeamento. Os detalhes da aproximação estão no apêndice 4B, onde também é calculada a divergência correspondente:

$$\Theta_{f0} = \frac{\nu}{k} . \quad (4.3.24)$$

As larguras em $Z = L$ do feixe gaussiano e da fluorescência da CPDE são, finalmente:

$$\Sigma_g = \sqrt{\Omega_g^2 + \frac{2L^2}{k^2\Omega_g^2} + \alpha k^{2/5}\gamma^2} \quad (4.3.25a)$$

$$\Sigma_f = \sqrt{\Omega_f^2 + \frac{\nu^2 L^2}{k^2} + \alpha k^{2/5}\gamma^2} . \quad (4.3.25b)$$

Assumindo que os perfis de irradiância mantêm a forma funcional em medições de longa exposição sob turbulência (como de fato se observou no experimento do

capítulo 3), a fração da potência coletada por uma abertura circular de raio R pode ser determinada. No caso do feixe gaussiano, temos:

$$\begin{aligned}
P_g(R) &= N_g \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr r \exp \left[-\frac{r^2}{\Sigma_g^2} \right] \\
&= \pi N_g \Sigma_g^2 \int_0^{R^2/\Sigma_g^2} e^{-u} du = N_g \pi \Sigma_g^2 [1 - \exp(-R^2/\Sigma_g^2)] \\
&= 1 - \exp(-R^2/\Sigma_g^2), \tag{4.3.26}
\end{aligned}$$

onde na última passagem escolhemos o fator de normalização N_g de forma que $P_g(R \rightarrow \infty) = 1$. No caso do perfil de fluorescência, a fração é

$$\begin{aligned}
P_f(R) &= N_f \int_0^R \exp \left[\frac{-\rho^4}{2\pi \Sigma_f^4} \right] \rho d\rho \\
&= N_f \sqrt{2\pi} \Sigma_f^2 \int_0^{R/(2\pi)^{1/4} \Sigma_f} e^{-x^4} dx = N_f \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Sigma_f^2 \int_0^{R^2/\sqrt{2\pi} \Sigma_f^2} e^{-u^2} du \\
&= \operatorname{erf} \left[\frac{R^2}{\sqrt{2\pi} \Sigma_f^2} \right], \tag{4.3.27}
\end{aligned}$$

Efetivamente, a taxa de coleção de pares de fótons quando da transmissão de um feixe de correlação depende também das taxas de coleção dos fótons individuais. Isto é, designando as frações de potência coletada por $P_f(R)$ para fótons da fluorescência, por $P_{corr}(R)$ para o feixe de correlação e por $P_c(R)$ para a fração de pares correlacionados de fótons, eles se relacionam via

$$P_c(R) = P_f^2(R) \times P_{corr}(R). \tag{4.3.28}$$

O gráfico 4.7 mostra curvas para $P_c(R_{95})$ em função da razão entre a largura $\Delta\rho$ de $\mathcal{V}(\frac{\rho_1 - \rho_2}{2})$ e o parâmetro de Fried para ondas esféricas r_0 , relacionado com o comprimento de coerência na atmosfera (o raio R_{95} é definido após a equação (4.3.29) abaixo). A largura de \mathcal{V} é definida como a separação entre ρ_1 e ρ_2 para a qual ela atinge o primeiro zero. Fazendo referência à seção 4.2, isso significa que de todos os componentes da integral de Huygens-Fresnel generalizada (3.2.19), uma parte negligenciável corresponde a separações $\Delta \geq \Delta\rho$ (veja (4.2.9)), de sorte que o *BER* é superiormente limitado por aquele correspondente a $\Delta = \Delta\rho$.

A largura da função \mathcal{V} é determinada no apêndice 4B e, considerando o argumento $\rho_1/2 - \rho_2/2$, corresponde a

$$\Delta\rho = 5.55 \sqrt{\frac{\tau}{4k_p}}. \tag{4.3.29}$$

Dada a largura $\Delta\rho$, determina-se a divergência (4.3.24), a largura no pupila de recepção e a quantidade $P_c(R_{95})$. O raio R_{95} é aquele para o qual 95% da potência de

um feixe de bombeamento gaussiano é coletada, na ausência da turbulência; o que, pela expressão (4.3.26), implica

$$\frac{R_{95}}{\sigma_g} = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{1-0.95}\right)} \approx 1.73. \quad (4.3.30)$$

Os dados da figura 4.7 se referem a uma propagação de 2 km por um canal turbulento homogêneo e comprimentos de onda de $\lambda_p = 775$ nm e $\lambda = 1550$ nm para o feixe de bombeamento e os fótons gerados via CPDE. A cintura do feixe de bombeamento é assumida com largura $\sigma_0 = 2.5$ cm e posicionada no plano da pupila de transmissão. Assume-se também $\alpha = 0.33$, valor obtido via simulação de Monte Carlo como a descrita na seção 3.3. As diferentes curvas correspondem a valores distintos, porém típicos [6, p. 79], da constante de estrutura C_n^2 .

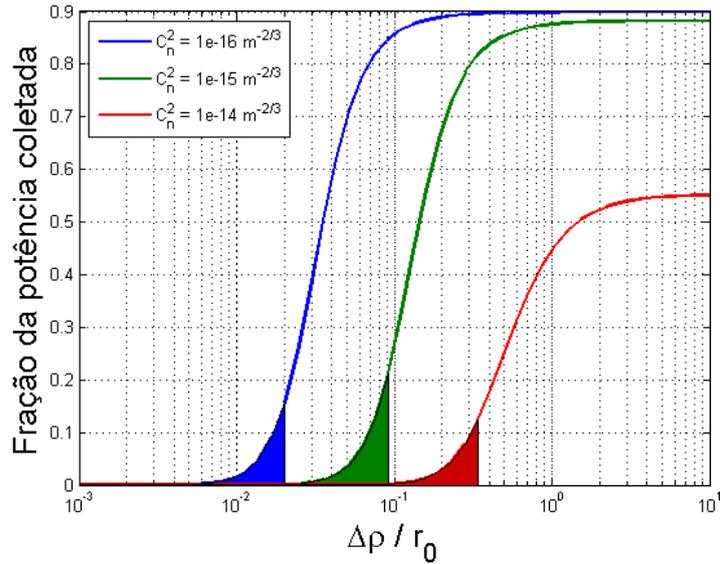


Figura 4.7: Fração dos eventos coincidentes coletada por uma abertura circular, em função da largura da função de casamento de fase \mathcal{V} . O raio da abertura é tal que na ausência de turbulência 95% da potência do feixe bombeador é coletada.

Valores menores de $\Delta\rho$ implicam menores BER (veja a figura 4.5) porém, maior divergência da fluorescência da CPDE e portanto menor potência coletada. Ademais, quanto mais forte a turbulência maior o efeito do alargamento causado por ela e, mais importante, maior a divergência para $\Delta\rho/r_0$ fixo. Sob o cenário descrito acima e para valores típicos de $\tau = 5$ mm, uma largura *na fonte* de $\sigma'_0 = 250$ μm (ampliada para os mesmos $\sigma_0 = 2.5$ cm na pupila de transmissão) e $\lambda_p = 775$ nm, as razões $\Delta\rho/r_0$ variam entre aproximadamente 0.01 e 0.2 para as diferentes forças de turbulência.

Finalmente, como demonstram Bennink e colaboradores em [100], fontes clássicas não admitem, simultaneamente, fortes correlações nos campos próximo e distante. Mais especificamente, se $\delta\rho$ é a largura da correlação de campo próximo do feixe e δq a de campo distante, fontes clássicas sempre satisfazem a seguinte desigualdade [101, apêndice C]:

$$\delta\rho\delta q \geq 1. \quad (4.3.31)$$

No caso da CPDE, δq equivale à largura de $\tilde{E}_p(\mathbf{q})$, enquanto $\delta\rho$ corresponde à largura de $\mathcal{V}(\boldsymbol{\rho})$. A primeira é equivalente a $k\Theta_0$ correspondente ao feixe bombeador; já a segunda está relacionada com a distância $\Delta\rho$ até o primeiro zero de $\mathcal{V}(\boldsymbol{\rho}/2)$ por (veja (4.B.6) e (4.B.7)):

$$\delta\rho = \frac{1.73}{2.78}\Delta\rho. \quad (4.3.32)$$

As regiões das curvas cujas bases são preenchidas na figura 4.7 representam aquelas para as quais a desigualdade (4.3.31) é violada. Isto é, dadas as características do feixe de bombeamento (e por conseguinte δq), a base da curva estar preenchida para um particular valor da razão $\Delta\rho/r_0$ indica um regime inacessível a feixes não-clássicos.

4.3.2 Cintilação

Uma baixa eficiência de coleção implica exigências maiores sobre a potência da fonte, eficiência dos detectores e filtro de ruídos. O maior obstáculo em comunicação óptica em atmosfera límpida porém, resulta da cintilação, como explicado no capítulo 1. A cintilação é matematicamente descrita pela variância da irradiância I normalizada

$$\mathcal{M} = \frac{\text{var } I}{\langle I \rangle^2}, \quad (4.3.33)$$

e dá conta das flutuações de intensidade no eixo óptico causadas pela turbulência⁷.

Além de diversidade espacial e “interleaving”, tentativas de mitigar a cintilação envolvem usar fontes espacialmente incoerentes [103]. Por incoerente entenda-se que há probabilidade não-nula de se detectar o feixe em diferentes modos espaciais e que sua composição se dá pela soma incoerente desses diferentes modos. Diferentes modos sofrem diferentes influências da turbulência atmosférica e a chance de que todos sejam afetados de forma a suprimir a potência recebida é tão menor quanto maior o número de modos.

Um feixe com mesma intensidade radiante⁸ da de um laser, porém com coerência espacial reduzida foi produzido inicialmente por De Santis e colaboradores [104].

O método, que consiste em fazer um feixe de laser passar por uma placa de vidro fosca [105, 106], não é adequado para mitigação de efeitos da turbulência. A percepção

⁷A cintilação é, por vezes, definida como a flutuação da potência coletada em uma área finita, ao contrário da flutuação em um ponto do espaço. Uma área maior de detecção leva a flutuações menores, um efeito explorado na tentativa de dirimí-las [6, p. 235], [102].

⁸O termo intensidade radiante é uma medida de potência por unidade de ângulo sólido, ao contrário de irradiância, que mede potência por unidade de área.

de incoerência se dá quando da tomada da média do efeito da placa, ou seja, quando o sinal de saída do detector resulta do efeito de múltiplos modos em cada janela de detecção. Isso significa que deve haver a contribuição de muitos modos espaciais no período em que um bit é codificado no feixe transmitido. A taxas típicas de 2.5 GHz, o giro da placa de vidro não será rápido o suficiente para acomodar tal necessidade e, mesmo usando moduladores espaciais de luz [107], cujas telas de cristal líquido são alteradas por sinais elétricos, esse objetivo permanece distante.

A incoerência da fluorescência da CPDE, por outro lado, não pode ser entendida como o resultado de uma distribuição estocástica *no tempo* de diferentes modos espaciais monocromáticos. Ao contrário, ela é sempre o composta da soma desses modos, ainda que não seja tomada uma média temporal. Logo, ela naturalmente provê a incoerência necessária às maiores taxas de transmissão de informação.

É razoável esperar que o feixe de correlação, por não sofrer influência de aberrações ímpares, cintile menos que o feixe correspondente de segunda ordem. Similarmente, a fluorescência que carrega as correlações cintilará menos por conta de sua incoerência espacial. Os eventos de coincidência, no entanto, são o resultado das duas flutuações. Matematicamente, se a fração coletada de fótons individuais produzidos pela CPDE e incidentes sobre uma pupila e sistema de detecção for P_f e a fração coletada do feixe de correlação for P_{corr} , a fração de eventos coincidentes detectados será

$$P_c = P_f^2 P_{corr} . \quad (4.3.34)$$

Se assumirmos que P_f e P_{corr} são descorrelacionadas, o que se justifica pela efetiva descorrelação entre aberrações de diferentes ordens [108], algumas dessas afetando apenas P_f , a variância de P_c se separa da seguinte forma [109]:

$$\text{var}(P_c) = \langle P_f^2 \rangle \text{var}(P_{corr}) + \langle P_{corr} \rangle \text{var}(P_f^2) + \text{var}(P_f^2) \text{var}(P_{corr}) . \quad (4.3.35)$$

Similarmente, a média de P_c se separa:

$$\langle P_c \rangle = \langle P_f^2 \rangle \langle P_{corr} \rangle . \quad (4.3.36)$$

Em sua formulação original, a aproximação de Rytov [6, cap. 7] consistia em primeiro descrever um campo propagado em canal turbulento por

$$U(\boldsymbol{\rho}, L) = U_{vac}(\boldsymbol{\rho}, L) e^{\psi^k(\boldsymbol{\rho}; L)} , \quad (4.3.37)$$

onde $U_{vac}(\boldsymbol{\rho}, L)$ é o campo propagado no vácuo e, em seguida, expandir $\psi^k(\boldsymbol{\rho}; L)$ em ordens de n_1 . Em primeira ordem, $\psi(\boldsymbol{\rho}; L)$ toma a seguinte forma [6, p. 126], [63]:

$$\psi(\boldsymbol{\rho}; L) = \frac{k^2}{2\pi U_{vac}(\boldsymbol{\rho}, L)} \int_0^L dz' \iint d^2\rho' n_1(\boldsymbol{\rho}', z') U_{vac}(\boldsymbol{\rho}', z') \frac{\exp[ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} , \quad (4.3.38)$$

onde $\mathbf{r} = (\boldsymbol{\rho}, L)$ e $\mathbf{r}' = (\boldsymbol{\rho}', z')$. Em contraste com o princípio de Huygens-Fresnel generalizado, esta aproximação tem aplicação limitada a regimes de turbulência fraca, para os quais a cintilação não excede 0.64 [7, p. 1529].

Como antes, o fato de a perturbação $\psi(\boldsymbol{\rho}; L)$ se dever a muitos turbilhões descorrelacionados implica, pelo teorema central do limite, uma distribuição normal. Segue, pela relação (4.3.37), que a distribuição da irradiância $I(\boldsymbol{\rho}) = |U(\boldsymbol{\rho}, L)|^2$ é lognormal, o que significa que seu logaritmo é normalmente distribuído.

Distribuições lognormais, por sua vez, obedecem à relação seguinte [10, p. 157]:

$$\frac{\langle I^n \rangle}{\langle I \rangle^n} = \mu^{n(n-1)/2}, \quad (4.3.39)$$

onde $\mu = \langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \frac{\text{var}(P_f^2)}{\langle P_f^2 \rangle^2} &= \frac{\langle P_f^4 \rangle - \langle P_f^2 \rangle^2}{\langle P_f^2 \rangle^2} \\ &= \left(\frac{\langle P_f \rangle^2}{\langle P_f^2 \rangle} \right)^2 \left[\frac{\langle P_f^4 \rangle}{\langle P_f \rangle^4} - \left(\frac{\langle P_f^2 \rangle}{\langle P_f \rangle^2} \right)^2 \right] \\ &= \mu_f^2 [\mu_f^6 - \mu_f^2]. \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

Por fim, podemos, usando (4.3.35), (4.3.36) e (4.3.40), escrever a cintilação referente às detecções em coincidência (4.3.34)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_c &= \frac{\text{var}(P_c)}{\langle P_c \rangle^2} \\ &= \mu_f^2 (\mu_f^6 - \mu_f^2) (1 + \mathcal{M}_{corr}) + \mathcal{M}_{corr}. \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

Em [42, p. 386], Fante fornece uma expressão para a cintilação de um campo completamente incoerente (isto é, com correlações tipo $\delta(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}'')$) na fonte com perfil de irradiância gaussiano. Como mostrado no apêndice 4A, o perfil de irradiância da fluorescência da CPDE será gaussiano na fonte se o feixe bombeador também o for. Ademais, a fluorescência será em boa medida incoerente nos cenários típicos em que vale a aproximação de cristal fino (ver discussão que precede a equação (3.2.20)), logo a mesma expressão será considerada válida na descrição da fluorescência:

$$\mathcal{M}_f = \left(\frac{L}{k} \right)^{5/6} \frac{0.91 \rho_t^{-5/3}}{1 + 8 \Omega_f^2 \rho_t^2}, \quad (4.3.42)$$

onde Ω_f é a largura do feixe gaussiano bombeador no plano da pupila de transmissão e definida como em (4.3.18). O parâmetro ρ_t fora definido em (2.2.33) como

$$\rho_t(z) = \left[1.46 k^2 z \int_0^1 dv C_n^2(zv) (1-v)^{5/3} \right]^{-3/5}. \quad (4.3.43)$$

A cintilação (4.3.42), adaptada de [42, p. 386], foi reescrita aqui em forma válida somente sob turbulência homogênea, isto é, com C_n^2 constante ao longo do canal de propagação.

Com a cintilação \mathcal{M}_f estabelecida e sabendo que $\mathcal{M}_f = \mu_f - 1$, a cintilação associada aos eventos de coincidência \mathcal{M}_c pode ser calculada desde que seja computada \mathcal{M}_{corr} , o que foi feito via simulação de Monte Carlo. Como mencionado no primeiro parágrafo da presente subseção, a cintilação aferida é aquela que ocorre no eixo de propagação, ou seja, avaliada em um ponto do plano de detecção, o que não se adequa à natureza discreta de simulações numéricas. Fisicamente, no entanto, espera-se que a cintilação tenha o mesmo comportamento quando avaliada sobre uma região finita cujo diâmetro é menor que o comprimento de coerência atmosférica r_0 [10, p. 281]. Nas simulações de cintilação foi sempre assumida uma abertura circular de diâmetro 5.3 cm, menor que o menor dos parâmetros de Fried r_0 utilizados, que corresponde à mais forte turbulência. Os resultados podem ser vistos na figura 4.8.

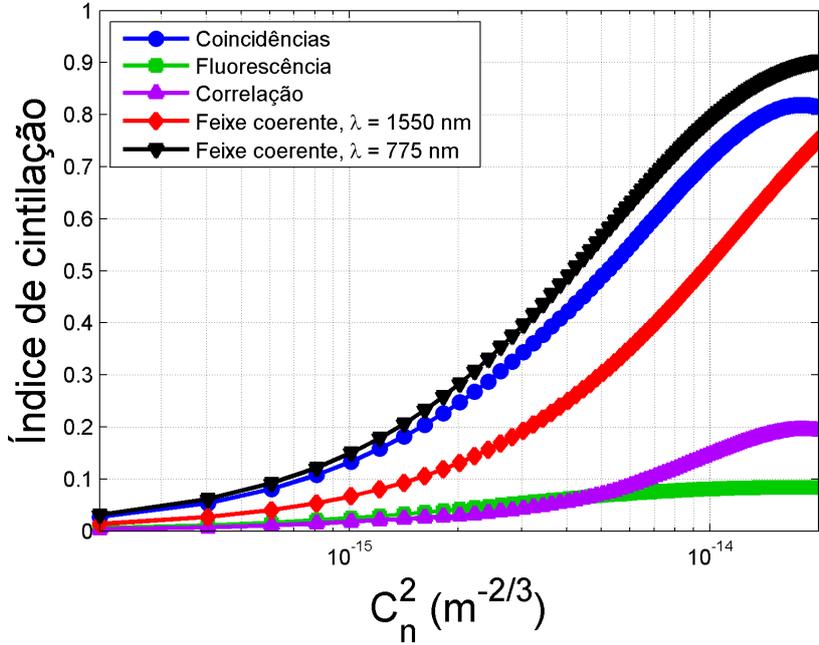


Figura 4.8: Índice de cintilação em função da constante de estrutura C_n^2 .

Por comparação, são incluídas também as curvas de cintilação para dois feixes gaussianos coerentes, de larguras iguais às da fluorescência na pupila de transmissão e comprimentos de onda $\lambda = 1550$ nm e $\lambda_p = 775$ nm, correspondendo às frequências da fluorescência e do feixe bombeador. A expressão para a cintilação de um feixe coerente gaussiano e colimado é dada por [10, p. 352]

$$\mathcal{M}_g = \exp \left\{ \frac{0.49\sigma_B^2}{\left[1 + 0.56(1 + J)\sigma_B^{12/5}\right]^{7/6}} + \frac{0.51\sigma_B^2}{\left(1 + 0.69\sigma_B^{12/5}\right)^{5/6}} \right\} - 1, \quad (4.3.44)$$

onde

$$\sigma_B^2 = 3.86\sigma_R^2 \left\{ 0.4 [(1 + 2J)^2 + 4\Lambda^2]^{5/12} \times \cos \left[\frac{5}{6} \tan^{-1} \left(\frac{1 + 2J}{2\Lambda} \right) \right] - \frac{11}{16} \Lambda^{5/6} \right\}. \quad (4.3.45)$$

Foram definidas as seguintes variáveis:

$$J = \left[1 + \left(\frac{L}{k\Omega_g^2} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (4.3.46a)$$

$$\Lambda = J \frac{L}{k\Omega_g^2}. \quad (4.3.46b)$$

O parâmetro σ_R^2 é chamado de variância de Rytov e aparece de forma recorrente nos estudos de cintilação. Ele é definido, para um canal turbulento homogêneo, como

$$\sigma_R^2 = 1.23C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}. \quad (4.3.47)$$

Vê-se que a cintilação nas coincidências é maior que a do feixe de mesmo comprimento de onda (1550 nm), embora marginalmente inferior à do feixe bombeador. A resiliência da paridade do feixe de correlação, portanto, não se traduz em uma menor cintilação e as estratégias usuais para mitigá-la, como aumento da abertura de coleção [102], diversidade espacial [13] e correção de erro, devem ser empregadas.

Deve-se ressaltar que a cintilação, muito embora possa por vezes atenuar ou causar o desaparecimento do sinal, não afeta a paridade espacial detectada, e pode portanto ser tratada de forma independente.

Apêndice 4A: Função de Wigner para a fluorescência da CPDE

A luz originada na conversão paramétrica descendente espontânea é parcialmente coerente e deve ser portanto descrita pela sua densidade espectral

$$W(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \int d^2 \rho_2 [\mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}, 0; \boldsymbol{\rho}_2, 0)]^* \mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}', 0; \boldsymbol{\rho}_2, 0). \quad (4.A.1)$$

Interessa-nos determinar a função de Wigner associada [93, cap. 3]

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int d^2 \xi W \left(\boldsymbol{\rho} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \right) e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\xi}} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int d^2 \xi \int d^2 \rho_2 E_p^* \left[\frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \right) \right] \mathcal{V}^* \left[\frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \right) \right] \\ &\quad \times E_p \left[\frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \right) \right] \mathcal{V} \left[\frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \right) \right] e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\xi}}. \end{aligned} \quad (4.A.2)$$

Definimos as variáveis $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\rho}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi})$ e $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\rho}_2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi})$, resultando na integral reescrita

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int d^2 \alpha \int d^2 \beta E_p^* \left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{2} + \boldsymbol{\beta} \right) \mathcal{V}^* \left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{2} - \boldsymbol{\alpha} \right) E_p \left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{2} + \boldsymbol{\alpha} \right) \mathcal{V} \left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{2} - \boldsymbol{\beta} \right) e^{2i\mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})} \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int d^2 \alpha E_p \left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{2} + \boldsymbol{\alpha} \right) \mathcal{V}^* \left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{2} - \boldsymbol{\alpha} \right) e^{2i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\alpha}} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.A.3)$$

Invocamos agora a aproximação em que se considera que E_p varia de maneira insignificante na região $\boldsymbol{\alpha} \approx \boldsymbol{\rho}/2$ em que \mathcal{V} assume valores não-negligenciáveis, ou seja, podemos assumir que $E_p \left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{2} + \boldsymbol{\alpha} \right) \approx E_p(\boldsymbol{\rho})$ no integrando, nos levando a

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{q}) &= \left| \frac{1}{2\pi} E_p(\boldsymbol{\rho}) \int d^2 \alpha \mathcal{V}^* \left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{2} - \boldsymbol{\alpha} \right) e^{2i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\alpha}} \right|^2 \\ &= \left| E_p(\boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathcal{V}}(2\mathbf{q}) \right|^2, \end{aligned} \quad (4.A.4)$$

onde $\tilde{\mathcal{V}}$ é a transformada de Fourier de \mathcal{V} .

Podemos assim conseguir as irradiâncias de campo próximo e distante [93, sec. 3.1.2] tomando as marginais de $F(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{q})$:

$$I(\boldsymbol{\rho}) = \int d^2 q F(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{q}) = |E_p(\boldsymbol{\rho})|^2 \quad (4.A.5)$$

$$\tilde{I}(\mathbf{q}) = \int d^2 \rho F(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{q}) = \left| \tilde{\mathcal{V}}(2\mathbf{q}) \right|^2. \quad (4.A.6)$$

Apêndice 4B: Aproximação da função $\tilde{\mathcal{V}}$ e largura de \mathcal{V}

Este apêndice descreve uma aproximação para a seguinte função:

$$\tilde{\mathcal{V}}(q) = \text{sinc}(\beta^2 q^2), \quad (4.B.1)$$

que no entanto possui o segundo momento fácil e analiticamente calculável. Note-se que como só interessam quantidades que dependem de $|\tilde{\mathcal{V}}|^2$, o modelo aqui descrito não se pretende uma aproximação razoável para $\tilde{\mathcal{V}}$, o que de fato não é.

A aproximação é a seguinte:

$$\tilde{V}(q) = \exp\left[-\frac{q^4}{2\pi\nu^4}\right], \quad (4.B.2)$$

onde $\nu = 0.96/\beta$. A função (4.B.2) leva o nome de supergaussiana e o coeficiente é obtido por um ajuste não-linear da curva descrita por $|\tilde{\mathcal{V}}|^2$, usando $|\tilde{V}|^2$ como modelo e ν como parâmetro. O ajuste é feito sobre uma amostragem homogênea de $|\tilde{\mathcal{V}}|^2$ no intervalo $\beta q \in [0, 3]$, com 50 valores. O resultado pode ser visto na figura 4.9.

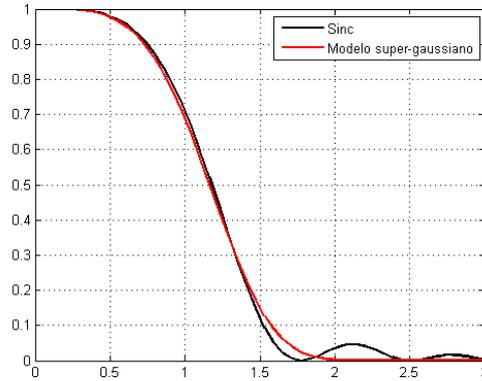


Figura 4.9: Ajuste da função $|\tilde{\mathcal{V}}|^2$.

A largura $\sigma_{\tilde{V}}$ de \tilde{V} é facilmente calculável:

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{V}}^2 &= \frac{\int_0^\infty \exp[-q^4/\pi\nu^4] q^3 dq}{\int_0^\infty \exp[-q^4/\pi\nu^4] q dq} = \frac{\pi\nu^4 \int e^{-x^4} x^3 dx}{\sqrt{\pi}\nu^2 \int e^{-x^4} x dx} \\ &= \sqrt{\pi}\nu^2 \left[\frac{1}{4} \int_0^\infty e^{-u} du \right] \times \left[\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-p^2} dp \right]^{-1} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\nu^2}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} = \nu^2. \end{aligned} \quad (4.B.3)$$

A transformada de Fourier de $\tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{q})$ é dada por:

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = 1 - \frac{2}{\pi} \text{Si} \left(\frac{x^2}{4\beta^2} \right), \quad (4.B.4)$$

onde

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\text{sen } y}{y} dy \quad (4.B.5)$$

é a chamada função seno integral. \mathcal{V} está representada na figura 4.10.

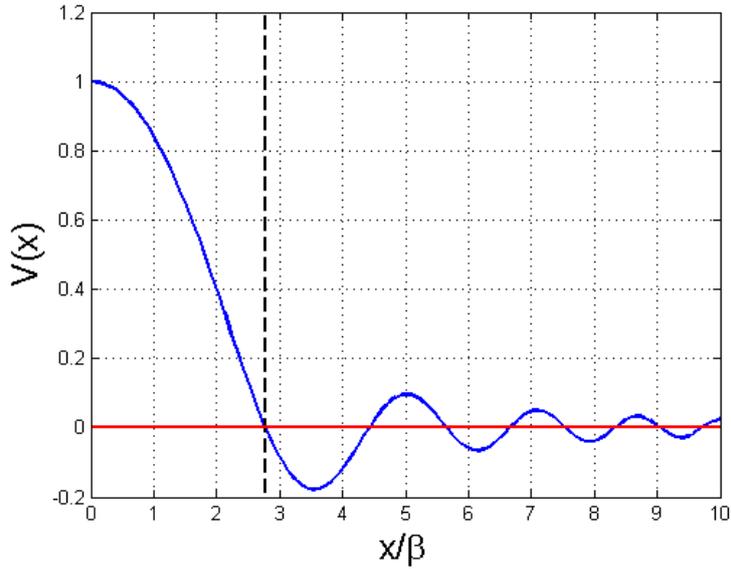


Figura 4.10: Função $\mathcal{V}(x)$ em função de x/β .

Consideraremos a largura Δx de $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ como sendo o menor valor de x para o qual $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = 0$, ou seja, o primeiro zero de $\mathcal{V}(\mathbf{x})$, sinalizado na figura 4.10 pela linha vertical tracejada. Numericamente,

$$\Delta x \approx 2.78\beta. \quad (4.B.6)$$

Perceba-se que Δx não segue a definição de largura utilizada ao longo da tese, baseada no segundo momento das funções. Esta última pode ser calculada numericamente, com uma amostragem de 50 pontos uniformemente distribuídos no intervalo entre 0 e o segundo zero de $\mathcal{V}(\mathbf{x})$, $x_2 \approx 4.4\beta$. O resultado é

$$\sigma = 1.73\beta. \quad (4.B.7)$$

A escolha do segundo zero é feita porque para $x > x_2$, a função $|\mathcal{V}(\mathbf{x})|^2 < 0.01$.

Capítulo 5

Conclusão

O foco deste trabalho foi o comportamento de feixes propagantes de correlação sob regimes de turbulência atmosférica. Diferentemente de um feixe de segunda ordem, a transmissão de correlação sofre distorções por vezes menor, com cancelamento em especial de aberrações espaciais ímpares, como se pode ver pelo termo (4.2.10), presente em algumas das integrais de propagação:

$$\Psi^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}) = \exp [\psi^k(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}; L) + \psi^k(-\boldsymbol{\rho}', -\boldsymbol{\rho}; L)] . \quad (5.1.1)$$

Os particulares argumentos de ψ^k permitem que se transforme formalmente a propagação do feixe de quarta ordem em uma propagação de feixe de segunda ordem (ver seção 3.3) sob uma turbulência cujo efeito é descrito por Ψ^k . Essa distorção efetiva, porém, segue estatísticas distintas da usual e de fato muito da metodologia aplicável a ψ^k não é estritamente válida se se considerar Ψ^k , uma função que não compartilha as propriedades de isotropia e homogeneidade locais de ψ^k .

A forma (5.1.1) decorre de dois fatos:

- Uma forte correlação no campo próximo que faz com que $\boldsymbol{\rho}'_2 = -\boldsymbol{\rho}'_1$ e
- a escolha de posição transversal dos detectores satisfazendo $\boldsymbol{\rho}_2 = -\boldsymbol{\rho}_1$.

Apenas o primeiro deles está ligado às propriedades da fonte. A correlação angular de fótons gerados via CPDE é então desnecessária sob o ponto de vista de cancelamento de aberrações.

Do ponto de vista prático, porém, a ausência de correlação angular implica grande divergência do feixe de correlação e portanto baixa taxa de coleção (ver seção 4.3.1). Adicionalmente, no caso da CPDE, quanto mais díspares as larguras das correlações de campos próximo $\delta\rho$ e distante δq , mais incoerente se torna a fluorescência [110], levando a perdas adicionais.

Tanto a conservação de paridade dos feixes de correlação (de que tratou o capítulo 4) quanto o cancelamento de aberrações demonstrado experimentalmente no capítulo 3 dependem da pequena largura de $\delta\rho$ e, como exposto no gráfico 4.5, a conservação é tão maior quão menor ela o for. É desejável, portanto, que se tenha tanto $\delta\rho$ como

δq pequenas mas, como mostra a desigualdade (4.3.31):

$$\delta\rho\delta q \geq 1, \quad (5.1.2)$$

há um limite que se pode atingir com fontes clássicas [100].

A natureza quântica dos fótons da CPDE foi, ao longo da tese, pouco salientada e de fato apenas usada no estudo de transmissões de informação clássica (em contraposição com transmissão de bits quânticos, ou qubits [111]). É sabido que fótons gerados via CPDE são, em um cenário típico, fortemente não-clássicos [112, 113, 114, 115], de onde se poderia inferir que essa característica é necessária ao cancelamento. Não é claro, porém, quão não-clássica uma fonte deve ser para que haja cancelamento, e nem mesmo sob qual métrica. Uma de suas celebradas propriedades, o chamado emaranhamento [116], é possivelmente desnecessária, uma vez que há correlação não-clássica em sistemas não emaranhados [117].

O emaranhamento tem porém uma importância própria, qual seja, possibilitar o uso de protocolos de informação quântica [116, p. 874], como codificação densa, distribuição de chaves criptográficas e teletransporte. Pois, embora não estritamente necessário na atenuação de efeitos de turbulência, é desejável que se lhe transmita; isto é, o emaranhamento pode ser visto menos como a ferramenta através da qual se transmite informação, e mais como o próprio recurso a ser transmitido. Alguns trabalhos teóricos acerca da resiliência do recurso sob regimes de turbulência foram publicados [118, 119], assim como realizações experimentais utilizando a polarização de fótons [120, 96] (como mencionado no capítulo 1, a polarização é pouco afetada pela turbulência em atmosfera límpida) e momento angular orbital [121].

O cenário aventado é tipicamente o da transmissão dos componentes do estado a diferentes participantes, distantes um do outro, para que estes possam utilizar o recurso na execução de algum dos protocolos. O que os trabalhos demonstram é que a turbulência em geral elimina rapidamente o emaranhamento em graus de liberdade espaciais. Em contraste, há evidências que sugerem que uma implementação como a descrita nesta tese permite a preservação desse recurso: um quantificador de emaranhamento, chamado razão de Fedorov [122], dita que um alto emaranhamento implica razões entre as larguras do perfil do feixe de correlação e a da fluorescência muito diferentes de um, o que de fato se observa no experimento do capítulo 3 e na teoria do capítulo 4. Esse resultado, contudo, é válido para estados puros, isto é, em que não há estocasticidade nos moldes clássicos, o que de certo não corresponde ao estado do bifóton após influência da turbulência.

Se há mesmo disparidade no comportamento do emaranhamento, a razão decorre dos diferentes cenários de propagação: no primeiro caso, fótons são transmitidos a diferentes localidades, de forma que o cancelamento expresso por (5.1.2) dá lugar a duas distorções ψ^k , uma para cada fóton que, descorrelacionadas entre si, não podem se cancelar.

Como dito, um sistema não-clássico pode não ser emaranhado e, por exemplo, a discórdia [117] - um dos quantificadores da correlação não-clássica que resta - pode persistir sob as condições em que o emaranhamento se perde. Especula-se que a

discórdia, em específico, seja o recurso necessário e suficiente na implementação de certos protocolos [123] e é portanto salutar que se estude seu comportamento sob propagações em atmosfera turbulenta.

Por fim, há na óptica de segunda ordem os chamados “teoremas de equivalência” [22, p. 250], que tratam de como e quais fontes diferentes geram a mesma intensidade radiante. Não há teoremas análogos para a óptica de quarta ordem e se houvesse, talvez fosse possível reproduzir com diferentes esquemas as condições necessárias para a atenuação dos efeitos da turbulência. Por exemplo, a estrutura que se observa no estado quântico dos fótons da CPDE (3.1.10):

$$|\psi\rangle \propto \int d^2q_1 \int d^2q_2 \tilde{E}_p(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \tilde{V}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) |\mathbf{q}_1\rangle |\mathbf{q}_2\rangle , \quad (5.1.3)$$

não é exclusiva do formalismo quântico. Formalmente, são apenas necessários o produto tensorial (que em (5.1.3) está implícito em $|\mathbf{q}_1\rangle |\mathbf{q}_2\rangle = |\mathbf{q}_1\rangle \otimes |\mathbf{q}_2\rangle$) entre dois subespaços U e V e a soma coerente no espaço resultante $U \otimes V$ de múltiplos vetores. Esse conceito foi utilizado em [124, 125] para que se observasse com feixes de laser efeitos usualmente associados a estados quânticos. Nesse caso, os espaços U e V representavam o modo espacial e a polarização do feixe; em contraste, o estado representado por $|\psi\rangle$ em (5.1.3) é definido em subespaços U e V associados ambos ao grau de liberdade espacial do feixe.

Bibliografia

- [1] Roberto Landell de Moura. http://pt.wikipedia.org/wiki/Roberto_Landell_de_Moura.
- [2] D. H Johnson. *Fundamentals of electrical engineering I*. Connexions, 2013. Online at: <http://cnx.org/content/col10040/1.9.1/>.
- [3] Berry Smutny, H. Kaempfer, G. Muehlnikel, U. Sterr, B. Wandernoth, F. Heine, U. Hildebrand, D. Dallmann, M. Reinhardt, A. Freier et al. 5.6 gbps optical intersatellite communication link. In *SPIE LASE: Lasers and Applications in Science and Engineering*, page 719906. International Society for Optics and Photonics, 2009.
- [4] Optical satellite communications. <http://www.slideshare.net/islamkotb/optical-satellite-communications-islam-kotb>, 2009.
- [5] Z. Sodnik, B. Furch e H. Lutz. Optical intersatellite communication. *IEEE J. Sel. Top. Quant.*, 16(5):1051–1057, Sept 2010.
- [6] V. I. Tatarski e R. A. Silverman. *Wave propagation in a turbulent medium*. McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [7] R.S Lawrence e J.W Strohbehm. A survey of clear-air propagation effects relevant to optical communications. *P. IEEE*, 58:1523–1545, 1970.
- [8] fSONA optical wireless. <http://www.fsona.com/>.
- [9] PAV, free space optical solution. <http://www.pavdata.com/>.
- [10] L.C. Andrews e R.L Phillips. *Laser Beam Propagation Through Random Media*. Press Monographs. Society of Photo Optical, 2005.
- [11] Joseph Goodman. *Speckle Phenomena in Optics*. Roberts and Company Publishers, 2010.
- [12] Institute of Astronomy University of Cambridge. Lucky imaging methods. <http://www.ast.cam.ac.uk/research/instrumentation.surveys.and.projects/lucky.imaging/lucky.imaging.methods>, 2011.

- [13] John D Moores, F.G Walther, J.A Greco, S. Michael, William E Wilcox Jr, A.M Volpicelli, R.J Magliocco e S.R Henion. Architecture overview and data summary of a 5.4 km free-space laser communication experiment. In *SPIE Optical Engineering+ Applications*, page 746404. International Society for Optics and Photonics, 2009.
- [14] International Telecommunication Union. G.709: Interfaces for the optical transport network. <http://www.itu.int/rec/T-REC-G.709/en>, 2012.
- [15] JH Shapiro e AL Puryear. Reciprocity-enhanced optical communication through atmospheric turbulence - part I: Reciprocity proofs and far-field power transfer optimization. *Journal of Optical Communications and Networking*, 4(12):947–954, 2012.
- [16] Vincent W. S. Chan. Free-space optical communications. *J. Lightwave Technol.*, 24(12):4750–4762, Dec 2006.
- [17] JW Hardy. Adaptive optics for astronomical telescopes. *Sci. Am.*, pages 60–65, 1994.
- [18] Enrique Fernández, I. Iglesias e P. Artal. Closed-loop adaptive optics in the human eye. *Opt. Lett.*, pages 746–748, 2001.
- [19] M. J. Booth. Adaptive optics in microscopy. *Philos. T. R. Soc. A*, 365(1861):2829–2843, 2007.
- [20] R. Hanbury Brown e R. Q. Twiss. A test of a new type of stellar interferometer on sirius. *Nature*, 178:1046–1048, 1956.
- [21] R. Hanbury Brown e R. Q. Twiss. Correlation between photons in two coherent beams of light. *Nature*, 177:27–29, 1956.
- [22] L. Mandel e E Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [23] Magued Nasr, Bahaa Saleh, Alexander Sergienko e Malvin Teich. Demonstration of Dispersion-Canceled Quantum-Optical coherence tomography. *Phys. Rev. Lett.*, 91:083601, 2003.
- [24] AM Steinberg, P. Kwiat e R. Chiao. Dispersion cancellation in a measurement of the single-photon propagation velocity in glass. *Phys. Rev. Lett.*, 68(16):2421, 1992.
- [25] KJ Resch, P Puvanathan, J. Lundeen, M. Mitchell e K Bizheva. Classical dispersion-cancellation interferometry. *Opt. Express*, 15(14):8797–8804, 2007.

- [26] Cristian Bonato, Alexander Sergienko, Bahaa Saleh, Stefano Bonora e Paolo Villoresi. Even-Order aberration cancellation in quantum interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 101:233603, 2008.
- [27] L. A. P. Filpi, M. da Cunha Pereira e C. H Monken. Experimental observation of odd-order aberration cancellation. A ser publicado, 2014.
- [28] R Prevedel, Y Lu, W Matthews, R Kaltenbaek e K Resch. Entanglement-enhanced classical communication over a noisy classical channel. *Phys. Rev. Lett.*, 106(11):110505, 2011.
- [29] R. J Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131(6):2766–2788, 1963.
- [30] Kuo-nan Liou e H. Lahore. Laser sensing of cloud composition: a backscattered depolarization technique. *J. Appl. Meteorol.*, 13(2):257–263, 1974.
- [31] J.W. Strohbehn e S Clifford. Polarization and angle-of-arrival fluctuations for a plane wave propagated through a turbulent medium. *IEEE T. Antenn. Propag.*, 15(3):416–421, May 1967.
- [32] S. Parker, S. Bose e M. B Plenio. Entanglement quantification and purification in continuous-variable systems. *Phys. Rev. A*, 61:032305, Feb 2000.
- [33] RJ Freiberg e A. Halsted. Properties of low order transverse modes in argon ion lasers. *Appl. Optics*, 8(2):355–362, 1969.
- [34] Sebastian Randel, R. Ryf, A. Sierra, P.J Winzer, A.H Gnauck, C.A Bolle, René-Jean Essiambre, D.W Peckham, McCurdy, Alan e R. Lingle. 6x 56-Gb/s mode-division multiplexed transmission over 33-km few-mode fiber enabled by 6 x 6 MIMO equalization. *Opt. Express*, 19(17):16697–16707, 2011.
- [35] Nenad Bozinovic, Y. Yue, Y. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A.E. Willner e S. Ramachandran. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers. *Science*, 340(6140):1545–1548, 2013.
- [36] Jian Wang, Jeng-Yuan Yang, Irfan M. Fazal, Nisar Ahmed, Yan Yan, Hao Huang, Yongxiong Ren, Yang Yue, Samuel Dolinar, Moshe Tur e Alan E. Willner. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing. *Nat. Photonics*, 6:488–496, 2012.
- [37] Yongxiong Ren, Hao Huang, Guodong Xie, Nisar Ahmed, Yan Yan, Baris I Erkmen, Nivedita Chandrasekaran, Martin PJ Lavery, Nicholas K Steinhoff, Moshe Tur et al. Atmospheric turbulence effects on the performance of a free space optical link employing orbital angular momentum multiplexing. *Opt. Lett.*, 38(20):4062–4065, 2013.

- [38] J.A Anguita, H. Rodriguez e C. Quezada. Experimental propagation of optical laguerre-gauss beams in turbulence. In *Aerospace Conference, 2014 IEEE*, pages 1–6, March 2014.
- [39] Milorad Cvijetic e Yuzuru Takashima. Beyond 1mb/s free-space optical quantum key distribution. In *Transparent Optical Networks (ICTON), 2014 16th International Conference on*, pages 1–4, July 2014.
- [40] Les Allen, Marco W Beijersbergen, RJC Spreeuw e JP Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Phys. Rev. A*, 45(11):8185–8189, 1992.
- [41] J Shapiro. Normal-mode approach to wave propagation in the turbulent atmosphere. *Appl. Optics*, 13(11):2614–2619, 1974.
- [42] R. L Fante. Wave propagation in random media: A systems approach. In E Wolf, editor, *Progress in optics*, volume XXII. Elsevier, 1985.
- [43] Greg Gbur e Emil Wolf. The Rayleigh range of partially coherent beams. *Opt. Commun.*, 199:295–304, 2001.
- [44] Greg Gbur e E. Wolf. Spreading of partially coherent beams in random media. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19(8):1592–1598, 2002.
- [45] Onur Keskin, L. Jolissaint e C. Bradley. Hot-air optical turbulence generator for the testing of adaptive optics systems: principles and characterization. *Appl. Optics*, 45(20):4888–4897, 2006.
- [46] J. D Schmidt. *Numerical simulation of optical wave propagation*. SPIE Press, 2010.
- [47] C. K. Hong e L Mandel. Theory of parametric frequency down conversion of light. *Phys. Rev. A*, 31(4):2409–1418, 1985.
- [48] Y.R Shen. *The principles of nonlinear optics*. Wiley classics library. Wiley-Interscience, 2003.
- [49] S.P Walborn, C.H Monken, S. Pádua e P.H Souto Ribeiro. Spatial correlations in parametric down-conversion. *Physics Reports*, 495:87–139, 2010.
- [50] Marcelo V da Cunha Pereira, Luísa AP Filpi e Carlos H Monken. Cancellation of atmospheric turbulence effects in entangled two-photon beams. *Phys. Rev. A*, 88:053836, 2013.
- [51] M. V. da Cunha Pereira. MATLAB - Tese. <https://drive.google.com/folderview?id=0B8R6ppNuwRJ-QmoxY195c1Y2cDQ&usp=sharing>. Rotinas de geração de gráficos da tese.

- [52] L. D. Landau e E. M Lifshitz. *Fluid mechanics*, volume 6 of *Course of Theoretical Physics*. Butterworth-Heinemann, segunda edição, 1987.
- [53] J. P Holman. *Heat transfer*. McGraw-Hill, 2002.
- [54] A Kolmogorov. Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. *P. Roy. Soc. A-Math. Phy.*, 434:15–17, 1991.
- [55] VP Lukin e VV Pokasov. Optical wave phase fluctuations. *Appl. Optics*, 20(1):121–135, 1981.
- [56] E Masciadri e J Vernin. Optical technique for inner-scale measurement: possible astronomical applications. *Appl. Optics*, 36(6):1320–1327, 1997.
- [57] N. Nightingale e D Buscher. Interferometric seeing measurements at the la palma observatory. *Monthly Notices of The Royal Astronomical Society*, 251:155–166, 1991.
- [58] D Buscher, J Armstrong, C Hummel, A Quirrenbach, D Mozurkewich, K Johnston, C Denison, M Colavita e M Shao. Interferometric seeing measurements on mt. wilson: power spectra and outer scales. *Appl. Optics*, 34(6):1081–1096, 1995.
- [59] A. M Obukhov. Structure of the temperature field in turbulent flow. *Izv. Akad. Nauk SSSR*, 13:58, 1949.
- [60] J.W Goodman. *Introduction to Fourier optics*. McGraw-Hill series in electrical and computer engineering. McGraw-Hill, 1996.
- [61] J.W. Strohbehn e S.F. Clifford. *Laser beam propagation in the atmosphere*. Topics in applied physics. Springer-Verlag, 1978.
- [62] SM Wandzura. Meaning of quadratic structure functions. *J. Opt. Soc. Am.*, 70(6):745–747, 1980.
- [63] R.L Fante. Electromagnetic beam propagation in turbulent media. *P. IEEE*, 63:1669–1692, 1975.
- [64] L. Jolissaint. Optical turbulence generators for testing astronomical adaptive optics systems: A review and designer guide. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 118:1205–1224, 2006.
- [65] R.L Fante. Electromagnetic beam propagation in turbulent media: An update. *P. IEEE*, 68:1424–1443, 1980.
- [66] RG Lane, A Glindemann, JC Dainty et al. Simulation of a kolmogorov phase screen. *Waves in random media*, 2(3):209–224, 1992.

- [67] C Chen. *Foundations for Guided-Wave Optics*. Wiley-Interscience, 2006. Online at: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9780470042229.app2/pdf>.
- [68] M. V. da Cunha Pereira. Turbulence_MonteCarlo. https://github.com/MarcPer/Turbulence_MonteCarlo. Simulação de feixes propagantes em turbulência atmosférica.
- [69] R.W Boyd. *Nonlinear Optics*. Nonlinear Optics Series. Elsevier Science, terceira edição, 2008.
- [70] Martin M Fejer, GA Magel, Dieter H Jundt e Robert L Byer. Quasi-phase-matched second harmonic generation: tuning and tolerances. *IEEE J. Quantum Elect.*, 28(11):2631–2654, 1992.
- [71] W Peeters e M van Exter. Optical characterization of periodically-poled KTiOPO4. *Opt. Express*, 16(10):7344–7360, 2008.
- [72] http://www.nist.gov/pml/div684/grp03/quantum_correlated.cfm.
- [73] H. Di Lorenzo Pires, F. Coppens e M. van Exter. Type-I spontaneous parametric down-conversion with a strongly focused pump. *Phys. Rev. A*, 83:033837, 2011.
- [74] Bahaa Saleh, M. Teich e A. Sergienko. Wolf equations for two-photon light. *Phys. Rev. Lett.*, 94(22):223601, 2005.
- [75] T. D. Newton e E. P Wigner. Localized states for elementary systems. *Rev. Mod. Phys*, 21:400–406, Jul 1949.
- [76] Morton H. Rubin, David N. Klyshko, Y. H. Shih e A. V. Sergienko. Theory of two-photon entanglement in type-II optical parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 50:5122, 1994.
- [77] P. A. M Dirac. *The principles of quantum mechanics*. Oxford University Press, 1982.
- [78] R. J Glauber. The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, 130(6):2529, 1963.
- [79] H. M Nussenzveig. *Introduction to quantum optics*. Taylor & Francis, 1973.
- [80] C. Monken, P. Ribeiro e S. Pádua. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 57:3123, 1998.
- [81] A.G. da Costa Moura, W.A.T. Nogueira e C.H. Monken. Fourth-order image formation by spontaneous parametric down-conversion: The effect of anisotropy. *Opt. Commun.*, 283(14):2866–2871, 2010.

- [82] Robert J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, 66(3):207–211, Mar 1976.
- [83] H. Di Lorenzo Pires e M. van Exter. Observation of near-field correlations in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 79:041801, 2009.
- [84] Philip E Ciddor. Refractive index of air: new equations for the visible and near infrared. *Appl. Optics*, 35(9):1566–1573, Mar 1996.
- [85] RefractiveIndex.info. <http://refractiveindex.info/?shelf=other&book=air&page=Ciddor>. Refractive index database.
- [86] D. L. Fried. Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures. *J. Opt. Soc. Am.*, 56, 1966.
- [87] H Hellwig, J Liebertz e Linear Bohatý. Linear optical properties of the monoclinic bismuth borate bib3o6. *J. Appl. Phys.*, 88(1):240–244, 2000.
- [88] Alan Stummer. Coincidence detector. <http://www.physics.utoronto.ca/~astummer/pub/mirror/Projects/Archives/2004%20Coincident%20Detector/Coincident%20Detector.html>.
- [89] S. Polyakov, A. Migdall e S. W Nam. FPGA-based multicoincidence recipe and software. <http://www.nist.gov/pml/div684/grp03/multicoincidence.cfm>.
- [90] David L Fried. Probability of getting a lucky short-exposure image through turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, 68(12):1651–1657, 1978.
- [91] SP Walborn, S Pádua e CH Monken. Conservation and entanglement of hermite-gaussian modes in parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 71(5):053812, 2005.
- [92] Timothy Yarnall, A.F Abouraddy, B.EA Saleh e M.C Teich. Synthesis and analysis of entangled photonic qubits in spatial-parity space. *Phys. Rev. Lett.*, 99(25):250502, 2007.
- [93] U Leonhardt. *Measuring the Quantum State of Light*. Cambridge Studies in Modern Optics. Cambridge University Press, 2005.
- [94] Gregor Jotzu, Tim J Bartley, Hendrik B Coldenstrodt-Ronge, Brian J Smith e Ian A Walmsley. Continuous phase stabilization and active interferometer control using two modes. *J. of Mod. Optic.*, 59(1):42–45, 2012.
- [95] Alberto Carrasco-Casado, Natalia Denisenko e Veronica Fernandez. Correction of beam wander for a free-space quantum key distribution system operating in urban environment. *Opt. Eng.*, 53(8):084112–084112, 2014.

- [96] Alessandro Fedrizzi, Rupert Ursin, Thomas Herbst, Matteo Nespoli, Robert Prevedel, Thomas Scheidl, Felix Tiefenbacher, Thomas Jennewein e Anton Zeilinger. High-fidelity transmission of entanglement over a high-loss free-space channel. *Nat. Phys.*, 5:389–392, 2009.
- [97] M. Edgar, D. Tasca, F. Izdebski, R. Warburton, J. Leach, M. Agnew, G. Buller, R. Boyd e M. Padgett. Imaging high-dimensional spatial entanglement with a camera. *Nat. Comm.*, 3:984, 2012.
- [98] Prisma de dove. http://en.wikipedia.org/wiki/Dove_prism.
- [99] E.B Carne. *Telecommunications Primer: Data, Voice, and Video Communications*. Feher/Prentice Hall digital and wireless communication series. Prentice Hall PTR, 1999.
- [100] Ryan Bennink, S. Bentley, R. Boyd e J. Howell. Quantum and classical coincidence imaging. *Phys. Rev. Lett.*, 92(3):033601, 2004.
- [101] W.C. Elmore e M.A Heald. *Physics of Waves*. Dover Books on Physics Series. Dover Publications, 1985.
- [102] D. L. Fried. Aperture averaging of scintillation. *J. Opt. Soc. Am.*, 57(2):169–172, Feb 1967.
- [103] Greg Gbur. Partially coherent beam propagation in atmospheric turbulence [Invited]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 31(9):2038–2045, 2014.
- [104] P. De Santis, F. Gori, G. Guattari e C. Palma. An example of a Collett-Wolf source. *Opt. Commun.*, 29(3):256–260, 1979.
- [105] Werner Martienssen e E. Spiller. Coherence and fluctuations in light beams. *American Journal of Physics*, 32:919–926, 1964.
- [106] Fortunato T Arecchi et al. Measurement of the statistical distribution of gaussian and laser sources. *Phys. Rev. Lett.*, 15(24):912–916, 1965.
- [107] Kyle Drexler. Use of a partially coherent transmitter beam to improve the statistics of received power in a free-space optical communication system: theory and experimental results. *Opt. Eng.*, 50:025002, 2011.
- [108] Guang-ming Dai. Modal compensation of atmospheric turbulence with the use of Zernike polynomials and Karhunen–Loève functions. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12(10):2182–2193, 1995.
- [109] Leo A Goodman. On the exact variance of products. *J. Am. Stat. Assoc.*, 55(292):708–713, 1960.

- [110] C Law e J Eberly. Analysis and interpretation of high transverse entanglement in optical parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 92(12):127903, 2004.
- [111] Benjamin Schumacher. Quantum coding. *Phys. Rev. A*, 51(4):2738, 1995.
- [112] Paul G. Kwiat, Edo Waks, Andrew G. White, Ian Appelbaum e Philippe H. Eberhard. Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A*, 60:R773, 1999.
- [113] W. Nogueira, S. Walborn, S. Pádua e C. Monken. Experimental observation of spatial antibunching of photons. *Phys. Rev. Lett.*, 86:4009, 2001.
- [114] Irfan Ali Khan e John Howell. Experimental demonstration of high two-photon time-energy entanglement. *Phys. Rev. A*, 73:031801(R), 2006.
- [115] H. Di Lorenzo Pires, C. Monken e M. van Exter. Direct measurement of transverse-mode entanglement in two-photon states. *Phys. Rev. A*, 80:022307, 2009.
- [116] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki e K. Horodecki. Quantum entanglement. *Reviews of Modern Physics*, 81:865, 2009.
- [117] Harold Ollivier e Wojciech H. Zurek. Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 88:017901, 2001.
- [118] C Gopaul e R Andrews. The effect of atmospheric turbulence on entangled orbital angular momentum states. *New J. Phys.*, 9:94, 2007.
- [119] Nina D Leonhard, Vyacheslav N Shatokhin e Andreas Buchleitner. Universal entanglement decay in atmospheric turbulence. *arXiv preprint arXiv:1408.3324*, 2014.
- [120] Cheng-Zhi Peng, T. Yang, Xiao-Hui Bao, J. Zhang, Xian-Min Jin, Fa-Yong Feng, B. Yang, J. Yang, J. Yin, Q. Zhang, N. Li, Bao-Li Tian e Jian-Wei Pan. Experimental free-space distribution of entangled photon pairs over 13 km: towards satellite-based global quantum communication. *Phys. Rev. Lett.*, 94(15):150501, 2005.
- [121] Filippus S Roux, Sandeep K Goyal, Melanie G McLaren, Thomas Konrad, Andrew Forbes et al. The evolution of oam-entanglement between two qutrits in turbulence. In *SPIE OPTO*, pages 899919–899919. International Society for Optics and Photonics, 2014.
- [122] M. Fedorov, M. Efremov, A. Kazakov, K. Chan, C. Law e J. Eberly. Spontaneous emission of a photon: Wave-packet structures and atom-photon entanglement. *Phys. Rev. A*, 72:032110, 2005.

- [123] Borivoje Dakić, Yannick Ole Lipp, Xiaosong Ma, Martin Ringbauer, Sebastian Kropatschek, Stefanie Barz, Tomasz Paterek, Vlatko Vedral, Anton Zeilinger, Časlav Brukner e Philip Walther. Quantum discord as resource for remote state preparation. *Nat. Phys.*, 8:666–670, 2012.
- [124] C Souza, J Huguenin, P Milman e A Khoury. Topological phase for spin-orbit transformations on a laser beam. *Phys. Rev. Lett.*, 99(16):160401, 2007.
- [125] C. V. S. Borges, M. Hor-Meyll, J. A. O. Huguenin e A. Z. Khoury. Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam. *Phys. Rev. A*, 82:033833, 2010.