1. INTRODUÇÃO

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), a álgebra é um dos eixos estruturadores do ensino fundamental, pois ela constitui um espaço em que os alunos podem desenvolver capacidades de abstração e generalização e também adquirem ferramentas para a resolução de problemas. O PCN sugere que o ensino da álgebra deve ser feito de forma clara e objetiva, procurando sempre que a construção do conhecimento por parte dos alunos.

A cada dia que se passa, vemos na sala de aula que o estudo da álgebra está ligado inteiramente à manipulação simbólica e resolução de equações que são apresentadas de modo formal, com poucas aplicações e com excesso de exercícios meramente mecânicos, sem dar ideia do porque que se estuda tudo aquilo. Por isso, é de extrema importância que professor e aluno entendam os conceitos algébricos e as estruturas que estão em torno das manipulações algébricas e como os símbolos podem ser usados para expressar as ideias algébricas.

Como professor também do ensino fundamental, queria realizar um trabalho voltado para minha prática docente. Sendo assim, resolvi realizar uma pesquisa qualitativa sobre “PENSAMENTO ALGÉBRICO: GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES”. Um tema bastante oportuno uma vez que, a maioria dos alunos do ensino fundamental apresenta muitas dificuldades na resolução de problemas algébricos. E muitas vezes os alunos buscam caminhos complicados e errados de resolução ou esperam a solução apresentada pelo professor e dessa forma a construção dos conhecimentos algébricos busca fica cada vez mais distante.

O primeiro passo do trabalho foi viajar para Campinas-SP para participar do II Seminário de História e Investigação de/em aulas de Matemática, para pesquisar e aprender sobre investigação matemática. No II SHIAM, tive a oportunidade de conhecer e conversar com Dário Fiorentini, Doutor em Educação. Ele tem pesquisado muito sobre o ensino de álgebra e a generalização de padrões como ferramenta do processo do ensino-aprendizagem. Uma dessas pesquisas visa desenvolver a interdependência entre a linguagem e pensamento matemático, ele propõe que no ensino da álgebra sejam exploradas situações problemas que demandem a utilização da generalização de padrões como ferramenta.

O segundo passo do trabalho foi escolher uma série escolar, no caso o 9º Ano, com o objetivo de pesquisar como os alunos lidariam com atividades que exploravam a generalização de padrões a partir de sequências simbólicas. Seguidamente, se analisam os resultados qualitativos obtidos no trabalho e as estratégias criadas e utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas propostos.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 O ensino da álgebra

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, a álgebra no ensino fundamental é um espaço significativo de abstração e generalização e uma poderosa ferramenta para resolver problemas. Na prática docente é comum observar que os professores estão cada vez mais distantes do ensino que é abordado nos PCNs.

Os PCNs orientam os professores a utilizarem situações que levam os alunos a construírem por se próprios as noções algébricas, ao invés de dedicar-se somente a prática de exercícios mecânicos e repetitivos que são, na maioria das vezes, ineficazes. Tal prática pode causar um grave prejuízo, também, na aprendizagem de outros assuntos da matemática. Outra situação que pode atrapalhar na aprendizagem, é que alguns professores na tentativa de ensinar a álgebra e torná-la mais significativa, buscam lá no ensino médio conceitos formais, mas não é suficiente a apresentação do conhecimento formalizado, é necessário incentivar o descobrimento por parte do aluno, pois isso facilita a assimilação do conceito. Pesquisa de natureza cognitiva mostra que é mais eficiente o processo de aprendizagem se o aluno pode recriar e refazer. Portanto, o professor deve permitir que o aluno construa seu próprio conhecimento. Como George Polya, afirma:

> Um professor de matemática tem uma grande oportunidade em mãos. Se reencher seu tempo apenas ensinando algoritmos, perde a oportunidade, pois mata o interesse dos alunos e bloqueia seu desenvolvimento intelectual. Se, por outro lado, provoca-lhes a curiosidade através de problemas proporcionais a seu conhecimento e os acompanha com questões estimulantes, estará lhes oferecendo o desejo e os meios para o desenvolvimento independente.
>
> (George Polya, 1945)

O professor deve ter clareza do papel da álgebra dentro do currículo antes de tomar qualquer decisão para a abordagem desse assunto. Além disso, deve-se refletir de que forma os alunos constroem o conhecimento matemático. Logo, é de grande importância que os alunos não tenham contato com a álgebra somente através de manipulações de expressões algébricas ou de resolução de equações e sim criar estratégias que incentivem os estudantes a pensarem e a buscarem a noção algébrica através de exercícios de regularidades simbólicas ou numéricas, observando as relações e particularidades ali presentes. Dessa maneira, os alunos receberam ferramentas para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

> Existe um razoável consenso de que para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra. (PCN, 1998 – página 116)
>
> portal.mec..gov.br/seb/arquivos/pdf/**matematica**.pdf

De acordo com os PCNs, o quadro abaixo representa as diferentes etapas da álgebra no ensino fundamental:

Álgebra no ensino fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

portal.mec..gov.br/seb/arquivos/pdf/**matematica**.pdf

Essas diferentes representações, muitas vezes, não são desenvolvidas em todos os seus aspectos pelos professores, pois eles, talvez, preferem trabalhar somente com as manipulações de expressões e resoluções de equações. Mas para desenvolver o pensamento algébrico é preciso muito mais que isso. O professor deve estimular os estudantes a entenderem os conceitos algébricos e o sentido das manipulações simbólicas e como esses símbolos podem ser usados como uma linguagem expressiva das ideias matemáticas.

A proposta de situações que levem os alunos a explorar padrões de sequência numéricas ou simbólicas e generalizar regularidades favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico e consequentemente a construção da linguagem algébrica.

Segundo **Fiorentini, Miorim e Miguel**, existem três concepções de educação algébrica que, de acordo com a história, vem ao longo dos tempos influenciando no ensino da matemática elementar.

A primeira concepção é chamada de **linguístico-pragmática** e foi predominante no século XIX até a metade do século XX. Dava-se a entender que o papel principal do ensino da álgebra era fornecer ao aluno um instrumento técnico, que se encontrava acima da aritmética e que auxiliava na resolução de equações e problemas dentro da álgebra. Ainda de acordo com essa concepção o aluno deveria dominar, mesmo que fosse de forma mecânica, a técnica que lhe dava suporte na aplicação das regras e das propriedades algébricas. E somente isso seria o suficiente para a aprendizagem algébrica.

O ciclo do ensino da álgebra tinha como ponto de partida o cálculo literal, ou seja, o aluno deveria saber manipular as operações básicas como: adição, subtração, multiplicação e divisão de expressões algébricas. Este estudo era desenvolvido a partir de muitos exercícios, e visava habilitar o aluno a manipular de forma precisa essas expressões algébricas. E somente depois de tudo isso é que era permitido introduzir os problemas que exigiam dos estudantes as aplicações algébricas.

A segunda concepção é chamada de **fundamentalista-estrutural**, que predominou no entre 1970 e 1980. Essa trouxe consigo uma nova maneira de entender a álgebra e tinha por base às propriedades estruturais, que serviam de ponte para justificar e fundamentar as passagens "misteriosas" da álgebra.

Essa concepção entendia que o papel do ensino da álgebra era fornecer ao aluno os fundamentos lógico-matemáticos que seriam usados durante toda sua vida escolar. Os temas sugeridos para o entendimento da álgebra eram apenas os que estavam dentro do campo numérico, da Teoria dos Conjuntos, das estruturas e propriedades comutativas da adição e multiplicação, associativa, elemento neutro, relações e funções. Desta forma, tais aplicações justificavam logicamente cada passagem no procedimento algébrico.

A terceira concepção é conhecida como **fundamentalista-analógica** e essa por sua vez "mistura um pouco" as duas concepções citadas anteriormente, ou seja, recupera e valoriza o trabalho instrumental da álgebra e resguarda a idéia fundamentalista, contudo a sua base não contém de propriedades estruturais, mas, sim utiliza modelos semelhantes aos geométricos ou físicos que permitem que os alunos percebam e visualizem as passagens algébricas.

De acordo com Fiorentini (1993) existe um ponto problemático e comum entre as três concepções citadas, é que elas acabam reduzindo o ensino da álgebra às suas características linguísticas e transformistas, destacando uma linguagem algébrica já formulada que exige do aluno um poder de controle sob as manipulações de expressões algébricas e isso causa um prejuízo na construção do pensamento algébrico. Ainda segundo Fiorentini os elementos principais que caracterizam o pensamento algébrico são:

> Percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença de generalização. (Fiorentini, 1993, p.87)

O autor sustenta que é necessário criar novas técnicas mais significativas no ensino da álgebra, técnicas que levem os alunos a raciocinar e pensar matematicamente. Sendo assim, ele acredita que o pensamento algébrico se desenvolve de forma gradativa e que isso pode ocorrer previamente à existência de uma linguagem algébrica formal. Assim, a proposta de Fiorentini, era criar uma quarta concepção de educação algébrica, que visava desenvolver uma interdependência entre a linguagem e o pensamento algébrico, esta quarta concepção é descrita por ele da seguinte forma:

> Exploração de situações-problema relativamente abertas ou problematização de fatos tidos como aritméticos ou geométricos que demandem a construção de generalização, a representação de número generalizado ou de grandezas incógnitas e variáveis. (Fiorentini, 2006, p. 232)

A próxima etapa nessa concepção seria dar ao aluno uma expressão algébrica puramente simbólica, com isso o estudante tentaria atribuir a ela um significado matemático. Dessa forma, somente após essa etapa é que o cálculo algébrico ganharia certo destaque no processo do ensino da álgebra, facilitando assim a última etapa do processo, que levaria a formalização das expressões algébricas dentro dos procedimentos que validam essas transformações.

Essas etapas nem sempre ocorrem necessariamente nesta ordem. Um exemplo disso é o estudo de padrões de sequências simbólicas ou numéricas, como por exemplo, as atividades propostas neste trabalho, em que alguns momentos os alunos criaram suas próprias estratégias para representar a generalidade dos padrões numéricos nelas presentes. Contudo, o exercício da manipulação algébrica, propriamente dita, não será o principal objetivo didático nas aulas de matemática.

Acredita-se que a maioria dos professores de matemática acha que o ensino da álgebra é muito importante na vida escolar e essa por sua vez traz muitas dúvidas e embaraços na cabeça dos alunos na hora de aplicá-la de forma significativa. Em muitos momentos em sala de aula nós professores nos deparamos com perguntas do tipo: “Para que serve aprender álgebra?” ou até mesmo, “Isso vai me ajudar em que no meu dia-dia?”. Como às vezes não sabemos responder de forma clara a utilidade da álgebra, eles param de perguntar e passam a trabalhá-la de maneira mecânica, ou seja, não entendem o verdadeiro significado da álgebra, mas mesmo assim aceitam e decoram as propriedades e os macetes para manipular as expressões algébricas.

Tentaremos refletir sobre o trabalho que é exercido pelo professor na hora de ensinar álgebra a seus alunos e também tentar descobrir quais são as barreiras e obstáculos e falhas cometidas por eles.

Normalmente o ensino da álgebra começa no 7° ano, quando o aluno tem que substituir as letras pelos números ou até mesmo representar uma sentença matemática na forma simbólica. Dessa forma, surge uma nova linguagem no estudo matemático, isto é, a forma algébrica. Segue exemplos:

- O triplo de um número x: $3 \cdot x$
- A minha idade daqui a dez anos: $x+10$
- A área de um quadrado de lado u: u^2

E logo após, é apresentado ao aluno o conceito de incógnita para a resolução de problemas, equações e sistemas.

A partir dessa série, o trabalho é voltado para as equações, então num certo momento as letras são consideradas números desconhecidos, que em breve após alguns cálculos, elas serão descobertas. E ainda, normalmente se trabalha apenas com equações e sistemas que apresentam uma única solução, ou seja, o que é chamado de variável não varia.

Ao final do 7° ano, trabalham-se as inequações após um estudo que enfatizou totalmente as incógnitas. Com isso, os alunos cometem muitos erros graves dentro desse tema, pois não conseguem perceber as diferenças existentes entre alguns sinais como: = (igual), > (maior), < (menor), $\geq$ (maior ou igual) e $\leq$ (menor ou igual). Logo, eles acabam tratando todos os exercícios de inequações da mesma forma decorada de resolver uma equação qualquer. Por exemplo:

- $-m > 10 \Rightarrow m > -10$
- $-3 \cdot x \leq 15 \Rightarrow x \leq \dfrac{15}{-3} \Rightarrow x \leq -5$.

Pode-se dizer que como esse tipo de ensino se enfatiza a resolução isolada sem num critério e contextualização, tais “escorregões” acabam sendo cometidos pelos alunos. Portanto, o aluno não consegue melhorar a sua capacidade de interpretar e os professores devem entender e perceber a necessidade de trabalhar o pensamento algébrico nesta série.

No oitavo ano, muda-se radicalmente o enfoque. Agora as letras são meros objetos e o papel “equivocado” do professor é ensinar aos seus alunos a manipular as propriedades aritméticas, tais como: adição, subtração, multiplicação e divisão de expressões algébricas. A maior parte do conteúdo trabalhado nessa série é considerada abstrata e de acordo com os alunos o nível de dificuldade aumenta. Este também é o pensamento da maioria dos professores.

O conteúdo apresentado no 8° ano é seguido de várias regras que devem ser decoradas e usadas numa ordem pré-definida, pois de acordo com o “costume” cada uma dessas regras depende das anteriores. Por exemplo, a fatoração só poderá ser trabalhada após o treinamento operacional com os monômios, binômios, trinômios e polinômios, e ainda, as equações fracionárias após o contato com as equações consideradas mais simples e o estudo de todas as regras de fatoração.

Os alunos sempre perguntam: *"Quando e em que iremos aplicar tudo isso?"* e a resposta do professor geralmente é: *"No 9° ano, quando se trabalha com as equações de 2° grau e também para ajudar na simplificação das frações algébricas"*. Com isso, percebe-se que a álgebra estudada no 8° ano não serve exatamente para nada, a não ser como meras ferramentas que serão usadas nas séries posteriores. E fazer o aluno memorizar tudo isso no espaço pequeno de tempo vai ter como consequência a baixa aprendizagem ou até mesmo total desinteresse parte dele. Sendo assim, quando esses temas são relembrados nas séries seguintes como um assunto importante trabalhado ao longo vida escolar, os estudantes simplesmente não lembram ou acabam cometendo alguns erros no desenvolvimento de alguma questão.

No 9º ano o trabalho é retomado a partir das equações literais, equações de 2º grau e funções. Essa última representa realmente a relação de uma grandeza com a outra. Porém, as vezes, os alunos não percebem tal relação e acabam apresentando uma grande dificuldade em aceitar as expressões da forma $y = 5x - 2$ ou $y = x^2 + 7x - 11$, pois após o estudo "maçante" realizado com incógnitas nessa série e também nas anteriores, tais expressões são entendidas por muitos deles como uma equação literal.

Com isso, pode-se perceber que do 6° ao 9° ano, na maioria das vezes, a álgebra é abordada de forma fragmentada e enfatizada em diferentes maneiras, sem a preocupação da formalização da álgebra, tal como o conceito da "letra" usada em suas múltiplas formas de interpretar, como incógnitas, parâmetros e variável.

É inevitável que os professores procurem entender primeiro o que é álgebra e quais são as suas funções, para depois pensarem em criar propostas que auxiliam os alunos a lidar com situações algébricas e sanarem suas dificuldades resultantes da forma como é abordada a álgebra atual.

Vários pesquisadores sugerem que a generalização de padrões seja usada como ferramenta pelo professor para o desenvolvimento de capacidades de pensamento algébrico por parte dos alunos.

2.2 Generalização de padrões

Segundo Mason a álgebra fornece um sistema de símbolos e uma linguagem para expressar e manipular generalizações. O trabalho sobre generalização de padrões proporciona a oportunidade de utilização de novas formas de comunicação nas que prevalecem a linguagem algébrica como uma forma de expressar conjeturas, validá-las ou refutá-las.

Reconhecer situações, descrevê-las e expressá-las são os primeiros passos para a generalização na matemática e é da responsabilidade do professor trabalhar e fornecer aos alunos ferramentas necessárias para o desenvolvimento de estratégias que facilitem o processo para chegarem a tais generalizações.

No ambiente escolar, a álgebra é mais utilizada como uma linguagem de expressão, de perceber e expressar generalidades para si próprias. No começo leva tempo, mas desta forma os alunos se tornam usuários efetivos da álgebra.

Mason considera que a generalização é fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático, em particular, algébrico, assim, para que o ensino da álgebra seja eficaz se faz necessário que o aluno tenha algo a comunicar e para que isso aconteça é preciso que ele analise uma determinada situação e depois tente expressá-la e comunicá-la a alguém. Este enfoque de generalização de um padrão envolve aspectos como ler, ver e descrever um padrão.

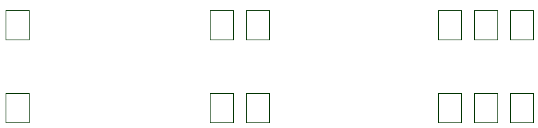
Um padrão é uma propriedade, regularidade, qualidade invariante que expressa uma relação de estrutura entre elementos de uma determinada "sequência". Os padrões permitem a interpretação de características presentes em diversas situações matemáticas e do cotidiano como, por exemplo, aritmética, geometria, música, geografia, etc. Os padrões existem de maneira natural na matemática e em outras áreas do saber e eles podem ser conhecidos, ampliados e generalizados por meios de situações que envolvam processo de variações. Mediante as generalizações de padrões a álgebra deixa de ser uma tradução das regras da aritmética e se torna por si própria uma forma de pensamento matemático.

Como foi mencionado anteriormente, o processo de generalização consiste em ver, descrever e escrever. A continuação se define cada uma destas etapas:

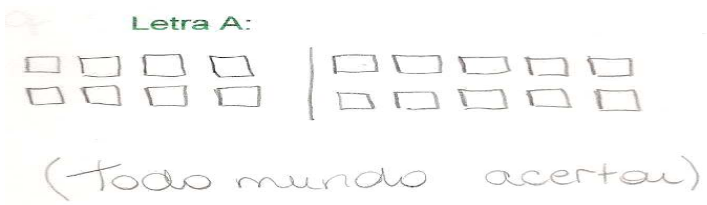
Ver um padrão é um processo mental pelo qual a estrutura aparece de forma clara e nos permite que façamos uma relação entre os elementos de maneira variada, ou seja, desde várias perspectivas. Trata-se de diferenciar o que é particular em cada exemplo e o que é comum a todos eles. Com isso, podemos encontrar os fatos fundamentais, e conseguir, através de uma combinação adequada, uma regra ou uma lei de formação que modele todas as situações, que permitia generalizar as propriedades comuns presentes nas situações dadas sem referência aos casos concretos.

Existem dois contextos matemáticos relacionados à "visão" de uma regularidade: os números e as figuras geométricas. Os problemas que propõe a percepção entre uma sequência de números e uma de figuras geométricas, em alguns casos, são diferenciados. Uma primeira diferença que pode ser notada numa sucessão de figuras geométricas, é que na maioria das vezes os alunos não necessitam de muito conhecimento matemático para manipulá-la, comparar os elementos ou perceber certa regularidade. É por isso, que a maioria dos estudantes considera esse tipo de situação mais fácil. As figuras geométricas permitem que os alunos coloquem em prática capacidades como: visualização e organização espacial, que os podem levar a resolução e solução de um problema.

Essa situação pode ser notada no exemplo abaixo:



Desde o primeiro momento os alunos perceberam que existia alguma coisa em comum nas figuras e que todas tinham a mesma forma mudando apenas a quantidade de quadradinhos. Assim, demonstraram que ninguém teria dúvida em qual seria a próxima figura. Veja uma resposta dada por uma aluna:



Por outro lado, as séries de números exigem um raciocínio mais detalhado, com propriedades menos evidentes, que requerem perceber alguma característica dos números, uma operação entre eles ou uma lei numérica de formação. Este raciocínio pode ser de caráter abstrato, e o apoio visual já não é uma ferramenta eficaz, mas tem a vantagem de poder aproveitar o conhecimento adquirido nos anos anteriores.

Descrever consiste em explicar o que foi percebido numa situação matemática. É um ato normal mediante a tentativa de identificar um padrão e criar um dispositivo prático para encontrar as propriedades que caracterizam tal situação. Esta descrição nos permite expressar futuramente, na forma escrita, a propriedade apresentada.

Quando se apresenta oralmente aos alunos as regularidades que foram observadas num certo processo, podemos obter várias interpretações por parte deles, ou seja, a descrição oral da regularidade admite diferentes graus de precisão e pode apresentar diversas características. Este grau de precisão e as características descritas dependem, normalmente, de como foi detectada a regularidade. Assim, percebemos que é muito importante esse tipo de trabalho, em que os alunos devem, primeiramente, “ver” os números ou os símbolos geométricos obtendo uma idéia clara das relações e regularidades nelas presentes. Com isso, eles podem melhorar sua capacidade de expressar o pensamento algébrico.

Tentar descrever e expressar são atos que podem ajudar a entender o que foi visto e percebido no modelo apresentado. Portanto, o fato de descrever um padrão poderá guiar o aluno a uma representação simbólica mais ou menos exata. Expressar oralmente o que se vê é de extrema importância na matemática e, também em outras áreas do conhecimento, pois poderá nos ajudar apresentar organizadamente as nossas idéias, também abre margens para as discussões sobre as hipóteses apresentadas, que a primeira vista, podem parecer corretas. O fato de falar a outras pessoas e ou até mesmo parar para pensar no que foi dito, pode estimular o aluno a buscar mecanismos para tentar comprovar se ele está certo ou errado.

Na etapa de descrição é recomendável que a discussão seja feita em grupos pequenos, pois pode facilitar a troca de experiências. A comunicação entre os alunos pode levá-los a discutir melhor as suas idéias e suposições, reformulando assim suas prováveis teorias e desta forma, eles estarão cada vez mais próximos da solução correta.

Alguns exercícios podem ser propostos para ajudar nessa etapa da generalização, como por exemplo:

Diante de uma sequência com diferentes figuras, pede-se:

a) Verifique se existe uma relação entre os elementos da sequência e explique o que viu para o colega.
b) Tente descrever as particularidades presentes nos elementos a seu colega e a seguir, peça a ele que explique o que entendeu.
c) Discuta em um pequeno grupo as relações e as diferenças presentes na sequência.
d) Determine o modelo que caracteriza a sequência.

O ato de descrever não é uma tarefa fácil e requer persistência. Em alguns momentos, quando os alunos tentam expor o que vêem numa sequência, eles não conseguem dizer corretamente às relações que realmente procuravam, acredito que isso acontece devido à falta de exatidão ou por limitações da linguagem natural, ou às vezes se preocupam muito em indicar alguma relação entre os elementos e acabam se esquecendo de outras propriedades presentes. Quando isso acontece o professor deve perguntar ou pedir mais explicações dos alunos, pois desta forma, ele poderá levá-los a compreensão ou até mesmo, à descrição correta de uma expressão. Além disso, o professor deve procurar manter o grupo "aberto" para respeitar e ouvir as opiniões e os pensamentos dados pelos colegas, independentemente de estarem certas ou erradas. A discussão em grupo é muito mais lucrativa ao saber, do que a busca excessiva e precoce da resposta correta.

Escrever é expressar na forma escrita ou na forma simbólica as regularidades encontradas na seqüência e/ou até mesmo apresentar as relações quantitativas presentes num seguimento numérico ou simbólico. Ver e descrever podem ser considerados mais fáceis do que escrever, mas é a escrita que facilita a análise, a discussão em grupo e a conclusão do processo em questão. Mas existe também o outro lado, isto é, escrever o que pensamos e expor para outras pessoas pode abrir espaços para críticas e nem sempre os alunos tem maturidade suficiente para lidar com isso, talvez para os outros seja pouco, simples ou até mesmo contraditório. Mas procurar escrever com cuidado e de forma concisa pode deixar o pensamento mais claro, evitando assim, ambiguidade na expressão.

Acredito que em alguns momentos os alunos, por medo, por comodidade ou por dificuldade, preferem deixar de lado à escrita, cabe ao professor incentivar o seu aluno a escrever mais, serem mais claros nos argumentos usados e mostrá-los que registrar por escrito é preciso. Em todo caso, quando um aluno se inicia na escrita da generalização é preciso animá-lo para que utilize todos estes elementos na medida em que lhe sejam úteis: palavras, desenhos e símbolos, mantendo estas formulações o tempo que seja necessário.

A escrita é uma tecnologia de comunicação, criada e desenvolvida a milhares de anos atrás pelo homem para registrar em algum objeto suas “marcas”, “palavras” ou “idéias”. Podemos dizer que enunciar o pensamento por escrito não é fácil e se torna, às vezes, mais complicado quando se trata de expressar este pensamento matematicamente. Portanto, a escrita é uma fase que apresenta novos e grandes obstáculos, originados pela própria dificuldade que tem muitos alunos de expressar uma idéia. Estas dificuldades aumentam consideravelmente quando o que se pretende é a expressão simbólica. Como na fase anterior, aqui também é necessária uma situação aberta, que permita fluir as idéias, onde se possa descrever e depois modificar, fazer anotações pessoais, dar um tempo, não precipitar-se e não sentir-se na obrigação de ter que escrever desde início registros corretos, pois o ato de escrever é uma etapa progressiva no processo de generalização do padrão. Portanto, escrever deve ser de fato a última etapa no processo de generalização.

3. PESQUISA DE CAMPO

Este trabalho relata um estudo cujo objetivo foi investigar as estratégias que os alunos do 9° ano usam para resolver problemas que envolvem o analise e generalização de certos padrões. O objetivo das atividades propostas é proporcionar situações que levassem aos alunos à “ler, ver e descrever” de modo explícito ou implícito, através do discurso oral ou escrito, a regularidade dos padrões apresentados.

O trabalho de campo foi realizado com os estudantes do 9º ano de uma escola particular de Sete Lagoas, no período de 29/08/2008 a 21/11/2008, fora do horário de suas aulas.

Depois de feito o convite a meus alunos do 9º ano, foi explicado a eles como seriam inicialmente os encontros, deixando claro que tais atividades não seriam instrumentos de avaliação da escola.

Para a realização do trabalho foi proposto que o limite de participantes seria de 20 a 30 alunos, uma vez que na escola haviam 73 alunos matriculados no 9° ano. Caso ocorresse um número de inscrições acima do proposto, teriam prioridade, para o preenchimento das vagas, os trinta primeiros inscritos. Mas, como foram feitas 23 inscrições e este número estava dentro do esperado, com isso não houve a necessidade de uma seleção. O trabalho teve início com 23 alunos e terminou com 24 participantes, ou seja, uma aluna entrou no meio processo e participou somente dos três últimos encontros, pois era aluna novata na escola e apenas depois, a pedido dos pais, foi inserida no grupo de estudo.

A seguir são apresentadas todas as atividades propostas, comentários dos fragmentos escaneados e alguns relatos diários dos encontros realizados. Os participantes são denotados por números naturais de 1 a 24.

3.1 Primeiro encontro

O primeiro encontro foi realizado no dia 29/08/2008 e teve a duração de 1 hora e 20 minutos. Embora tivessem sido programadas para o primeiro encontro duas atividades, foi aplicada somente uma devido às dificuldades apresentadas pelos alunos, consumindo um tempo maior que o esperado.

A atividade proposta se encontra nos anexos desta monografia. (Anexo I)

O encontro começou com a participação de todos os 23 alunos inscritos. Eles foram divididos através de sorteio em 6 grupos: 5 grupos de 4 alunos e 1 grupo de 3 alunos. O grupo foi organizado da seguinte forma:

- 1 coordenador deveria se responsabilizar por manter a ordem e resolver junto com os outros componentes alguns possíveis conflitos;
- 1 redator deveria registrar o que seria discutido em grupo;
- E os demais componentes deveriam participar da discussão de todas as atividades propostas.

Foi entregue para cada grupo uma folha para o registro da discussão e para cada participante do grupo um exemplar da atividade 1. Ficou combinado que cada aluno responderia individualmente as questões em sua folha e somente depois seria feita a discussão em grupo.

No decorrer do trabalho, percebi que alguns alunos estavam um pouco apreensivos, inseguros e preocupados com o julgamento que supostamente eu, como professor, faria deles, e chegaram a comentar o seguinte: *"Nossa, eu pensei que seria mais fácil"*. E até mesmo *"Zé, o que você vai pensar de nós quando ler essas respostas?"*. Em vista desses comentários, tentei deixar claro para eles que quem estava lá aplicando os testes não era o professor e sim um aluno de um curso de Especialização para Professores do Ensino Básico que coletava material para sua monografia.

Como se tratava do primeiro encontro, a atividade proposta apresentava instruções e mais informações para facilitar o entendimento por parte dos estudantes. O objetivo principal das atividades 1 a 3 era observar se os alunos conseguiriam descrever a linguagem algébrica de uma sequência de símbolos ou números. Essas atividades, a princípio, deveriam ser realizadas sem a utilização de recursos gráficos "desenhos" para localizar o símbolo ou número que estava em uma determinada posição.

Outro objetivo das atividades propostas era fazer com que os alunos tivessem contato com exercícios que fogem dos padrões dos exercícios dados em sala de aula, que em sua maioria são resolvidos de forma mecânica.

A seguir, apresento essas instruções e a primeira questão da atividade.

Instruções: Discutindo com o seu grupo, faça a atividade1. Ao terminá-la, cada grupo deverá entregar essa folha contendo as respostas, o registro da discussão e o rascunho de cada aluno.

Atividade 1

∇□ ⊗ ∇□ ⊗ ∇□ ⊗...

As figuras acima representam uma sequência. Cada figura é um elemento da sequência.

Qual é o 8º elemento da sequência? Registre a estratégia usada.

Percebi que alguns alunos apresentavam dificuldades para interpretar as questões, porém a maioria respondeu corretamente e apresentou justificativas curtas e objetivas. Somente um aluno apresentou uma justificativa incoerente. Estes fatos poderão ser notados claramente nas respostas abaixo.

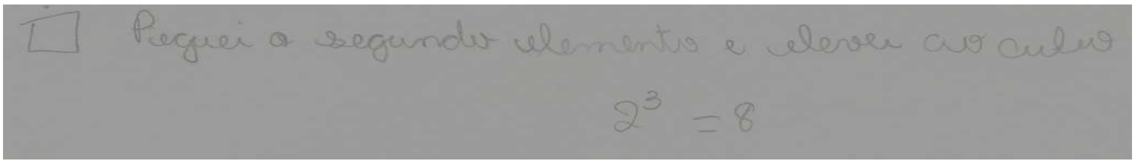
□ . Numerei a seqüência para descobrir.

□ . Contei .

□ - Contagem dos elementos.

□ . porque se contarmos de 1 a 8 o 8 dará no quadrado

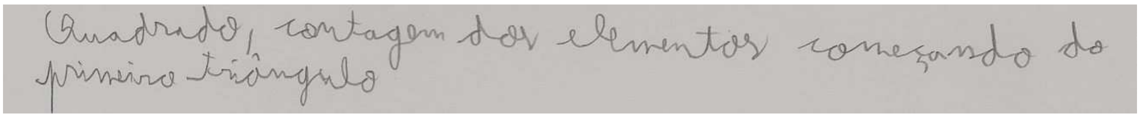
□ . comecei a contar a partir do 1º triângulo de ponta para baixo até chegar no 8º elemento.

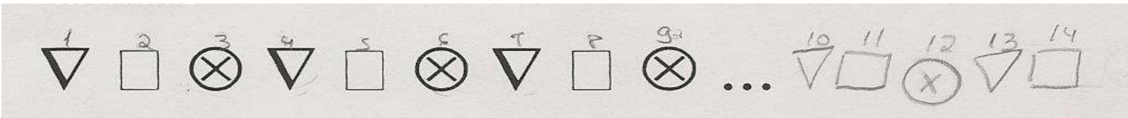


A continuação segue as demais questões propostas na atividade, e os comentários das soluções apresentadas pelos alunos para cada uma delas.

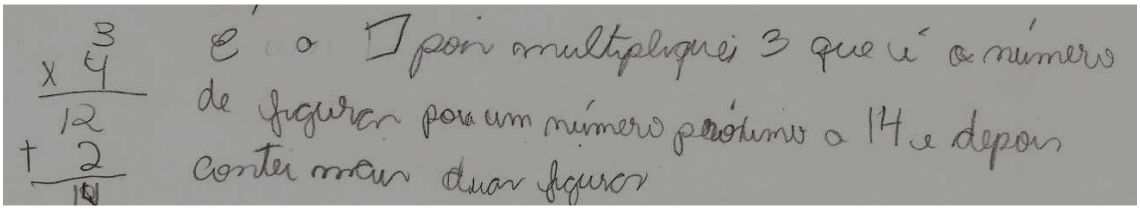
Qual é o 14º elemento da sequência? Por quê?

As estratégias usadas pela maioria dos alunos foram as mesmas utilizadas na primeira questão. Para eles, contar e desenhar parecia o melhor caminho.

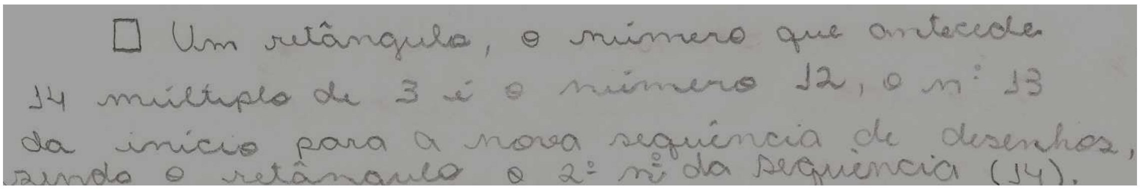




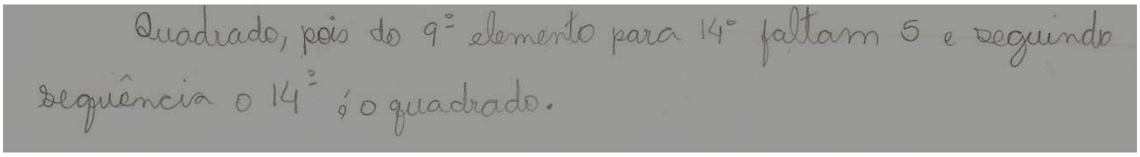
Alguns começaram a perceber as regularidades na sequência, vendo que as figuras se repetiam de 3 em 3. Sendo assim, usaram a idéia de divisão do número (posição) 14 por 3 e encontraram o resto 2 e então perceberam que o resto da divisão representava o ***"quadradinho"*** que assume essa posição na sequência, como se pode ver nos exemplos abaixo.


3 x 4 = 12 + 2 = 14

É o □ pois multipliquei 3 que é o número de figuras por um número próximo a 14 e depois contei mais duas figuras


□ Um retângulo, o número que antecede 14 múltiplo de 3 é o número 12, o nº 13 da início para a nova sequência de desenhos, sendo o retângulo o 2º nº da sequência (14).

Uma aluna contou até o 9° elemento da figura desenhada na folha de questões fornecida aos alunos e em seguida realizou a diferença entre a posição 14 (quatorze) que desejava e a posição 9 que estava representada no desenho, encontrando o número 5 que representava o 5° elemento da sequência que no caso era um *"quadradinho"*.


Quadrado, pois do 9º elemento para 14º faltam 5 e seguindo sequência o 14º é o quadrado.

A questão 3 (três) dizia o seguinte:

Sem desenhar, qual é o 20º elemento da sequência? Por quê?

Alguns alunos ignoraram a ordem *"sem desenhar"* e completaram a sequência. Outros fizeram a contagem de 3 em 3, verificando a regularidade da sequência.

quadrado. pode se observar que como é uma sequencia os 3 objetos sempre estaram respeitando uma regra de posição.

□. Comecei a contar a partir do 1º triângulo de ponta para baixo até chegar no 20º elemento e cheguei no quadrado.

□. Porque seguindo está sequência a figura □ aparecem como 20° elemento.

Uma aluna contou até o 8° elemento e encontrou um quadrado e verificou pela questão três da atividade que o elemento 14 também é um quadrado, então observou que estava somando 6 à posição 8 e realizou o mesmo raciocínio para encontrar o elemento da posição 20 , ou seja, somou 6 ao elemento 14.

□, porque se é uma sequência e se 8+6 deu □, 14+6 também dará.

Um dos alunos analisou a sequência de 9 em 9 elementos e verificou que se somasse mais 2 elementos na posição 18, chegaria à resposta correta.

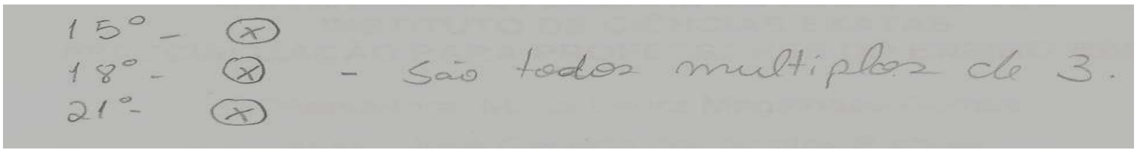
Quadrado. Porque com 9 elementos o ⊗ é o último só multiplicar por 2 a sequência e dará o mesmo resultado, e finalmente acrescentar dois elementos.

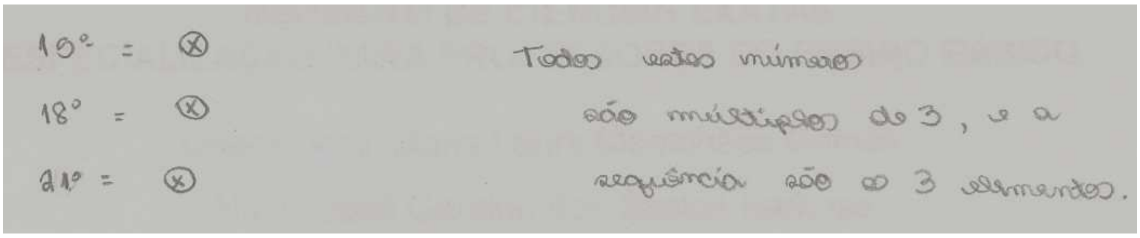
As questões 4, 5 e 6 eram parecidas com as três primeiras questões. A única diferença é que se trabalhava com números maiores e objetivo era saber se as estratégias utilizadas pelos alunos prevaleceriam até o final. A partir daí, foi verificado que os alunos abandonaram a estratégia de desenhar ou até mesmo a ideia de contar desde o início. A proposta de se trabalhar com múltiplos prevaleceu nessas 3 questões.

Seguem as questões e as respostas mais comuns:

Qual figura estaria na 15ª posição, na 18ª posição e na 21ª posição?

Os alunos perceberam que, ao se descobrir a figura referente à posição 15, seria fácil encontrar as demais figuras solicitadas no exercício, pois somando os elementos de três em três a partir dela, todas seriam as mesmas figuras. Perceberam também que as posições eram múltiplas de três.

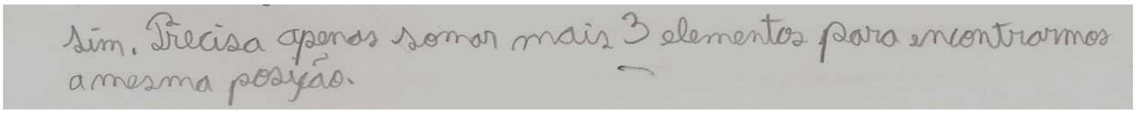


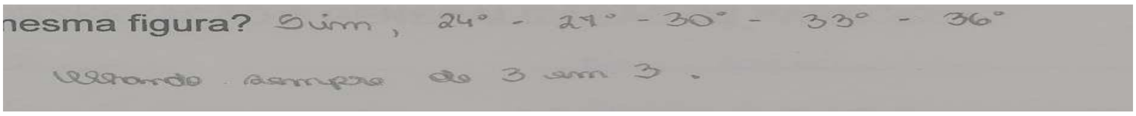


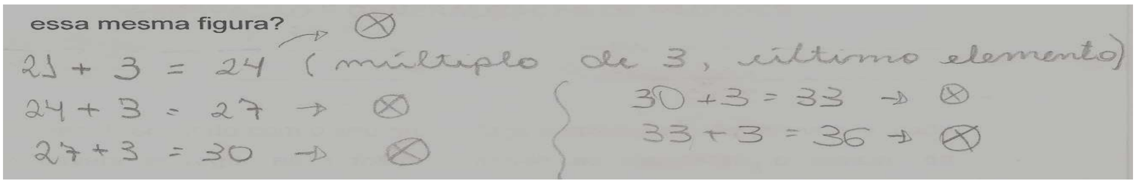
Vocês conseguiriam dizer as cinco próximas posições em que estaria essa mesma figura?

Alguns alunos deram respostas corretas, mas não mostraram o raciocínio utilizado e outros alunos expuseram o pensamento usado na resolução do exercício.


24ª, 27ª, 30ª, 33ª, 36ª.

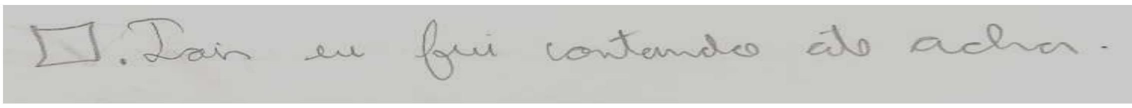

Sim. Precisa apenas somar mais 3 elementos para encontrarmos a mesma posição.


mesma figura? Sim, 24º - 27º - 30º - 33º - 36º
ultrando sempre de 3 em 3.


essa mesma figura? ⊗
21 + 3 = 24 (múltiplo de 3, último elemento)
24 + 3 = 27 → ⊗
27 + 3 = 30 → ⊗
30 + 3 = 33 → ⊗
33 + 3 = 36 → ⊗

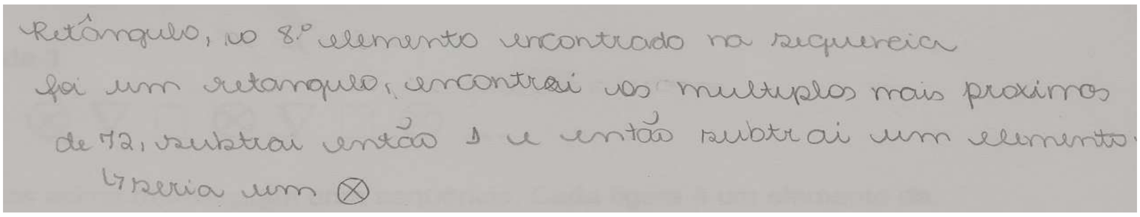
Qual figura ocupará a 71ª posição

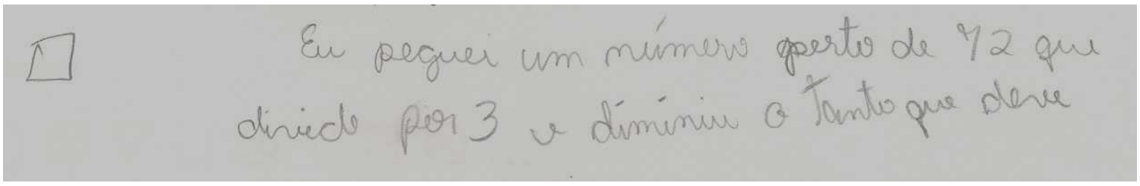
Nessa questão, o desafio foi maior, pois o número que representava essa posição não era múltiplo de 3. A maioria dos alunos respondeu corretamente a questão, mas não justificaram a resposta. Um aluno resolveu voltar à idéia de contar até encontrar o elemento que estava na posição 71.

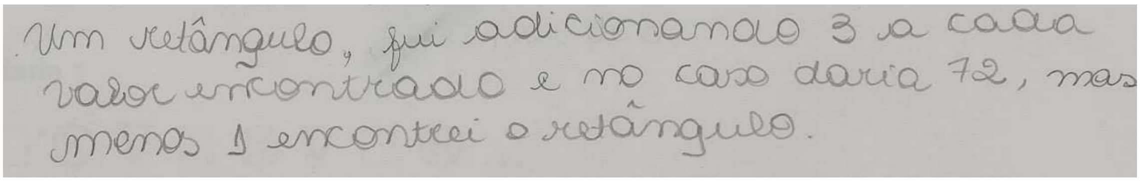

☐. Pois eu fui contando até acha.

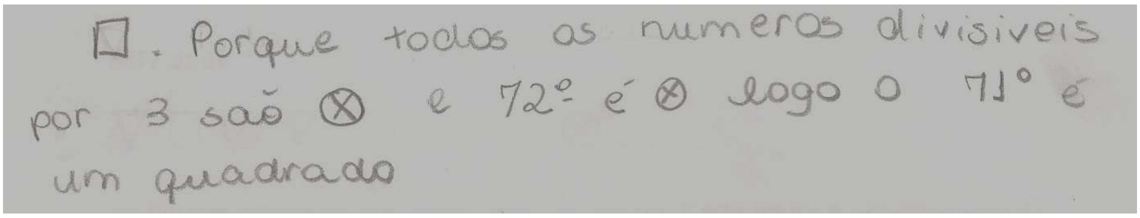
Alguns alunos recorreram à idéia de encontrar o elemento que estava na 72ª posição. Para isso, afirmaram que 72 se tratava de um múltipo de 3 e então o elemento neste caso era a *"bolinha"* e então subtraíram 1 de 72 para obter 71. Concluíram, então, que o elemento que antecede a *"bolinha"* é o *"quadradinho"*. Outra idéia apresentada por um aluno é muito parecida com a que foi relatada anteriormente. Ele afirmou que 69 é um múltiplo de três e neste caso a figura era uma *"bolinha"* e somando-se 2 unidades a esse número encontramos

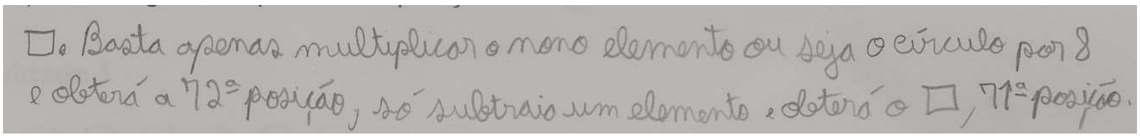
71. Na seqüência inicial dada na folha de atividades, o 2° elemento após a *“bolinha”* é o *“quadradinho”*. Sendo assim, o elemento que ocupará a 71ª posição é um *“quadradinho”*. Uma outra estratégia adotada foi enumerar todos os múltiplos de 3 a partir de 30 até 72. O aluno encontrou, assim, a figura representada por uma *“bolinha”* e verificou que o “*quadradinho*” é a figura que antecede a *“bolinha”*.

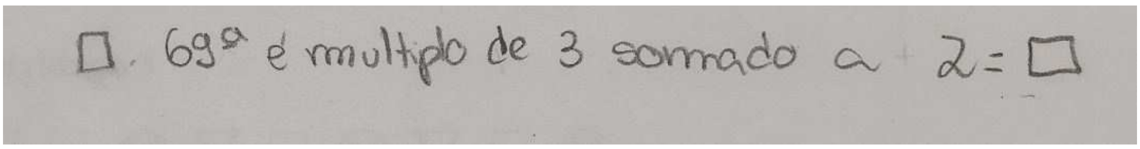

Retângulo, no 8º elemento encontrado na sequencia
foi um retangulo, encontrai os multiplos mais proximos
de 72, subtrai então 1 e então subtrai um elemento.
↳ seria um ⊗

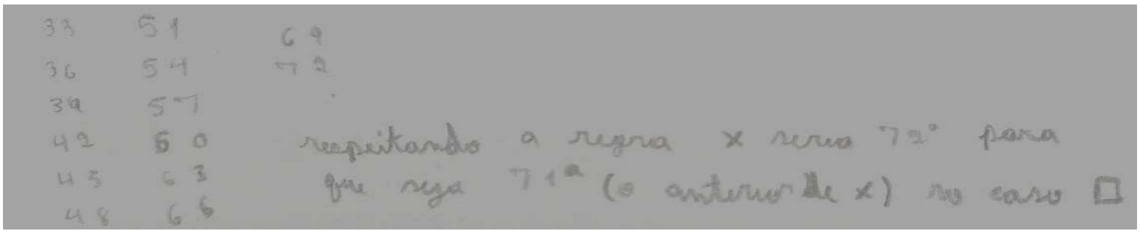

□ Eu peguei um número perto de 72 que
divide por 3 e diminui o tanto que deve


Um retângulo, fui adicionando 3 a cada
valor encontrado e no caso daria 72, mas
menos 1 encontrei o retângulo.


□. Porque todos os numeros divisiveis
por 3 saõ ⊗ e 72º é ⊗ logo o 71º é
um quadrado


□. Basta apenas multiplicar o nono elemento ou seja o círculo por 8
e obterá a 72º posição, só subtraio um elemento, obterá o □, 71º posição.

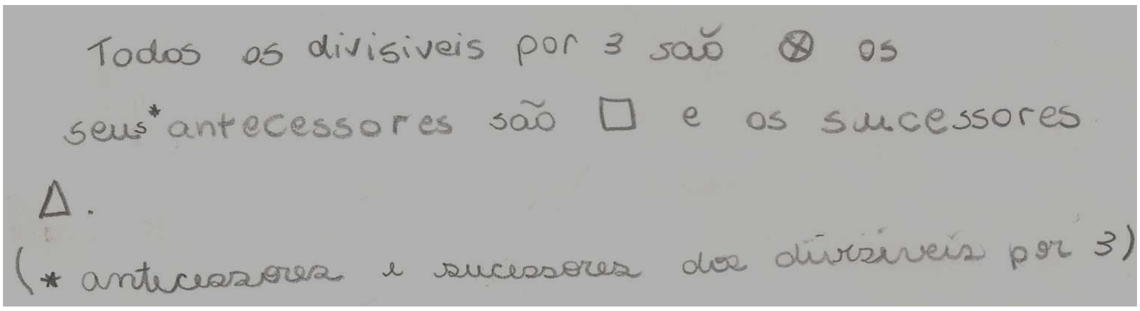

□. 69º é multiplo de 3 somado a 2 = □

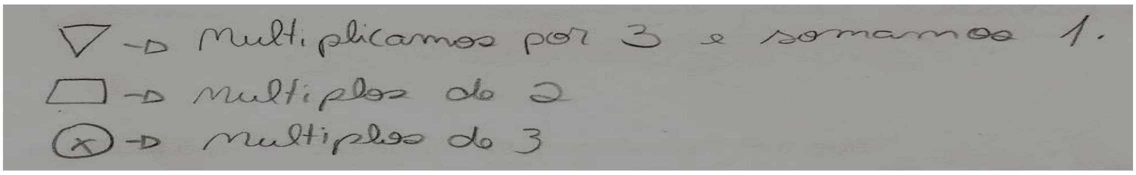


Vocês agora conseguem escrever uma regra que pudesse representar a sequência dada?

A última questão da atividade foi encarada como um desafio para os alunos. Entender qual era a regularidade da sequência dada não parecia um problema para eles. Eles perceberam que a figura ⊗ . sempre se encontrava numa posição múltipla de 3. Sendo assim, bastava observar, na sequência inicial, a posição das demais figuras.

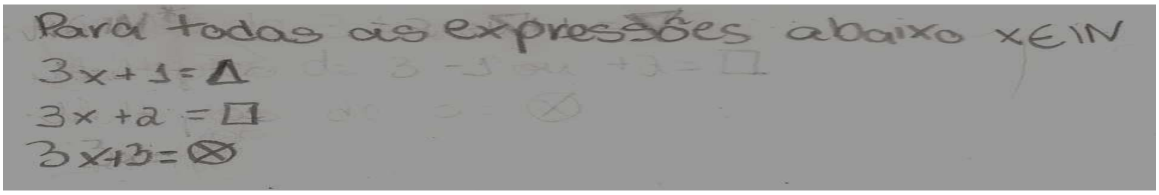
Foi possível observar com essa atividade que descrever e escrever a regra de formação da sequência foi um grande empecilho no caminho dos alunos. Eu como professor, tinha imaginado que, em se tratando de um grupo de alunos do 9° ano não haveria dificuldade nisso, uma vez que a álgebra já vinha sendo abordada nas séries anteriores (7° e 8° anos). Mas não foi isso que aconteceu: grande parte dos alunos não conseguiu escrever uma lei de formação da sequência utilizando a linguagem.





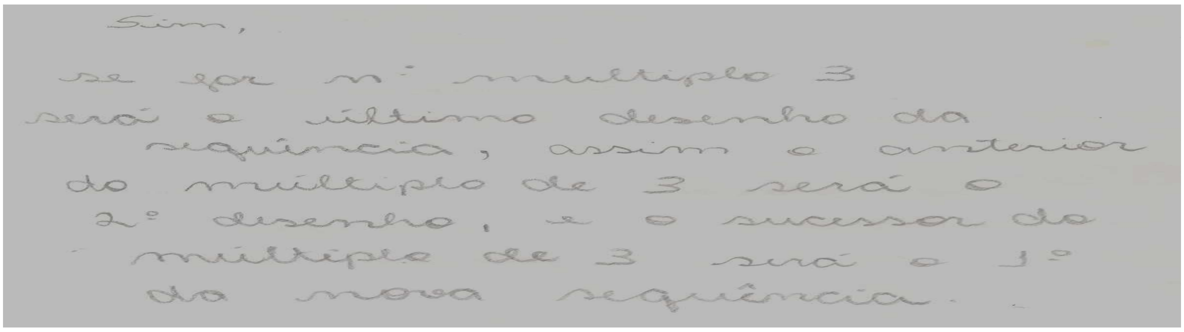
▽ → Multiplicamos por 3 e somamos 1.
□ → Multiplos de 2
⊗ → multiplos de 3

Para ser preciso, devo registrar que somente um aluno escreveu uma lei de formação da sequência usando a linguagem algébrica. Ele considerou uma expressão algébrica para cada um dos três elementos iniciais apresentados na sequência. A partir da 4ª posição, seria possível encontrar qual era a posição de dado elemento. O aluno utilizou a variável x e não deixou claro se a variável usada representava a posição que o elemento ocupava, mas por outro lado ele afirmou que o universo ao qual a variável pertencia era o conjunto N (Conjunto dos Números Naturais).

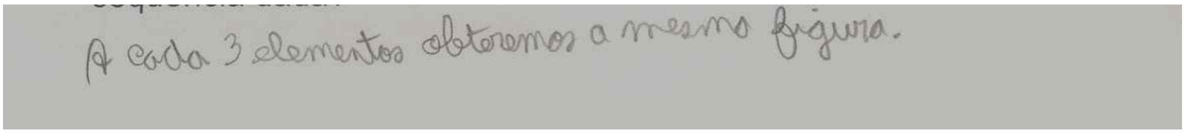


Para todas as expressões abaixo $x \in \mathbb{N}$
$3x+1=\Delta$
$3x+2=\square$
$3x+3=\otimes$

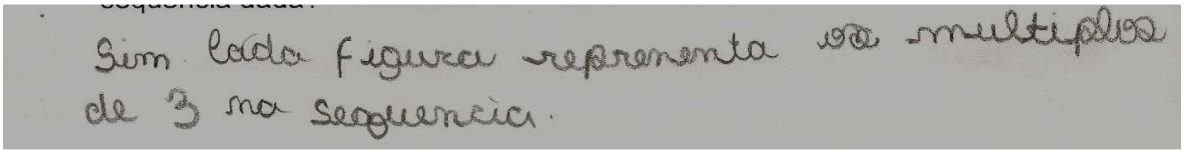
Os demais alunos expuseram as suas idéias de forma explícita, ou seja, alguns narraram passo a passo às estratégias usadas por eles e outros tentaram ser objetivos e muitas vezes não deixaram claro como realmente pensaram. Foi observado também que alguns dos estudantes cometeram erros nos argumentos utilizados para explicarem as estratégias ou até mesmo apresentaram a solução errada. Outros não levaram em consideração a posição dos elementos e que contar e desenhar a sequência se torna cada vez mais difícil se o elemento procurado estiver numa posição distante da inicial.



Sim,
se for nº multiplo 3
será o último desenho da
sequência, assim o anterior
do multiplo de 3 será o
2º desenho, e o sucessor do
multiplo de 3 será o 1º
da nova sequência.



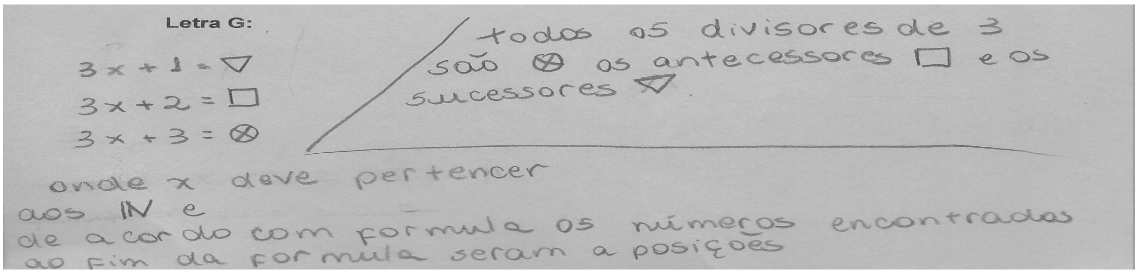
A cada 3 elementos obteremos a mesma figura.



Sim cada figura representa os multiplos
de 3 na sequencia.

O trabalho em grupo, no geral, foi positivo. Os alunos receberam uma folha de resposta coletiva, na qual deveriam escrever o que tinha sido discutido em grupo. A discussão seria sobre cada uma das respostas dadas por eles na folha individual. Também nesse momento, os alunos procuraram ajudar os colegas que estavam com dúvidas através de explicações. Outros alunos usaram argumentos para convencer seus colegas que estavam certos.

Um ponto muito interressante a ser citado foi que houve momentos em que alguns grupos não chegaram a um acordo, então escreveram na folha coletiva duas ou mais soluções apresentadas ao grupo. Um bom exemplo disso foi a discussão no grupo em que participavam os alunos: 8, 17, 19 e 11. Eles apresentaram duas soluções para a pergunta “***Vocês agora conseguem escrever uma regra que pudesse representar a sequência dada?”***, como se pode ver abaixo.



3.2 Segundo encontro

O segundo encontro ocorreu no dia 12/09/2008 e teve a duração de 1 hora e 30 minutos. O encontro teve a participação de 18 alunos. Antes de distribuir o material, comentei sobre as atividades feitas por eles no primeiro encontro e discutimos um pouco sobre a regra de formação de sequências.

Neste momento, os alunos foram novamente separados em grupos. Eles responderam as atividades individualmente e depois se reuniram no grupo para discussão sobre cada uma das questões propostas. No final, repassaram o que foi discutido para a folha de respostas coletiva.

A atividade proposta encontra-se em anexo. (Anexo II)

Atividade 2

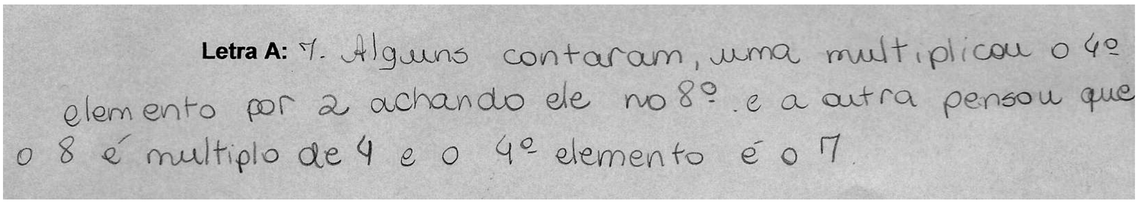
Observe a seqüência abaixo:

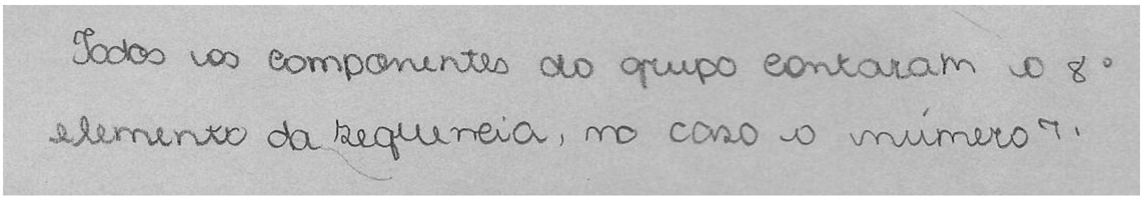
2 3 5 7 2 3 5 7 2 3 5 7...

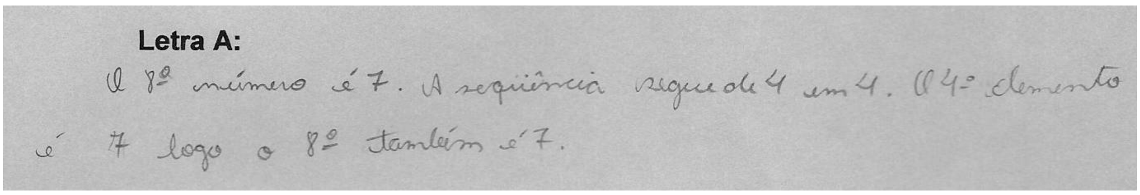
Primeira pergunta.

Considerando cada algarismo como um elemento da sequência, qual é o 8º elemento da seqüência?

Alguns alunos ainda tiveram dificuldades na interpretação dos exercícios e na elaboração de suas respostas e justificativas. A maioria dos alunos ainda insistia em contar, porém, alguns já partiram para tentar descobrir a lei de formação da sequência ou criaram uma idéia multiplicativa para as posições. Acredito que tal acontecimento ocorreu pelo fato de que os alunos já tinha tido um primeiro contato com esse tipo de atividade no encontro anterior. Um fator interessante que deve ser citado é que alguns participantes já conseguiram enxergar os números apresentados na sequência como elementos e assim os denominaram em seus trabalhos.


Letra A: 7. Alguns contaram, uma multiplicou o 4º elemento por 2 achando ele no 8º. e a outra pensou que o 8 é multiplo de 4 e o 4º elemento é o 7.

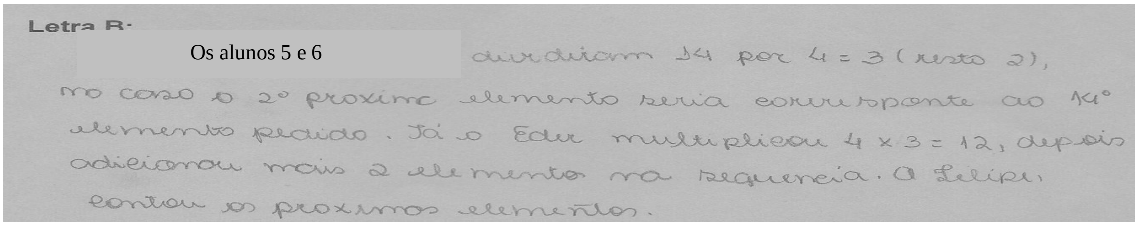

Todos os componentes do grupo contaram o 8º elemento da sequencia, no caso o número 7.

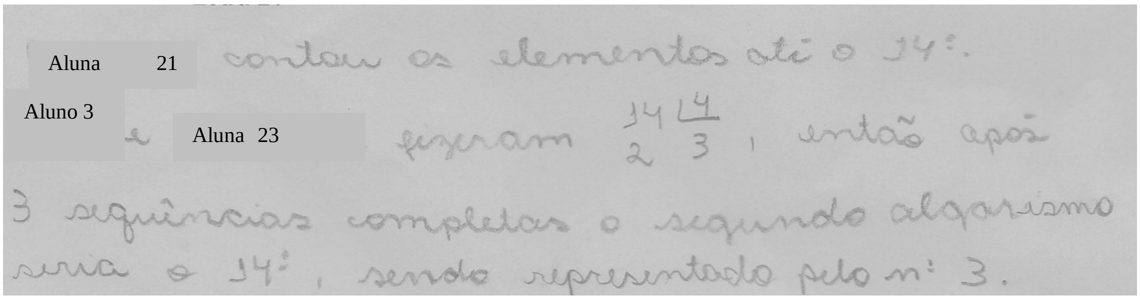

Letra A:
O 8º número é 7. A sequência segue de 4 em 4. O 4º elemento é 7 logo o 8º também é 7.

Segunda pergunta

Qual é o 14º elemento da sequência? Por quê?

As estratégias usadas pelos alunos foram cada vez mais interessantes e criativas. Foi notória a empolgação dos estudantes durante as discussões. A ideia mais comum para a resolução dessa questão foi que ***2, 3, 5 e 7*** representavam os 4 primeiros elementos, que por sua vez, estavam respectivamente nas 4 primeiras posições. Assim, nas posições seguintes encontraríamos essa mesma sequência de elementos e, portanto, eles partiram para a idéia de dividir o número 14 por 4, chegando a encontrar como quociente o número 3 e o resto 2. Notaram que este resto representaria a segunda posição da sequência inicial e o elemento que ocupa essa posição é o número 3. Ainda foram usadas estratégias de contar os elementos até chegar ao 14° elemento, e bem como a opção por trabalhar com a idéia multiplicativa.

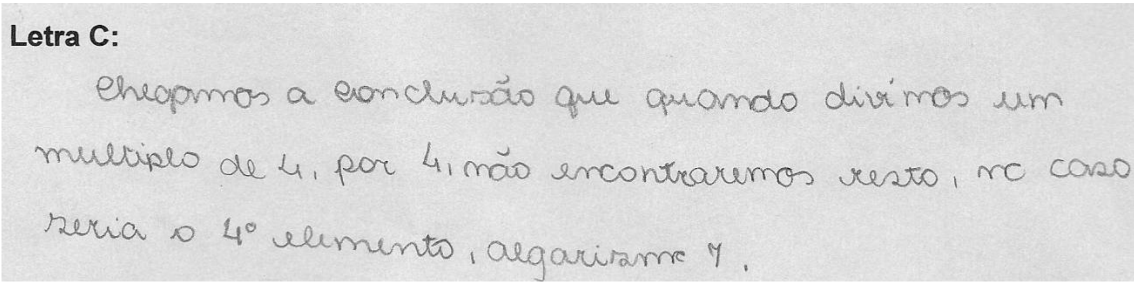

Letra B:
Os alunos 5 e 6 dividiram 14 por 4 = 3 (resto 2), no caso o 2º proximo elemento seria corresponte ao 14º elemento pedido. Já o Edu multiplicou 4 x 3 = 12, depois adicionou mais 2 elementos na sequencia. A Felipe, contou os proximos elementos.


Aluna 21 contou os elementos até o 14º.
Aluno 3 e Aluna 23 fizeram 14 ÷ 4 = 3, resto 2, então após 3 sequências completas o segundo algarismo seria o 14º, sendo representado pelo nº 3.

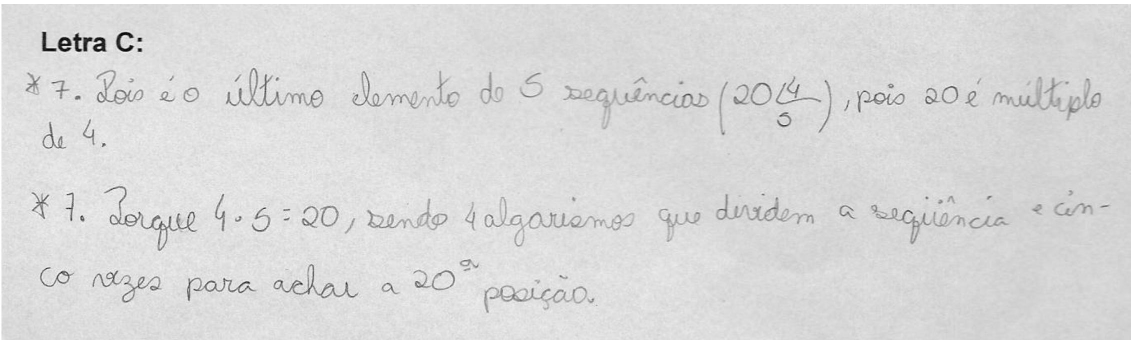
Terceira pergunta

Sem escrever, qual é o elemento que ocupa a 20ª posição? Por quê?

Essa terceira questão representou a primeira dúvida quase unânime do dia. Os alunos questionaram a frase *"sem escrever"* e então iniciamos uma discussão, na qual eu também participei e assim chegamos à conclusão que o objetivo era tentar responder sem desenhar a seqüência. Logo surgiram as soluções. As estratégias usadas foram praticamente as mesmas da segunda questão, ou seja, pelos mesmos motivos comentados acima, eles dividiram 20 por 4 e encontraram o quociente 5 e o resto 0. Nesse caso, temos uma divisão exata, ou seja, resto 0, o que significa que o resto representará a 4ª posição, no caso o elemento 7.


Letra C:

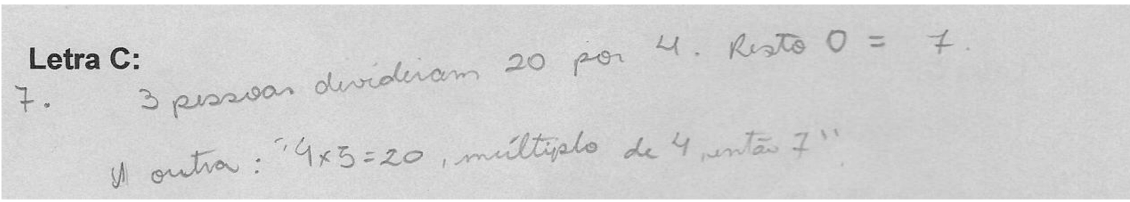
Chegamos a conclusão que quando divimos um multiplo de 4, por 4, não encontraremos resto, no caso seria o 4º elemento, algarismo 7.

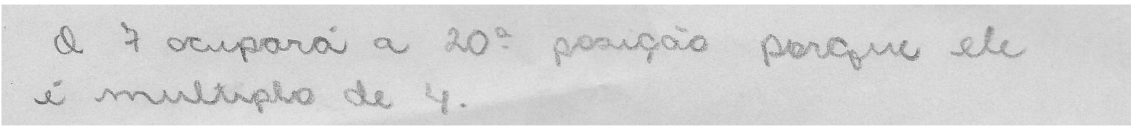

Letra C:

* 7. Pois é o último elemento do 5 sequências (20|4 5), pois 20 é múltiplo de 4.

* 7. Porque 4 · 5 = 20, sendo 4 algarismos que dividem a sequência e cinco vezes para achar a 20ª posição.

Podemos notar que em algumas conclusões aparecem escritas matemáticas incorretas, apesar de a solução estar correta, como nos exemplos a seguir.

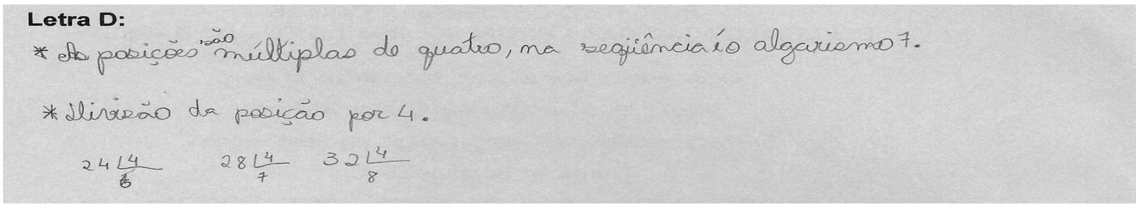

Letra C:
7. 3 pessoas dividiram 20 por 4. Resto 0 = 7.
A outra: "4x5=20, múltiplo de 4, então 7"


O 7 ocupará a 20ª posição porque ele é múltiplo de 4.

Para resolver as próximas 3 questões, os alunos usaram as mesmas estratégias anteriores e seguiram o mesmo raciocínio. Tal fato pode ser notado nas soluções inseridas abaixo.

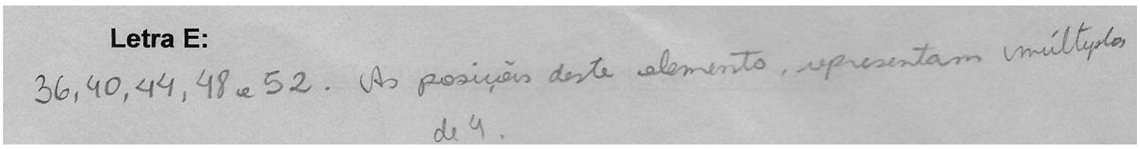
Quarta pergunta

Que elementos ocupam a 24ª, a 28ª e a 32ª posições?


Letra D:
* As posições são múltiplas do quatro, na seqüência é o algarismo 7.
* Divisão da posição por 4.
24 | 4 = 6   28 | 4 = 7   32 | 4 = 8

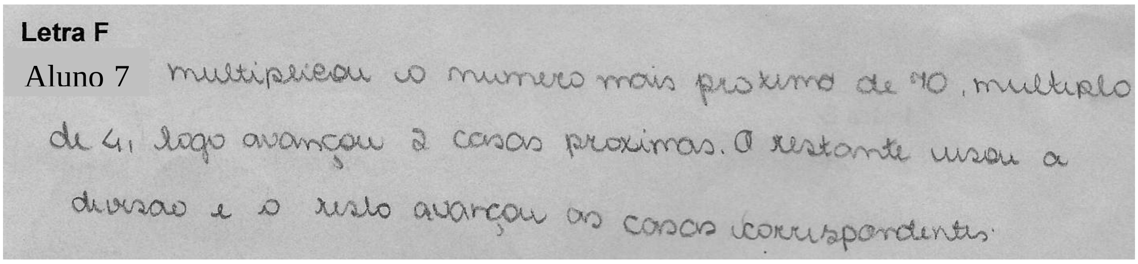
Quinta pergunta

Você conseguiria dizer as cinco próximas posições em que estaria essa mesma figura?

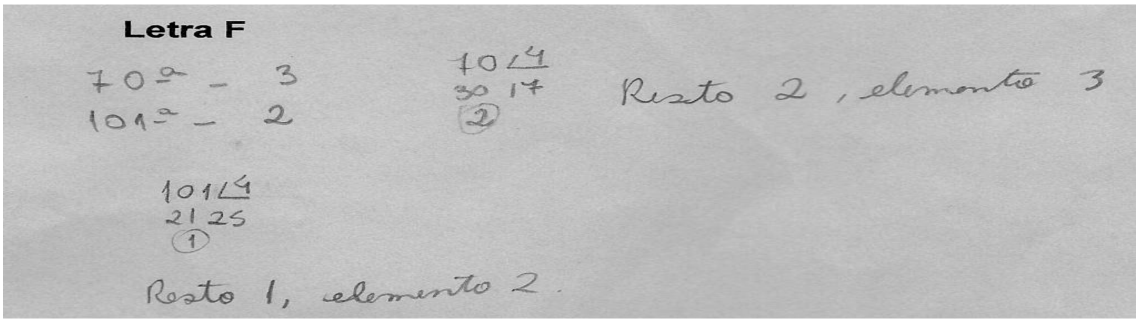

Letra E:
36, 40, 44, 48 e 52. As posições deste elemento, apresentam múltiplos de 4.

Sexta pergunta

Que algarismo ocupa a 70ª posição? E a 101ª posição? Por quê?


Letra F

Aluno 7 multiplicou o numero mais proximo de 70, multiplo de 4, logo avançou 2 casas proximas. O restante usou a divisao e o resto avançou as casas corrispondentes.


Letra F

70ª – 3
101ª – 2

70 |4
30 17
2

Resto 2, elemento 3

101 |4
21 25
1

Resto 1, elemento 2.

Examinemos agora a última questão da atividade 2 e sua solução pelos alunos.

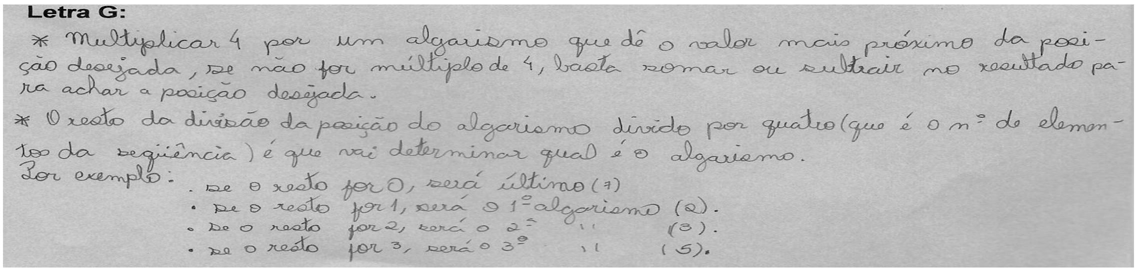
Sétima pergunta

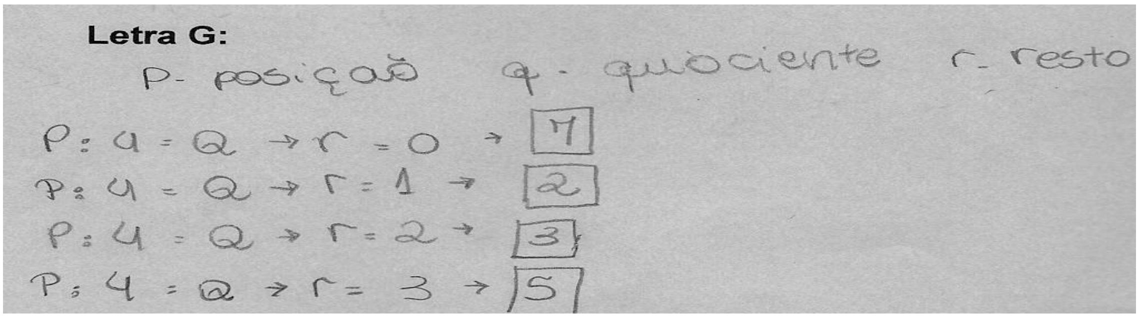
Vocês agora conseguem escrever uma regra que pudesse representar a sequência dada?

As estratégias adotadas pelos alunos para descobrir os elementos que se encontravam distantes das posições iniciais não variaram nesta atividade. Alguns usaram a ideia de encontrar uma posição múltipla de 4 e a partir daí encontrarem os demais elementos através da contagem. A outra estratégia foi dividir a posição desejada por 4, pois a sequência se repetia de 4 em 4. O que se deu a entender é que se o resto fosse 1 o elemento seria o 2, pois ele se encontra na 1ª posição; se fosse 2 o elemento seria 3, pois este representa a 2ª posição; se fosse 3 o elemento seria 5, pois ele se encontra na 3ª posição, e se a divisão fosse exata, a

4ª posição seria indicada pelo resto ***"zero"*** e representada pelo elemento 7, pois este se encontra na 4ª posição da seqüência inicial.

Abaixo mostramos as soluções comentadas.





3.3 Terceiro encontro

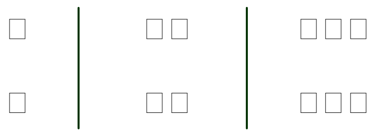
O terceiro encontro foi realizado no dia 19/09/2008 e teve a participação de 21 alunos. Os alunos foram divididos, através de sorteio, em 6 grupos, como nos últimos encontros anteriores. A novidade é que, agora, as questões não seriam respondidas individualmente. Os alunos de cada grupo deveriam discutir cada questão e depois elaborar uma resposta coletiva. Como estavam marcadas duas atividades para o dia, o grupo que terminasse a 1ª atividade já poderia solicitar a 2ª atividade e iniciar imediatamente o trabalho. Foi colocado também em discussão que eles deveriam procurar escrever mais, ou seja, explicar melhor como havia pensado.

A atividade proposta encontra-se em anexo. (anexo III)

Como fizemos para as atividades anteriores, apresentamos, a seguir, as questões propostas na atividade 3 e também comentamos gradativamente as respostas apresentadas pelos estudantes. A atividade 3 foi resolvida e discutida rapidamente. Ela foi classificada pelos alunos como muito fácil.

Atividade 3

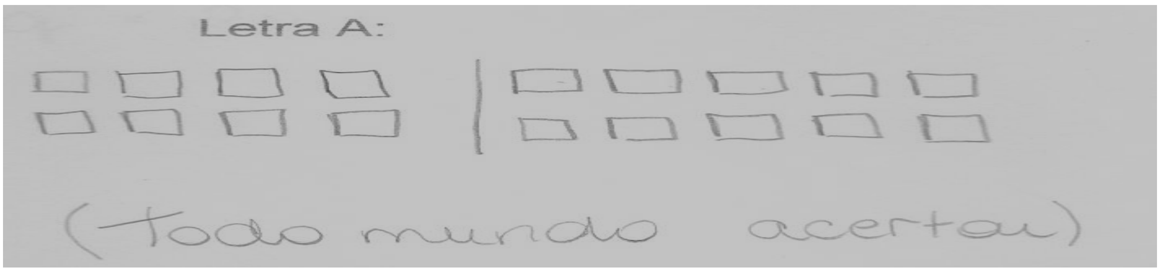
Observe a sequência de figuras abaixo.

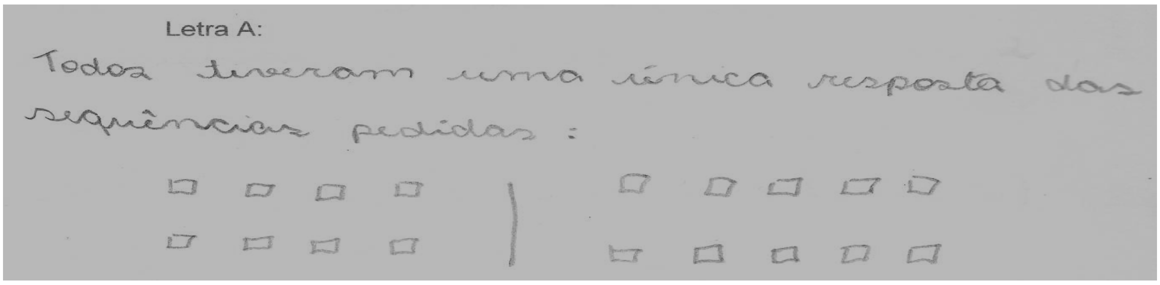


Primeira questão

Desenhe as duas próximas figuras da sequência.

Essa primeira questão foi resolvida sem dificuldade pelos alunos. Todos os grupos desenharam corretamente as duas próximas figuras.





Segunda questão

De que maneira você descreveria a uma pessoa como desenhar a sequência?

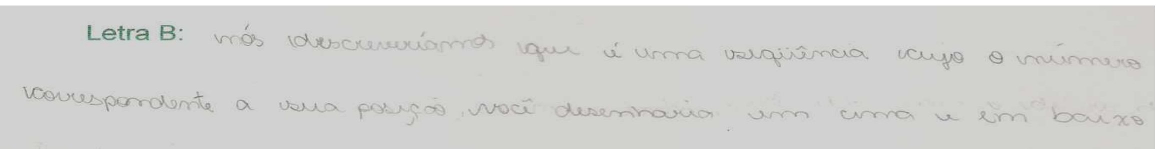
Os alunos começaram uma discussão generalizada, mas organizada, por incrível que possa parecer, eles não estavam falando todos ao mesmo tempo, por isso, não foi necessário mediar. Alguns alunos entenderam que descrever seria o mesmo que *"explicar"* e outros pensaram que essa palavra refere-se a *"citar as características principais"*. Então, partiram para a explicação ou caracterização da sequência. Existiram dois tipos de respostas para essa questão. O primeiro tipo de resposta foi dado por três grupos, que responderam que o número correspondente a posição representava a quantidade de quadradinhos de cima e de baixo e o total de quadradinhos seria a soma desses dois valores. Exemplo:

1^a posição $\Rightarrow$ 1 quadradinho em cima + 1 quadradinho em baixo = 2 quadradinhos.

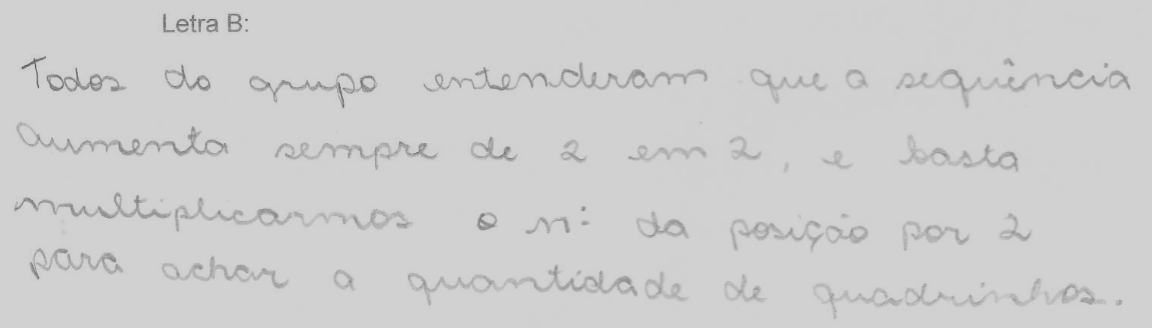
2^a posição $\Rightarrow$ 2 quadradinhos em cima + 2 quadradinhos em baixo = 4 quadradinhos.

.
.
.

n^a posição $\Rightarrow$ n quadradinhos em cima + n quadradinhos em baixo = 2. n



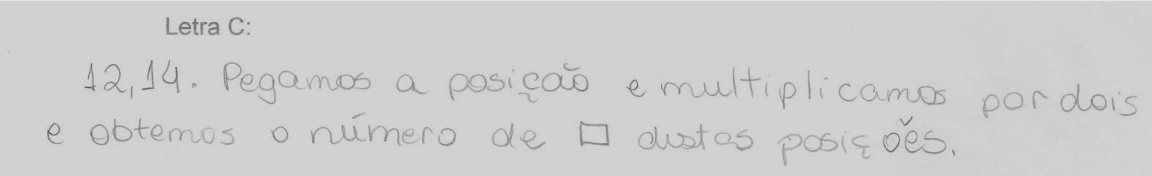
Os demais grupos perceberam que a sequência seguia de dois em dois, e então, partiram para a ideia multiplicativa, ou seja, multiplicaram a posição do elemento por 2 para encontrar o total de quadradinhos.

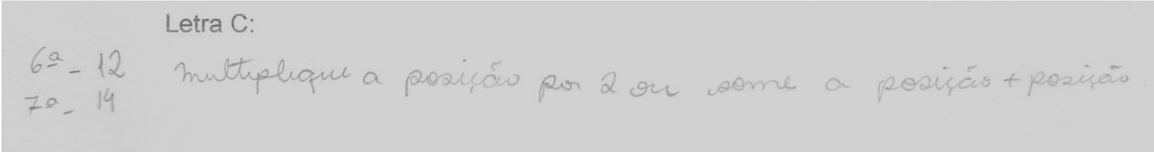

Letra B:
Todos do grupo entenderam que a sequência aumenta sempre de 2 em 2, e basta multiplicarmos o nº da posição por 2 para achar a quantidade de quadradinhos.

Terceira questão

Quantos quadradinhos têm a sexta figura da seqüência? E a 7ª?

Os alunos não tiveram dificuldade para responder essa terceira pergunta. Eles usaram a ideia de multiplicar a posição por 2 ou somaram posição mais posição.

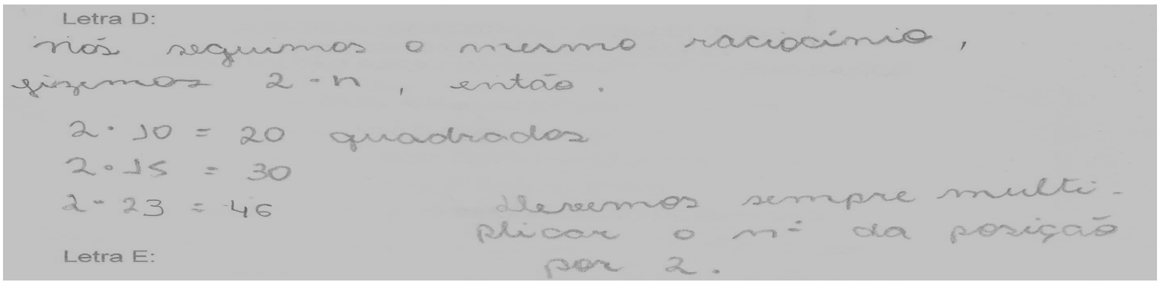

Letra C:
12, 14. Pegamos a posição e multiplicamos por dois e obtemos o número de □ destas posições.


Letra C:
6ª - 12
7º - 14
multiplique a posição por 2 ou some a posição + posição.

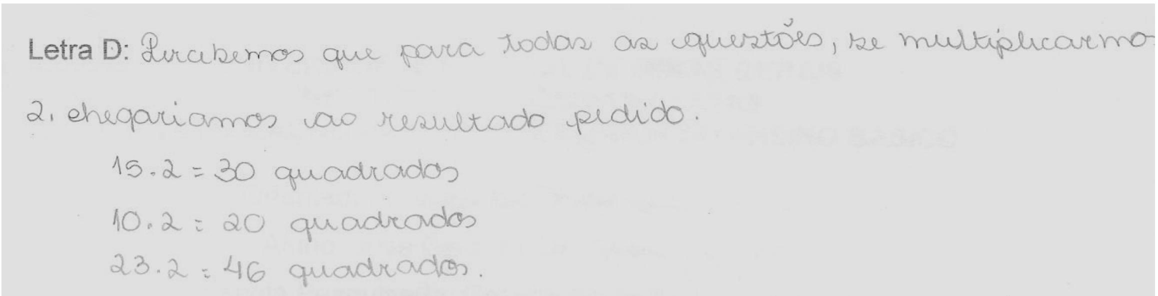
Quarta questão

Sem desenhar a sequência, quantos quadradinhos teriam a 10ª figura? E a 15ª? E a 23ª? Descreva como você pensou.

Essa não apresentou novidade em relação às respostas. Todos os grupos multiplicaram a posição da figura por 2, como se pode ver nos exemplos a seguir.



Letra D:
nós seguimos o mesmo raciocínio, fizemos 2·n, então.
2·10 = 20 quadrados
2·15 = 30
2·23 = 46
devemos sempre multi-plicar o nº da posição por 2.
Letra E:

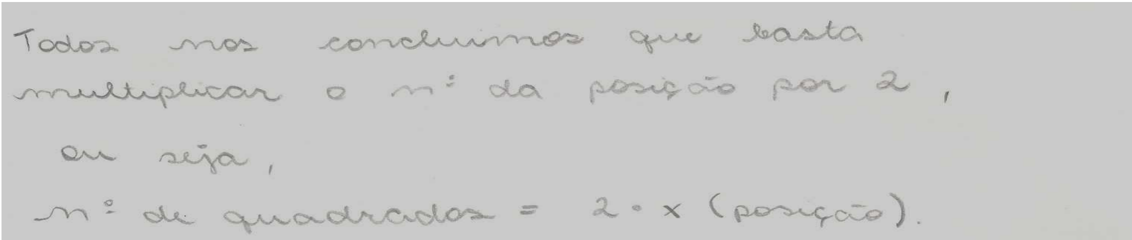


Letra D: Percebemos que para todas as questões, se multiplicarmo 2, chegariamos ao resultado pedido.
15.2 = 30 quadrados
10.2 = 20 quadrados
23.2 = 46 quadrados.

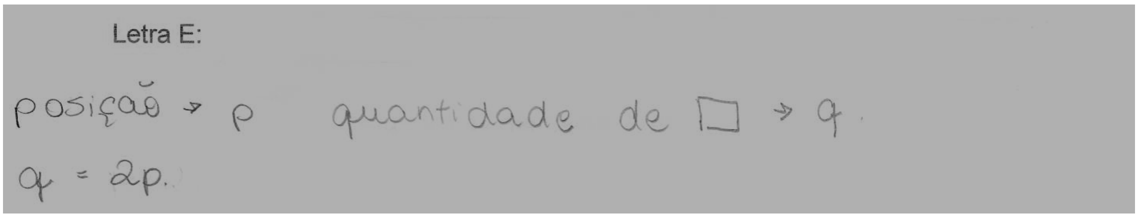
A 5ª e última questão proposta nesta atividade foi:

Quantos quadradinhos têm uma figura numa posição qualquer?

A partir dessa atividade foi possível perceber que os alunos já estavam conseguindo entender a formações da sequência e alguns a até descrevê-la corretamente. Nas atividades anteriores, eles não conseguiam sequer relacionar as figuras com a posição. Nessa atividade, já perceberam uma regularidade na sequência dada e escreveram uma expressão algébrica para simbolizar o elemento geral da sequência. Ilustramos essa situação nas duas soluções abaixo.



Todos nós concluímos que basta multiplicar o nº da posição por 2, ou seja, nº de quadrados = 2 · x (posição).



Letra E:

posição → p quantidade de □ → q.

q = 2p.

Alguns minutos depois iniciamos a atividade 4 (Anexo IV). Essa por sua vez, teve como objetivo observar as estratégias usadas pelos alunos para a resolução das questões. A atividade proposta encontra-se em anexo e essa primeira questão já nos apresentou a primeira discussão da atividade.

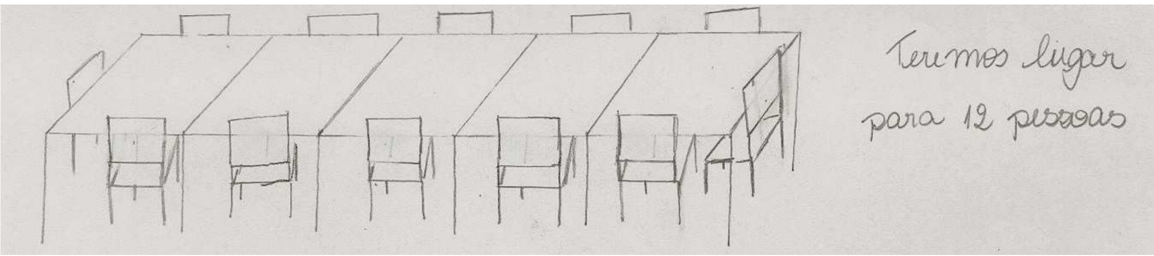
Atividade 4

Um restaurante possui mesas para quatro pessoas. Essas mesas são iguais e quadradas. Se juntarmos duas mesas, teremos lugar para seis pessoas. Se juntarmos três mesas (numa única direção) terá lugar para oito pessoas.

Primeira pergunta

Se juntarmos linearmente cinco mesas, teremos lugar para quantas pessoas?

Ressalta-se a dúvida sobre a palavra ***"LINEARMENTE".*** Como era uma dúvida de todos, foi feita uma discussão geral, em que todos os alunos apresentaram suas ideias. A aluna 16 disse que linearmente significava: ***"em sequência".*** Já a aluna 5 disse que para ela significava "em linha". O aluno 8 se lembrou das aulas de "FUNÇÃO", em que se trabalhava com ***"FUNÇÃO AFIM*** ou ***FUNÇÃO DE 1° GRAU"*** e também disse que essa era representada por uma reta. A conclusão que chegaram é que linearmente quer dizer ***"em linha"***. Depois de esclarecidas as dúvidas, eles responderam sem problemas à pergunta. A maioria dos grupos desenhou a figura em questão e outros somente deram a resposta sem justificativas.



Segunda pergunta

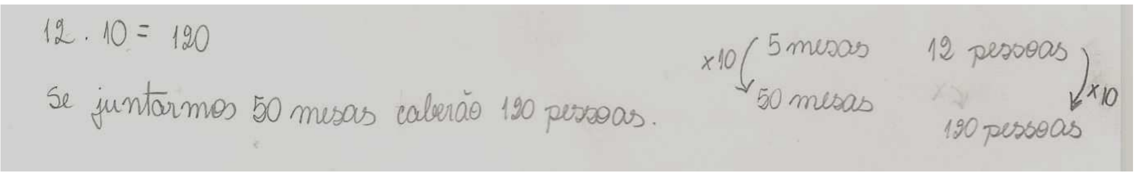
E se juntarmos 50 mesas?

Essa segunda pergunta exigiu mais dos alunos, pois desenhar 50 (cinquenta) mesas estava fora de questão e perceberam que criar uma estratégia seria o melhor caminho. Alguns dos grupos pensaram que poderiam resolver a questão através da regra de três e com isso erraram, embora o erro tenha sido interessante. Eles escreveram o seguinte:

5 mesas $\Rightarrow$ 12 lugares

50 mesas $\Rightarrow$ 120 lugares

Mas esqueceram-se de que, quando se juntam as mesas, podem-se perder um ou dois lugares.

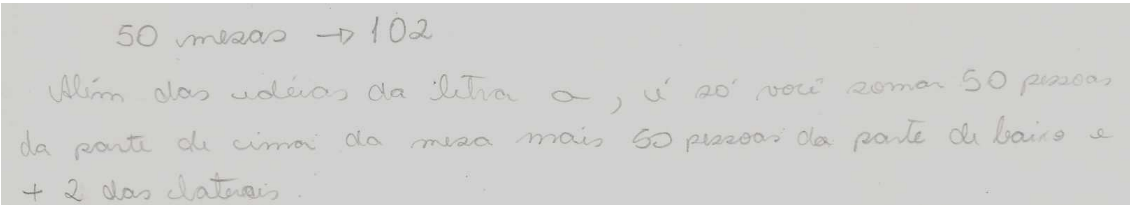

12 . 10 = 120

Se juntarmos 50 mesas caberão 120 pessoas.

x10 5 mesas → 50 mesas

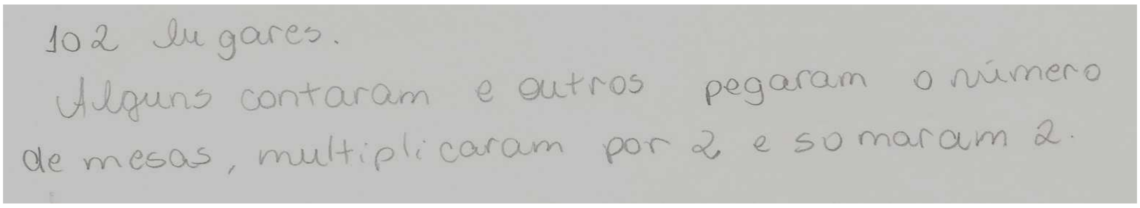
12 pessoas → 120 pessoas x10

Um grupo utilizou a ideia de somar os lugares de cima com os lugares de baixo e também somar mais dois lugares que representam os lugares laterais (extremos).

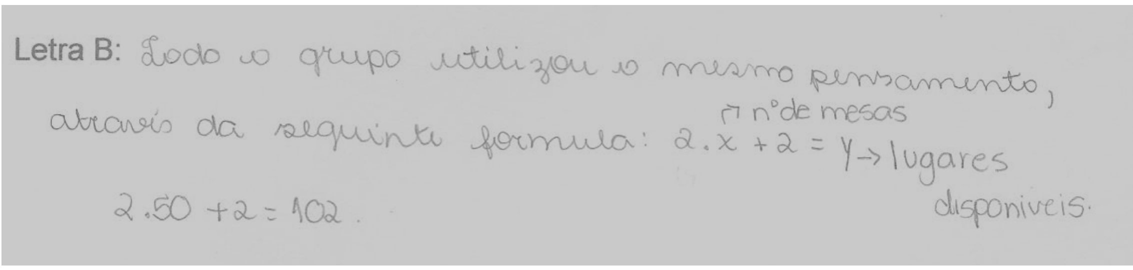

50 mesas → 102

Além das idéias da letra a, é só você somar 50 pessoas da parte de cima da mesa mais 50 pessoas da parte de baixo e + 2 das laterais.

Os demais grupos multiplicaram o número de mesas por 2 (dois) e depois somaram 2 unidades.


102 lugares.

Alguns contaram e outros pegaram o número de mesas, multiplicaram por 2 e somaram 2.


Letra B: Todo o grupo utilizou o mesmo pensamento, através da seguinte formula:

$2.x + 2 = y$ → lugares disponiveis. (x → nºde mesas)

$2.50 + 2 = 102$.

Terceira pergunta

Se juntarmos um número qualquer de mesas, o que se poderia dizer sobre o número de lugares disponíveis?

Essa última pergunta da atividade pedia aos alunos a quantidade de lugares para um número qualquer de mesas e mais uma vez, os alunos usaram expressões algébricas para expressar a formação da sequência.

Letra C:

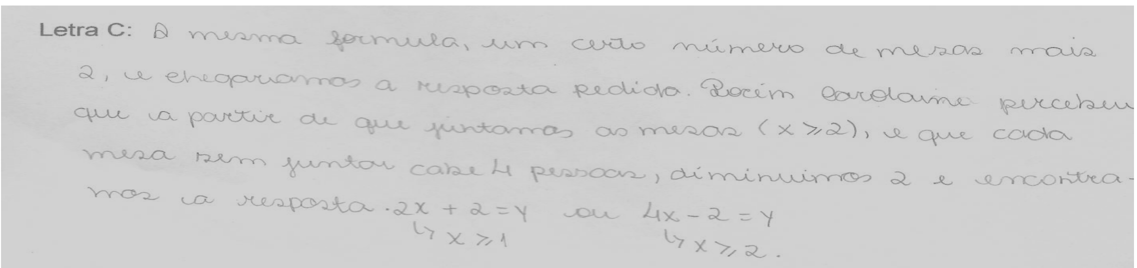
n → número de mesas p → número pessoas

2n + 2 = p

Um fator interessante foi que alguns criaram uma condição de existência para o número de mesas, o que mostra que os alunos perceberam que não se pode dar qualquer valor para a variável. Um grupo criou duas fórmulas para representar a lei de formação da sequência, como se mostra abaixo.

$x \Rightarrow$ Quantidade de mesas e $y \Rightarrow$ o número total de lugares.

$y = 2x + 2$, para $x \geq 1$ e $y = 4x - 2$, para $x \geq 2$.



Letra C: A mesma formula, um certo número de mesas mais 2, e chegamos a resposta pedida. Porém Carolaine percebeu que a partir de que juntamos as mesas ($x \geq 2$), e que cada mesa sem juntar cabe 4 pessoas, diminuimos 2 e encontramos a resposta. $2x + 2 = y$ ou $4x - 2 = y$

↳ $x \geq 1$ ↳ $x \geq 2$.

Ressalto que esta atividade e a discussão em torno dela despertou nos alunos os conceitos iniciais de função. Tais como domínio e imagem, ou seja, quando alguns alunos perceberam que não podiam utilizar qualquer número para representar a quantidade de mesas, ficou claro a idéia da condição para estar no domínio e qual seria o número total de lugares que representaria a imagem da função.

3.4 Considerações finais.

Devemos deixar claro que o objetivo principal do trabalho de campo era explorar e analisar qualitativamente as ações realizadas pelos alunos do 9° ano, uma vez que, já haviam tido contato com a álgebra em séries anteriores.

Já nos primeiros encontros notei a dificuldade que os estudantes têm quando trabalham com sequências simbólicas. Com isso, percebi que a álgebra trabalhada até aquele momento era meramente manipulativa e que não levava os alunos ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Saber “ver”, “descrever” e “escrever” são atos de extrema importância para desenvolvimento algébrico, por isso, trabalhar com atividades de regularidade de padrões pode estimular nossos alunos a praticarem essas ações.

Considerei que o 3° encontro (19/09/2008) foi o mais proveitoso, pois foi à primeira vez em que o grupo apresentou uma dúvida coletiva e expôs soluções diversas para o problema. Os exercícios apresentados foram encarados como desafios, o que deixou o encontro muito mais interessante.

Considero que as atividades propostas no decorrer do trabalho de campo motivaram os alunos a buscarem estratégias para resolução de problemas algébricos, pois até então a idéia que eles tinham da álgebra era simplesmente uma extensão da aritmética. Notei um avanço no desenvolvimento do pensamento algébrico no momento em que os alunos tentaram mostrar e comunicar as estratégias criadas. Eles se mostraram curiosos em trabalharem com padrões de sequência e se sentiram estimulados a construir e escreverem simbolicamente a fórmula que generalizava o padrão.

Quanto a mim, realizar essa pesquisa me fez repensar a forma com que trabalho com o ensino da álgebra, geralmente eu "forneço" as fórmulas prontas e acabadas, algumas vezes até mostro o porquê da fórmula, mas acredito que essa não seja a forma ideal, pois meus alunos ficam sem entender e apenas decoram. Percebi que devo estimular os alunos a buscarem estratégias para construírem seus próprios conhecimentos. Acredito que posso usar a generalização de padrões como ferramenta auxiliadora e facilitadora para um primeiro contato do aluno com a álgebra. Até porque, os PCNs incentivam o trabalho com padrões desde o 7º ano do ensino fundamental.

4. CONCLUSÃO

O trabalho com atividades de generalização de padrões proporciona a oportunidade de “criar” novas formas de comunicação, nas quais prevalece e se dá sentido à linguagem algébrica como uma forma “resumida” de expressar conjeturas, submetê-las a validação ou refutação.

Acredito que as atividades propostas sobre generalização possibilitam o desenvolvimento de habilidades como a “predição” e “sistematização” úteis não só na matemática como também em situações cotidianas.

Percebi que este trabalho levou os alunos desenvolvimento do pensamento algébrico e isso pode ser notado através dos raciocínios e expressões algébricas apresentados no transcurso das atividades resolvidas por eles. É claro que estamos longe de chegar onde queremos, mas, já demos um grande passo. Não podemos esquecer que as atividades apresentadas aos participantes do trabalho de campo fogem dos padrões dos exercícios que eles estão acostumados a fazer em sala de aula.

Portanto, tenho certeza que o trabalho realizado com esses alunos vai trazer frutos e o mais importante, esses alunos vão enxergar a álgebra de outra maneira e é isso que pode ajudá-los a entender e a desenvolver os exercícios e as atividades propostas no decorrer da sua vida escolar.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela e MIGUEL, Antonio. Contribuição para um Repensar a Educação Algébrica Elementar. Pro-Posições, Vol. 4 no 1, Campinas, São Paulo, 1993.

SOUZA, Eliane Reame; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. Álgebra: Das variáveis às equações e funções. IME-USP, Vol. 5, São Paulo, 1994.

FIORENTINI, Dario; CRISTOVÃO, Eliane Matesco. História e investigação matemática de/em aulas de matemática. Editora Alínea, Campinas, São Paulo, 2006.

BRASIL (País). Ministério da Educação e do Desporto. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Brasília, MEC, 1998.

BUTTO, Cristianne; ROJANO, Teresa. Pensamiento Algebraico Temprano. Educacion Matemática, vol. 16 vol. 001, Santilana, Distrito federal, México, 2004.

AZARQUIEL, Grupo. Ideas y Actividades para Ensenar Álgebra. Ed. Síntese AS, Madri, Espanha, 2007.

COXFORD, Arthur; SHULTE, Alberto; DOMINGUES, Hygino (tradução). As Ideias da Álgebra. Ed. Atual, São Paulo, 1995.

MASON, Jhon. Roots of Algebra. Scotland, Open University Press, 1988.

6. APÊNDICE E ANEXO

Anexo I

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES DO ENSINO BÁSICO

Orientadora: Maria Laura Magalhães Gomes

Aluno: José Geraldo dos Santos Barbosa

Escola Pesquisada: Colégio Anglo de Sete Lagoas

Turma: 8ª Série ou 9° Ano

OBSERVAÇÃO E GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES

Nomes: ________________________ ______________________________

________________________ ______________________________

Instruções: Discutindo com o seu grupo, faça a atividade1. Ao terminá-la, cada grupo deverá entregar essa folha contendo as respostas, o registro da discussão e o rascunho de cada aluno.

Atividade 1

∇ □ $\otimes$ ∇ □ $\otimes$ ∇ □ $\otimes$ ...

As figuras acima representam uma seqüência. Cada figura é um elemento da seqüência.

a) Qual é o 8º elemento da seqüência? Registre a estratégia usada.

b) Qual é o 14º elemento da seqüência? Por quê?

c) Sem desenhar, qual é o 20º elemento da seqüência? Por quê?

d) Qual figura estaria na 15ª posição, na 18ª posição e na 21ª posição?

e) Vocês conseguiriam dizer as cinco próximas posições em que estaria essa mesma figura?

f) Qual figura ocupará a 71ª posição?

g) Vocês agora conseguem escrever uma regra que pudesse representar a seqüência dada?

Anexo II

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES DO ENSINO BÁSICO

Orientadora: Maria Laura Magalhães Gomes
Aluno: José Geraldo dos Santos Barbosa
Escola Pesquisada : Colégio Anglo de Sete Lagoas
Turma: 8ª Série ou 9° Ano
OBSERVAÇÃO E GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES

Nomes: ________________________ ______________________________

________________________ ______________________________

Instruções: Discutindo com o seu grupo, faça a atividade2. Ao terminá-la, cada grupo deverá entregar essa folha contendo as respostas, o registro da discussão e o rascunho de cada aluno.

Atividade 2

Observe a seqüência abaixo:

2 3 5 7 2 3 5 7 2 3 5 7...

a) Considerando cada algarismo como um elemento da seqüência, qual é o 8º elemento da seqüência?

b) Qual é o 14º elemento da seqüência? Por quê?

c) Sem escrever, qual é o elemento que ocupa a 20ª posição? Por quê?

d) Que elementos ocupam a 24ª, a 28ª e a 32ª posições?

e) Você conseguiria dizer as cinco próximas posições em que estaria essa mesma figura?

f) Que algarismo ocupa a 70ª posição? E a 101ª posição? Por quê?

g) Vocês agora conseguem escrever uma regra que pudesse representar a seqüência dada?

Anexo III

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES DO ENSINO BÁSICO

Orientadora: Maria Laura Magalhães Gomes

Aluno: José Geraldo dos Santos Barbosa

Escola Pesquisada: Colégio Anglo de Sete Lagoas

Turma: 8ª Série ou 9° Ano

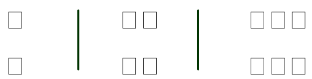
OBSERVAÇÃO E GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES

Nomes:_______________________ _____________________________

_______________________ _____________________________

Atividade 3

Observe a seqüência de figuras abaixo.



a) Desenhe as duas próximas figuras da seqüência.

b) De que maneira você descreveria a uma pessoa como desenhar a seqüência?

c) Quantos quadradinhos tem a sexta figura da seqüência? E a 7ª?

d) Sem desenhar a seqüência, quantos quadradinhos teria a 10ª figura? E a 15ª? E a 23ª? Descreva como você pensou.

Quantos quadradinhos tem uma figura numa posição qualquer?

Anexo IV

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES DO ENSINO BÁSICO

Orientadora: Maria Laura Magalhães Gomes

Aluno: José Geraldo dos Santos Barbosa

Escola Pesquisada: Colégio Anglo de Sete Lagoas

Turma: 8ª Série ou 9° Ano

OBSERVAÇÃO E GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES

Nomes:________________________ ______________________________

________________________ ______________________________

Atividade 4

Um restaurante possui mesas para quatro pessoas. Essas mesas são iguais e quadradas. Se juntarmos duas mesas, teremos lugar para seis pessoas. Se juntarmos três mesas (numa única direção), teremos lugar para oito pessoas.

a) Se juntarmos linearmente cinco mesas, teremos lugar para quantas pessoas?

b) E se juntarmos 50 mesas?

c) Se juntarmos um número qualquer de mesas, o que se poderia dizer sobre o número de lugares disponíveis?