

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**SÍNTESE ÓPTICA DE ANTENAS REFLETORAS COM  
SIMETRIA CIRCULAR UTILIZANDO A CONCATENAÇÃO DE  
SEÇÕES ELÍPTICAS**

**Tcharles Vinícius Bernardes de Faria**



**GAPTEM – Grupo de Antenas, Propagação e Teoria Eletromagnética  
Departamento de Engenharia Eletrônica  
Escola de Engenharia  
Universidade Federal de Minas Gerais**

**Universidade Federal de Minas Gerais**  
**Escola de Engenharia**  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica**

**SÍNTESE ÓPTICA DE ANTENAS REFLETORAS COM SIMETRIA  
CIRCULAR UTILIZANDO A CONCATENAÇÃO DE SEÇÕES  
ELÍPTICAS**

Tcharles Vinícius Bernardes de Faria

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Fernando José da Silva Moreira

Belo Horizonte - MG

Fevereiro de 2015

DISSERTAÇÃO DE Mestrado Nº 856

**SÍNTESE ÓPTICA DE ANTENAS REFLETORAS COM SIMETRIA CIRCULAR  
UTILIZANDO A CONCATENAÇÃO DE SEÇÕES ELÍPTICAS**

**Tcharles Vinicius Bernardes de Faria**

DATA DA DEFESA: 20/02/2015

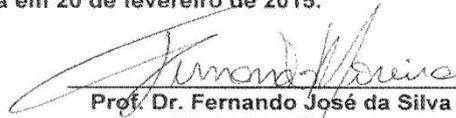
**"Síntese Óptica de Antenas Refletoras com Simetria Circular  
Utilizando a Concatenação de Seções Elípticas"**

**Tcharles Vinícius Bernardes de Faria**

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 20 de fevereiro de 2015.

Por:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Fernando José da Silva Moreira  
DELT (UFMG) - Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Cássio Gonçalves do Rego  
DELT (UFMG)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Ricardo Luiz da Silva Adriano  
DEE (UFMG)

*Este trabalho é dedicado as três pessoas mais importantes e sublimes da minha vida. Eu tenho o imenso orgulho em podê-las chamar de Minha Família: aos meus pais, Osias e Roseli que lutam incansavelmente para me proporcionar uma boa Educação e por sempre estarem presentes em todos os momentos da minha vida. E com muito amor e carinho a minha querida irmã Caroline pelo companheirismo, amizade e principalmente pela compreensão. Eu amo vocês do tamanho do universo!*

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço ao meu bom Deus por toda força, fé, graça e sabedoria concedidas no período do mestrado. Por sempre poder acordar e ter a oportunidade de vencer todos os obstáculos e pela esperança em poder acreditar e alcançar os meus objetivos. Obrigado Deus pelas bênçãos e boas energias recebidas todos os dias!

Agradeço ao meu Orientador Prof. Fernando Moreira pela dedicação e excelente orientação. Os seus ensinamentos foram de fundamental importância para o meu aprendizado e amadurecimento como pesquisador. Também, fico muito grato por ter permitido que eu me associasse ao seu grupo de pesquisa (GAPTEM), e pela concessão da bolsa de estudos.

Agradeço, também, aos meus pais Osias e Roseli, pelo incansável apoio e amor incondicional. Obrigado por tudo e principalmente por me incentivar, desde criança, a prosseguir com os estudos. Expresso os meus sinceros agradecimentos a minha querida irmã Caroline pela compreensão e fortaleza nos momentos difíceis durante o ano de 2013. Vocês são muito especiais!

A minha querida amiga Samira, obrigado pelos bons momentos e principalmente pelo incentivo durante as dificuldades. Também aos amigos Alex, Diego, Wilmer e Marica Victória, fico grato pelos momentos de descontração e pelo bom convívio no GAPTEM.

A minha amiga Taty pelas farras durante as minhas idas a Bambuí. Obrigado pela sua amizade, você é muito especial.

Aos meus avós de coração, Dr. Ênio e Jussara, que sempre torceram e acreditaram em mim. Obrigado!

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro e imprescindível para a realização desta dissertação de mestrado.

*“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível.”*

**Charles Chaplin**

*“Julgue seu sucesso pelas coisas que você teve que renunciar para conseguir.”*

**Dalai Lama**

*“Geometrical optics is either very simple, or else is very complicated...”*

**Richard P. Feynman in Lectures in Physics, Vol. I**

# RESUMO

Este trabalho tem como objetivo desenvolver um ferramental teórico, matemático e computacional para sintetizar superfícies de antenas refletoras com simetria circular utilizando seções de elipses concatenadas consecutivamente entre si na região de campo próximo, de acordo com os conceitos da Óptica Geométrica. Para ilustrar a técnica numérica de síntese empregada neste trabalho, optou-se por modelar duas diferentes configurações geométricas de antenas refletoras com simetria circular. Desta maneira, o presente trabalho é desenvolvido em duas etapas.

A primeira etapa consiste em compreender e investigar as características da técnica de síntese utilizada, em particular a sua taxa de convergência. Para isso, optou-se em sintetizar um refletor que, em princípio, produza a mesma distribuição de potência na abertura de uma antena refletora parabólica alimentada pelo foco de acordo com a Óptica Geométrica.

Na segunda etapa, optou-se em sintetizar o refletor principal mantendo o sub-refletor clássico de uma antena duplo-refletora para cobertura omnidirecional. Neste caso, considerou-se um determinado padrão de distribuição de potência sobre a abertura cilíndrica do refletor principal da antena, segundo a Óptica Geométrica e assegurando a Lei da Conservação da Energia.

***Palavras-chave: Antenas refletoras, lei da conservação da energia, óptica geométrica, seções de elipses, região de campo próximo.***

# ABSTRACT

This work to develop a theoretical, mathematical and computational tool to synthesize surfaces of reflector antennas with circular symmetry using the concatenation of consecutive elliptical sections in the near field, according to the concepts of Geometrical Optics. To illustrate the numerical synthesis used in this study, we chose to model different geometric configurations of reflector antennas with circular symmetry. Thus, this work is developed in two stages.

This work aims to develop a theoretical, mathematical and computational tool to synthesize surfaces of reflector antennas with circular symmetry using the concatenation of consecutive elliptical sections in the near field (antenna aperture). Initially, we used the Energy Conservation of Law, the principle of Geometrical Optics, to develop an iterative algorithm on order to calculate the angles of the feed. To illustrate the numerical synthesis technique adopted in this study, we chose to model two different geometric configurations of reflector antennas with circular symmetry.

The first step is to investigate and understand the technical features of synthesis used, in particular its rate of convergence. For this, it was decided to synthesize a reflector that, in principle, produces the same power distribution in aperture of a front-fed parabolic reflector antenna according Geometrical Optics.

In the second, we chose to shape the main reflector keeping the classic subreflector or a dual-reflector antenna of omnidirectional coverage. In this case, it was considered a pattern of power distribution on the cylindrical aperture of the main antenna reflector, according Geometrical Optics and ensuring Energy Conservation of Law.

***Keywords – Reflector antennas, energy conservation of law, geometrical optics, ellipse sections, near-field.***

# SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Motivação e Justificativas .....	1
1.2 Objetivos .....	5
1.3 Estrutura da Dissertação .....	8
2 MODELAGEM DE UM REFLETOR ALIMENTADO PELO FOCO .....	10
2.1 Introdução .....	10
2.2 Estudo do Refletor Clássico Alimentado pelo Foco .....	11
2.3 Modelo de Alimentador .....	16
2.4 O Processo de Modelagem .....	18
2.5 Resultados e Discussões .....	28
2.6 Conclusões Parciais .....	39
3 MODELAGEM DO REFLETOR PRINCIPAL DA OADC .....	41
3.1 Introdução .....	41
3.2 Estudo da Configuração Clássica OADC .....	42
3.2.1 Estudo Paramétrico .....	47
3.3 Modelo de Alimentador .....	51
3.4 O Processo de Síntese Óptica do Refletor Principal .....	53

3.5 Resultados e Discussões .....	63
3.6 Conclusões Parciais .....	73
4 CONCLUSÕES .....	74
4.1 Proposta para Trabalhos Futuros .....	75
5 REFERÊNCIAS .....	76
APÊNDICE A Valores de $P_{Ai}$ .....	79
Apêndice A.1: Valores de $P_{Ai}$ considerando-se $\rho_A = 2000 \lambda \alpha = 15^0$ .....	79
Apêndice A.2: Valores de $P_{Ai}$ considerando-se $\rho_A = 2000 \lambda \alpha = 30^0$ .....	86

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1 (a)OADC (b) OADG, (c) OADE e (d) OADH .....	7
Figura 1-2 Abertura cilíndrica da OADC .....	9
Figura 2-1 Propagação do campo eletromagnético em uma antena refletora parabólica <i>front-fed</i> .....	12
Figura 2-2 Configuração em corte do refletor parabólico <i>front-fed</i> .....	13
Figura 2-3 Diagrama de radiação do alimentador RCF para $n = 1,4; 2; 4,5$ e $7$ ..	17
Figura 2-4 Concatenação de seções cônicas para a representação da geratriz que descreve o refletor <i>front-fed</i> .....	19
Figura 2-5 Concatenação de seções de elipses .....	20
Figura 2-6 Discretização da abertura do refletor .....	22
Figura 2-7 Emissão de raios do alimentador RCF, segundo a GO e a Lei da Conservação da Energia .....	24
Figura 2-8 Fluxograma do algoritmo de síntese .....	28
Figura 2-9 Parametrização geométrica da antena refletora .....	29
Figura 2-10 Geratrizes das superfícies dos refletores clássico e modelado para $N_T = 24$ .....	31
Figura 2-11 Diagrama de radiação das superfícies dos refletores clássico e modelado para $N_T = 24$ .....	31
Figura 2-12 Geratrizes das superfícies dos refletores clássico e modelado para $N_T = 32$ .....	32

Figura 2-13 Diagrama de radiação das superfícies dos refletores clássico e modelado para $N_T = 32$ .....	33
Figura 2-14 Geratrizes das superfícies dos refletores clássico e modelado para $N_T = 45$ .....	34
Figura 2-15 Diagrama de radiação das superfícies dos refletores clássico e modelado para $N_T = 45$ .....	34
Figura 2-16 Geratrizes das superfícies dos refletores clássico e modelado para $N_T = 65$ .....	35
Figura 2-17 Diagrama de radiação das superfícies dos refletores clássico e modelado para $N_T = 65$ .....	36
Figura 2-18 Geratrizes das superfícies dos refletores clássico e modelado para $N_T = 101$ .....	37
Figura 2-19 Diagrama de radiação das superfícies dos refletores clássico e modelado para $N_T = 101$ .....	37
Figura 2-20 Erro RMS das distâncias da distância entre a fonte e o refletor modelado em função de $N_T$ . Neste caso, a distância é a medida ao longo do caminho óptico .....	38
Figura 3-1 Parâmetros geométricos básicos da configuração clássica da antena OADC .....	43
Figura 3-2 Representação dos parâmetros geométricos de entrada da configuração OADC .....	48
Figura 3-3 Diagrama de radiação do modo TEM de uma corneta coaxial .....	52
Figura 3-4 Definição dos parâmetros da corneta coaxial .....	53
Figura 3-5 Concatenação de seções cônicas para a representação da geratriz do	

refletor principal da antena OADC e discretização da abertura .....	54
Figura 3-6 Parâmetros que definem a hipérbole .....	55
Figura 3-7 Representação da emissão de raios emitidos pela corneta coaxial, segundo a GO .....	58
Figura 3-8 Representação do sistema de coordenadas auxiliar $(x', y')$ .....	60
Figura 3-9 Parâmetros das seções elípticas .....	61
Figura 3-10 Antena OADC clássica .....	64
Figura 3-11 Diagrama de radiação da antena OADC clássica .....	65
Figura 3-12 Definição do ângulo $\alpha$ e a distribuição dos focos $F_i$ .....	66
Figura 3-13 Geratriz do refletor principal modelado para $\alpha = 15^\circ$ .....	67
Figura 3-14 Geratrizes dos refletores clássico e modelado para $\alpha = 15^\circ$ .....	68
Figura 3-15 Diagramas de radiação dos refletores clássico e modelado para $\alpha = 15^\circ$ .....	69
Figura 3-16 Geratriz do refletor principal modelado para $\alpha = 30^\circ$ .....	70
Figura 3-17 Geratrizes dos refletores clássico e modelado para $\alpha = 30^\circ$ .....	71
Figura 3-18 Diagramas de radiação dos refletores clássico e modelado para $\alpha = 30^\circ$ .....	72

# ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2-1 Parâmetros de entrada.....	30
Tabela 2-2 Parametrização de $N_T$ .....	30
Tabela 3-1 Parâmetros geométricos.....	50

# Capítulo 1

---

## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 Motivação e Justificativas

Sabe-se que desde o início dos estudos da propagação de ondas eletromagnéticas conduzidos por Hertz [1] as antenas refletoras têm sido utilizadas em inúmeras aplicações, particularmente no âmbito das telecomunicações. Por sua vez, estas antenas abrangem desde os imensos radiotelescópios [2] até geometrias mais compactas empregadas nos enlaces troposféricos de micro-ondas [3]. As antenas refletoras possuem como maior atrativo a obtenção de altas eficiências de radiação utilizando-se aparatos relativamente simples, sendo que este fator deve-se basicamente à colimação da radiação eletromagnética oferecida pela superfície refletora [4].

O campo de estudos das antenas refletoras é muito amplo e dinâmico e, nos últimos 60 anos, graças aos avanços tecnológicos, a busca por este tipo de antena torna-se maior [4]. Devido à grande necessidade por sistemas de comunicações a longas distâncias, formas geométricas mais sofisticadas de refletores estão sendo projetados para satisfazer tal requisito [4] e [5]. Assim, fica evidente a necessidade de se projetar antenas refletoras que apresentem um alto desempenho eletromagnético culminando, assim, em um grande progresso para o desenvolvimento de técnicas numéricas utilizadas na síntese ou modelagem das superfícies de tais antenas.

Neste contexto, cabe enfatizar que a síntese ou modelagem das antenas refletoras possibilita aperfeiçoar o desempenho eletromagnético da antena. Isto é, permite uma maior eficiência de iluminação na tentativa de redistribuir o campo eletromagnético de forma mais eficaz sobre a abertura. É nesta perspectiva, que, ao

longo das últimas décadas as técnicas numéricas aplicadas à síntese de refletores para diferentes configurações geométricas têm sido o objeto de estudo de diversos pesquisadores [6]-[21].

Neste caso, é possível constatar na literatura que inúmeros trabalhos já foram publicados, os quais apresentaram soluções numéricas para equações diferenciais parciais (*partial differential equations* – PDE's) com o objetivo de sintetizar antenas refletoras. Dentre estes estudos, merece destaque aquele proposto em [6], onde o autor desenvolveu uma formulação matemática para modelar as superfícies de antenas *Cassegrain* e *Gregorian*, ambas constituídas por dois refletores. Além disso, o autor utilizou a Lei de Snell, a Conservação da Energia e o Teorema de Malus para equacionar um sistema não linear composto por 4 PDE's de primeira ordem para o problema da síntese.

Também é possível verificar que em [7] os autores utilizaram os conceitos associados à Óptica Geométrica (*Geometrical Optics* – GO) para formular a abordagem de síntese por meio de um conjunto não linear constituído por 4 PDE's de primeira ordem com o objetivo de redistribuir o campo eletromagnético sobre a abertura da antena refletora a ser modelada. Em [8] foi proposto o procedimento de modelagem da superfície do sub-refletor de um sistema *offset* do tipo *Cassegrain* a fim de controlar a amplitude do campo eletromagnético presente na abertura. Em [9] os autores lidaram com a síntese de antenas duplo-refletoras e com um único refletor por meio da GO e de soluções exatas e eficientes para PDE's de primeira ordem e não lineares.

Em [10] foi exposto um procedimento para modelar antenas duplo-refletoras omnidirecionais. Para isso, os autores formularam uma PDE de primeira ordem através das Leis de Snell e da Conservação da Energia para tratar a reflexão ocorrida na superfície do sub-refletor. Além disso, assumiram uma distribuição de fase uniforme para o campo eletromagnético na abertura da antena. No entanto, em [11] foi desenvolvida uma formulação matemática por meio de equações diferenciais ordinárias (*ordinary differential equations* – ODE's) com o objetivo de modelar o

refletor principal de uma antena ADE (*Axially-Displaced Ellipse*) para oferecer uma cobertura de radiação uniforme no plano vertical de elevação.

O processo de modelagem de um sistema duplo-refletor *offset* para se obter fase constante do campo eletromagnético sobre a abertura de tal antena foi formulado matematicamente com equações de *Monge-Ampère* sob as premissas da GO, assim como está descrito em [12]. Ainda é possível destacar que em [13] os autores apresentaram uma abordagem matemática de síntese, segundo a GO, através de uma PDE de segunda ordem do tipo de *Monge-Ampère*. Para isso, os autores de [13] desenvolveram uma solução numérica adequada para o problema.

Portanto, é importante evidenciar que a partir dos estudos descritos acima [6]-[13] as técnicas numéricas propostas pelos autores de tais trabalhos têm sido amplamente estudadas, reformuladas e desenvolvidas ao longo dos últimos anos. Também se observa que, tais técnicas apresentaram eficiência para a modelagem de refletores de forma bastante significativa para a teoria de síntese, oferecendo um grande progresso nos âmbitos da ciência e da tecnologia presentes nesta área de pesquisa.

Entretanto, é possível verificar, também, que as principais dificuldades associadas às abordagens de síntese de antenas refletoras estão relacionadas com a complexidade do formalismo matemático exposto em [6]-[13]. Por outro lado, tem-se o alto esforço computacional requerido pela linearização das equações empregadas na síntese, apesar da tecnologia computacional existente na atualidade. Com o objetivo de suprir estas dificuldades, recentemente, novas técnicas baseadas na concatenação de seções cônicas têm sido empregadas por diversos pesquisadores desta área de pesquisa [14]-[21].

As técnicas que utilizam a concatenação de seções cônicas podem ser formuladas matematicamente de diferentes formas e, conseqüentemente, podem ser implementadas computacionalmente utilizando vários tipos de algoritmos visando a sua versatilidade. Outro fator que diferencia estas técnicas das demais é a formulação matemática, pelo fato de exigir menos complexidade com a manipulação das

equações, como pode ser visto em [14]-[21]. Também, tais técnicas podem ser aplicadas para sintetizar diferentes configurações geométricas de antenas refletoras.

Em [16] foi apresentado um procedimento com o objetivo de sintetizar uma antena constituída por um único refletor circularmente simétrico utilizando a concatenação consecutiva de seções de parábolas. Os autores compararam o tempo computacional de dois tipos de algoritmos. Um dos algoritmos baseia-se na formulação apresentada em [17] e o outro em programação linear. Neste caso, os autores verificaram que o algoritmo proposto de acordo com [17] apresentou vantagens significativas que foram a versatilidade, a facilidade de implementação computacional e um bom tempo de convergência numérica quando comparado com aquele que utilizou conceitos de programação linear.

Em [18] os autores modelaram um sistema *offset* com um único refletor através dos conceitos apresentados e desenvolvidos em [19]. Já em [20] os autores desenvolveram um procedimento numérico para a síntese de antenas *offset* por meio da combinação de seções quádricas com eixos deslocados para a descrição e determinação dos pontos que descrevem a superfície refletora de tal antena.

O presente trabalho propõe o desenvolvimento do formalismo teórico e matemático necessário com o objetivo de sintetizar superfícies de antenas refletoras. A técnica numérica de síntese a ser utilizada no presente estudo é relativamente recente e foi apresentada em [17]-[19] e se baseia em seções de elipses concatenadas seqüencialmente entre si utilizando os conceitos da GO [21]. Neste trabalho o algoritmo desenvolvido e apresentado em [17] foi adaptado para sintetizar antenas refletoras com simetria circular.

A escolha de se utilizar a técnica de síntese que se baseia na concatenação consecutiva de seções de elipses [17]-[19] deve-se a vários fatores. Primeiramente, é importante enfatizar que o algoritmo descrito em [17]-[19] até então nunca tinha sido utilizado por pesquisadores do Grupo de Antenas, Propagação e Teoria Eletromagnética (GAPTEM), onde este trabalho foi desenvolvido, do Departamento de Engenharia Eletrônica da UFMG. Outro fator relevante é que esta técnica possui uma formulação matemática de fácil implementação computacional e pode ser utilizada na

região de campo próximo (abertura da antena refletora) [17]-[19] e, também, na região de campo distante empregando seções de parábolas [16]. Logo, tal técnica de síntese utiliza os conceitos da GO para produzir um determinado padrão de potência distribuído sobre a abertura do refletor conforme [17]-[19] e [21].

## 1.2 Objetivos

De acordo com os fatores mencionados na Seção 1.1, o presente trabalho tem como objetivo principal desenvolver ferramentas teórica, analítica e computacional para sintetizar superfícies de antenas refletoras. A técnica numérica de síntese adotada neste estudo é a concatenação consecutiva de seções elípticas proposta e desenvolvida, inicialmente, por Oliner (2006) conforme está apresentada com maiores detalhes em [17]. Informações adicionais desta técnica, bem como todos os seus aspectos conceituais e matemáticos podem ser encontrados em [17]-[19]. Deve-se enfatizar que o algoritmo proposto em [17] foi utilizado para sintetizar a superfície de uma antena *offset* constituída por um único refletor. No entanto, no presente trabalho o formalismo teórico e matemático desenvolvido em [17] foi adaptado para sintetizar antenas refletoras com simetria circular.

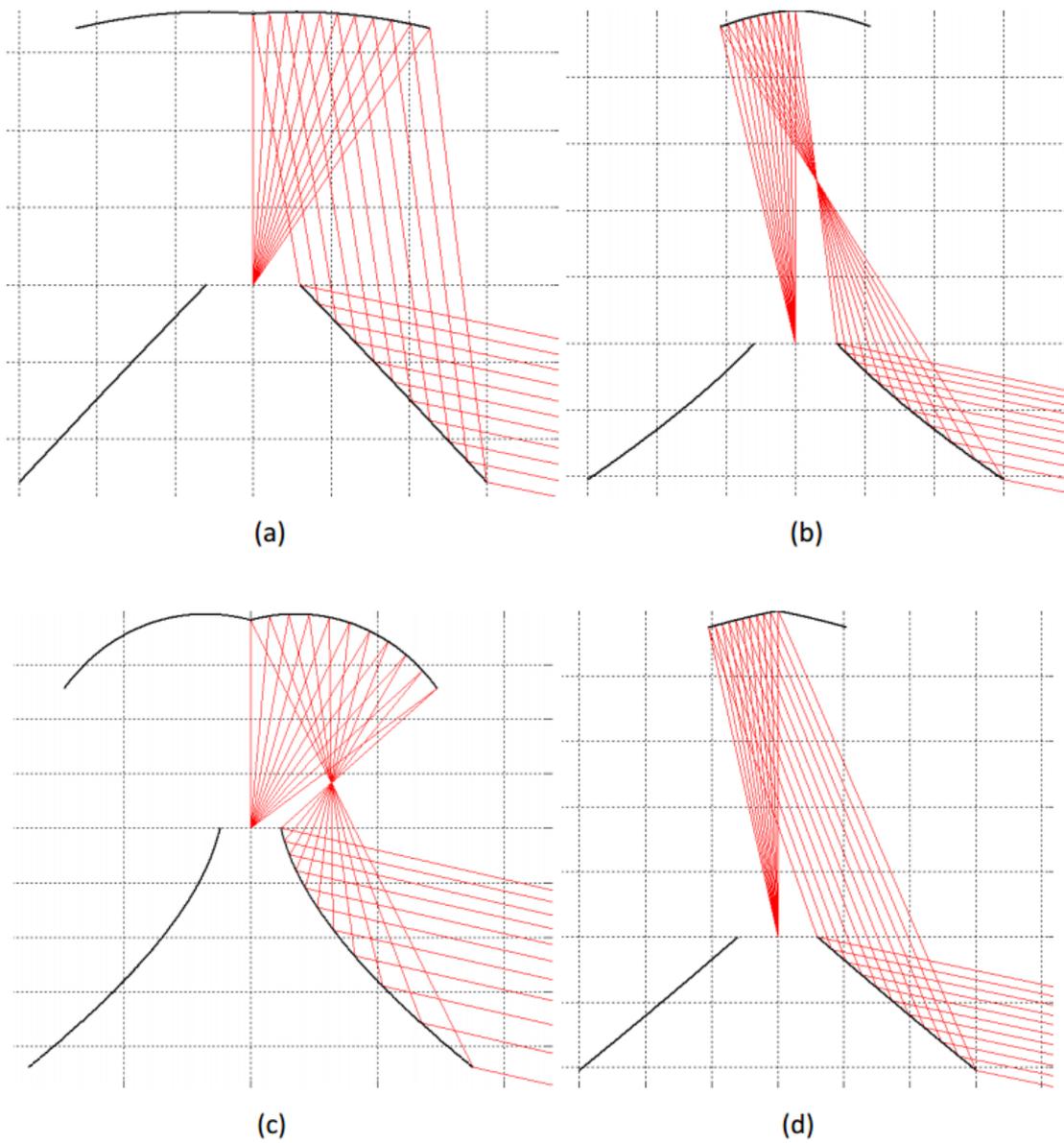
Neste trabalho o procedimento de modelagem é feito por meio da concatenação consecutiva de seções elípticas empregando os conceitos que regem a GO. A escolha de seções de elipses deu-se preferencialmente pelo fato da síntese ser realizada na abertura da antena refletora (região de campo próximo), garantindo, desta forma, que as cáusticas do refletor principal sejam colocadas à frente da antena.

Ao longo do estudo da técnica desenvolvida por Oliner (2006) [17]-[19], percebeu-se a necessidade de empregar a Lei da Conservação da Energia, princípio da GO, a fim de desenvolver um algoritmo iterativo para calcular todas as direções dos raios que partem da fonte (origem  $O$ ). Para ilustrar a técnica de síntese e realizar um estudo acerca dos resultados obtidos, optou-se em sintetizar duas diferentes

configurações geométricas de antenas refletoras. Para isso, este trabalho foi desenvolvido em duas etapas.

A primeira etapa deste estudo consistiu-se em investigar o comportamento numérico da técnica de síntese descrita em [17]-[19], em particular analisar a sua taxa de convergência numérica. Para isso, optou-se em sintetizar uma antena constituída por um único refletor circularmente simétrico considerando-se um padrão de distribuição de potência especificado sobre a abertura de tal antena. É importante destacar que a distribuição de potência na abertura do refletor modelado foi especificada em conformidade com aquela produzida por uma antena refletora alimentada pelo foco. Desta maneira, pode-se realizar um estudo numérico da eficiência da técnica, tendo a superfície parabólica como referência. Os resultados obtidos nesta etapa geraram um artigo que foi publicado nos anais do MOMAG 2014 (16º Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica e 11º Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo) [21].

Na segunda etapa deste trabalho, todo o ferramental teórico e matemático desenvolvido na primeira etapa foi estendido para modelar o refletor principal de antenas duplo-refletoras para cobertura omnidirecional (veja a Figura 1-1), sendo que estas configurações geométricas de antenas refletoras estão descritas com maiores detalhes em [22]-[24]. As configurações de antenas duplo-refletoras para cobertura omnidirecional expostas na Figura 1-1 são as seguintes: OADC (*Omnidirectional Axially-Displaced Cassegrain*), OADG (*Omnidirectional Axially-Displaced Gregorian*), OADE (*Omnidirectional Axially-Dispalced Ellipse*) e OADH (*Omnidirectional Axially-Displaced Hyperbola*), respectivamente. Com o objetivo de melhorar o desempenho destas antenas e obter uma cobertura específica, optou-se por modelar a superfície refletora principal mantendo o sub-refletor clássico da configuração duplo-refletora OADC, como aquela que está ilustrada na Figura 1-1 (a). Para a modelagem desta configuração omnidirecional, considerou-se uma distribuição de potência especificada sobre a abertura cilíndrica de tal refletor, segundo a GO, para simular uma frente de onda esférica com o intuito de produzir uma cobertura uniforme em um determinado setor.

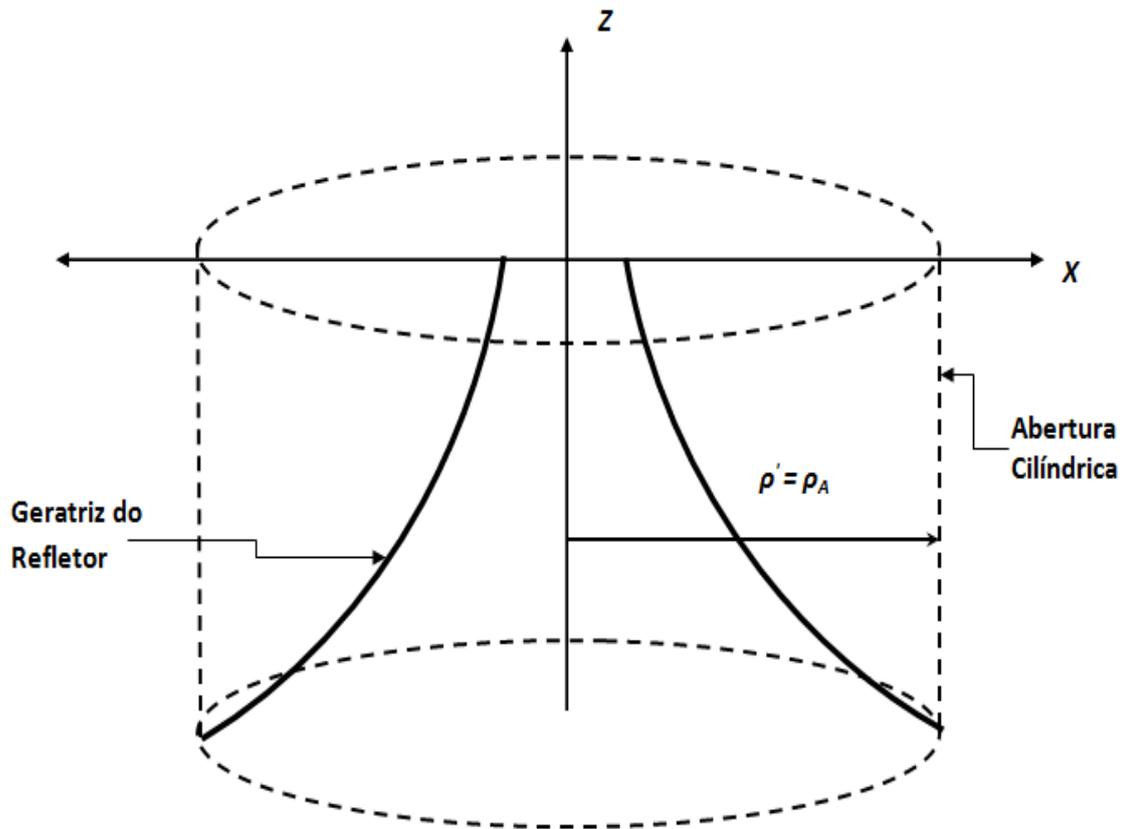


**Figura 1-1 (a) OADC, (b) OADG, (c) OADE e (d) OADH [23].**

## 1.3 Estrutura da Dissertação

No Capítulo 2 é apresentado todo o desenvolvimento teórico e matemático para sintetizar a superfície de uma antena constituída por um único refletor sendo ele circularmente simétrico, bem como uma discussão dos resultados obtidos através do ferramental. Na Seção 2.2 é feito um breve estudo da configuração geométrica clássica do refletor utilizado para a síntese. Posteriormente, é descrito o modelo de alimentador empregado para o processo de modelagem do refletor em questão. Na seção seguinte, é apresentada a técnica numérica de síntese e os seus aspectos teóricos e matemáticos (analíticos) considerando o único refletor circularmente simétrico. Como consequência de todo o desenvolvimento exposto, na Seção 2.5 é feito um estudo dos resultados obtidos a fim de compreender e investigar as características da técnica de síntese adotada neste trabalho. Desta forma, o capítulo é finalizado com as principais considerações sobre os resultados obtidos, em particular a taxa de convergência numérica da técnica de síntese.

O Capítulo 3 apresenta o desenvolvimento do formalismo necessário para realizar a modelagem do refletor principal (mantendo o sub-refletor clássico) de uma antena duplo-refletora para cobertura omnidirecional, neste caso uma antena OADC, e os resultados obtidos. Para isso, na Seção 3.2 é feito um estudo da configuração clássica da antena OADC com o objetivo de determinar os parâmetros do sub-refletor clássico. Em seguida é apresentado o modelo de alimentador utilizado nesta etapa enfatizando as suas principais características. Na Seção 3.4 são apresentados os aspectos conceituais e matemáticos para a modelagem do refletor principal da antena OADC considerando-se a abertura cilíndrica para esta configuração omnidirecional (observe a Figura 1-2). Além disso, especificou-se um padrão de distribuição de potência sobre a abertura cilíndrica desta antena assegurando a Lei da Conservação da Energia. Na seção seguinte são mostrados os resultados obtidos para a formulação aqui proposta e uma discussão de tais resultados. Na última seção do capítulo são feitas as principais conclusões de todo o desenvolvimento apresentado neste capítulo.



**Figura 1-2 Abertura cilíndrica da OADC.**

Conseqüentemente, no Capítulo 4 são apresentadas as conclusões obtidas do presente trabalho e são explanados todos os aspectos em relação a esta pesquisa enfatizando, assim, o ganho científico proporcionado. As propostas para trabalhos futuros acerca de todo o estudo aqui apresentado são abordadas na primeira seção do capítulo.

# Capítulo 2

---

## 2 MODELAGEM DE UM REFLETOR ALIMENTADO PELO FOCO

### 2.1 Introdução

O objetivo principal deste capítulo é apresentar as ferramentas teórica e analítica utilizadas para a síntese da superfície de uma antena constituída por um único refletor circularmente simétrico e os resultados obtidos através da implementação computacional do algoritmo de síntese baseado na formulação matemática aqui desenvolvida. Assim, na Seção 2.2 é feito um estudo *a priori* baseado na configuração geométrica clássica da antena refletora parabólica alimentada pelo foco a fim de determinar as equações de projeto de acordo com [4], [5] e [25].

Enquanto isso, na Seção 2.3 é descrito o modelo de alimentador (fonte) utilizado para o procedimento de síntese apresentado neste capítulo, expondo as suas principais características. Além disso, para o tipo de alimentador empregado, admitiu-se uma polarização linear na direção  $\hat{x}$  segundo a Terceira Definição de Ludwig, conforme [26] e também são mostradas as equações matemáticas que descrevem os fasores dos campos elétrico e magnético para o modelo de alimentador utilizado.

Na Seção 2.4 são propostos todos os conceitos que englobam a técnica numérica de modelagem que utiliza a concatenação de seções de elipses para produzir, segundo a GO, um padrão de distribuição de potência especificado sobre a abertura da antena [17] e [21] com base na Lei da Conservação da Energia. Além disso, como consequência de todo o desenvolvimento conceitual, ainda nesta seção é apresentado o ferramental matemático para a construção do algoritmo de síntese.

Conseqüentemente, na Seção 2.5 são apresentados os resultados obtidos pela síntese do refletor. Nesta seção, as discussões acerca da convergência do algoritmo que faz o cômputo dos ângulos do alimentador, bem como dos resultados obtidos para algumas variações de  $N_T$  (número de seções de elipses utilizadas na síntese) são descritas. Ainda nesta mesma seção, são apresentados os diagramas de radiação no plano  $\phi = 45^\circ$  utilizando as aproximações da Óptica Física (*Physical Optics – PO*), conforme definidas em [27], por meio de uma ferramenta computacional já existente.

Por fim, na Seção 2.6 são apresentadas as conclusões parciais dos resultados mostrados e discutidos na Seção 2.5 dando ênfase na convergência numérica da técnica investigada considerando a configuração geométrica da antena refletora definida na Seção 2.2.

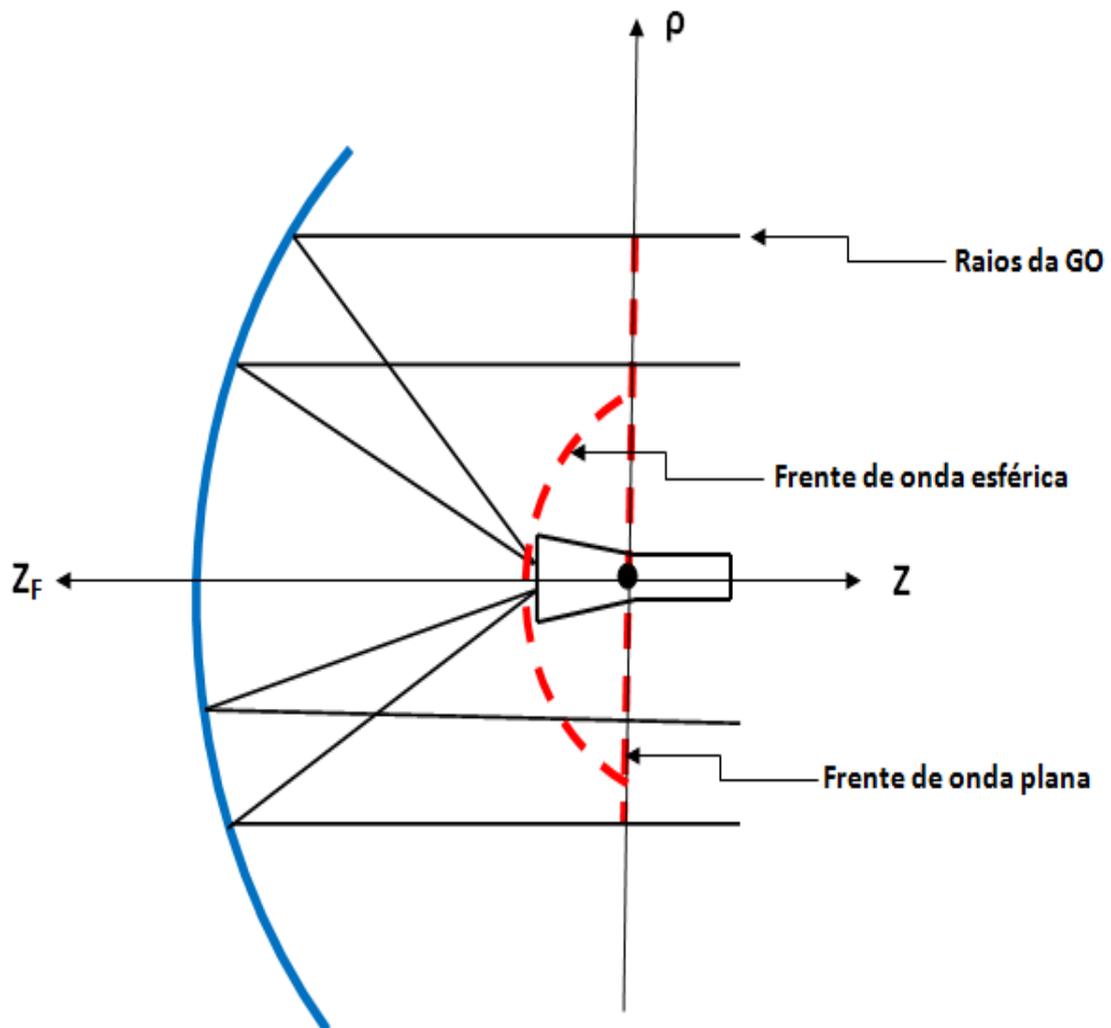
## **2.2 Estudo do Refletor Clássico Alimentado pelo Foco**

A superfície de uma antena refletora alimentada pelo foco é formada pela rotação de uma parábola em torno do seu próprio eixo [4] e [5]. Esta superfície é um parabolóide de revolução, de modo que os raios que são emanados do alimentador (fonte) são refletidos em uma frente de onda plana [4]. Esta conversão está ilustrada na Figura 2-1.

Outra característica desta antena refletora é o bloqueio. Este bloqueio é causado pelo alimentador e pela estrutura de suporte (estais). A configuração em corte de uma antena refletora formada refletor por um único circularmente simétrico está ilustrada na Figura 2-2 com os seus respectivos parâmetros geométricos [4].

A antena refletora parabólica permite alcançar uma distribuição de fase uniforme do campo eletromagnético na abertura sem maiores problemas segundo os princípios e conceitos que regem a GO, desde que o alimentador (fonte) esteja localizado no foco primário do refletor [25], conforme está ilustrado na Figura 2-1. Entretanto, o mesmo não acontece com a amplitude do campo eletromagnético sobre

a abertura de tal antena refletora. Quanto à uniformidade da polarização definida na abertura, esta depende estritamente do posicionamento relativo do alimentador e do seu diagrama de radiação.



**Figura 2-1 Propagação do campo eletromagnético em uma antena refletora parabólica *front-fed*.**

O projeto das antenas refletoras alimentadas pelo foco aqui adotadas é baseado em técnicas ópticas e não levam em conta difrações oferecidas pela borda da superfície refletora destas antenas [4].

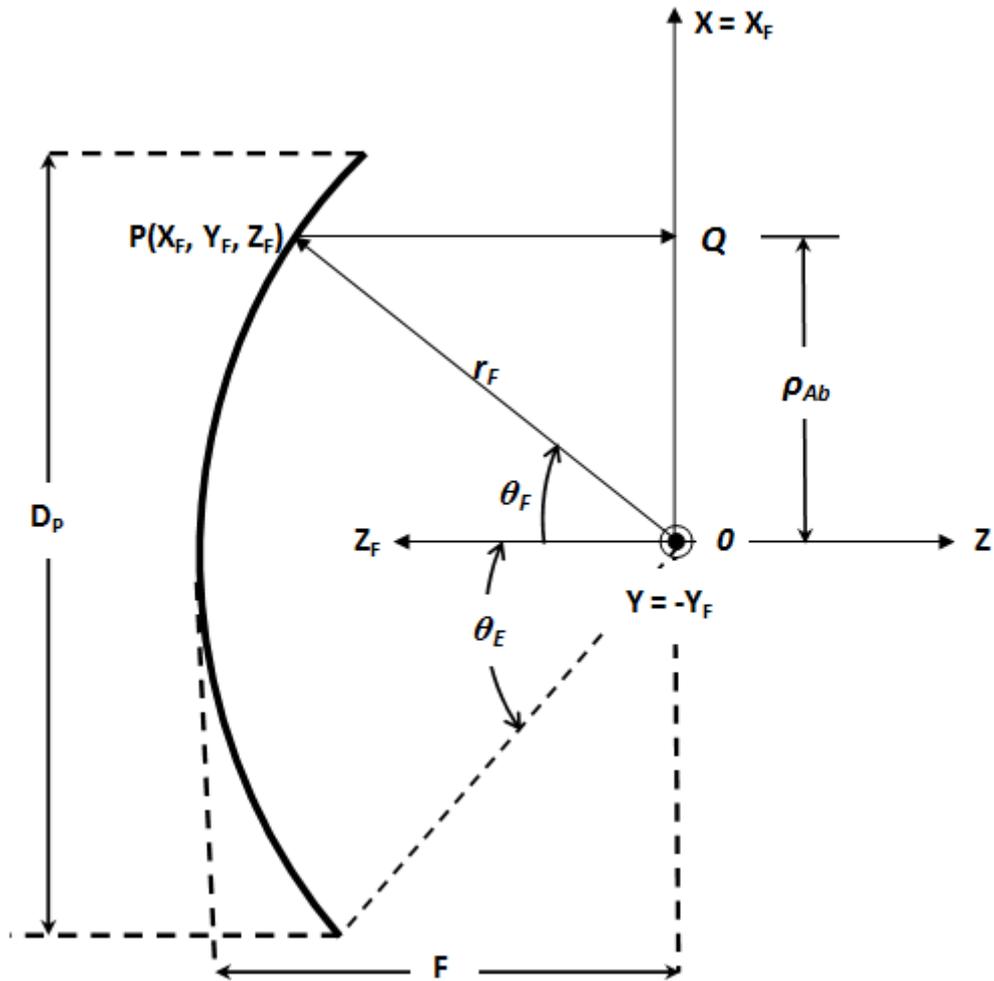


Figura 2-2 Configuração em corte do refletor parabólico *front-fed*.

Fazendo referência à Figura 2-2 e escolhendo um plano que seja perpendicular ao eixo do refletor parabólico passando pelo seu foco segue que

$$\overline{OP} + \overline{PQ} = 2F \quad (2-1)$$

sendo  $F$  a distância focal do refletor parabólico. Ainda, analisando a Figura 2-2, pode-se verificar que:

$$\overline{OP} = r_F \quad (2-2)$$

e

$$\overline{PQ} = r_F \cos \theta_F, \quad (2-3)$$

onde  $r_F$  é a distância do foco primário da antena refletora ( $O$ ) até o refletor ( $P$ ) e  $\theta_F$  é o ângulo referente ao alimentador [4] e [25]. Desta forma, considerando-se (2-2) e (2-3) pode-se fazer as devidas substituições em (2-1) obtendo-se:

$$r_F (1 + \cos \theta_F) = 2F \quad (2-4)$$

$$r_F = \frac{2F}{1 + \cos \theta_F}. \quad (2-5)$$

Pode-se verificar que (2-5) é a equação de um parabolóide em termos do sistema de coordenadas esféricas referente ao alimentador ( $r_F$ ,  $\theta_F$  e  $\phi_F$ ). Devido à simetria circular do parabolóide, não há variações em  $\phi_F$  [4]. Através de (2-5) pode-se expressar matematicamente o ângulo de borda do refletor ( $\theta_E$ ), conforme a Figura 2-2, da seguinte maneira:

$$\frac{2F}{1 + \cos \theta_F} = \frac{D_P}{2 \operatorname{sen} \theta_F}, \quad (2-6)$$

onde  $D_P$  é o diâmetro do refletor (observe a Figura 2-2). Aplicando uma identidade trigonométrica expressa em [28], (2-6) torna-se:

$$\tan\left(\frac{\theta_E}{2}\right) = \frac{D_P}{4F}. \quad (2-7)$$

O fasor do campo elétrico sobre a abertura da antena refletora parabólica *front-fed* pode ser obtido através dos princípios que regem a GO. Desta forma, rastreia-se o campo desde o alimentador que está localizado no foco primário de tal antena. Próximo do refletor o campo elétrico radiado pelo alimentador é aproximadamente uma onda transversal elétrica e magnética (TEM) esférica, que é representado matematicamente como:

$$\vec{E}_{p^-} = [T(\theta_F, \phi_F) \hat{\theta}_F + P(\theta_F, \phi_F) \hat{\phi}_F] \frac{e^{-jk r_F}}{r_F}, \quad (2-8)$$

onde  $\theta_F$  e  $\phi_F$  são as coordenadas referentes ao alimentador,  $r_F$  é dado por (2-5) e  $k = 2\pi/\lambda$  é a constante de propagação. Os fasores que representam os campos elétrico e magnético na abertura da antena refletora aqui estudada são respectivamente [26]:

$$\vec{E}_A = [X(\theta_F, \phi_F) \hat{x} + Y(\theta_F, \phi_F) \hat{y}] \frac{e^{-jk 2F}}{r_F} \quad (2-9)$$

$$\vec{H}_A \approx \frac{1}{\eta} \hat{z} \times \vec{E}_A. \quad (2-10)$$

Em (2-10)  $\eta \approx 120\pi \Omega$  é a impedância intrínseca espaço livre e em (2-9)  $X$  e  $Y$  são expressos como [26]:

$$X = P(\theta_F, \phi_F) \text{sen} \phi_F - T(\theta_F, \phi_F) \text{cos} \phi_F \quad (2-11)$$

$$Y = T(\theta_F, \phi_F) \text{sen} \phi_F + P(\theta_F, \phi_F) \text{cos} \phi_F. \quad (2-12)$$

Para se obter polarização uniforme na abertura do refletor parabólico a razão  $X/Y$ , o que é obtido quando [26]:

$$T(\theta_F, \phi_F) = f(\theta_F) (A \text{cos} \phi_F + B \text{sen} \phi_F) \quad (2-13)$$

$$P(\theta_F, \phi_F) = f(\theta_F) (B \text{cos} \phi_F - A \text{sen} \phi_F), \quad (2-14)$$

com  $f(\theta_F)$  sendo a função que descreve o tipo de alimentador a ser utilizado (veja adiante na Seção 2.3) e  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias que controlam a polarização do campo. Substituindo (2-13) e (2-14) nas expressões (2-11) e (2-12), (2-9) torna-se:

$$\vec{E}_A = f(\theta_F) (-A \hat{x} + B \hat{y}) \frac{e^{-jk 2F}}{r_F}. \quad (2-15)$$

Portanto pelas definições matemáticas expostas nesta seção para determinar o fasor que descreve o campo elétrico presente na abertura da antena refletora

parabólica alimentada pelo foco dado por (2-15), é possível determinar com conveniência o padrão de distribuição de potência sobre tal abertura. Além disso, é importante enfatizar que a função que descreve o modelo de alimentador  $f(\theta_F)$  a ser utilizado em (2-15) é descrita na próxima seção.

## 2.3 Modelo de Alimentador

Nas aplicações de alto desempenho no âmbito das telecomunicações, cornetas corrugadas são comumente empregadas por motivos explicitados em [29]. Estas cornetas são projetadas para produzir um diagrama de radiação circularmente simétrico, ou seja, com baixa polarização cruzada. Elas podem ser adequadamente representadas por um modelo de alimentador denominado cosseno-elevado (*Raised-Cosine Feed* – RCF) [30].

Na modelagem do refletor desta etapa será considerado o alimentador modelo RCF. O emprego do alimentador RCF permite a representação matemática da maioria dos alimentadores que são linearmente polarizados na prática, apesar do seu padrão de radiação ser uma representação aproximada para a região de campo distante, possibilitando em certas ocasiões problemas de precisão [31]. Além destes fatores, o modelo RCF é extremamente conveniente por ser simples, totalmente definido por um parâmetro ( $n$ ) e possui um diagrama de radiação facilmente produtivo em termos práticos, isto é, o seu padrão de radiação pode ser obtido através de alimentadores que não apresentam muita complexidade.

Para este caso, admitiu-se uma polarização que é linear na direção  $\hat{x}$ , de acordo com a Terceira Definição de Ludwig que está expressa com maiores detalhes em [26]. Desta forma, para o modelo de alimentador RCF os fasores que representam os campos elétrico e magnético são respectivamente:

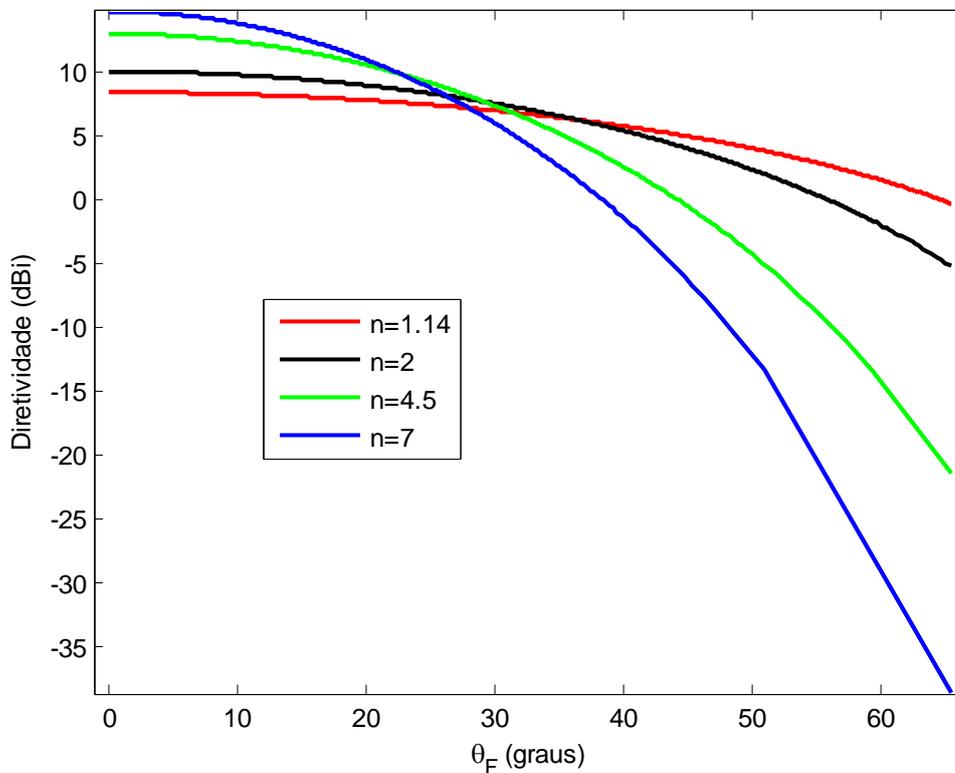
$$\vec{E}_F(\vec{r}_F) = f(\theta_F) \left[ \cos \phi_F \hat{\theta}_F - \sin \phi_F \hat{\phi}_F \right] \frac{e^{-jk r_F}}{r_F} \quad (2-16)$$

$$\vec{H}_F(\vec{r}_F) \approx \left[ \frac{\hat{r}_F \times \vec{E}_F(\vec{r}_F)}{2\eta} \right], \quad (2-17)$$

onde

$$f(\theta_F) = \begin{cases} \cos^n(\theta_F), & \theta_F \leq \pi/2 \\ 0, & \theta_F > \pi/2. \end{cases} \quad (2-18)$$

Em (2-18), o expoente  $n$  controla o formato do diagrama de radiação do alimentador RCF e este parâmetro pode ser ajustado para representar, adequadamente, uma determinada corneta corrugada. A Figura 2-3 representa o diagrama de radiação do modelo de alimentador RCF para alguns valores de  $n$ . Pela Figura 2-3 é possível notar que o expoente  $n$  de (2-18) controla o diagrama de radiação de tal forma que quanto maior é o valor deste expoente mais diretivo é o alimentador RCF.



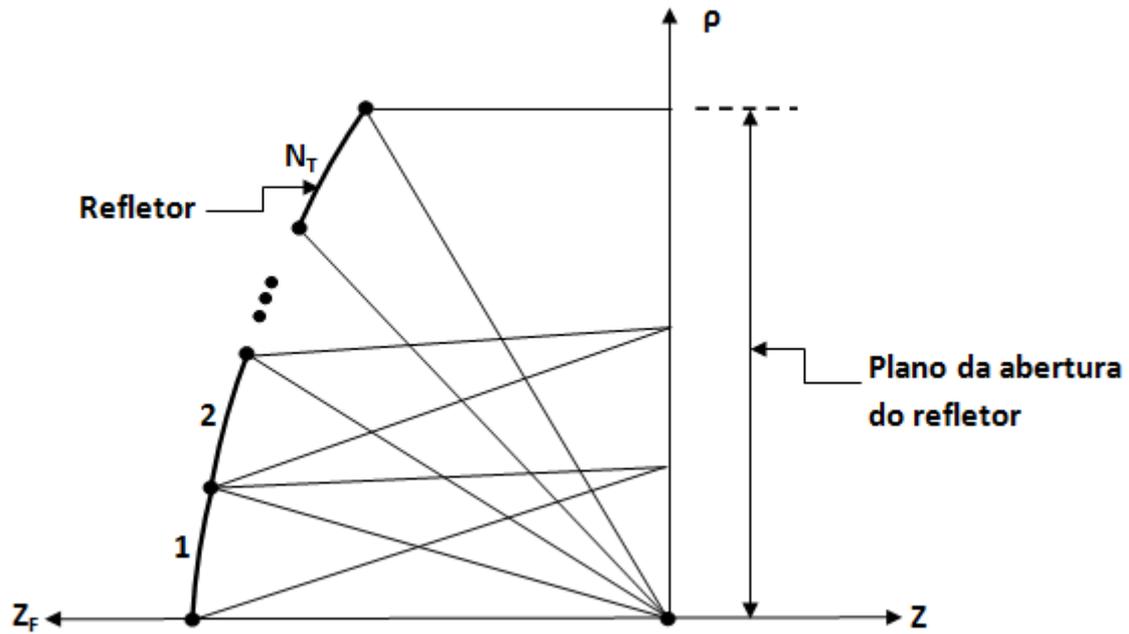
**Figura 2-3 Diagrama de radiação do alimentador RCF para  $n = 1,14$ ; 2; 4,5 e 7.**

Além das características citadas anteriormente, ainda pode-se enfatizar uma característica muito importante para o alimentador RCF adotado nesta etapa. Através de (2-16), (2-17) e da função que descreve este tipo de alimentador definida  $[f(\theta_r)]$  em (2-18), percebe-se que estas equações podem ser facilmente manipuladas matematicamente, pois não apresentam nenhuma função matemática que as tornam complexas. Como conseqüência desta característica, as integrais que serão calculadas no processo de modelagem (observe adiante na Seção 2.4) podem ser avaliadas analiticamente tornando-se um fator primordial para o emprego do modelo de alimentador RCF nesta etapa do presente trabalho.

## 2.4 O Processo de Modelagem

Nesta primeira etapa, o objetivo é compreender e investigar as características da técnica de síntese de refletores apresentada em [17]-[19], em particular analisar a sua taxa de convergência numérica. Para tal, optou-se em sintetizar um refletor que, em princípio, produza a mesma distribuição de densidade de potência na abertura de um refletor parabólico *front-fed*. Teoricamente, se o número de seções cônicas ( $N_T$ ) tender para o infinito, a superfície resultante deverá ser a mesma superfície parabólica ideal. Comparando a superfície modelada com a parabólica em função do número de cônicas  $N_T$  utilizado, têm-se condições de investigar o comportamento numérico da técnica de síntese antes de se aplicar a técnica a outras configurações de refletores.

A idéia básica deste procedimento numérico de síntese é obter a curva geratriz que descreve a superfície refletora da antena modelada. Neste caso, serão utilizadas seções cônicas concatenadas seqüencialmente entre si, conforme está disposto na Figura 2-4. Esta técnica pode ser adaptada para sintetizar outras configurações de antenas refletoras, tais como as antenas duplo-refletores para cobertura omnidirecional.



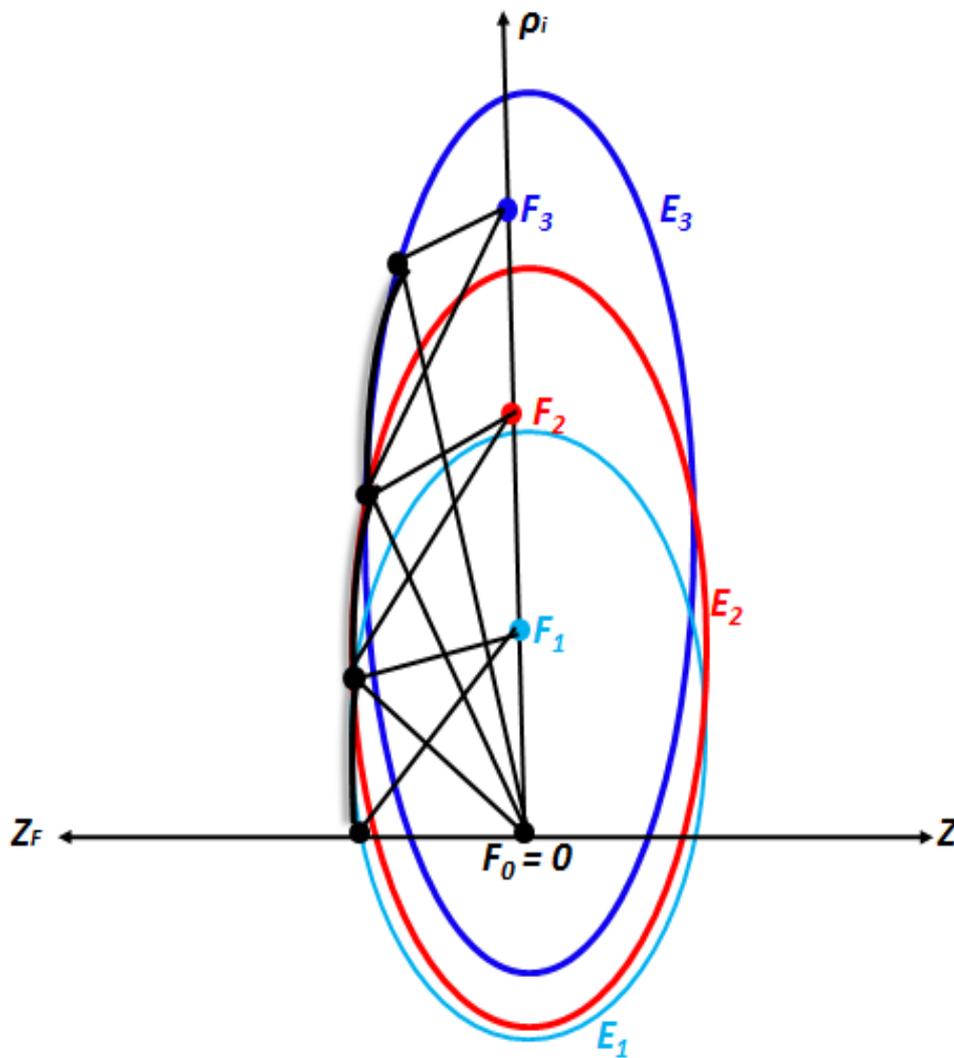
**Figura 2-4** Concatenação de seções cônicas para representação da geratriz que descreve o refletor *front-fed*.

Deve-se enfatizar que no processo de concatenação consecutiva podem ser utilizadas como seções cônicas, parábolas, elipses ou hipérbolas. Desta forma, para escolher de forma mais adequada o tipo de cônica deve-se, primeiramente, definir o algoritmo a ser utilizado para a síntese do refletor. Neste contexto, pode-se destacar que as cônicas possuem propriedades de reflexão que são muito importantes para o procedimento de modelagem adotado no presente estudo. Tais propriedades estão estritamente associadas com os focos das seções cônicas.

O presente processo de concatenação consecutiva desta etapa do trabalho baseia-se em seções elípticas devido à síntese da superfície refletora ser feita na região de campo próximo. Isto garante que as cáusticas do refletor sejam colocadas à frente da antena.

A Figura 2-5 ilustra o processo de concatenação das seções elípticas adotado neste estudo. De acordo com a figura, percebe-se que a elipse é uma curva fechada para a qual existem dois pontos especiais que são chamados de focos. Neste trabalho, os dois focos da elipse  $i$  são  $F_0$  (localizado na origem  $O$  e sempre comum a todas as

elipses) e  $F_i$  (sempre localizado sobre o plano da abertura do refletor), com  $i = 1, 2, \dots, N_T$ .



**Figura 2-5** Concatenação de seções de elipses.

Nesta abordagem de síntese, considerou-se que todas as  $N_T$  elipses que irão representar a geratriz que descreve a antena refletora estão com um de seus focos em comum, sendo que o mesmo se localiza na origem ( $0$ ) e o outro em um determinado ponto de destino (alvo) [21], conforme está ilustrado na Figura 2-5, onde  $F_0$  é o foco comum a todas as  $N_T$  elipses e  $F_i$  representa o outro foco que está em um determinado

ponto de destino para  $i = 1, 2, \dots, N_T$ . Além disso, neste trabalho em particular, todos os focos  $F_i$  estão no plano focal ( $z = 0$ ).

De acordo com os princípios da GO, o refletor é iluminado por uma fonte pontual (alimentador modelo RCF) que está localizado na origem ( $F_0 = 0$ ) com diagrama de radiação  $I_F(\theta_F)$  do tipo circularmente simétrico (veja a Figura 2-3), onde  $\theta_F$  é o ângulo relativo ao eixo  $z_F$  do raio que parte da origem (fonte). Desta forma, pode-se intuir que qualquer raio que é emitido pelo alimentador RCF localizado na origem é refletido pela elipse  $i$  atingindo o seu outro foco  $F_i$ . Por estas definições aqui impostas, constata-se que as posições relativas de reflexão dos raios que são emanados do alimentador são todos os focos  $F_i$  das  $N_T$  elipses que irão representar a superfície refletora.

O aspecto principal desta técnica de síntese de antenas refletoras é discretizar a distribuição dos pontos de destino (alvo) em  $N_T$  pontos sobre a abertura no plano  $z = 0$  (plano de origem  $O$ ). Estes pontos correspondem a todos os focos  $F_i$  das  $N_T$  elipses a serem concatenadas entre si, conforme se pode observar na Figura 2-5.

Conseqüentemente, a distância da origem  $O$  ( $F_0$ ) da  $i$ -ésima elipse localizada no plano  $z = 0$  é a distância entre os focos desta elipse (distância interfocal  $2c_i$ ), assim como está ilustrado na Figura 2-6, dada por:

$$2c_i = i \cdot d \quad (2-19)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, N_T$  e

$$d = \frac{D_p}{2 N_T} \quad (2-20)$$

Logo, todos os focos  $F_i$  localizados através de (2-19) são equidistantes entre si [21]. Agora, pode-se considerar que o plano da abertura da antena em questão é definida por um conjunto de pontos discretos e equidistantes dado por:

$$\rho_i = \{2c_1, 2c_2, \dots, 2c_{N_T}\}, \quad (2-21)$$

onde

$$2c_1 = d. \quad (2-22)$$

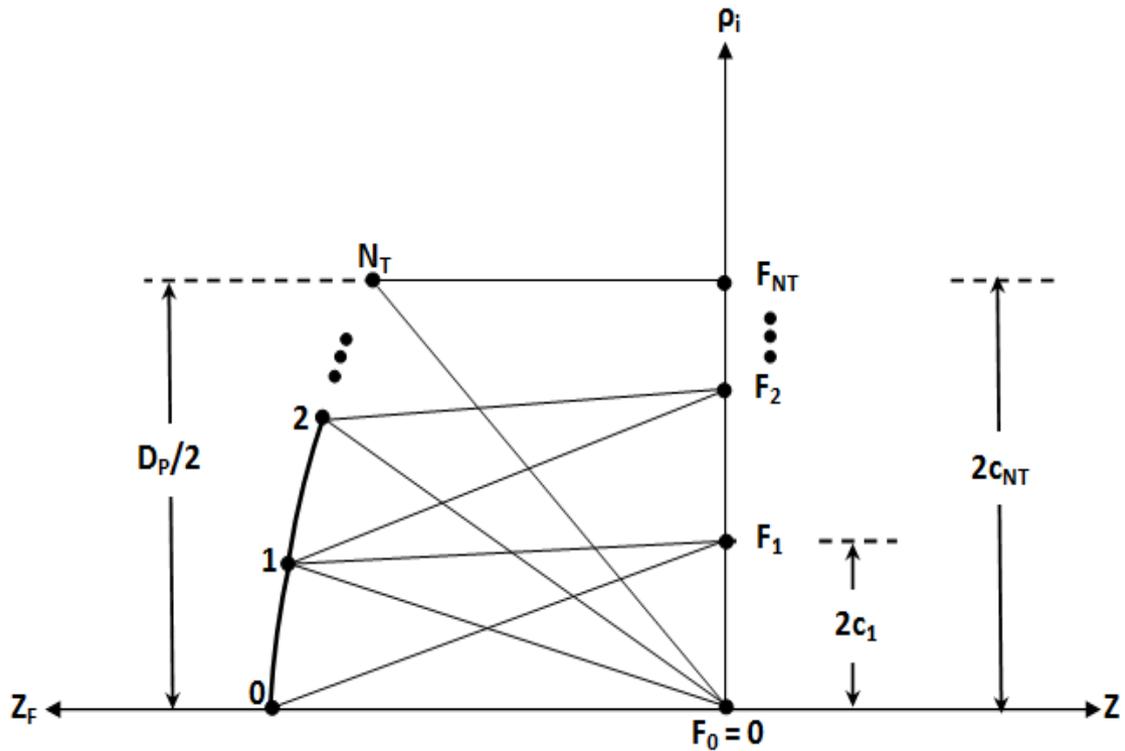


Figura 2-6 Discretização do plano da abertura da antena refletora.

Outro princípio da GO utilizado neste processo é a Lei da Conservação da Energia [17] que é empregada para o cálculo de todas as direções dos raios que partem do alimentador RCF localizado na origem (0) com ângulos  $\theta_{F_i}$ , considerando que  $i = 1, 2, \dots, N_T$ , como se pode observar a Figura 2-7. A Lei da Conservação da Energia impõe que a potência que parte do alimentador entre os ângulos  $\theta_{F_{i-1}}$  e  $\theta_{F_i}$  mostrados na Figura 2-7 deve ser igual à potência que chega ao foco  $F_i$  da  $i$ -ésima elipse, ou seja, esta lei é expressa matematicamente como:

$$\int_{\theta_{F_{i-1}}}^{\theta_{F_i}} I_F(\theta_F) r_F^2 \sin\theta_F d\theta_F = N P_i, \quad (2-23)$$

onde  $I_F(\theta_F)$  é a densidade de potência radiada, que neste caso é radiada por um alimentador modelo RCF, que é dada por:

$$I_F(\theta_F) = \frac{|\vec{E}_F(\vec{r}_F)|^2}{2\eta}, \quad (2-24)$$

sendo  $\vec{E}_F(\vec{r}_F)$  o fasor que representa o campo elétrico referente ao alimentador RCF que está descrito em (2-16). Em (2-23),  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N_T$ ) é a potência que chega ao foco  $F_i$  da  $i$ -ésima elipse e  $N$  é o fator de normalização dado por:

$$N = \left( \sum_{i=1}^{N_T} P_i \right)^{-1} \int_0^{\theta_E} I_F(\theta_F) r_F^2 \sin\theta_F d\theta_F, \quad (2-25)$$

onde  $\theta_E$  é o ângulo de borda do refletor.

O fator de normalização ( $N$ ) expresso em (2-25) garante que toda a energia que é proveniente do alimentador e é refletido pelo refletor seja igual à energia que chega à abertura da antena garantindo, assim, que (2-23) seja satisfeita. Com isso, através de (2-23), (2-24), (2-25) e do modelo de alimentador RCF descrito na Seção 2.3 dado por (2-18) encontram-se os valores de  $\theta_{F_i}$  garantindo, desta forma, um algoritmo com  $N_T$  iterações.

Para o cômputo de  $\theta_{F_i}$  o processo iterativo inicia-se em  $i = 0$  com  $\theta_{F_0} = 0^0$ . Um fator importante a se enfatizar é que o último ângulo do alimentador, ou seja,  $\theta_{F_{N_T}}$  deve ser igual ao ângulo de borda do refletor ( $\theta_E$ ), definido como um dos parâmetros de entrada.

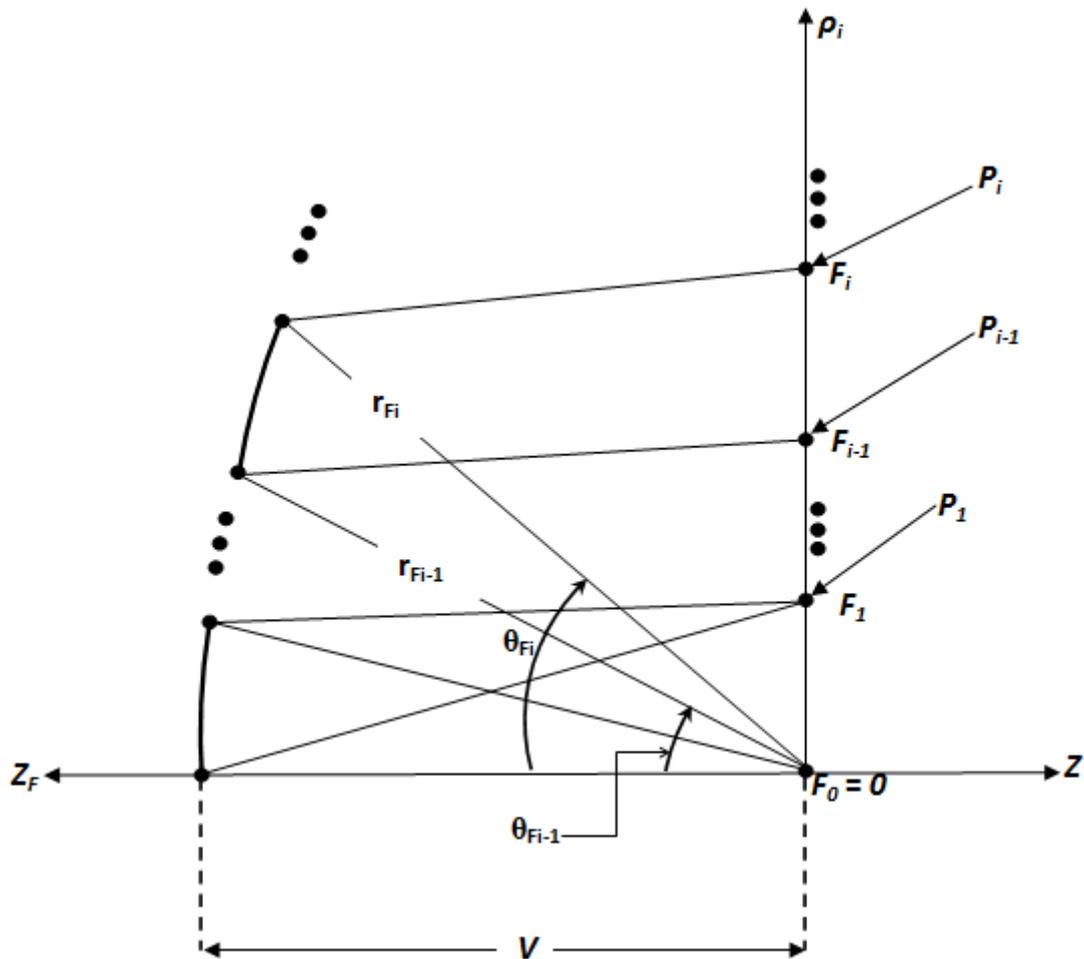


Figura 2-7 Emissão de raios do alimentador RCF, segundo a GO e Lei da Conservação da Energia.

No entanto, para dar início ao cômputo dos ângulos do alimentador ( $\theta_{F_i}$ ) deve-se especificar o padrão de distribuição de potência sobre a abertura do refletor a ser modelado, segundo a GO. Inicialmente, define-se  $P_i$  em cada um dos focos  $F_i$  localizados por (2-21) mostrados na Figura 2-7. É importante destacar que nesta etapa do presente estudo  $P_i$  é definido proporcionalmente a potência produzida na abertura de um refletor parabólico alimentado pelo foco e pelo mesmo modelo RCF. Considerando-se a configuração clássica de antena refletora definida na Seção 2.2 tem-se que:

$$P_i \propto \int_{\theta_{F_{i-1}}}^{\theta_{F_i}} \frac{|\vec{E}_F(\vec{r}_F)|^2}{2\eta} r_F^2 \text{sen}\theta_F d\theta_F. \quad (2-26)$$

Através do modelo de alimentador RCF definido em (2-16) e (2-18), pode-se fazer as devidas manipulações matemáticas em (2-26) obtendo-se o seguinte:

$$P_i \propto \frac{1}{2\eta} \frac{1}{2n+1} \left[ (\cos \theta_{F_{i-1}})^{2n+1} - (\cos \theta_{F_i})^{2n+1} \right] \quad (2-27)$$

onde  $\eta$  é a impedância intrínseca do espaço livre e  $n$  é o expoente do RCF. No entanto, através de (2-27) é possível perceber que ainda não se podem obter as potências  $P_i$  devido a estas estarem em função dos ângulos do alimentador  $\theta_{F_{i-1}}$  e  $\theta_{F_i}$ . Logo, é necessário determinar tal distribuição de potência sobre a abertura da antena em função das posições definidas em (2-21). Neste caso, (2-27) pode ser reescrita como:

$$P_i \propto (C_{i-1}^{2n+1} - C_i^{2n+1}), \quad (2-28)$$

onde:

$$C_{i-1} = \cos \theta_{F_{i-1}} \quad (2-29)$$

e

$$C_i = \cos \theta_{F_i}. \quad (2-30)$$

Considerando-se a geometria parabólica ilustrada na Figura 2-2, a posição do foco  $F_i$  na abertura do refletor pode ser representada matematicamente como:

$$\rho_i = 2F \tan\left(\frac{\theta_{F_i}}{2}\right), \quad (2-31)$$

sendo  $F$  o foco do refletor parabólico. Através de manipulações trigonométricas pode-se mostrar que:

$$C_i = \cos \theta_{F_i} = \frac{1 - \alpha_i^2}{1 + \alpha_i^2} \quad (2-32)$$

onde

$$\alpha_i = \tan\left(\frac{\theta_{F_i}}{2}\right) = \frac{\rho_i}{2F}. \quad (2-33)$$

Raciocínio semelhante é adotado para obter  $C_{i-1}$ . Logo, pode-se expressar (2-28) em termos da posição  $\rho_i$  definida em (2-19):

$$P_i \propto C_{i-1}^{2n+1} - C_i^{2n+1} = \left(\frac{1 - \alpha_{i-1}^2}{1 + \alpha_{i-1}^2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1 - \alpha_i^2}{1 + \alpha_i^2}\right)^{2n+1}, \quad (2-34)$$

onde  $\alpha_i$  e  $\alpha_{i-1}$  são dados conforme (2-33). A distribuição de potência dada por (2-34) está expressa em termos da posição dos  $N_T$  pontos discretizados sobre o plano da abertura de tal configuração.

Com as definições propostas para a especificação da distribuição de potência ( $P_i$ ) sobre a abertura da antena para o cômputo dos ângulos ( $\theta_{F_i}$ ) do alimentador o processo do algoritmo iterativo é iniciado. Desta forma, a concatenação consecutiva das elipses pode ser iniciada.

Através da Figura 2-7, é possível identificar que a distância entre a fonte e o vértice do refletor corresponde ao raio  $i = 0$  que parte do alimentador RCF e o seu valor ( $V$ ) é também um dado de entrada deste processo de síntese. No presente caso,  $V$  é a própria distância focal  $F$  do parabolóide. Os pontos definidos em (2-19) caracterizam as distâncias interfocais ( $2c_i$ ) das elipses utilizadas no processo de concatenação.

No intuito de especificar cada uma das seções elípticas  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N_T$ ) que representam a geratriz da superfície do refletor modelado, seus parâmetros geométricos devem ser determinados. As distâncias interfocais ( $2c_i$ ) já foram definidas *a priori* pela localização dos focos  $F_i$  sobre o plano da abertura do refletor. Falta obter as excentricidades ( $\varepsilon_i$ ) das elipses.

Para obter  $\varepsilon_i$  da  $i$ -ésima elipse, a partir da Figura 2-7 pode-se observar que duas elipses consecutivas ( $i-1$  e  $i$ ) compartilham o mesmo ponto de intersecção. Da equação polar de uma elipse:

$$r_{F_{i-1}} = \frac{c_i \left( \varepsilon_i - \frac{1}{\varepsilon_i} \right)}{\varepsilon_i \operatorname{sen} \theta_{F_{i-1}} - 1}, \quad (2-35)$$

onde  $c_i$  representam os focos das elipses sendo a metade das distâncias interfocais ( $2c_i$ ) e  $\varepsilon_i$  deve satisfazer o seguinte:

$$0 < \varepsilon_i < 1. \quad (2-36)$$

Como  $r_{F_{i-1}}$  e  $\theta_{F_{i-1}}$  são conhecidos do passo anterior, a equação (2-35) é utilizada na obtenção da excentricidade  $\varepsilon_i$ . Uma vez calculado  $\theta_{F_i}$  da equação da Lei da Conservação da Energia expressa através de (2-23), o próximo ponto sobre a geratriz que representa a superfície refletora é obtido quando:

$$r_{F_i} = \frac{c_i \left( \varepsilon_i - \frac{1}{\varepsilon_i} \right)}{\varepsilon_i \operatorname{sen} \theta_{F_i} - 1}. \quad (2-37)$$

O processo de concatenação consecutiva das elipses que irão representar do refletor é repetido até o último ponto  $N_T$  na borda do refletor. A Figura 2-8 representa o fluxograma que descreve as etapas do algoritmo de síntese desta primeira etapa do trabalho.

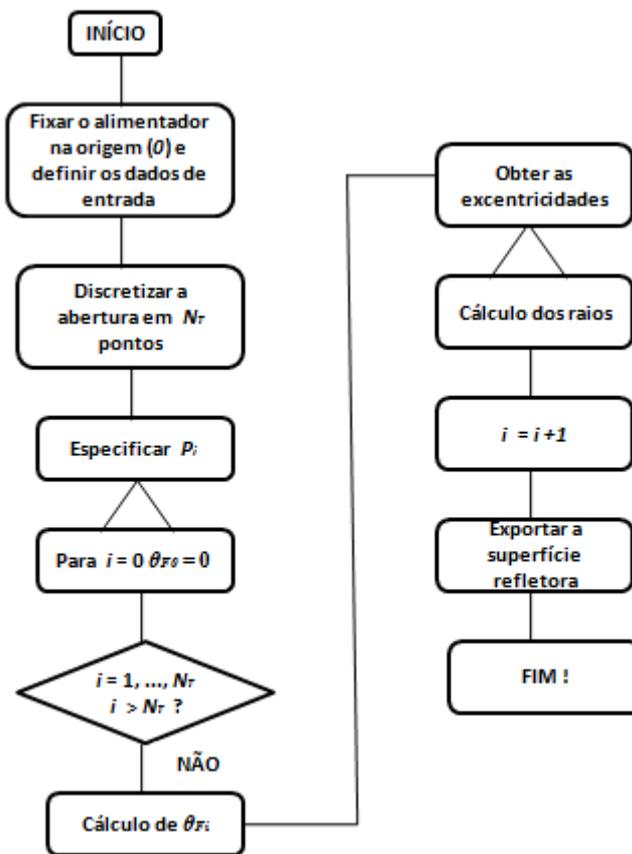


Figura 2-8 Fluxograma do algoritmo de síntese.

## 2.5 Resultados e Discussões

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos através da implementação computacional do algoritmo de síntese do refletor parabólico considerando-se o modelo de alimentador RCF. A potência ( $P_i$ ) dada por (2-34) foi especificada em conformidade com aquela de um parabolóide. Considerou-se o RCF com  $n = 1,14$  com o intuito de fornecer cerca de 10 dB de atenuação na borda do parabolóide.

Com o objetivo de compreender e investigar a técnica numérica de síntese [17]-[19] utilizada neste trabalho comparou-se a curva geratriz que descreve o refletor modelado com a geratriz do parabolóide. Para isso, obedecendo à seqüência do

formalismo desenvolvido na Seção 2.4 (observe a Figura 2-8), deve-se fixar o alimentador RCF na origem (0), bem como definir os parâmetros de entrada necessários para dar início ao procedimento de modelagem do refletor. Utilizaram-se as mesmas medidas geométricas para se obter as geratrizes do refletor modelado e do parabolóide. As características geométricas do parabolóide adotado são listadas na Tabela 2-1.

As medidas geométricas utilizadas como dados de entrada do algoritmo proposto estão ilustradas na Figura 2-9 e os seus valores correspondentes são listados na Tabela 2-1. Além da parametrização definida na Tabela 2-1, também são considerados como parâmetros de entrada: o número de seções elípticas  $N_T$  empregadas na concatenação, as distâncias obtidas *a priori* através de (2-19) e a potência  $P_i$  (2-34).

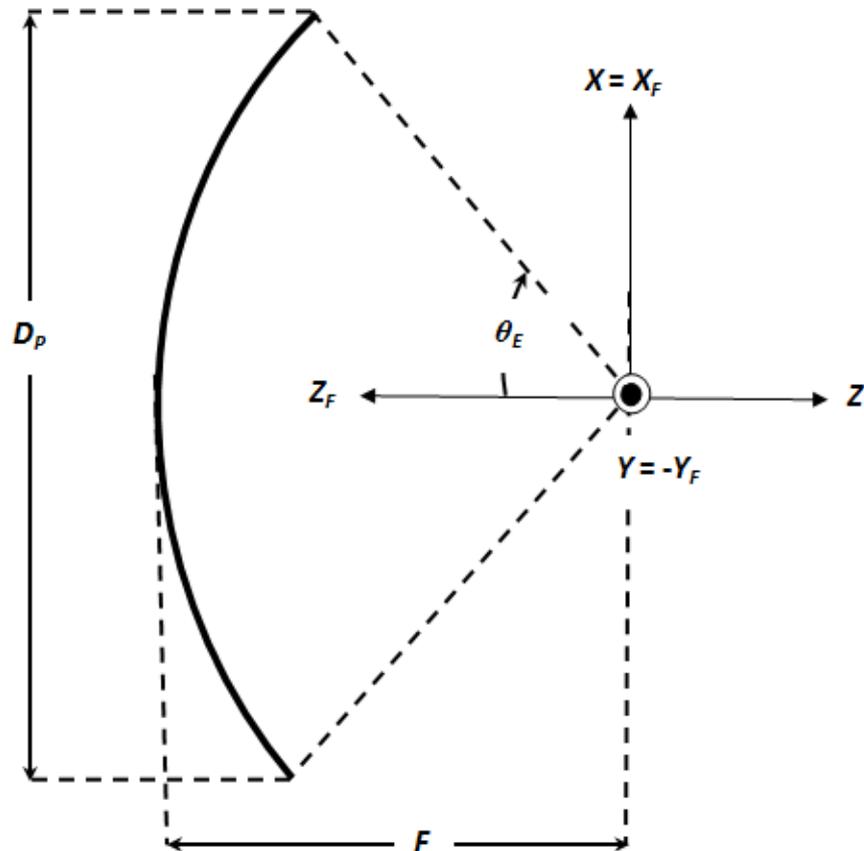


Figura 2-9 Parametrização geométrica da antena refletora.

**Tabela 2-1 Parâmetros de entrada**

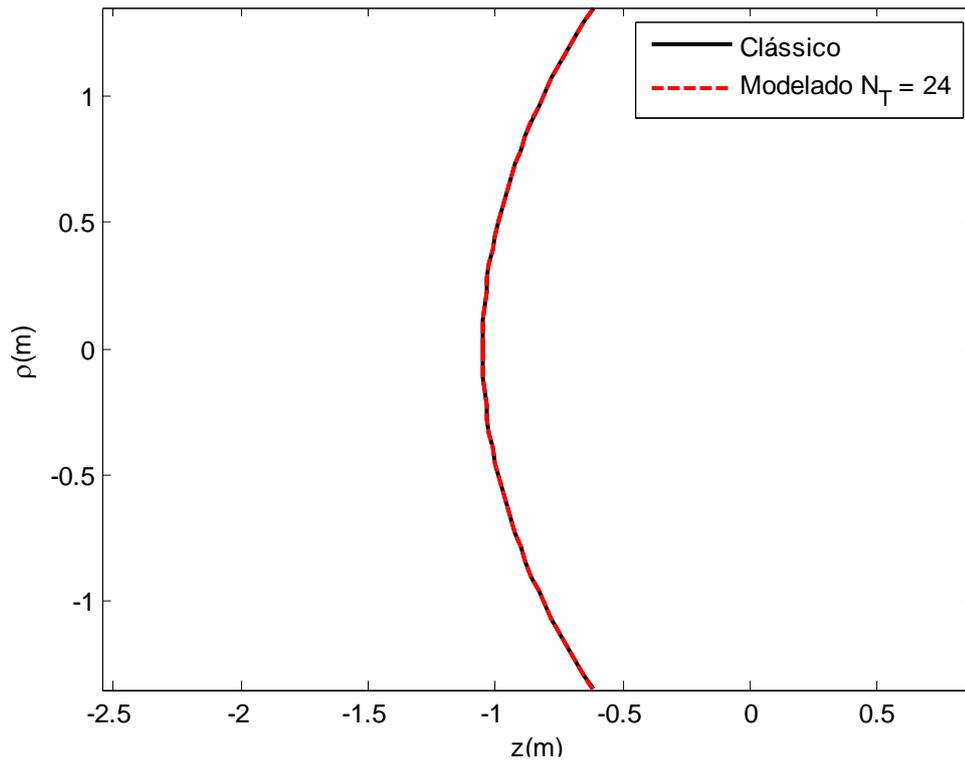
Variáveis	Valores
$F$	$14 \lambda$
$\theta_E$	$65,4705^\circ$
$D_p$	$36 \lambda$
freqüência	4 GHz
$n$	1,14

Para gerar uma discussão sobre a taxa de convergência numérica e da eficiência da técnica de síntese aqui apresentado, foi alterado o valor da variável  $N_T$ , sendo que os respectivos valores de  $N_T$  empregados nesta etapa do trabalho são apresentados na Tabela 2-2. Para cada antena modelada e clássica apresentada nesta seção, foram obtidos os diagramas de radiação através de um *software* já existente através das aproximações da PO. Os diagramas de radiação estão no plano  $\phi = 45^\circ$  com os ganhos referentes às polarizações principal (CO-Pol) e cruzada (CX-Pol).

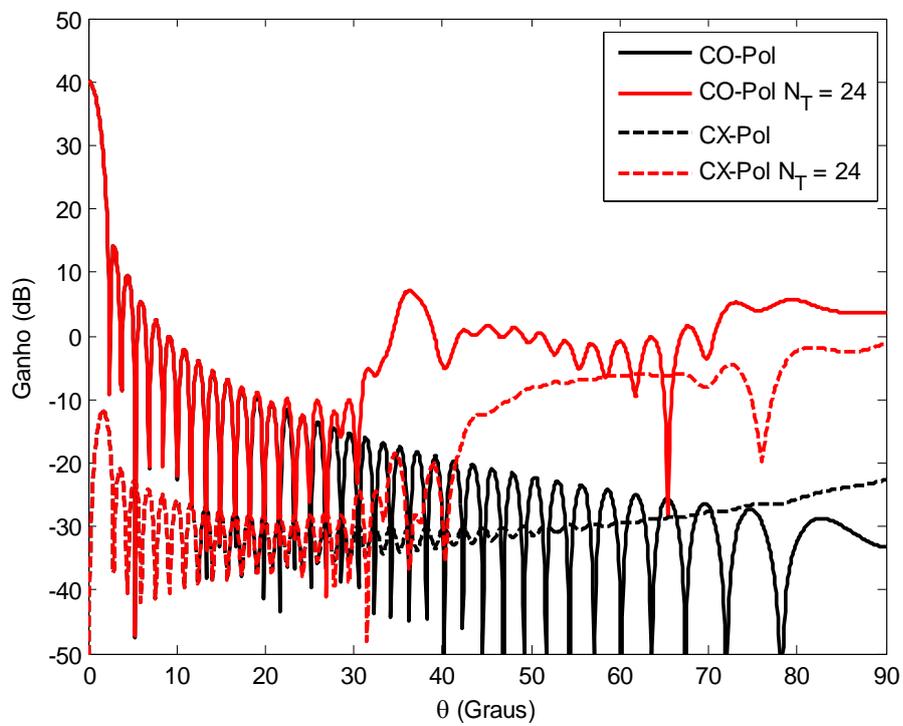
**Tabela 2-2 Parametrização de  $N_T$**

Valores de $N_T$
24
32
45
65
101

A Figura 2-10 mostra os refletores clássico e modelado considerando  $N_T = 24$ . Para este caso, na Figura 2-11 são apresentados os diagramas de radiação para as antenas clássica e modelada.



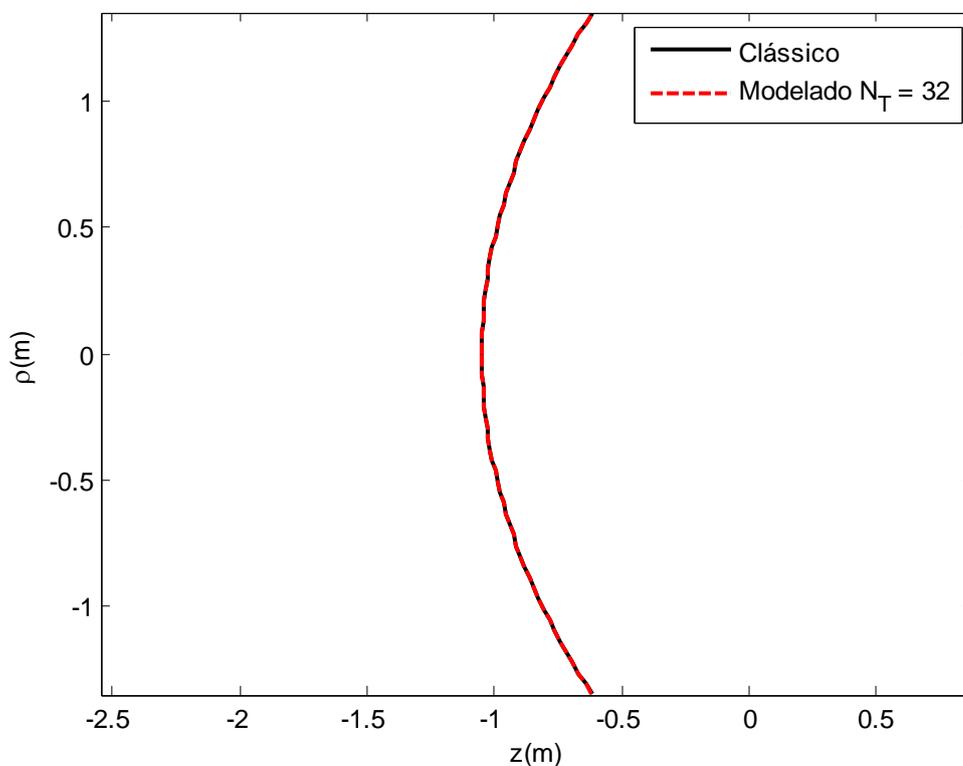
**Figura 2-10 Geratrizes das superfícies dos refletores clássico e modelado para  $N_T = 24$ .**



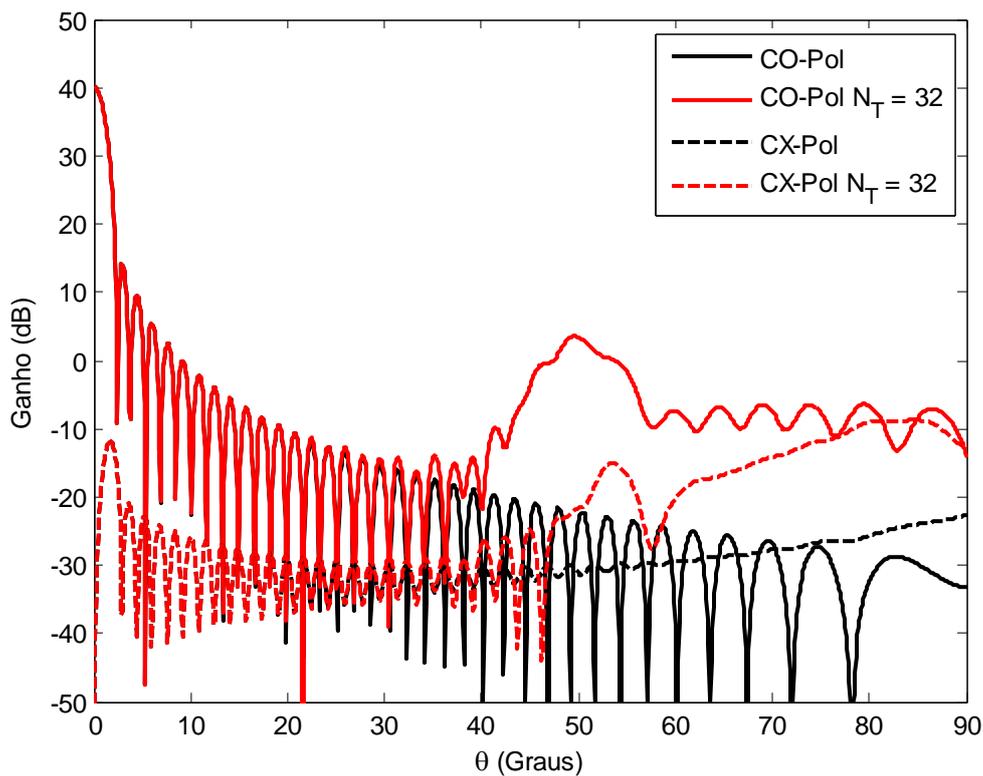
**Figura 2-11 Diagrama de radiação das superfícies dos refletores clássico e modelado para  $N_T = 24$ .**

Pela Figura 2-11 verifica-se que o máximo de radiação ocorre em  $\theta = 0^\circ$  correspondendo ao ganho CO-Pol de aproximadamente 40,24 dBi. Também, através da Figura 2-11 é possível notar que considerando  $N_T = 24$  para a antena modelada, os diagramas de radiação dos refletores clássico (cor preta) e modelado (cor vermelha) não são exatamente iguais. Desta forma, pode-se intuir que 24 seções de elipses não foram o suficiente para os diagramas de radiação dos ganhos CO-Pol e CX-Pol convergirem. Isto significa que com  $N_T = 24$ , a convergência numérica e a eficiência da técnica proposta por Olikier (2006) [17] não foi alcançada com êxito.

Todavia, utilizando  $N_T = 32$  conforme caracterizado na Tabela 2-2 tem-se outro caso de estudo que representam as geratrizes das superfícies clássica e modelada de acordo com a Figura 2-12. Logo, para este caso de estudo (Figura 2-12) a Figura 2-13 mostra dos diagramas de radiação correspondentes. Pela Figura 2-13, observa-se que as curvas em vermelho caracterizam as polarizações principal e cruzada considerando-se a antena refletora modelada com  $N_T = 32$ , enquanto que as polarizações principal e cruzada da antena refletora parabólica *front-fed* estão de cor preta.



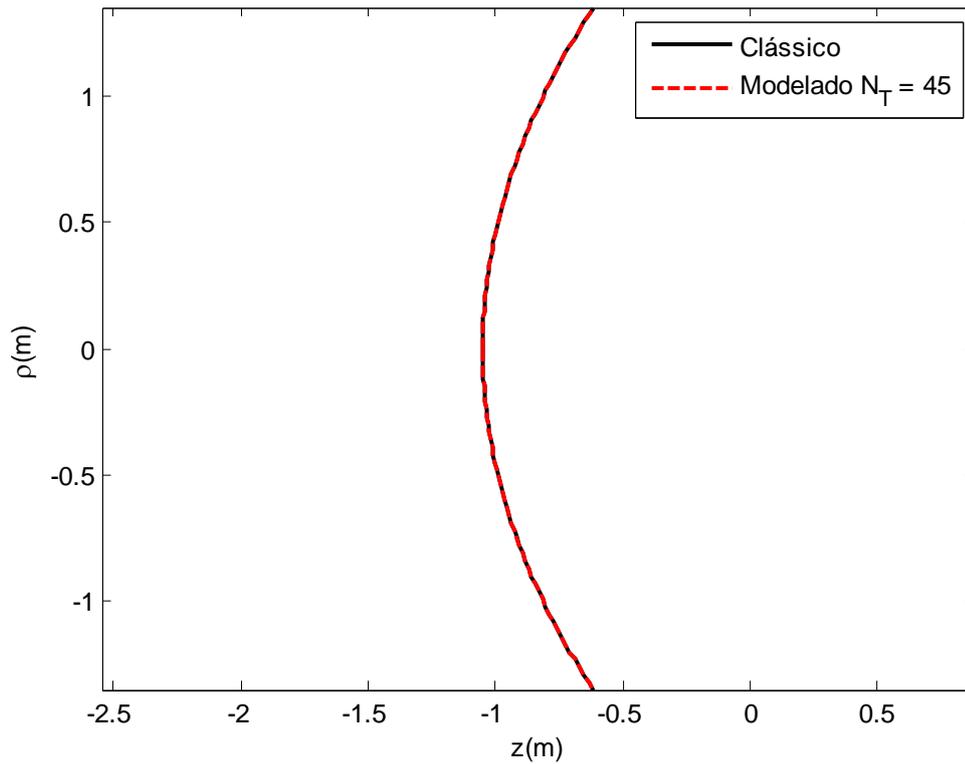
**Figura 2-12 Geratrizes das superfícies dos refletores clássico e modelado para  $N_T = 32$ .**



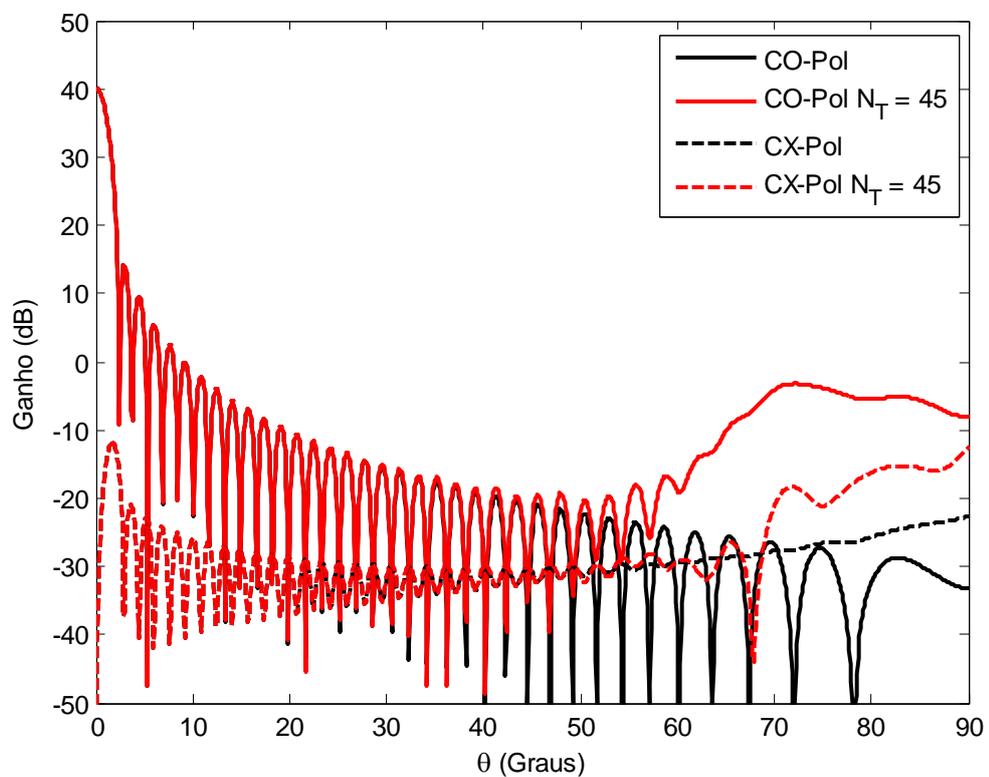
**Figura 2-13 Diagrama de radiação das superfícies dos refletores clássico e modelado para  $N_T = 32$ .**

De acordo com a Figura 2-13, percebe-se através da comparação entre os diagramas referentes à CO-Pol das geometrias clássica (cor preta e linha cheia) e modelada (cor vermelha e linha cheia) ainda não são iguais, sendo que a situação é análoga à CX-Pol dos refletores clássico (cor preta e tracejada) e modelado (cor vermelha e tracejada).

Entretanto, observando as Figuras 2-11 e 2-13 verifica-se que existe uma diferença notável entre os diagramas de radiação para cada situação, ou seja, considerando-se  $N_T = 24$  e  $N_T = 32$ . Neste caso, a situação em que se utilizaram 32 seções de elipses (Figura 2-13) nota-se que os diagramas tendem a serem parecidos em um setor maior do que os diagramas da Figura 2-11, ou seja, até aproximadamente  $\theta = 36^\circ$  sendo que o mesmo não acontece para a Figura 2-11 (os diagramas são muito parecidos até  $\theta$  atingir aproximadamente  $29^\circ$ ). Enquanto isso, a Figura 2-14 representa os refletores clássico e modelado para  $N_T = 45$  e na Figura 2-15 são apresentados os diagramas de radiação.



**Figura 2-14 Geratrizes das superfícies dos refletores clássico e modelado para  $N_T = 45$ .**

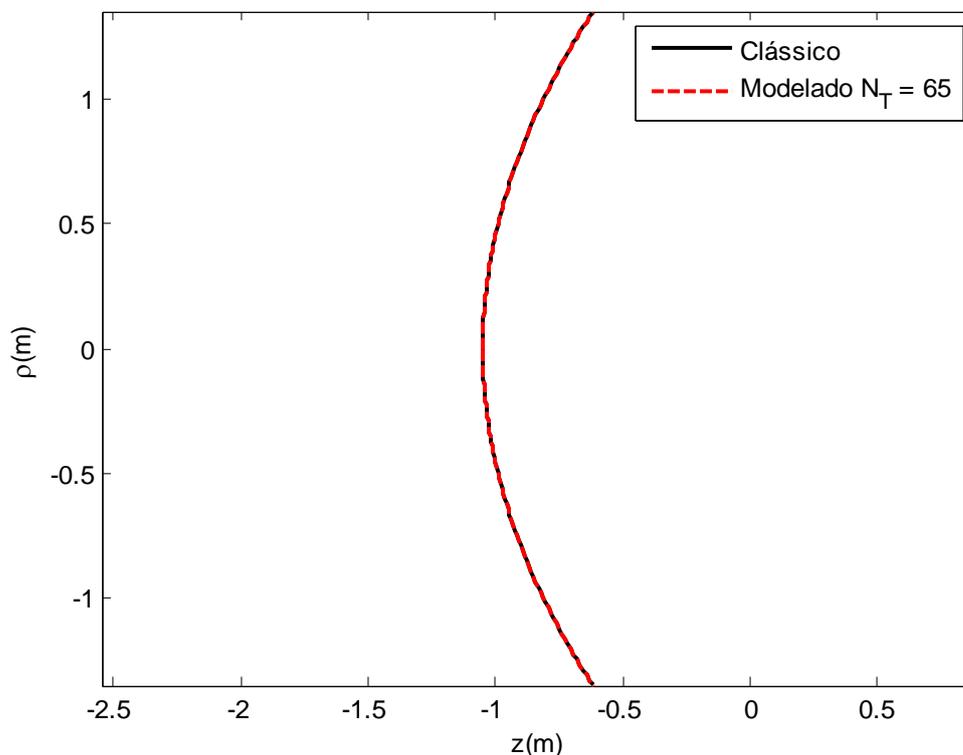


**Figura 2-15 Diagrama de radiação das superfícies dos refletores clássico e modelado para  $N_T = 45$ .**

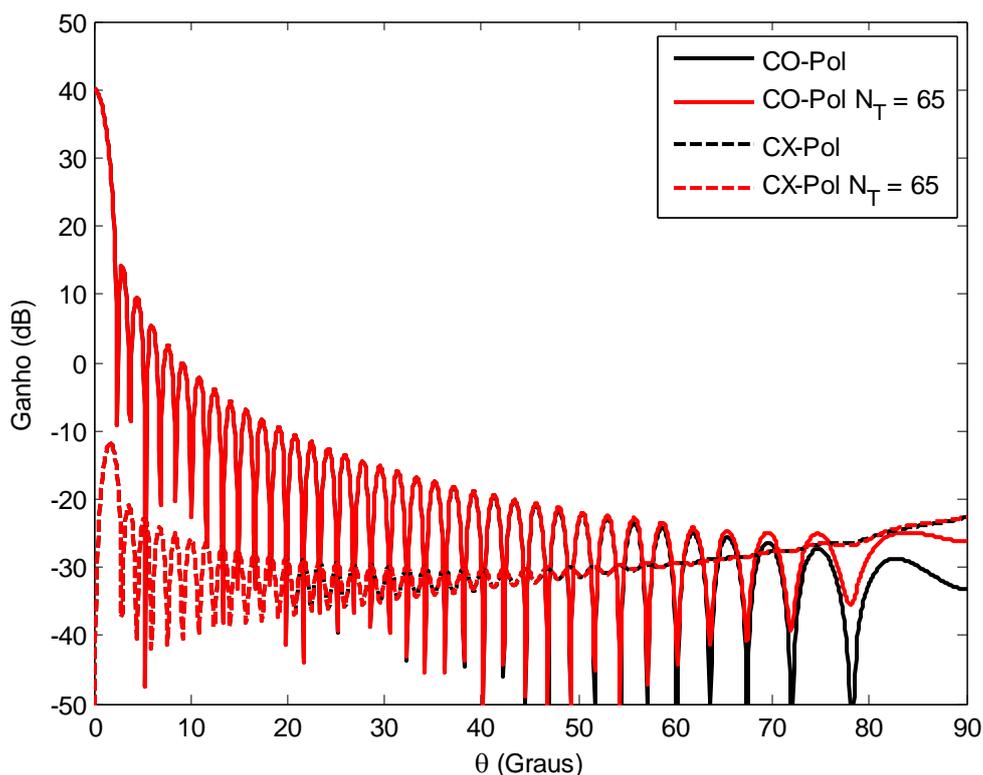
Através da Figura 2-14, empregando 45 seções de elipses na síntese do refletor, é possível notar que as geratrizes que representam as antenas clássica e modelada são praticamente iguais.

Considerando-se os diagramas de radiação expostos nas Figuras 2-11 ( $N_T = 24$ ), 2-13 ( $N_T = 32$ ) e 2-15 ( $N_T = 45$ ), observa-se que no caso em que se utilizam 45 seções de elipses as curvas que representam às CO-Pol e CX-Pol do refletor modelado estão se aproximando das polarizações principal e cruzada da antena clássica respectivamente. Comparando-se estes três casos de estudo (Figuras 2-11, 2-13 e 2-15), verifica-se que para  $N_T = 45$  as polarizações CO-Pol e CX-Pol do parabolóide e do refletor modelado tendem a ficarem parecidas até  $\theta$  atingir cerca de  $46^\circ$ .

Na Figura 2-16 estão caracterizadas as superfícies das antenas clássica e modelada para  $N_T = 65$  em conformidade com os valores definidos na Tabela 2-2 e na Figura 2-17 são apresentados os diagramas de radiação.



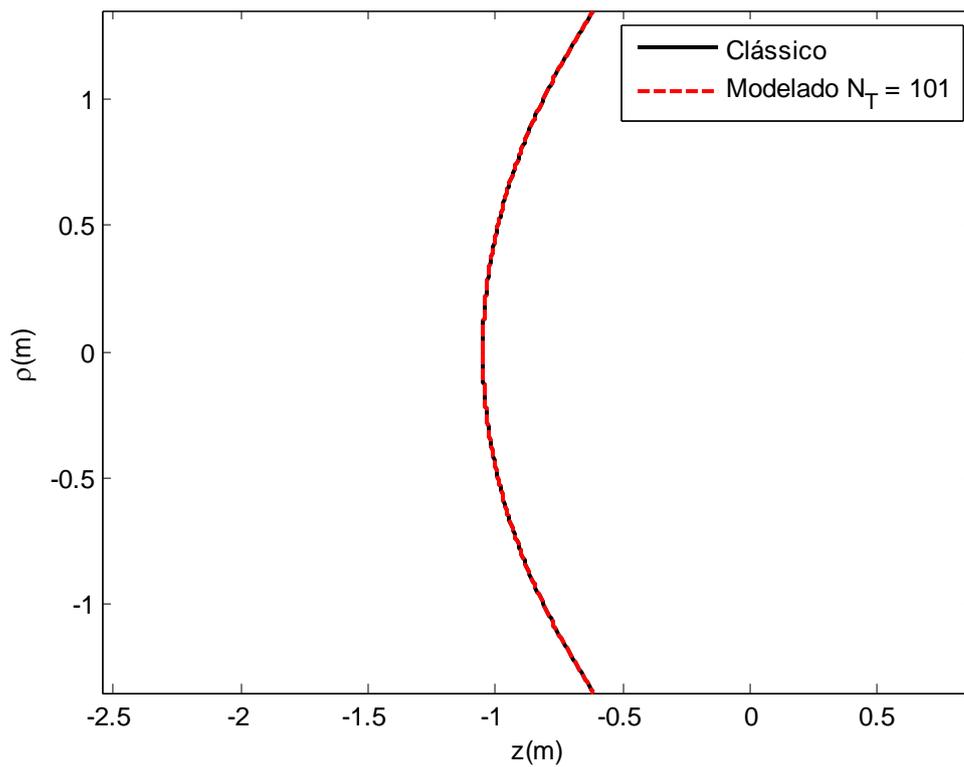
**Figura 2-16 Geratrizes das superfícies dos refletores clássico e modelado para  $N_T = 65$ .**



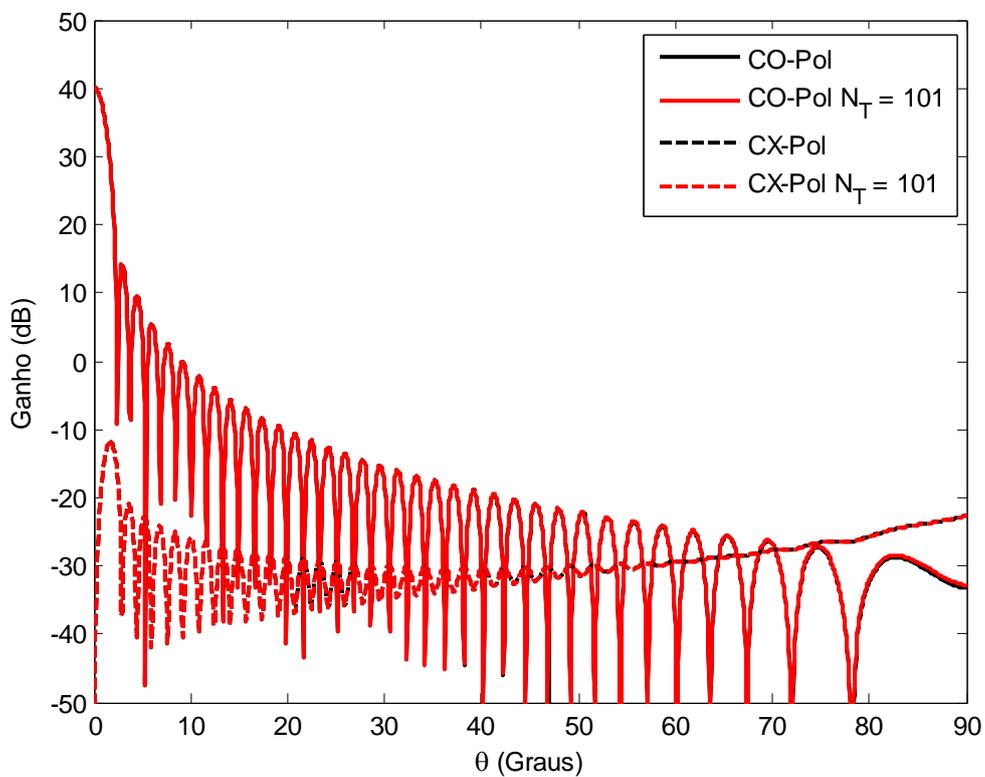
**Figura 2-17 Diagrama de radiação das superfícies dos refletores clássico e modelado para  $N_T = 65$ .**

Pela Figura 2-17 enfatiza-se que as curvas que descrevem as polarizações CO-Pol e CX-Pol da antena refletora modelada se aproximaram muito das polarizações principal e cruzada referentes à antena refletora parabólica *front-fed* (antena de referência), respectivamente. A Figura 2-18 apresenta as geratrizes dos refletores clássico e sintetizado, considerando-se  $N_T = 101$  e a Figura 2-19 mostra os diagramas de radiação referentes ao caso de estudo exposto na Figura 2-18.

Avaliando a Figura 2-19, observa-se que as polarizações principais das antenas refletoras clássica e modelada são muito parecidas e para as polarizações cruzadas dos refletores e modelado a situação é análoga. Nesta perspectiva, é possível destacar um fator muito importante da técnica de síntese utilizada neste trabalho, comparando todas as situações expostas nas Figuras 2-11 ( $N_T = 24$ ), 2-13 ( $N_T = 32$ ), 2-15 ( $N_T = 45$ ), 2-17 ( $N_T = 65$ ) e 2-19 ( $N_T = 101$ ) verifica-se que quando se utiliza um número maior de seções elípticas ( $N_T$ ) na síntese os diagramas de radiação dos refletores clássico e modelado tendem a serem aproximadamente iguais.



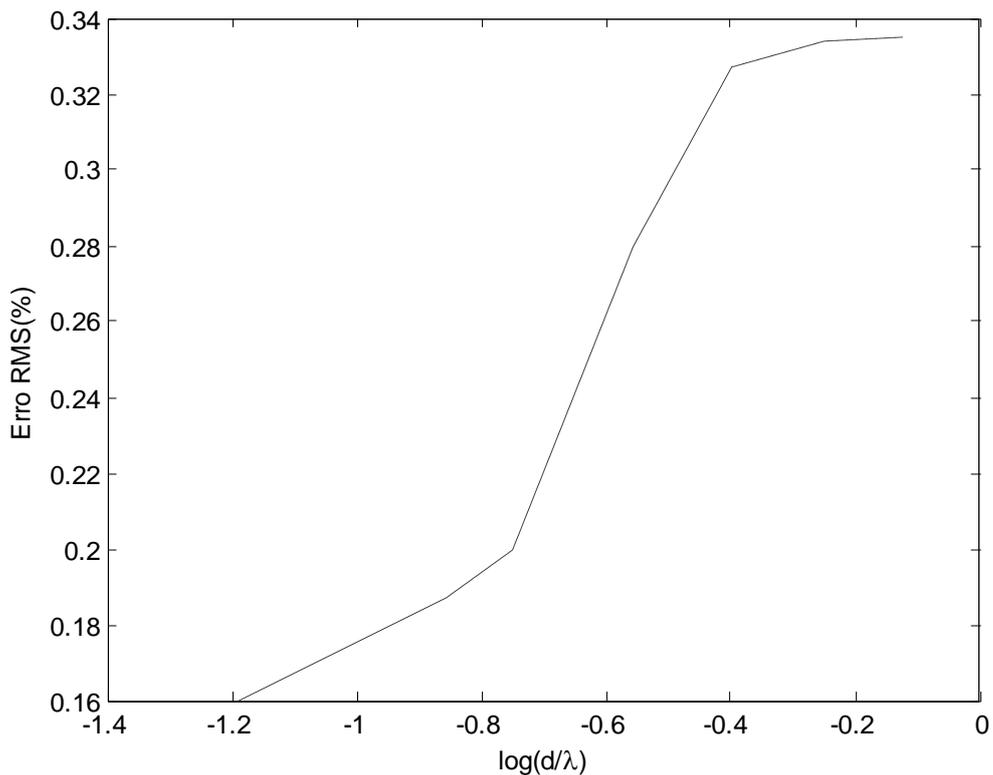
**Figura 2-18 Geratrizes das superfícies dos refletores clássico e modelado para  $N_T = 101$ .**



**Figura 2-19 Diagrama de radiação das superfícies dos refletores clássico e modelado para  $N_T = 101$ .**

Cabe ressaltar que não foram apresentados mais resultados devido às curvas que representam os ganhos referentes às polarizações principal e cruzada apresentarem o mesmo comportamento a partir de  $N_T = 101$  para o parabolóide e a antena refletora modelada.

Para os cinco estudos descritos nesta seção e apresentados nas Figuras 2-10, 2-12, 2-14, 2-16 e 2-18 e considerando-se os valores de  $N_T$  caracterizados na Tabela 2-2 ( $N_T = 24, 32, 45, 65$  e  $101$ ), o cálculo do erro RMS (*Root Mean Square*) foi obtido (observe a Figura 2-20) em função de  $d/\lambda$  (note que  $d$  já foi definido por 2-20). Desta forma, com o cômputo do erro RMS é possível analisar a convergência numérica técnica de síntese utilizada no presente trabalho.



**Figura 2-20 Erro RMS das distâncias entre a fonte e o refletor modelado em função de  $d/\lambda$ . No caso, a distância é a medida ao longo do caminho óptico.**

O erro RMS foi obtido através da comparação das distâncias entre a fonte localizada na origem ( $0$ ) e as antenas refletoras clássica e modelada (raios emitidos pelo alimentador RCF). Neste caso, a distância é a medida ao longo do caminho óptico.

De acordo com a Figura 2-20, é possível verificar que quando se utiliza mais seções de elipses ( $N_T$  maior) no processo de síntese o erro RMS diminui em função da variável  $N_T$ , cujos valores utilizados estão descritos na Tabela 2-2. Portanto, para que seja garantida a convergência numérica de forma eficaz do procedimento de modelagem empregado neste trabalho é conveniente utilizar no processo mais seções elípticas, o que, também, pode ser comprovado através de todos os diagramas de radiação obtidos e apresentados na presente seção (Figuras 2-11, 2-13, 2-15, 2-17 e 2-19), ou seja, no presente estudo para  $N_T = 101$  a superfície modelada tende ser aproximadamente a superfície parabólica ideal. Também, através da Figura 2-19 observa-se que considerando  $N_T = 45$  (utilizando 45 seções de elipses) tem-se uma síntese de sucesso, como é possível verificar por meio da Figura 2-15.

## 2.6 Conclusões Parciais

A primeira etapa deste trabalho consistiu-se em compreender e investigar a técnica de síntese de antenas refletoras, no qual está apresentada em [17]-[19], especificamente analisar a taxa de convergência numérica de tal técnica. Neste caso, sintetizou-se um refletor que produziu a mesma distribuição de potência sobre a abertura de um parabolóide, segundo a GO. A técnica de síntese aqui investigada baseia-se nos conceitos da GO e utiliza seções de elipses concatenadas seqüencialmente entre si [21].

A fim de realizar um estudo comparativo das superfícies clássica e modelada em função do número de elipses ( $N_T$ ) utilizado na síntese verificou-se o comportamento numérico da técnica antenas de aplicá-la a outras configurações geométricas de refletores.

Para cada caso de estudo apresentado na Seção 2.5 foi obtido o diagrama de radiação através de uma ferramenta computacional já existente utilizando as aproximações da PO. Através dos resultados obtidos, verificou-se que quanto maior o valor de  $N_T$  mais eficiente é a técnica. Para comprovar tal constatação, foi calculado o erro RMS (veja a Figura 2-20) utilizando os valores de  $N_T$  descritos na Tabela 2-2 e desta forma percebeu-se que para  $N_T = 45$  já tem uma síntese consideravelmente ótima. Além disso, verificou-se que para  $N_T = 101$  o erro RMS é menor comparando-se com  $N_T = 24, 32, 45$  e  $65$ .

Portanto, o melhor desempenho é obtido utilizando-se um número maior de elipses neste processo de síntese garantindo, desta forma, a convergência numérica e a eficiência da técnica de síntese investigada nesta etapa do presente trabalho. Através destas considerações, pode-se aplicar com conveniência a técnica descrita em [17]-[19] para sintetizar o refletor principal de antenas duplo-refletores para cobertura omnidirecional.

# Capítulo 3

---

## 3 MODELAGEM DO REFLETOR PRINCIPAL DA OADC

### 3.1 Introdução

O objetivo principal deste capítulo é apresentar o desenvolvimento das ferramentas teórica e matemática utilizadas para sintetizar o refletor principal (sendo mantido o sub-refletor clássico) de uma antena duplo-refletora para cobertura omnidirecional. Deve-se enfatizar que o refletor principal da OADC foi sintetizado com o objetivo de fornecer uma cobertura setorial, ou seja, um diagrama de radiação uniforme em um setor que será especificado adiante. Nesta etapa do trabalho, optou-se pela configuração OADC por se mostrar mais compacta geometricamente [22], [24]. Neste capítulo, também são apresentados os resultados obtidos através do procedimento de síntese desenvolvido.

O processo de síntese do refletor principal da OADC tem início com a determinação do sub-refletor clássico de tal configuração. Para isso, devem-se determinar os parâmetros referentes à cônica geratriz que descreve o sub-refletor através do procedimento e notação semelhantes àqueles apresentados em [24], [32] e [33], sendo que as dimensões práticas de projeto (parâmetros geométricos de entrada) foram especificadas *a priori* de acordo com [24]. Este estudo é apresentado na Seção 3.2.

Na Seção 3.3 é apresentado o modelo de alimentador utilizado no processo de modelagem do refletor desta segunda etapa do trabalho, descrevendo as suas principais características e os parâmetros relativos ao modelo de alimentador adotado conforme [24], [32] e [34]. Além disso, também nesta seção, são mostradas as

equações que representam os fasores dos campos elétrico e magnético para o modelo de alimentador utilizado [34].

É importante destacar que o ferramental desenvolvido na primeira etapa deste trabalho, apresentado no Capítulo 2, foi estendido para sintetizar o refletor principal da antena OADC. Nesta perspectiva, na Seção 3.4 são apresentados os conceitos e formulação matemática referentes à técnica de síntese que se baseia na concatenação de seções de elipses para produzir um padrão de distribuição de potência na abertura cilíndrica da antena OADC.

Na Seção 3.5 são apresentados os resultados obtidos através do ferramental desenvolvido e apresentado na seção anterior, bem como as discussões de tais resultados. Por fim, na Seção 3.6 são feitas as conclusões parciais do capítulo.

## **3.2 Estudo da configuração clássica OADC**

A antena OADC pode ser empregada em aplicações envolvendo enlaces radioelétricos ponto-multiponto [32], [33] e [35]. A configuração clássica da antena OADC é composta por dois refletores que são circularmente simétricos, ambos em relação ao eixo  $z$ , sendo as geratrizes clássicas geradas por seções cônicas. Nesta configuração clássica omnidirecional, a superfície do sub-refletor é gerada por uma seção cônica (elipse ou hipérbole) que está conectada ao eixo de simetria (eixo  $z$ ) no ponto  $Q$ , onde é definido o vértice do sub-refletor da OADC (observe a Figura 3-1).

Através da Figura 3-1 percebe-se que os dois focos da cônica que representa a geratriz do sub-refletor são localizados pelos pontos  $O$  e  $P$ , sendo  $O$  a origem do sistema de coordenadas (que coincide com o centro de fase do alimentador) e o ponto  $P$  é posicionado de maneira que coincida com o foco do refletor principal [23].



da abertura cilíndrica da antena, o diâmetro ( $D_M$ ) do refletor principal clássico, o diâmetro ( $D_B$ ) da abertura central do refletor principal dando passagem ao alimentador, a distância ( $V_S$ ) entre o foco principal  $O$  e o vértice do sub-refletor  $Q$  e a coordenada  $z_B$  referente a borda interna do refletor principal clássico.

Os parâmetros geométricos de entrada  $D_B$ ,  $V_S$  e  $z_B$  são muito úteis para o acesso apropriado do alimentador situado no foco  $O$  (origem), bem como a sua posição relativa diante do sub-refletor. Os outros parâmetros ( $W_A$  e  $D_M$ ) basicamente controlam as dimensões da antena OADC e as suas características de radiação (conjuntamente com o alimentador) [24].

Para simplificar o processo de obtenção dos parâmetros necessários que definem a cônica do sub-refletor, dois ângulos auxiliares são adotados:  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , conforme ilustrados na Figura 3-1. O ângulo  $\theta_1$  está relacionado com o caminho óptico do raio principal que parte do alimentador ao longo do eixo de simetria. De acordo com a Figura 3-1, os ângulos que tenham a sua orientação no sentido horário são positivos e aqueles que tiverem no sentido anti-horário são negativos. A formulação matemática aqui apresentada para se obter os parâmetros necessários que definem de maneira única a antena é baseada em [24].

Fazendo-se referência a Figura 3-1, através do triângulo  $OQL$  ( $\Delta OQL$ ) tem-se que:

$$\tan \theta_1 = \frac{-D_B}{2(V_S - z_B)}, \quad (3-1)$$

e, conseqüentemente, obtêm-se o valor de  $\theta_1$ .

Para se obter o outro ângulo auxiliar  $\theta_2$  (veja a Figura 3-1), a partir da equação da parábola geratriz que descreve o refletor principal pode-se provar, conforme [24] e [32], que:

$$\frac{D_M - D_B}{2W_A} = \frac{1 - \tan(\theta_1/2) \tan(\theta_2/2)}{[1 + \tan(\theta_1/2)][1 + \tan(\theta_2/2)]}, \quad (3-2)$$

onde  $D_M$  é o diâmetro do refletor principal clássico,  $W_A$  é a largura da abertura cilíndrica da antena OADC e o ângulo auxiliar  $\theta_1$  é dado por (3-1).

Determinados os ângulos auxiliares ( $\theta_1$  e  $\theta_2$ ) através de (3-1) e (3-1), pode-se obter a distância focal da parábola que descreve o refletor principal clássico da seguinte maneira conforme [24]:

$$F = \frac{W_A [1 + \tan(\theta_1/2)][1 + \tan(\theta_2/2)]}{4 [\tan(\theta_1/2) - \tan(\theta_2/2)]}. \quad (3-3)$$

Os próximos parâmetros da cônica do sub-refletor a serem determinados são a distância interfocal ( $2c$ ) e o ângulo ( $\beta$ ) entre o eixo de simetria do sistema refletor e o eixo da cônica geratriz do sub-refletor (observe a Figura 3-1). Aplicando a lei dos senos aos triângulos  $OPQ$  ( $\Delta OPQ$ ) e  $OPU$  ( $\Delta OPU$ ) obtêm-se, respectivamente [24] e [32]:

$$2c \sin(\beta - \theta_1) = -V_S \sin \theta_1 \quad (3-4)$$

$$\begin{aligned} 2c \sin(\beta - \theta_2) &= (W_A - z_B) \\ \sin \theta_2 + (D_M/2) \cos \theta_2 &. \end{aligned} \quad (3-5)$$

De (3-4) e (3-5) pode-se obter:

$$2c \sin \beta = \left[ \frac{D_M + 2(V_S + W_A - z_B) \tan \theta_2}{2(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)} \right] \tan \theta_1 \quad (3-6)$$

$$2c \cos \beta = \frac{D_M + 2V_S \tan(\theta_1) + 2(W_A - z_B) \tan \theta_2}{2(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)} \quad (3-7)$$

e, conseqüentemente, os valores de  $2c$  e  $\beta$ . Desta forma, com os valores da distância interfocal  $2c$  e do ângulo  $\beta$ , o outro foco  $P$  é localizado pelo seguinte vetor:

$$\vec{P} = 2c (\text{sen}\beta \hat{x} + \cos\beta \hat{z}), \quad (3-8)$$

e as coordenadas que localizam o ponto  $P$  são:

$$x_p = 2c \text{sen}\beta, \quad (3-9)$$

e

$$z_p = 2c \cos\beta. \quad (3-10)$$

Finalmente, a excentricidade ( $e$ ) da seção cônica que gera o sub-refletor da OADC é definida com o auxílio da equação da cônica. Por exemplo, tomando a trajetória do raio principal que parte do alimentador situado na origem tem-se que:

$$\frac{2c}{e} = V_s - \frac{2c \text{sen}\beta}{\text{sen}\theta_1}. \quad (3-11)$$

Através da formulação aqui apresentada de (3-1) a (3-11), os parâmetros que descrevem a superfície do sub-refletor estão determinados. Entretanto, outros dois parâmetros que são muito úteis precisam ser determinados: o ângulo de borda ( $\theta_E$ ) do sub-refletor e o diâmetro ( $D_S$ ) do sub-refletor clássico. Ambos são obtidos pela aplicação da lei dos senos considerando o triângulo  $POR$  ( $\Delta OPR$ ) na Figura 3-1:

$$\frac{2c}{\text{sen}(\theta_E - \theta_2)} = \frac{|D_S / \text{sen}\theta_E|}{2 \text{sen}(\beta - \theta_2)}. \quad (3-12)$$

Fazendo-se as devidas manipulações matemáticas em (3-12), tem-se que:

$$\frac{2c}{\text{sen}(\theta_E - \theta_2)} = \frac{(4c/e) - |D_S / \text{sen}\theta_E|}{2 \text{sen}(\beta - \theta_E)}, \quad (3-13)$$

Através de (3-4) e (3-11) e dos ângulos auxiliares dados por (3-1) e (3-2) pode-se obter os parâmetros  $\theta_E$  e  $D_S$ :

$$\tan\left(\frac{\theta_E}{2}\right) = \frac{\tan(\theta_2/2) - \tan(\theta_1/2)}{1 - [2 \cot(\beta) + \tan(\theta_2/2)] \tan(\theta_1/2)}. \quad (3-14)$$

$$D_S = \frac{4c |\text{sen}\theta_E| \text{sen}(\beta - \theta_2)}{\text{sen}(\theta_E - \theta_2)}. \quad (3-15)$$

Conjuntamente com os parâmetros geométricos de entrada ( $W_A$ ,  $D_M$ ,  $D_B$ ,  $V_S$  e  $z_B$ ) e com o ângulo de borda do sub-refletor  $\theta_E$  dado por (3-14), o parâmetro  $D_S$  obtido através de (3-15) é de suma importância para as configurações omnidirecionais compactas [24]. Além disso, o ângulo ( $\theta_E$ ) está intimamente relacionado com a eficiência de iluminação da abertura do refletor principal.

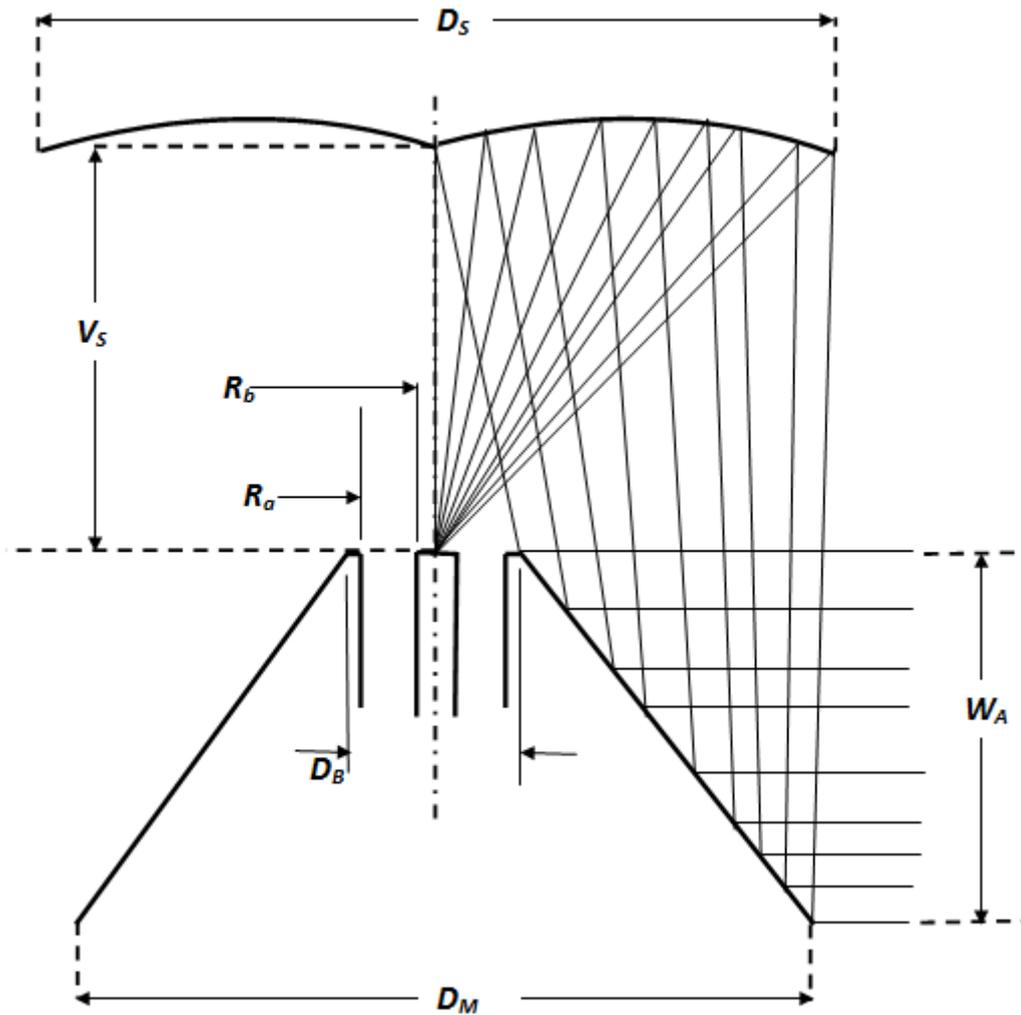
### 3.2.1 Estudo paramétrico da configuração clássica OADC

O objetivo desta sub-seção é ilustrar a formulação matemática, apresentada na Seção 3.2, para a obtenção dos parâmetros da cônica que gera a superfície do sub-refletor clássico. Sejam os parâmetros geométricos de entrada, ou seja, as dimensões práticas de projeto cujos valores estão definidos em [24] e ilustradas na Figura 3-2: a largura da abertura cilíndrica  $W_A = 10 \lambda$ , o diâmetro do refletor principal clássico  $D_M = 34,6 \lambda$ , a distância entre a origem e o vértice  $V_S = 4,69 \lambda$  e a coordenada  $z$  da borda interna do refletor principal  $z_B = 0 \lambda$ . Também foi fixado o valor do diâmetro central  $D_B = 2 \lambda$ , já que configurações compactas devem possuir o mínimo  $D_B$  possível.

Substituindo os valores correspondentes às dimensões de projeto em (3-1) e (3-2) obtêm-se os valores referentes aos ângulos auxiliares  $\theta_1$  e  $\theta_2$ :

$$\theta_1 = -12,03^\circ \quad (3-16)$$

$$\theta_2 = -37,35^\circ. \quad (3-17)$$



**Figura 3-2** Representação dos parâmetros geométricos de entrada da configuração clássica OADC.

Em seguida, determina-se o foco ( $F$ ) da parábola do refletor principal clássico através da equação (3-3) e através dos resultados obtidos em (3-16) e (3-17). Desta maneira, tem-se:

$$F = 6,34 \lambda. \quad (3-18)$$

Utilizando os valores que correspondem aos parâmetros geométricos de entrada definidos em [24] e os substituindo nas equações (3-4) e (3-5). Fazendo-se as

devidas manipulações matemáticas em (3-6) e (3-7), encontram-se os valores da distância interfocal  $2c$  e do ângulo de inclinação do eixo do sub-refletor  $\beta$ , respectivamente:

$$2c = 15,84 \lambda \quad (3-19)$$

$$\beta = -8,5^\circ. \quad (3-20)$$

O próximo passo é determinar a localização do foco  $P$  que é dado pelo vetor através de (3-8) e pelos resultados obtidos em (3-19) e (3-20):

$$\vec{P} = -2,33 \lambda \hat{x} + 15,66 \lambda \hat{z}, \quad (3-21)$$

conseqüentemente, os valores das coordenadas do resultado obtido em (3-21) são:

$$x_p = -2,33 \lambda \quad (3-22)$$

$$z_p = 15,66 \lambda. \quad (3-23)$$

É importante enfatizar que o valor positivo de  $F$  encontrado em (3-18) indica que o foco  $P$  da cônica do sub-refletor da OADC comum às causticas geratrizes encontra-se acima do sub-refletor. Neste caso, o sub-refletor é gerado por uma hipérbole. Além disso, extraindo o módulo do vetor  $\vec{P}$ , encontra-se a distância interfocal  $2c$ , valor este que deve ser igual ao resultado obtido em (3-19):

$$2c = |\vec{P}| = 15,84 \lambda. \quad (3-24)$$

Através dos resultados anteriores é possível obter a excentricidade  $e$  da hipérbole do sub-refletor clássico aplicando a equação (3-11), lembrando que para a hipérbole tem-se que  $e > 1$ :

$$e = 2,4239.$$

Por fim, o ângulo de borda do sub-refletor ( $\theta_E$ ) é obtido através dos resultados (3-16), (3-17) e (3-20) e da equação (3-14):

$$\theta_E = 55,1^\circ \quad (3-26)$$

Além disso, o diâmetro do sub-refletor é obtido pelos resultados de (3-17), (3-20) e (3-25) e da equação (3-15):

$$D_S = 12,6 \lambda. \quad (3-27)$$

Portanto, através dos parâmetros geométricos de entrada definidos anteriormente conforme [24] e dos resultados obtidos e apresentados através de (3-16) a (3-27) define-se de maneira única a configuração clássica OADC. Desta forma, os parâmetros da hipérbole que gera o sub-refletor da OADC já estão determinados e o processo de síntese óptica do refletor principal pode ser iniciado, já que o primeiro passo da síntese é determinar tais parâmetros. O procedimento da síntese é apresentado na próxima seção. Os principais parâmetros geométricos referentes a configuração clássica OADC estão listados na Tabela 3-1.

**Tabela 3-1 Parâmetros geométricos**

Parâmetros	Valores
$W_A$	$10\lambda$
$D_M$	$34,6\lambda$
$D_B$	$2\lambda$
$V_S$	$4,69\lambda$
$z_B$	0
$F$	$6,34\lambda$
$2c$	$15,84\lambda$
$\beta$	$-8,5^\circ$
$e$	2,4239
$\theta_E$	$55,1^\circ$
$D_S$	$12,6\lambda$

### 3.3 Modelo de Alimentador

Nas aplicações onde existe a necessidade de se utilizar antenas duplo-refletoras para cobertura omnidirecional, as cornetas coaxiais são muito empregadas para representar o modelo de alimentador. O uso de tais cornetas como alimentadores permite uma análise eletromagnética das antenas omnidirecionais mais precisa e eficiente [24]. Nesta perspectiva, no procedimento de síntese óptica do refletor principal da OADC desta etapa, o alimentador é representado por uma corneta coaxial excitada pelo seu modo fundamental TEM [34].

Neste caso, o alimentador é representado por um diagrama de radiação circularmente simétrico correspondendo à radiação oferecida por uma abertura coaxial [32] e [35]. Os fasores que representam os campos elétrico e magnético para o modelo de alimentador aqui proposto são dados por:

$$\vec{E}_F(\vec{r}_F) = \left[ F(\theta_F) \hat{\theta}_F + P(\theta_F) \hat{\phi}_F \right] \frac{e^{-jk r_F}}{r_F} \quad (3-28)$$

$$\vec{H}_F(\vec{r}_F) \approx \left[ \frac{\hat{r}_F \times \vec{E}_F(\vec{r}_F)}{\eta} \right], \quad (3-29)$$

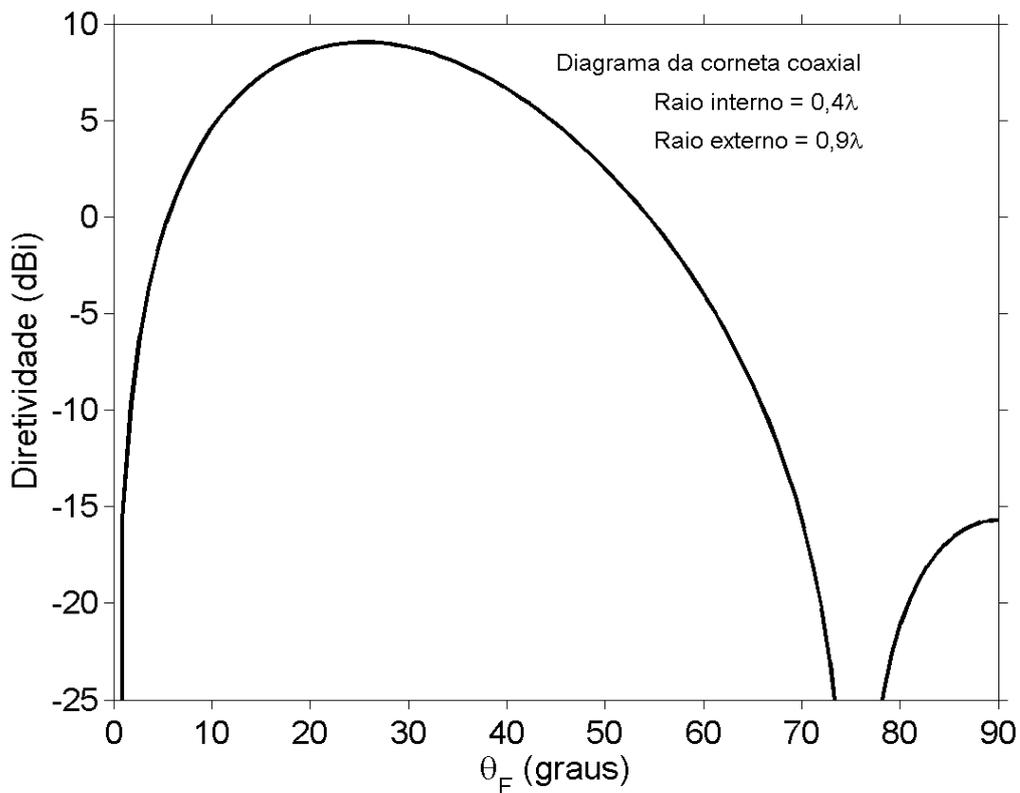
onde  $r_F$ ,  $\theta_F$  e  $\phi_F$  são as coordenadas esféricas usuais da corneta coaxial (alimentador),  $\eta$  é a impedância intrínseca do meio atmosférico e as funções  $F(\theta_F)$  e  $P(\theta_F)$  representam a radiação oferecida pela corneta coaxial.

Desta maneira, assumindo o modo TEM na abertura coaxial e aplicando o princípio da equivalência, pode-se mostrar que um modelo adequado para simular o diagrama de radiação da corneta coaxial é dado pelas seguintes funções [34]:

$$F(\theta_F) = \left[ \frac{J_0(k R_b \text{sen}\theta_F) - J_0(k R_a \text{sen}\theta_F)}{\text{sen}\theta_F} \right] \quad (3-30)$$

$$P(\theta_F) = 0. \quad (3-31)$$

Em (3-30)  $J_0(x)$  é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem 0,  $k = 2\pi/\lambda$  é a constante de propagação,  $R_b$  e  $R_a$  são os raios interno e externo da abertura coaxial, conforme ilustrados na Figura 3-4 e  $\theta_F$  é o ângulo referente ao alimentador. Substituindo as funções  $F(\theta_F)$  e  $P(\theta_F)$  dadas por (3-30) e (3-31) em (3-28), obtêm-se a componente  $\theta_F$  do campo elétrico. Sendo assim,  $F(\theta_F)$  é o modelo adequado para simular o diagrama de radiação da corneta coaxial, assumindo o seu modo TEM na abertura, conforme [34]. A Figura 3-3 representa o diagrama de radiação da corneta coaxial considerando-se a função  $F(\theta_F)$  dada por (3-30). Para o diagrama de radiação da Figura 3-3 foram adotados  $R_a = 0,9 \lambda$  e  $R_b = 0,4 \lambda$ .



**Figura 3-3 Diagrama de radiação do modo TEM de uma corneta coaxial.**

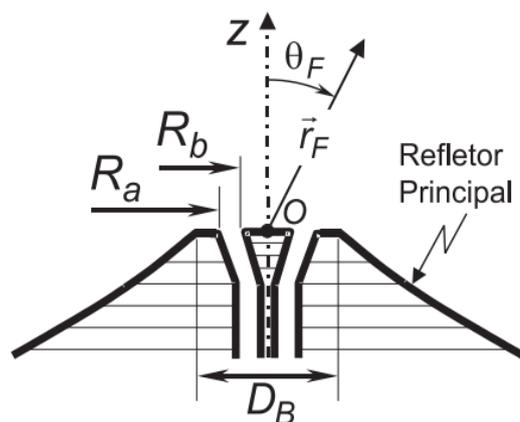
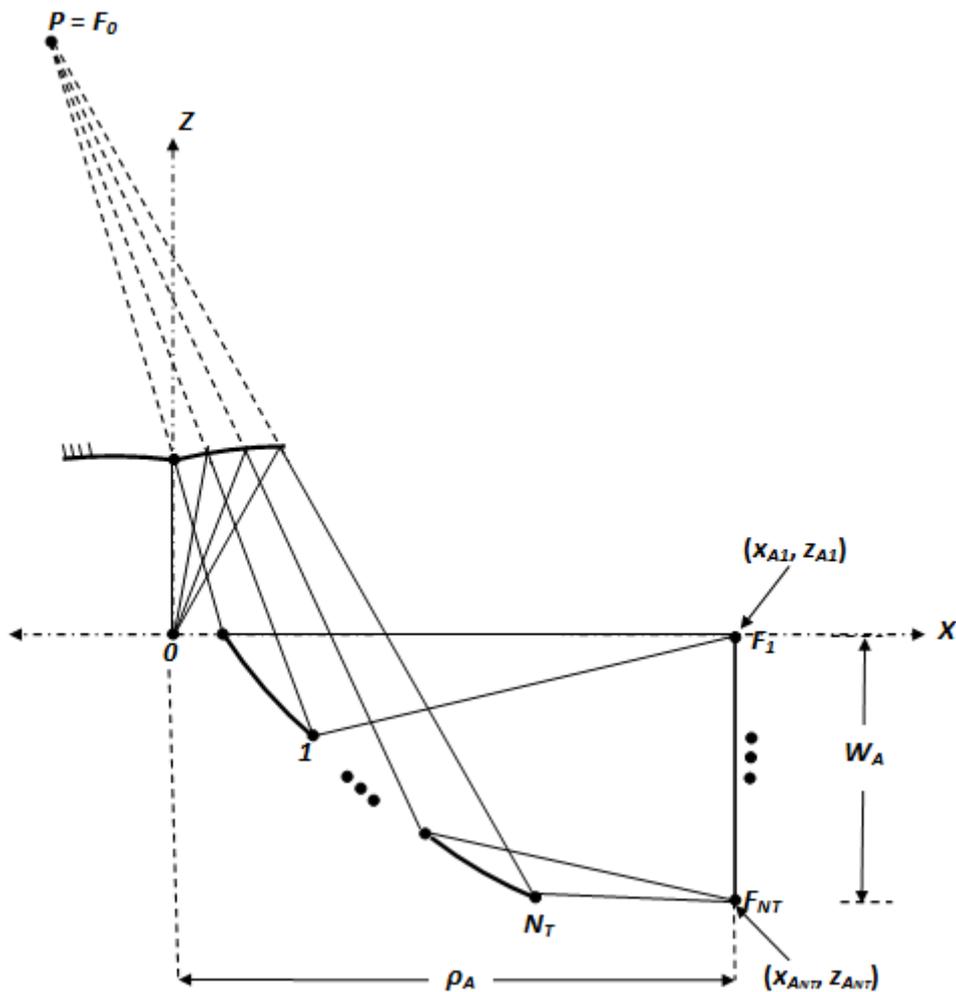


Figura 3-4 Definição dos parâmetros da corneta coaxial.

### 3.4 O Processo de Síntese Óptica do Refletor Principal

Nesta segunda etapa do presente trabalho o objetivo é estender o formalismo desenvolvido na etapa anterior [21] para sintetizar o refletor principal sendo mantido o sub-refletor clássico de uma antena OADC. Neste caso, de acordo com a GO considerou-se um determinado padrão de potência especificado sobre a abertura cilíndrica de tal refletor (região de campo próximo). Deste modo, nesta seção é apresentado o desenvolvido das ferramentas teórica e matemática utilizadas para a síntese desta etapa.

A síntese óptica do refletor principal é feita a partir da configuração OADC clássica, como àquela que foi apresentada na Seção 3.2, com os parâmetros que definem as cônicas que representam as geratrizes dos refletores clássicos. Esta parametrização está sumarizada na Tabela 3-1 conforme a definição proposta em [24]. A idéia básica deste procedimento de síntese é obter a curva geratriz que descreve o refletor principal da antena OADC através de seções cônicas concatenadas consecutivamente entre si (observe a Figura 3-5). Conseqüentemente, o refletor principal clássico é substituído pela superfície do refletor modelado com o intuito de oferecer uma cobertura específica.



**Figura 3-5 Concatenação de seções cônicas para a representação da geratriz do refletor principal da antena OADC e discretização da abertura cilíndrica.**

O procedimento de síntese óptica do refletor principal tem início com a determinação dos parâmetros que definem de maneira única a cônica que descreve a geratriz do sub-refletor clássico da antena OADC. Neste caso, a cônica é uma hipérbole com um de seus focos (ponto  $P$ ) situado acima do sub-refletor [24]. Os parâmetros referentes a hipérbole já foram obtidos na Seção 3.2 e os seus valores correspondentes estão listados na Tabela 3-1. Através da Figura 3-6 pode-se observar os parâmetros são os seguintes: o diâmetro ( $D_S$ ) do sub-refletor, a excentricidade ( $e$ ), a distância interfocal ( $2c$ ), o ângulo ( $\theta_E$ ) de borda do sub-refletor, a distância ( $V_S$ ) e o

ângulo ( $\beta$ ) de inclinação do eixo da hipérbole. Tais parâmetros são alguns dos dados de entrada do algoritmo de síntese.

Nesta segunda etapa, o processo de concatenação consecutiva também baseia-se em seções de elipses e, conseqüentemente, conforme a Figura 3-5, a síntese do refletor principal é feita na região de campo próximo (abertura cilíndrica da antena OADC). Considerou-se que os dois focos da elipse  $i$  são  $F_0$  (localizado no ponto  $P$  e sempre comum a todas as elipses) e  $F_i$  (sempre localizado no plano da abertura cilíndrica da antena OADC), com  $i = 1, 2, \dots, N_T$ .

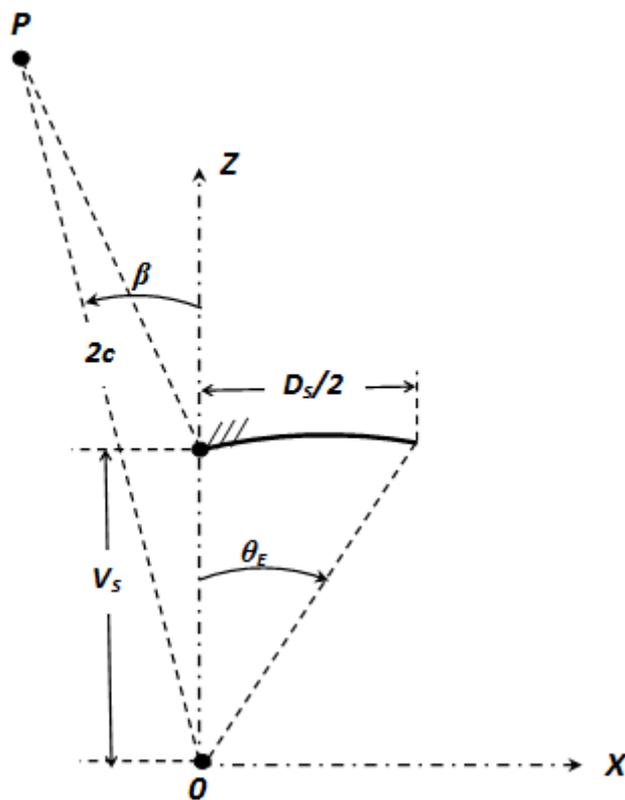


Figura 3-6 Parâmetros que definem a hipérbole.

Conforme os princípios associados a GO, o sub-refletor hiperbólico clássico é iluminado por um alimentador, que nesta etapa é representado por uma corneta coaxial (veja na Seção 3.3) com centro de fase localizado na origem ( $O$ , um dos focos da

hipérbole) com diagrama de radiação  $G_F(\theta_F)$  do tipo circularmente simétrico (observe a Figura 3-3), onde  $\theta_F$  é o ângulo referente ao raio que é emitido pela corneta coaxial.

Ainda sob os princípios da GO, todos os raios que são emitidos pelo alimentador sofrem a primeira reflexão no sub-refletor clássico da antena OADC e passam pelo outro foco da hipérbole (ponto  $P$ ), que é o foco  $F_0$  comum a todas as  $N_T$  elipses que irão representar a geratriz do refletor principal modelado. Desta forma, estes raios são refletidos pela elipse  $i$  atingindo o seu outro foco  $F_i$  correspondentes. Os focos  $F_0$  e  $F_i$  estão ilustrados na Figura 3-5.

A próxima etapa deste procedimento de síntese é discretizar a abertura cilíndrica da antena OADC em  $N_T$  pontos (no semi-plano  $\phi$ ). Estes pontos correspondem a todos os focos  $F_i$  referentes as  $N_T$  elipses a serem concatenadas consecutivamente entre si (veja a Figura 3-5). Para discretizar a abertura de tal configuração omnidirecional, deve-se determinar as coordenadas  $(x_{Ai}, z_{Ai})$  que definem os  $N_T$  pontos sobre a abertura. Observando a Figura 3-5, as coordenadas  $x_{Ai}$  e  $z_{Ai}$  são obtidas, respectivamente:

$$x_{A_i} = \rho_A \quad (3-32)$$

e

$$z_{A_i} = i \cdot \left( \frac{-W_A}{N_T} \right), \quad (3-33)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, N_T$  e  $\rho_A$  é uma constante e define o raio cilíndrico da abertura, sendo um dos dados de entrada do algoritmo de síntese. Em (3-33)  $W_A$  refere-se à largura da abertura cilíndrica da antena modelada e depende estritamente do padrão de distribuição de potência a ser especificado sobre os focos  $F_i$  (observe adiante na Seção 3.5 a definição da potência distribuída sobre os focos  $F_i$ ). Utiliza-se (3-33) a partir de  $i = 2$  já que o primeiro ponto sobre a abertura está definido. Logo, todos os pontos obtidos através de (3-33) são equidistantes entre si. Através de (3-32) e (3-33) pode-se considerar a abertura e definida pelos  $N_T$  pontos discretos que são representados pelas coordenadas  $x_{Ai}$  e  $z_{Ai}$  dos focos  $F_i$ .

Assim como descrito na Seção 2.4, utiliza-se a Lei da Conservação da Energia para determinar os ângulos  $\theta_{F_i}$ . A Lei da Conservação da Energia impõe que toda potência que parte da fonte entre os ângulos  $\theta_{F_{i-1}}$  e  $\theta_{F_i}$ , mostrados na Figura 3-7, deve ser igual à potência que chega ao foco  $F_i$  referente a  $i$ -ésima elipse [21] localizado pelas coordenadas de (3-32) e (3-33), ou seja:

$$\int_{\theta_{F_{i-1}}}^{\theta_{F_i}} G_F(\theta_F) r_F^2 \sin\theta_F d\theta_F = N P_{A_i} , \quad (3-34)$$

onde  $G_F(\theta_F)$  é a densidade de potência radiada pela corneta coaxial que é dada por:

$$G_F(\theta_F) = \frac{|\vec{E}_F(\theta_F)|^2}{2\eta} , \quad (3-35)$$

sendo  $\vec{E}_F(\vec{r}_F)$  o fasor do campo elétrico da corneta coaxial que é obtido através de (3-28). Na Lei da Conservação da Energia expressa em (3-34),  $P_{A_i}$  (com  $i = 1, 2, \dots, N_T$ ) é a potência que chega a  $F_i$  e  $N$  é o fator de normalização que assegura (3-34) e é dado por:

$$N = \left( \sum_{i=1}^{N_T} P_{A_i} \right)^{-1} \int_0^{\theta_E} G_F(\theta_F) r_F^2 \sin\theta_F d\theta_F , \quad (3-36)$$

com  $\theta_E$  sendo o ângulo de borda do sub-refletor clássico da antena OADC e o seu respectivo valor está definido na Tabela 3-1.

Contudo, através de (3-34), (3-35), (3-36) e da corneta coaxial descrita na Seção 3.3 é possível determinar todos os ângulos  $\theta_{F_i}$  desenvolvendo um algoritmo com  $N_T$  iterações. No entanto, para iniciar o algoritmo iterativo com  $i = 0$  sendo  $\theta_{F_0} = 0^\circ$ , é preciso especificar o padrão de distribuição de potência sobre a abertura cilíndrica da antena OADC, segundo a GO [17] assegurando a Lei da Conservação da Energia (veja adiante na Seção 3.5). O padrão de distribuição de potência ( $P_{A_i}$ ) sobre os focos  $F_i$  é especificado como um dado de entrada.

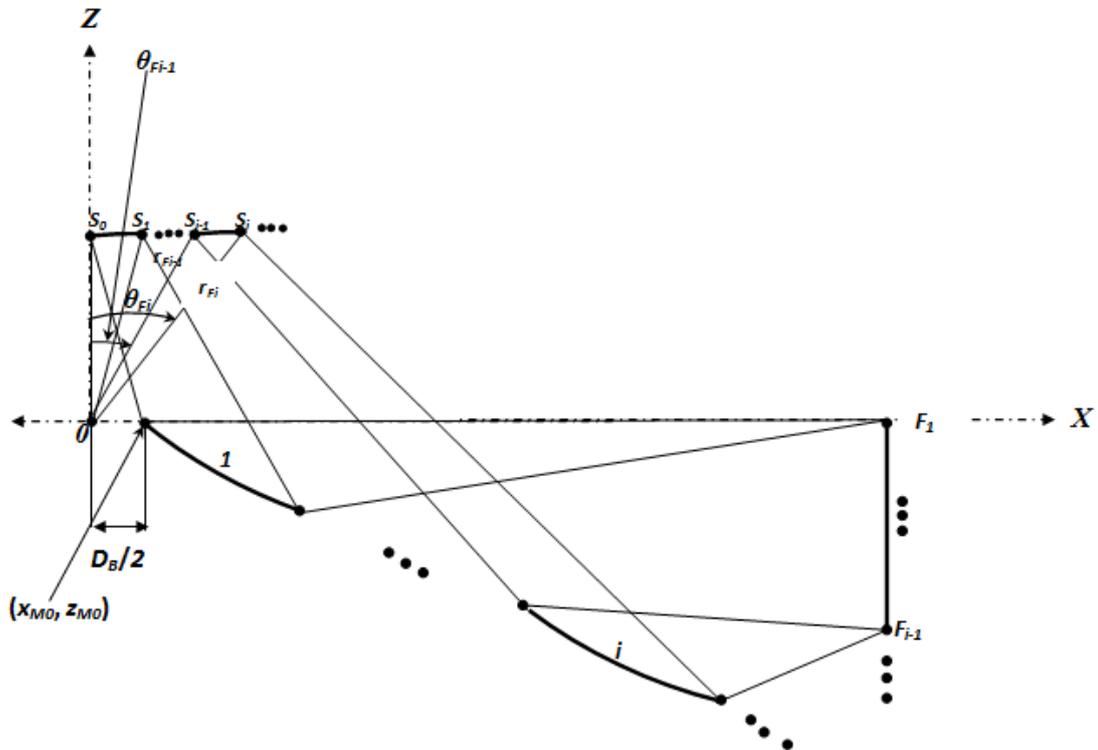


Figura 3-7 Representação da emissão dos raios emitidos pela corneta coaxial, segundo a GO.

Através das definições matemáticas aqui propostas podem-se obter os ângulos  $\theta_{Fi}$ . Porém, deve-se enfatizar que conhecidos  $\theta_{Fi-1}$ ,  $G_F(\theta_F)$  e  $P_{Ai}$ , o limite de integração  $\theta_{Fi}$  da Lei da Conservação da Energia de (3-34) tem que ser obtido por um algoritmo numérico considerando-se que para o primeiro raio  $i = 0$  e  $\theta_{F0} = 0^\circ$ . Com o cômputo de  $\theta_{Fi}$  tem-se o ponto  $(S_i)$  correspondente no sub-refletor clássico, como se pode observar na Figura 3-7. Os raios que incidem no sub-refletor (veja a Figura 3-7) são obtidos através de:

$$r_{Fi} = \frac{c(e - 1/e)}{e \cos(\beta - \theta_{Fi}) + 1}, \quad (3-37)$$

onde  $c$ ,  $e$  e  $\beta$  são os parâmetros que definem o sub-refletor hiperbólico e são dados de acordo com a Tabela 3-1. Logo, com (3-37) e por meio de definições trigonométricas obtêm-se as coordenadas que definem o sub-refletor clássico. São as seguintes:

$$x_{S_i} = r_{F_i} \text{ sen } \theta_{F_i} \quad (3-38)$$

$$z_{S_i} = r_{F_i} \text{ cos } \theta_{F_i} , \quad (3-39)$$

Com  $r_{F_i}$  obtido pela equação (3-39) e  $\theta_{F_i}$  é dado pela Lei da Conservação da Energia (3-34) e são calculados pelo processo iterativo aqui descrito, lembrando que para o primeiro raio ( $i = 0$ ):

$$x_{S_0} = 0 \quad (3-40)$$

e

$$z_{S_0} = V_S = r_{F_0} (\theta_{F_0} = 0^\circ) = \frac{c(e - 1/e)}{e \cos \beta + 1}. \quad (3-41)$$

Antes de iniciar o processo de concatenação das seções elípticas, deve-se definir o primeiro ponto do refletor principal sintetizado. Pela Figura 3-7 é possível definir o primeiro ponto do refletor principal com as seguintes coordenadas:

$$x_{M_0} = \frac{D_B}{2} \quad (3-42)$$

e

$$z_{M_0} = 0, \quad (3-43)$$

com  $D_B$  sendo o diâmetro central do refletor principal dando passagem à abertura coaxial e o seu valor está na Tabela 3-1.

Com o objetivo de especificar as seções de elipses que irão representar a geratriz do refletor principal modelado, é necessário determinar os seus parâmetros geométricos. Para lidar com as  $N_T$  elipses do refletor principal, é necessário definir um sistema de coordenadas auxiliar com origem em  $P$ , conforme está ilustrado na Figura 3-8:

$$x = x' + x_p, \quad (3-44)$$

e

$$z = z' + z_p, \quad (3-45)$$

onde  $x_p$  e  $z_p$  são as coordenadas que definem o ponto  $P$  e dadas por (3-9) e (3-10), respectivamente.

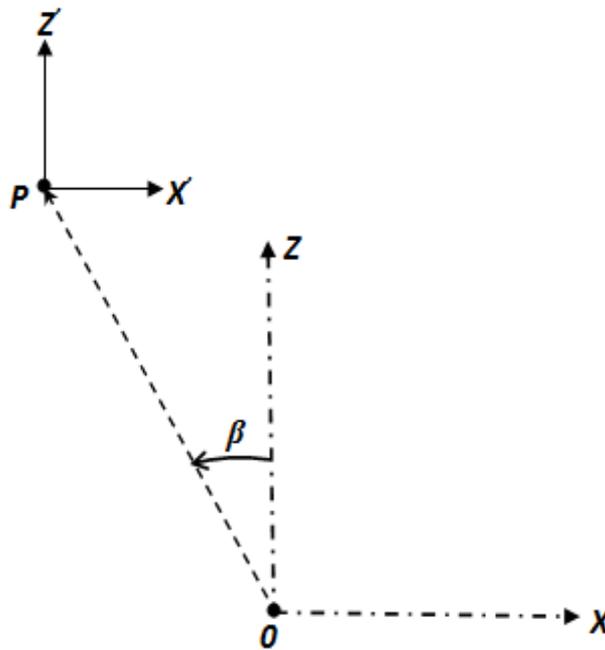


Figura 3-8 Representação do sistema de coordenadas auxiliar ( $x'$ ,  $z'$ ).

Da equação das cônicas, também, pode-se obter todas as direções com ângulos  $\theta_{p_i}$  dos raios refletidos (observe a Figura 3-9):

$$\tan\left(\frac{\theta_{F_i} - \beta}{2}\right) = \left(\frac{e+1}{e-1}\right) \cot\left(\frac{\theta_{P_i} - \beta}{2}\right). \quad (3-46)$$

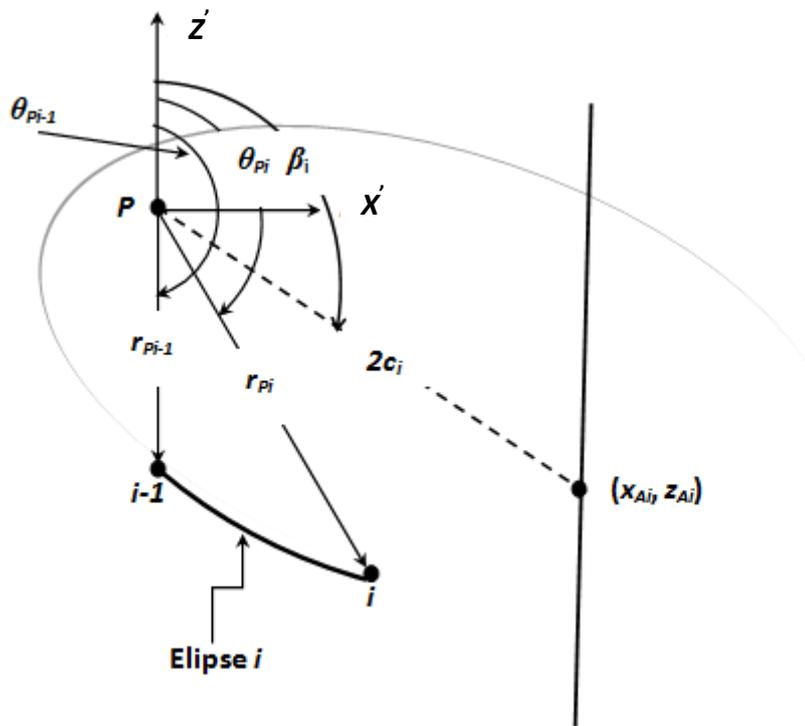


Figura 3-9 Parâmetros das seções elípticas.

Em (3-46) os parâmetros  $\beta$  e  $e$  já foram obtidos anteriormente (Seção 3.2). Para obter o ponto correspondente na superfície do refletor principal ( $M$ ), utiliza-se a equação da elipse  $i$  no sistema de coordenadas auxiliar definido através de (3-44) e (3-45). Lembrando que o foco comum a todas as  $N_T$  elipses está em  $P$  e o outro ( $F_i$ ) em um determinado ponto sobre a abertura. A distância interfocal ( $2c_i$ ) da elipse  $i$  pode ser obtida através do sistema de coordenadas principal (sub-refletor hiperbólico) e das coordenadas que definem os pontos sobre a abertura, ou seja:

$$2c_i = \sqrt{(x_P - x_{A_i})^2 + (z_P - z_{A_i})^2}, \quad (3-47)$$

onde  $x_P$  e  $z_P$  referem-se ao sistema de coordenadas principal e são obtidos através de (3-9) e (3-10), respectivamente, e  $x_{A_i}$  e  $z_{A_i}$  correspondem as coordenadas dos  $N_T$  pontos discretos na abertura e são dados por (3-32) e (3-33). Logo, podem-se obter os ângulos  $\beta_i$  (com  $i = 1, 2, \dots, N_T$ ), conforme ilustrado na Figura 3-9, através de:

$$\tan \beta_i = \frac{(x_P - x_{A_i})}{(z_P - z_{A_i})}. \quad (3-48)$$

Para obter a excentricidade  $\varepsilon_i$  da  $i$ -ésima elipse, observe da Figura 3-9 que duas elipses consecutivas ( $i-1$  e  $i$ ) compartilham um mesmo ponto. Da equação polar de uma elipse:

$$r_{P_{i-1}} = \frac{c_i \left( \varepsilon_i - \frac{1}{\varepsilon_i} \right)}{\varepsilon_i \cos(\beta_i - \theta_{P_{i-1}}) - 1}, \quad (3-49)$$

Onde  $c_i$  é obtido através da distância interfocal expressa em (3-47),  $\beta_i$  é obtido de (3-48),  $\theta_{P_{i-1}}$  é dado por (3-46) e  $r_{P_{i-1}}$  é conhecido do passo anterior. Para o primeiro raio ( $i = 0$ ):

$$r_{P_0} = \sqrt{(x_P - x_{M_0})^2 + (z_P - z_{M_0})^2}. \quad (3-50)$$

Manipulando a equação (3-49) para determinar as excentricidades  $\varepsilon_i$ , tem-se que:

$$\varepsilon_i^2 [r_{P_{i-1}} \cos(\beta_i - \theta_{P_{i-1}}) - c_i] - r_{P_{i-1}} \varepsilon_i + c_i = 0, \quad (3-51)$$

onde a raiz procurada para  $\varepsilon_i$  é aquela tal que

$$0 < \varepsilon_i < 1. \quad (3-52)$$

Uma vez calculado  $\varepsilon_i$ ,  $c_i$ ,  $\beta_i$  e  $\theta_{P_i}$ , encontra-se  $r_{P_i}$ :

$$r_{P_i} = \frac{c_i \left( \varepsilon_i - \frac{1}{\varepsilon_i} \right)}{\varepsilon_i \cos(\beta_i - \theta_{P_i}) - 1}. \quad (3-53)$$

O processo de concatenação consecutiva das elipses é repetido até o último foco ( $F_{NT}$ ). Com as elipses determinadas, é possível obter as coordenadas do refletor principal modelado. São dadas por:

$$x_{M_i} = x'_{M_i} + x_P, \quad (3-54)$$

e

$$z_{M_i} = z'_{M_i} + z_P, \quad (3-55)$$

onde

$$x'_{M_i} = r_{P_i} \operatorname{sen} \theta_{P_i}, \quad (3-56)$$

e

$$z'_{M_i} = r_{P_i} \cos \theta_{P_i}. \quad (3-57)$$

Com as coordenadas que definem o refletor principal modelado obtidas, o procedimento teórico e analítico para a síntese óptica do refletor principal da antena OADC está formulado. Através da implementação computacional da formulação matemática foram obtidos os resultados que são apresentados na próxima seção.

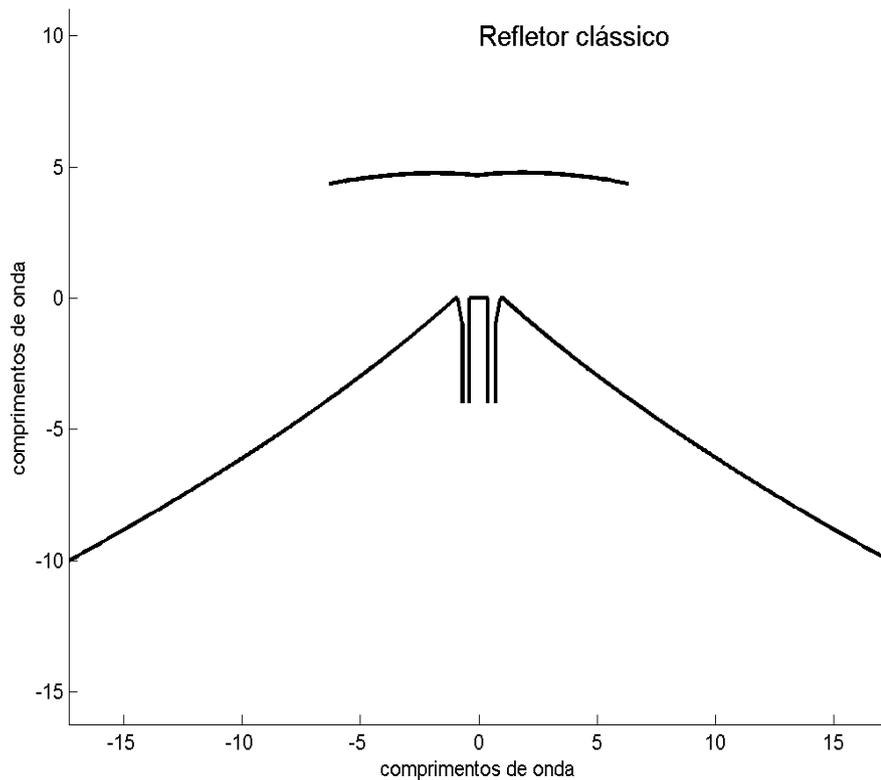
### 3.5 Resultados e Discussões

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos por meio da implementação computacional do procedimento matemático que foi apresentado

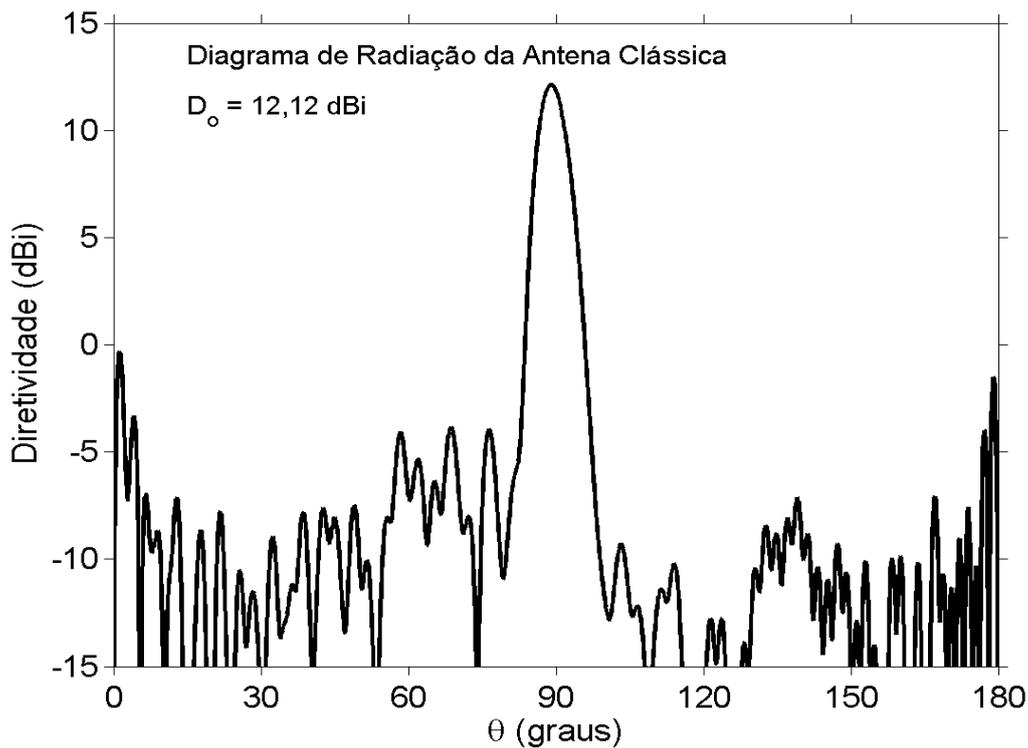
anteriormente considerando a corneta coaxial excitada pelo seu modo fundamental como modelo de alimentador.

Como a síntese do refletor principal partiu de uma configuração clássica, foi necessário determinar os parâmetros que definem de maneira única as cônicas que representam as geratrizes dos refletores clássicos da OADC. Para isso, utilizaram-se as dimensões especificadas para obter tais parâmetros. Os valores das dimensões da antena OADC, bem como dos parâmetros das cônicas já foram listados na Tabela 3-1.

A Figura 3-10 apresenta as geratrizes das cônicas que descrevem os refletores clássicos da antena OADC utilizando os valores da Tabela 3-1. Em seguida, na Figura 3-11 é exposto o diagrama de radiação para a antena OADC da Figura 3-10.



**Figura 3-10 Antena OADC clássica.**



**Figura 3-11 Diagrama de radiação da antena OADC clássica.**

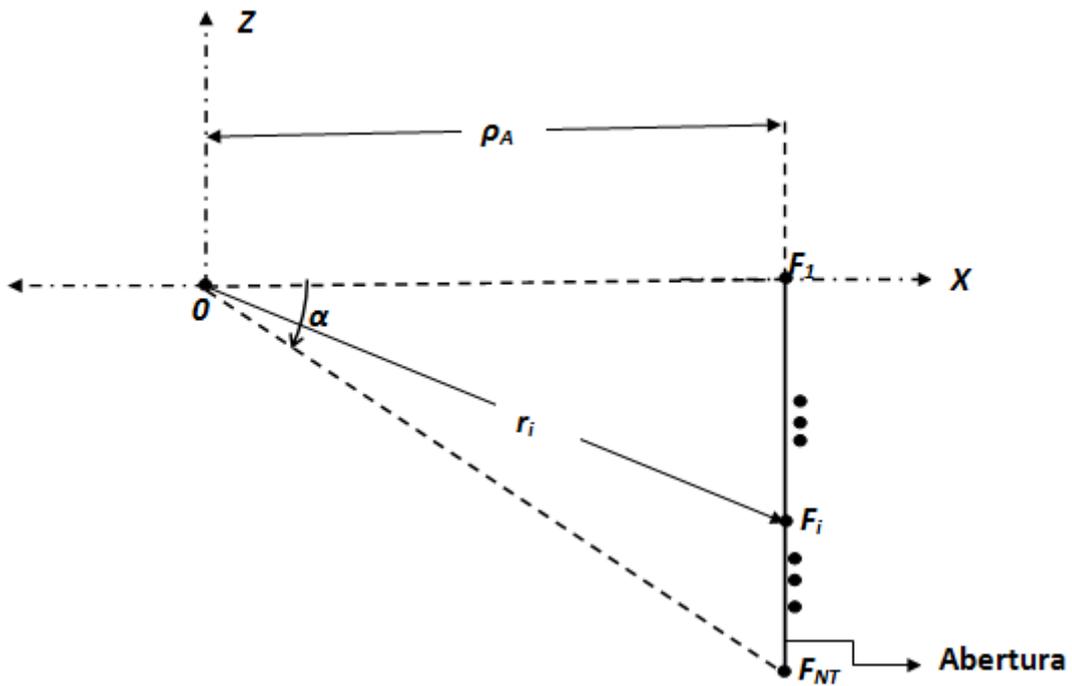
Considerou-se que o alimentador é representado por uma corneta coaxial excitada pelo seu modo fundamental com  $R_a = 0,9 \lambda$  e  $R_b = 0,4 \lambda$  [24]. A antena clássica definida na Figura 3-10 é utilizada como parâmetro de comparação na síntese do refletor principal. O diagrama de radiação é apresentado na Figura 3-11. Pelo diagrama de radiação exposto na Figura 3-11 constata-se que o MoM prevê um ganho máximo de radiação de aproximadamente 12,12 dBi em  $\theta = 90^\circ$ .

Além dos parâmetros de entrada descritos na Tabela 3-1, considerou-se que o número de seções elípticas ( $N_T$ ), o padrão de distribuição de potência especificado sobre a abertura ( $P_{Ai}$ ) e os focos  $F_i$  são também dados de entrada do algoritmo de síntese. Além disso, foi mantido o mesmo alimentador representado por uma corneta coaxial com  $R_a = 0,9 \lambda$  e  $R_b = 0,4 \lambda$ .

Nos presentes estudos de caso, o refletor principal da antena OADC clássica apresentado na Figura 3-10 foi sintetizado para fornecer um diagrama de radiação setorial. Isto significa um diagrama de radiação uniforme no seguinte setor:

$$90^\circ < \theta < 90^\circ + \alpha, \quad (3-58)$$

onde o ângulo  $\alpha$  está ilustrado na Figura 3-12.



**Figura 3-12** Definição do ângulo  $\alpha$  e distribuição dos focos  $F_i$ .

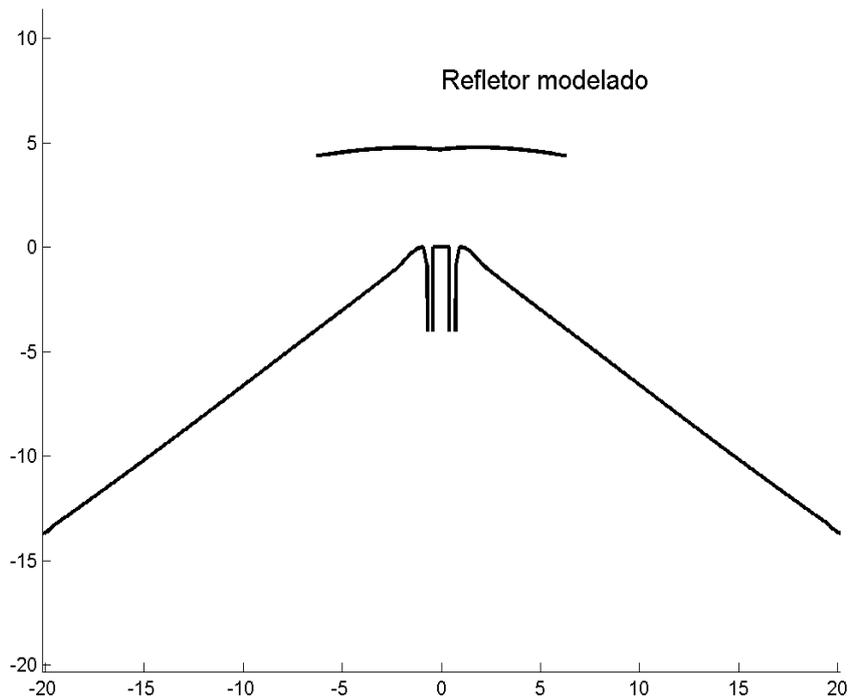
Para gerar os estudos propostos nesta seção, foram utilizados  $\alpha = 15^\circ$  e  $30^\circ$  com  $N_T = 200$  e  $\rho_A = 2000 \lambda$ . Para gerar o diagrama de radiação uniforme no setor definido em (3-58), a frente de onda refletida pelo refletor principal deve ser circular no plano de elevação da abertura ilustrada na Figura 3-12. Neste caso  $P_{A_i}$  simula uma frente de onda esférica:

$$P_{A_i} = \frac{1}{r_i^2}, \quad (3-59)$$

com  $i = 1, 2, \dots, N_T$  e  $r_i$  definido conforme a Figura 3-12. É importante enfatizar que (3-59) simula uma frente de onda esférica com densidade de potência uniforme no setor

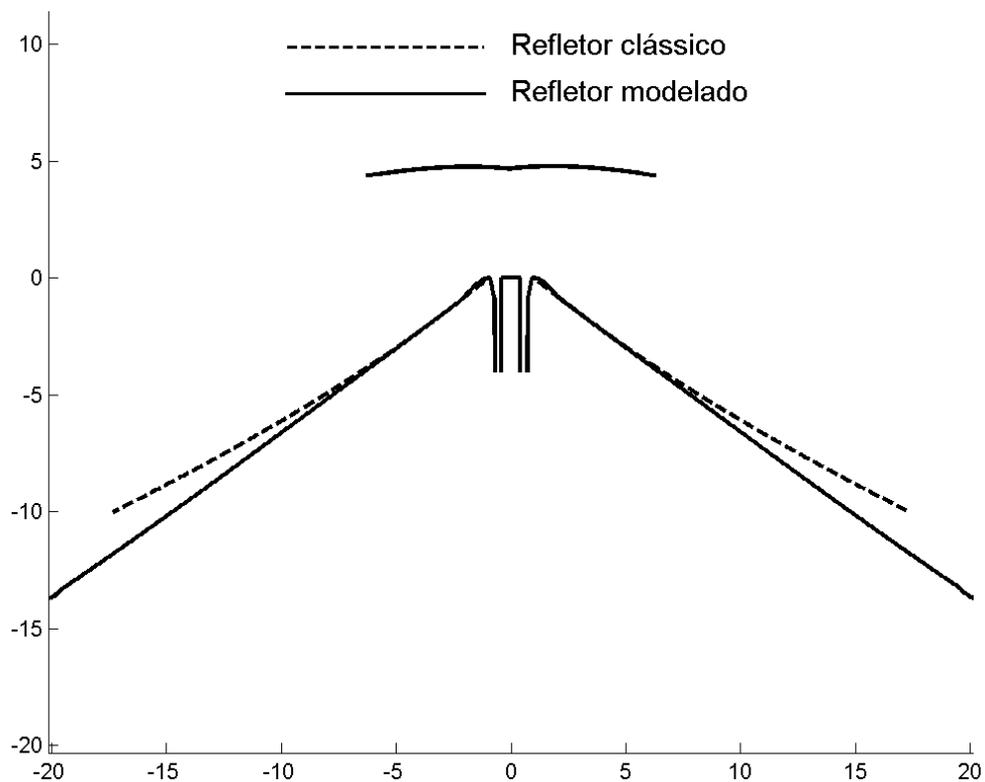
expresso em (3-58). Desta forma, a superfície do refletor principal clássico da antena OADC (veja a Figura 3-10) é substituída pelo refletor modelado. Os valores de  $P_{Ai}$  para  $\alpha = 15^\circ$  e  $30^\circ$  estão definidos no Apêndice A deste trabalho.

A Figura 3-13 apresenta a geratriz do refletor principal sintetizado para  $\alpha = 15^\circ$ , sendo mantidos o sub-refletor clássico e o alimentador da configuração mostrada na Figura 3-10.



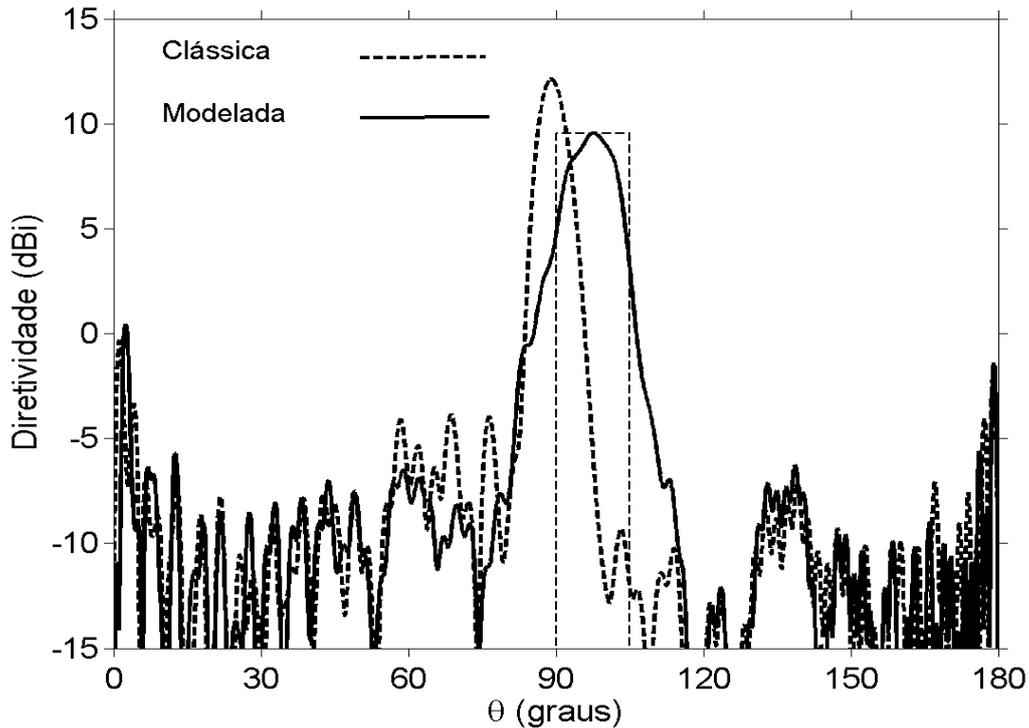
**Figura 3-13 Geratriz do refletor principal modelado para  $\alpha = 15^\circ$ .**

Em seguida, com o objetivo de desenvolver um estudo comparativo, a Figura 3-14 mostra as geratrizes que descrevem os refletores principais clássico e modelado ainda considerando-se  $\alpha = 15^\circ$ . A Figura 3-15 apresenta os diagramas de radiação obtidos para as antenas da Figura 3-14 (antenas OADC clássica e modelada). É importante enfatizar que nos dois casos de estudo aqui propostos os diagramas de radiação foram obtidos utilizando o MoM por uma ferramenta computacional já existente.



**Figura 3-14 Geratrizes dos refletores principais clássico e modelado para  $\alpha = 15^\circ$ .**

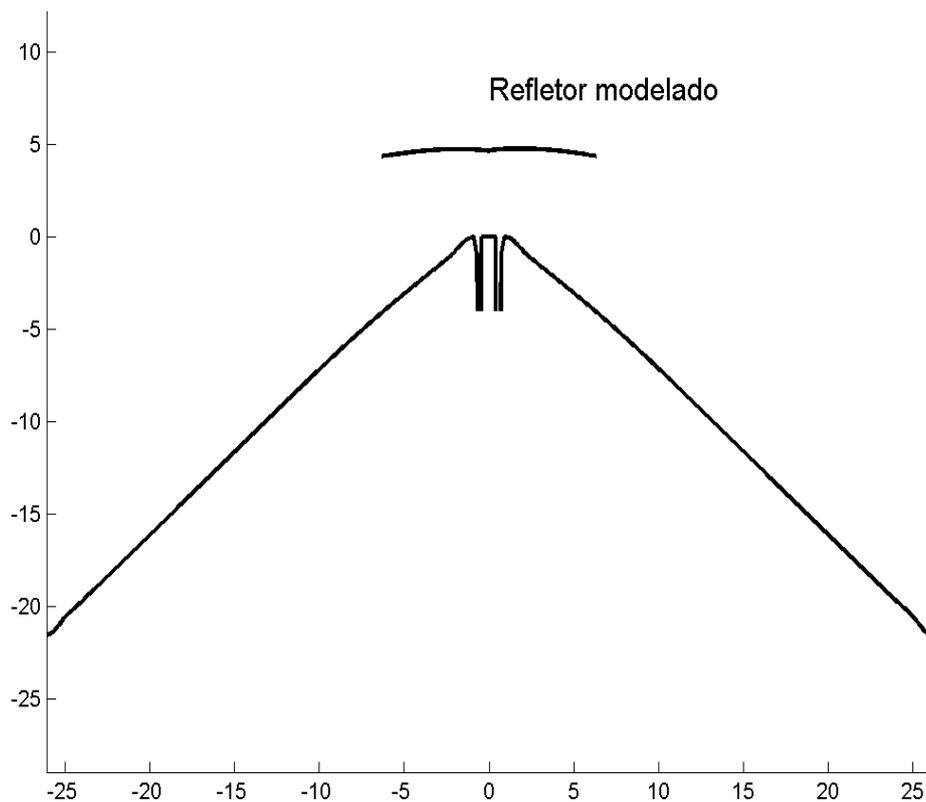
Observando a Figura 3-14, nota-se que no início das curvas geratrizes dos refletores clássico e modelado não houve muita alteração, uma vez que o primeiro ponto que define as coordenadas  $(x_{M0}, z_{M0})$  de ambos os refletores ficaram inalterados. Entretanto, ao longo das geratrizes é possível verificar que existem variações nas dimensões de tais refletores. O diâmetro do refletor clássico é  $D_M = 34,6 \lambda$  enquanto que o diâmetro da superfície sintetizada é de aproximadamente  $40,24 \lambda$ , ou seja, houve um aumento de  $5,64 \lambda$  considerado significativo. Além disso, houve um aumento também de  $W_A$  que antes do processo de síntese óptica era de  $10 \lambda$  e depois da síntese a sua medida passa a ser  $13,68 \lambda$ . Acredita-se que esse aumento aconteceu devido a abertura estar suficientemente afastada do refletor ( $\rho_A = 2000 \lambda$ ).



**Figura 3-15 Diagramas de radiação dos refletores clássico e modelado para  $\alpha = 15^\circ$ .**

Observando os diagramas de radiação da Figura 3-15 obtidos através do MoM, verifica-se que para a antena clássica o MoM prevê o máximo de radiação em  $\theta = 90^\circ$  e para o refletor modelado o máximo de radiação ocorre em aproximadamente  $\theta = 93^\circ$  dentro do setor especificado. Ainda é possível notar (Figura 3-15), considerando-se o diagrama do refletor modelado, que no setor  $90^\circ < \theta < 105^\circ$  a densidade de potência uniformizou, tornando o lóbulo principal de tal diagrama menos diretivo quando comparado com o diagrama de radiação do refletor clássico.

A Figura 3-16 apresenta a geratriz referente ao refletor principal, para o caso  $\alpha = 30^\circ$  e os mesmos parâmetros de entrada do caso anterior.

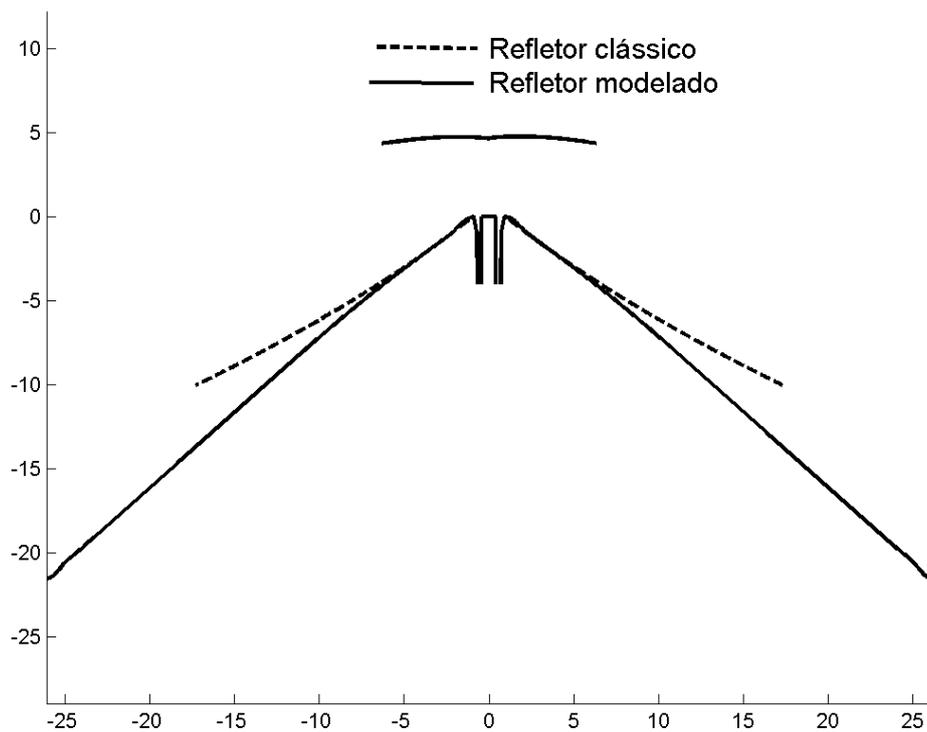


**Figura 3-16 Geratriz do refletor principal modelado para  $\alpha = 30^\circ$ .**

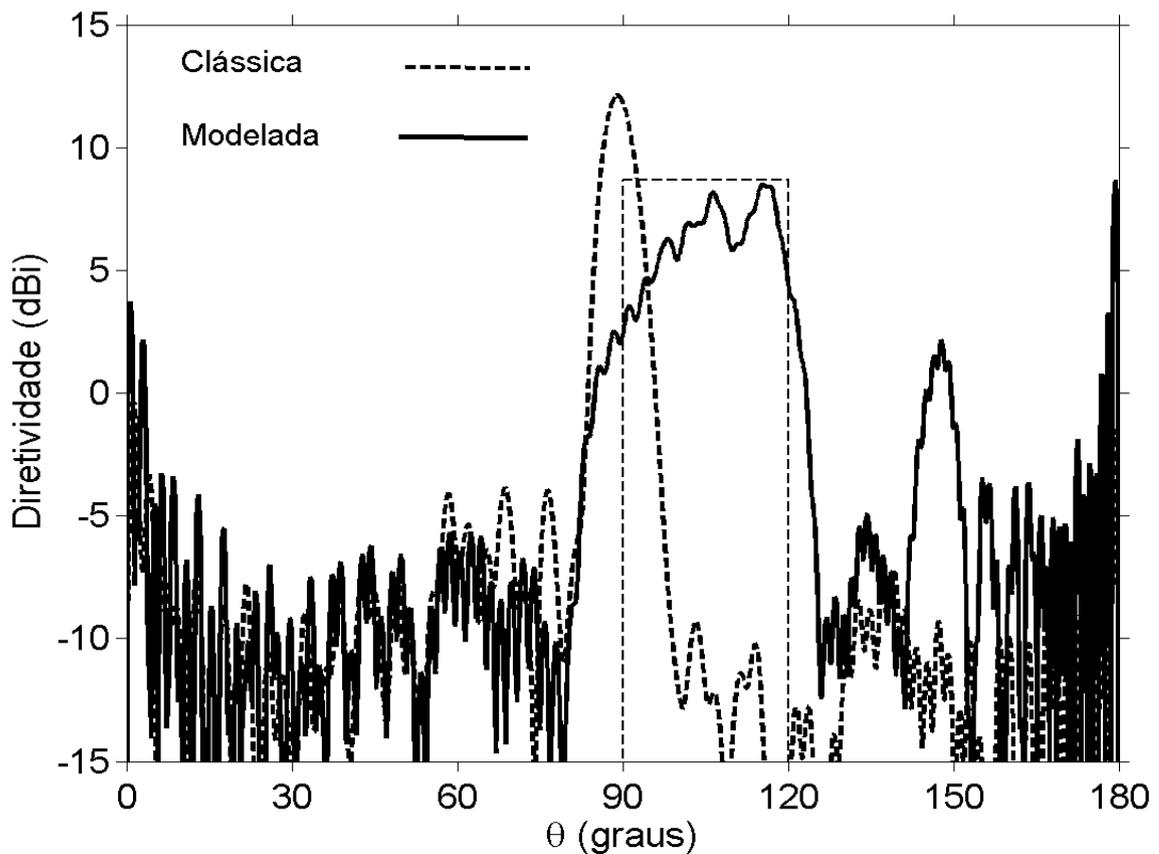
A fim de desenvolver uma análise comparativa para este caso de estudo (Figura 3-16), a Figura 3-17 apresenta as geratrizes que descrevem os refletores principais clássico e sintetizado, respectivamente. É importante lembrar que foi mantido o sub-refletor clássico, bem como a corneta coaxial da antena clássica. Na Figura 3-18 são apresentados os diagramas de radiação referentes às antenas (clássica e refletor principal sintetizado) obtidos pelo MoM.

Através da Figura 3-17 observa-se que as geratrizes referentes aos refletores clássico e modelado apresentaram o mesmo comportamento somente no início, sendo que o primeiro ponto que definem as coordenadas dos refletores (clássico e sintetizado) não sofreram alterações. No entanto, ao longo de tais superfícies houve variações de dimensões consideradas significativas, uma vez que os diâmetros dos refletores clássico e modelado são respectivamente de  $34,6 \lambda$  e  $52,2 \lambda$ , ou seja, uma diferença de  $17,9 \lambda$ . Comparando essa diferença ( $17,9 \lambda$ ) com o caso anterior ( $5,64 \lambda$ ),

percebe-se um acréscimo significativo. Isto acontece pela diferença dos ângulos  $\alpha$  nos dois casos aqui apresentados, uma vez que os parâmetros de entrada não foram alterados. Ainda comparando os refletores da Figura 3-17, observa-se que  $W_A$  também aumentou quando comparado um com o outro, sendo que tem uma diferença de  $11,5 \lambda$ , ou seja,  $W_A$  do refletor modelado passou a ser mais que o dobro quando comparado com  $W_A$  do refletor clássico.



**Figura 3-17 Geratrizes dos refletores principais clássico e modelado para  $\alpha = 30^\circ$ .**



**Figura 3-18** Diagramas de radiação dos refletores clássico e modelado para  $\alpha = 30^\circ$ .

Observando os diagramas de radiação apresentados na Figura 3-18, percebe-se que para o refletor modelado o máximo de radiação ocorre no setor  $90^\circ < \theta < 120^\circ$ . Comparando os diagramas dos refletores clássico e modelado, observa-se que o lóbulo principal referente ao diagrama do refletor modelado (linha cheia) oscilou dentro do setor previsto na síntese com  $\alpha = 30^\circ$ . Tais oscilações foram, provavelmente, causadas por efeitos difrativos que não foram considerados pela síntese óptica. Fazendo uma comparação entre os diagramas das Figuras 3-15 e 3-18, nota-se que o MoM prevê um máximo de radiação de aproximadamente 9,7 dBi para os refletores modelados utilizando  $\alpha = 15^\circ$  e  $30^\circ$ , respectivamente, o que fornece bons resultados ao procedimento de síntese aqui proposto.

### 3.6 Conclusões Parciais

A segunda etapa deste trabalho teve como principal objetivo aplicar a técnica de síntese [17]-[19] investigada no capítulo anterior a antenas duplo-refletores para cobertura omnidirecional. Desta maneira, desenvolveu-se um formalismo utilizado para sintetizar o refletor principal de uma antena OADC a fim de produzir uma cobertura específica, ou seja, um diagrama de radiação uniforme em (3-58).

Contudo, sob os princípios da GO a distribuição de potência definida sobre os focos  $F_i$  simulou uma frente de onda esférica para produzir tal cobertura. Além disso, utilizando a Lei da Conservação da Energia foi desenvolvido um algoritmo com  $N_T$  iterações para o cômputo dos ângulos do alimentador ( $\theta_{Fi}$ , com  $i = 1, 2, \dots, N_T$ ) com o intuito de obter os pontos correspondentes as coordenadas do sub-refletor clássico da OADC.

Comparando as superfícies dos refletores principais clássico e modelado considerando-se  $N_T = 200$  para dois casos de estudo ( $\alpha = 15^\circ$  e  $30^\circ$ ) foi possível constatar que os resultados obtidos foram satisfatórios. Entretanto, para  $\alpha = 15^\circ$  o diagrama de radiação se apresentou com maior uniformidade no setor especificado quando comparado com  $\alpha = 30^\circ$ , provavelmente devido a efeitos difrativos mais intensos que não foram considerados pela síntese óptica.

# Capítulo 4

---

## 4 CONCLUSÕES

O presente trabalho consistiu no desenvolvimento do formalismo necessário para sintetizar superfícies de antenas refletoras com simetria circular. A técnica numérica de síntese utilizada é a concatenação consecutiva de seções elípticas, a qual foi desenvolvida e proposta por Oliker (2006) [17]-[19]. O procedimento de síntese é feito na região de campo próximo (abertura da antena refletora), conforme [17].

Ao longo do estudo da técnica desenvolvida por Oliker (2006) [17] percebeu-se a necessidade de desenvolver um algoritmo com  $N_T$  iterações utilizando a Lei da Conservação da Energia, princípio associado à GO. Com o objetivo de ilustrar a técnica numérica de síntese adotada neste trabalho e realizar um estudo dos resultados obtidos, optou-se em modelar duas diferentes configurações de antenas refletoras com simetria circular. Neste caso, o presente estudo foi desenvolvido em duas etapas.

Na primeira etapa deste trabalho, o objetivo principal foi compreender e investigar as características da técnica numérica de síntese adotada no presente trabalho, em particular realizar um estudo da sua taxa de convergência numérica, bem como a eficiência de tal técnica. Para isso, optou-se em sintetizar um refletor que, em princípio, produza a mesma distribuição de densidade de potência na abertura de uma antena refletora parabólica alimentada pelo foco, segundo os conceitos da GO. Comparando a superfície modelada com a parabólica em função do número de seções de elipses ( $N_T$ ) utilizado através de cinco estudos de caso, percebeu-se o comportamento numérico da técnica aqui utilizada. Desta maneira, foi possível verificar que o melhor desempenho da técnica foi obtido utilizando-se um número maior elipses no processo de síntese, que neste caso foi  $N_T = 101$ , garantindo a melhor convergência numérica da técnica de síntese apresentada em [17]-[19].

Na segunda etapa deste trabalho, todo o ferramental teórico e analítico desenvolvido na primeira etapa foi estendido para sintetizar superfícies de antenas duplo-refletoras para cobertura omnidirecional. Neste caso, foi feita a síntese do refletor principal, sendo mantido o sub-refletor clássico de uma antena OADC. Para esta configuração, foi especificado um padrão de distribuição de potência uniforme sobre a abertura cilíndrica de tal antena omnidirecional, de forma a produzir um diagrama de radiação setorizado no plano de elevação da antena, segundo a GO no setor  $90^\circ < \theta < 90^\circ + \alpha$ . Para tal, foram utilizados  $\alpha = 15^\circ$  e  $30^\circ$  gerando dois casos de estudo. Para cada caso de estudo foi obtido o diagrama de radiação correspondente utilizando o MoM [36]. Os resultados apontaram boa precisão para  $\alpha = 15^\circ$ , como foi possível verificar pelo diagrama de radiação mais uniforme no setor especificado ( $90^\circ < \theta < 105^\circ$ ) quando comparado com o caso  $\alpha = 30^\circ$ .

## 4.1 Propostas para Trabalhos Futuros

Nesta seção são apresentadas algumas propostas para a continuidade do presente trabalho considerando-se a síntese de diferentes configurações geométricas de antenas refletoras.

A primeira proposta para trabalhos futuros é o desenvolvimento de uma formulação matemática para a modelagem de ambos refletores de uma configuração duplo-refletora omnidirecional. O objetivo é aplicar a técnica numérica apresentada em [17] dando continuidade ao formalismo desenvolvido e apresentado na Seção 3.4 deste trabalho. A formulação deve ser abrangente, estendendo o formalismo para a modelagem simultânea do refletor principal e do sub-refletor para as outras três configurações omnidirecionais (OADG, OADE e OADH). Outra opção para a continuidade deste trabalho é desenvolver ferramentas teórica e analítica para sintetizar o refletor principal e o sub-refletor de antenas duplo-refletoras do tipo *offset*.

## 5 REFERÊNCIAS

- [1] H. Hertz, *Electric Waves.*: Macmillan and Co., Ltd, London, 1893.
- [2] W. A. Imbriale, "Evolution of the Large Deep Space Network Antennas," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 33, no. 6, pp. 7-19, December 1991.
- [3] W. L. Stutzman and G. A. Thiele, *Antennas Theory and Design*, 3rd ed.: John Wiley and Sons, New York, 2012.
- [4] C. A. Balanis, *Antennas Theory: Analysis and Design*, 3rd ed.: John Wiley and Sons, New York, 2005.
- [5] R. E. Collin, *Antennas and Radiowave Propagation.*: Mc Graw-Hill, International Student Edition, 1985.
- [6] V. Galindo-Israel, "Design of Dual-Reflector Antennas with Arbitrary Phase and Amplitude Distributions," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 12, no. 4, pp. 403-408, July 1964.
- [7] F. Brickell and B. S. Westcott, "Reflector Design as an Initial-Value Problem," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 24, no. 4, pp. 531-533, July 1976.
- [8] V. Galindo-Israel and R. Mittra, "Synthesis of Offset Dual Shaped Subreflector Antennas of Control of Cassegrain Aperture Distributions," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 32, no. 1, pp. 86-92, 1984.
- [9] W. A. Imbirale, R. Mittra and V. Galindo-Israel, "On the Theory of the Synthesis of Single and Dual Offset Shaped Reflector Antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 35, no. 8, pp. 887-896, August 1987.
- [10] A. Prata, Jr., J. R. Bergmann and F. J. S. Moreira, "GO Shaping of Omnidirectional Dual-Reflector Antennas for a Prescribed Equi-Phase Aperture Field Distribution," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 1, pp. 99-106, January 2007.
- [11] J. R. Bergmann and F. J. S. Moreira, "Omnidirectional ADE antenna with GO-shaped main reflector for arbitrary far-field pattern in the elevation plane," *IET Microwave Antennas and Propagation*, vol. 3, no. 5, pp. 1028-1035, October 2009.
- [12] F. A. Stevens and F. Brickell B. S. Westcoot, "GO synthesis of offset dual reflectors," *IEEE PROC*, vol. 28, no. 1, pp. 11-18, February 1981.

- [13] P. Guan and X.-J. Wang, "On a Monge-Ampère Equation arising in Geometric Optics," *Jornal Differential Geometry*, vol. 48, pp. 205-233, 1998.
- [14] F. J. S. Moreira and J. R. Bergmann, "Shaping Axis-Symmetric Dual-Reflector Antennas by Combining Conic Sections," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 59, no. 3, pp. 1042-1046, March 2011.
- [15] JR. A. Penchel, J. R. Bergmann and F. J. S. Moreira, "Main-Reflector Shaping of Omnidirectional Dual Reflectors Using Local Conic Sections," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 68, no. 8, pp. 4379-4383, August 2013.
- [16] C. Canavessi, W. J. Cassarly and J. P. Rolland, "Direct calculation algorithm for two-dimensional reflector design," *Optics Letters*, vol. 2, pp. 531-533, 2012.
- [17] V. I. Oliker, "A Rigorous Method for Synthesis of Offset Shaped Reflector Antennas," *Computing Letters*, vol. 2, pp. 24-49, 2006.
- [18] V. I. Oliker and S. A. Kochengin, "Computational algorithms for constructing reflectors," *Computing and Visualization in Science*, vol. 6, pp. 15-21, 2006.
- [19] V. I. Oliker and S. A. Kochengin, "Determination of reflector surfaces from near-field scattering data II," *Numerical Solutions*, vol. 79, no. 4, pp. 553-568, 1998.
- [20] R. A. Penchel, J. R. Bergmann and F. J. S. Moreira, "Síntese Óptica de Antenas Refletoras Offset Utilizando Superfícies Cônicas com Eixos Deslocados," in *MOMAG 2014 (16o. Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica e 11o. Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo)*, Curitiba, PR, Setembro de 2014, pp. 869-872.
- [21] T. V. B. Faria e F. J. S. Moreira, "Modelagem de Antenas Refletoras Circularmente Simétricas através da Concatenação de Seções de Elipses," in *MOMAG 2014 (16o. Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica e 11o. Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo)*, Curitiba, PR, Setembro de 2014, pp. 85-89.
- [22] J. R. Bergmann and F. J. S. Moreira, "Simple Design Equations for Omnidirectional Axis-Displaced Dual-Reflector Antennas," *Microwave and Technology Letters*, vol. 45, no. 2, pp. 159-163, April 2005.
- [23] Rafael Abrantes Penchel, Modelagem Geométrica de Antenas Duplo-Refletoras para Cobertura Omnidirecional, Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFMG, Dezembro 2009.
- [24] F. J. S. Moreira and J. R. Bergmann, "Classical Axis-Displaced Dual-Reflector Antennas Omnidirectional Coverage," *IEEE Transactions on Antennas and*

*Propagation*, vol. 53, no. 9, pp. 2799-2808, September 2005.

- [25] J. D. Kraus, "Reflector Antennas and Their Feed Systems," in *Antennas*: McGraw-Hill, 1988, ch. 12, pp. 543-621.
- [26] A. C. Ludwig, "The Definition of Cross Polarization," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-21, pp. 116-119, January 1973.
- [27] W. V. T. Rusch P. H. Potter, *Analysis of Reflector Antennas*: New York Academic Press, 1970.
- [28] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, 1964, U. S. Dept. of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Series, no. 55.
- [29] Carlos Henrique Nogueira de Resende Barbosa, *Estudo e Análise de Aberrações em Antenas com Duplo-Refletor Axialmente Simétricos*, Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFMG, Maio 2002.
- [30] S. Silver, *Microwave Antennas Theory and Design*: McGraw-Hill, 1949.
- [31] Jr. S. Johns and A. Prata, "An Improved Raised-Cosine Feed Model of Reflector Antennas Applications," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, pp. 970-973, 1994.
- [32] W. Carvalho et al., "Síntese e Análise de Antenas de Duplo-Refletores Clássicos para Cobertura Omnidirecional," in *XI Simpósio Brasileiro De Microondas e Optoeletrônica (MOMAG 2004)*, Sao Paulo, SP, Agosto 2004.
- [33] F. J. S. Moreira and A. Prata, Jr., "Generalized classical axially symmetric dual-reflector antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 49, pp. 547-554, 2001.
- [34] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Field*: McGraw-Hill, New York, 1961.
- [35] A. M. A. Acuña and J. O. R. Lopez A. G. Pino, "An omnidirectional dual-shaped reflector antennas," *Microwave and Optoelectronic Technology Letters*, vol. 27, no. 5, pp. 371-374, 2000.
- [36] Fernando José da Silva Moreira, *Design and Rigorous Analysis of Generalized Axially-Symmetric Dual-Reflector Antennas*, Ph.D. Thesis, University of Southern California, Los Angeles, 1997.

## APÊNDICE A: Valores de $P_{Ai}$

Apêndice A.1: Valores de  $P_{Ai}$  considerando-se  $\rho_A = 2000 \lambda$   
e  $\alpha = 15^\circ$

Valores de $P_{Ai}$ (W) considerando $\alpha = 15^\circ$
3.6689244e-03
3.6689178e-03
3.6688978e-03
3.6688646e-03
3.6688180e-03
3.6687581e-03
3.6686850e-03
3.6685985e-03
3.6684988e-03
3.6683857e-03
3.6682594e-03
3.6681197e-03
3.6679668e-03
3.6678006e-03
3.6676212e-03
3.6674284e-03
3.6672224e-03
3.6670031e-03
3.6667705e-03
3.6665247e-03
3.6662657e-03
3.6659933e-03
3.6657078e-03
3.6654090e-03

3.6650970e-03  
3.6647718e-03  
3.6644333e-03  
3.6640817e-03  
3.6637168e-03  
3.6633388e-03  
3.6629476e-03  
3.6625432e-03  
3.6621256e-03  
3.6616949e-03  
3.6612511e-03  
3.6607941e-03  
3.6603239e-03  
3.6598407e-03  
3.6593444e-03  
3.6588349e-03  
3.6583124e-03  
3.6577768e-03  
3.6572281e-03  
3.6566664e-03  
3.6560916e-03  
3.6555039e-03  
3.6549031e-03  
3.6542893e-03  
3.6536625e-03  
3.6530227e-03  
3.6523700e-03  
3.6517044e-03  
3.6510258e-03  
3.6503343e-03  
3.6496299e-03

3.6489126e-03

3.6481824e-03

3.6474394e-03

3.6466835e-03

3.6459148e-03

3.6451333e-03

3.6443390e-03

3.6435320e-03

3.6427122e-03

3.6418796e-03

3.6410343e-03

3.6401763e-03

3.6393057e-03

3.6384223e-03

3.6375264e-03

3.6366177e-03

3.6356965e-03

3.6347627e-03

3.6338163e-03

3.6328574e-03

3.6318859e-03

3.6309020e-03

3.6299055e-03

3.6288966e-03

3.6278752e-03

3.6268414e-03

3.6257952e-03

3.6247366e-03

3.6236656e-03

3.6225823e-03

3.6214867e-03

3.6203789e-03

3.6192587e-03

3.6181263e-03

3.6169817e-03

3.6158248e-03

3.6146558e-03

3.6134747e-03

3.6122814e-03

3.6110761e-03

3.6098586e-03

3.6086291e-03

3.6073876e-03

3.6061341e-03

3.6048686e-03

3.6035912e-03

3.6023018e-03

3.6010006e-03

3.5996875e-03

3.5983625e-03

3.5970258e-03

3.5956772e-03

3.5943169e-03

3.5929449e-03

3.5915611e-03

3.5901657e-03

3.5887587e-03

3.5873400e-03

3.5859097e-03

3.5844679e-03

3.5830146e-03

3.5815497e-03

3.5800734e-03

3.5785857e-03

3.5770865e-03

3.5755760e-03

3.5740541e-03

3.5725208e-03

3.5709763e-03

3.5694206e-03

3.5678536e-03

3.5662754e-03

3.5646861e-03

3.5630856e-03

3.5614740e-03

3.5598514e-03

3.5582177e-03

3.5565731e-03

3.5549174e-03

3.5532508e-03

3.5515734e-03

3.5498850e-03

3.5481858e-03

3.5464758e-03

3.5447550e-03

3.5430235e-03

3.5412813e-03

3.5395284e-03

3.5377649e-03

3.5359908e-03

3.5342061e-03

3.5324109e-03

3.5306052e-03

3.5287890e-03  
3.5269624e-03  
3.5251254e-03  
3.5232781e-03  
3.5214204e-03  
3.5195525e-03  
3.5176743e-03  
3.5157859e-03  
3.5138873e-03  
3.5119785e-03  
3.5100597e-03  
3.5081308e-03  
3.5061919e-03  
3.5042430e-03  
3.5022841e-03  
3.5003153e-03  
3.4983366e-03  
3.4963481e-03  
3.4943497e-03  
3.4923416e-03  
3.4903238e-03  
3.4882962e-03  
3.4862590e-03  
3.4842122e-03  
3.4821558e-03  
3.4800899e-03  
3.4780144e-03  
3.4759295e-03  
3.4738352e-03  
3.4717315e-03  
3.4696184e-03

3.4674960e-03

3.4653643e-03

3.4632234e-03

3.4610733e-03

3.4589141e-03

3.4567457e-03

3.4545683e-03

3.4523818e-03

3.4501863e-03

3.4479818e-03

3.4457685e-03

3.4435462e-03

3.4413152e-03

3.4390753e-03

3.4368266e-03

3.4345693e-03

3.4323032e-03

3.4300286e-03

3.4277453e-03

3.4254534e-03

3.4231531e-03

**Apêndice A.2: Valores de  $P_{Ai}$  considerando-se  $\rho_A = 2000 \lambda$   
e  $\alpha = 30^\circ$**

**Valores de  $P_{Ai}$  (W) considerando  $\alpha = 30^\circ$**

3.9532008e-03  
3.9531675e-03  
3.9530677e-03  
3.9529013e-03  
3.9526684e-03  
3.9523691e-03  
3.9520032e-03  
3.9515710e-03  
3.9510723e-03  
3.9505073e-03  
3.9498761e-03  
3.9491786e-03  
3.9484149e-03  
3.9475853e-03  
3.9466896e-03  
3.9457280e-03  
3.9447006e-03  
3.9436076e-03  
3.9424489e-03  
3.9412248e-03  
3.9399354e-03  
3.9385807e-03  
3.9371609e-03  
3.9356762e-03  
3.9341267e-03  
3.9325126e-03

3.9308340e-03  
3.9290911e-03  
3.9272840e-03  
3.9254130e-03  
3.9234782e-03  
3.9214799e-03  
3.9194181e-03  
3.9172932e-03  
3.9151053e-03  
3.9128546e-03  
3.9105414e-03  
3.9081659e-03  
3.9057284e-03  
3.9032289e-03  
3.9006679e-03  
3.8980455e-03  
3.8953621e-03  
3.8926178e-03  
3.8898129e-03  
3.8869477e-03  
3.8840225e-03  
3.8810376e-03  
3.8779932e-03  
3.8748896e-03  
3.8717272e-03  
3.8685062e-03  
3.8652269e-03  
3.8618896e-03  
3.8584948e-03  
3.8550425e-03  
3.8515333e-03

3.8479675e-03  
3.8443452e-03  
3.8406670e-03  
3.8369331e-03  
3.8331439e-03  
3.8292997e-03  
3.8254010e-03  
3.8214479e-03  
3.8174410e-03  
3.8133805e-03  
3.8092668e-03  
3.8051004e-03  
3.8008816e-03  
3.7966107e-03  
3.7922881e-03  
3.7879143e-03  
3.7834896e-03  
3.7790144e-03  
3.7744891e-03  
3.7699141e-03  
3.7652898e-03  
3.7606167e-03  
3.7558950e-03  
3.7511252e-03  
3.7463078e-03  
3.7414432e-03  
3.7365316e-03  
3.7315737e-03  
3.7265698e-03  
3.7215203e-03  
3.7164256e-03

3.7112862e-03

3.7061025e-03

3.7008750e-03

3.6956040e-03

3.6902900e-03

3.6849335e-03

3.6795348e-03

3.6740944e-03

3.6686128e-03

3.6630904e-03

3.6575276e-03

3.6519249e-03

3.6462827e-03

3.6406014e-03

3.6348816e-03

3.6291236e-03

3.6233280e-03

3.6174951e-03

3.6116254e-03

3.6057193e-03

3.5997773e-03

3.5937999e-03

3.5877875e-03

3.5817406e-03

3.5756595e-03

3.5695448e-03

3.5633970e-03

3.5572163e-03

3.5510034e-03

3.5447586e-03

3.5384824e-03

3.5321753e-03

3.5258377e-03

3.5194700e-03

3.5130728e-03

3.5066464e-03

3.5001913e-03

3.4937079e-03

3.4871967e-03

3.4806581e-03

3.4740927e-03

3.4675007e-03

3.4608827e-03

3.4542391e-03

3.4475704e-03

3.4408769e-03

3.4341591e-03

3.4274175e-03

3.4206525e-03

3.4138645e-03

3.4070540e-03

3.4002213e-03

3.3933670e-03

3.3864914e-03

3.3795950e-03

3.3726781e-03

3.3657413e-03

3.3587849e-03

3.3518094e-03

3.3448151e-03

3.3378025e-03

3.3307720e-03

3.3237241e-03

3.3166590e-03

3.3095773e-03

3.3024793e-03

3.2953654e-03

3.2882361e-03

3.2810917e-03

3.2739327e-03

3.2667593e-03

3.2595721e-03

3.2523714e-03

3.2451576e-03

3.2379311e-03

3.2306922e-03

3.2234414e-03

3.2161790e-03

3.2089055e-03

3.2016211e-03

3.1943262e-03

3.1870212e-03

3.1797066e-03

3.1723825e-03

3.1650495e-03

3.1577078e-03

3.1503579e-03

3.1430000e-03

3.1356345e-03

3.1282618e-03

3.1208822e-03

3.1134961e-03

3.1061038e-03

3.0987055e-03

3.0913018e-03

3.0838928e-03

3.0764790e-03

3.0690606e-03

3.0616380e-03

3.0542115e-03

3.0467814e-03

3.0393480e-03

3.0319117e-03

3.0244727e-03

3.0170313e-03

3.0095879e-03

3.0021428e-03

2.9946962e-03

2.9872485e-03

2.9797999e-03

2.9723507e-03

2.9649013e-03