UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Jackeline Nogueira Paes

A REJEIÇÃO DO PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO E SUAS CONSEQUÊNCIAS NA ARITMÉTICA DE HEYTING

Belo Horizonte
2014

JACKELINE NOGUEIRA PAES

A REJEIÇÃO DO PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO E SUAS CONSEQUÊNCIAS NA ARITMÉTICA DE HEYTING

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Linha de Pesquisa: Lógica e Filosofia da Ciência
Orientador: Prof. Dr. Abílio Azambuja Rodrigues Filho.

Belo Horizonte
2014

100
P126r
2014

Paes, Jackeline Nogueira

A rejeição do princípio do terceiro excluído e suas consequências na aritmética de Heyting [manuscrito] / Jackeline Nogueira Paes. - 2014.

108 f.

Orientador: Abílio Azambuja Rodrigues Filho.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas.

1.Filosofia – Teses. 2. Aritmética – Teses. 3. Matemática – Filosofia. I. Rodrigues , Abílio. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas. III.Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

FOLHA DE APROVAÇÃO

A rejeição do princípio do terceiro excluído e suas consequências para a aritmética de Heyting

JACKELINE NOGUEIRA PAES

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FILOSOFIA, como requisito para obtenção do grau de Mestre em FILOSOFIA, área de concentração FILOSOFIA, linha de pesquisa Lógica e Filosofia da Ciência.

Aprovada em 05 de agosto de 2014, pela banca constituída pelos membros:

Prof. Abílio Azambuja Rodrigues Filho - Orientador
UFMG

Prof. Antônio Mariano Nogueira Coelho
UFMG

Prof. André da Silva Porto
UFG

Belo Horizonte, 05 de agosto de 2014.

Para meus pais,

Reinaldo e Stela.

AGRADECIMENTOS

A finalização deste trabalho foi um longo caminho que começou muito antes do resultado do processo de seleção, quando acreditava que não seria possível. Mas entre enganos e acertos eis que aqui chegamos e algumas pessoas foram essenciais no decorrer desta trajetória, portanto, gostaria de me estender um pouco ao prestar meus sinceros agradecimentos àqueles que foram essenciais para sua realização.

Agradeço ao meu pai que com a sua grande sabedoria, que desconhece as letras, nunca deixou de lutar para tornar possível a realização de meus sonhos. À minha mãe que por considerar os estudos o único e legítimo caminho para a independência me encorajou carinhosamente a estudar. Vocês são fundamentais em minha vida e sem o apoio de vocês os caminhos que levaram a conclusão deste trabalho não teriam sido trilhados.

Agradeço ao meu irmão Gu por seu um bom amigo e por ter me ensinado, desde muito cedo, a compartilhar. Amo você!

Agradeço ao Gustavo pelo carinho e que possamos continuar cantando em muitos 'karaokês'. E também aos seus pais, Paulo Afonso e Izilda, pelo afeto com o qual me receberam.

Agradeço aos meus avós, materno e paterno. Meu sincero agradecimento a minha tia Val por estar sempre acompanhando meus passos e a pequena Juju pelas conversas e inúmeros 'por quês?' sempre inspiradores: "Por que meninas não têm barba? Por que as aranhas são assustadoras?"

Parte de mim seria muito diferente se não fossem os bons amigos que reconheci ao longo de minha vida. Agradeço aos amigos que me acompanham desde a infância no 'Dr. Moreira Brandão', Carla, Débz, Ed, Flávia e Karina, obrigada por continuarem meus amigos, mesmo quando discordam de minhas ideologias. Meu agradecimento aos amigos da capital mineira Aninha, Bel, Denis, Eric, Luiz e Poly, por terem me apresentado a 'metrópole' e por compartilharem comigo conhecimentos e conselhos. Ao Luiz agradeço de coração as leituras atentas e discussões construtivas. Agradeço aos meus amigos de São João e agregados desta terra, Cíntia, Denny, Dirceu, Gil, Hellem, Lê e Pri, obrigada pela companhia nas noites insanas, pela troca de conhecimentos e pela amizade que supera a quilometragem.

Agradeço ao professor Abílio pela orientação, solicitude, paciência e vontade com a qual acolheu meu trabalho desde o primeiro telefonema pedindo ajuda. Agradeço pela sua indiscutível compreensão de minhas dificuldades, atrasos e erros. E também pela liberdade e confiança depositados em meu trabalho. Certamente as discussões mais significativas desta dissertação se devem as suas orientações e conselhos.

Agradeço aos funcionários da FAFICH, ao Programa de Pós-graduação em Filosofia da UFMG, em especial aos professores, pela oportunidade de aprendizagem, e aos funcionários da secretaria de Pós-graduação, pela ajuda e simpatia com a qual sempre me receberam.

Agradeço a CAPES pela concessão da bolsa de estudos sem a qual este trabalho não seria possível.

Com todos vocês divido a minha alegria. Diz o escritor uruguaio Eduardo Galeano que “cada pessoa brilha com luz entre todas as outras. Não existem duas fogueiras iguais. Existem fogueiras grandes e fogueiras pequenas e fogueiras de todas as cores. Existe gente de fogo sereno, que nem percebe o vento, e gente de fogo louco, que enche o ar de chispas. Alguns fogos, fogos bobos, não alumiam nem queimam; mas outros incendeiam a vida com tamanha vontade que é impossível olhar para eles sem pestanejar, e quem chegar perto pega fogo.” Todos vocês incendiaram a minha vida.

O que me tranquiliza
é que tudo o que existe,
existe com uma precisão absoluta.
O que for do tamanho de uma cabeça de alfinete
não transborda nem uma fração de milímetro
além do tamanho de uma cabeça de alfinete.
Tudo o que existe é de uma grande exatidão.
Pena é que a maior parte do que existe
com essa exatidão
nos é tecnicamente invisível.
O bom é que a verdade chega a nós
como um sentido secreto das coisas.
Nós terminamos adivinhando, confusos,
a perfeição.
Clarice Lispector.

RESUMO

Na transição do século XIX para o século XX, a matemática conquistou desenvolvimentos importantes. Contudo, a esses desenvolvimentos, seguiu-se a descoberta de paradoxos, entre eles os conhecidos paradoxos de Russell e de Cantor, que abriram as discussões sobre os fundamentos da matemática. Estas discussões visavam encontrar uma fundação segura, livre de erros e imprecisões, para esta ciência. O Intuicionismo, uma alternativa para a matemática clássica, teve origem nas ideias construtivistas expostas pelo matemático holandês L. E. J. Brouwer, e tinha como consequência a rejeição do Princípio do Terceiro Excluído. Tal rejeição está baseada, sobretudo, na tese de que os objetos matemáticos são construções mentais e, por conseguinte, na rejeição de um âmbito suprassensível e pré-existente de entes matemáticos. Assim, o objetivo do presente trabalho é mostrar que essa tese depende do modo pelo qual Brouwer compreendia três conceitos fundamentais para a matemática, a saber, infinito, verdade e existência. A seguir, mostraremos as consequências da rejeição do terceiro excluído na aritmética. Veremos que, pelo menos no caso da aritmética, a rejeição do terceiro excluído não seria suficiente para evitar inconsistências. Discutiremos as traduções de duplas negações apresentadas por Kolmogorov, Gödel e Gentzen e, por fim, apresentaremos uma prova da equiconsistência da aritmética intuicionista e clássica.

Palavras-chave: Intuicionismo. Princípio do Terceiro Excluído. Verdade. Existência. Infinito. Traduções de Dupla negação. Equiconsistência.

ABSTRACT

During the transition from the XIX to the XX century, mathematics got important developments. However, these developments were followed by the discovery of paradoxes, including the known paradoxes of Russell and Cantor, who opened the discussion on the foundations of mathematics. These discussions aimed to find a secure foundation free of errors and impreciseness for this science. The Intuitionism, an alternative to classical mathematics, was originated in the constructivist ideas exposed by the Dutch mathematician L. E. J. Brouwer, and has resulted in the rejection of the Principle Excluded Middle. This rejection is mainly based on the thesis that mathematical objects are constructs of the mind and, therefore, the rejection of one supersensible and preexisting field of mathematics entities. We aim in this work to demonstrate which that thesis depends on the way in which Brouwer includes three fundamental concepts to the mathematics, namely, infinite, truth and existence. After, we demonstrate the consequences of the rejection of Excluded Middle in arithmetic. We will see, at least in the case of arithmetic that rejection of the Excluded Middle would not be enough to avoid inconsistencies. We also discuss the translations of double negations performed by Kolmogorov, Gentzen and Gödel and, finally, we will introduce a proof of the equiconsistency of intuitionistic and classical arithmetical.

Keywords: Intuitionism. Principle of the Excluded Middle. Truth. Existence. Infinity. Translations of double negations. Equiconsistency.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Em 1907 o matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881- 1966) defendeu sua tese de doutorado intitulada *Over de grondslagen der wiskunde.* Nesse trabalho ele começou a desenvolver o pensamento intuicionista e sua crítica à lógica matemática, contrapondo-se à posição de matemáticos como, David Hilbert. O período de desenvolvimento das primeiras noções do Intuicionismo está influenciado por uma forte produção acadêmica nas áreas de fundamentos e filosofia da matemática em meados dos séculos XIX e XX, haja vista o surgimento de três escolas em um período de 30 anos, o Logicismo[1], o Formalismo[2] e o Intuicionismo, defendendo pontos de vistas diferentes sobre como estabelecer uma fundação segura, livre de conceitos imprecisos e erros, para a matemática.

A tentativa de estruturar a matemática como uma ciência segura remonta à Grécia antiga, quando Platão formulou sua *Teoria das Formas*[3]defendendo a existência de um mundo abstrato e imutável no qual estariam todos os elementos matemáticos, e caberia ao

[1]O Logicismo em Filosofia da Matemática representa, basicamente, uma teoria que concebe a matemática como uma extensão da lógica, neste sentido, a matemática é redutível à lógica. Bertrand Russell, Alfred N. Whitehead, Richard Dedekind e Gottlob Frege foram defensores desta escola matemática. O Logicismo foi responsável por várias descobertas acerca da Aritmética e Teoria dos conjuntos, tendo como percursores Dedekind e Frege. A propagação dos trabalhos do Logicismo foram promovidas e impulsionadas, em partes, pela descoberta de alguns dos paradoxos; dentre eles o *Paradoxo de Russell* que mostrou que o sistema desenvolvido por Frege, na tentativa de mostrar que a aritmética pode ser obtida por meios estritamente lógicos sem os recursos da intuição, era inconsistente por possuir um axioma que nos permitiria provar qualquer coisa dentro do sistema. O sistema de Frege permitia que se definisse um conjunto a partir da propriedade_ ser um conjunto *que não pertence a si mesmo*, isto é, grosso modo, um conjunto $R = \{x : x \notin x\}$, assim $R \in R$ se, e somente se, $R \notin R$. O Paradoxo de Russell foi motivado pelo Paradoxo de Cantor (relativo ao maior número cardinal) criado no final do século XIX, como parte das pesquisas de Cantor a respeito dos conjuntos infinitos e que foi axiomatizado por Frege na *Begriffsschrift*. Bertrand Russell procurou provar que havia uma falha na demonstração de Cantor, no sentido de que não existe um cardinal maior que todos os outros, e uma falha no sistema de Frege. Com o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos por Zermelo e Fraenkel, ZFC, dando prosseguimento ao Logicismo, os problemas relacionados às inconsistências ou incoerências na Teoria dos conjuntos de Cantor puderam ser resolvidas.
Cf. SILVA, Jairo J. da, 2007, p.123- 142.

[2]A escola Formalista, em que se insere o Programa de David Hilbert como uma tentativa de reformular as bases da matemática, começando pela aritmética, de forma rigorosa, seguiu a ideia de que os enunciados matemáticos e lógicos podem ser considerados como consequências de certas regras de manipulação. Para tanto Hilbert propôs reduzir a matemática a um conjunto finito e completo de axiomas, e provar a consistência destes axiomas. O programa de Hilbert sofreu grande prejuízo com o Teorema da Incompletude de Gödel, que mostrou que um sistema completo e consistente de axiomas para toda matemática seria impossível.

[3] A Teoria das Formas ou Teoria das Ideias foi desenvolvida por Platão em seus diálogos através de seus personagens (principalmente Sócrates) e defende que a realidade mais fundamental é composta de ideias ou formas abstratas. Para ele, estas ideias são os únicos objetos passíveis de oferecer verdadeiro conhecimento. As ideias ou formas estariam no mundo inteligível, fora do tempo e do espaço e sua natureza seria inacabável e imutável. Em contrapartida a este mundo, no mundo comum os objetos da realidade se organizariam de acordo com estas ideias ou formas primordiais, porém são apenas imitações imperfeitas.
Cf. RICKLESS, Samuel, Jul/2011.

matemático descobrir estes objetos. As ideias de Platão movimentaram discussões acerca dos fundamentos da matemática por muito tempo, apesar de atualmente poucos matemáticos acreditarem completamente no reino puro das ideias de Platão, o pressuposto de que a matemática está em um domínio fora desse mundo é muito presente. Segundo Jairo José da Silva,

> Hoje poucos ainda aceitam seriamente o reino puro de Ideias de Platão, a sua teoria da reminiscência, e outras idiossincrasias da sua filosofia, mas a imagem da matemática como uma ciência de um domínio fora desse mundo ao qual ascendemos pelo pensamento é ainda a "filosofia" natural dos matemáticos. Os filósofos de hoje procuram arduamente transformar este estereótipo numa filosofia articulada. (SILVA, Jairo J. da, 2007, p.43)

Em contraposição a esta perspectiva para a estruturação da matemática como ciência, surge o construtivismo, que rejeita a ideia de que os objetos matemáticos estariam em uma realidade independente da mente humana, e afirma que estes são construídos. O surgimento dos métodos construtivistas também remontam a Grécia antiga, especificamente ao filósofo Aristóteles, que foi o primeiro sistematizador da lógica formal, colocando o homem como construtor do mundo matemático. Mas o construtivismo ganhou ênfase apenas no começo do século XIX, quando os matemáticos trabalhavam com a pretensão de desenvolver a teoria dos números reais em termos da aritmética dos números racionais, e reduzir a aritmética dos racionais à aritmética dos inteiros não-negativos, processo conhecido como *aritmetização da análise*[4], tentando assim eliminar problemas com as definições de conceitos, tais como a de infinitesimais.[5]

O Intuicionismo foi, dentre as vertentes do Construtivismo[6], a mais difundida, afirmando que a matemática deveria ser reconstruída sob o edifício da mente humana. Assim Brouwer, o fundador do Intuicionismo, relega a existência de objetos matemáticos

---

[4] Em poucas palavras, podemos afirmar que *Aritmetização da análise* consiste na redução de conceitos da análise a conceitos aritméticos.

[5] A noção de infinitesimal foi formulada inicialmente por Gottfried W. Leibniz e surgiu com a definição original de derivada e integral. Na história da matemática, o infinitesimal é concebido como um número tão pequeno quanto se queira, porém maior que zero. Contudo, este conceito desencadeou discussões entre matemáticos, pois parecia levar contradições e inconsistências em análise aritmética; por este motivo, estudiosos consideram a noção de infinitesimal um dos fatores que levaram a gênese do retorno ao construtivismo no início do século XX. Cf. CARVALHO, Tadeu F. de, D'OTTAVIANO, Ítala M. L., 2006, p. 13- 43.

[6] Como exemplos de abordagens que estão baseadas em ideias construtivistas podemos indicar: o *Finitismo* de David Hilbert e Paul Bernays; o *Bishop's Constructive Mathematics,* programa de análise construtiva de Andrey Markov e Errett Bishop; e a *Constructive Recursive Mathematics* de Nikolai A. Shanin.
Cf. van DALEN, D., TROELSTRA, A. S., 1988, p. 1- 4.

independentes da mente e a transcendência de verdades matemáticas. Apoiando-se na ideia de que os objetos matemáticos devem ser construídos pela mente humana, através de métodos construtivos, e a verdade de uma proposição matemática é afirmada a partir de sua prova. Para o programa intuicionista a matemática deveria ser reconstruída fundamentada na intuição básica da matemática e independente da linguagem matemática, a lógica, que seria necessária apenas para a comunicação de resultados matemáticos.

> theoretical logic as well as logistic are empirical sciences and that they apply mathematics; consequently they can yield no information whatsoever on the organization of the human intellect; there would be better reasons to reckon them under ethnography than under psychology. (BROUWER, L. E. J., 1907, p.74)

Na crítica dirigida à linguagem, os intuicionistas alegam que a lógica é secundária com relação à matemática, caracterizando uma coleção de princípios que são descobertos *a posteriori* para realizar os procedimentos e operações matemáticas. “Formal language accompanies mathematics as the weather-map accompanies the atmospheric processes.” (BROUWER, L. E. J., 1937, p. 451.) Esta crítica à linguagem matemática, em especial à lógica, concomitante com a concepção matemática intuicionista trouxe implicações para a prática diária da matemática que apresenta algumas divergências com relação à matemática clássica. Uma destas divergências é a rejeição do princípio do Terceiro Excluído (daqui em diante denominado 'TEX') que permitiu a matemática intuicionista construir a *Teoria do Continuum*, a *Teoria dos Conjuntos*, a *Aritmética* etc. com base na matemática construtivista. A rejeição do TEX também possibilitou o desenvolvimento de noções fundacionais da matemática que amparam a rejeição desse princípio e confirmam a visão intuicionista desta ciência, possível devido as noções de tempo e espaço adquiridas de Kant. As intuições puras do espaço e tempo desenvolvidas por Kant permitiram a Brouwer definir a matemática como resultado de nossas experiências mentais conscientes que se apresentam em séries temporais finitas. No entanto, Brouwer rejeita a noção de espaço de Kant e compreende que a única realidade possível seria a sua própria consciência, o mundo e mesmo outras consciências existem apenas como representações desta. Neste sentido afirma,

> Intuitionistic mathematics is a mental construction, essentially independent of language. It comes into being by self-unfolding of the basic intuition of mathematics, which consists in the abstraction of two-ity. This self-unfolding allows

> us in the first instance to survey in one act not only a finite sequence of mathematical systems, but also an infinitely proceeding sequence, *defined by a law*, of mathematical systems previously defined by induction. But in the second instance it allows us as well to create a sequence of mathematical systems which infinitely proceeds *in complete freedom or is subject to restrictions which may be varied in the course of the progress of the sequence*. (BROUWER, L. E. J., 1947, p. 477.)

Nesta dissertação pretendemos elucidar em um primeiro momento como as noções fundacionais, como as de verdade, existência e infinito, da matemática foram formuladas pelo Intuicionismo argumentando a favor a rejeição do TEX para domínios infinitos de julgamento, mostrando também como estas noções divergem da matemática clássica. Posteriormente, pretendemos esclarecer como a rejeição do TEX influenciou o desenvolvimento das *Traduções de Duplas negações* realizadas por Andrei Kolmogorov em 1925, Kurt Gödel em 1930 e Gerhard Gentzen em 1933. Apresentaremos uma Tradução negativa para mostrar que a aritmética clássica e a intuicionista são *equiconsistentes*. Pretendemos mostrar de que maneira a lógica intuicionista se relaciona com a lógica clássica a partir das Traduções de Duplas Negações, e como as diferenças entre estas, baseadas na rejeição do TEX, poderiam *não* significar a solução de problemas matemáticos, diferentemente do que Brouwer supunha na gênese do Intuicionismo.

No capítulo 1, apresentaremos as noções de verdade, existência e infinito, desenvolvidas pelo Intuicionismo mostrando de que forma estas legitimam a rejeição do TEX em domínios infinitos de julgamento. Apresentaremos também, brevemente, os pressupostos intuicionistas para a rejeição do TEX para domínios infinitos de julgamento e a crítica de Brouwer a superioridade conferida à lógica em detrimento da atividade matemática.

A noção de verdade construída pelo Intuicionismo diverge do entendimento clássico. Em grande medida, isso se deve ao fato de que os primeiros partem de uma concepção epistêmica, baseada na construção de uma prova pelo intelecto humano, ao passo que os últimos, ancorados na perspectiva do Realismo, compreendem a matemática como uma realidade regida por princípios preexistentes ao observador. Sendo assim, a verdade está baseada na correspondência com a realidade, endossando uma interpretação ontológica da bivalência. A existência de objetos matemáticos independe de nós, de nossa linguagem, pensamentos ou práticas. Tomemos como exemplo o seguinte enunciado:

(A) Todas as estrelas possuem pelo menos um planeta em sua órbita.

Do ponto de vista da matemática clássica o enunciado A necessariamente ou é verdadeiro, ou sua negação $(\neg A)$ é verdadeira. Pois a realidade nos assegura que, independente de termos conhecimento sobre todas as estrelas possuírem pelo menos um planeta em sua órbita, a realidade é determinada, ou seja, a realidade nos assegura que ou A é verdadeiro ou $\neg A$ é verdadeiro. A verdade do enunciado A independe do nosso conhecimento sobre ele, e sua determinação é condicionada ao fato de termos conhecimento sobre o que são estrelas, planetas e sabermos que ou é o caso para A ser verdadeiro, e ou é o caso para $\neg A$ ser verdadeiro, uma vez que não existiria outra possibilidade. Esta visão clássica acerca da noção de verdade é assegurada pela aceitação do TEX. Tal princípio assegura ontologicamente, que entre ser ou não ser, não pode existir uma terceira possibilidade. Brouwer vai afirmar que a segurança dada a este princípio está amparada em nossa compreensão sobre o mundo natural, onde estabelecemos uma compreensão da realidade baseada no princípio da bivalência. E a partir disso desenvolve a concepção de verdade intuicionista, argumentando que esta não poderia estar baseada na crença em uma realidade determinada e independente de nós como a crença indubitável no TEX poderia levar a crer.

> In the first place because classical mathematics uses logic to generate theorems, believes in the existence of unknown truths, and in particular applies the principle of the excluded third expressing that every mathematical assertion (i.e. every assignment of a mathematical property to a mathematical entity) either is a truth or cannot be a truth. (BROUWER, L. E. J., 1948, p.488.)

Desta forma, Brouwer formula a noção de verdade intuicionista a partir de uma interpretação epistêmica da matemática, exigindo que a verdade de um enunciado seja explicada em termos de sua prova, especificamente, provas construtivas. Se retomarmos ao enunciado A, teríamos de acordo com a concepção intuicionista que sua verdade depende de podermos verificar se todas as estrelas possuem pelo menos um planeta em sua órbita, rejeitando ao TEX. Contudo, é preciso ressaltar que a rejeição do TEX pelos intuicionistas está relacionada ao seu uso e aceitação em âmbitos infinitos de julgamentos, pois em âmbitos finitos de julgamento podemos verificar, caso a caso, se a verdade do enunciado se estabelece, ou se a verdade de sua negação se estabelece.

Em nosso trabalho não entraremos em grandes detalhes sobre como foi desenvolvida a noção de verdade intuicionista, nosso objetivo é tornar claro que esta noção, tal como foi defendida pela matemática clássica, está de acordo com a aceitação do TEX como princípio lógico válido. Por outro lado, o Intuicionismo, baseando-se em uma concepção construtiva da matemática, ao não aceitar o TEX, precisa reconstruir a noção de verdade amparada na ideia de verificação do enunciado através de sua prova construtiva.

O segundo argumento para a rejeição do TEX que é objeto de nosso estudo é a noção de existência. As matemáticas construtivistas divergem da matemática clássica principalmente no que concerne a noção de existência, pois enquanto para esta última a existência de um objeto matemático é assegurada por uma realidade independente da mente, para os intuicionistas a existência de um objeto matemático só é possível quando é analisada em termos de construções mentais, rejeitando a existência transcendental dos objetos matemáticos. Neste sentido "existe" é sinônimo de "pode ser construído", e a exigência de uma construção mental para a afirmação da existência dos objetos matemáticos legitimaria a rejeição da validade do TEX para domínios infinitos de julgamento.

> But I must still make one remark which is essential for a correct understanding of our intuitionist position: we do not attribute an existence independent of our thought, i.e., a transcendental existence, to the integers or to any other mathematical objects. Even though it might be true that every thought refers to an object conceived to exist independently of it, we can nevertheless let this remain an open question. In any event, such an object need not be completely independent of human thought. Even if they should be independent of individual acts of thought, mathematical objects are by their very nature dependent on human thought. Their existence is guaranteed only insofar as they can be determined by thought. They have properties only insofar as these can be discerned in them by thought. But this possibility of knowledge is revealed to us only by the act of knowing itself. Faith in transcendental existence, unsupported by concepts, must be rejected as a means of mathematical proof. As I will shortly illustrate more fully by an example, this is the reason for doubting the law of excluded middle. (HEYTING, A., 1931, p. 53)

O uso do TEX nas construções das provas de existência de um objeto matemático é negado pelo Intuicionismo, pois este não afirma a validade da existência transcendental. Assim, o TEX ($A \vee \neg A$) não pode ser garantido universalmente, somente quando temos meios de operar uma construção mental que prove ou A, ou que prove $\neg A$. É necessário também tornar claro que a *Redução ao Absurdo* não poderia ser aceita no âmbito do Intuicionismo, pois trata-se de um método indireto de prova. O entendimento intuicionista da existência levou-os a construir uma interpretação dos conectivos e quantificadores lógicos como instruções sobre como construir uma prova do enunciado matemático. Essa interpretação dos conectivos e quantificadores lógicos ficou conhecida como *Interpretação BHK*, e tenta captar a noção de existência como construções mentais, usando métodos de provas diretas e exigindo cautela no uso de métodos de prova indiretos, como é o caso do TEX, da Dupla Negação e da Redução ao Absurdo.

Outra noção matemática reformulada pelo Intuicionismo, a fim de legitimar a rejeição do TEX, é a noção de infinito. Para os intuicionistas, a concepção clássica do conceito de infinito estaria amparada na crença indubitável na validade do TEX. Pois na matemática Clássica o infinito é entendido como atual. Isto significa, em poucas palavras, que o infinito pode ser concebido como uma entidade completa, acabada: todos os seus elementos podem ser pensados num ato único, ou ainda, o infinito como objeto. A crença no infinito como totalidade acabada, como um objeto matemático, legitimaria o uso do TEX. A alegação de Brouwer é que a matemática clássica seria favorável ao TEX por tratar domínios infinitos usando o mesmo raciocínio usado em operação em domínios finitos. A fim de combater esta compreensão clássica, o Intuicionismo desenvolve sua noção matemática de infinito entendendo-o como potencial, ou seja, um processo através do qual um número cresce, impossibilitando a crença indubitável na validade universal do TEX, uma vez que seria humanamente impossível verificarmos caso a caso um conjunto que está sempre a crescer.

Desta forma, os intuicionistas afirmam a validade do TEX apenas para domínios finitos, devido a nossa capacidade de verificar neste caso se ($A \vee \neg A$). Mas se partirmos da concepção do infinito como um processo de geração com uma série infinita de etapas, tendo que após a conclusão de uma etapa outra etapa é introduzida, não poderíamos aplicar o TEX para resultar verdadeiro ou falso para um enunciado matemático, pois não poderíamos verificar caso a caso se o enunciado se mantem ou se sua negação se mantem. Brouwer usou contraexemplos fracos para demonstrar esta questão, usando as Conjecturas[7] de Goldbach, dos Primos vizinhos, etc.

No capítulo 2, iremos tratar das *Traduções de Duplas negações*, tal como ficaram conhecidos os trabalhos com Duplas Negações (daqui em diante denominado 'DN') realizadas na década de 20 e 30. Inicialmente apresentaremos a Tradução de 1925 de Andrei Kolmogorov, matemático conhecido por suas contribuições à probabilidade e estatística e a matemática intuicionista, tendo como exemplo, a *lógica de problemas;* em seguida, analisaremos as traduções de Kurt Gödel e Gerhard Gentzen. Estas traduções apresentam diversas semelhanças entre si, como o uso das DN e o não uso do conectivo lógico da

[7] Conjecturas são enunciados matemáticos para os quais ainda não possuímos um algoritmo de decisão. Em geral, estas conjecturas afirmam algo acerca de domínios infinitos. A *Conjectura de Goldbach*, por exemplo, enuncia que "*todo número par maior ou igual a 4 é a soma de dois primos*", até onde pudemos verificar esta afirmação se mantem, o problema é que não possuímos um algoritmo de decisão para este enunciado. Já a *Conjectura de Primos vizinhos* questiona se existe um número infinito de pares de primos da forma $(p, p+2)$, em outras palavras, se existem infinitos números primos cuja diferença é 2.

disjunção e do quantificador existencial. A principal motivação para o desenvolvimento destas traduções seria encontrar uma solução para os problemas que estavam abalando as estruturas da fundação da matemática entre os séculos XIX e XX, a expectativa era que alguns problemas relacionados à consistência da aritmética pudessem ser solucionados no âmbito do Intuicionismo. Contudo, o que ambas as traduções tornaram evidente é que as diferenças entre as lógicas clássica e intuicionista estariam relacionadas, muito mais aos conceitos fundacionais desta ciência, do que as diferenças práticas em aritmética, já que as traduções mostraram que se for possível ao TEX provar alguma contradição em aritmética clássica, o mesmo resultado poderia ser obtido sem o TEX na aritmética intuicionista.

Em 1925 Kolmogorov apresenta um trabalho intitulado *On the principle of the excluded middle*[8] que foi o primeiro a realizar uma interpretação da aritmética clássica na aritmética intuicionista, tendo como principal objetivo mostrar que o uso do TEX, considerado ilegítimo pelo fundador do Intuicionismo, não teria como consequência uma contradição. As traduções posteriores de Gödel e Gentzen não foram motivadas pela mesma questão relacionada ao TEX, mas sofreram influencias do trabalho de Kolmogorov. Estas apresentam uma tradução que mostra que a totalidade da aritmética clássica podia ser traduzida na aritmética intuicionista estreitando os laços entre estas e tendo como resultado principal a afirmação de que aritmética intuicionista é consistente, se e somente se a aritmética clássica também é consistente, elas são, portanto, equiconsistentes.

Por fim, apresentaremos uma tradução (Troelstra 1996) capaz de interpretar a aritmética clássica na aritmética intuicionista. Provamos a equiconsistência entre o sistema de Peano para a lógica clássica e o de Heyting para a intuicionista.

Se formos bem sucedidos na realização destas apresentações iniciais, nosso objetivo com este trabalho é tentar tornar claro que, contrário ao que Brouwer pressupôs ao rejeitar o TEX para domínios infinitos de julgamento, este referido princípio não seria a causa de problemas relacionados aos fundamentos matemática. Mas sua rejeição, ainda que não tenha trazido uma solução para esses problemas, pode amparar a discussão sobre conceitos fundacionais para esta ciência, o que sem dúvida foi positivo para as discussões que contribuíram para o avanço da matemática.

---

[8]HEIJENOORT, J. (Ed.), 1967, p. 414-437.

2. VERDADE, EXISTÊNCIA E INFINITO E O TERCEIRO EXCLUÍDO

[...] são precisamente as perguntas para as quais não existem respostas que marcam os limites das possibilidades humanas e que traçam as fronteiras da nossa existência.
Milan Kundera

Ao infinito... e além.
Buzz Lightyear

Ao longo dos séculos XVIII e XIX a matemática se desenvolveu fortemente, com a introdução de novas estruturas abstratas, o sucesso do método axiomático na geometria e na mecânica clássica e as realizações axiomáticas, como a axiomatização da própria lógica por Gottlob Frege e também a axiomatização da aritmética por Richard Dedekind e Giuseppe Peano. Por outro lado, este desenvolvimento evidenciou alguns paradoxos no centro das discussões acerca dos fundamentos da matemática, como o Paradoxo de Burali-Forti, Paradoxo de Cantor e o Paradoxo de Russell. É neste contexto que surge um matemático holandês, Luitzen Egbertus Jan Brouwer, famoso, dentre outras coisas, pelo desenvolvimento da topologia, que funda o Intuicionismo como um programa da matemática construtivista que objetivava encontrar uma maneira de eliminar os paradoxos matemáticos e fundar uma matemática respaldada unicamente no *intelecto humano*. Brouwer considerava como intelecto humano a atividade da matemática realizada a partir da Intuição básica da matemática, que ele afirma ser diferente da matemática realizada pelos formalistas, que não tinham pretensões de reduzir a matemática à lógica, mas fundamentar conjuntamente ambas, e acreditam no pressuposto de que as declarações de matemática e da lógica podem ser pensadas como declarações sobre as consequências de certas operações e regras de manipulação; e Logicistas, para os quais a matemática seria uma parte da lógica derivável desta a partir de regras e axiomas lógicos.

> Mathematics is created by a free action independent of experience; it develops from a single aprioristic basic intuition; which may be called invariance in change as well as *unity in multitude*. (BROUWER, L. E. J., 1907, p. 97)

O Intuicionismo, *grosso modo*, deve ser compreendido como um tipo de construtivismo,

> Intuitionism will be understood here as the constructive approach to mathematics in the spirit of Brouwer (1881-1966) and Heyting (1898-1980). The philosophical basis of this approach is already present in Brouwer's thesis (1907) but with respect to the mathematical consequences Brouwer (1918) is a more appropriate starting point. The basic tenets may be summarized as follows.
> (a) Mathematics deals with mental constructions, which are immediately grasped by the mind; mathematics does not consist in the formal manipulation of symbols, and the use of mathematical language is a secondary phenomenon, induced by our limitations (when compared with an ideal mathematician with unlimited memory and perfect recall), and the wish to communicate our mathematical constructions to others.
> (b) It does not make sense to think of truth or falsity of a mathematical statement independently of our knowledge concerning the statement. A statement is true if we have proof of it, and false if we can show that the assumption that there is a proof for the statement leads to a contradiction. For an arbitrary statement we can therefore not assert that it is either true or false.
> (c) Mathematics is a free creation: it is not a matter of mentally reconstructing, or grasping the truth about mathematical objects existing independently of us (this is in contrast to e.g. the French empiricists; (TROELSTRA, A. S., 1988, p. 1).

Uma vez compreendida a matemática sob o ponto de vista construtivo, podemos perceber no Intuicionismo uma concepção da natureza do conhecimento científico, que admite apenas as construções de objetos matemáticos que partem da intuição básica da matemática, da exigência de rigor na construção e verificação das provas matemáticas, superando grandemente a apreensão sensorial e sustentando, portanto, que o conhecimento é construído e não descoberto pelo homem a partir do mundo. Brouwer explicita esta convicção quando define ciência e faz uma analogia comparando os princípios da lógica clássica a uma crença, tal como uma crença religiosa,

> *Science* is concerned with the repetition in time of sequences in time which are qualitatively different but may be considered as mutually identifiable. In the process the idea is isolated so that it becomes perceptible and thereby repeatable, and this happens after an unreligious separation between the subject and an attainable but still unattained aim which by this act is constituted as *something different* from the subject. The impulse to attain aims is directed in the intellect along immediately attainable ends by means of a mathematical systems consisting of entities which are brought forth by abstraction out of repeatable phenomena.
>
> Anything that can appear as an attainable but still unattained aim, can be made understandable in systems of entities, even religion, but the science of religion is itself unreligious; it may serve to salve one's conscience, or to be merely a game, or to pursue some specific purpose. And, like any unreligious consciousness, science has neither religious reliability nor reliability in itself. In particular, a mathematical systems of entities can never remain reliable as a guide along our perceptions, when it is indefinitely extended beyond the perceptions which it made understandable. (BROUWER, L. E. J., 1908, p.107).

Sob esta convicção Brouwer funda o programa intuicionista da matemática objetivando dar alicerces a matemática a partir da ideia fundamental das intuições claras e auto evidentes, com métodos de prova diretos e verificáveis. Para tanto, ele tentou resgatar a intuição abandonada pela sintaxe lógica.

O Intuicionismo matemático restaurou as noções de *tempo* e *espaço* de Kant[9] como concepções inseparáveis da razão humana, concepções que já haviam sido recuperadas por Henri Poincaré, Émile Borel, *Pré-intuicionistas*, e que segundo Brouwer estariam esquecidas pelas demais escolas matemáticas, pelo Logicismo e pelo Formalismo.[10] O Pré-Intuicionismo foi o precursor das ideias que foram posteriormente desenvolvidas por Brouwer. No entanto, o Intuicionismo abandonou o apriorismo kantiano do espaço, e aderiu definitivamente ao apriorismo do tempo para desenvolver o Intuicionismo.

Seguindo a ideia intuicionista, a *aprioridade*[11] recuperada de Kant, em matemática, só poderia ter um dos dois significados. Primeiro, a existência independente da experiência; e segundo, a condição necessária para a possibilidade da ciência. A primeira concepção permite toda a construção da matemática como *a priori*, independente da experiência, o que dentro do pensamento intuicionista é bastante problemático. Já a segunda concepção garante que toda a experiência científica encontra seu fundamento na aplicação da matemática intuitiva para a realidade, e neste sentido só podemos chamar de *a priori* a percepção do tempo, como o que é comum a todas as matemáticas e suficiente para construir toda a matemática.

A concepção matemática dos intuicionistas não está ligada unicamente a fundação da matemática sobre uma intuição dirigida aos objetos matemáticos; mais do que isso, exige construções e provas matemáticas executáveis e capazes de originar objetos. Com esta convicção o Intuicionismo tenta descrever, com precisão, a maneira como os enunciados e objetos matemáticos são estabelecidos, como é apresentada a existência dos objetos matemáticos e como podemos verificar suas propriedades. Brouwer funda a matemática

---

[9]As intuições puras de *tempo* e *espaço* de Kant são as condições que possibilitam o conhecimento, ainda que o conhecimento universal e necessário não se esgote totalmente nelas. Na obra a *Estética Transcendental*, Kant define sensibilidade como uma faculdade da intuição que permite que os objetos sejam conhecidos pelo sujeito cognoscente, distinguindo duas formas da sensibilidade: o tempo e o espaço. O tempo definido como o fundamento que permite a percepção da simultaneidade das coisas e sua sucessão; e o espaço como uma estrutura inerente à sensibilidade do sujeito cognoscente que o permite conhecer os objetos exteriores a ele e exteriores uns aos outros como relacionados espacialmente.
KANT, Immanuel, 1999, p.7- 14.
[10]Cf. SILVA, Jairo J. da, 2007, p.147- 182.
Cf. CHATEAUBRIAND, O., Fev/2011.
[11] Cf. BROUWER, L. E. J., 1912, p.123- 138.

intuicionista, descartando as provas indiretas[12], por isso a crítica ao TEX, e expõe sua forma de entender a origem dos objetos matemáticos, que segundo ele seriam desenvolvidos a partir de dois atos fundamentais, conhecidos como: Primeiro Ato do Intuicionismo e Segundo Ato do Intuicionismo.

O Primeiro Ato do Intuicionismo restringe a matemática, apesar de dar origem aos números naturais.[13] Porque é neste momento que se origina o substrato comum de toda matemática, ou melhor, a intuição básica da matemática; portanto, é onde se originam os sistemas matemáticos fundamentais e, neste caso, são os números naturais, pois a intuição permite primeiro a regra de construção dos números naturais e posteriormente a de números reais. E o Segundo Ato do Intuicionismo permite a ampliação da matemática, seguida por novos desenvolvimentos, como a atribuição de propriedades, tais como a igualdade, aos objetos matemáticos. As ampliações das possibilidades de construção de objetos matemáticos se dão de duas maneiras, primeiramente por preceder sequências infinitas, mais ou menos livremente, a partir de objetos matemáticos previamente adquiridos, como os números naturais, por exemplo; e, segundo, permitindo espécies matemáticas, isto é, permitindo que propriedades de espécies que foram supostas pertencendo a objetos matemáticos previamente adquiridos sejam satisfatórias também para os objetos matemáticos que foram definidos como iguais. O Segundo Ato do Intuicionismo estabelece a existência do *Continuum*[14], que não compartilha das ideias clássicas, sendo resultado da noção de Sequências de Livre escolha[15] (*Choice sequences*).

---

[12] Provas indiretas são métodos de prova em que assumimos como verdadeiro o aposto do que gostaríamos de provar, chegando a uma contradição.

[13] Os intuicionistas rejeitam a definição impredicativa dos Números Naturais, tal como realizada pelos Logicistas, isto porque rejeitam a concepção de Conjunto ou Universo de Conceitos, ou seja, rejeita a ideia de que estabelecendo conceitos ou regras posso analisar se o número insere-se ou não dentro destes, para então defini-los. No Intuicionismo os números naturais são aqueles objetos obtidos a partir de 'zero' por aplicar repetidamente a operação Sucessor, ***S***; e admite apenas duas regras de geração dos números naturais:

(i)0 é um número natural;

(ii) se *n* é um número natural, então é um número natural ***S***(*n*);

São números naturais apenas àqueles objetos gerados por estas duas regras.

[14] Cf. BROUWER, L. E. J., 1907, p. 17- 19.

[15] As sequências de livre escolha no Intuicionismo foram desenvolvidas com o objetivo de captar a intuição do *continuum*. No Intuicionismo, como veremos adiante, a noção de infinito recebe um tratamento potencial e os objetos infinitos só podem ser gerados por um processo passo a passo. A sequência de livre escolha é uma sequência infinita de números, criadas com liberdade. A sequência de livre escolha pode ser determinada por uma *lei* ou *algoritmo*, mas também existem as sequências que são geradas *sem lei*. Podemos exemplificar estas últimas como o processo de arremessar repetidamente uma moeda, ou permitindo que o sujeito-criador escolha os números sucessivos da sequência, um por um, possibilitando-os optar por qualquer número ao seu gosto. Assim, uma sequência sem lei é sempre inacabada, e as informações disponíveis sobre isso são apenas o segmento inicial da sequência criada até o momento.

Cf. BROUWER, L. E. J., 1947, p.477.

Cf. BROUWER, L.E.J., 1955, p. 551, 557.

Cf. TROELSTRA, A. S., 1969, vol. 25, p. 31- 52.

No momento do Primeiro Ato do Intuicionismo a matemática é completamente separada das manipulações de regras e axiomas descritos pela lógica, considerando-se que a matemática é uma *atividade essencialmente sem linguagem* e que tem a sua origem e fundamentação na observação do movimento do tempo. É na percepção do movimento do tempo que resta a *intuição básica da matemática*.

> (...) completely separates mathematics from mathematical language, in particular from the phenomena of language which are described by theoretical logic, and recognizes that intuitionist mathematics is an essentially languageless activity of the mind having its origin in the perception of a move of **time**, i.e. of the falling apart of a life moment into two distinct things, one of which gives way to the other, but is retained by memory. If the two-ity thus born is divested of all quality, there remains the **empty form of the common substratum of all two-ities.** It is this common substratum, this empty form, which is the **basic intuition of mathematics**. (BROUWER, L. E. J., 1952, p. 1200).

Compreendendo a matemática como descrita nos dois atos do Intuicionismo, a linguagem teria unicamente a função de técnica para auxiliar a memorização de construções matemáticas[16] e comunicá-las ou ensiná-las a outras pessoas, não deixando por isso a linguagem de ser passível de erros e não exata. A linguagem é inadequada, sob o ponto de vista Intuicionista, no que concerne às descrições em relação a alguns princípios da Lógica Clássica que abrem espaço para a existência de provas indiretas de objetos e enunciados matemáticos, como é o caso do TEX.

Um dos principais seguidores de Brouwer, Arend Heyting (1898-1980), a quem se deve o trabalho de axiomatização da lógica intuicionista, apesar de fazer uso da Lógica em seu trabalho, não deixou de entendê-la, como já fazia seu mestre, como uma forma de comunicar, de invocar em outras pessoas, cópias de construções e raciocínios matemáticos, com a ajuda de sons e símbolos.

> Intuitionistic mathematics is a mental activity [*Denkätigkeit*], and for it every language, including the formalistic one, is only a tool for communication. It is in principle impossible to set up a system of formulas that would be equivalent to intuitionistic mathematics, for the possibilities of thought cannot be reduced to a finite number of rules set up in advance. Because of this, the attempt to reproduce the most important parts of mathematics in formal language is justified exclusively

[16] Pretendemos explicar no decorrer do texto (seções 2.2.1 e 2.2.2) o que significam construções matemáticas como compreendidas por Brouwer.

> by the greater conciseness and determinateness of the latter a vis-à-vis ordinary language; and these are properties that facilitate the penetration into the intuitionistic concepts and the use these concepts in research. (HEYTING, A., 1930, p.311)

Tendo em vista estas características da linguagem e entendendo as suas limitações, enquanto comunicadora de raciocínios matemáticos, não seria um problema a formalização da Lógica intuicionista, pois a linguagem matemática não estaria baseada na linguagem cotidiana, apontada como a razão de problemas na atividade matemática,

> But it can be shown that these paradoxes rise from a same error as that Epimenides[17], to wit that they originate where regularities in the language which accompanies mathematics are extended to a language which is not connected with mathematics. Further we see that logistics is also concerned with the language of mathematics instead of with mathematics itself, consequently it cannot throw light on mathematics. Finally all the paradoxes vanish when we confine ourselves to speaking about systems which can be built up explicitly from the basic intuition, in other words, when we consider mathematics as presupposed in logic, instead of logic in mathematics. (BROUWER, L. E. J., 1908, p.108).

Ainda que Brouwer releve a consideração de que posso sujeitar a descrição de uma construção matemática, ou de uma prova matemática, ao uso da lógica como linguagem matemática e mesmo estando consciente das deficiências da linguagem, enquanto veículo de comunicação, ainda assim, seu uso não pode ser irrestrito e nem abranger a todos os princípios da matemática. E, neste ponto, Brouwer objeta sobre a aplicação irrestrita do TEX[18]; pois este princípio não seria válido como um instrumento para a descoberta de novas verdades matemáticas.

> Suppose that an intuitionist mathematical construction has been carefully described by means of words, and then, the introspective character of the mathematical construction being ignored for a moment, its linguistic description is considered by itself and submitted to a linguistic application of a principle of classical logic. Is it

[17] Trata-se do *Paradoxo de Epimenides*, enigma sem resposta, que pode ser expresso pelo seguinte: Um acusado diz: “Enquanto a minha mentira não for desvendada, continuarei mentindo”. O juiz em seguida diz: “Se o acusado mentir, seu advogado também mentirá.” Por fim o advogado diz: “Quem for capaz de desvendar a minha mentira dirá a verdade”. Enigma: Qual deles está mentindo?

[18] A rejeição do Princípio do Terceiro Excluído foi feita por Brouwer inicialmente em 1908, *The Unrealiability of the logical principles,* tendo como uma das consequências diretas a rejeição do Princípio da DN, pois podemos deduzir a partir do TEX a DN, e também a impossibilidade de usar a *Regra de Redução ao Absurdo*, pois não seria possível afirmarmos a não contradição de uma proposição com a dupla negação desta. BROUWER. L. E. J., 1908, p. 107- 111.

> then always possible to perform a languageless mathematical construction finding its expression in the logic linguistic figure in question? After a careful examination one answers this question in the affirmative (if one allows for the inevitable inadequacy of language as a mode of description) as far as the principles of contradiction and syllogism are concerned; but in the negative (expect in special cases) with regard to the principle of the excluded third, so that the latter principle, as an instrument for discovering new mathematical truths, must be rejected. (BROUWER, L. E. J., 1912, p.141).

Brouwer criticou a linguagem[19] entendendo que a origem dos problemas enfrentados pelos fundamentos da matemática de seu tempo estariam relacionados ao uso da lógica teórica como independente da matemática, e estendeu esta crítica à aplicação do TEX. Segundo ele, tal princípio teria sido abstraído de observações repetitivas feitas em sistemas finitos, e aplicado sem justificativas, por indução, a situações infinitas; isto é, as sequências afirmadas repetitivamente pelas deduções lógicas são construídas fora da abstração dos fenômenos repetitivos na intuição do tempo, fora da intuição básica da matemática[20]. E baseado na ideia de que os paradoxos eram ocasionados devido à linguagem, considerou que

---

[19] A crítica de Brouwer a Linguagem levou-o a tornar-se membro ativo de um movimento conhecido como *Signific Movement* ou ainda *Signific Circle*. Juntamente com Gerrit Mannoury, filósofo e matemático alemão, Frederik van Eeden, escritor e psiquiatra alemão, entre outros, em 1922 Brouwer torna-se cofundador deste movimento que encerrou suas reuniões em 1926. O *Signific Circle* nunca ganhou apoio amplo e coeso de um número suficiente de acadêmicos, no entanto, seus membros que representavam em média 60 participantes, não podem ser acusados de falta de entusiasmo ou habilidade intelectual. O objetivo do grupo era conseguir uma análise detalhada da linguagem, contrária a realizada pelo empirismo lógico, ou ainda positivismo lógico, que carregava uma postura instaurada pelo *Círculo de Viena* e depois seguida e desenvolvida por outros pensadores, com a característica fundamental de reduzir a Filosofia à análise da Linguagem; nesta corrente, entretanto, podemos ainda distinguir duas tendências fundamentais no que compreende a linguagem, a linguagem como científica e a linguagem como ordinária.

"The *Signific circle* proclaimed in its declaration of principles a.o. that signifies contain more than criticism of language, also more than synthesis of language, and that in opening a deeper insight into the connections between words and the needs and tendencies of the soul, it may affect in a wholesome way the future social and mental conditions of man. In addition to this each of the four members (Frederik van Eeden, Brouwer, Gerrit Mannoury and S. J. van Ginneken) formulated a personal opinion." (BROUWER, L. E. J.,1946, p.468)

O *Signific Circle,* contudo, empenhou-se em combater a falta de compreensão, interpretações e ambiguidades entre linguagem e sociedade, especialmente no que diz respeito à comunicação científica, e tentaram fazer isso por meio da análise da *linguagem natural* em termos diferentes dos estudos realizados pela análise pragmática e funcional. Trata-se, sobretudo, de um movimento de singular interdisciplinaridade que ansiava principalmente pelo progresso espiritual e político através de uma reforma da língua, no entanto o movimento foi barrado pela filosofia anglo-saxão da linguagem, da fase analítica da filosofia.

Cf. PIETARINEN, Ahti-Veikko, Jul/2009, vol. 70, p. 467- 490.

[20] Brouwer forneceu vários contra-exemplos, hoje conhecidos como *contra-exemplos fracos*, onde o TEX não poderia ser aplicado.

"Brouwer forneceu exemplos, hoje conhecidos por fracos contra-exemplos, à lei do terceiro excluído. Não se tratam (nem se podiam tratar) de genuínos contra-exemplos. Neles mostra-se que se se aceitarem determinados resultados (tipicamente argumentados classicamente com recurso à lei do terceiro excluído), então decidir-se-iam conjecturas em aberto da forma $\forall \mathbf{n} \in N R(\mathbf{n})$ onde, para cada número natural **n**, a alternativa entre $R(\mathbf{n})$ e a sua negação se pode averiguar ao fim de um número finito de passos computacionais."(FERREIRA, Fernando, Jun/2006, p.7.)

os paradoxos seriam uma mera junção de palavras que não correspondem a qualquer construção matemática que possa ser efetivamente executada e verificada pelo sujeito.

> Consequently logical deductions which are made independently of perception, being mathematical transformations in the mathematical system, may lead from scientifically accepted premises to an inadmissible conclusion. The classical approach, based on the experience that in geometry logical reasoning deduced only undisputable results from accepted premises, concluded that logical reasoning is a method for the construction of science and that the logical principles enable man to construct science. (BROUWER, L. E. J., 1908, p. 107)

Consideremos a *Conjectura dos Números ímpares Perfeitos*[21], que indaga sobre a existência de números perfeitos ímpares. Um número é perfeito quando, e apenas quando, é um número natural, em que a soma de todos os seus divisores positivos, exceto o próprio número, é igual ao próprio número. São exemplos de números perfeitos (6 = 1+2+3, 28 =1+2+4+7+14, 496, 8128,...); podemos observar que todos os números perfeitos exemplificados são pares, isso porque todos os números perfeitos pares atendem ao algoritmo de decisão$\mathbf{2^{n-1}(2^n - 1)}$, sendo $\mathbf{2^n - 1}$ um número de Mersenne.[22]

Quando procuramos por um número ímpar perfeito não possuímos um algoritmo que produza tal número, tal como possuímos para os números pares perfeitos. Não podemos asserir a instância do TEX

$\exists x$, x é um número perfeito ímpar, ou $\neg\exists x$, x é um número perfeito ímpar.

Analisemos a conjectura, considere que Px = x é ímpar e x é perfeito (ser número perfeito significa que x é a soma de seus divisores). Assim, se temos um número n podemos decidir se Pn ou $\neg Pn$. Mas não possuímos um algoritmo para decidir qual dos disjuntos é o caso na disjunção do enunciado $\exists xPx \vee \neg\exists xPx$. Essa é a Conjectura dos Números Ímpares Perfeitos.

[21] Escolhemos neste trabalho, na tentativa de elucidar e exemplificar as afirmações de Brouwer para rejeição do TEX, a Conjectura dos Números Ímpares Perfeitos, contudo as mesmas afirmações podem ser observadas em outras conjecturas como a Conjectura de Goldbach, Conjectura dos Primos Vizinhos, etc.

[22] Números de Mersenne são da forma $\mathbf{M_n = 2^n - 1}$, em que n é um número natural (primo ou não primo), $\mathbf{2^n}$ resulta em um número par que subtraído 1 leva ao número ímpar antecessor, a única exceção observada é o zero, e podemos constatá-la por indução simples: se o expoente n é um número natural, incluindo zero, deixe que $M_0=2^0-1=1-1=0$, então temos como resultado zero, que é um número par. Existem outras peculiaridades relacionadas aos números de Mersenne na Teoria dos Números, por exemplo a semelhança entre os números de Mersenne e os Números Primos.
Cf. MOREIRA, Carlos G., 2002.

A crítica desenvolvida por Brouwer, neste sentido, afirma que quando observamos um conjunto finito de números podemos decidir se o enunciado acima é verdadeiro ou falso, i.e. podemos, dividindo cada um deles por seus divisores, decidir se a conjectura se aplica ou não, mas quando procuramos no conjunto infinito dos Números Naturais não podemos comprová-la. Note que não possuímos um algoritmo, como no caso dos pares, que produza números ímpares perfeitos. Não temos uma 'construção' de um número impar perfeito, nem uma prova de que todo número ímpar não é perfeito. Para compreendermos estas afirmações, não podemos deixar de ter em mente, que o Intuicionismo parte da ideia fundamental de que devemos começar de intuições claras e auto evidentes e de que os métodos de prova devem ser diretos e verificáveis.

Embora o TEX não seja considerado pelos intuicionistas um princípio de derivação de verdades lógicas correto, se ele está, exclusivamente, pressupondo propriedades de domínios finitos ele pode ser aplicado[23]. O problema alegado contra o TEX está quando procuramos derivar novas verdades em domínios infinitos de julgamento. Nestas condições, se não possuímos um algoritmo de decisão para dado enunciado, significa que não fomos capazes de perceber uma sequência inicial comum, capaz de decidir o enunciado; ou seja, não fomos capazes de construir os objetos matemáticos com base nas intuições claras e auto evidentes. A consequência maior destas considerações, segundo Brouwer é que o TEX deve ser considerado válido apenas em domínios finitos, onde podemos verificar, caso a caso, a verdade ou falsidade de cada enunciado matemático; e rejeitado em domínios infinitos, quando não possuímos um algoritmo de decisão, pois não podemos conceber como verdadeiros enunciados não verificáveis. Note, no exemplo dos números perfeitos ímpares, que para cada n dado, temos um algoritmo que decide Pn ou $\neg Pn$, mas não temos um algoritmo para decidir $\exists x Px$.

> Mathematics rigorously treated from this point of view, and deducing theorems exclusively by means of introspective construction, is called intuitionistic mathematics. In many respects it deviates from classical mathematics. In the first place because classical mathematics uses logic to generate theorems, believes in the existence of unknown truths, and in particular applies the *principle of the excluded third* expressing that every mathematical assertion (i.e. every assignment of a mathematical property to a mathematical entity) either is a truth or cannot be a truth. (BROUWER, J. E. J., 1948a, p. 488).

[23] BROUWER, L. E. J., 1908, p. 108-110.

Alguns comentadores argumentaram que a rejeição de Brouwer ao TEX não faria sentido, pois dependeriam unicamente da resolução de dadas Conjecturas ou problemas matemáticos para os quais ainda não conhecemos uma solução, e no mesmo âmbito estariam relacionadas à hipótese equivalente de que *a priori* todos os problemas matemáticos teriam solução. A hipótese de que todos os problemas matemáticos teriam solução foi muito disputada entre Brouwer e Hilbert, cujo Programa Formalista estava convicto de que todos os problemas matemáticos são passíveis de serem solucionados e, ainda, que teriam uma solução por meio de um número finito de operações. Brouwer, porém, rejeita esta posição antecipando o que depois veio a se confirmar com o *Teorema da Incompletude de Gödel*. Poderíamos supor que com a solução de todos os problemas da matemática, seria então permitido o uso do TEX como princípio válido de julgamento, por parte dos intuicionistas, mas isto também não seria o suficiente, pois necessitaríamos ainda encontrar uma maneira para responder questões e conjecturas que podem ser pensadas no futuro.

A crítica de Brouwer à Linguagem, tendo como máxima a afirmação de que a lógica depende da matemática, e ao desenvolvimento intuicionista da fundação da matemática a partir da intuição básica da matemática, levou a rejeição do TEX, que além das consequências diretas como_ a rejeição da DN e da Regra da Redução ao Absurdo[24], levou também a mudanças nas concepções básicas da lógica Clássica.

O Intuicionismo formulou dentro de seus pressupostos uma noção de verdade diferente da lógica Clássica, assim como a noção de existência e de infinito. Nesta dissertação pretendemos apresentar estas noções na tentativa de tornar claro que tais conceitos são argumentos que tentam afirmar que na concepção matemática do Intuicionismo o TEX não pode sustentar-se como princípio de julgamento válido para domínios infinitos. Iremos expor agora parte dos objetivos deste trabalho acerca das ideias apresentadas a respeito da noção de verdade, existência e infinito que procuram assegurar a rejeição ao TEX e mantém as ideias intuicionistas.

[24]A matemática intuicionista contrária à Clássica, não aceita como equivalente uma sentença e sua dupla negação, para os primeiros não é necessariamente garantido que ambos sejam válidos nas mesmas circunstâncias. Podemos refletir sobre o que Brouwer afirma aqui recordando que, para o intuicionista, a matemática não pode ser fundada na linguagem matemática, devido a esta estar impregnada de repetições observadas na linguagem cotidiana e transferidas sem o intermédio da intuição básica da matemática a operações desta ciência e consequentemente a criação de novos axiomas. Mas observamos que se possuímos um método de prova para $x \vee \neg x$, que significa ter ou uma prova de x ou uma prova de $\neg x$, uma prova de $\neg\neg x$ significa que $\neg x$ não pode ser provado e neste caso a DN é válida, sendo assim, $x \vee \neg x$ é, por exemplo, uma prova de x.

2.1 A noção de verdade intuicionista e sua relação com a rejeição do TEX

A compreensão intuicionista da noção de verdade é diferente da forma como a matemática clássica compreende a mesma, visto que a última compreende que a verdade está relacionada à correspondência com os fatos; enquanto para o Intuicionismo, devido ao seu entendimento da linguagem e do que são objetos matemáticos, provas matemáticas, construções matemáticas etc., a verdade de um enunciado matemático está relacionada, basicamente, a sua prova dada a partir da intuição básica da matemática; é verdade aquilo que posso provar ou aquilo que potencialmente posso provar, negando a noção de verdade dada através das características do enunciado ou de sua relação com a realidade, como pretendemos expor adiante. A verdade do ponto de vista intuicionista argumenta, principalmente, a favor da rejeição do TEX, uma vez que, na falta de meios de resultar um algoritmo que prove um determinado enunciado, em domínios infinitos de julgamento, não estamos capacitados a afirmar a verdade ou falsidade de tal enunciado.

Na tentativa de entendermos o que significa ser *verdadeiro* para o intuicionista, com o objetivo de comprovar que a partir desta concepção o TEX de fato não seria satisfatório como princípio lógico de dedução, vamos sintetizar a maneira como o Realismo compreende a noção de verdade, na qual está baseada a lógica Clássica e, por fim apresentar o que costumamos entender por verdade no Intuicionismo, fundado em Brouwer.

2.1.1 As principais diferenças entre a concepção de verdade Realista e Intuicionista

No desenvolvimento desta seção mostraremos que a matemática Clássica acompanha uma visão de mundo e, consequentemente, um entendimento específico do que significam enunciados e objetos matemáticos, denominada Realista. Esta concepção permitiria do ponto de vista intuicionista a sustentação e aceitação do uso do TEX.

A concepção de verdade Clássica é de cunho Realista. Compreendemos que o Realismo matemático endossa uma visão que afirma a existência de objetos matemáticos independente de nós, ou nossa linguagem, pensamentos ou práticas. O Realismo em matemática incorpora importantes escolas, como: o Logicismo[25] e o Formalismo[26]. E envolve

[25] Podemos, *grosso modo*, entender que a concepção do Logicismo, no que diz respeito à noção de verdade, afirmam a referida noção levando em consideração as *Teorias da correspondência*, uma instancia da concepção realista da noção de verdade. “As teorias da correspondência entendem que a verdade de uma proposição consiste não em suas relações com outras proposições, mas em sua relação com o mundo, sua correspondência com os fatos”. (HAACK, S., 2002, p. 127).

a representação da realidade, do mundo natural, como independente de nós e determinada. Ou seja, a realidade é uma forma bem definida, que existe independente da nossa capacidade de saber onde ela está ou como ela é[27]. Ilustraremos as afirmações a partir de um exemplo:

(A) Todos os planetas do sistema solar, exceto o Planeta Terra, não possuem vida.

Sobre a verdade enunciada em *(A)*, naturalmente, podemos ser levados a dizer que não podemos saber se *(A)* é verdadeiro ou falso e que talvez ninguém saiba. Porém, devemos atentar para o fato de que ainda que não possamos afirmar se verdadeiro ou falso, sabemos a respeito do enunciado, especificamente, o que são planetas, quais são os planetas do sistema solar, o que caracteriza vida do ponto de vista científico, e assim vai; e, finalmente, sabemos que *(A)* é, necessariamente, verdadeiro ou falso. Assim, o enunciado será verdadeiro no caso de todos os planetas que constituem o sistema solar, exceto a Terra, não possuírem vida; e seria falso no caso de haver pelo menos um planeta, além da Terra, que possui vida. A realidade é, inevitavelmente, de uma maneira ou de outra, apesar de nós não termos evidencias até o presente, sobre a existência de vida ou não em outro planeta além da Terra, nós sabemos que as coisas são tal como *(A)* descreve ou não são, e que, portanto, *(A)* é correspondentemente verdadeiro ou falso.

Com base neste exemplo, podemos observar que a representação do mundo natural é independente de nós e determinada. Independente de termos ou não o conhecimento de que não existe vida em outro planeta do sistema solar (exceto a Terra) e independente, até mesmo, de nós um dia termos conhecimento a respeito desta afirmação, a realidade é tal como é. O enunciado também é determinado no sentido de que está definido: sabemos o que são planetas, quais são os planetas do sistema solar, o que consideramos vida do ponto de vista científico, etc. Sendo assim, sob este ponto de vista estaríamos capacitados a aceitar o TEX. Pois, nossa instância de *(A)* é verdadeira, ou sua negação é seguida pela nossa aceitação do TEX para afirmações acerca do mundo natural.

Com este raciocínio realista a respeito da noção de verdade no mundo natural, podemos tentar compreender como um matemático clássico entende a noção de verdade para

---

[26] Compreendemos o Formalismo, tal como proposto no sistema de Hilbert, como uma subdivisão do Realismo, a medida que compreende que uma teoria formal interpretada é consistente e descreve uma dada realidade, por exemplo, os números no caso da aritmética, ou as formas espaciais para a geometria. Uma teoria formal consistente não admite consequências contraditórias, simplesmente porque é verdadeira.
Cf. SILVA, Jairo J. da, 2007, p. 183- 206.

[27] Cf. DUMMETT, M., 1996, p.146.

as afirmações no campo da matemática.[28] Retornemos a *Conjectura dos Números Ímpares Perfeitos*: não podemos saber, até o dado momento, se existem ou não números ímpares que são perfeitos. Por outro lado, sabemos o que é um número ímpar, o que é um número perfeito, o que são números naturais. Sendo assim, um matemático clássico poderia afirmar que, ou a Conjectura é verdadeira ou não existe um número particular ímpar que seja perfeito. Argumentando ainda, que nós apenas não sabemos, e que talvez nunca saberemos, qual dos dois casos podem ser afirmados para a referida conjectura. Contudo, sabemos que a realidade matemática, precisamente o conjunto dos números naturais, é de uma maneira, temos números ímpares perfeitos; ou de outra, não temos números ímpares perfeitos. Estando, portanto, disposto a aceitar o uso do TEX em enunciados matemáticos.

O matemático clássico está disposto a aceitar o TEX para enunciados matemáticos, tais como na conjectura acima, uma vez que, a condição para ele afirmar a verdade ou falsidade de um número ímpar perfeito está associada ao fato deste número recair sobre uma definição, no caso, ser número ímpar e ser número perfeito. Dada a coleção de números ímpares, coleção infinita {3, 5, 7, 9, ...}, independente do que qualquer um possa acreditar, ou vir a conhecer, cada elemento do conjunto de números ímpares é um número perfeito ou não é; aceitando assim o TEX.[29]

Na visão realista enunciados matemáticos são acerca de uma realidade objetiva, independente do homem, assim os enunciados da matemática são descrições desta realidade e se estão em correspondência com esta realidade, são verdadeiros, se não, são falsos. Porém esta visão realista, aparentemente sem problemas, pode levar a confusões, e do ponto de vista crítico dos intuicionistas é este entendimento da realidade matemática associada ao mundo natural que levaria aos paradoxos e aos problemas nos fundamentos da matemática.[30]

> This common-sensical thought is based on the following, conscious or subconscious, threefold belief: First, in a truth existing independently of human thought and expressible by means of sentences called 'true assertions', mainly assigning certain properties to certain objects or stating that objects possessing certain properties exist or that certain phenomena behave according to certain laws. (…) in the possibility of extending one's knowledge of truth by the mental process of thinking, in particular thinking accompanied by linguistic operations independent of experience called logical reasoning', which to a limited stock of 'evidently' true assertions mainly founded on experience and sometimes called axioms, contrives to add an abundance of further truths. Finally, using the term 'false' for the converse of true, in the so-called 'principle of the excluded third' saying that each assertion, in particular each

[28] Cf. GEORGE, A., VELLEMAN, D., J., 2002, p.118.
[29] Cf. GEORGE, A., VELLEMAN, D., J., 2002, p. 91.
[30] Cf. BROUWER, L. E. J., 1908, p.108-109.

> existence assertion and each assignment of a property to an object or of a behavior to a phenomenon, is either true or false, independently of human beings knowing about this falsehood or truth, so that e.g. contradictorily of falsehood would imply truth, while an assertion a which is true if the assertion is true as we'll as if it is false, would be universally true. (BROUWER, L. E. J., 1955, p.551)

Para o Intuicionismo em contraposição ao Realismo, a realidade matemática não pode ser compreendida a partir das associações feitas com o mundo natural. A realidade matemática é uma construção mental humana, mas não se trata de uma construção arbitrária, como veremos no decorrer desta dissertação. O ponto é que, com esta visão, há uma mudança de foco na discussão acerca da verdade, a saber, que já não se trata mais de ser, ou não, o enunciado uma descrição correta da realidade, mas a verdade deve estar centrada na construção mental e na justificação das propriedades dessa construção.

> According to the intuitionist, the mathematical world does not exist determinately and independently of us, waiting, as it were, for us to discover facts about it. It is not clear with which metaphor to replace that of discovery, but one of creation easily suggests itself. Thus we might say that, according to the intuitionist, the world of mathematics comes into being in the course of our reasoning about it. This does not mean that mathematical truths are "subjective," any more than truths about buildings are, truths that likewise only come into being as a consequence of human activity. Nor does it mean that "anything goes" in mathematics, any more than the created nature of buildings means that any structure we want will stand up. But it does suggest that the mathematical world fails to possess the kind of independence that can make it seem a mystery how a priori knowledge about it could ever be attained.(GEORGE, A., VELLEMAN, D. J., 2002,p.118).

A verdade na concepção intuicionista de seu fundador, Brouwer, parte de dois pressupostos básicos,

> First, truth is an ontic property, which means the whatever is, is true. Thus, the word ‘true’ is synonymous with ‘real’. For instance, an object is true if it really is, an event is true if it really happens, a process is true provided it really takes place. But secondly, the meaning of the expression ‘there is something’ is limited, since ‘to be’ means, more or less, ‘to be experienced’. Thus, objects and qualities are true as far as they perceived; mathematical constructions are true but only if they are carried out; and similarly, rules and deeds are true only if the subject is aware of them. (PLACEK, 1999, p.67.)

E assim ele constrói um ponto de vista crítico refutando o que ele considera serem quatro teses básicas de fundo Realista da noção de verdade, a saber:

> 1. That truth exists "independently of human thought and is expressible by means of sentences called 'true assertions'. These true assertions assign "certain properties to certain objects or state the certain objects possessing certain properties exist or that certain phenomena behave according to certain laws" ([Brouwer] 1955, p.551);
> 2. That one way extend the stock of true assertions by means of the laws of logic, which permit one to deduce further evident assertions from an initial stock of evidently true assertions, called axioms ([Brouwer 1955] ibid, p.551);
> 3. That if the term 'false' denotes what is 'converse to true', "each assignment of a property to an object or of a behavior to a phenomenon, is either true or false independently of human beings knowing about this falsehood or truth, so that e.g. contradictority of falsehood would imply truth (...)" ([Brouwer 1955] ibid., p.551);
> 4. That any mathematical assertions is either true or false, independently of whether anybody knows it; moreover, if the human race became extinct mathematical truths would survive. (PLACEK, T., 1999, p.68).

Primeiramente, para o intuicionista a verdade está associada ao pensamento humano, porque só posso afirmar como verdadeiro um enunciado operando uma construção mental que seja capaz de construir o enunciado, mostrando sua verdade. Segundo, não posso afirmar a verdade de um enunciado, ou construí-lo indiretamente a partir de deduções. No Intuicionismo só valem as deduções diretas, que implicam em uma construção mental do enunciado, neste sentido não posso tomar como verdadeiro um axioma. Terceiro, para o intuicionista a falsidade não está associada ao contrário de ser verdadeiro, mas a uma operação que resulte em absurdo, em não poder prosseguir com a construção mental deste enunciado. E por fim, não aceitam a ideia de que um enunciado matemático seja necessariamente verdadeiro ou falso independente do nosso conhecimento sobre ele, um enunciado só é dito verdadeiro se podemos construir uma prova direta para ele e falso, se sua construção resulta em um absurdo.

A crítica intuicionista no que diz respeito à maneira como a Lógica Clássica compreende a noção de verdade de um enunciado refere-se também às tabelas de verdade. No âmbito da Lógica Clássica poderíamos, no que diz respeito à verdade ou falsidade de um dado enunciado, avaliar uma sentença tal como $A \vee \neg A$, atribuindo o valor verdadeiro ou falso seguindo as regras estabelecidas pela disjunção. Porém para Brouwer, estas regras da disjunção não foram estabelecidas baseadas em uma construção matemática mental, tal como o Intuicionismo esperaria, mas baseadas, simplesmente, na nossa concepção do mundo natural[31], em que dada uma sentença disjuntiva ela é verdadeira ou falsa dependendo de sua relação com a realidade.

Para o intuicionista a tabela de verdade não nos mostra o que significa a atribuição de verdadeiro ou falso, ela aponta apenas uma justificação, no caso ser verdadeiro ou falso, a um enunciado. Usamos a tabela de verdade como uma justificativa para certos enunciados logicamente considerados, mas ao fazermos isso não passamos pelo crivo da intuição básica da Matemática, que é o que justifica a Matemática e a caracteriza como uma atividade mental, sem linguagem. Na concepção dos intuicionistas a noção de verdade clássica é insatisfatória, pois ao delimitarmos as condições em que um enunciado pode ser caracterizado como verdade, como fazemos ao estabelecermos as regras dos conectivos lógicos, disjunção, conjunção, negação, implicação etc., estamos determinando o sentido de um enunciado, estabelecendo suas condições de verdade. Mas nós não conhecemos de fato o sentido do enunciado, seu sentido só poderia ser dado pela sua prova, e não pelas circunstâncias em que o enunciado é verdadeiro ou falso.[32]

Na visão do fundador do Intuicionismo os problemas da matemática poderiam ser resolvidos à medida que a aceitação realista da teoria da verdade fosse abandonada. Como vimos, esta aceitação da noção de verdade realista implicitamente corresponde à aceitação do TEX, pois independente do nosso conhecimento de determinado enunciado, ou o enunciado é verdadeiro, ou segue-se pelo TEX que sua negação é verdadeira.

> From the intuitionist's point of view, in sum, a number of the philosophical problems for which a logicist reduction was to be the solution are to be solved by abandoning the realist perspective that creates the problems in the first place. From a classical perspective, this amounts to throwing out the baby with the bathwater: human limitations are being confusedly projected onto the world of mathematics, resulting in something that "lacks the familiarity, the convenience, the simplicity, and the beauty of our [classical] logic."(GEORGE, A., VELLEMAN, D. J., 2002, p. 119)

[31] Cf. BROUWER, L. E. J., 1948, p. 480- 494.
[32] DUMMETT, M., 1978, p. 6- 10.

2.1.2 A noção de verdade intuicionista e a rejeição do TEX

Neste momento de nosso trabalho desejamos mostrar que do ponto de vista intuicionista a verdade estaria relacionada à construção de uma prova fundada na intuição básica da matemática. Assim, não poderíamos permitir que provas indiretas levassem a tomar como verdadeiros enunciados matemáticos, e assim não poderíamos aceitar o TEX como válido em sistemas infinitos de julgamento.

O entendimento intuicionista da noção de verdade pede que busquemos entender o que Brouwer, ao fundar esta matemática, entende por construção matemática, quais objetos matemáticos são admitidos no Intuicionismo, como são construídos os objetos matemáticos, o que são os métodos de provas aceitáveis, questões estas que cercam sua noção de verdade. A concepção de verdade no Intuicionismo começa a ser construída já no momento em que compreendemos a função da Linguagem por parte dos intuicionistas. Relembremos que eles a compreendem como um sistema complicado de gestos e signos usados pelos humanos para transmitir ordens, expressar desejos, pedir ajuda e, finalmente, levar outros humanos a terem estados mentais semelhantes aos que carrega consigo.[33] Por estes motivos, as declarações da linguagem matemática seriam realizadas por leis finitas governadas por conectivos lógicos, que poderiam levar qualquer um às mesmas conclusões, ao mesmo valor de verdade, sobre dado enunciado matemático, usando para as operações leis e princípios lógicos permitidos.

> It is true that from certain relations among mathematical entities, which we assume as axioms, we deduce other relations according to fixed laws, in the conviction that in this way we derive truths from truths by logical reasoning, but this non-mathematical conviction of truth or legitimacy has no exactness whatever and is nothing but a vague sensation of delight arising from the knowledge of the efficacy of the projection into nature of these relations and laws of reasoning. (BROUWER, L. E. J., 1912, p. 125).

A função de tais conectivos, para Brouwer, teriam sido desenvolvidas relacionadas ao fato de que as observações repetitivas realizadas no mundo exterior poderiam ser derivadas dentro deste sistema lógico finito e através de operações e princípios lógicos seríamos levados a inferir novos enunciados matemáticos. Contudo, tais observações repetitivas realizadas no mundo exterior não significam que estes enunciados tenham sido

[33] Cf. PLACEK, T., 1999, p. 50.

determinados pela intuição matemática, para inferirmos novos enunciados matemáticos é preciso que estes tenham sido construídos de maneira direta e com base na ideia de intuição matemática.[34]

Para o intuicionista podem existir três conceitos distintos de verdade: Primeiro, a verdade evidente, o enunciado é verdadeiro para qualquer um que tenha, em dada ocasião, uma evidência apropriada, entendendo por evidência uma construção matemática intuicionista adequada, i.e. provas diretas. Por isso, a rejeição do TEX e, em consequência, da DN e da *Redução ao Absurdo*. Não se trata de dizer aqui que o Intuicionismo negue o método dedutivo clássico em si, mas ele assume uma posição restritiva a respeito da aplicação deste método visto as consequências que ele pode vir a implicar, como a aceitação de provas indiretas relacionadas à Redução ao Absurdo, DN e principalmente ao TEX.

Segundo, temos enunciados controláveis, que podem ser testados dentro de um sistema finito de leis e princípios, se são verdadeiros ou falsos em determinadas condições, devido à posse de um método de verificação.

Terceiro, seriam as *verdades ideais*, as quais Brouwer combate, e são aquelas que acreditamos ser verdadeiras embora sua verdade não possa ser vista intuitivamente (lembrando que as verdades vistas intuitivamente são construídas diretamente). Sobre esta última distinção, são verdades ideais aquelas atingidas de maneira indireta, pela aplicação do TEX, ou da DN. Dado uma verdade evidente para qual há uma construção matemática apropriada correspondente, há por parte da matemática clássica, a crença de que podemos derivar verdades a partir destas verdades evidentes, identificadas através de derivações realizadas pelo TEX ou pela DN. Desta forma, pode acontecer de um enunciado ser aceito no domínio de um argumento indireto, sendo sua demonstração direta não conhecida. Neste caso, o enunciado expressa uma verdade ideal, realizada de maneira indireta com a ajuda de princípios lógicos como TEX e DN e que não temos uma demonstração direta conhecida[35].

A verdade no Intuicionismo não é uma característica retirada do enunciado, através de leis e princípios. A noção de verdade se refere a entidades extralinguísticas, por exemplo, construções matemáticas, intuição matemática etc. Compreenderemos o que no pensamento de Brouwer o levou a rejeição do TEX, partindo da reconstrução de sua concepção de intuição, que em grande medida foi motivada por sua posição filosófica[36]. É no centro da definição de intuição que vamos encontrar respostas sobre quais objetos

---

[34] Cf. BROUWER, L. E. J., 1948, p. 480- 494.
[35] Cf. PLACEK, T., 1999, p.66-67.
[36] Cf. POSY, C., 2005, p. 318- 355.

matemáticos podem ser conhecidos, ou mais amplamente, o que é um conceito correto de verdade no Intuicionismo.

De acordo com Brouwer, a noção de verdade é relacionada à intuição básica da matemática. Pois é a intuição que permite ordenar sensações e objetos percebidos na realidade exterior e separá-los da aparência de que foram originadas na realidade objetiva. A intuição básica de que Brouwer fala surge no Primeiro Ato do Intuicionismo, que deixa claro que a linguagem matemática subordinada à formalização, à lógica, não é a matemática em si.[37]

De acordo com a tese de brouweriana, nossa consciência que oscila entre quietude e fluxo de sensações, através da *atenção temporal* e da *atenção causal*, é a ferramenta que possuímos para perceber as sensações.[38] A atenção temporal é responsável pelo ordenamento das sensações de acordo com anterior e posterior e após o ordenamento é, também, responsável por separar as sensações da experiência, ou seja, as sensações se tornam independentes da aparência de que são originadas na realidade objetiva, mundo exterior. Realizada a função da atenção temporal, a consciência se torna *mente* onde a atenção causal tem a função de conectar as sensações ordenadas às suas causas e aos objetos que possuem as mesmas características, desenvolvendo leis para prosseguir com operações matemáticas.

> In the world of sensation experienced by mind, the free-will-phenomenon of causal attention occurs. It performs identifications of different sensations and of different complexes of sensations, and in this way, in a dawning atmosphere of forethought, creates iterative complexes of sensations. An iterative complex of sensations, whose elements have an invariable order of succession in time, whilst if one of its elements occurs, all following elements are expected to occur likewise, in the right order of succession, is called a *causal sequence*. (BROUWER, L. E. J., 1948a, p.480.)

O fenômeno ocorrido na mente acontece repetidamente. Assim, uma sensação percebida cede lugar a outra e mantêm-se na memória, estando aqui no movimento das sensações a *intuição*.

> Mathematics comes into being, when the two-ity created by a move of time is divested of all quality by the subject, and when the remaining empty form of the common substratum of all two-ities, as basic intuition of mathematics, is left to an unlimited unfolding, creating new mathematical entities in the shape of predeterminately or more or less freely proceeding infinite sequences of

[37] Cf. BROUWER, L. E. J., 1948a, p. 480- 494.
[38] Cf. PLACEK, T., 1999, p. 19-22.

> mathematical entities previously acquired, and in the shape of mathematical species i.e. properties supposable for mathematical entities previously acquired and satisfying the condition that if they are realized for a certain mathematical entity, they are also realized for all mathematical entities which have been defined equal to it. (BROUWER, L. E. J., 1948a, p.482).

A intuição é um meio de introduzir ou criar objetos matemáticos, uma vez que o mecanismo de sucessão garante que, para qualquer objeto matemático, outro objeto pode ser adicionado, seguindo a mesma intuição; esta, grosso modo, pode ser compreendida como um procedimento.[39]

A faculdade de apreender e escolher uma lei para prosseguir com uma sequência de números, sendo o seu segmento inicial conhecido, é propriamente a intuição. Dado um segmento inicial podemos ser capazes de interpretá-lo de muitas maneiras, uma delas é encontrar expressões aritméticas, algoritmos de decisão, que são capazes de proceder infinitamente. Podemos ver aqui mais uma evidência de que o TEX não poderia ser aceito como princípio válido no Intuicionismo, pois no momento em que conhecemos o segmento inicial de dada sequência de números, por exemplo, devemos ser capazes de através da intuição identificar um algoritmo de decisão que resulte na verdade ou falsidade do objeto verificado.

Vamos observar a *Conjectura de Goldbach* para tentarmos exemplificar qual seria o papel da intuição na verificação e prova de um enunciado tido como verdadeiro. A conjectura afirma que todo número par maior ou igual a 4 é a soma de dois primos, por exemplo: 4=2+2; 6=3+3; 8=5+3; 10=3+7; 12=5+7, ... Verificações em sistemas computacionais já evidenciaram que até onde podemos verificar, um número par 'enorme', a conjectura se confirma. Para cada número particular dado, há um algoritmo de decisão. No entanto, não possuímos uma efetiva demonstração do enunciado geral. Se o TEX é válido, podemos por princípio, afirmar que esta conjectura é ou verdadeira ou falsa, mesmo sem a posse de uma efetiva demonstração.[40] Contudo, na visão do intuicionista, não há nada que possa ser afirmado a respeito desta conjectura. Nossa intuição não poderia apreender nada com ela, pois não somos capazes de interpretar uma sequência inicial de números pares maiores que 4, como *4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18*,..., encontrando uma expressão aritmética, um algoritmo, que permita resultar uma construção mental que prove a verdade ou falsidade da

[39] Cf. PLACEK, T., 1999, p. 29 e 30.

[40] Aqui também temos implícita parte de uma crítica intuicionista relacionado ao TEX, isso porque o princípio pode ser identificado como a crença de que todos os problemas matemáticos têm solução.

mesma. Sendo assim, sobre este enunciado, intuicionisticamente pensando, não temos garantia de verdade.

Por outro lado, considere-se a questão: “1000^{1000} é a soma de dois primos?” Por se tratar de um número finito observamos que possuímos um método de verificar se o enunciado é verdadeiro ou falso. Basta resolvermos a potência e, posteriormente, tentarmos encontrar dois primos que correspondam ao resultado da potência. Contudo, existe a ressalva de que talvez não haja tempo para realizarmos a demonstração, devido à finitude humana. Neste ponto quando afirmamos a incapacidade de nosso ser de concluir uma prova devido ao curto tempo de nossas vidas, estamos lançando a possibilidade para desenvolvermos a investigação em outro sentido: a verdade estaria relacionada à posse de uma prova ou a possibilidade de provar no futuro? Veremos a seguir que tais aberturas na concepção de verdade desenvolvida no Intuicionismo estão relacionadas, principalmente, às respostas desenvolvidas por Brouwer a fim de manter a rejeição do TEX.[41]

A crítica intuicionista do TEX, como já dissemos, é relacionada a concepções de verdade, existência e infinito. Tais concepções tentam amparar a rejeição do TEX como princípio válido para derivações lógicas em sistemas infinitos, uma vez que em sistemas infinitos, não tenho como percorrer todo o conjunto e verificar se correspondem a determinado enunciado ou não. Como também tentamos mostrar, a noção de verdade intuicionista nega a noção clássica e entende a verdade não como dependendo de entidades abstratas em um mundo suprassensível, uma qualidade mente-independente. Ao contrário, entende a verdade como dependente da mente, partindo do que Intuicionismo considera ser a pura matemática.

2.1.3 A oscilação entre atualismo e possibilismo da noção de verdade intuicionista na tentativa de sustentar a rejeição do TEX

A noção de verdade do Intuicionismo seria menos simples do que inicialmente poderíamos supor. A noção de verdade desenvolvida, principalmente respaldada nas concepções de seu fundador, pode não ter conseguido deixar claro se a verdade trata-se de uma noção *atualista* ou *possibilista* e a oscilação brouweriana em relação a tal conceito se deve, principalmente, aos argumentos desenvolvidos por ele na tentativa de manter a rejeição do TEX, como pretendemos elucidar no decorrer deste texto.

[41] Esta questão pode ser esclarecida em
Cf. RAATIKAINEN, Panu, 2003, p. 132- 135.

A princípio, podemos ser levados a comprometer Brouwer com a convicção de uma posição atualista com relação à verdade. O *Atualismo* pode ser compreendido, em suma, como a posição que leva em consideração a tese ontológica de que tudo o que existe é atual. Na possibilidade de assumirmos mundos possíveis, a tese atualista vai aceitar como existentes apenas aqueles objetos que existem no mundo possível atual. Neste âmbito a noção de verdade, como assumida por Brouwer, estaria relacionada à nossa experiência de pensamentos construtivos atuais. Não há verdade que não tenha sido experimentada, evidente na citação de 1948, que diz que

> follows that truth is only in reality i.e. in the present and past experiences of consciousness. Amongst these are things, qualities of things, emotions, rules (state rules, cooperation rules, game rules) and deeds (material deeds, deeds of thought, mathematical deeds). But expected experiences, and experiences attributed to others are true only as anticipations and hypotheses; in their contents there is no truth. (BROUWER, L. E. J., 1948a, p. 488).

Observamos que neste momento, Brouwer rejeita como verdade, construções matemáticas que ainda não foram provadas, como é o caso das Conjecturas. Aceitando tal afirmação, somos levados a aceitar que o TEX é imediatamente rejeitado como princípio lógico.[42] O TEX, em resumo, nos diz que quando dois enunciados se opõem contraditoriamente não podem ser ambos falsos, há de se garantir que seja um verdadeiro e a outro falso. A tese atualista, respaldada pela concepção de matemática do Intuicionismo, não poderia suportar a ideia de ser hipoteticamente ou verdadeiro ou falso. Como vimos, a noção de verdade intuicionista vai contra a pressuposição de que um enunciado matemático é necessariamente verdadeiro ou falso independente do nosso conhecimento sobre ele; ou seja, independente de conhecermos uma construção matemática para tal enunciado. De acordo com a concepção intuicionista, os objetos matemáticos não podem ser entendidos em uma realidade que independe do nosso conhecimento, como um conhecimento *a priori* esperando ser descoberto. A realidade matemática é conhecida no momento em que a construímos.

> According to the intuitionist, the mathematical world does not exist determinately and independently of us, waiting, as it were, for us to discover facts about it. It is not clear with which metaphor to replace that of discovery, but one of creation easily

[42] Cf. RAATIKAINEN, Panu, 2003, p.142.

> suggests itself. Thus we might say that, according to the intuitionist, the world of mathematics comes into being in the course of our reasoning about it. This does not mean that mathematical truths are "subjective", any more than truths about buildings are, truths that likewise only come into being as a consequence of human activity. Nor does it mean that "anything goes" in mathematics, any more than the created nature of buildings means that any structure we want will stand up. But it does suggest that the mathematical world fails to possess the kind of independence that can make it seem a mystery how a priori knowledge about it could ever be attained (GEORGE, A., VELLEMAN, D. J., 2002,p.118).

A visão atualista foi posteriormente abandonada por Brouwer no desenrolar de seus argumentos de crítica à lógica e também devido a sua disputa com Hilbert em relação à existência de problemas insolúveis na matemática. Neste momento, Brouwer vai aproximando-se da concepção de verdade relacionada à possibilidade de prova – *Possibilismo*. A tese possibilista nega a visão atualista de que a verdade de um enunciado estaria atrelada à posse *atual* de uma prova e, contrário a isso, aceita a hipótese de que mesmo não sendo verdadeiro atualmente, podemos no futuro encontrar a verdade de dado enunciado matemático.[43]

As afirmações de Brouwer no âmbito possibilista tentam defender que o TEX seria um princípio lógico equivalente a tese de Hilbert, de que todo problema matemático pode ser resolvido. Brouwer refuta a tese de Hilbert já no texto *The unreliability of logical principles*[44] em que explicitamente afirma que as provas dos enunciados matemáticos operadas por Hilbert, através do método de prova indireta, seriam mantidos incondicionalmente apenas sobre o princípio de contradição.

> Now consider the *principium tertii exclusi*: It claims that every supposition is either true or false; in mathematics this means that for every supposed imbedding of a system into another, satisfying certain given conditions, we can either accomplish such an imbedding by a construction, or we can arrive by a construction at the arrestment of the process which would lead to the imbedding. It follows that the question of the validity of the *principium tertii exclusi* is equivalent to the question whether unsolvable mathematical problems can exist. There is not a shred of a proof for the conviction, which has sometimes been put forward that there exist no unsolvable mathematical problems.
>
> Insofar as only finite discrete systems are introduced, the investigation whether an imbedding is possible or not, can always be carried out and admits a definite result, so in this case the *principium tertii exclusi* is reliable as a principle of reasoning. (BROUWER, L. E. J., 1908, p.109)

---

[43] Cf. RAATIKAINEN, Panu, 2003, p. 142- 143.
[44]BROUWER, L. E. J., 1908, p. 107- 111.

Algumas evidências podem levar a crer que Brouwer ao rejeitar o TEX estaria equiparando este princípio a um tipo especial de não-contradição, por exemplo, quando ele enuncia o TEX da seguinte maneira: "Every assignment *z* of a property to a mathematical entity can be judged, i.e. either proved or reduced to absurdity" (BROUWER, L. E. J., 1948a, p. 488). Contudo, tais evidências estão relacionadas à argumentação brouweriana de que o TEX seria um princípio lógico equivalente à tese de Hilbert de que 'todo problema matemático teria uma solução'. Brouwer sustenta que os métodos de prova indiretos, aplicados por Hilbert, seriam mantidos pelo princípio da não-contradição, possível devido ao TEX. O princípio da não-contradição enuncia, em resumo, que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. No caso da equiparação do TEX a um tipo especial de não-contradição, o último princípio está sendo entendido como enunciando, em lógica clássica, que dado dois enunciados que se opõem contraditoriamente, $(A \wedge \neg A)$, estes não podem ser, ao mesmo tempo, verdadeiros. Desta forma, caberia ao TEX manter a verdade de um e a falsidade de outro, ainda que não seja possível indicar qual dos disjuntos é verdadeiro ou falso.

> To elucidate the consequences of the rejection of the principle of the excluded third as an instrument to discover truths, we shall put the wording of this principle into the following slightly modified, intuitionistically more adequate form, called the *simple principle of the excluded third: Every assignment z of a property to a mathematical entity can be judged, i.e. either proved or reduced to absurdity.* Then for a single such assertion *t* the enunciation of this principle is non-contradictory in intuitionistic as well as in classical mathematics. For, if it were contradictory, then the absurdity of r would be true and absurd at the same time, which is impossible. Moreover, as can easily be proved, for a *finite* number of such assertions *T* the simultaneous enunciation of the principle is non-contradictory likewise. However, for the simultaneous enunciation of the principle for all elements of an *arbitrary* species of such assertions T this non-contradictority cannot be maintained. (BROUWER, L. E. J., 1948, p. 488).

Em tal visão, a solução procurada por Hilbert, com relação à tese de que todos os problemas matemáticos teriam solução, não poderia ser levada a cabo dentro do pensamento intuicionista, que não aceita as provas indiretas, pois estas seriam fundadas na crença que depositamos na lógica clássica.

Brouwer propõe, então, dividir os teoremas provados da matemática clássica entre os que são consideradas como 'verdadeiros' e os 'não-contraditórios'. A questão que pode surgir aqui é de que neste momento Brouwer estaria sugerindo que existem três valores de verdade: *verdadeiro*, *não-contraditório* e *falso*; se considerarmos que o não-contraditório pode ser provado um dia e, assim, tornar-se verdadeiro. Entendemos que esta questão não é exatamente o caso, ainda que levássemos em conta a visão possibilista poderíamos chegar à mesma pergunta, mas neste momento o que Brouwer esta fundamentando é uma afirmação mais forte com relação à negação intuicionista.

No Intuicionismo, a negação de *A* é entendida como *A* implica o *absurdo*. Isto é, na construção mental de uma prova para um enunciado qualquer, supondo *A*, se em algum momento desta prova, nos deparamos com a impossibilidade de continuar, pois isso seria *absurdo* (por exemplo, chegamos à proposição que $0 = 1$), então podemos concluir *não A*.

> In classical mathematics to say that a statement is 'absurd', means that it is obviously false, something which has to do more with the psychological perception of the statement than with the statement that with the statement itself. 'Absurdity' in this sense is not a proper technical term of classical mathematics[45].(DFEZ- PICAZO, Gustavo F., 2000, p.220).

Para Brouwer existem duas maneiras de encarar a impossibilidade: a primeira é reconhecida de imediato, a construção não pode continuar; a segunda, por 'intermédio', mostramos que uma proposição *A* é contraditória, reduzindo *A* a uma falsidade conhecida, por exemplo, mostramos que $A \rightarrow 1 = 2$.[46]

A afirmação da falsidade de um enunciado dada indiretamente apenas sob a convicção de que não é possível expressar nenhuma prova da verdade deste enunciado, intuicionisticamente deve ser descartada. Tendo em vista o entendimento intuicionista da verdade, não faz sentido nem mesmo sob a alegação do possibilismo, entender que Brouwer estaria afirmando a existência de três valores de verdade.

Na tentativa de afirmar as convicções a respeito da existência de problemas insolúveis, Brouwer formula então os chamados contraexemplos, já citados em alguns momentos no decorrer deste texto. Os contraexemplos teriam como finalidade levar a desconfiança sobre enunciados não-provados:

---

[45] DFEZ-PICAZO, Gustavo F., 2000, p. 220- 225.
[46] Cf. GEORGE, A., VELLEMAN, D., J., 2002, p. 89- 120.

> So long as this proposition is unproved, it must be considered as uncertain whether problems like the following are solvable:
> *Is there in the decimal expansion of Π a digit which occurs more often than any other one?*
> *Do there occur in the decimal expansion of Π infinitely many pairs of consecutive equal digits?*
> And it likewise remains uncertain whether the more general mathematical problem:
> *Does the principium tertii exclusi hold in mathematics without exception?* is solvable. (BROUWER, L. E. J., 1908, p. 110)

Os contraexemplos fracos desenvolvidos por Brouwer eram baseados em um método geral que, *grosso modo*, podemos entender na seguinte proposta: reduzimos a validade de um princípio matemático à solução de um problema, por exemplo, temos uma propriedade A (definida de acordo com os números naturais) para a qual ainda não pudemos mostrar que $\exists x A(x)$ nem que $\forall x \neg A(x)$. Tal redução é realizada usando, unicamente, o fato de A induzir a um problema em aberto e não depende da definição exata de A. Assim, se um problema aberto é solucionado, alguém pode simplesmente substituí-lo por outro do mesmo tipo que o método ainda funciona. Podemos perceber que este método desenvolvido por Brouwer mostra simplesmente que não podemos provar algum enunciado neste momento, atualmente, mas não mostram que podemos rejeitá-lo, ou melhor, provar sua negação.[47] Neste sentido os fracos contraexemplos não são um método efetivo para provar a rejeição do TEX ou ainda mostrar a existência de problemas insolúveis em matemática para rebater a tese de Hilbert de que todos os problemas da matemática teriam solução. Consciente desta convicção, Brouwer abandona os fracos contraexemplos e parece aderir novamente a uma forma de atualismo com relação à verdade. Porém, desta vez, um atualismo mais brando, em que desenvolve quatro casos para refutação do TEX. Os quatro casos são:

> *1. a* has been *proved* to *be true*; 2. *A has been proved to be false*, i.e. *absurd*; 3. *a* has neither been proved to be true nor to be absurd, hut an algorithm is known leading to a decision either that a is true or that a is absurd; 4. *a* has neither been proved to be true nor to be absurd, nor *do know an algorithm leading to the statement either that a is true or that: a is absurd.*(BROUWER, L. E. J., 1955, p. 552)

Os três primeiros casos são *verificáveis* (judgeable), visto que é sempre possível observarmos na construção de caráter finito sequências matemáticas finitas, passíveis de

[47] Cf. DUMMETT, M., 2000, p. 32.

serem verificadas, avaliadas. Além disso, o terceiro caso é temporal, pois à medida que possuímos um algoritmo de decisão a qualquer momento este enunciado pode encaixar-se no caso 1 ou no caso 2. O quarto caso, contudo, não pode ser dito temporal, pois não conhecemos um algoritmo de decisão e também corresponde a uma refutação para o TEX. O exemplo de Brouwer para mostrar a refutação do TEX através dos quatro casos foi o Teorema de Fermat, para o qual hoje sabemos que existe uma solução.[48]

Na tentativa de tentarmos tornar mais elucidativo os quatro casos tomemos como exemplo novamente a Conjectura dos Números Ímpares Perfeitos, com solução ainda desconhecida. Se considerarmos uma sequência inicial de números naturais ímpares, tais como, {1, 3, 5, 7, 9, 11}, podemos facilmente avaliando cada um dos números afirmar que se tratam de números ímpares imperfeitos; porque somados seus divisores, exceto o próprio número como enunciado pela regra do número perfeito, não obtemos o número investigado, veja: 1 tem como divisor apenas ele mesmo, 3 tem como divisores os números naturais 1 e 3, 9 tem como divisores 1, 3 e 9. Assim estamos aptos a afirmar que dentro de um sistema finito de julgamento posso enquadrar o enunciado da Conjectura no caso 2, a saber, o enunciado tem sido provado como falso. Estas afirmações satisfazem a refutação feita sobre a rejeição do TEX; uma vez que, o TEX pode ser considerado um princípio válido quando estamos julgando enunciados em um domínio finito. Mas se considerarmos a sequência infinita de todos os números naturais ímpares mantêm-se o quarto caso, refutando o TEX, pois não possuímos um algoritmo de decisão para resolver dado enunciado, o que significa então que não podemos provar sua verdade, nem seu absurdo.

Como tentamos tornar claro no decorrer dessas páginas, no que diz respeito à noção de verdade, não há exatamente clareza da parte de Brouwer em defini-la. Pretendemos, ainda, ter tornado claro que suas definições oscilam na tentativa de manter a refutação do TEX como princípio lógico válido para descoberta de verdades matemáticas. E no que diz respeito à verdade matemática, seus discípulos Heyting e Dummett, também não foram efetivamente elucidativos e definitivos, oscilando, assim como Brouwer, mas seus intuitos não eram exatamente argumentar em favor da rejeição do TEX[49].

---

[48] Cf. BROUWER, L. E. J., 1955, p. 551- 554.

[49] A noção de verdade e existência oscilou no pensamento de outros intuicionistas importantes como A. Heyting e M. Dummett como pode ser encontrado em:
Cf. RAATIKAINEN, Panu, 2003, p.132- 141.

Nestas páginas em que tratamos da questão da verdade sob o ponto de vista Intuicionista, que diverge em muitos aspectos da concepção Clássica, tentamos elucidar que a noção de verdade do ponto de vista intuicionista não pode ser entendida como dependente de uma realidade fora da mente, como os Realistas supõem. A verdade matemática do ponto de vista intuicionista sustenta que as construções e provas matemáticas só são possíveis devido aos Dois Atos do Intuicionismo que fundam a matemática com base na intuição básica da matemática e que não permitem a matemática intuicionista aceitar o TEX como princípio válido para julgamentos em domínios infinitos. O TEX, do ponto de vista Intuicionista, pode ser encarado com o principal causador dos paradoxos que aqueceram as discussões no século XIX sobre a fundação da matemática. Para Brouwer, o TEX teria sido motivado pela concepção errônea de que a matemática seria dependente da lógica e, principalmente, pela utilização sem explicação de princípios lógicos observados nos sistemas finitos de julgamento e aplicados nos sistemas infinitos.

2.2 A noção de Existência intuicionista argumentando a favor da rejeição do TEX.

A matemática construtiva, e já vimos que o Intuicionismo enquadra-se neste campo, afirma, *grosso modo*, que é preciso construir um objeto matemático para provar que ele existe. Nesta seção levaremos ao entendimento do que seria a noção de existência e de que maneira são construídos os objetos matemáticos na concepção intuicionista. O entendimento da noção de existência no Intuicionismo traz argumentos que mantém a rejeição ao TEX e permitem compreender como são entendidos os conectivos lógicos.

> You ought to consider what Brouwer's program was [L. E. J. Brouwer 1907]. It consisted in the investigation of mental mathematical construction as such, without reference to questions regarding the nature of the constructed objects, such as whether these objects exist independently of our knowledge of them. That this point of view leads immediately to the rejection of the principle of excluded middle (…). (HEYTING, A., 1956, p.1).

As matemáticas construtivas se distinguem da matemática clássica principalmente no que concerne a noção de existência. Neste sentido, pedem pela interpretação estrita da frase "*existe*" significando "*nós podemos construir*".[50] A matemática construtivista necessita, além de uma reinterpretação do quantificador existencial, uma interpretação de todos os conectivos lógicos e quantificadores como instruções sobre como construir uma prova do enunciado matemático. Foi Brouwer em sua tese de doutorado, já em 1907, que deu as bases de uma abordagem precisa e sistemática da matemática construtiva.[51] A matemática intuicionista propõe fazer com que a matemática seja uma função do intelecto, uma atividade do pensamento que pode usar a linguagem formal ou natural, para comunicar construções matemáticas aos outros e para si mesmo. No entanto, a comunicação das construções matemáticas através da linguagem (formal) não representam a matemática, e significam menos ainda a matemática em si. Assim, um correto entendimento da matemática intuicionista não permite atribuirmos existência independente do nosso pensamento.[52]

> But I must still make one remark which is essential for a correct understanding of our intuitionist position: we do not attribute an existence independent of our thought, i.e., a transcendental existence, to the integers or to any other mathematical objects. (BROUWER, L. E. J., 1931, p. 53).

2.2.1 A não aceitação da noção de existência clássica

Neste momento do desenvolvimento deste trabalho trataremos da questão da existência intuicionista como uma crítica a existência clássica que legitimaria o uso indiscriminado do TEX na matemática. Como vimos anteriormente, a matemática clássica aceita a noção Realista de verdade, o que sugere o mesmo procedimento para a noção de existência. O entendimento da noção de existência Realista, na qual está fundada a matemática clássica, leva a ideia de que os objetos matemáticos existem em uma realidade independente do nosso conhecimento. Heyting vai objetar esta noção afirmando tratar-se de uma questão metafísica, e que a matemática não deve ocupar-se de assuntos metafísicos, pois sua ciência deve contemplar o estudo das construções mentais.

---

[50] HEYTING, A., 1931, p. 52- 61.
[51] van DALEN, D., TROELSTRA, A. S., 1988, p. 04.
[52] Cf. HEYTING, A., 1931, p. 52- 61.

Your argument is metaphysical in nature. If "to exist" does not mean "to be constructed", it must have some metaphysical meaning. It cannot be the task of mathematics to investigate this meaning or to decide whether it is tenable or not. We have no objection against a mathematician privately admitting any metaphysical theory he likes, but Brouwer's program entails that we study mathematics as something simpler, more immediate than metaphysics. In the study of mental mathematical constructions 'to exist' must be synonymous with "to be constructed"(HEYTING, A., 1956, p.2).

Na perspectiva clássica, não há preocupação com a prova construtiva dada por uma operação matemática. Resumidamente, bastam aproximações finitas baseadas em critérios de *aplicação* e *identidade*[53], pois a existência do objeto é confirmada independentemente de existir um pensamento construtivo sobre eles. Assim podemos atribuir existência a um objeto através das informações sobre as propriedades do objeto, se estas propriedades podem ou não ser atribuídas ao dado objeto, o objeto existe. Analisemos a Conjectura de Goldbach sob este quadro. Vamos considerar que $\boldsymbol{Gx}$= se x é par e $x > 2$, então existem y e z tais que y e z são primos e $z = y+z$. A conjectura de Goldbach pode ser descrita como $\forall xGx \vee \neg\forall xGx$. Em matemática clássica ainda que não tenhamos a informação sobre qual dos disjuntos se confirmam, sabemos que existem apenas estas duas opções, $\forall xGx \vee \neg\forall xGx$, devido a aplicação do TEX.

É preciso termos em mente que para o intuicionista as construções matemáticas devem começar a partir de construções mais simples[54] como os *números naturais* e ir gradualmente crescendo em direção a construções mais complicadas, como por exemplo, 9^{99}. Além disso, que os números naturais são construídos em decorrência do Primeiro Ato do Intuicionismo. Em síntese, a noção de construir no Intuicionismo só é possível devido ao mecanismo da intuição básica da matemática[55], e o resultado da construção é fornecido à mente, por isso 'construções mentais': "the only possible foundation of mathematics must be sought in this construction under the carefully to watch which constructions intuition allows

---

[53] VELLEMAN, D. J., Jan./1993, vol. 102, p. 59- 84.

[54] Tais construções devem ter em mente os dois atos de Intuicionismo.

[55] Lembrando que, a função da intuição é limitada a construir objetos matemáticos, e é para o Intuicionismo o único recurso do conhecimento matemático. No entanto, a intuição da matemática precisa estar despida de todo conteúdo das sensações experimentadas pela consciência, que na concepção de Brouwer permanece lentamente oscilando entre quietude e sensação, sendo o fenômeno inicial responsável pela percepção do movimento do tempo. Tais sensações separadas de seu conteúdo sensorial possibilitam o surgimento de uma 'forma vazia', denominada 'intuição básica da duplicidade', com a função de identificar mudanças na divisão dos momentos da vida em duas partes, uma cedendo lugar a outra. A matemática é identificada por Brouwer, como o recurso primário da intuição, introduzindo e adicionando novas unidades já adquiridas pela mente. A coleção de unidades adquiridas é retida na memória, sendo assim este processo leva a construção de um número natural arbitrário.
Cf. PLACEK, T., 1997, vol. 5, p. 19- 33.

and which not, and why any other attempt at such a foundation is condemned to failure." (BROUWER, L. E. J., 1907, *p.52*).

Respaldados na ideia de que para o Intuicionismo construções são 'construções mentais', a questão sobre a existência de um objeto matemático só pode ser garantida se existe uma construção mental para este objeto. Assim, tomando como exemplo a Conjectura de Goldbach se faz necessária à construção dos números primos e de um algoritmo capaz de construir o enunciado de dada conjectura provando um dos disjuntos.

> Their existence is guaranteed only insofar as they can be determined by thought. They have properties only insofar as these can be discerned in them by thought. But this possibility of knowledge is revealed to us only by the act of knowing itself. Faith in transcendental existence, unsupported by concepts, must be rejected as a means of mathematical proof. (HEYTING, A., 1931, p.53)

Para começarmos a entender como são dadas as construções intuicionistas partiremos do pensamento de Arend Heyting a respeito de enunciados matemáticos. Para Heyting o enunciado é uma proposição matemática quando expressa a concretização de uma intenção; ou melhor, a satisfação de certa expectativa.[56] Por exemplo, o enunciado, "existe um número ímpar perfeito", expressa a expectativa de podermos encontrar um número inteiro i tal que este número seja ímpar e seja perfeito. Tal expectativa, como afirmada por Heyting, não expressa a existência de algo independente de nós, mas uma experiência do pensamento, assim como a negação deste enunciado, "não existe número ímpar perfeito", expressa a expectativa de derivarmos uma contradição, tal expectativa será satisfeita através de um procedimento de prova que leve a contradição.[57]

Sob esta visão, o TEX não poderia, realmente, ser completamente aceito na concepção intuicionista, pois um enunciado $a \vee \neg a$ seria satisfeito, apenas, se no mínimo uma das intenções a ou $\neg a$ fossem satisfeitas. Obter uma prova envolvendo TEX significa ter um método de decisão, para que quando dada uma proposição arbitrária particular, a, possamos provar sua proposição ou provar sua negação, $\neg a$. O que nem sempre pode ser garantido quando estamos tratando, não de proposições particulares finitas, por exemplo, a decisão se

[56] Cf. HEYTING, A., 1931, p. 52- 61.
[57] Cf. HEYTING, A., 1931, p. 52- 61.

um número ímpar, como o número 11, é perfeito ou não[58]; mas para quando tratamos de domínios infinitos de julgamento, como, o conjunto infinito de números ímpares.

2.2.2 Provas construtivas sustentam a noção de existência no Intuicionismo

Nesta seção iremos investigar de que maneira o Intuicionismo compreende que devam ser desenvolvidas as provas matemáticas, rejeitando os métodos de prova indireta e estabelecendo que a existência de objetos e enunciados matemáticos estariam relacionados à prova construtiva originada pelo intelecto humano, o que consequentemente sustentaria a rejeição do TEX. Além disso, pretendemos mostrar como o Intuicionismo entende os operadores lógicos, com a finalidade de expressar que nesta perspectiva o TEX não poderia se manter.

A noção de provas construtivas no Intuicionismo, e em outras matemáticas construtivas[59], implicam em aceitar que *construtivo* significa a afirmação de algo completamente específico sobre a prova, isto é, um método de prova que demonstre a existência de um objeto matemático através da criação ou fornecimento de um algoritmo que possibilite construir o objeto. Neste caso a prova de um enunciado como $\exists x P(x)$ é construtiva na medida que, ou temos provado uma instancia específica de $P(x)$, ou temos um meio efetivo, no mínimo em princípio, de encontrar uma prova de $P(x)$. No caso de um enunciado disjuntivo $P \vee B$ é construtivo apenas, na medida em que ou temos uma prova de P ou temos uma prova de B, ou temos um meio efetivo, no mínimo em princípio, de encontrar uma prova de um dos dois disjuntos. Dummett[60] vai afirmar que a distinção entre provas construtivas e provas não-construtivas é perfeitamente inteligível do ponto de vista Realista, principalmente no que tange provas envolvendo enunciado existenciais e disjuntivos.

---

[58] Enunciamos a Conjectura dos Números Ímpares Perfeitos no início deste capítulo. Recorde-se que, para um dado número ímpar é possível determinar se ele é perfeito ou não. Contudo, a Conjectura dos Números Ímpares Perfeitos enuncia que não existe número ímpar perfeito. Ou seja, considere Px, Px= x é ímpar e x é perfeito. Sabendo que, ser um número perfeito significa que x é a soma de seus divisores. Dado um número n podemos decidir se Pn ou $\neg Pn$. Mas não possuímos um algoritmo para decidir qual dos disjuntos é o caso na disjunção, então $\exists x Px \vee \neg \exists x Px$.

[59] Apesar das diferentes abordagens de construtivismo, podemos citar como ponto em comum entre estas a preocupação em afirmarem que a existência de um objeto ou entidade matemática deve ser realizada explicitamente, através de provas. Pois acreditam que de provas construtivas podemos, pelo menos em princípio, tirar algoritmos que verifiquem os elementos e construa provas que estabeleçam a existência de um objeto. Como exemplo de abordagens construtivistas que apresentam a mesma preocupação intuicionista, ainda que com diferentes argumentos e fundamentos, podemos apontar as seguintes formas de construtivismo: Finitismo, Bishop's Constructive Mathematics, Constructive Recursive Mathematics.
Cf. van DALEN, D., TROELSTRA, A. S., 1988, p. 1- 4.

[60] Cf. DUMMETT, M., 2000, p. 6- 8.

> What everyone who has heard of intuitionism knows is that intuitionists want their proofs to be constructive. The notion of a constructive proof is, however, by no means restricted solely to intuitionistic or other forms of 'constructivist' mathematics: the distinction between constructive and non-constructive proofs arises within classical mathematics, and is perfectly intelligible from a completely platonistic standpoint. From such a standpoint, the distinction arises for proofs of existential and disjunctive statements: any proof proves more than just the theorem which is its conclusion, and to call a proof of an existential or disjunctive statement (with without initial universal quantifiers) 'constructive' is to say something quite specific about the additional information which the proof provides (DUMMETT, M., 2000, p. 6)

Podemos tornar claro, as ideias expostas acima, observando que, o operador existencial, ∃, no Intuicionismo possui uma diferença fundamental com relação à lógica clássica[61]. De acordo com o TEX, em matemática clássica, para cada afirmação, supondo P, ou P mantém ou $\neg P$ se mantém. O que permite que os operadores da disjunção e da existência possam ser interpretados sem dizer algo completamente específico sobre a prova. Um enunciado disjuntivo como $P \vee B$, em lógica clássica implica que $\neg(\neg P \wedge \neg B)$, que diz é contraditório que sejam ambos P e B falsos; mas este não poderia ser o caso para o Intuicionismo, pois o enunciado $P \vee B$, significa que ou temos uma demonstração de P ou temos uma demonstração de B, e o enunciado $\neg(\neg P \wedge \neg B)$ implica que a demonstração de $(\neg P \wedge \neg B)$ leva a uma contradição, então $P \vee B$, intuicionisticamente, não poderia implicar que $\neg(\neg P \wedge \neg B)$.

Com relação ao operador existencial, a interpretação realista da existência permite que um enunciado como $\exists x P(x)$ implique que $\neg \forall x \neg P(x)$, pois $\exists x P(x)$ significa que existe um elemento x que possui a propriedade P e o enunciado $\neg \forall x \neg P(x)$, similarmente, significa que não é o caso que para todo x, x não tem a propriedade P. No entanto, do ponto de vista intuicionista, $\neg \forall x \neg P(x)$ não podem implicar $\exists x P(x)$, uma vez que este tipo de interpretação não nos diz nada específico sobre a prova de $\neg \forall x \neg P(x)$, apenas retiramos a conclusão com base na afirmação que alega, em princípio, por meio do TEX, que diante de um enunciado matemático ou o enunciado se mantém, ou a negativa do enunciado se mantém. A crítica desenvolvida pelo Intuicionismo, com relação a uma interpretação não específica dos operadores nas provas construtivas, realizadas no interior da matemática clássica, é que esta teria permitido que o edifício da matemática clássica se construísse com base na linguagem da matemática, e não especificamente, com base na intuição da matemática, o que para Brouwer teria como consequência os paradoxos.

[61] Cf. DUMMETT, M., 2000, p. 4- 5.

> Throughout the ages logic has been applied in mathematics with confidence; people have never hesitated to accept conclusions deduced by means of logic from valid postulates. However, recently paradoxes have been constructed which appear to be mathematical paradoxes and which arouse distrust against the free use of logic in mathematics. Therefore some mathematicians abandon the idea that logic is presupposed in mathematics. (BROUWER, L. E. J., 1908, p. 108).

Mas para Dummett o problema parece ir além, pois segundo sua visão, esta interpretação, que deu bases para a matemática clássica, tem servido como base para o desenvolvimento de outras ciências, como a física, a linguística e, crescentemente, da biologia.

Dummett exemplifica o problema com esta interpretação a partir do exemplo de uma *prova não-construtiva* atribuída a Peter Rogosinski e Roger Hindley.[62] Considere o teorema, "existem números irracionais a e b tais que a^b é racional", sabendo que $\sqrt{2}$ é irracional e 2 é racional temos a hipótese,

(i) $q = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional ou $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional;

Agora suponha que:

(1) $q = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional, fazemos $a = b = \sqrt{2}$ e temos dois números irracionais a e b, tais que a^b é racional, portanto o teorema é verdadeiro;

(2) $q = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional, fazemos $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$, e temos que $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$, sendo 2 racional então temos dois números irracionais a e b, tais que a^b é racional e, portanto, o teorema é verdadeiro;

Note que a prova é não construtiva, porque se baseia na afirmação de que ou ***q* é racional** ou ***q* é irracional**, através de uma instância do TEX, que não é válido em uma prova construtiva, como sabemos. A prova não-construtiva não cria exemplos de números a e b irracionais que confirmem o teorema, mas limita-se a uma série de possibilidades mutuamente exclusivas, mostrando que um deles produz o teorema desejado, mas não mostra qual deles atende ao teorema. Para tornar esta prova construtiva teríamos de determinar se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional ou irracional.

---

[62] Cf. DUMMETT, M., 2000, p. 6.

Dada a necessidade intuicionista de estabelecer provas construtivas para demonstrar a existência de um objeto matemático, podemos pressupor a necessidade intuicionista de um entendimento específico dos operadores lógicos para comunicação e entendimento das construções matemáticas mentais, deixando de lado o entendimento Realista de tais operadores que na visão dos intuicionistas pressupõem a ideia de existência transcendente. A necessidade de estabelecer um novo entendimento dos operadores lógicos no Intuicionismo foi sentida já em 1927 por Heyting, que como sabemos foi aluno de Brouwer e estudioso do Intuicionismo. No ano de 1927, a *Dutch Mathematical Society* (Sociedade Matemática Holandesa) refutou a Teoria dos Conjuntos intuicionista formulada por Brouwer, com o argumento de que as conclusões da teoria não poderiam ser deriváveis em um sistema formal universal.[63] Neste sentido Heyting empenhou-se em

> (i) construct such a system and to indicate its deviations from Brouwer's theories;
> (ii) to investigate whether from the system to be constructed a dual system may be obtained by (formally) interchanging the principium tertii exclusi and the principium contradictionis (TROELSTRA, A. S., 1990, p.4).

O resultado do trabalho de formalização (parcial) da matemática intuicionista de Heyting foi publicado três anos após o início, em 1930. Esta formalização é composta pela lógica proposicional e de predicados intuicionista, aritmética e análise, juntos em um grande sistema. Anterior à formalização de Heyting, em 1925 um jovem matemático russo Andrei N. Kolmogorov empenhou-se na mesma empreitada de Heyting, publicou a primeira formalização parcial da lógica intuicionista, e também fez uma extensa comparação com a lógica clássica formal, em um artigo chamado, *On the principle of the excluded middle*[64], que por motivos misteriosos não se tornou conhecido fora da antiga União Soviética por anos. Contudo, o resultado do trabalho de Kolmogorov (1932)[65] e Heyting (1934), baseados nas ideias de Brouwer (por exemplo, os escritos de 1908, 1924) ficaram conhecidos como Interpretação BHK, que capta o significado dos símbolos lógicos no Intuicionismo, e podemos dizer que no construtivismo, em geral. A interpretação BHK[66] define de forma

---

[63] IEMHOFF, R., Ago/2013.
[64] KOLMOGOROV, A., 1925, p. 414- 437.
[65] No ano de 1932 Kolmogorov apresenta sua teoria denominada 'lógica de problemas' no artigo traduzido para o inglês como, *On the interpretation of Intuitionistic Logic*.
KOLMOGOROV, A., 1932, p. 328-334.
[66] TROELSTRA, A. S., 1991, P. 150- 179.

informal do que uma prova intuicionista deve ser composta, indicando como os conectivos e quantificadores devem ser interpretados, e neste sentido, capta a noção de existência entendida como construções mentais exigidas pelo Intuicionismo.

Os símbolos lógicos no Intuicionismo possuem um caráter epistêmico nos termos da existência de uma demonstração construtiva da seguinte maneira:

(1) não existe uma demonstração de $\perp$.
(2) Uma demonstração de $A \wedge B$ consiste de uma demonstração de A e uma demonstração de B.
(3) Uma demonstração de $A \vee B$ consiste de uma demonstração de A ou de uma demonstração de B.
(4) Uma demonstração de $A \rightarrow B$ é uma construção que transforma qualquer demonstração de A em uma demonstração de B.
(5) $\forall x \mathrm{A}(x)$ (para todo x, A se aplica a x) quando temos uma demonstração que unida à construção de um objeto a qualquer resulta em uma demonstração de $A(a)$, isto é, que A se aplica a a.
(6) $\exists x \mathrm{A}x$ (existe um x tal que A se aplica a x) quando podemos construir a e demonstrar $\mathrm{A}(a)$, i.e. que A se aplica a a.

É preciso relembrar que a negação intuicionista, $\neg A$, corresponde, ou à impossibilidade de prosseguir com a prova, ou que foi demonstrado que temos uma construção que deriva falso de qualquer possível prova de A. Sendo assim, $\neg A$ é equivalente a $A \rightarrow \perp$.

Podemos argumentar criticamente sobre a interpretação BHK, dado que tal interpretação não define completamente a noção de construção. A noção de construção dada pela interpretação BHK permite diferentes concepções de construção.[67] Contudo, mesmo em nível informal, já podemos antecipar que o TEX não poderia ser considerado um princípio válido de julgamento. De acordo com a interpretação BHK, para a afirmação do TEX ser intuicionisticamente válida seria necessário que o sujeito, ou construísse uma prova de A, ou uma prova de que a suposição de uma prova de A leva ao absurdo, $A \rightarrow \perp$. Nos casos em que

[67] A noção intuicionista de construção acaba permitindo diferentes interpretações por tratar-se de uma noção primitiva na interpretação BHK. A noção de construção é a cláusula base, enquanto as cláusulas que explicitamos acima são as indutivas. É preciso ter em mente que o construtivismo possui diferentes abordagens, com diferentes noções de "construção" e o Intuicionismo representa uma versão, como pretendemos ter tornado claro.

não temos uma prova para A, nem uma prova para a sua negação, a declaração ($A \vee \neg A$) não se sustenta, o que é ilustrativo diante de algumas conjecturas conhecidas, por exemplo, Conjectura dos números ímpares perfeitos e a Conjectura de Goldbach.

Nesta seção tivemos como objetivo elucidar a noção de existência do ponto de vista intuicionista. Partimos da ideia de que a existência de um objeto ou enunciado matemático deve estar relacionada ao conhecimento de uma prova construtiva deste objeto ou de um algoritmo de decisão que prove o enunciado. Além disso, mostramos de que maneira são entendidos os conectivos lógicos no Intuicionismo com o objetivo de mostrar como seriam construídas as provas construtivas. Também pretendemos ter tornado claro que a noção de existência atrelada à prova construtiva sustenta a rejeição do TEX como um princípio universal de julgamento na matemática. No Intuicionismo matemático o TEX possibilita a construção de provas indiretas que, em geral, não elucidam o algoritmo de decisão esperado, quando tratamos da existência de um enunciado matemático; mas, muitas vezes, se limitam a mostrar possibilidades excludentes baseadas na ideia de que dado dois enunciados que se opõem contraditoriamente não podem ser ambos falsos, há de se garantir que seja um verdadeiro e o outro falso.

2.3 A noção de infinito e a rejeição do TEX

No decorrer deste trabalho mostramos que o Intuicionismo baseado em sua perspectiva sobre a matemática refuta a concepção que relaciona esta ciência à atividade de descobrir novas verdades e objetos matemáticos a partir de pressupostos realizados no âmbito da linguagem matemática. Haja vista, a crítica intuicionista à lógica, entendendo que a Matemática não poderia ser construída como subordinada à linguagem, "Logic is thus a kind of applied mathematics, and is dependent on mathematics both for its linguistic subject-matter, and for its mode of investigation" (BROUWER, L. E. J., 1928, p. 1172-1173). Desta forma, a matemática intuicionista foi desenvolvida sob o entendimento de que esta ciência seria possível devido à atividade da mente humana de construir objetos e provas para enunciados matemáticos; e evolui, principalmente, com o intuito de eliminar os paradoxos que levantaram dúvidas sobre os fundamentos da matemática na passagem do século XIX para o século XX. Contudo, os intuicionistas não procuraram resolver apenas problemas específicos relacionados à matemática, como por exemplo, os problemas relacionados à Teoria dos Conjuntos, mas concentraram-se na reivindicação por uma reconstrução desta, e neste contexto o TEX foi rejeitado para domínios infinitos por, ainda, não ser confiável, dado sua aplicação ter sido estendida, injustificadamente, de contextos finitos de verificação, onde é possível testar caso a caso, para contextos infinitos em que nem sempre possuímos método de verificação. Note que a rejeição de Brouwer ao TEX se mantém por considerar o princípio injustificado e não confiável em domínios infinitos. No entanto, ele não conseguiu levantar nenhuma contradição resultante do uso deste que fosse capaz de assegurar que o TEX seria a origem dos problemas fundacionais da matemática.

A disputa do Intuicionismo com a matemática clássica, principalmente contra o uso do TEX como princípio válido para julgamentos em domínios infinitos, tem como uma das principais questões os argumentos acerca da noção de infinito. E envolveria a maneira como foi construída a matemática clássica, baseada em uma concepção realista, permitindo o entendimento da noção de infinito como *atual*; e a reinvindicação intuicionista de que este conceito não poderia ser entendido com base em uma realidade mente-independente, devendo ser compreendido como referência a um procedimento em que existem séries de etapas infinitas, ou seja, o infinito entendido como *potencial*.

A afirmação intuicionista propõe que o infinito se dá através de uma operação que nos permitiria mostrar a possibilidade infinita de uma coleção de números. Por exemplo, um intuicionista não afirmaria a existência de uma totalidade de números naturais, mas conceberia uma operação pela qual, sucessivos números naturais seriam construídos até onde se queira. Neste sentido, podemos compreender o tratamento potencial do infinito como a possibilidade de contar números naturais, baseado nas regras de construção destes números.[68]

A proposta intuicionista levanta dúvidas sobre o entendimento da noção de infinito construída pela matemática clássica, e refuta que tal concepção estaria argumentando em favor da utilização, sem restrição, do TEX em domínios infinitos de julgamento. Neste texto daremos uma breve introdução de como a noção de infinito desenvolvida pela matemática clássica, sustentada por uma concepção realista, permitiu o uso do TEX e como o Intuicionismo entende que a concepção clássica levou a problemas no cerne da fundação desta ciência, argumentando a partir daí em favor da concepção de infinito potencial que não nos permitiria aplicar o TEX como princípio de julgamento válido em domínios infinitos.

[68] Lembrando que, os números naturais são aqueles objetos obtidos a partir de 'zero' por aplicar repetidamente a operação *sucessor*, $\boldsymbol{S}$. O Intuicionismo admite apenas duas regras de geração dos números naturais: *(i)0* é um número natural; e *(ii)* se n é um número natural, então é um número natural $\boldsymbol{S}(n)$. São números naturais apenas os objetos gerados por estas duas regras.

2.3.1 A crítica intuicionista a noção de infinito atual e em favor do potencial

Como tentamos elucidar anteriormente, o infinito atual compreende uma coleção de objetos como uma *totalidade* definida e determinada. Com este entendimento, o infinito é entendido como a existência por completo de uma entidade matemática com um número infinito de elementos. Em contrapartida, vimos que o infinito potencial pode ser compreendido como um procedimento que segue uma lei de geração e com série infinita de etapas, o que significaria, que concluída uma etapa, há sempre outra posterior que necessita ser realizada, e como exemplo podemos entender o processo de contar números naturais {1,2,3,4,5...}.

Desejamos neste momento do nosso trabalho, apresentar brevemente como foi desenvolvida a noção de infinito atual na fundação da matemática. Com isso, pretendemos elucidar que a noção de infinito atual foi assimilada pela Teoria dos Conjuntos de Cantor, que deu margem para o descobrimento de paradoxos no interior da matemática. A partir da descoberta dos paradoxos no trabalho de Cantor o Intuicionismo passou a colocar em dúvida as bases da fundação matemática e a traçar novos desenvolvimentos para esta ciência, argumentando fundamentalmente a favor da noção de infinito potencial. Com isso, esperamos finalizar, mostrando que a rejeição intuicionista ao TEX, como princípio de julgamento válido para domínios infinitos, foi amparada pela concepção de infinito potencial.

A distinção entre os conceitos de infinito atual e infinito potencial foi inicialmente idealizada por Aristóteles[69] no desenvolvimento de seus questionamentos acerca do *Paradoxo de Zenão*[70], e se deu como uma tentativa de resolver o problema acerca da compreensão da ideia de espaço, como finito, e de tempo, como infinito. Para ele, o tempo era infinito por adição, isto é, não existindo nem ponto inicial, nem ponto final, qualquer ponto poderia ser reconhecido como 'agora', em resumo, o "infinito existiria potencialmente, porém não atualmente".[71] Estas ideias de Aristóteles ofereceram o plano de fundo para que o filósofo medieval São Tomás de Aquino formulasse, muitos anos depois, a distinção entre infinito potencial e infinito atual.[72]

---

[69]Cf. MOORE, A. W., 1990, p. 36- 39.

[70] Paradoxos de Zenão são exemplos atribuídos a Zenão de Eléia e tratam-se de argumentos utilizados para provar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade, divisibilidade e movimento. Exemplos clássicos dos paradoxos formulados por Zenão são: a corrida entre o herói Aquiles e a tartaruga; e, o paradoxo da flecha. Cf. EVES, H., 2008, p. 417-418.

[71] Cf. MOORE, A. W., 1990, p. 40.

[72]Cf. MOMETTI, A. L., 2007, p.2-3.

A disputa entre a concepção de infinito atual e potencial despertou interesse, tanto no campo da filosofia, quanto no da matemática. E neste contexto o entendimento do infinito como atual foi, por muitas vezes, rejeitado,[73] sobretudo, por causa dos paradoxos[74] que este conceito parecia desencadear. Contudo, no começo do século XIX o matemático Bernard Bolzano (1781-1848) foi um dos primeiros[75] a defender a existência de um infinito atual, em sua obra *Paradoxos do infinito*, publicada postumamente em 1851."Here Bolzano argued in detail that a host of paradoxes surrounding infinity are logically harmless, and mounted a forceful defense of actual infinity" (FERREIRÓS, José, 2012). Nesta obra ele enfatizou também que o conceito de equivalência entre dois conjuntos era aplicável tanto a conjuntos finitos, como infinitos.[76] Porém, as ideias de Bolzano só ganharam evidência no século XIX, quando foram desenvolvidas por Georg Cantor.

Cantor propôs uma teoria dos conjuntos, *Teoria dos conjuntos de Cantor*[77], com o intuito de permitir que matemáticos trabalhassem de forma consistente com conjuntos infinitos. Para ele, o conceito de conjunto poderia ser compreendido, *grosso modo*, como uma coleção definida de objetos, chamados de *elementos* ou *membros* do conjunto. E por objetos entendia números, outros conjuntos, etc.. Podemos considerar a Teoria dos Conjuntos de Cantor um marco importante, não apenas para a matemática de maneira geral, mas também para seu autor, pois foi a partir dela que Cantor chegou ao desenvolvimento dos *números*

---

[73] Na história da matemática e da filosofia muitos fizeram a defesa da noção de infinito potencial, dentre eles: Aristóteles, São Tomás de Aquino, Thomas Hobbes, I. Kant, etc.
Cf. MOORE, A. W., 1990, p. 36- 63.

[74] Podemos citar como exemplo de paradoxo resultante do entendimento do conceito de infinito atual os *Paradoxos de Cantor* e *Russell*. O *paradoxo de Cantor* foi descoberto por Cantor em 1895 e pode ser sintetizado da seguinte forma: considere U o conjunto de todos os conjuntos e $P(U)$ como o conjunto das partes de U. É natural termos como hipótese inicial que U é o conjunto de maior cardinalidade, pois "é o conjunto de todos os conjuntos". Mas se $P(U)$ tem cardinal estritamente maior do que o cardinal de U, como foi provado pelo próprio Cantor, sendo assim, contrariamos a hipótese inicial de que U seja o maior conjunto.
Cf. MOORE, A. W., 1990, p. 54.
Cf. CONIGLIO, M. E., 1997, p. 3-4.

[75] Apesar de fazermos referência a Bolzano como um dos primeiros matemáticos a desenvolver uma teoria em favor do *infinito atual,* ele não foi o único, podemos citar também os filósofos da Idade média Gregório de Nissa e Nicolau de Cusa, o desenvolvimento do cálculo infinitesimal de Gottfried W. Leibniz e Isaac Newton e os matemáticos contemporâneos Georg F. Bernhard Riemann e Richard Dedekind e outros.
Cf. FERREIRÓS, José, Jul/2001.
Cf. MOORE, A. W., 1990, p.65- 69.

[76] Cf. MOORE, A. W., 1990, p. 112-113.

[77] Esta teoria foi desenvolvida por Cantor nas décadas de 1870 e 1880 e foi o primeiro desenvolvimento da teoria dos conjuntos, que sofreu reformulações em seus princípios básicos até o desenvolvimento da teoria axiomática dos conjuntos, ZFC (Teoria dos conjuntos de Zermelo e Fraenkel). A *teoria dos conjuntos de Cantor* é uma teoria semi-axiomática, por não ter sido desenvolvida axiomaticamente, e pretende ser uma compreensão informal dos conjuntos, como coleções de objetos, chamados de elementos ou membros do conjunto. Por outro lado, a *teoria axiomática dos conjuntos* refere-se a fatos sobre conjuntos e seus membros que são demonstráveis a partir de listas definidas de axiomas.
Cf. CONIGLIO, M. E., 1997, p. 3-6.

transfinitos, seu objetivo com este trabalho era dar um tratamento rigoroso à noção de infinito atual. Os números transfinitos são indicados pela letra $\aleph$ (*Aleph*) do alfabeto hebreu e designam a cardinalidade[78] dos conjuntos infinitos.

> Cantor dizia que dois conjuntos tem o mesmo número cardinal se, e somente se, podem ser colocados em correspondência biunívoca. Provou que o conjunto dos inteiros, o dos números naturais, o dos números racionais e o dos números algébricos têm todos o mesmo cardinal infinito $\aleph_0$. Ademais, foi capaz de mostrar que o conjunto dos números reais tem um cardinal maior que $\aleph_0$ e que, efetivamente, há uma infinidade de números cardinais transfinitos, dos quais $\aleph_0$ é o menor.[79] (GUNDLACH, Bernard B., p. 70).

Nesse trabalho, o resultado do desenvolvimento da teoria dos números transfinitos é significativo, pois a partir dele foi possível pensar o infinito como entidade completa e realizar operações entre números transfinitos, entre elas o uso do TEX.

O trabalho de Cantor formulou uma ideia intuitiva da definição de conjuntos como coleções de objetos, porém esta ideia teria possibilitado o surgimento de paradoxos, como Paradoxo de Burali-Forti, de Richard, etc., resultados principalmente do uso indiscriminado das noções de conjunto, número cardinal e ordinal, etc.. Mas apesar destes paradoxos, o mais duro golpe na teoria foi desvelado por Bertrand Russell. Quando Gottlob Frege apresentou um sistema axiomático no qual a versão formalizada da Teoria dos Conjuntos de Cantor poderia ser interpretada, Russell formulou o conhecido *Paradoxo de Russell*[80]. Esta descoberta refletiu nas bases da fundação da matemática e levantou

---

[78] A cardinalidade de um conjunto finito pode ser, em resumo, compreendida como o número de elementos deste conjunto, por exemplo, A={0,1,3,5,7} possui cardinalidade igual a 5, que é denotado por |A|=5; ou ainda a cardinalidade do conjunto $\emptyset$, que também é conjunto finito é igual a $|\emptyset|=0$. Contudo, para conjuntos infinitos esta definição simples e intuitiva de cardinalidade não poderia ser aplicada, isto porque para estabelecer a cardinalidade de um conjunto infinito é necessário estabelecer correspondência biunívoca entre os objetos que serão contados e os números naturais, considere o exemplo, dois conjuntos A e B possuem a mesma cardinalidade, denotado por $A \sim B$, apenas se existir uma correspondência biunívoca entre os elementos de A e os elementos de B. Esta abordagem foi desenvolvida por G. Cantor e levou a crer que existem diferentes tamanhos de infinito e que o conjunto infinito de menor cardinalidade é o conjunto dos números naturais.
Cf. GOMIDE, Anamaria, 2010, p.147-151.

[79] GUNDLACH, Bernard H., 1994.

[80] O paradoxo de Russell mostra que podemos derivar uma contradição do sistema axiomático apresentado por Frege. Considere-se o conjunto M como sendo "o conjunto de todos os conjuntos que não contêm a si próprios como membros". Formalmente, A é elemento de M se e apenas se A não é elemento de A, ou seja, $M = \{A | A \notin A\}$. De acordo com o sistema de Cantor, M é um conjunto bem definido. Se assim temos que: (*i*) M contém a si mesmo? Se sim, não é membro de M de acordo com a definição; (*ii*) por outro lado, supondo que M não contém a si mesmo, então tem de ser membro de M, de acordo com a definição de M. Assim, as afirmações "M é membro de M" e "M não é membro de M" conduzem a contradições.
Cf. EVES, H., 2008, p. 673-677.

desconfianças com relação à matemática e à lógica clássica. Neste contexto, o Intuicionismo passou a conceber que a visão matemática sustentada pela suposição de que existiria uma realidade matemática independe de nós e do nosso mundo concreto ao redor seria insuficiente para dar conta dos novos problemas levantados por esta ciência. Desta forma, noções matemáticas, como a noção de totalidade infinita, ou seja, de infinito atual, foram colocadas em dúvida, por serem definidas a partir de um ponto de vista baseado, justamente, nesta crença em uma realidade independente da mente.

A aceitação de uma realidade independente do nosso conhecimento, para o intuicionista, nos permitiria afirmar e aceitar o TEX, não apenas como meio de verificação em conjuntos finitos, mas também no tratamento de enunciados matemáticos em domínios infinitos. A razão para o uso injustificado do TEX em domínios infinitos seria sustentada pela concepção de uma totalidade infinita determinada, condizente com a noção de *infinito atual.* O entendimento do infinito como atual nos permitiria aceitar o TEX e nos possibilitaria inclusive, por exemplo, entender que uma coleção de números infinitos poderia receber o mesmo tratamento que qualquer outra declaração do mundo concreto, por exemplo, uma declaração do tipo: ‘hoje está chovendo’. Sendo assim, quaisquer afirmações a respeito de uma coleção de números seriam, determinadamente, ou verdadeira ou falsa, e isso independentemente de nós conhecermos uma demonstração direta que confirme quais casos se manteriam.

> Benacerraf and Putnam go on to suggest that the realism of most mathematicians regarding number theory might be explained by the fact that we can imagine procedures for determining the truth or falsity of any first-order statement of number theory, if we are willing to consider procedures that involve performing infinitely many operations. For example, we could determine the truth value of Goldbach's conjecture by simply checking the (infinitely many) cases of the conjecture, one by one. Of course, it is impossible for us to actually carry out such a procedure. But most mathematicians would say that it would be a mistake to take the inability of human beings to perform infinite computations as implying that statements about the outcomes of such computations are not meaningful. As Bertrand Russell said, performing infinitely many computational steps is not logically impossible, but only "medically impossible” (VELLEMAN, D. J., Jan/1993, vol. 102, p. 61-62).

Sabemos que o Intuicionismo rejeita o argumento de que podemos conferir verdade ou falsidade a um enunciado que envolva procedimentos infinitos apenas por verificar, um-a-um, muitos casos do dado enunciado. Pois o Intuicionismo rejeita o TEX como um princípio de julgamento válido em enunciados infinitos. Além disso, no

Intuicionismo conferir verdade ou falsidade a procedimentos infinitos para os quais ainda não possuímos uma prova iria contra a intuição matemática, e a favor da aceitação de uma realidade determinada e independente da nossa atividade mental, que possibilita o tratamento atual do infinito.

> Intuitionists hold that it is unavoidable once one insists, as they do, that infinite collections cannot be actual. For intuitionists, who believe that mathematical reality is not fully fixed and independent of us but instead remains to be determined through our mathematical activity, the only kinds of collections that can intelligibly be spoken of as actual are ones whose construction it would make sense to imagine ourselves completing, if only in principle. Any given finite process is one we can in principle complete, and so any finite collection can intelligibly be treated as actual. By contrast, we cannot, even in principle, complete an infinite process: for a process to be infinite just is for it never to come to an end, for it to make no sense imagining its completion. (GEORGE, A., VELLEMAN, D. J., 2002, p. 96-97).

No Intuicionismo a construção dos objetos é finalizada a partir da possibilidade de distinguirmos na demonstração de um enunciado matemático entre o processo de geração e a conclusão[81], identificando uma regra de geração para a definição de um algoritmo de decisão capaz de demonstrar o enunciado, infinito potencial. Por outro lado, na matemática clássica, e na Teoria dos conjuntos, o infinito compreenderia estruturas infinitas como completas, assumindo sua totalidade, como se fosse possível apresentar um processo infinito completo, o infinito com um objeto. Um exemplo deste tipo de tratamento seria, segundo os Intuicionistas, o uso dos quantificadores em alguns enunciados que percorrem totalidades infinitas, e que podem ser avaliados como verdadeiros ou falsos, mas que não apresentam um método de verificação.[82] O argumento Intuicionista contra esta visão é que a declaração de valores de verdade para quantificadores subentenderia que podemos considerar processos infinitos como

[81] Nesta dissertação já nos referimos à forma como o Intuicionismo compreende o processo de construção de objetos matemáticos, afirmando que, a medida que, conhecemos o segmento inicial de uma dada sequência de números devemos ser capazes de através da intuição identificar um algoritmo de decisão que resulte na verdade ou falsidade do objeto verificado. Ou seja, a prova de um enunciado matemático compreende a necessidade de saber identificar uma regra de geração em uma sequência de números e a sua conclusão, ou seja, um algoritmo de decisão.

[82] Os intuicionistas não rejeitam o uso dos quantificadores, haja vista a formalização intuicionista apresentar uma interpretação para estes. A crítica intuicionista é realizada com relação ao julgamento de totalidades infinitas para as quais não possuímos um método de verificação. Um exemplo seria a quantificação sobre o conjunto de números ímpares que são perfeitos, como não possuímos um método de verificação para tal, não podemos afirmar que “o conjunto de números ímpares não possui números perfeitos”. Por outro lado, temos o exemplo do conjunto infinito de números pares, para o qual temos um algoritmo de decisão, e podemos afirmar “o conjunto de números pares possui números perfeitos”.

possíveis de serem finalizados, porém nem sempre este pode ser o caso quando não temos um método de verificação e reconhecemos que o infinito é um processo de geração sem fim.

Assim, contrária aos fundamentos da matemática clássica, a intuicionista é a favor de uma posição antirrealista, que pretende reformular as bases fundacionais desta ciência, entendendo que a realidade matemática é determinada pela nossa atividade matemática capaz de construir objetos matemáticos e, assim,

> Consequently, a totality cannot sensibly be viewed as actually infinite. Its infinitude is always potential: it consists really of a principle which, given any collection (and of course, the only collections one can actually be given are finite ones), will generate an element of the totality not contained in that collection. (GEORGE, A., VELLEMAN, D. J., 2002, p. 97).

Para os intuicionistas os objetos matemáticos são construções mentais, o que significa que a existência de objetos matemáticos depende de uma construção mental que os demonstre. Os objetos matemáticos são concebidos como a possibilidade de certas operações mentais. Compreendendo objetos matemáticos desta maneira, não poderíamos aceitar a possibilidade de determinar valor de verdade para enunciados que envolvem quantificação sobre *totalidades matemáticas infinitas*. Admitir que o infinito tratar-se-ia de um processo para gerar uma sequência infinita de construções mentais implicaria a garantia de podermos operar apenas em termos, ou de uma operação sobre o próprio processo, ou de uma operação sobre um segmento inicial da sequência infinita, ou de uma combinação de ambos os processos. Nestes termos, podemos observar que a matemática clássica aceita a aplicação de uma operação sobre uma *totalidade infinita abstrata que depende de todos os elementos da totalidade*, como no caso da determinação dos valores de verdade para quantificadores. Mas este não pode ser o caso no Intuicionismo, uma vez que esta determinação não diz nada com relação à maneira como os objetos matemáticos são gerados.

A concepção da matemática clássica com relação ao infinito contradiz, segundo o Intuicionismo, a compreensão mais natural de infinito como possibilidade de construções mentais de certo tipo, haja vista o tratamento dado aos quantificadores. A matemática intuicionista, de maneira geral, compreende que os enunciados da nossa linguagem matemática significam por referência a operações que nós podemos, em princípio, realizar; enquanto os matemáticos clássicos acreditam que podemos dar significado através de referências a operações que não podemos obter em uma demonstração direta.

Assim, se por um lado a matemática clássica compreende os objetos e entidades matemáticas como abstratos, como parte de uma realidade objetiva e determinada; por outro, a matemática intuicionista compreende os objetos e entidades matemáticas como construções mentais. A compreensão clássica dos objetos e entidades matemáticas gira em torno da aceitação da existência de uma totalidade completa, o infinito atual. Em contrapartida, o Intuicionismo não vai aceitar a existência de uma totalidade infinita completa, afirmando que o infinito é apenas a possibilidade inscrita na regra, identificada em um dado segmento inicial de números e que nos permite continuar indefinidamente a aplicá-la, a regra não nos impede de continuar. Mas o infinito não tem fim, não está determinado, portanto a aplicação do TEX não teria alcance diante da impossibilidade de determinarmos valor de verdade ou falsidade de um enunciado relativo a uma totalidade, em que o processo de aplicação da regra que o geraria não poderia ter fim.

Pretendemos ter esclarecido que a concepção de infinito como potencial não permitiria a aceitação intuicionista do TEX como princípio de julgamento válido para domínios infinitos. Pois a noção de infinito potencial não nos permitiria parar um processo de geração, a menos que sejamos impedidos por incapacidade física, vontade, ou por sermos seres finitos, de forma que, não poderíamos ter garantias de que o TEX possa determinar valores de verdade ou falsidade a *todo* o processo. No entanto, é preciso termos em mente que diante de domínios finitos de julgamento ou após a identificação de um algoritmo que permita concluir a operação, podemos aplicar o TEX e determinar se dado enunciado se mantém ou se sua negação se mantém.

Neste primeiro capítulo tivemos a intenção de apresentar ideias básicas do Intuicionismo matemático argumentando que as noções de verdade, existência e infinito sustentam a rejeição do TEX. O Intuicionismo matemático construiu uma crítica à matemática clássica, em especial, ao uso da lógica como independente da atividade matemática, acreditando que o uso da lógica e a concepção realista da matemática clássica teriam possibilitado os paradoxos com relação aos fundamentos desta ciência e que, além disso, teriam levado a crença indubitável no TEX como princípio lógico de julgamento de enunciados matemáticos em domínios finitos e infinitos. Assim o construtivismo intuicionista estabelece os conceitos que dão base à matemática, as noções de verdade, existência e infinito. E estas são desenvolvidas sustentando a rejeição ao Princípio do Terceiro Excluído para julgamento de enunciados matemáticos em domínios infinitos.

3. AS TRADUÇÕES DE DUPLA NEGAÇÃOE O TERCEIRO EXCLUÍDO

Traduzir uma parte
Na outra parte
_ que é uma questão
*de vida ou morte_*
será arte?
Ferreira Gullar

No capítulo anterior deste trabalho, vimos que o Intuicionismo desenvolveu noções matemáticas como as de verdade, infinito e existência com vistas a argumentar pela não confiabilidade no TEX como princípio válido de julgamento em domínios infinitos. Com isto, o Intuicionismo desejava reconstruir a matemática sobre bases intuitivas, e sua fundação está inserida em um período de estudos matemáticos e lógicos do século XIX e XX que evidenciava o desejo de encontrar soluções alternativas para esta ciência, objetivando permitir novos desenvolvimentos e solucionar problemas relacionados a teorias matemáticas, como os paradoxos na Teoria dos conjuntos. Dentre as correntes matemáticas que procuravam encontrar soluções para os problemas fundacionais desta ciência está o Formalismo.

O Formalismo, do matemático alemão David Hilbert[83], foi inspirado pelo sentimento de fundar a matemática em um sistema axiomático[84], e tal objetivo foi decorrente, em grande medida, do sucesso dos sistemas de axiomatização da aritmética e da geometria.[85] Assim, Hilbert acreditava que o fundamental para um sistema formal, como por exemplo, a *aritmética* ou a *Teoria dos Conjuntos*, seria a demonstração de sua *consistência*[86], e

[83] David Hilbert e Brouwer, a partir de 1907, começam uma discussão acerca dos fundamentos da matemática e, em especial, a respeito do TEX. Mas além da conhecida disputa entre os matemáticos Hilbert e Brouwer com relação ao TEX, reconhecido pelos intuicionistas como um princípio equivalente a tese de Hilbert de que todos os problemas matemáticos teriam uma solução construída a partir de um número finito de etapas, como já assinalamos no capítulo inicial deste trabalho; estes matemáticos também discordaram acerca das noções intuicionistas, como por exemplo, a noção de verdade. Para Hilbert a rejeição do TEX, proposta pelos intuicionistas, levaria ao fim da matemática.
Cf. POSY, Carl, 1998, vol. 11, p. 291-325.
Cf. BROUWER, L. E. J., 1927, p.490- 492.
[84] A ideia de construir um sistema fundacional axiomático para a matemática obteve tentativas de G. Frege, G. Peano, posteriormente, de D. Russell e outros.
Cf. SILVA, Jairo J. da, 2007, p. 125- 136.
[85] Podemos citar como exemplos de sucesso na axiomatização da aritmética e geometria os resultados da Álgebra Booleana, o Contínuo Real de G. Cantor e Richard Dedekind e o sistema axiomático para os Números Naturais de Giuseppe Peano.
Cf. BURRIS, Stanley, May/2009.
RECK, Erich, Sep/2011.
[86] Em lógica chamamos de teoria consistente aquela que não produz uma contradição. Uma teoria é consistente se, e apenas se, não exista fórmula A tal que A e sua negação sejam demonstráveis a partir dos axiomas da teoria, usando método dedutivo.

desenvolveu seu programa conhecido como *Programa de Hilbert*[87] com este propósito, ou seja, demonstrar a consistência da Aritmética por meio de métodos finitários.

O Programa de Hilbert pretendia provar, em suma, que uma fórmula lógico-matemática não poderia ser contraditória, se obtida a partir de um conjunto conveniente de regras para a obtenção de fórmulas aceitáveis, usando símbolos. Neste sistema uma fórmula é contraditória se for do tipo "*A* e não-*A*", onde *A* é alguma fórmula do sistema. Quando podemos mostrar a impossibilidade de extrair uma fórmula contraditória do sistema, chegamos à consistência do sistema.[88] Apesar do projeto de Hilbert ter sido parcialmente frustrado pela descoberta de Kurt Gödel, em 1931, do *Segundo Teorema da Incompletude* que afirmava, em síntese, que um sistema axiomático consistente não poderia provar sua própria consistência, as ideias de Hilbert não foram completamente frustradas, pois a partir destas começaram a ser desenvolvidas as primeiras *traduções*. Podemos entender o termo traduções como "uma ferramenta de trabalho que nos propicia uma forma alternativa e sugestiva para a análise dos sistemas lógicos e de suas inter-relações." (FEITOSA, Hércules de A., 1997, p. 2).

Impulsionado por este contexto, criou-se a confiança de que alguns dos problemas matemáticos de natureza fundacional, como o da consistência da aritmética, pudessem ser resolvidos no âmbito do construtivismo intuicionista. A hipótese de interpretar sistemas lógicos clássicos em sistemas lógicos intuicionistas permitiria a relativização de tais problemas, ou seja, permitiria resolver parcialmente o problema no âmbito de outro sistema, no caso o sistema intuicionista. "A proposed way out of the difficult is to base the as if method on an appropriate formal system, and use the Brouwer method to prove that the formal system is without contradiction." (SZABO, M. E., 1969, p.19) Motivados por esta possibilidade, matemáticos como, Andrei Kolmogorov, Gerhard Gentzen e Kurt Gödel, desenvolveram teorias para interpretar sistemas lógicos clássicos em sistemas lógicos intuicionistas.[89]

---

[87]O Programa de Hilbert foi proposto em 1921 e tinha como principal objetivo reformular as bases da matemática de forma rigorosa, começando pelo campo da aritmética. Há várias diferenças entre a proposta de Hilbert e o Intuicionismo dentre elas uma fundamental, o fato de que o primeiro pretendia reformular a matemática a fim de libertá-la dos paradoxos em seus fundamentos, seguindo um raciocínio clássico; o segundo pretendia uma reconstrução das bases matemáticas partindo de pressupostos construtivistas e da intuição básica da matemática. Para Hilbert, toda a matemática poderia ser reduzida a um número finito de axiomas consistentes, em que, qualquer proposição da matemática poderia ser provada dentro desse sistema, e o sistema poderia ser considerado completo.

[88] Cf. EVES, H., 2008, p. 682-684.

[89]da PAZ, Maria N. de M., 2002, p. 18.

> O método de interpretar um sistema lógico em outro, frequentemente, um sistema clássico num sistema intuicionista, teve como motivação a demonstração da consistência relativa do primeiro sistema com relação ao segundo. Contudo, este método tem tido suas aplicações estendidas e tem propiciado a obtenção de interessantes resultados lógico-matemáticos. (FEITOSA, Hércules de A., 1997, p. 7)

Um dos primeiros resultados que envolveriam um método de estudo de inter-relações entre sistemas lógicos por análise de tradução foi apresentado por Andrei Kolmogorov, em 1925, no texto *On the principle of excluded middle*[90], esta axiomatização conhecida como *Lógica Geral do Julgamento* seria, segundo o matemático, uma formalização das ideias de Brouwer e antecedeu o trabalho de formalização da lógica intuicionista de Heyting[91], apresentado em 1930. Kolmogorov tinha a intenção de provar que a matemática clássica poderia ser reinterpretada sob um prisma brouweriano, o que legitimaria tal matemática intuicionisticamente. E, sobretudo, provar que o TEX, usado na matemática clássica e considerado ilegítimo por Brouwer, não teria como consequência uma contradição.

> Can we in a similar way, after we have placed some restrictions on their real interpretation, again give a meaning to all those formulas of mathematics that are proved by an illegitimate use (that is, a use outside the domain in which they are applicable) of formulas of the special logic of judgments, in particular by use of the principle of excluded middle? (KOLMOGOROV, 1925, p. 427.)

Para responder a esta última questão Kolmogorov formulou, inicialmente, um lema apresentando uma prova de que para toda negação temos uma tripla negação, e a partir deste resultado, que mostraremos na próxima seção, ele interpretou a matemática clássica através de

---

[90] Em 1925, aos 22 anos, Andrei Kolmogorov publicou a primeira formalização parcial da lógica intuicionista e, neste artigo, também fez uma extensa comparação com a lógica clássica. Algumas evidências indicam que Kolmogorov teve contato com o Intuicionismo através de Alexandrov ou Urysohn, que eram amigos íntimos de Brouwer, estas evidências indicam, inclusive, que o jovem matemático russo entrou em contato com textos que só haviam sido publicados em holandês pela *Dutch Royal Academy of* Sciences (Real Academia Holandesa de Ciências).
Cf: van ATTEN, Mark, April/2009.
A tradução em inglês do artigo de Kolmogorov pode ser encontrada em:
Cf. HEIJENOORT, J. (Ed.), 1967, p. 414-437.

[91] O trabalho de Kolmogorov ficou desconhecido por anos fora do território da União soviética e não podemos afirmar se Heyting tinha conhecimento deste artigo. Feitosa afirma sobre o texto de Kolmogorov,
"É provável que devido ao fato de ter sido publicado em russo, apesar da sua elegância e coerência de apresentação, não tenha influenciado, num primeiro momento, novos resultados sobre interpretações entre lógicas, nem tenha sido devidamente valorizado quanto ao mérito de ter abordado e analisado problemas de fundamental importância para o desenvolvimento da lógica no século XX." (FEITOSA, Hércules de A., 1997, p.7).
Cf: van ATTEN, Mark, April/2009.

uma função ***K*** e entendeu a imagem desta função como *pseudomatemática*, demonstrando que toda fórmula que é provada na matemática clássica tem a sua correspondente também provada na *pseudomatemática*.

O resultado do trabalho de Kolmogorov levantou pontos interessantes para as traduções posteriores desenvolvidas por K. Gödel e G. Gentzen, também conhecidas como traduções de *Duplas negações*.[92] Neste trabalho pretendemos apresentar as traduções desenvolvidas por Gödel no artigo, *On intuitionistic arithmetic and number theory*[93], e por Gentzen, no texto *On the relation between Intuitionistic and classical*[94]. As traduções destes dois autores apresentam semelhanças com o trabalho de Kolmogorov, a saber, que toda proposição da aritmética que classicamente provável possuiu uma tradução que é intuicionisticamente provável; além disso, mostram que se a aritmética intuicionista for consistente a aritmética clássica também será. Sobre este resultado Gentzen afirma,

> Intuitionist arithmetic differs from classical arithmetic, purely externally, by accepting only part of classical predicate logic as admissible. Intuitionist predicate logic may be extended to classical predicate logic by including, for example, the law of the excluded middle (*U* is true or *U* is false) or, alternatively, the law of double negation (if *U* is not false, then *U* is true). (GENTZEN, G., 1935, p.53)

O trabalho desenvolvido por Kolmogorov em *On the principle of excluded middle* contribuiu também na axiomatização da lógica intuicionista formulada por Arend Heyting.[95] Embora o trabalho final do matemático russo seja relativo ao cálculo proposicional e menos preciso com relação ao cálculo de predicados, em 1925, Kolmogorov já havia desenvolvido a primeira interpretação da aritmética clássica na aritmética intuicionista, e alguns de seus resultados são incorporados pelo trabalho de Heyting. Devemos ressaltar, contudo, uma diferença, a axiomatização de Heyting não rejeita o *Ex Falso*[96], como rejeitou o primeiro; e, além disso, que o trabalho de Heyting apresenta uma axiomatização da aritmética intuicionista

---

[92] Cf. FEITOSA, Hércules A., 1997, p. 11- 22.
Cf. da Paz, Maria N. de M., 2001, p. 22- 27.

[93] Cf. FEFEFERMAN, Solomon (Ed.), 1986, Vol. I, p. 282- 296.
O título original do texto de Gödel é *Zur intuitionistichen Arithmetik und Zahlen theorie* (GÖDEL, K., 1933).

[94] GENTZEN, G., 1935, p. 52-67.

[95] A axiomatização de Heyting pode ser encontrada em:
HEYTING, A., 1956, p. 97- 114.

[96] *Ex Falso* ou *Princípio da Explosão* é uma lei da lógica clássica, permitida no Intuicionismo, que afirma que "qualquer coisa pode ser derivada de uma contradição", em outras palavras, expressa que, uma vez que uma contradição foi afirmada, qualquer proposição pode ser deduzida dela. Em símbolos, $A \wedge \neg A \vdash B$, para quaisquer A e B.

equivalente à aritmética de Peano (matemática e lógica clássica), porém usando a lógica intuicionista e sem fazer uso do TEX, como elucidaremos no decorrer deste trabalho.

Pretendemos neste capítulo mostrar a tradução de Kolmogorov e sua influência para o desenvolvimento da tradução de Duplas Negações de Gödel e Gentzen, bem como apresentar brevemente as traduções destes autores. Veremos um resultado interessante no que concerne o domínio da aritmética, a saber, a aritmética clássica é consistente se, e somente se, a aritmética intuicionista o for. Por fim, apresentaremos uma prova de que a aritmética de Heyting e a de Peano são equiconsistentes. Nosso principal objetivo é mostrar que a rejeição do TEX pelos intuicionistas não parece ter levado a solução de problemas fundacionais da matemática, pelo menos no que diz respeito à aritmética, uma vez que seu uso não teria levado a contradições. E, por fim, tornar claro que a aritmética de Heyting, apesar de não usar o TEX, compartilha com aritmética clássica a mesma linguagem de primeira ordem, os mesmos axiomas não-lógicos, assim como, conectivos, quantificadores, parêntesis e variáveis individuais. Se acrescentarmos à aritmética de Heyting o TEX teríamos a aritmética de Peano.

3.1 As traduções de Duplas negações

Nesta seção pretendemos apresentar as *traduções* desenvolvidas de maneiras distintas e independentes por Kolmogorov (1925), Gödel (1933) e Gentzen (1935). Pretendemos mostrar que o resultado de Kolmogorov que demonstra a validade da eliminação de DN em sistemas intuicionistas inspirou as demais traduções, assim como, temos a intenção de obter um sistema para tradução, inspirado no sistema destes três autores, que nos permita mostrar que a Aritmética intuicionista é consistente se, e somente se, então a aritmética clássica também é consistente. Portanto, o TEX não caracterizaria um problema da aritmética clássica, como Brouwer parecia pressupor.

3.1.1 A tradução de Kolmogorov

Brouwer argumentou que o uso do TEX na matemática seria ilegítimo para julgamentos em domínios infinitos. Inicialmente ele tentou mostrar esta ilegitimidade através dos contra-exemplos fracos e posteriormente com contra-exemplos fortes formulados a partir da noção de sujeito criador.[97] Além disso, trabalhou na fundamentação de noções construtivas que argumentaram a favor da rejeição do TEX, como pretendemos ter elucidado, e na reconstrução de partes da matemática sem o uso do mesmo princípio, como o *Continuum*[98], a aritmética dos inteiros[99], etc. Contudo, apesar de seus esforços, Brouwer se deparou com enunciados matemáticos que não podem ser provados sem o TEX.[100] Tal impossibilidade de provar alguns enunciados matemáticos sem o uso do TEX, para Brouwer não nos permitiria retirar as dúvidas com relação ao uso deste princípio, mas este fato acabou instigando o jovem matemático Kolmogorov, que viu nesta questão uma oportunidade para tentar explicar porque o uso do TEX não teria levado a contradições na matemática clássica.

O contexto da publicação do artigo de Kolmogorov reflete a disputa de Hilbert e Brouwer com relação ao TEX.[101] Ele pressupõe que a questão da legitimidade do uso do TEX para julgamentos matemáticos poderia ser aliviada, a partir da compreensão de que as concepções intuicionista e formalista da matemática, que se manifestam em opiniões diferentes nos julgamentos dos enunciados, entre verdadeiros ou falsos, e na derivação de novos enunciados matemáticos, fossem compreendidas. Para tanto, ele apresentou o sistema

---

[97] O sujeito criador (*Creating Subject*) é um matemático idealizado por Brouwer capaz de construir objetos matemáticos e demonstrações para enunciados matemáticos a partir de dados obtidos da intuição matemática. O processo de construção de objetos ou de demonstração de enunciados se dá em consonância com a intuição do tempo, que de acordo com o fundador do Intuicionismo, seria fundamental para a atividade matemática.

"This idealized mathematician, also called creating subject by Brouwer, is involved in the construction of mathematical objects, and in the construction of proofs of statements. This process takes place in time. So at each moment he may create new elements, and at the same time he observes the basic facts that hold for his universe so far. In passing from one moment in time to the next, he is free how to continue his activity, so the picture of his possible activity looks like a partially ordered set (even like a tree). At each moment there is a number of possible next stages." (van DALLEN, D., 2001, p. 232).

Cf. BROUWER, L. E. J., 1948b, p. 478- 479.

[98]Cf. BROUWER, L. E. J., 1907, p. 17- 29.

BROUWER, L. E. J., 1928, vol. II, p. 1186-1197.

[99]Cf. BROUWER, L. E. J., 1907, p.15- 17.

[100] Um exemplo de um enunciado matemático que não pode ser provado sem a ajuda do TEX é dado pelo *Teorema de Cantor-Bendixson*, que afirma que na reta real todo conjunto fechado é a união disjunta de um conjunto perfeito e um conjunto enumerável. Outros exemplos são dados por Kolmogorov em:

Cf. KOLMOGOROV, A., 1925, p.436- 437, §5 e §6.

[101] O contexto histórico da publicação da obra de Kolmogorov é resultado da repercussão do debate entre David Hilbert e Brouwer. No ano de 1923, David Hilbert publicou um artigo, *Die logischen grundlagenkrise der mathematik*, que tenta justificar o uso de quantificadores existenciais e universais para o domínio infinito, em particular, tenta justificar que o principio $(\neg\forall xA)\rightarrow\exists x\neg A$, derivado do TEX, poderia ser usado para justificar a existência de $\exists x\neg A$, a partir da impossibilidade da não-existência, $\neg\forall xA$. Este resultado foi denominado por Hilbert *Argumento Transfinito* (terminologia também utilizada por Kolmogorov no artigo de 1925). O trabalho de Hilbert foi refutado por Brouwer, e também pelo aluno de Hilbert, Hermman Weyl, com a alegação de que não seria possível tratar o 'quantificador universal' aplicando, em domínio infinito, a mesma semântica usada em domínio finito; ou seja, não seria legítimo extrapolar para somas infinitas os teoremas que são válidos para somas finitas. Podemos observar que, a afirmação de Brouwer contra o *Argumento Transfinito*, seria a mesma usada pelo intuicionista para a rejeição do TEX, pois o argumento é uma instância do TEX que, segundo ele, não poderia ser legítimo, já que sua validade teria sido aceita a partir de seu uso no âmbito de domínios finitos de verificação.

Cf: COQUAND, Thierry, 2004, p. 19- 21.

de Cálculo proposicional de Hilbert[102], mostrando quais destes axiomas não poderiam ser expressos no Intuicionismo. Com isso, pretendia conseguir mostrar que toda conclusão finita obtida por meio de um uso transfinito do TEX seria correta e poderia ser provada mesmo sem o seu uso. O sistema de Hilbert tal como apresentado por Kolmogorov seria composto por quatro axiomas da implicação e dois axiomas para a negação, mais as regras de Substituição e *Modus Ponens* (MP).

1. $A\rightarrow(B\rightarrow A)$;
2. $\{A\rightarrow(A\rightarrow B)\}\rightarrow(A\rightarrow B)$;
3. $\{A\rightarrow(B\rightarrow C)\}\rightarrow\{B\rightarrow(A\rightarrow C)\}$;
4. $(B\rightarrow C)\rightarrow\{(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)\}$
5. $A\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$
6. $(A\rightarrow B)\rightarrow\{(\neg A\rightarrow B)\rightarrow A\}$

A partir disso, Kolmogorov analisa, seguindo um ponto de vista intuicionista, estes seis axiomas, na tentativa de formular a partir deles um sistema axiomático, denominado **B**, que seja capaz de captar a intuição matemática e o significado dos conectivos lógicos para o Intuicionismo.

Kolmogorov aceita todos os axiomas da implicação de Hilbert, até mesmo o primeiro axioma da implicação que ascendeu com a lógica simbólica, argumentando que este seguiria com obviedade intuitiva a partir de uma correta interpretação da ideia de implicação lógica. No Intuicionismo, a fórmula $A\rightarrow(B\rightarrow A)$ indica que dada uma demonstração de A, é possível construir uma demonstração, que transforme essa demonstração de A, em uma demonstração de $(B\rightarrow A)$. O problema com o sistema axiomático de Hilbert estaria na interpretação dos axiomas da negação.

No Intuicionismo a negação é definida como *absurdo*, expressando a impossibilidade de considerar o enunciado verdadeiro, por exemplo, $\neg A$ indica que A leva a uma contradição.[103]Sob estas condições Kolmogorov analisa que o **axioma 5,** assim como o

[102] O Sistema de 6 axiomas Hilbert é referente ao artigo de 1923, *Die logischen grundlagenkrise der mathematik*, que tem sua tradução para o inglês em:
Cf. EWALD, W., 1996, vol. II, p. 1134- 1148.

[103] Kolmogorov comenta em seu texto, que a interpretação da negação entendida como absurdo teria sido estendida pela lógica clássica para uma segunda interpretação, que expressa a negação através da redução a uma contradição, por exemplo, assumimos que A é verdadeiro e derivamos uma contradição, então temos que $\neg A$ é verdadeiro. Ele afirma também que alguns enunciados matemáticos não poderiam ser demonstrados sem a ajuda da segunda interpretação da negação.

"In so far as the negation of a judgment is the product of direct examination, the second interpretation, which takes its point of departure in the idea of the impossibility of the synthesis that creates the judgment, is actually closer to the substance of the matter than the first, which rests upon the purely formal idea of interdiction. But, when a negation is obtained as the result of a derivation, the reduction of the first interpretation

axioma 1 da implicação, só apareceu com a ascensão da lógica simbólica, contudo, este não poderia ter qualquer fundamento intuitivo, pois afirma algo sobre a consequência de algo impossível, temos que aceitar *B* se o julgamento verdadeiro de *A* é considerado falso.

O *Ex falso* foi objeto de algumas discussões no Intuicionismo, neste artigo de 1925 o princípio foi rejeitado por Kolmogorov[104], mas em seu trabalho de 1932[105] acabou sendo aceito; também foi estudado e aceito por Heyting em seu trabalho de 1930[106]; e defendido por Brouwer em 1948b.[107]A aceitação de Brouwer pode ser compreendida de uma maneira bastante natural, no Intuicionismo é comum introduzirmos uma proposição especial para o absurdo, '$\perp$ ', que nos permite denominar um enunciado negativo '$\neg A$' como '$A \rightarrow \perp$'; com a rejeição do *Ex falso* poderíamos ser levados a acreditar que no Intuicionismo não existem enunciados negativos, e assim deixaríamos de ter uma condição especial para a negação. Tendo em vista esta condição, o primeiro axioma da negação poderia ter sido aceito por Kolmogorov, pois ganharia o caráter intuitivo desejado, uma vez que uma formalização elegante do **axioma 5** de Hilbert seria $\perp \rightarrow$A, estando de acordo com a condição especial da negação.[108]

Kolmogorov também rejeita o segundo axioma da negação. O **axioma 6,** de Hilbert, expressa o TEX na forma em que é usado em derivações. O TEX afirma que '*ou A é verdadeiro ou ¬A é verdadeiro'* e o axioma apresenta uma instancia deste enunciado ao afirmar que, '*se B segue de A e de ¬A, então B é verdadeiro*'.

Eliminados os axiomas da negação, Kolmogorov oferece um axioma denominado *Princípio da Contradição*,

$$(A \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A\}$$

---

to the second is no longer necessary and, in the case of mathematical judgments, is sometimes even impossible. In fact, many negative judgments in mathematics are proved by means of a reduction to a contradiction, according to the schema $\delta \rightarrow \lambda$, $\neg \lambda \mid\neg \delta$ and cannot be proved in any other way."(KOLMOGOROV, A., 1925, p.420).

Com isso, ele parece indicar que a matemática intuicionista poderia seguir um raciocínio clássico através da reformulação de alguns enunciados matemáticos, o que se torna claro quando ele propõe um cálculo proposicional para o Intuicionismo a partir dos axiomas propostos por Hilbert.

Cf. COQUAND, Thierry, 2004, p. 23- 24.

[104] A rejeição de Kolmogorov ao *Ex False* poderia nos levar também a levantar uma incoerência em seu trabalho. Ao rejeitar este princípio em sua generalidade, ele deixa de assumir uma de suas particularidades que pode ser exemplificada no seguinte enunciado: "*Se 3,15 é o seguimento inicial de π, então 3,1 é seguimento inicial de π*", e que pode ser compreendida de maneira muito intuitiva.

Cf. FERREIRÓS, José, Jul/2001.

[105] KOLMOGOROV, A., 1932, p. 328- 334.

[106] HEYTING, A., 1930, p. 311- 327.

[107] BROUWER, L. E. J., 1948B, p. 478- 479.

Cf. van DALLEN, 2004, vol. 59, p. 247- 257.

[108] Cf. COQUAND, Thierry, 2004, p. 22- 23.

que expressa a negação, de forma intuitiva, como impossibilidade de uma construção que permita que qualquer demonstração de A resulte em uma demonstração de B e $\neg B$.

Formulado o Princípio da Contradição, Kolmogorov desenvolve a *Lógica Geral de Julgamento*[109], sistema **B**:[110]

1. $A\rightarrow(B\rightarrow A)$;
2. $\{A\rightarrow(A\rightarrow B)\}\rightarrow(A\rightarrow B)$;
3. $\{A\rightarrow(B\rightarrow C)\}\rightarrow\{B\rightarrow(A\rightarrow C)\}$;
4. $(B\rightarrow C)\rightarrow\{(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)\}$
5. $(A\rightarrow B)\rightarrow\{(A\rightarrow \neg B)\rightarrow \neg A\}$

E as regras de Substituição e *Modus Ponens.*

No sistema **B** não é possível derivarmos o TEX. Por outro lado, no domínio finito, sabemos que o TEX é aceito como princípio lógico de julgamento. E, além disso, estamos conscientes de que a rejeição do TEX para domínios infinitos teve como uma das consequências a rejeição da DN, porque a partir da DN podemos derivar o TEX.[111]Kolmogorov pressupõe que, como o TEX, a DN também poderia ser válida para domínios finitos[112], e a partir disso, ele acrescenta ao sistema **B** o axioma:

6. $\neg\neg A \rightarrow A$. (Dupla Negação)

---

[109]Kolmogorov afirma que a *Lógica Geral do Julgamento* deve ser compreendida como:
"In what follows we understand by the general logic of judgments the science that investigates the properties of arbitrary judgments independently of their content, so far as their truth, their falsity, and the ways in which they are derived are concerned. (Each judgment is regarded as an unanalyzable element in the investigation.) The general logic of judgments is formally expressed with the help of symbols for arbitrary judgments, $A, B, C,\ldots$, of the symbol for implication, $A \rightarrow B$, and of the symbol for negation, $\neg$A."(KOLMOGOROV, A., 1925, p.418)

[110]Atualmente sabemos que o sistema **B** é equivalente ao sistema intuicionista minimal de Johansson, podendo-se denominar o sistema **B** como *Lógica minimal intuicionista*.
Cf. FEITOSA, Hércules, 1997, p. 8.

[111] Uma prova de que podemos partir da DN e chegarmos ao TEX é:
1. $\neg(A\vee \neg A)$ – hipótese – suponha TEX é falso.
2. $[A]^5$ hipótese – suponha A= V
3. $A\vee \neg A$ – regra de introdução da $\vee$
4. Contradição (3) e (1)
5. $\neg A$ descartamos a hipótese da linha 2 na linha 5, pois se A leva a uma contradição, A= F
6. $A\vee \neg A$, mas de $\neg A$ aplicando introdução da $\vee$ obtemos novamente $A\vee \neg A$
7. Contradição (6) e (1)

Note q a única hipótese ainda vigente é 1. Ela é descartada e obtemos

8. $\neg\neg (A\vee \neg A)$
9. Agora sim aplicamos DN e concluímos $A\vee \neg A$.

[112] "Kolmogorov afirma, sem apresentar prova, que o uso da eliminação de duplas negações seria legítimo para as proposições finitárias da matemática. Entretanto, ele não define a noção de 'proposição finitária', deixando apenas implícito que proposições tais como x= y, x< y, dentre outras, são dessa natureza." (da PAZ, Maria N. de M., 2001, p.20).

Tendo como resultado o que denominou *Lógica Especial do Julgamento*, sistema **H**. Kolmogorov mostrou em seu trabalho que o sistema **H** é equivalente ao cálculo proposicional de Hilbert.[113] No sistema ele consegue ainda derivar o TEX expresso na fórmula $(A\to B)\to((\neg A\to B)\to B)$,

> Formula $(A\to B)\to((\neg A\to B)\to B)$ which comes close to the principle of excluded middle, means: if *B* follows from the truth of *A* and from its falsity as well, then it cannot be false. Indeed, if we assume that *B* is false, *A* cannot be true, since *B* would follow from *A*; but from the falsity of *A* the truth of *B* would follow. (KOLMOGOROV, A., 1925, p. 424- 425.)

Para alcançar seu objetivo principal, a saber, mostrar que o uso do TEX pela matemática não teria como consequência uma contradição, Kolmogorov retorna ao trabalho de Brouwer de 1923[114], que nos autoriza a considerar fórmulas negadas, do tipo $\neg A$, como fórmulas regulares, para as quais a DN pode ser aceita. De maneira que fórmulas regulares são do tipo$A$, tal que $\neg\neg A\to A$, seja válido. As fórmulas simples do sistema **H**, do tipo *A*, são regulares e nestas a DN mostrou ser válida. Seguindo o mesmo raciocínio, Kolmogorov mostrou, a partir dos axiomas de **B,** que para fórmulas negadas, como $\neg A$, a DN também é verdadeira.[115]

Na demonstração, Kolmogorov explicitou que fórmulas regulares do tipo *A* e *B* podem ser substituídas por fórmulas negadas como $\neg A$, tal como assumido por Brouwer em 1923, e a partir disso conseguiu derivar fórmulas triplamente negadas, $\neg\neg\neg A$, que implicam fórmulas negadas, $\neg A$, representando uma instancia da eliminação da DN. O resultado desta demonstração pode ser escrito na forma,

$$\neg\neg \mathbf{A'}\to \mathbf{A'}$$

Onde **A’** representa uma fórmula negada. A consequência imediata desta demonstração é que no domínio de **B** o uso da DN vale para fórmulas negadas. Assim temos:

Lema 1. *Se A é uma formula negada, então a fórmula $\neg\neg A\to A$ é verdadeira em **B**.*

---

[113] Kolmogorov mostra que o sistema **H** é equivalente ao Cálculo Proposicional de Hilbert em: Cf. KOLMOGOROV, A., 1925, p. 423- 424.
[114] Cf. BROUWER, L. E. J., 1923, p. 251-256.
[115] A demonstração de que a eliminação da DN é verdadeira para fórmulas negadas a partir do sistema **B** é encontrada no texto de Kolmogorov, p.425- 426. As regras são Substituição e Modus Ponens.

Esta demonstração da validade da DN para fórmulas negadas levou Kolmogorov a cumprir com parte de seus intuitos. Contudo, ele precisou mostrar também que a DN é verdadeira para fórmulas compostas do tipo, $A \rightarrow B$, o que realizou desenvolvendo uma demonstração que evidencia que uma fórmula tal qual **A'→B'** tem as mesmas características de **A'** e que, portanto, a regra da DN é verdadeira.[116] Obtemos assim:

$$\neg\neg(\mathbf{A'} \rightarrow \mathbf{B'}) \rightarrow (\mathbf{A'} \rightarrow \mathbf{B'})$$

Com isso é possível obtermos o seguinte lema:

Lema 2: *Se as fórmulas* $\neg\neg A' \rightarrow A'$ *e* $\neg\neg B' \rightarrow B'$ *são verdadeiras em* **B**, *então a fórmula* $\neg\neg(\mathbf{A'} \rightarrow \mathbf{B'}) \rightarrow (\mathbf{A'} \rightarrow \mathbf{B'})$ *também é verdadeira em* **B**.

Mas com este resultado Kolmogorov ainda não consegue esclarecer que o uso do TEX, considerado ilegítimo por Brouwer, na matemática clássica não teria levado a contradições. Para chegar a este resultado, ele constrói ao lado da matemática clássica uma matemática que denominou ***pseudomatemática***. A pseudomatemática é a imagem de uma função ***K*** cuja interpretação nos permite compreender que para cada fórmula do tipo A, $\neg A$, $(A \rightarrow B)$ da matemática clássica existe uma imagem na pseudomatemática que afirma a sua dupla negação. Ademais podemos definir recursivamente a função ***K*** como:

$\boldsymbol{K}(A) =_{\text{def}} \neg\neg A$, se **A** é atômica.
$\boldsymbol{K}(\neg A) =_{\text{def}} \neg\neg(\neg \boldsymbol{K}(A))$.
$\boldsymbol{K}(A \rightarrow B) =_{\text{def}} \neg\neg(\boldsymbol{K}(A) \rightarrow \boldsymbol{K}(B))$

Temos, portanto, que:

Lema 3: *Se* **A'** *é constituída apenas por implicações e negações* $\mathbf{A'}_1$, $\mathbf{A'}_2$, ..., $\mathbf{A'}_n$ *são todas fórmulas atômicas de* **A'** e $(\neg\neg\mathbf{A'}_1 \rightarrow \mathbf{A'}_1)$, ..., $(\neg\neg\mathbf{A'}_n \rightarrow \mathbf{A'}_n)$ *são verdadeiras em* **B,** *então* $\neg\neg\mathbf{A'} \rightarrow \mathbf{A'}$ *também o é.*

Estes resultados levam Kolmogorov a seguinte indagação,

[116] A demonstração de que as fórmulas **A'→B'** permitem a dupla negação partir do sistema **B** é encontrada no texto de Kolmogorov, p. 426- 427.

> Can we in a similar way, after we have placed some restrictions on their real interpretation, again give a meaning to all those formulas of mathematics that are proved by an illegitimate use (that is, a use outside the domain in which they are applicable) of formulas of the special logic of judgments, in particular by use of the principle of excluded middle? (KOLMOGOROV, A., 1925, p.427).

Para responder a esta questão ele mostrou que as fórmulas de **B** possuem correspondentes na pseudomatemática, tal como a definição de **K**, e ademais que estas podem ser obtidas pela substituição de $\neg\neg A$, $\neg\neg B$, ..., por **A'**, **B'**,..., graças aos **lemas 1, 2** e **3**, o que significa que todo teorema do sistema **H** possui uma tradução e esta é um teorema do sistema **B**.

Teorema 4: Se $\vdash_{\mathbf{H}} A$ então $\vdash_{\mathbf{B}} \mathbf{K}(A)$.

Desta forma, Kolmogorov conclui que podemos estender o domínio da pseudomatemática para todos os axiomas da matemática[117]. Considerando Γ como o conjunto constituído pelos axiomas da matemática, temos:

Teorema 5: *Toda fórmula da pseudomatemática que corresponde a uma fórmula provada a partir de* Γ *é provada a partir das fórmulas de* $\boldsymbol{K}(\Gamma)$, *onde* $\boldsymbol{K}(\Gamma) = \{\boldsymbol{K}(B) | B \in \Gamma\}$.

O **Teorema 5** levou Kolmogorov a concluir que toda fórmula da matemática clássica possui como imagem uma fórmula duplamente negada na matemática. E estendeu este resultado à lógica de predicados de primeira ordem ao acrescentar o axioma $\forall xA \rightarrow A(t)$ e a regra da generalização universal. Define então a função **K** para o quantificador universal,

$\mathbf{K}(\forall xA) =_{def} \neg\neg\forall x\mathbf{K}(A)$

Este resultado finaliza a questão principal colocada por Kolmogorov: se pudermos derivar uma contradição na pseudomatemática, também poderíamos derivar uma contradição na matemática clássica, de acordo com o **Teorema 5**. Contudo, não podemos garantir que a matemática intuicionista seja realmente consistente. Mas apenas que a matemática clássica é consistente se, e somente se, a matemática intuicionista o for.

Ainda que a possibilidade de derivarmos uma contradição pelo uso do TEX na matemática clássica signifique a possibilidade de derivarmos uma contradição no

[117] Precisamos ressaltar neste trabalho que quando Kolmogorov usou os termos *matemática* e *pseudomatemática* estava se referindo a um campo específico desta ciência, a *aritmética*. Neste trabalho nos restringimos a este campo, por isso deixamos em aberto as seguintes questões pertinentes ao tema: Este resultado poderia ser estendido para a análise? Caso a resposta seja negativa, por quê?

Intuicionismo, esta constatação não implica que o referido princípio não leve, necessariamente, a contradições. A tradução nos indica que, o significado dos conectivos, fórmulas, regras e o raciocínio lógico, desenvolvidos pelo Intuicionismo podem ser reformulados seguindo um raciocínio clássico sem perder o caráter intuitivo, permitindo, desta forma, que a matemática clássica possa ser interpretada de acordo com a concepção matemática desenvolvida pelo Intuicionismo.

3.1.2 A tradução de Gödel

A tradução do matemático austríaco Kurt Gödel é resultado de sua apresentação no *Menger's colloquium* em Viena na data de 21 de junho de 1932, neste colóquio Gödel discute a relação entre a aritmética de primeira ordem clássica e intuicionista, mostrando que se uma fórmula é classicamente válida, e contêm apenas os conectivos lógicos da negação e da conjunção, então sua tradução é intuicionisticamente válida. O resultado deste artigo foi publicado originalmente em 1933 no texto, *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlen theorie.*[118] A relação de Gödel com o Intuicionismo não está encerrada neste artigo. Embora ele não se considerasse intuicionista fez importantes contribuições para a lógica intuicionista, tais como, a relação da lógica intuicionista com a lógica polivalente e a interpretação do cálculo proposicional intuicionista no cálculo modal.[119]

O trabalho de Gödel evidencia um resultado antecipado por Kolmogorov em 1925, pois também apresenta uma tradução que insere negações na frente de cada subfórmula. Porém, apesar das semelhanças, o trabalho de Gödel apresenta fórmulas construídas pelos operadores lógicos, da conjunção e da negação, e em Kolmogorov, como vimos, as fórmulas são constituídas pela implicação e negação. Não podemos afirmar com precisão se Gödel já conhecia o trabalho de Kolmogorov.

> Gödel’s paper had been anticipated to a not inconsiderable extent by Kolmogorov (1925). Kolmogorov describes a translation which consists in simultaneously inserting $\neg\neg$ in front of each subformula. For the $\rightarrow, \neg$ fragment of propositional logic he gives full details; the treatment of the quantifiers is only sketched. There is a careful introduction by H. Wang to the English translation of Kolmogorov's paper in van Heijenoort 1967, although Wang perhaps slightly overstated the case for Kolmogorov's anticipation of Heyting and Gödel. Kolmogorov's paper, written in

---

[118] O texto de Gödel 1933 possui uma versão traduzida, com nota introdutória de A. S. Troelstra, em: FEFERMAN, Solomon (Ed.), 1986, Vol. I, p. 282- 296.
[119] Cf. KENNEDY, Juliette, Jul/2011.

> Russian, attracted little or no attention and was apparently unknown to Gödel. (TROELSTRA, A. S., 1986, p. 284).

O trabalho de Gödel teve seus reflexos estendidos para além do Intuicionismo, pois uma das consequências de sua tradução, como evidenciado por Bernays[120], é ter mostrado aos membros da escola de Hilbert (Formalismo) que os princípios intuicionistas vão além dos princípios finitistas[121], levantando como alternativa ao Programa de Hilbert, golpeado pelo Segundo Teorema de Incompletude, desenvolvido pelo próprio Gödel, o uso do raciocínio intuicionista para a metamatemática. "Gödel's paper showed the members of the Hilbert school that there were alternatives to finitistic reasoning as a basis for metamathematics, and also that intuitionistic principles went beyond finitism." (TROELSTRA, A. S., 1986, p.284).

O texto em que Gödel define sua interpretação da aritmética clássica na intuicionista começa mostrando a distinção entre os símbolos clássicos e os símbolos intuicionistas que neste texto não será mantida para facilitar a leitura. Em nosso trabalho usaremos os símbolos $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$,$\rightarrow$, $\neg$ para operadores lógicos, A, B, C, ..., para variáveis proposicionais e x', y', z', ..., para variáveis. Além disso, denominaremos o sistema de Lógica proposicional clássica como (**CPC**) e o sistema de Lógica proposicional intuicionista como (**CPI**).

Para começarmos a definir a tradução de Gödel é necessário ressaltarmos que em seu trabalho ele retorna a um fato fundamental descoberto por Glivenko em 1929[122], que mostrou que, se a falsidade de um dado enunciado da lógica proposicional é demonstrável na lógica clássica, então esta mesma falsidade é demonstrável na lógica intuicionista; em outras palavras, Glivenko expôs que: **CPC** $\vdash A$ se e apenas se, **CPI** $\vdash \neg\neg A$.[123] E partir deste

---

[120] TROELSTRA, A. S., 1986, p. 282.

[121] O termo *finistista*, como apontado por Troelstra, deve ser entendido como as manipulações finitas da matemática que podem ser apresentadas com combinações igualmente finitas.

"Here the term 'finitistic' should be understood in the sense of Hilbert or Herbrand (e.g., 1930); finitistic mathematics may be characterized as the mathematics of finite manipulations of finitely presented, combinatorial configurations. (TROELTRA, A. S., 1986, p.283).

[122] Cf. van ATTEN, Mark, April/2009.

[123] Note que o resultado demonstrado por Valery Glivenko em 1929 é similar ao resultado demonstrado por Kolmogorov em 1925, a saber:

(i) Se A é um teorema da Lógica proposicional clássica, então $\neg\neg A$ é um teorema da Lógica proposicional intuicionista.

(ii) se $\neg A$ é um teorema da Lógica proposicional clássica, então $\neg A$ é um teorema da Lógica proposicional intuicionista.

Cf. van ATTEN, Mark, April/2009.

resultado Gödel definiu recursivamente uma tradução, que denominaremos *Go*, da **CPC** na **CPI**. A tradução *Go* pode ser definida como se segue:

$Go(A) =_{\text{def}} A$, se A é uma variável proposicional.

$Go(\neg A) =_{\text{def}} \neg Go(A)$.

$Go(A \rightarrow B) =_{\text{def}} \neg(Go(A) \wedge \neg Go(B))$

$Go(A \wedge B) =_{\text{def}} Go(A) \wedge Go(B)$

$Go(A \vee B) =_{\text{def}} \neg(\neg Go(A) \wedge \neg Go(B))$

Observamos que a tradução de Gödel apresentou como imagem da função *Go*, fórmulas que são adequadamente transformadas em fórmulas constituídas apenas por conjunções e negações, como conectivos lógicos. Além disso, podemos notar que ele usou na substituição equivalências da lógica clássica, por exemplo, $(A \vee B)$ tem como fórmula equivalente válida em lógica clássica $\neg(\neg A \wedge \neg B)$, ou ainda, $(A \rightarrow B)$ que é equivalente a $\neg(A \wedge \neg B)$. Com isso, Gödel pôde definir seu primeiro teorema:

Teorema 6: *Se A é uma fórmula válida de* **CPC**, *então Go(A) é válida também na* **CPI**.

A partir desse teorema Gödel pôde passar a cumprir com seu objetivo principal de estender este resultado para a aritmética, a qual ele considerou com pequenas modificações o sistema de Herbrand de 1931[124] para a aritmética clássica, e o sistema de Heyting de 1930[125] para a aritmética intuicionista.

> The goal of the present investigation is to show that something similar holds also for all of arithmetic and number theory, delimited in scope by, say, Herbrand's axioms. Here, too, we can give an interpretation of the classical notions in terms of the intuitionistic ones, that all propositions provable from the classical axioms hold for intuitionism as well. (GÖDEL, K., 1933, p. 287- 289).

Gödel mostra o sistema de Herbrand com quatro grupos de axiomas não-lógicos, conferindo-lhes pequenos acréscimos. O Grupo 1 é composto por axiomas não lógicos; o Grupo 2 por uma instância do esquema da indução; o Grupo 3 consiste em 'definições de axiomas' para

[124] In: HEIJENOORT, J. (Ed), 1967, p.526- 581.
[125] HEYTING, A., 1956, p. 13- 31.

funções, nos permitindo computar os valores das funções para cada conjunto de argumentos; e o Grupo 4 é composto por todos os enunciados universais provados apenas por meios finitários.[126] Ao sistema de Heyting ele acrescentou as variáveis *x'*, *y'*, *z'*, ..., para números naturais, justificando que

> Heyting's has no number variables, but only variables *x*, *y*,... for arbitrary objects. This leads to certain complications for what follows, and we can avoid these by first introducing into Heyting's System variables *x', y', z'*,... for natural numbers in a way such that every proposition containing variables of the new kind is equivalent to one without them; (GÖDEL, K., 1933, p. 289 e 291).

E também adicionou os axiomas do grupo 3 e 4 de Herbrand e os operadores da quantificação que percorrem sobre as variáveis numéricas deste sistema. Neste trabalho chamaremos de **H'** o sistema expandido de Heyting.

Com a definição dos sistemas aritméticos clássico e intuicionista e suas respectivas modificações, Gödel passou a apresentação da tradução do sistema de Herbrand em **H'**, considerando inicialmente esta tradução para os termos numéricos (denominaremos termos numéricos como $t_1, t_2, ..., t_n$), como se segue:

$Go(x) =_{\text{def}} x'$

$Go(0) =_{\text{def}} 1$

$Go(t+1) =_{\text{def}} \mathrm{S(t)}$

$Go(f_1\,(t_1 \ldots t_n) =_{\text{def}} (f_1(Go(t_1) \ldots Go(t_n))$

Posteriormente Gödel estende a definição da função *Go* para fórmulas numéricas, da seguinte forma:

$Go(t_1 = t_2) =_{\text{def}} Go(t_1) = Go(t_2)$

$Go(\neg A) =_{\text{def}} \neg Go(A)$

$Go(A \rightarrow B) =_{\text{def}} \neg(Go(A) \wedge \neg Go(B))$

$\mathrm{Go}(A \wedge B) =_{\text{def}} Go(A) \wedge Go(B)$

$Go(A \vee B) =_{\text{def}} \neg(\neg Go(A) \wedge \neg Go(B))$

---

[126] A definição formal de quais axiomas pertencem a cada grupo é dado por Gödel em: Cf. GÖDEL, K., 1933, p. 289- 291.

$Go(\forall xA) =_{def} \forall x' Go(A)$

Com esta tradução Gödel demonstra os seguintes lemas:

Lema 7: *Para cada fórmula Go(A) de* **H'**, *tem-se que* $\vdash_{\mathbf{H}'} \neg\neg Go(A) \rightarrow Go(A)$.

Lema 8: *Se Go(A) e Go(B) são fórmulas numéricas de* **H'**, *então* $\vdash_{\mathbf{H}'} (Go(A) \rightarrow Go(B)) \leftrightarrow \neg(Go(A) \wedge \neg Go(B))$.

Gödel demonstrou os dois lemas acima a partir dos axiomas da aritmética de Heyting 1930 e de resultados aceitos intuicionisticamente, como pode ser conferido nas páginas 289- 295 de seu trabalho. E em consequência destas demonstrações ele obtém que:

Teorema 9: *Se uma formula A é deduzível no sistema estendido de Herbrand, então a sua tradução Go(A) é deduzível em* **H'**.

Gödel comenta que a partir da demonstração do **teorema 9** podemos concluir que "the system of intuitionistic arithmetic and number theory is only apparently narrower than the classical one, and in truth contains it, albeit with a somewhat deviant Interpretation." (GÖDEL, K., 1933, p. 295), o que de fato é verificado como um corolário para os **lemas 7** e **8**, se o sistema de Herbrand é uma fórmula com os conectivos ∀, ∧, e ¬ como primitivos, então o sistema de Herbrand é um subsistema de **H'**, este resultado é uma prova tecnicamente simples da consistência da aritmética clássica relativa à aritmética intuicionista. E afirma ainda que, o raciocínio intuicionista tem restrições genuínas apenas no que concerne à análise da teoria dos conjuntos, e que estas restrições não estariam relacionadas à rejeição do TEX e sim à proibição de conceitos impredicativos, como fica evidente na passagem,

> The reason for this is to be found in the fact that the intuitionistic prohibition against restating negated universal propositions as purely existential propositions ceases to have any effect because the predicate of absurdity can be applied to universal propositions, and this leads to propositions that formally are exactly the same as those asserted in classical mathematics. Intuitionism appears to introduce genuine restrictions only for analysis and set theory; these restrictions, however, are due to the rejection, not of the principle of the excluded middle, but of notions introduced by impredicative definitions. The above considerations, of course, provide an intuitionistic consistency proof for classical arithmetic and number theory. (GÖDEL, K., 1933, p. 295).

Esta última conclusão de Gödel, com relação à restrição do uso do TEX assumida pelo Intuicionismo, também foi parcialmente antecipada por Kolmogorov em 1925. O último mostra que se o uso deste princípio resultasse em alguma contradição na aritmética clássica esta poderia ser derivável por meio da tradução na aritmética intuicionista. Tal resultado assemelha-se ao apontado por Gödel que entende que a rejeição do TEX não poderia significar uma restrição, ou ainda, um princípio que levaria a contradições, na matemática intuicionista, visto que seguindo um raciocínio intuicionista podemos obter um sistema aritmético que contêm a teoria dos números e a aritmética clássica.

3.1.3 Tradução de Gentzen

A tradução de Gentzen surge na literatura em 15 de março do ano de 1933, no artigo intitulado *On the relation between Intuitionistic and classical logic*[127]. Este trabalho apresenta um texto rigoroso e completo, em que é desenvolvida uma interpretação da lógica clássica na lógica intuicionista. O trabalho de Gentzen oferece algumas diferenças formais com relação ao trabalho de Gödel, como a escolha dos conectivos lógicos ($\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$ e $\forall$) e os sistemas aritméticos. Porém, apesar das diferenças, ele optou por não publicar imediatamente seu texto ao saber da publicação, no mesmo ano, do trabalho do último, publicando-o dois anos depois.[128]

Gentzen começa seu texto mostrando quais sistemas formais da aritmética clássica e intuicionista pretende usar e ressalta que a diferença fundamental entre estes sistemas estaria relacionada à rejeição do TEX, bem como, em algumas circunstâncias, da DN, por parte do Intuicionismo. Como sistema formal para aritmética clássica ele usou a Teoria dos números naturais de Peano, mais a Lógica de predicados de primeira ordem clássica, desenvolvida por Hilbert-Ackermann em 1928; e para o sistema formal da aritmética intuicionista a lógica desenvolvida por Heyting. Em seguida apresentou, assim como fez Kolmogorov, uma demonstração de que a eliminação da DN seria válida para uma longa extensão da lógica intuicionista. O trabalho de Kolmogorov refletiu no texto de Gentzen, que começou mostrando que se a lei da DN é intuicionisticamente válida para certas proposições, então também se mantém igualmente válida para a *conjunção* destas duas proposições, para a *implicação* destas duas proposições, para a *negação* de uma proposição arbitrária, e também para *quantificação universal* destas proposições. Em síntese temos que:

---

[127] SZABO, M. E. (Ed.), 1969, p. 53- 66.
[128] Cf. van ATTEN, Mark, April/2009.

Teorema 10: *Se* $\neg\neg A\to A$ *e* $\neg\neg B\to B$ *são fórmulas verdadeiras na lógica intuicionista, então as fórmulas* $(\neg\neg(A\wedge B)\to(A\wedge B))$, $(\neg\neg(A\to B)\to(A\to B))$, $(\neg\neg\neg A\to\neg A)$ *e* $(\neg\neg\forall xA\to\forall xA)$ *também são verdadeiras.*

Na prova deste teorema Gentzen demonstra separadamente cada uma destas proposições[129]. E como consequência disso obtém como resultado:

Teorema 11: *Se A é uma fórmula sem os símbolos* $\vee$ *e* $\exists$, *e se todas as suas fórmulas elementares são prefixadas por* $\neg$, *então* $\neg\neg A\to A$ *é uma fórmula intuicionisticamente válida.*[130]

O **teorema 11** levou Gentzen a alcançar um resultado que relaciona as fórmulas da aritmética clássica à aritmética intuicionista pelo uso da eliminação da DN, a saber que:

Teorema 12: *Uma 'figura de prova' da aritmética clássica com uma fórmula final A pode ser transformada em uma 'figura de prova' da aritmética intuicionista com a fórmula final* $\neg\neg A$.

Com relação ao termo "*figura de prova*", Gentzen indicou que deveria ser compreendido como o resultado de quatro etapas. A primeira nos indica que cada fórmula ou é um axioma, ou é resultado de fórmulas anteriores derivadas através da aplicação das regras de inferência, com a condição de que cada fórmula seja usada exatamente uma vez para se obter uma nova fórmula, esta condição só não é válida para a fórmula final. Segundo, a eliminação dos símbolos $\vee$ e $\exists$ devem ocorrer através da substituição de toda fórmula do tipo $A\vee B$ por $\neg(\neg A\wedge\neg B)$ e $\exists xA$ por $\neg(\forall x\neg A)$ tomando cuidado para que

> We must now examine to what extent the new figure which has resulted in this way has remained a correct derivation and, where this is not the case, modify the figure accordingly. For this purpose we examine, first, the application of the operational rules and, second, the axiom formulae (4.221, 4.222)[131]. (GENTZEN, G., 1933, p. 61)

---

[129] A prova de cada uma das proposições deste teorema pode ser encontrada em detalhes no texto de Gentzen: Cf. GENTZEN, G., 1933, p. 59 e 60.

[130] A prova deste teorema é encontrada em Gentzen, e segue facilmente do teorema 2.1.10. Cf. GENTZEN, G., 1933, p. 60.

[131] As fórmulas axiomas a que Gentzen faz referência como 4.221 e 4.222 em nosso texto são a etapa 1 e a substituição dos axiomas $\vee$ e $\exists$ na etapa 2.

Na terceira etapa Gentzen indicou que devemos prefixar duas negações em todas as fórmulas atômicas. E na última etapa que as variáveis proposicionais devem ser substituídas pela Regra da Substituição, de maneira que todas as ocorrências das fórmulas do tipo $\neg\neg B \rightarrow B$ estejam de acordo com o **Teorema 11**. Desta forma, ele pretendia obter uma figura de prova intuicionista cuja fórmula final é $Ge(A)$.

Em consequência destas considerações Gentzen define a seguinte tradução implicitamente:

$Ge(A) =_{\text{def}} \neg\neg A$, se A é uma fórmula atômica
$Ge(\neg A) =_{\text{def}} \neg Ge(A)$
$Ge(A \rightarrow B) =_{\text{def}} Ge(A) \rightarrow Ge(B)$
$Ge(A \wedge B) =_{\text{def}} Ge(A) \wedge Ge(B)$
$Ge(A \vee B) =_{\text{def}} \neg(\neg Ge(A) \wedge \neg Ge(B))$
$Ge(\forall xA) =_{\text{def}} \forall x Ge(A)$
$Ge(\exists xA) =_{\text{def}} \neg\forall x \neg Ge(A)$

Esta definição nos possibilita concluir o seguinte teorema:

Teorema 12: *Uma figura de prova da aritmética clássica que termina com a fórmula A, e não possui os conectivos* $\vee$ *e* $\exists$*, pode ser transformada em uma figura de prova da aritmética intuicionista tal que sua fórmula final seja Ge(A).*

Na demonstração deste teorema Gentzen afirmou que esta poderia ser realizada através da conclusão de etapas extremamente tediosas. Contudo evidencia que o caminho para construí-la deve seguir rigorosamente as quatro etapas de transformação de uma figura de prova clássica em uma figura de prova intuicionista. "The somewhat tedious arguments required for the proof of theorem (…) contain nothing new, all we need to do is carry them out rigorously for the case at hand." (GENTZEN, G., 1933, p.61) Podemos notar que a tradução de Gentzen mostra uma função que possui como imagem uma derivação da aritmética clássica para a aritmética intuicionista incluindo fórmulas duplamente negadas, assim como fez Kolmogorov e Gödel, no entanto, seu trabalho apresenta a validade da DN para uma extensão maior de conectivos lógicos e considerações que conferem a esta tradução mais simplicidade na definição da interpretação do que o trabalho dos demais autores.

Os resultados imediatos da demonstração do **teorema 12** podem ser expressos nos seguintes teoremas:

Teorema 13: *Uma figura de prova da aritmética clássica cuja fórmula final não contém variáveis proposicionais, e não contém os símbolos* $\vee$ *e* $\exists$*, pode ser transformada em uma figura de prova da aritmética intuicionista com a mesma fórmula final.*

Este **teorema 13** segue como consequência imediata do **teorema 12** e nos indica que cada proposição definida da aritmética, que não contém os conectivos 'ou' e 'existe', e é classicamente provável, também é intuicionisticamente provável. Gentzen explica ainda que,

> By a 'definite proposition' we mean a proposition whose formula contains no propositional variables. 'Provability' should always be understood as provability in our formal system of arithmetic. Proofs using techniques from analysis, for example, are not included. (GENTZEN, G., 1933, p. 65).

Este resultado pode ser considerado como consequência da validade da DN para as proposições atômicas da aritmética, como indicado por Gentzen na introdução de seu trabalho, assim como também podemos concluir que:

Teorema 14: *Se a aritmética intuicionista for consistente, então a aritmética clássica também será.*

Este teorema pode ser entendido de maneira informal como estando em consonância com o *Segundo Teorema da Incompletude de Gödel*, que indica a impossibilidade de mostrar a consistência de um sistema formal com base em seus próprios axiomas e mostra, assim como a tradução de Gödel, uma alternativa ao Programa de Hilbert, por apresentar a possibilidade de mostrar a consistência de um sistema relativa a outro sistema, no caso específico, a consistência do sistema da aritmética clássica relativa ao sistema da aritmética intuicionista; ponderando que não seria possível mostrar o contrário, ou seja, a consistência da aritmética intuicionista tomando a aritmética clássica como consistente. Desta forma, ele não contradiz o Segundo Teorema da Incompletude de Gödel.[132] Além disso,

[132] Cf. GENTZEN, G., 1933, p. 67.

reafirma o que apresentou na introdução de seu artigo, que a aritmética intuicionista difere da clássica apenas externamente, pois a lógica de predicados intuicionista pode ser estendida a lógica de predicados clássica com a inserção do TEX.

Ademais, segue deste **teorema 14** o seguinte resultado:

Teorema 15: *Para toda fórmula A da lógica de predicados de primeira ordem, existe uma fórmula clássica equivalente a A, que é derivável no Intuicionismo se, e apenas se, A é derivável classicamente.*

O **teorema 15** enuncia que se estivermos usando a lógica de predicados de primeira ordem toda fórmula classicamente válida possuiu uma tradução válida intuicionisticamente, em outras palavras, este enunciado torna claro que toda fórmula válida na aritmética clássica é derivável, por meio da tradução, na aritmética intuicionista.

Finalizada a apresentação da tradução de Gentzen concluímos esta seção que tinha como intuito mostrar as interpretações de Kolmogorov, Gödel e Gentzen, da aritmética clássica na aritmética intuicionista, bem como as relações entre estes sistemas, que não implicam, necessariamente, que o TEX deva ser rejeitado pelo Intuicionismo na tentativa de apresentar uma solução para os problemas relacionados à fundação da matemática, mas mostram que a diferença entre estes sistemas não poderia estar relacionada ao uso do TEX.

3.2 Traduções da lógica intuicionista na lógica clássica

Nesta seção pretendemos apresentar a definição de uma tradução capaz de fornecer uma interpretação da aritmética intuicionista na aritmética clássica, esta tradução está baseada nos trabalhos independentes de Kolmogorov, Gödel e Gentzen, todavia será capaz de possibilitar ao nosso trabalho facilidade nas provas, sem perda de rigor. Em seguida temos a intenção de demonstrar que a aritmética clássica e a aritmética intuicionista são equiconsistentes.

Antes de apresentarmos a definição da tradução que denominaremos *Tradução Kolmogorov-Gödel-Gentzen* é necessário fazermos algumas considerações gerais. Esta definição, apesar de estar baseada no trabalho destes três autores, está fundamentada no trabalho realizado por A. S. Troelstra na obra *Basic Proof Theory*[133] e se assemelha enormemente a tradução de Gentzen, 1933[134], como poderá ser percebido, pois permite a ocorrência dos operadores lógicos da $\wedge$, $\rightarrow$ e $\forall$, e exige que as fórmulas com conectivos $\vee$ e $\exists$ sejam transformadas em suas equivalentes clássicas, tal como foi realizada na tradução de Gentzen. A novidade desta interpretação está em apresentar como conectivo primitivo o *absurdo,* $\perp$. A *Tradução Kolmogorov-Gödel-Gentzen* produz fórmulas negativas, o que significa que produz fórmulas em que as letras sentenciais ocorrem negadas (sendo $A \stackrel{def}{=} A \rightarrow U$).

Definição: *A* é negativa se, e somente se:

(*i*) fórmulas atômicas ocorrem negadas em *A*;

(*ii*) *A* tem apenas os operadores $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\forall$;

Provamos que se A é uma fórmula negativa, então $\neg\neg A \rightarrow A$.

Lema 16: *Se A é uma fórmula negativa, então* $\neg\neg A \rightarrow A$ *é uma fórmula válida para o sistema intuicionista.*[135]

A prova é por indução sobre a complexidade de *A*. Usamos os teoremas $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$, $\neg\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$, $\neg\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$, $\neg\neg\forall x A \rightarrow \forall x \neg\neg A$, todos válidos intuicionisticamente.

Definimos agora a *Tradução Kolmogorov-Gödel-Gentzen* como:

$G(A) =_{def} \neg\neg A$, se *A* é atômico.

$G(\perp) =_{def} \perp$.

$G(A \rightarrow B) =_{def} (GA \rightarrow GB)$.

$G(\neg A) =_{def} G(A \rightarrow \perp) = G(A) \rightarrow \perp = \neg G(A)$.

$G(A \wedge B) =_{def} (GA \wedge GB)$.

$G(A \vee B) =_{def} \neg(\neg GA \wedge \neg GB)$.

$G(\forall x A) =_{def} \forall x GA$

$G(\exists x A) =_{def} \neg \forall x \neg GA$

---

133 TROELSTRA, A. S., 1996, p. 39- 42.

134 SZABO, M. E. (Ed.), 1969, p. 53- 66.

135 Este lema foi demonstrado nos trabalhos de Kolmogorov, Gödel e Gentzen de maneiras distintas. Nesta seção não o demonstraremos, visto que esta etapa já foi realizada anteriormente.

Nesta tradução são produzidas fórmulas negativas. Considerar $\perp$ como um operador lógico primitivo está em consonância com o significado desejado pelo Intuicionismo. A negação assumida desta forma não permite ambiguidades com relação ao seu significado. Podemos perceber com algumas observações que Heyting, um dos primeiros intuicionistas preocupados com a formalização desta matemática, já expressava em seu trabalho a preocupação em captar a negação como a impossibilidade de concluir a verdade de um determinado enunciado, como fica claro no trecho abaixo:

> Strictly speaking, we must well distinguish the use of 'not' in mathematics from that in explanations which are not mathematical, but are expressed in ordinary language. In mathematical assertions no ambiguity can arise: 'not' has always the strict meaning. 'The proposition *p* is not true', or 'the proposition *p* is false' means 'If we suppose the truth of *p*, we are led to a contradiction'. (HEYTING, A., 1956, p. 18.)

A afirmação de Heyting mostra a necessidade de esclarecermos a negação como *absurdo*, *impossibilidade*; contudo, sua declaração pode ser entendida de forma ambígua quando não compreendemos claramente o termo 'contradição' de acordo com a concepção intuicionista. O termo contradição pode ser entendido significando, por exemplo, que duas proposições que manifestam ideias opostas, A e $\neg A$, não podem ser ambas verdadeiras. Sendo assim, para evitar estas ambiguidades Heyting aponta para a necessidade de esclarecermos a contradição como termo primitivo, "I think that contradiction must be taken as a primitive notion. It seems very difficult to reduce it to simpler notions, and it is always easy to recognize a contradiction as such. In practically all cases it can be brought into the form 1=2." (HEYTING, A., 1956, p.98.)

Em um sistema formal, quando exprimimos o significado da negação como *absurdo*, de maneira primitiva, conseguimos atender a exigência intuicionista de assumirmos este operador como um sinônimo da impossibilidade, sem dependermos da explicitação de termos da negação como, a contradição, que poderia levar a ambiguidades. Um exemplo da negação definida como *absurdo* pode ser ilustrado como: suponha que temos um enunciado $a=b$. Se em determinado momento da construção da prova em que este enunciado é uma hipótese chegamos ao resultado de que $a>b$ resultamos uma contradição do enunciado $a=b$, ou seja, estamos concluindo a impossibilidade de $a=b$ ser verdadeiro.

Outros resultados relacionados à definição indutiva da *Tradução Kolmogorov-Gödel-Gentzen* são dois teoremas que demonstram a conexão entre a aritmética clássica e a intuicionista. A demonstração destes dois resultados é necessária para alcançarmos o nosso objetivo principal, a saber, demonstrar que a aritmética intuicionista e clássica são equiconsistentes. Os dois teoremas podem ser enunciados como:

Teorema 17: $\vdash_c A \leftrightarrow G(A)$.

Teorema 18: Se $\Gamma \vdash_c A$, então $G(\Gamma) \vdash_i G(A)$, onde $G(\Gamma) = \{G(B) : B \in \Gamma\}$.

O **teorema 17** diz que uma fórmula *A* é teorema da lógica clássica se, e somente se, existe uma correspondente na *Tradução Kolmogorov-Gödel-Gentzen,* G(*A*), que também é teorema da lógica clássica. Já o **teorema 18** afirma que se temos uma prova de *A*, a partir do conjunto de premissas Γ na lógica clássica, então temos uma prova na lógica intuicionista da tradução de *A*, G(*A*), a partir do conjunto de premissas formado pelas traduções das fórmulas de Γ.

As demonstrações dos **teoremas 17** e **18** serão realizadas baseadas em sistemas de *Dedução Natural.*[136] Denominaremos o sistema de Dedução Natural clássico como **Nc,** e o sistema intuicionista como **Ni**. As regras válidas para estes sistemas são as regras usuais de introdução e eliminação mais regras para negação (absurdo) que caracterizam cada sistema.

O sistema **Nc** é composto pelas regras: I∧, E∧, I→, E→, I∀, E∀, Redução ao Absurdo (RAA ou absurdo clássico), I∨, E∨, I∃, E∃. E o sistema **Ni** é composto por: I∧, E∧, I→, E→, I∀, E∀, $\perp_i$ (absurdo intuicionista ou *Ex falso*) I∨, E∨, I∃, E∃. Podemos notar que não existem grandes diferenças entre estes sistemas, mas vale ressaltarmos que a diferença fundamental é reflexo da diferença fundacional entre as concepções intuicionista e clássica da matemática.

No sistema **Ni** não temos como regra a RAA, que funciona como a dupla negação que, como vimos, permite provar TEX. Em **Ni** temos o absurdo intuicionista, $\perp_i$, que permite concluir qualquer proposição a partir de uma contradição, isto é, de ⊥.

Os resultados que neste trabalho serão obtidos através do sistema de Dedução Natural podem ser obtidos com demonstrações que usam o método axiomático. Para tanto, devemos considerar que o sistema **Ni** é equivalente ao sistema axiomático de Hilbert abaixo, esquemas de axiomas 1 a 9. O sistema **Nc** é formado pelos esquemas de axiomas 1 a 8 mais o

[136] As provas aqui apresentadas seguem TROELSTRA, A. S., 1996, p. 29- 34.

esquema de axioma 10. O *modus ponens* é usado como regra de inferência em ambos os sistemas.

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3. $(A \wedge B) \to A$
4. $(A \wedge B) \to B$
5. $A \to (B \to (A \wedge B))$
6. $A \to (A \vee B)$
7. $B \to (A \vee B)$
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
9. $\bot \to \mathrm{A}$.
10. $((\mathrm{A} \to \mathsf{U}) \to \mathsf{U}) \to \mathrm{A}$ (i.e. $\neg\neg \mathrm{A} \to \mathrm{A}$, dado que $\neg \mathrm{A} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{A} \to \mathsf{U}$)

Na demonstração dos **teoremas 17** e **18** optamos por usar o sistema de Dedução Natural por acreditarmos que este sistema confere ao nosso trabalho a vantagem de que as deduções são mais simples do que o uso do sistema axiomático. Além disso, as regras inferenciais do sistema de dedução são mais intuitivas do que a introdução de sentenças em uma prova, como acontece em provas realizadas através de um sistema axiomático.

A primeira etapa na demonstração dos **teoremas 17** e **18** é indicar de que forma podemos substituir as regras $\vee$ e $\exists$ que são classicamente deriváveis a partir de outras, dadas as equivalências clássicas

$A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$;

$\exists x \mathrm{F}x \equiv \neg \forall x \neg \mathrm{F}x$.

Como exemplo, mostramos como eliminar uma aplicação da regra E$\vee$.

$$\dfrac{\begin{array}{c} A \\ | \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ | \\ C \end{array} \quad A \vee B}{C}$$

A regra E$\vee$ pode ser simulada com $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ no lugar de $A \vee B$.

$$
\begin{array}{lllll}
 & A & & B & \\
 & | & & | & \\
 & C & \neg C & C & \neg C \\
 & \neg A & & \neg B & \\
\neg(\neg A \wedge \neg B) & \neg A \wedge \neg B & & & \\
 & C & & &
\end{array}
$$

Assim, as aplicações de E$\vee$, I$\vee$, E$\exists$ e I$\exists$ em uma prova clássica podem ser ignoradas, uma vez que podem ser substituídas pelas regras correspondentes na linguagem sem os operadores lógicos $\exists$ e $\vee$.

Em um segundo momento, temos que transformar uma prova de $\Gamma \vdash$ A em **Nc** para uma prova de G$\Gamma \vdash$ GA em **Ni**. Para concluirmos esta etapa usaremos as mesmas regras, exceto a RAA. Além disso, usaremos neste caso o **lema 16**, ou seja, $\neg\neg A \rightarrow A$. Por exemplo: Uma aplicação de E$\rightarrow$ torna-se:

$$
\begin{array}{llll}
A & A \rightarrow B & G(A) & G(A) \rightarrow G(B) \\
B & & G(B) &
\end{array}
$$

Assim, uma aplicação de RAA torna-se:

$$
\begin{array}{ll}
\neg A & \neg \mathrm{G}A \\
| & | \\
\bot & \bot \\
A & \neg\neg \mathrm{G}A \quad \neg\neg \mathrm{G}A \rightarrow \mathrm{G}A \\
 & \mathrm{G}A
\end{array}
$$

O uso do **lema16** em GA, tal como segue em $\neg\neg$G$A \rightarrow$ GA, pode ser realizado, pois o resultado da tradução produz uma fórmula negativa. Desta forma, podemos concluir a demonstração dos **teoremas 17** e **18**:

Teorema 17: $\vdash_c A \leftrightarrow$ G(A).

Teorema 18: Se $\Gamma \vdash_c A$, então G(Γ) $\vdash_i$ G(A).

A partir do **teorema17**, obtemos o inverso de **18**: Se G(Γ) $\vdash_i$ G(A), então temos $\Gamma \vdash_c A$. Portanto, $\Gamma \vdash_c A$ é válido se e apenas se G(Γ) $\vdash_i$ G(A) é válido.

Com a conclusão da demonstração dos **teoremas 17** e **18** e a partir da definição da *Tradução Kolmogorov-Gödel-Gentzen* podemos concluir que toda fórmula negativa da aritmética que não contêm os conectivos $\vee$ e $\exists$, e é classicamente demonstrável, também é intuicionisticamente demonstrável. Realizamos esta etapa quando definimos e demonstramos uma figura de prova que transformou fórmulas válidas classicamente em figuras de prova com fórmulas duplamente negadas que são válidas intuicionisticamente. A consequência imediata da tradução nos permite afirmar a conexão entre lógica clássica e intuicionista que não está encerrada na rejeição e não-uso do TEX pelo Intuicionismo, uma vez que a demonstração destes resultados evidencia que, se o TEX levaria a contradições na lógica clássica, estas contradições poderiam ser derivadas na lógica intuicionista.

Na próxima etapa de nosso trabalho pretendemos, apoiados nos resultados atingidos nesta seção, demonstrar que a aritmética clássica e a intuicionista são equiconsistentes; em outras palavras, temos o objetivo de mostrar usando a aritmética de Heyting (intuicionista) e os Axiomas de Peano (clássica) que a aritmética intuicionista é consistente se, e somente se, a aritmética clássica também for consistente.

3.3 A aritmética Intuicionista e a Aritmética Clássica são equiconsistentes.

Nesta seção iremos apresentar a Aritmética de Heyting, como aritmética da lógica intuicionista, e a Aritmética de Peano, como aritmética da lógica clássica. Assim como usaremos a *Tradução Kolmogorov, Gödel e Gentzen,* que definimos na seção anterior, para mostrar que a aritmética clássica e intuicionista são *equiconsistentes*. A aritmética de Heyting e a Aritmética de Peano compartilham a mesma Linguagem de Primeira Ordem, assim como, os mesmos axiomas não-lógicos. Podemos apontar como a principal diferença entre estes sistemas a Filosofia matemática que fundamenta cada uma delas. Se por um lado, a aritmética de Heyting está baseada em uma noção construtivista da matemática que acredita que esta ciência é uma atividade mental, baseada em dois atos essenciais, o Primeiro e o Segundo Ato do Intuicionismo, que dão origem aos objetos e operações matemáticas; por outro, a aritmética de Peano está baseada em uma visão realista da matemática, que acredita em uma realidade regida por princípios matemáticos preexistentes que independem do observador.

A aritmética é uma das áreas mais antigas da matemática, sua formalização foi muito apreciada no século XIX, neste sentido foram realizados os trabalhos do matemático alemão Hermann Grassmann, que em 1860 chegou à conclusão de que algumas proposições da aritmética poderiam ser derivadas da operação sucessor e da indução; e anos depois, em 1888, o matemático Richard Dedekind também realizou um trabalho sobre esta questão. Contudo, a formalização mais conhecida foi realizada por Giuseppe Peano[137], que desenvolveu um conjunto de axiomas conhecidos como, *axiomas de Peano,* para as regras e operações da aritmética.

O interesse pela formalização da aritmética no Intuicionismo surgiu com o aluno de Brouwer, Arend Heyting, que ao publicar uma série de artigos de extrema importância para o Intuicionismo em 1930[138], compostos pela formalização da Lógica Proposicional Intuicionista, **IPC**, e da Lógica de Predicados Intuicionista, **IQC,**[139] também realizou a formalização da aritmética intuicionista, substituindo nos axiomas da aritmética o uso da lógica clássica pela lógica intuicionista. Este trabalho ficou conhecido como aritmética de Heyting e é comumente abreviada como, **HA**.

A **HA** é a formalização do Intuicionismo matemático para a teoria dos números naturais[140]. Nesse trabalho Heyting apresenta os axiomas não-lógicos da aritmética de Peano usando a lógica intuicionista. Em outras palavras, estes sistemas compartilham a mesma relação binária para igualdade '='; a constante *zero*, 0; a função *sucessor*, *S;* e as funções *multiplicação* e *adição*. Por isso, podemos considerar a **HA** como uma restrição da aritmética clássica.[141] A aritmética de clássica, **PA**, foi desenvolvida por Giuseppe Peano e publicada em 1889 na obra *Os princípios da Aritmética apresentados por um novo método*[142]. O uso dos axiomas de Peano na aritmética intuicionista é justificado por Heyting,

> While you think in terms of axioms and deductions, we think in terms of evidence; that makes all the difference. I do not accept any axioms which I might reject if I chose to do so. The notion of natural numbers does not come to us as a bare notion, but from the beginning it is clothed in properties which I can detect by simple examination. Those properties which you describe by Peano's axioms are among them, as I shall show you. Let '*N*' be an abbreviation for 'natural numbers'. The first

[137] É preciso ressaltar que os primeiros axiomas de Peano, desenvolvidos para a axiomatização da aritmética, foram realizados por Richard Dedekind.
[138] Os escritos de Heyting relacionados ao **IPC** e **IQC**, além da aritmética e análise estão em: HEYTING, A., 1956, p.13- 31.
[139] van ATTEN, Mark, April/2009.
[140] HEYTING, A., 1956, p.13- 31.
[141] MOSCHOVAKIS, J., Jul/2010.
[142] Em latim: *Arithmetices principia, nova methodo exposita*.

two properties (1 is an N and if x is an N, then the successor of x is an N) can immediately be seen to be true by carrying out the generating construction. (HEYTING, A., 1956, p. 13- 14.)

A **HA** pode ser considerada uma restrição da **PA**, dado que, ao usar a lógica intuicionista, não estamos autorizados a aceitar o TEX como princípio universalmente válido para esta aritmética. Existem fórmulas na forma $A \vee \neg A$ que são decidíveis pela **HA**. Um dos exemplos mais simples é $\forall x \forall y(x=y \vee \neg(x=y))$, a qual pode ser provada por indução. Além disso, se adicionarmos tanto TEX quanto DN ao conjunto de axiomas de **HA** temos uma teoria equivalente a **PA**.

Os axiomas lógicos e as regras de **HA** são formulados na Lógica de Predicados de Primeira Ordem Intuicionista, **IQC**. Na **HA** os axiomas não-lógicos possuem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva da '='; os axiomas que caracterizam '0' como o número natural e a função sucessor, S, caracterizada como uma função um-a-um.[143]

Para demonstração da equiconsistência entre **HA** e **PA** consideremos os seguintes axiomas de Peano:

1. $\forall x \neg(0 = Sx)$
2. $\forall x \forall y(Sx = Sy \rightarrow x=y)$
3. $\forall x(x+0 = 0)$
4. $\forall x \forall y(x+Sy = S(x+y))$
5. $\forall x(x*0 = 0)$
6. $\forall x \forall y(x*Sy = (x*y) + x)$
7. $A(0) \wedge \forall x\ (Ax \rightarrow ASx) \rightarrow \forall x Ax$

[143] O que Heyting considera função um-a-um pode ser compreendido como o processo de comparar um número natural construído em um determinado tempo, com outro número natural construído em outro tempo. Esta comparação é válida no Intuicionismo uma vez que Heyting compreende os números naturais como evidentes, construídos a partir de um processo puramente mental.
"FORM. You spoke repeatedly of equal natural numbers. What does that mean? Is not a definition of equality, based for instance on a one-to-one relation, necessary?
INT. Indeed this point needs some clarification; it forces me even to revise somewhat our notion of a natural number. If a natural number were nothing but the result of a mental construction, it would not subsist after the act of its construction and it would be impossible to compare it with another natural number, constructed at another time and place. It is clear that we cannot solve this problem if we cling to the idea that mathematics is purely mental. I n reality we fix a natural number, x say, by means of a material representation; to every entity in the construction of x we associate, e.g., a dot on paper. This enables us to compare by simple inspection natural numbers which were constructed at different times." (HEYTING, A., 1956, p. 14- 15)

Com base na definição indutiva da *Tradução Kolmogorov, Gödel e Gentzen* podemos estabelecer que, para todo A, se A é axioma de **PA**, então **HA** $\vdash$ G(A). O esquema $(A\vee\neg A) \rightarrow (\neg\neg A\rightarrow A)$ é intuicionisticamente válido. No sistema **HA** a fórmula

(1a) $\forall x\forall y(x=y\vee\neg(x=y))$

é válida intuicionisticamente, mesmo produzindo instâncias do TEX. Mas isso porque, como vimos, para todos os números n, temos que $n = n \vee \neg(n = n)$. De (1a) provamos em poucos passos

(2a) $\forall x\forall y(\neg\neg(x=y) \rightarrow (x=y))$.

Vale lembrar que a DN é derivável do TEX. Assim, de cada instância acima de $n=n \vee \neg(n=n)$ provamos $\neg\neg(n = n) \rightarrow (n = n)$.

Agora precisamos provar que as traduções dos axiomas de Peano são válidas em **HA**.

$G(\forall x\, \neg(0 = Sx)) = \forall x\, \neg\neg\neg(0 = Sx)$

HA$\vdash \forall x\, \neg\neg\neg(0 = Sx)$

$G(\forall x\forall y\, (Sx=Sy \rightarrow x=y)) = \forall x\forall y\, (\neg\neg(Sx=Sy)\rightarrow\neg\neg(x=y))$

HA$\vdash \forall x\forall y\, (\neg\neg(Sx=Sy)\rightarrow\neg\neg(x=y))$

O **axioma 7** de Peano indica o *Princípio da Indução*, que como vimos é necessário para demonstrarmos alguns casos específicos, que em lógica clássica seriam realizados através do TEX e da Redução ao Absurdo. Sua tradução é

$G(A(0) \wedge \forall x(Ax \rightarrow ASx) \rightarrow \forall xAx) \rightarrow GA(0) \wedge \forall x(GAx \rightarrow GASx) \rightarrow \forall xGAx$

Que também é uma instância do *Princípio da indução*.

A partir destas premissas podemos finalizar a demonstração da equiconsistência entre **HA** e **PA**. Suponha que **HA**$\vdash$ G(A). Logo, **PA**$\vdash$ G(A). Dado que $\vdash_c A\leftrightarrow G(A)$. Portanto, **PA**$\vdash A$.

Assim: se **HA**$\vdash$ G(A), então **PA**$\vdash A$.

Agora suponha que **PA**$\vdash A$.

Pelo Teorema, G(**PA**) $\vdash_i$ G(A). Mas para todo $A \in$ G (**PA**), **HA** $\vdash A$.

Então, **HA**$\vdash$G(A).

Assim: se **PA**$\vdash A$, então **HA**$\vdash$ G(A).

Portanto,

$$\mathbf{PA}\vdash A \text{ se, e somente se, } \mathbf{HA}\vdash \mathrm{G}(A).$$

Dado que G(⊥) = ⊥, **PA**⊢⊥ se, e somente se, **HA**⊢⊥. Está assim provada a equiconsistência da aritmética de Peano e a de Heyting.

O resultado da demonstração de equivalência entre **HA** e **PA** mostra que, além das similaridades compartilhadas entre estas duas teorias para os números naturais, todas as fórmulas válidas em uma, possuem uma correspondente válida na outra. Após a prova de Gödel dos Teoremas da Incompletude ficou estabelecida a impossibilidade de um sistema axiomático provar sua própria consistência, mas as Traduções de duplas negações apresentaram uma solução parcial para esta questão, evidenciando a possibilidade de demonstrarmos a consistência de um sistema relativa a outro sistema, como acontece no caso das teorias aritméticas **HA** e **PA**. A aceitação de Heyting dos axiomas de Peano, baseada na justificativa de que tais axiomas seriam evidentes no processo de construção de objetos matemáticos, reafirmam ainda de que maneira os raciocínios clássico e intuicionista são semelhantes quando não usam demonstrações impredicativas.

Com relação a impossibilidade do uso do TEX pela lógica intuicionista e sua aceitação em casos específicos na **HA**, isso é naturalmente justificável, uma vez que o dado princípio é aceito pelo Intuicionismo para domínios finitos de julgamento e sentenças atômicas de identidade $a = b$ envolvem, claro, domínios finitos. Ademais, a demonstração de equivalência entre estas duas teorias mostram que a rejeição do TEX pelo Intuicionismo não resultou em mudanças substanciais na aritmética. Pois a equivalência entre estas duas teorias evidenciam que, se algum axioma do sistema leva a contradição, então, este mesmo axioma poderia, através da *Tradução Kolmogorov, Gödel e Genzten*, ser derivada no outro sistema.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Intuicionismo foi fundado a partir das ideias do matemático L. E. J. Brouwer, seus intuitos iniciais estavam relacionados principalmente aos avanços matemáticos do século XIX e XX que levantaram novos problemas para esta ciência, relacionados, principalmente, a Teoria dos conjuntos e a Aritmetização da análise. Mas as ideias intuicionistas não se restringiram apenas a tentar encontrar respostas para as questões que abalavam a matemática no período de sua fundação. Esta filosofia da matemática e lógica que diverge das ideias clássicas acerca dos fundamentos da matemática e da atividade matemática, ainda inspira trabalhos na contemporaneidade.

As teorias intuicionistas influenciaram o desenvolvimento da teoria do significado de Michael Dummett, para quem o significado de uma língua deveria ser capaz de descrever de que maneira o conhecimento se manifesta através do uso que fazemos das frases. Baseando-se nesta concepção Dummett defendeu que o principio da bivalência, ancorado no realismo da matemática clássica, identificaria o significado de uma frase apenas baseado em sua condição de verdade, tendo dificuldades para lidar com as frases indecidíveis. A partir disso, ele afirmou que uma teoria do significado deveria ser capaz de identificar o significado de uma frase com algum aspecto de seu uso, em suma, o significado de uma frase é determinado pelo que conta como verificação da frase, posição que vai ao encontro da defendida pelo Intuicionismo.[144] Podemos citar também o desenvolvimento da teoria intuicionista relacionada à ciência da computação, especificamente, a *interpretação BHK*, que permitiu o desenvolvimento de um programa metodológico para a computação baseada na noção de prova.[145] Outro desenvolvimento no âmbito da matemática intuicionista é a *Teoria dos Tipos de Martin Löf*[146], introduzida pelo matemático sueco Per Martin Löf em 1971, como uma alternativa para os fundamentos da matemática baseados nos princípios do construtivismo matemático. Desta forma, podemos observar que o Intuicionismo não se restringiu a solução dos problemas relacionados à crise da matemática nos séculos XIX e XX, mas acompanhou novos desenvolvimentos que contribuem para discussão de problemas atuais em Filosofia e Matemática. Diante deste quadro, tornou-se relevante para nós

[144] Cf. SILVA, Jairo J. da, 2007, p. 158- 164.
[145] Cf. COQUAND, Thierry, 2004, p. 32- 34.
[146] Esta teoria também é conhecida como Teoria dos Tipos Intuicionista.
Cf. NORDSTRÖM, Bengt. PETERSSON, Kent. SMITH, Jan M., 1990, p. 01-09.

estudarmos a Filosofia da Matemática intuicionista e principalmente a rejeição do TEX defendida por esta escola.

O Intuicionismo ficou conhecido, em grande medida, por sua rejeição ao TEX, pois esta levou a calorosas discussões acerca dos fundamentos da matemática, principalmente com as posições contrárias a intuicionista, como as do Formalismo e do Logicismo. Além disso, como defendemos ao longo deste texto é a partir da rejeição do TEX que o Intuicionismo desenvolve noções matemáticas fundamentais para o entendimento da matemática intuicionista e que permitiram a formalização da lógica intuicionista, bem como, os desenvolvimentos posteriores, como as Traduções de Duplas Negações.

No decorrer desta dissertação tivemos como objetivo inicial a apresentação das noções de verdade, existência e infinito que fundamentam a matemática intuicionista fazendo um pequeno paralelo entre estas noções e o entendimento da matemática Clássica, na tentativa de elucidar de que maneira estes dois pontos de vista diferem em aspectos essenciais. Para argumentar a favor da rejeição do TEX em domínios infinitos de julgamentos, os principais intuicionistas do período fundacional, Brouwer, Heyting e Kolmogorov, criaram condições para sustentar a rejeição deste princípio e reconstruir a ciência matemática. Esta proposta de reconstrução implicou na necessidade de dar bases sólidas para esta ciência baseadas na ideia de *intuição*. Com isso em mente, propusemos uma análise dos conceitos fundacionais desenvolvidos pelo Intuicionismo, com vistas a entender porque a rejeição do TEX possibilitou o desenvolvimento de parte da matemática intuicionista, que acabou culminando no desenvolvimento das Traduções de Dupla Negação inicialmente proposta por Kolmogorov.

A rejeição do TEX proposta pelo Intuicionismo começou a ser esboçada por Brouwer quando percebeu o papel que a Lógica, como linguagem matemática, estava ocupando com os trabalhos dos Logicistas e Formalistas no começo do século XX. Para ele, a ciência matemática estava tornando-se subordinada à lógica, uma vez que as respostas para os problemas relacionados a atividade matemática estavam sendo procurados no âmbito da lógica. Para tanto, ele se empenhou em analisar as bases para a fundação da matemática, utilizando-se da linguagem matemática, ou seja, da lógica, apenas como uma ferramenta para comunicar resultados matemáticos. Dessa forma, Brouwer fundou o Intuicionismo como um programa construtivista.

O construtivismo em matemática defende que a existência dos objetos matemáticos e a verdade dos enunciados matemáticos só podem ser estabelecidos à medida que podemos construir tais objetos e provar (construtivamente) a verdade ou falsidade dos enunciados matemáticos. Neste sentido, o Intuicionismo desenvolve uma noção de verdade levantando-se contra o princípio de bivalência, defendido pela matemática clássica, que afirma que um enunciado matemático é, necessariamente, verdadeiro ou falso independente de termos meio de conhecer qual dos casos se mantém, e argumentando que a verdade de um enunciado matemático não poderia estar atrelada a sua condição de verdade que leva em consideração seu ajustamento com uma realidade suprassensível previamente existente. Portanto, a verdade de um enunciado matemático deve estar relacionada à existência de uma prova direta capaz de decidir este enunciado, isto é, o matemático deve ser capaz de verificar caso a caso, ou apresentar um algoritmo que o possibilite decidir se o dado enunciado é ou verdadeiro, ou falso.

Brouwer observou que a noção de verdade ancorada no princípio da bivalência teria nos permitido depositar uma crença indubitável na validade universal do TEX e nota também que esta crença estaria relacionada ao fato de que, em condições finitas seria possível verificarmos se dado enunciado é verdadeiro ou se sua contraposição é verdadeira.[147] Tal possibilidade de verificação em domínios infinitos o levou a restringir a rejeição ao TEX a enunciados em domínios infinitos de julgamento. Sendo assim, seria necessário reconstruirmos a noção de verdade intuicionista sem fazer uso deste princípio e em consonância com a ideia de prova para determinação da verdade ou falsidade de um enunciado.

O TEX enuncia que dado um enunciado A, ou é o caso que A é verdadeiro, ou é o caso que $\neg A$ é verdadeiro. A afirmação deste princípio nos permite entender que mesmo sem conhecer a prova de um enunciado matemático este, necessariamente, ou será verdadeiro ou sua negação será verdadeira. Mas o Intuicionismo pontua que esta condição não poderia ser estabelecida sem termos meios de provar que ou A é verdadeiro, ou que $\neg A$ é verdadeiro. É com base nestes pressupostos teóricos que construímos nossa argumentação na tentativa de mostrar que a noção de verdade tal como concebida pelo Intuicionismo argumentou a favor da rejeição do TEX, pois lançou os pressupostos teóricos que evidenciaram porque a validade deste princípio poderia ser colocada em dúvida, quando estamos reconstruindo a fundação da matemática dentro de uma visão construtivista.

Seguindo com o mesmo intuito de mostrar as noções fundacionais da matemática intuicionista que argumentaram a favor da rejeição do TEX, fizemos um paralelo entre a noção de existência clássica e intuicionista. Para os clássicos a noção de existência

[147] Ressaltamos que em domínios finitos "enormes" a possibilidade de aplicar o verificacionismo se torna inviável, devido a nossa finitude.

desenvolveu-se respaldada na concepção realista defendendo que os objetos matemáticos são entidades reais e que sua existência não dependeria do nosso conhecimento sobre eles, em outras palavras, os objetos matemáticos são entidades independentes da mente. Em contrapartida, o Intuicionismo entende que objetos matemáticos só existem à medida que podemos construí-los. Baseado na ideia de construção, o conceito de existência de um objeto matemático depende da mente humana, por isso a denominação *construções mentais*.

O entendimento da noção de existência a partir do conceito de construções mentais permitiu o desenvolvimento da Interpretação *BHK* que captou o significado dos conectivos e quantificadores lógicos de acordo com as ideias intuicionistas. Com esta interpretação, o uso do TEX nas construções das provas de existência de um objeto matemático é rejeitado em contextos infinitos, pois garantiria a existência de objetos transcendentes, o que é negado pelo Intuicionismo. O referido princípio afirmaria que a demonstração de ($A \vee \neg A$) consiste em uma demonstração de A ou em uma demonstração de $\neg A$, e é claro que em domínios finitos podemos obter uma demonstração de A ou de $\neg A$ (ou pelo menos apresentar um algoritmo que decida entre A e $\neg A$ em um número finito de passos). Por exemplo, dado um conjunto finito {1, 2, 3, 4, 5, ..., 200} de números naturais, podemos demonstrar que a Conjectura de Goldbach se mantem, ou seja, todo número par maior que 4 nesse conjunto é a soma de dois números primos. Contudo, existem problemas matemáticos que não podemos demonstrar quando estamos em domínios infinitos, como é o caso da própria Conjectura de Goldbach, e outras conjecturas, por não possuirmos meios de operar uma construção que ou demonstre A, ou que demonstre $\neg A$.

A noção de existência intuicionista fortalece a ideia de que o TEX não poderia ser válido universalmente. Não existem garantias de que o uso do TEX seja válido para domínios infinitos quando rejeitamos a ideia de que objetos matemáticos existem independentemente de termos uma construção de tais objetos, ou seja, livre do nosso conhecimento acerca da existência destes. Consequentemente, a existência intuicionista apoia a rejeição ao TEX por conceber a existência a partir das construções mentais e por rejeitar a existência independentemente da mente.

No que concerne à rejeição ao TEX a noção de infinito também foi determinante. O infinito intuicionista foi construído com base na ideia de infinito potencial, acompanhando a exigência de que a matemática seja reconstruída com base na intuição. Neste sentido, o infinito completado, entendido como um conjunto que contem um número infinito de elementos, não poderia ser aceito, porque não nos mostra como estes objetos são construídos, sendo uma noção não-construtiva. Para a matemática intuicionista o infinito deve ser compreendido como a aplicação de uma regra de construção com série infinita de etapas, o que significa que, concluída uma etapa, há sempre outra posterior que necessita ser construída, e como exemplo podemos entender o processo de contar números naturais {1,2,3,4,5...}.

A compreensão da noção de infinito como potencial é favorável à rejeição do TEX, pois este conceito requer uma regra de geração identificada em um segmento inicial de números que nos permitiria continuar indefinidamente a aplicar tal regra. Dessa forma, a aplicação do TEX seria impossibilitada pela nossa incapacidade de determinar o valor de verdade ou falsidade para um enunciado matemático em que o processo de aplicação não tem fim. A alegação intuicionista é que o entendimento do infinito como totalidade definida e determinada é conivente com a aceitação universal do TEX, pois utiliza do mesmo raciocínio usado para domínios finitos. Em domínios finitos é possível determinarmos, verificando caso a caso, qual dos disjuntos se mantem. O infinito como totalidade permite que determinemos um valor de verdade ou falsidade para determinado enunciado matemático, pois este é entendido, em síntese, como um objeto. Sendo assim, a não aceitação ao TEX por parte dos matemáticos intuicionistas é fundamentada em uma concepção da matemática como uma ciência e atividade que exige a construção dos objetos matemáticos e a demonstração de sua verdade ou falsidade estando em concordância com o entendimento de infinito potencial.

A rejeição ao TEX pelo Intuicionismo foi motivada principalmente pela tentativa de superação de problemas relacionados à fundação da matemática e pela superação da dependência à lógica como linguagem matemática. Mas as implicações desta rejeição são essenciais para o entendimento de noções matemáticas fundamentais para esta ciência. As noções de verdade, existência e infinito são cruciais a matemática, pois determinam como devem ser interpretados os valores de verdade de um enunciado; o que são objetos matemáticos; e, como devem ser interpretados os enunciados matemáticos de acordo com seu domínio, seja este finito ou infinito. Dessa maneira, podemos entender que estas noções sustentam a rejeição do TEX, à medida que, mostram porque o uso do TEX não poderia ser válido diante de uma atividade matemática que não é condizente com a crença em uma realidade determinada e independente da mente; a existência de objetos matemáticos transcendentes; e a existência de uma totalidade infinita definida e determinada. A matemática intuicionista está ancorada em uma prática matemática que preza pelas ideias de construção e prova, o que levou a rejeição do TEX, visto como fonte de problemas, e em contrapartida reestruturou a fundação da matemática com noções que dão suporte para esta não-aceitação.

No capítulo 3 apresentamos as traduções de Duplas Negações que foram realizadas por contemporâneos de Brouwer, os matemáticos A. Kolmogorov, K. Gödel e G. Gentzen. Tais trabalhos surgiram em um contexto de tentativa de demonstrar a consistência da matemática clássica relativa à matemática intuicionista. Contudo, é preciso ressaltar que a primeira tradução realizada por Kolmogorov em 1925 também tinha como objetivo mostrar que o uso do TEX, considerado ilegítimo pelo Intuicionismo, ainda não teria resultado nenhuma contradição. Esse trabalho apresenta diferenças com relação aos trabalhos posteriores, de Gödel e Gentzen, principalmente no que diz respeito à escolha dos conectivos e quantificadores lógicos, e à escolha dos sistemas axiomáticos da aritmética clássica e intuicionista. Não foram apresentadas em detalhe as provas de Kolmogorov, Godel e Gentzen, mas apenas as linhas gerais e ideias básicas.

Nosso intuito com as Traduções de Duplas Negações foi mostrar de que maneira a lógica intuicionista, baseada no pensamento filosófico e matemático do Intuicionismo, se relaciona com a lógica clássica, fundamentada no realismo matemático. Para tanto, apresentamos as traduções, que de maneiras independentes, mostraram que podemos estabelecer que para toda fórmula válida classicamente, existe uma fórmula derivável, na tradução, que é intuicionisticamente válida. Posteriormente, apresentamos uma prova mais detalhada, baseada em Troelstra (1996), da equiconsistência da Aritmética de Peano, relativa a um sistema aritmético intuicionista, Aritmética de Heyting.

A finalidade destas apresentações teóricas relacionadas às traduções foi elucidar que a rejeição do TEX pelo Intuicionismo não traria a solução para os problemas da fundação da matemática, como Brouwer inicialmente parecia pressupor. Além disso, procuramos esclarecer que as diferenças entre estas duas filosofias da matemática estariam fortemente relacionadas às definições de noções fundacionais desta ciência, por exemplo, as noções de verdade, existência e infinito matemático, e também em como são realizadas as demonstrações matemáticas; e não simplesmente ao desenvolvimento da linguagem lógica que fundamenta estas, como fica evidente na demonstração da equiconsistência entre **HA** e **PA**.

Nosso trabalho não teve como objetivo afirmar que o TEX não levaria a contradições na matemática. Mostramos que a rejeição do TEX pelo Intuicionismo não livra a aritmética de chegar a contradições, uma vez que, através das Traduções de Dupla negação constatamos a possibilidade de obtermos intuicionisticamente fórmulas correspondentes às fórmulas válidas classicamente, o que no caso de uma contradição, se obtida classicamente, seria também obtida intuicionisticamente. Por fim, podemos afirmar que a rejeição ao TEX pelos intuicionistas abriu um caminho para a filosofia e para a matemática com muitas possibilidades para engendrar novos desenvolvimentos e campos de discussões.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BENACERRAF, P.. PUTMAN (Eds.). *Philosophy of mathematic*. 2°ed, 1983. Cambridge University Press.

van ATTEN, Mark. *The development of Intuitionism logic*. April/2009. In: Stanford encyclopedia of Philosophy.
Disponível em: http://plato.stanford.edu/entries/intuitionistic-logic-development/#5.2
Acesso em: 12/01/2013.

BROUWER, L. E. J.. *On the foundation Mathematic*. 1907. In: HEYTING, A. (Ed.) p. 13-98, 1975.

BROUWER, L. E. J.. *The unreliability of the logical principles*. 1908. In: HEYTING, A. (Ed.) p. 107- 111, 1975.

BROUWER, L. E. J.. *Intuitionism and Formalism*, 1912. In: HEYTING, A. (Ed.) p. 123- 138, 1975.

BROUWER, L. E. J.. *Intuitionistische Zerlegung mathematischer grundbegriffe*.1923. In: HEYTING, A. (Ed.) p. 251-256, 1975.

BROUWER, L. E. J.. *Intuitionism reflections on Formalism*.1927. In: van HEIJENOORT (Ed.) p. 490-492, 1967.

BROUWER, L. E. J.. *Mathematics, Science and Language*.1928a. In: EWALD, W. (Ed.), v.II, p. 1170-1185, 1996.

BROUWER, L. E. J.. *The structure of continuum*.1928b. In: EWALD, W. (Ed.), v.II, p. 1186-1197, 1996.

BROUWER, L. E. J.. *Signific Dialogues*. 1934. In: HEYTING, A. (Ed.) p. 447-452, 1975.

BROUWER, L. E. J.. *Synopses of the Signific movement in the Netherlands: Prospects of the Signific movement*. 1946. In: HEYTING, A. (Ed.) p. 468, 1975.

BROUWER, L. E. J.. *Guidelines of intuitionistic Mathematics*.1947. In: HEYTING, A. (Ed.) p. 477, 1975.

BROUWER, L. E. J.. *Consciousness, Philosophy and Mathematics*.1948a. In: HEYTING, A. (Ed.) p. 480- 494, 1975.

BROUWER, L. E. J.. *Essentially negative properties*.1948b. In: HEYTING, A. (Ed.) p. 478-479, 1975.

BROUWER, L. E. J.. *Historical backgrounds, principles and methods of Intuitionism*. 1952. In: EWALD, W. (Ed.), v. II, p. 1197-1207, 1996.

BROUWER, L. E. J., *The effect of Intuitionism on Classical algebra of logic*. 1955. In: HEYTING, A. (Ed.) p. 551-554, 1975.

BURRIS, Stanley. *The algebra of logic tradition*. May/2009. In: Stanford encyclopedia of Philosophy.
Disponível em: http://plato.stanford.edu/entries/algebra-logic-tradition/.
Acesso: 23/08/2013.

CARVALHO, Tadeu F. de. D'OTTAVIANO, Ítala M. L.. *Sobre Leibniz, Newton e os infinitesimais: das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente*. In: Revista PUCSP, v.08, n.1, p. 13-43, 2006.
Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/544/432
Acessoem: 21/02/2014.

CHARPENTIEN, Eric. LESNE, Annick. NIKOLAÏ, K. (Eds.). *Kolmogorov's Heritage in Mathematics*. 2004. Berlin: Springer.

CHATEAUBRIAND, O., *Lógica, Ontologia e Epistemologia*. Fev/2011.

CHATEAUBRIAND, O.. *Lógica e conhecimento*. In: Revista Analytica, v. 11, n.01, p. 13-52, 2007.
Disponível em: http://www.analytica.inf.br/analytica/diagramados/121.pdf
Acesso: 12/01/2014.

CONIGLIO, Marcelo E.. *Teoria Axiomática de Conjuntos: uma introdução*. 2007.
Disponível em: http://www.cle.unicamp.br/prof/coniglio/CONJUN.pdf
Acessoem: 21/08/2013.

COQUAND, Thierry. *Kolmogorov's contribution to intuitionistic logic*. 2004. In: CHARPENTIEN, Eric. LESNE, Annick. NIKOLAÏ, K. (Eds.). p. 19-40, 2004.

DFEZ-PICAZO, Gustavo E.. *Brouwer understanding of the logical constants*. In: Indian Philosophical quarterly, v. 27, n.13, Jul/2000.
Disponívelem: http://www.unipune.ac.in/snc/cssh/ipq/english/IPQ/26-30%20volumes/27-3/27-3-1.pdf
Acesso: 08/04/2013.

DUMMETT, M.. *Elements of Intuitionism*. 2°ed, 2000. Oxford: Clarendon Press.

DUMMETT, M.. *Truth and other enigmas*. 1978. Cambridge MA: Harvard University Press.

van DALLEN, Dirk. *Intuitionistic logic*. 2001. In: GOBLE, L. (Ed.). The Blackwell guide to Philosophical logic, 2001. Massachusetts: Blackwell Publishes.

van DALLEN, Dirk. *Kolmogorov and Brouwer on constructive implication and the Ex-false*. In: Russian Math Surveys, v. 59, p. 247-257, 2004.
Disponível em: www.phil.uu.nl/~dvdalen/articles/Kolmogorov-paper-vanDalen%20copy.pdf
Acesso: 08/10/2013.

EWALD, W. (Ed.), *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of Mathematics*, v. II, 1996. Oxford: Clarendon Press.

EVES, H.. *Introdução à história da Matemática*. 2004. Campinas-SP: Editora UNICAMP.

FEITOSA, Hércules. *Traduções conservativas*. 1997. Campinas-SP: UNICAMP- Tese (Doutorado em Filosofia).

FEFERMAN, Soloman (Ed.). *Kurt Gödel collected works: publications 1929-1936*.1986. Oxford: Oxford University Press.

FERREIRA, Fernando, *Grundlagenstreit e o Intuicionismo brouweriano*. Jun/2006. In: Universidade Lisboa.
Disponível em: http://www.ciul.ul.pt/~ferferr/FF_Brouwer_BSPM_final.pdf
Acesso: 09/06/2013.

FERREIRÓS, José. *The early history of Intuitionism*. *Jul/2001*. In: Stanford encyclopedia of Philosophy.
Disponível em: http://plato.stanford.edu/entries/settheory-early/
Acesso: 13/09/2013.

GENTZEN, G., *On the relation between Intuitionistic and classical*. 1935. In: SZABO, M. E. (Ed.), p. 53-66, 1969.

GEORGE, A.. VELLEMAN, D. J.. *Philosophies of Mathematics*. 2002. Massachusetts: Blackwell Publishes.

GÖDEL, K.. *On intuitionistic arithmetic and number theory*. 1933. In: FEFERMAN, Soloman (Ed.), p. 287-299, 1986.

GOMIDE, Anamaria. *Cardinalidade de conjuntos*. 2010, p. 147-151.
Disponível em: www.ic.unicamp.br/~anamaria/cursos/MC348/2010-2/livro-apost-07.pdf
Acesso: 07/02/2014.

GUNDLACH, Bernard H.. *Números e numerais*. 1994. São Paulo-SP: Atual Editora.

HAACK, S., *Filosofia das Lógicas*. 2002. São Paulo-SP: Editora UNESP.

Van HEIJENOORT (Org.). *From Frege to Gödel: a source book in Mathematical logic*, 1967. Cambridge MA: Harvard University Press.

HEYTING, A.. *The formal Rules of Intuitionistic logic*. 1930. In: MANCOSU, P. (Ed.). p. 311-327, 1998.

HEYTING, A.. *Intuitionism: an introduction*. 1956. Amsterdam: North–Holland.

HEYTING, A.. *The intuitionistic foundations of Mathematics*.1931. In: BENACERRAF, P.. PUTMAN. p. 52-61, 1983.

HEYTING, A. (Ed.). L. E. J. *Brouwer Collected Works: Philosophy and Foundations of Mathematics*. 1975. Oxford: Oxford University Press.

IEMHOOF, R.. *Intuitionism in the Philosophy of Mathematics*. Ago/2013. In: Stanford encyclopedia of Philosophy.
Disponível em: http://plato.stanford.edu/entries/intuitionism/
Acesso em: 15/09/2013.

KANT, Immanuel, *Crítica da Razão Pura*. In: KOHDEN, V.. MOOSBURGER, U. B. (Eds.) Coleção: Os pensadores. 1999.

KENNEDY, Juliette. *Kurt Gödel*. Jul/2011. In: Stanford encyclopedia of Philosophy.
Disponível em: http://plato.stanford.edu/entries/goedel/
Acesso em: 03/03/2014.

KOLMOGOROV, A.. *On the principle of excluded middle*.1925. In: van HEIJENOORT, J.. p.414-437, 1967.

KOLMOGOROV, A.. *On the interpretation of intuitionistic logic*. In: MANCOSU, P.. p. 328-334, 1998.

MANCOSU, P. (Ed.). *From Brouwer to Hilbert: the debate of the foundations of mathematics in the 1920's.* 1998. Oxford: Oxford University Press.

MOMETTI, A. L.. *O infinito e as metáforas no Ensino do Cálculo*. 2007. São Paulo-SP: PUC-Tese (Doutorado em Educação Matemática).

MOORE, A. W.. *The infinite*.1990, 2°ed.. New York: Routledge.

MOREIRA, Carlos G.. *Introdução à teoria dos números*. 2002. Michigan: Universidade de Michigan.

MOSCHOVAKIS, Joan. *Intuitionistic logic*. Jul/2010. In: Stanford encyclopedia of Philosophy.
Disponível em: http://plato.stanford.edu/entries/logic-intuitionistic/
Acesso em: 03/05/2013.

NORDSTRÖM, Bengt. PETERSSON, Kent. SMITH, Jan M., *Programming in Martin-Löf's Type Theory: An Introduction*, 1990. Oxford University Press.
Disponível em: http://www.ens-lyon.fr/denif/data/martin_lof_prog/1990/contenu/book.pdf
Acesso em: 31/08/2014.

da PAZ, Maria N de M.. *Traduções via teoria da prova: aplicações à lógica linear*. 2002. EDUFRN.

PIETARINEN, Ahti-Veikko. *Significs and the origins of analytic Philosophy*. In: Journal of the History of Ideas. v. 70, p. 467-490, Jul/2009.

PLACEK, T.. *Mathematical, Intuitionism and intersubjectivity: a critical exposition of arguments for Intuitionism*. 1999. Berlin: Springer.

PLACEK, T.. *On the Brouwer criticism of Classical logic and mathematics*. 1997. In: Logic and Logical Philosophy. v. 05, p. 19-33, 1997.

POSY, C..*Brouwer versus Hilbert: 1907-1928*. In: Science in context. v. 11, p.291-325, 1998.

POSY, C.. *Intuitionism and philosophy*. 2005. In: SHAPIRO, S.. p. 318-355, 2005.

SHAPIRO, S.. *Philosophy of Mathematics and Logic*.2005. Oxford: Oxford University Press.

SILVA, Jairo J. da. *Filosofias da matemática*. 2007. São Paulo-SP: Editora UNESP.

SZABO, M. E. (Ed.), *The collected papers of Gerhard Gentzen*. 1969. Amsterdam: North-Holland.

RAATIKAINEN, Panu. *Conceptions of truth in intuitionism*. In: History Philosophy of Logic, n.25, p.131-145, May/2004.

RECK, Erich. *Dedekind's contributions to the foundations of mathematics*. Sep/2011. In: Stanford encyclopedia of Philosophy.
Disponível em: http://plato.stanford.edu/entries/dedekind-foundations/
Acesso em: 11/02/2014.

RICKLESS, Samuel. *Plato's Parmenides*. Jul/2011. In: Stanford encyclopedia of Philosophy.
Disponível em: http://plato.stanford.edu/entries/plato-parmenides/
Acesso em: 14/02/2014.

TROELSTRA, A. S.. *The theory of choice sequences*. In: Studia logica. v. 25, p. 31-51, 1969.

TROELSTRA, A. S.. *Introductory note to 1933e*. 1986. In: FEFERMAN, Solomon (Ed.). v. I, p. 281-286, 1986.

TROELSTRA, A. S.. van DALLEN, Dirk. *Constructivism in mathematics: an introduction.* v.I, 1988. Amsterdam: North-Holland.

TROELSTRA, A. S.. SCHWICHTENBERG, H.. *Basic Proof Theory,* 1996. Cambridge University Press